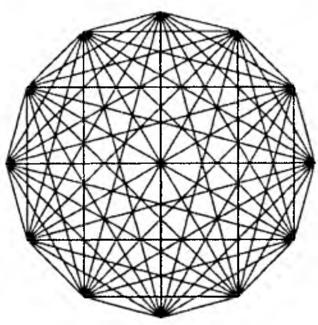
O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

O‘RTA MAXSUS, KASB-HUNAR TA’LIMI MARKAZI

A. S. Yunusov, S. I. Afonina, M. A. Berdiqulov, D. I. Yunusova

QIZIQARLI MATEMATIKA VA OLIMPIADA MASALALARI

Akademik litsey, kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma



„O‘QITUVCHI“ NASHRIYOT-MATBAA IJODIY UYI
TOSHKENT — 2007

ББК 22.1 z 722

Taqrizchilar:

Q. M. IBODULLAYEV — O'zMU qoshidagi S. X. Sirojiddinov nomli akademik litsey direktori, fizika-matematika fanlari nomzodi;

Y.E. NIZAMOVA — Iqtisodga ixtisoslashgan Respublika litseyi direktori, oliy toifali matematika o'qituvchisi;

D. DAVLETOV — Nizomiy nomidagi TDPU „Matematika va uni o'qitish metodikasi" kafedrasi o'qituvchisi.

Fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent **D. I. YUNUSOVA** tahriri ostida.

Ushbu o'quv qo'llanma akademik litsey, kasb-hunar kollejlari o'quvchilari va o'qituvchilari, oliy o'quv yurtlarining talabalari, matematika faniga qiziquvchilar uchun yozilgan.

O'quv qo'llanmada matematikaning turli tadbiqlariga, qiziqarli matematikaga va olimpiada masalalariga oid materiallar berilgan.

$Y\frac{4306020500-119}{353(04)-2007}$ — Qat'iy buyrt. — 2007

ISBN 978-9943-02-108-2

SO‘ZBOSHI

Agar o‘quvchi, hech bo‘lmaganda bir marta o‘zi mustaqil ravishda birorta matematik masalani hal qilsa, u albatta, unutilmas hayajonli damlarni boshidan kechiradi va g‘alaba nashidasini suradi. Bunday „kichik“ g‘alabalar, ayniqsa bolalik chog‘ida yuz bersa, inson bu onlarni hayotining oxirigacha xotirasida saqlab qoladi.

O‘quvchilar ustozlari bilan birgalikda birorta qiziqarli masalani hal etib, uni to‘liq o‘zlashtirib olganlaridan so‘ng, mustaqil ravishda masala yechish, matematika bilan shug‘ullanish xuddi tennis o‘ynash yoki futbol o‘ynash kabi maroqli bo‘lishi mumkinligini anglashlari mumkin. Natijada, ajab emas, ular matematika bilan butun umr do‘stlashib qolishsa, yoki hayotlarida matematikani o‘zlariga kasb qilib olishsa, yoki matematika ko‘p ishlatiladigan kasb egasi bo‘lishsa!

Ushbu o‘quv qo‘llanmaning qiziqarli matematika va olimpiada masalalari deb atalishi bejiz emas. Matematika fani, B. Paskal aytganidek, o‘ta jiddiy fan bo‘lib, uni ozgina bo‘lsa ham qiziqarli qilish imkoniyatlarini qo‘ldan boy bermaslik zarur. Hozirda akademik litsey o‘quv rejasiga shu nom bilan ataluvchi predmet kiritilganligi bunday o‘quv qo‘llanmani yozish zaruriyatini keltirib chiqardi.

Albatta, qiziqarli matematikadan bundan oldin ham juda ko‘plab kitoblar yozilgan. Ayniqsa yosh matematiklarni tarbiyalashda A. A’zamov va B. Haydarovlarning „Matematika sayyorasi“, Y. Perelmanning „Qiziqarli matematika“, M. Gardnerning „Математические чудеса и тайны“ va h.k. kitoblarning ahamiyati katta.

Ushbu o‘quv qo‘llanma ham yoshlarning matematikaga qiziqishlarini uyg‘otishga ozgina bo‘lsa ham xizmat qilsa, mualliflar o‘z maqsadlariga erishgan bo‘lar edilar.

Mualliflar ushbu qo‘llanmani nashrga tayyorlashda qimmatli maslahatlarini ayamagan O‘zMU dotsenti N. Abdullayevga, TDPU dotsenti A. Qulmatovga va professor N. Sherboyevga o‘z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

I BOB. SONLAR NAZARIYASIDAN QISQACHA MA'LUMOT

1-§. NATURAL SONLAR

Ma'lumki, sanash uchun 1, 2, ... natural sonlar ishlatiladi. $N=\{1, 2, ...\}$ to'plam esa *natural sonlar to'plami* deyiladi.

Agar a va b natural sonlar uchun shunday q natural son topilib, $a = b \cdot q$ shart bajarilsa, u holda a natural son b natural songa *bo'linadi* deymiz va $a \vdots b$ ko'rinishda belgilaymiz. Faqat ikkita har xil natural bo'luvchiga ega bo'lgan natural son *tub son* deyiladi. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, masalan, 2, 3, 5 sonlari tub sonlar bo'lib, 1, 4, 6 sonlari tub sonlar emas. Haqiqatan ham, 2, 3, 5 sonlari faqat 1 ga va o'ziga bo'linadi; 1 esa faqat o'ziga bo'linadi; 4 ning barcha natural bo'luvchilari 1, 2, 4; 6 ning barcha natural bo'luvchilari 1, 2, 3, 6 lardan iborat. Agar natural sonning turli natural bo'luvchilarining soni 3 va undan ortiq bo'lsa, bunday natural son *murakkab natural son* deyiladi. Demak, 4, 6 sonlari murakkab natural sonlar, 1 esa na tub, na murakkab son ekan. 1 ni ko'paytirish amaliga nisbatan *neytral element* deymiz.

Shunday qilib, har bir natural son yoki tub son, yoki murakkab son, yoki 1 ga teng bo'lar ekan.

T e o r e m a . *Deylik, a — birdan farqli natural son bo'lsin. U holda uning birdan katta eng kichik natural bo'luvchisi tub sondir.*

I s b o t . Haqiqatan ham, agar $a \vdots m$ bo'lib, m — murakkab son bo'lsa, m ning p bo'luvchisi bo'lib, $p < m$ va $p \neq 1$. U holda $a \vdots m$ va $a \vdots p$ shartlardan $a \vdots p$ munosabat kelib chiqadi. Bu esa m — birdan katta eng kichik natural bo'luvchi degan shartga zid, demak, m — tub son.

Xulosa. Bu teoremadan agar a murakkab son bo'lsa, a ning albatta bitta $\sqrt{a}$ dan katta bo'lmagan tub bo'luvchisi bor bo'lishi kelib chiqadi.

Haqiqatan ham, a – murakkab son, p esa uning birdan katta eng kichik tub bo'luvchisi bo'lsin. U holda shunday q son topilib, $a = pq \geq p^2$ yoki $p \leq \sqrt{a}$ kelib chiqadi.

Demak, birdan katta a natural son tub son bo'lishi uchun $p \leq \sqrt{a}$ tub sonlarning birortasiga ham bo'linmasligi yetarli.

Masalan, 101 tub son bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash uchun uni $\sqrt{101}$ dan kichik bo'lgan 2, 3, 5, 7 tub sonlarga bo'lib ko'ramiz. 101 bu sonlarning birortasiga ham bo'linmaydi, demak, 101 tub son ekan.

Evklid teoremasi. *Tub sonlar to'plami cheksiz to'plamdir.*

Isbot. Haqiqatan ham, barcha tub sonlar to'plami $P = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ chekli to'plamdan iborat bo'lsin. U holda $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k + 1$ natural son P to'plamga tegishli bo'lmagan tub son bo'lishi ko'rinib turibdi. Chunki bu son $p_1, p_2, ..., p_k$ tub sonlarning birortasiga ham bo'linmaydi.

Misol. 397, 401, 403, 409, 677, 697, 701 sonlaridan biri murakkab son bo'lishini ko'rsating.

Matematik induksiya metodi. Agar bizga n natural songa bog'liq biror bir $F(n)$ tasdiq berilgan bo'lsa, ko'p hollarda bu tasdiqning isboti *matematik induksiya metodi* deb yuritiladigan usulda isbot qilinadi. Shu usulga qisqacha to'xtalib o'tamiz.

Faraz qilaylik, n ($n \geq p$, p — tayinlangan) natural son va $F(n)$ tasdiq berilgan bo'lsin.

Matematik induksiya metodi bilan isbot qilish quyidagi uch bosqichdan iborat.

Induksiya bazisi. $F(n)$ tasdiq $n = p$ uchun to'g'ri bo'lishi isbot qilingan bo'lsin.

Induksiya farazi. $F(k)$ tasdiq barcha $h > k \geq p$ natural sonlar uchun to'g'ri deb faraz qilinadi.

Yakuniy bosqich. $F(k)$ tasdiqning n dan kichik barcha k lar uchun to'g'riligidan n uchun ham to'g'ri bo'lishi keltirib chiqariladi.

Misol. Har qanday n natural son uchun

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ tenglik o'rinli ekanligini isbotlang.

Yechish. 1. $n = 1$ bo'lganda, $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$, $1 = 1$. Ya'ni tenglik o'rinli.

2. $n=k$ uchun $1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ tenglik o'rinli deb faraz qilamiz.

3. $n=k+1$ uchun tenglik o'rinli ekanligini isbotlaymiz:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Farazga ko'ra,

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

U holda $\frac{k(k+1)\ (2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right)=$

$$=(k+1)\frac{2k^2+k+6k+6}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}.$$

$2k^2+7k+6$ kvadrat uchhadni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$2k^2+7k+6=(k+2)(2k+3).$$

Bundan

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)+1)(2k+3)}{6} \text{ yoki}$$

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

kelib chiqadi. Demak, berilgan tenglik har qanday natural son uchun o'rinli ekan.

2- §. ARIFMETIKANING ASOSIY TEOREMASI

T e o r e m a . *Har qanday natural son yoki birga teng, yoki tub son, yoki ko'paytuvchilari tartibigacha aniqlikda yagona usulda tub sonlar ko'paytmasiga yoyiladi.*

I s b o t . Matematik induksiya metodi bilan isbot qilamiz.

1 - b o s q i c h . Induksiya bazisi $n=1$ bo'lsin. U holda teorema isbot bo'ldi.

2 - b o s q i c h . Har qanday $1 \le k < n$ uchun teorema to'g'ri bo'lsin. Ya'ni k yoki 1 ga teng, yoki tub son, yoki ko'paytuvchilari tartibigacha yagona usulda tub sonlar ko'paytmasiga yoyiladi.

3 - b o s q i c h . Agar n tub son bo'lsa, isbot tamom. Agar n murakkab son bo'lsa, u holda $1 < a < n$ va $1 < b < n$ shartlarni qanoatlantiradigan shunday natural sonlar mavjud bo'lib, $n=a\cdot b$ induksiya faraziga ko'ra a, b lar tub sonlar yoki ko'paytuvchilari tartibigacha aniqlikda yagona usulda tub sonlar

ko'paytmasiga yoyiladi. Agar a, b lar tub sonlar bo'lsa, isbot tugaydi. Aks holda $a = p_1 \cdot ... \cdot p_k$, $b = p_{k+1} \cdot ... \cdot p_m$ bo'lib, $n = p_1 \cdot ... \cdot p_k \cdot p_{k+1} \cdot ... \cdot p_m$. Endi bu yoyilma yagona ekanligini isbot qilamiz. Faraz qilaylik, $n = q_1 \cdot ... \cdot q_s$ tenglik n ning boshqa yoyilmasi bo'lsin. Bundan $n = p_1 \cdot ... \cdot p_m = q_1 \cdot ... \cdot q_s$ kelib chiqadi. Bu tenglikning ikkala tomonini p_1 ga bo'laylik. U holda p_1 va $q_1, ..., q_s$ lar tub sonlar bo'lganligi uchun $q_1, ..., q_s$ lardan biri p_1 ga teng. Aniqlik uchun $p_1 = q_1$ bo'lsin. U holda $p_2 \cdot ... \cdot p_m = q_2 \cdot ... \cdot q_s$. Bu yoyilmalar n dan kichik sonlarning yoyilmalari bo'lganligi uchun, induksiya faraziga ko'ra, ko'paytuvchilari tartibigacha yagona.

n natural sonni tub ko'paytuvchilarga yoyganimizda, p_1 tub son yoyilmada α_1 marta, p_2 tub son α_2 marta va hokazo, p_m tub son α_m marta uchrasin. U holda $n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}$ ifoda n natural sonning *kanonik yoyilmasi* deyiladi. Kanonik yoyilmada tub ko'paytuvchilarni o'sish tartibida joylashtirsak, yoyilma yagona bo'lishi ravshan.

3- §. SONLI FUNKSIYALAR

$\tau(n)$ va $\sigma(n)$ funksiyalar. $\tau(n)$ orqali n natural sonning barcha natural bo'luvchilari sonini, $\sigma(n)$ orqali n natural sonning barcha natural bo'luvchilari yig'indisini belgilaymiz.

Masalan, 6 ning natural bo'luvchilari 1, 2, 3, 6 sonlardan iborat. Demak, $\tau(6) = 4$ va $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

Agar $n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}$ tenglik n natural sonning tub bo'luvchilarga kanonik yoyilmasi bo'lsa, u holda

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_m + 1).$$

Haqiqatan ham, n ning har qanday q bo'luvchisi

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k}, \quad 1 \le \beta_1 \le \alpha_1, \quad 1 \le \beta_2 \le \alpha_2, ..., \quad 1 \le \beta_k \le \alpha_k$$

ko'rinishda bo'lishi ravshan. β_1 ni $(\alpha_1 + 1)$ usulda, β_2 ni $(\alpha_2 + 1)$ usulda va h.k., β_k ni $(\alpha_k + 1)$ usulda tanlab olishimiz mumkin bo'lgani uchun $\beta_1, ..., \beta_k$ larni $(\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)$ ta usulda tanlash imkoniyati bor. Natural son barcha natural bo'luvchilarining yig'indisi

$$\sum_{\substack{1\le\beta_1\le\alpha_1\\1\le\beta_2\le\alpha_2\\\dots\dots\dots\\1\le\beta_k\le\alpha_k}} p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}=(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})\ldots(1+p_k+\ldots+p_k^{\alpha_k})$$

ga tengligini ko'rish qiyin emas. U holda

$$1+p_i+\ldots+p_i^{\alpha_i}=\frac{1-p_i^{\alpha_i+1}}{1-p_i}$$

formulaga asosan

$$\sigma(n)=\frac{1-p_1^{\alpha_1+1}}{1-p_1}\cdot\frac{1-p_2^{\alpha_2+1}}{1-p_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-p_k^{\alpha_k+1}}{1-p_k}$$

formula hosil qilinadi.

Agar $\sigma(n)=2n$ tenglik bajarilsa, u holda n soni *mukammal son* deyiladi.

Masalan, 6 va 28 sonlari mukammal sonlardir. Haqiqatan ham,

$$\sigma(6)=\frac{1-2^2}{1-2}\cdot\frac{1-3^2}{1-3}=3\cdot4=12=2\cdot6,$$

$$\sigma(28)=\frac{1-2^3}{1-2}\cdot\frac{1-7^2}{1-7}=7\cdot8=56=2\cdot28.$$

Misol. 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328 sonlari birinchi uchraydigan yettita mukammal sondir.

Misol. 496 mukammal bo'lishini tekshirib ko'ring.

Agar $\sigma(a)=b$, $\sigma(b)=a$ o'rinli bo'lsa, a va b sonlari *do'st sonlar* deyiladi.

Masalan, 220 va 284; 18416 va 17246 sonlari do'st sonlardir.

Quyida 100 000 gacha bo'lgan do'st sonlar jadvalini keltiramiz:

$220=2^2\cdot5\cdot11$	$284=2^2\cdot71$
$1184=2^5\cdot37$	$1210=2\cdot5\cdot11^2$
$2620=2^2\cdot5\cdot131$	$2924=2^2\cdot17\cdot43$
$5020=2^3\cdot5\cdot251$	$5564=2^2\cdot13\cdot107$
$6232=2^3\cdot19\cdot41$	$6368=2^5\cdot199$
$10744=2^3\cdot17\cdot79$	$10856=2^3\cdot23\cdot59$

$12285 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	$14595 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139$
$17296 = 2^4 \cdot 23 \cdot 47$	$18416 = 2^4 \cdot 1151$
$63020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 137$	$76084 = 2^2 \cdot 23 \cdot 827$
$66928 = 2^4 \cdot 47 \cdot 89$	$66992 = 2^4 \cdot 53 \cdot 79$
$67095 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$	$71145 = 3^9 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31$
$69615 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$	$87633 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$
$79750 = 2 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 29$	$88730 = 2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 467$

Sonning butun qismi. Sonning o‘zidan oshmaydigan eng katta butun son, *sonning butun qismi* deyiladi va x haqiqiy sonning butun qismi $[x]$ orqali belgilanadi.

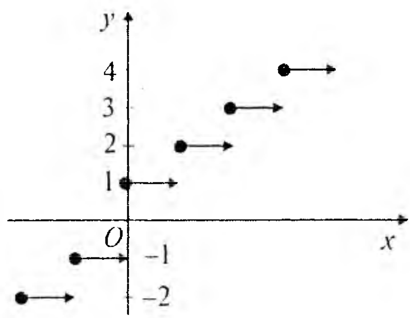
Masalan, 5,2 sonning butun qismi 5 ga; – 5,2 ning butun qismi esa – 6 ga teng. Berilgan sondan shu sonning butun qismini ayirsak, hosil bo‘lgan son berilgan *sonning kasr qismi* deyiladi.

Masalan, $5{,}2 - 5 = 0{,}2$; $\qquad -5{,}2 - (-6) = 0{,}8$.

$y = [x]$ funksiya ixtiyoriy haqiqiy son uchun aniqlangan.

Masalan, $[\pi] = 3$, $\quad [e] = 2$, $\quad [\sqrt{7}] = 2$, $\quad [\sqrt{6}] = 2$, $[-\frac{17}{5}] = -4$ va h. k.

Bu funksiya x ning butun qiymatlarida uzilishlarga ega (1.1-chizma).



1.1- chizma.

***n*! ning kanonik yoyilmasi**. $n! = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$. p_m— n dan kichik bo‘lgan birinchi tub son.

$$\alpha_1 = \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right], \text{ bu yerda } 2^{k+1} \geq n \text{ va h. k.}$$

$$\alpha_m = \left[\frac{n}{p_m}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p_m^t}\right], \qquad p_n^{t+1} \geq n.$$

Isbot qilib ko'ring.

Misol. 50! nechta nol bilan tugashini toping.

$50! = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot 47^{\alpha_m}$ bo'lib,

$$\alpha_1 = \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{4}\right] + \left[\frac{50}{8}\right] + \left[\frac{50}{16}\right] + \left[\frac{50}{32}\right] = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47,$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{25}\right] = 10 + 2 = 12.$$

Demak, 50! 12 ta nol bilan tugar ekan, chunki u $(5 \cdot 2)^{12}$ ga bo'linadi, lekin $(5 \cdot 2)^{13}$ga bo'linmaydi. 100!, 200! lar nechta nol bilan tugashini hisoblab ko'ring.

4-§. QOLDIQLI BO'LISH HAQIDAGI TEOREMA

T e o r e m a. *Agar a butun son va m natural son berilgan bo'lsa, shunday q, r butun sonlar mavjud bo'lib,* $a = mq + r$, $0 \leq r < m$ *munosabatlar o'rinli bo'ladi.*

Haqiqatan ham, agar $a = 0$ bo'lsa, $0 = m \cdot 0 + 0$.

Agar, $a = 1$ bo'lsa, $m = 1$ bo'lganda $1 = 1 \cdot 1 + 0$; $m > 1$ bo'lganda $1 = m \cdot 0 + 1$ bo'lib, teorema o'rinli.

Endi ixtiyoriy a natural son uchun teorema o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda shunday q, r butun sonlar mavjudki, $a = mq + r$, $0 \leq r < m$ munosabat o'rinli bo'lsin. Bundan $a + 1 = mq + r + 1$ tenglikni hosil qilamiz va $r + 1 < m$ bo'lsa, q, $r + 1$ sonlar teorema shartlarini qanoatlantiradi. Agar $r + 1 \geq m$ bo'lsa, $a + 1 = mq + r + 1 = mq + m + (r + 1 - m) = m(q + 1) + (r + 1 - m)$; $q + 1 = q'$, $r + 1 = r'$ belgilashlar kiritsak, $a + 1 = mq' + r'$, $0 \leq r' < m$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, har qanday a uchun teorema to'g'riligidan $a + 1$ uchun ham teorema to'g'ri bo'lishini isbot qildik. Demak, barcha natural sonlar va 0 butun son uchun teorema to'g'ri ekan.

Endi $a < 0$ bo'lsin. U holda $-a > 0$ bo'lib, shunday q, r butun sonlar mavjud bo'lib, $-a = mq + r$, $0 \le r < m$ shartlar o'rinli bo'ladi. U holda $a = m(-q) - r$ ifodani hosil qilamiz, bundan $a = m(-q+1) + (m-r)$ bo'lib, $0 \le r < m$ bo'lgani uchun $0 \le m - r < m$ bo'ladi. Demak, $a < 0$ butun son uchun ham teorema to'g'ri ekan.

5- §. EVKLID ALGORITMI

Agar a butun son va b natural son berilgan bo'lsa, u holda qoldiqli bo'lish haqidagi teoremaga ko'ra shunday q_0, r_1 butun sonlar mavjudki, $a = bq_0 + r_1$ va $0 \le r_1 < b$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Ifodadagi bo'luvchi va qoldiq q_0, r_1 uchun teoremani yana qo'llasak, shunday q_1, r_2 sonlar topilib, $b = r_1q_1 + r_2$, $0 \le r_2 < r_1$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bu jarayonni qoldiq nolga teng bo'lgunga qadar davom ettiramiz:

$$a = bq_0 + r_1, \quad 0 \le r_1 < b;$$
$$b = r_1q_1 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1;$$
$$r_1 = r_2q_2 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \quad 0 \le r_n < r_{n-1};$$
$$r_{n-1} = r_nq_n + r_{n+1}, \quad r_{n+1} = 0.$$

Bunday ketma-ket bo'lish jarayoni *Evklid algoritmi* deb ataladi.

Misol. 67 va 23 conlari uchun Evklid algoritmini tuzamiz:

$67 = 23 \cdot 2 + 21;$
$23 = 21 \cdot 1 + 2;$
$21 = 2 \cdot 10 + 1;$
$2 = 1 \cdot 2 + 0.$

Bu jarayonda qoldiqlarning monoton kamayishidan ko'rinadiki, a butun son va b natural sonlar uchun Evklid algoritmi chekli qadamdan so'ng to'xtaydi.

Endi Evklid algoritmining ba'zi bir tadbiqlari bilan tanishib chiqamiz.

Agar a butun son va b natural son berilgan bo'lsa, qoldiqli bo'lish haqidagi teoremaga asosan $a = bq + r$, $0 \le r < b$. U holda $(a,b) = (b,r)$. Ya'ni, a va b larning eng katta umumiy bo'luvchisi

b va r larning eng katta umumiy bo'luvchisiga teng (isbot qilib ko'ring). Bu tasdiqni Evklid algoritmiga qo'llasak, $(a,b) = r_n$ ekanligi kelib chiqadi.

Misol. 1643 va 3763 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisini va eng kichik umumiy karralisini Evklid algoritmidan foydalanib topaylik:

$$1643 = 3763 \cdot 0 + 1643;$$
$$3763 = 1643 \cdot 2 + 477;$$
$$1643 = 477 \cdot 3 + 212;$$
$$477 = 212 \cdot 2 + 53;$$
$$212 = 53 \cdot 4.$$

Demak, $(1643,\ 3763) = 53$.

Bu sonlarning umumiy karralisini topish uchun esa $[a,b] \cdot (a,b) = a \cdot b$ formuladan foydalanamiz:

$$[1643,\ 3763] = \frac{1643 \cdot 3763}{53} = 31 \cdot 71 = 2201.$$

6-§. ZANJIR KASRLAR

Ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar. a va b natural sonlar uchun Evklid algoritmi quyidagicha bo'lsin:

$$a = bq_0 + r_1, \quad 0 < r_1 < b;$$
$$b = r_1 q_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1;$$
$$r_1 = r_2 q_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1};$$
$$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}, \quad r_{n+1} = 0.$$

Har bir tenglikni bo'luvchilarga bo'lib chiqamiz:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b}; \tag{1}$$

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}; \tag{2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2}; \tag{3}$$

....

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} \quad (n+1).$$

Natijada tengliklar hosil bo'ladi.

U holda $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$ tenglikka (2) tenglikdagi $\frac{b}{r_1}$ qiymatini qo'ysak,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

tenglik hosil bo'ladi. Unga (3) tenglikni qo'ysak,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Bu jarayonni davom ettirsak,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3} + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

tenglik kelib chiqadi.

Bu ifoda $\frac{a}{b}$ ratsional sonning *zanjir kasrga yoyilmasi* deyiladi. Ba'zi adabiyotlarda „zanjir kasr" o'rniga „uzluksiz kasr" atamasi ishlatilgan.

Zanjir kasrlarni $[q_0, q_1, \ldots, q_n]$ ko'rinishda belgilash qabul qilingan.

Misol. $\frac{126}{37} = 3 + \frac{15}{37} = 3 + \frac{1}{\frac{37}{15}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{7}{15}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{15}{7}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}}$

yoki $\frac{126}{37} = [3, 2, 2, 7]$.

$\frac{a}{b}=[q_0, q_1,\dots,q_n]$ zanjir kasr berilgan bo'lsin. U holda $[q_0,q_1,\dots,q_k], k \le n$ zanjir kasr k-munosib kasr deyiladi va $\frac{P_k}{Q_k}$ ko'rinishda belgilanadi. $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a}{b}$ bo'lishi ayon.

Munosib kasrlar quyidagi xossalarga ega. Agar $k \ge 2$ bo'lsa.

1°. $P_k = P_{k-1}\cdot q_k + P_{k-2}$, $Q_k = Q_{k-1}\cdot q_k + Q_{k-2}$;

2°. $\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \dots < \frac{a}{b} = \frac{P_n}{Q_n} < \dots < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}$;

3°. $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k \cdot Q_{k-1}}$;

4°. $P_k \cdot Q_{k-1} - Q_k \cdot P_{k-1} = (-1)^{k-1}$.

Bu xossalarning isboti bevosita ta'rifdan matematik induksiya metodini qo'llash yordamida hosil qilinishi mumkin.

Masalan 1°- xossaning isbotini ko'rib chiqaylik:

$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{q_0}{1}$, $\frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1}=\frac{q_0q_1+1}{q_1}$ bo'lgani uchun $P_0=q_0$, $Q_0=1$; $P_1=q_0\cdot q_1+1$, $Q_1=q_1$ bo'lishi ravshan. U holda $k=2$ uchun

$$\frac{P_2}{Q_2}=q_0+\frac{1}{\frac{q_1q_2+1}{q_2}}=q_0+\frac{q_2}{q_1q_2+1}=\frac{q_0q_1q_2+q_0+q_2}{q_1q_2+1}=$$

$$=\frac{(q_0q_1+1)q_2+q_0}{q_1q_2+1}=\frac{P_1\cdot q_2+P_0}{Q_1\cdot q_2+Q_0};$$

bundan $P_2 = P_1\cdot q_2 + P_0$; $Q_2 = Q_1\cdot q_2 + Q_0$ hosil bo'ladi.

Faraz qilaylik, k natural son uchun 1°-xossa to'g'ri bo'lsin. 1°-xossani $k+1$ uchun isbot qilamiz. Ya'ni $\frac{P_k}{Q_k}=\frac{P_{k-1}\cdot q_k+P_{k-2}}{Q_{k-1}\cdot q_k+Q_{k-2}}$ bo'lsin. $\frac{P_k}{Q_k}$ munosib kasrdan $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ munosib kasrni hosil qilish uchun q_k ni $q_k+\frac{1}{q_{k+1}}$ bilan almashtirish kifoya.

Shunning uchun

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{P_{k-1}(q_k+\frac{1}{q_{k+1}})+P_{k-2}}{Q_{k-1}(q_k+\frac{1}{q_{k+1}})+Q_{k-2}}=\frac{P_{k-1}q_kq_{k+1}+P_{k-1}+P_{k-2}\cdot q_{k+1}}{Q_{k-1}q_kq_{k+1}+Q_{k-1}+Q_{k-2}\cdot q_{k+1}}=$$

$$=\frac{(P_{k-1}q_k+P_{k-2})q_{k+1}+P_{k-1}}{(Q_{k-1}q_k+Q_{k-2})q_{k+1}+Q_{k-1}}=\frac{P_kq_{k+1}+P_{k-1}}{Q_kq_{k+1}+Q_{k-1}}.$$

Demak, $P_{k+1}=P_k\cdot q_{k+1}+P_{k-1}$; $Q_{k+1}=Q_k\cdot q_{k+1}+Q_{k-1}$. Qolgan xossalarni mustaqil isbot qilib ko'ring.

4°- xossadan $(P_k, Q_k)=1$, ya'ni munosib kasrning surat va maxraji o'zaro tub bo'lishi kelib chiqadi. Chunki $P_k\cdot Q_{k-1}-$ $-Q_k\cdot P_{k-1}=(-1)^{k-1}$ son P_k va Q_k sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisiga bo'linadi.

Demak, $\frac{a}{b}$ kasr qisqartirilmagan bo'lsa, u holda $\frac{a}{b}$ ni zanjir kasrga yoyib qisqartirish mumkin.

Misol. $\frac{1643}{2201}$ kasrni zanjir kasrga yoyaylik:

$1643=2201\cdot 0+1643;$

$2201=1643\cdot 1+558;$

$1643=558\cdot 2+527;$

$558=527\cdot 1+31;$

$527=31\cdot 17.$

U holda $\frac{1643}{2201}=[0,1,2,1,17]=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}}=\frac{53}{71}.$

Agar $(a,b)=1$ bo'lsa, ya'ni $\frac{a}{b}$ kasr qisqarmas kasr bo'lsa, u holda $P_k\cdot Q_{k-1}-Q_k\cdot P_{k-1}=(-1)^{k-1}$ tenglikdan $P_n\cdot Q_{n-1}-$ $-Q_n\cdot P_{n-1}=(-1)^{n-1}$ yoki $a\cdot Q_{n-1}-b\cdot P_{n-1}=(-1)^{n-1}$ hosil bo'ladi. Bundan $a\cdot[Q_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}]-b\cdot[P_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}]=1$ tenglikka ega bo'lamiz. Uni c ga ko'paytirsak, $a\cdot[c\cdot Q_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}]-$ $-b\cdot[c\cdot P_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}]=c$ tenglik hosil bo'ladi. Demak, $(a,b)=1$ bo'lganda

$$ax - by = c \qquad (1)$$

tenglamaning yechimlaridan biri

$$\begin{cases} x_0 = c \cdot Q_{n-1} \cdot (-1)^{n-1}, \\ y_0 = c \cdot P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \end{cases} \qquad (2)$$

hosil bo'ladi.

(1) tenglamaning umumiy yechimi $\begin{cases} x = x_0 + b \cdot m, \\ y = y_0 + a \cdot m, \end{cases} \quad m \in Z$

formula bilan hisoblanadi (tekshirib ko'ring).

Misol. $16x - 9y = 4$ tenglamani butun sonlar to'plamida yeching.

Yechish. $\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9} = 1 + \frac{1}{\frac{9}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$.

$\frac{P_{n-1}}{Q_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}$. Demak, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{7}{4}$. Topilgan qiymatlarni (2)

formulaga qo'yib,

$$\begin{cases} x = Q_2 \cdot (-1)^2 \cdot 4 + 9\ m, \\ y = P_2 \cdot (-1)^2 \cdot 4 + 16\ m, \end{cases} \quad m \in Z$$

qiymatlarni, bundan

$$\begin{cases} x = 4 \cdot 4 + 9m = 28 + 9\,m, \\ y = 7 \cdot 4 - 16\,m = 28 + 16\,m, \end{cases} \quad m \in Z$$

umumiy yechimni topamiz. Xususiy yechim sifatida $\begin{cases} x_0 = 16, \\ y_0 = 28, \end{cases}$ ni olish mumkin.

Tekshirish: $16 \cdot 16 - 9 \cdot 28 = 256 - 252 = 4$.

Masala. Bitta qutichada o'rgimchaklar bilan qo'ng'izlar bor. Ularning oyoqlari soni 76 ta. O'rgimchakning 8 ta dan oyog'i, qo'ng'izning esa 6 tadan oyog'i bor bo'lsa, qutichada nechta o'rgimchak va nechta qo'ng'iz bor?

Yechish. Faraz qilaylik qutichada x dona o'rgimchak va y dona qo'ng'iz bor. Masala shartiga ko'ra, $8x+6y=76$ yoki $4x-3(-y)=38$. Bundan $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$. Demak, $\begin{cases} x=38+3t, \\ y=-38-4t, \end{cases} t\in Z$.

Lekin masala shartiga ko'ra $x>0,\ y>0$. Topilgan yechimlarning musbatlarini olishimiz kerak. Ya'ni $\begin{cases} 38+3t\geq 0, \\ -38-4t\geq 0, \end{cases} t\in Z$. Bundan $-\frac{38}{3}\leq t\leq -\frac{19}{2}$, undan esa $-12\frac{2}{3}\leq t\leq -9{,}5$ kelib chiqadi. Agar, $t=-10$ bo'lsa, $x=8,\ y=2$; agar $t=-11$ bo'lsa, $x=5,\ y=6$; agar $t=-12$ bo'lsa, $x=2,\ y=10$ bo'ladi. Demak, masala yechimi quyidagilardan iborat:

1) $\begin{cases} x=8, \\ y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=5, \\ y=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2, \\ y=10. \end{cases}$

***ax − by = c* ko'rinishdagi tenglamalarni yechishning Eyler usuli.**

$$ax-by=c \qquad (*)$$

ko'rinishdagi tenglamalarni yechish uchun Eyler teoremasidan ham foydalanish mumkin. Eyler teoremasini eslatib o'taylik:

agar $(a,m)=1$ *bo'lsa, u holda* $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\operatorname{mod} m)$ *taqqoslama o'rinli.*

(*) tenglamada $(a,m)=1$ bo'lgani uchun uni $ax-c=by$ ko'rinishda yozib olsak, $ax\equiv c(\operatorname{mod} b)$ taqqoslamaning yechimi x bo'ladi. Bu taqqoslamaning ikkala tomonini $a^{\varphi(b)-1}$ ga ko'paytirsak, u holda $x\equiv a^{\varphi(b)-1}\cdot c(\operatorname{mod} b)$ hosil bo'ladi.

Haqiqatan ham, $a^{\varphi(b)-1}\cdot ax\equiv a^{\varphi(b)-1}\cdot c(\operatorname{mod} b)$. Bundan $a^{\varphi(b)}\cdot x\equiv a^{\varphi(b)-1}\cdot c(\operatorname{mod} b)$ hosil bo'ladi. Agar $a^{\varphi(b)}\equiv 1(\operatorname{mod} b)$ taqqoslamani e'tiborga olsak, $x\equiv a^{\varphi(b)-1}\cdot c(\operatorname{mod} b)$ hosil bo'ladi.

U holda $x=a^{\varphi(b)-1}\cdot c+bq,\ q\in Z$.

Misol. $4x-3y=17$ tenglamaning yechimini Eyler usuli yordamida topamiz.

Yechish. Tenglamadagi parametrlardan foydalanib $x \equiv 4^{\varphi(3)-1} \cdot 17 (\mathrm{mod}\ 3)$ taqqoslamani tuzamiz. $\varphi(3) = 2$ va $17 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ bo'lishini e'tiborga olsak, $x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ yoki $x = 2 + 3q$, $q \in Z$ hosil bo'ladi. Bu ifodani berilgan tenglamaga qo'ysak, $4(2 + 3q) - 3y = 17$ yoki $y = 4q - 3$ ni hosil qilamiz.

Agar $q = 0$ bo'lsa, u holda $x = 2, y = -3$; agar $q = 1$ bo'lsa, u holda $x = 5, y = 1$; agar $q = 2$ bo'lsa, u holda $x = 8$, $y = 5$ va h.k. yechimlar hosil bo'ladi.

Misol. Quyidagi tenglamalarning yechimlarini o'zingizga ma'qul bo'lgan usulda toping:

1) $4x - 3y = 19$;
3) $12x - 31y = 170$;
2) $617x - 125y = 85$;
4) $5x - 7y = 25$.

7- §. IRRATSIONAL SONLARNI ZANJIR KASR KO'RINISHIDA IFODALASH

Agar α irratsional son berilgan bo'lsa, uning butun qismini ajratib, quyidagicha yozib olishimiz mumkin: $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. Bu yerda $[\alpha]$ — berilgan α irratsional sonning butun qismi, $\{\alpha\}$ — berilgan α irratsional sonning kasr qismi bo'lib, albatta, $[\alpha] \geq 1$, $0 < \{\alpha\} < 1$. $[\alpha]$ ni q_0, $\{\alpha\}$ ni $\frac{1}{\alpha_1}$, $(\alpha_1 > 1)$ ko'rinishda yozib olsak, $\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}$ hosil bo'ladi.

Endi α_1 uchun yuqoridagi jarayonni takrorlab, α_1 ni $\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}$ ko'rinishida yozib olamiz va h. k.:

$$\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad q_1 = [\alpha_1], \alpha_2 > 1;$$

$$\alpha_2 = q_2 + \frac{1}{\alpha_3}, \quad q_2 = [\alpha_2], \alpha_3 > 1.$$

Bu jarayonni n marta takrorlasak, $\alpha = [q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, \alpha_n]$ – zanjir kasr hosil bo'ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettirsak, $\alpha = [q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n, \ldots]$ cheksiz zanjir kasr hosil bo'ladi.

Agar α – kvadrat irratsionallik bo'lsa, ya'ni shunday $a, b, c,$ lar mavjud bo'lib, $\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, u holda α ni cheksiz davriy zanjir kasr sifatida ifoda qilish mumkin.

Misol. $\sqrt{2}$ ni cheksiz davriy zanjir kasrga yoying.

Yechish.

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 +$$

$$+ \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = \ldots = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}.$$

Demak, $\sqrt{2} = [1,(2)]$.

Misol. $\sqrt{3}$ irratsional sonni zanjir kasrga yoying.

Yechish.

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}}}} = \ldots$$

Shunday qilib, $\sqrt{3} = [1,1(12)]$.

Misol. $\sqrt{5} = [2,(4)]$, $\sqrt{7} = [2,(1114)]$ bo'lishini ham yuqoridagidek tekshirib chiqish mumkin. Bu misollarni mustaqil ishlash uchun qoldiramiz.

Zanjir kasrlarning xossalariga asosan α – irratsional son $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ va $\frac{P_k}{Q_k}$ munosib kasrlar orasida joylashgan bo'lib, bu munosib kasrlar ayirmasining moduli $\frac{1}{Q_{k-1} \cdot Q_k}$ ga teng. Demak, α irratsional sonning $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ munosib kasrdan farqi $\frac{1}{Q_{k-1} \cdot Q_k}$ dan kichik.

Misol. $\sqrt{7} = [2,1,1,1,4,1,1,1,4,\ldots]$ uchun $\frac{P_8}{Q_8}$ ni hisoblaylik. Buning uchun $P_0 = q_0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = q_0 \cdot q_1 + 1$, $Q_1 = q_1, \ldots,$ $P_k = P_{k-1} \cdot q_k + P_{k-2}$, $Q_k = Q_{k-1} \cdot q_k + Q_{k-2}$ formulalardan foydalanib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

k	0	1	2	3	4	5	7	7	8
q_k	2	1	1	1	4	1	1	1	4
P_k	2	3	5	8	37	45	82	127	590
Q_k	1	1	2	3	14	17	31	48	223

Demak, $\sqrt{7} \approx \frac{590}{223} = 2\frac{144}{223}$ va $\frac{1}{Q_{k-1} \cdot Q_k} = \frac{1}{48 \cdot 223}$. Bundan, $\sqrt{7}$ bilan $2\frac{144}{223}$ sonlarning farqi $\frac{1}{48 \cdot 223}$ dan kichik ekan.

8- §. TURLI SANOQ SISTEMALARI HAQIDA

$$a_0 g^n + a_1 g^{n-1} \ldots + a_{n-1} g + a_n \qquad (1)$$

ifoda g asosli *sistematik son* deyiladi.

Masalan. $3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 4$ asosi 5 bo'lgan sistematik sondir. (1) ifoda qisqacha $(a_0, a_1, \ldots, a_n)_{(g)}$ ko'rinishda belgilanadi.

$0, 1, \ldots, g-1$ conlar g asosli sistematik sonlar uchun raqamlar vazifasini bajaradi.

Tabiiy savol tug'iladi, birorta natural son berilgan bo'lsa, bu sonni g asosli sistematik son sifatida ifoda qilish mumkinmi?

T e o r e m a. *Har qanday a natural sonni g* $(g \geq 2)$ *asosli sistematik son sifatida yagona usulda ifoda qilish mumkin.*

I s b o t. Teoremani matematik induksiya metodi bilan oson isbot qilish mumkin.

Haqiqatan ham, agar a son g sondan kichik bo'lsa, u holda u g asosli sonlar uchun raqam bo'ladi. Shuning uchun $a = 1$ uchun $1 < g$ bo'lganidan teorema to'g'ri.

Faraz qilaylik, a sondan kichik barcha natural son uchun teorema to'g'ri bo'lsin. U holda qoldiqli bo'lish haqidagi teoremaga asosan shunday yagona q va r butun sonlar mavjud bo'lib, $a = gq + r$, $0 \leq r < g$ shartlar bajariladi.

$q < a$ bo'lgani uchun induksiya faraziga ko'ra $q = a_0g^{n-1} + a_1g^{n-2} + ... + a_{n-2}g + a_{n-1}$ bo'ladi. Bundan

$$a = a_0g^n + a_1g^{n-1} + ... + a_{n-2}g^2 + a_{n-1}g + r \qquad (2)$$

hosil bo'ladi. Ya'ni a soni g asosli sistematik songa aylandi. Bu ifodaning yagonaligi qoldiqli bo'lish haqidagi teoremaga asosan q va r sonlarning yagonaligidan kelib chiqadi.

Haqiqatan ham, induksiya faraziga ko'ra $a_0g^{n-1} + ... + a_{n-1}g + a_n$ ifoda q ning g asosli son ko'rinishidagi yagona ifodasi, q va r lar ham qoldiqli bo'lish haqidagi teoremaga ko'ra yagona sonlar bo'lganligi uchun a ning (1) ifodasi ham a ning g asosli sistematik son sifatidagi yagona ifodasi bo'ladi.

Misol. 137 sonni 3 asosli sistematik son sifatida ifodalang. Buning uchun 137 ni 3 ga bo'lib, qoldiqni topamiz:

$$\begin{array}{r|l} 137 & 3 \\ \underline{12} & 45 \\ 17 & \\ \underline{15} & \\ 2 & \end{array}$$

Hosil bo'lgan bo'linmani yana 3 ga bo'lib, qoldiqni topamiz va h. k.:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ \underline{45} & 15 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \underline{15} & 5 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \underline{3} & 1 \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \underline{0} & 0 \\ 1 & \end{array}$$

Demak, $137_{(10)} = (12002)_{(3)}$ ekan.

Endi teskari masalani qaraylik, $(12001)_{(3)}$ sonni 10 asosli sistematik son ko'rinishida yozing. Buning uchun $(12001)_{(3)}$ ning yoyilmasini yozib olib, amallarni 10 asosli sanoq sistemasida bajaramiz:

$$(12001)_{(3)} = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 81 + 54 + 2 = 137$$

Agar g soni, ya'ni sanoq sistemasining asosi 10 dan katta bo'lsa, raqamlar tepasiga chiziq tortib belgilanadi. Masalan, 13 lik sanoq sistemasining raqamlari quyidagilardan iborat:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}.$$

Misol. 675571 ni 60 lik sanoq sistemasida yozing:

```
_675571 | 60
  60      |-------
  --      | _11259 | 60
 _75      |   60   |------
  60      |  ---   | _187 | 60
  --      |  _525  |  180 |------
 _155     |   480  |  --- | _3 | 60
  120     |   ---  |  [7] |  0 |----
  ---     |  _459  |      | -- | [0]
 _357     |   420  |      | [3]
  300     |   ---  |
  ---     |  [39]  |
 _571     |
  540     |
  ---     |
  [31]    |
```

Shunday qilib, $675571 = (37\overline{39}\,\overline{31})_{(60)}$.

Kasr sonni g asosli sanoq sistemasida yozish.

Bizga $\frac{a}{b}$ kasr son berilgan bo'lsa, u holda a ni ham, b ni ham g asosga o'tkazib, keyin a ni b ga g asosda bo'lamiz.

Misol. $\frac{17}{18}$ ni 5 asosli sanoq sistemasida yozing:

Yechish.

```
_17 | 5              _18 | 5
 15 |------           15 |------
 -- | _3 | 5          -- | _3 | 5
  2 |  0 |---          3 |  0 |---
    | -- | 0             | -- | 0
    |  3                 |  3
```

Demak, $\frac{17}{18} = \frac{32_{(5)}}{33_{(5)}}$. Topilgan kasrni 5 asosli sanoq sistemasida yozish uchun 5 lik sanoq sistemasida qo'shish va ko'paytirish amallari jadvallarini tuzib olamiz:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Jadvallardan foydalanib, 5 lik sanoq sistemasida bo'lish amalini bajaramiz:

```
_320 |33
 242 |0,430114=0,(430114)
 _230
  204
  _210
   204
    0100
   _  33
      120
     _ 33
       320
```

Demak, $\frac{17}{18}=\frac{32_{(5)}}{33_{(5)}}=0,(43114)_{(5)}$.

9- §. IKKILIK SANOQ SISTEMASI

Ikkilik sanoq sistemasida faqat ikkita raqam bo‘lib, ular 0 va 1. U holda har qanday a natural son 2 ning har xil darajalari yig‘indisi sifatida yagona usulda ifoda qilinadi:

$$a=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_s}, \qquad k_1<k_2<\ldots<k_s.$$

Ikkilik sanoq sistemasining bu xossasidan foydalanib, quyidagi matematik fokusni keltirish mumkin.

1 dan 64 gacha bo‘lgan har bir natural son 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ya’ni 2 ning darajalari orqali ifoda qilinishi ravshan. Shuning uchun 1, 2, 4, 8, 16, 32 sonlari bilan boshlanadigan kartochkalarga

1	3	2	3	4	5	8	9	16	17	32	33
5	7	6	7	6	7	10	11	18	19	34	35
9	11	10	11	12	13	12	13	20	21	36	37
13	15	14	15	14	15	14	15	22	23	38	39
17	19	18	19	20	21	24	25	24	25	40	41
21	23	22	23	22	23	26	27	26	27	42	43
25	27	26	27	28	29	28	29	28	29	44	45
29	31	30	31	30	31	30	31	30	31	46	47
33	34	35	38	36	37	40	41	48	49	48	49
35	37	39	42	38	39	42	43	50	51	50	51
39	41	43	46	44	45	44	45	52	53	52	53
43	45	47	50	46	47	46	47	54	55	54	55
47	49	51	54	52	53	56	57	56	57	56	57
51	53	55	58	54	55	58	59	58	59	58	59
55	57	59	62	60	61	60	61	60	61	60	61
59	61	63		62	63	62	63	62	63	62	63
63											

har bir a $(1 \le a \le 63)$ natural son uchun barcha 1 ,..., 63 sonlarni kartochkalarga shunday joylashtiramizki, natijada a natural sonning ikkilik sanoq sistemasidagi yoyilmasida qatnashgan sonlar bilan nomerlangan kartochkalardagina a soni joylashgan bo'lib, qolgan kartochkalarda a soni yozilmasin. Masalan, $17 = 2^0 + 2^4$. Demak, 17 soni faqat 1 va 16 sonlari bilan boshlangan kartochkalardagina yozilgan bo'lib, 2, 4, 8, 32 sonlari bilan boshlangan kartochkalarga yozilmaydi (23- betdagi jadvalga qarang).

U holda a son o'zi qatnashgan kartochkalardagi birinchi sonlar yig'indisiga teng, masalan, $17 = 1 + 16$.

Endi biror suhbatdoshingizga kartochkalarni berib, 1, ..., 63 sonlardan birini o'ylab, o'ylangan son qaysi sonlar bilan boshlangan kartochkalarda qatnashganligini aytishini so'raysiz. Kartochkalardagi birinchi sonlarning yig'indisi suhbatdoshingiz o'ylagan songa teng bo'ladi.

10- §. UCHLIK SANOQ SISTEMASI

Uch asosli sanoq sistemasida faqat 0, 1, 2 raqamlar bo'lib, har qanday son shu raqamlar orqali ifoda qilinadi. Agar $2 \cdot 3^m = (3-1) \cdot 3^m = 3^{m+1} - 3^m$ tenglikni hisobga oladigan bo'lsak, har qanday a natural son $a = 3^{k_1} + 3^{k_2} + \dots + 3^{k_m} - 3^{l_1} - 3^{l_2} - \dots - 3^{l_n}$ algebraik yig'indi sifatida ifoda qilinishi mumkinligi kelib chiqadi.

Masalan, 2005 ni yuqoridagidek algebraik yig'indi sifatida ifoda qilaylik

```
_2005| 3
 18   _668 |3
 _20    6   _222 |3
  18   _06    21   _74 |3
 _25     6   _12     6   _24| 3
  24    08    12   _14    24  _8 | 3
   1   _ 6     0    12     0   6  _2 | 3
         2           2         2   0   0
                                   2
```

Demak, $2005 = 2202021_{(3)} = 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 1 =$

$= (3-1) \cdot 3^6 + (3-1) \cdot 3^5 + (3-1) \cdot 3^3 + (3-1) \cdot 3 + 1 = 3^7 - 3^5 + 3^4 -$

$- 3^3 + 3^2 - 3 + 3^0$.

Misol. 1954 sonini 3 ning darajalarining algebraik yig'indisi ko'rinishida ifoda qiling.

Echish.

```
_1954|3
 18   _651 |3
 _15   6   _217 |3
  15   _05  21   _72 |3
  _04   3   _7    6  _24 |3
    3  _21   6   12   24  _8 |3
    1   21   1   _12   0   6  2 |3
         0         0       2 _0  0
                              2
```

$$1954 = 2200101_3 = 2\cdot 3^6 + 2\cdot 3^5 + 1\cdot 3^2 + 3^0 =$$

$$= 3^7 - 3^6 + 3^6 - 3^5 + 3^2 + 3^0 = 3^7 - 3^5 + 3^2 + 3^0.$$

Masala. 1, 3, 9, 27 kilogrammli 4 ta tosh berilgan bo'lsa, posongili tarozida 1 kilogrammdan 40 kilogrammgacha mahsulotlarni (og'irliklari butun sonda ifoda qilinadigan) o'lchash mumkinligini isbot qiling.

Yechish. Har qanday 1 dan 40 gacha bo'lgan sonlarni 1, 3, 3^2, 3^3 darajalarning algebraik yig'indisi ko'rinishida ifoda qilish mumkinligini hisobga olsak, masala ijobiy hal bo'lishini ko'ramiz. Haqiqatan ham, $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ va demak, 40 dan kichik barcha sonlar 30, 3^1, 3^2, 3^3 darajalarning algebraik yig'indisiga teng. Masalan, 37 kilogrammlik mahsulotni o'lchash uchun 37 ni $3^7 = 3^3 + 3^2 + 1$ ko'rinishda yozib olib, tarozining bir pallasiga 37 kilogrammlik yuk, ikkinchi pallasiga esa 1, 9, 27 kilogrammlik toshlar qo'yiladi.

Masalan, 19 kilogrammlik mahsulotni 1, 3, 9, 27 kilogrammlik toshlar bilan o'lchash uchun 19 ni $19 = 3^3 - 3^2 + 1$ ko'rinishida ifoda qilish yetarli. Ya'ni, 19 kilogrammlik mahsulotni o'lchash uchun tarozining bir pallasiga 19 kilogrammlik mahsulotni va 9 kilogrammlik toshni, tarozining 2-pallasiga esa 27 kilogrammlik va bir kilogrammlik toshlarni qo'yish lozim.

Masala. 1, 3, 9,..., 3^{k_m} ko'rinishidagi toshlar orqali ixtiyoriy $\left(a < 1 + 3 + \ldots + 3^{k_m} = \dfrac{3^{k_m+1} - 1}{2}\right)$ ko'rinishdagi a kilogramm mahsulotning og'irligini tekshirib ko'rish mumkinligini ko'rsating.

Masala. Bir maktab o'qituvchisi uning sinfida 100 ta o'quvchi bo'lib, shulardan 22 tasi o'g'il bola va qolgan 23 tasi qiz bola ekanini aytdi. Buni qanday tushuntirish mumkin?

Yechish. Sonlar berilgan sistema asosini q bilan belgilaymiz. Qiz bolalar $23 = 2q + 3$ ta, o'g'il bolalar esa $2q + 2$ ta bo'lgan. Hamma bolalar:

$$100 = 1 \cdot q^2 + 0 \cdot q + 0 \cdot q^2 = q^2 \text{ yoki } (2q + 3) + (2q + 2) = q^2 \cdot q$$

ni topaylik: $q^2 - 4q - 5 = 0$; $q_1 = 5$; $q_2 = 1$.

Demak, $q = 5$, boshqacha aytganda masaladagi sonlar beshlik sanoq sistemasida olingan.

Masala. Sirli avtobiografiya. Bir matematik o'zining qisqacha avtobiografiyasini quyidagicha bayon qildi: „Men universitetni 44 yoshimda tugatdim. Bir yil o'tkazib, 100 yashar yigitligimda 34 yoshli qizga uylandim. Bizning yoshlarimiz orasidagi farq atigi 11 yil edi. Oradan ko'p o'tmay mening 10 ta boladan iborat kichkinagina oilam paydo bo'ldi. Men bir oyda 200 so'm maosh olaman, buning 1/10 qismini singlimga berishga to'g'ri keladi. Xullas, biz o'z oilamiz bilan 130 so'mga yashaymiz".

Bu qiziq avtobiografiyani qanday tushunsa bo'ladi?

J a v o b . Barcha sonlar beshlik sanoq sistemasida berilgan.

Masala. Kim nimani olgan? (Matematik fokus.) Uch kishi: *A, B, C* ning har biri uchta: *t, q, k* (masalan, tanga, qalamtarosh, kalit) buyumlardan birini to'rtinchi kishiga (boshqaruvchiga) ko'rsatmay oladi. Boshqaruvchi kim nima olganini topishga harakat qiladi.

Buning uchun o'yinda qatnashayotganlar oldiga ichida 50 ta cho'pi bo'lgan gugurt qutichasi qo'yiladi va *A* ga bitta gugurt cho'pi, *B* ga uchta, *C* ga to'qqizta gugurt cho'pi beriladi. So'ngra, *t* narsani olgan kishi dastlab o'zida qancha bo'lsa, yana shuncha, *q* narsani olgan kishi dastlab o'zida qancha bo'lsa unga qaraganda ikki baravar ko'p va nihoyat, *k* narsaning egasi dastlab qancha olgan bo'lsa, unga qaraganda uch marta ko'p gugurt cho'pi oladi. *A, B, C* lar bu ishlarning hammasini boshqaruvchi yo'q paytida qilishadi.

So'ngra boshqaruvchi xonaga kirib, qutichada ortib qolgan gugurt cho'plari soniga qarab, kim nima olganini aytib beradi. Bu quyidagicha topiladi. Buning uchun ushbu belgilashlarni kiritamiz: keyingi olishda *A* shaxs $1 \cdot X_A$ dona, *B* shaxs $3 \cdot X_B$ dona, *C* esa $9 \cdot X_C$

dona gugurt cho'pi olgan bo'lsin, bu yerda X_A, X_B, X_C sonlar 1, 2, 3 sonlaridan biri. Agar X_A, X_B, X_C sonlarni bilsak, u holda kim qanday narsa olganini ko'rsatish mumkin. Keyingi marta olingan gugurt cho'plari soni $N = X_C \cdot 9 + X_B \cdot 3 + X_A \cdot 1$ ga teng. Birinchi marta esa $1 + 3 + 9 = 13$ ta gugurt cho'pi olingan edi. Ayirma tuzamiz:

$$N - 13 = X_A \cdot 1 + X_B \cdot 3 + X_C \cdot 9 - (1 + 3 + 9),$$

$$N - 13 = (X_A - 1) \cdot 1 + (X_B - 1) \cdot 3 + (X_C - 1) \cdot 9.$$

$X_A - 1$, $X_B - 1$, $X_C - 1$ larni mos ravishda Y_A, Y_B, Y_C bilan belgilab, $N - 13 = Y_C \cdot 9 + Y_B \cdot 3 + Y_A \cdot 1$ ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, $N - 13$ sonini uchlik sistemada tasvirlab, Y_A, Y_B, Y_C ni va demak, $X_A = Y_A + 1$, $X_B = Y_B + 1$, $X_C = Y_C + 1$ ni topamiz. Masalan, keyingi gal olingan gugurt cho'plari soni 20 ga teng bo'lsin, u holda:

$$N - 13 = 20 - 13 = 7.$$

$$7 = 0 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3^0.$$

$$Y_C = 0;\ Y_B = 2;\ Y_A = 1.$$

$$X_C = 1;\ X_B = 3;\ X_A = 2.$$

Demak, C –„t" narsani, B –„q" narsani; A esa „k" narsani olgan (1 soniga tanga, 2 soniga qalamtarosh, 3 soniga kalit to'g'ri keladi).

11- §. TAQQOSLAMALAR

Bizga a, b butun sonlar va $m > 1$ natural son berilgan bo'lsin. Agar $a - b$ ayirma m ga qoldiqsiz bo'linsa, u holda a butun son b butun son bilan m modul bo'yicha taqqoslanadi deyiladi va $a \equiv b(\text{mod}\, m)$ orqali belgilanadi.

Misol. $a = 5$, $b = 16$, $m = 11$ bo'lsin, u holda $5 - 16 = -11$, $-11 \vdots 11$. Demak, $5 \equiv 16(\text{mod}\, 11)$.

T e o r e m a. *Ikkita a va b butun sonlar m modul bo'yicha taqqoslanishlari uchun ularni m ga bo'lganda bir xil qoldiq chiqishi zarur va yetarli.*

I s b o t. $a \equiv b(\text{mod}\, m)$ bo'lsin. U holda $a - b = mq$, $q \in Z$. Demak, $a = mq + b$. Agar $b = mq' + r$, $0 \le r < m$ bo'lsa,

$a = m(q + q') + r,\ \ 0 \le r < m$. Ya'ni a va b butun sonlarni m ga bo'lsak, bir xil qoldiq qolar ekan. Aksincha, agar $a = mq_1 + r$, $0 \le r < m$ va $b = mq_2 + r$ bo'lsa, u holda $a - b = m(q_1 - q_2)$ yoki $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ bo'ladi.

Taqqoslamaning asosiy xossalari. Quyida biz taqqoslamaning bevosita taqqoslama ta'rifidan kelib chiqadigan asosiy xossalarini keltiramiz. Bu xossalarning barchasida *a, b, c, d* lar ixtiyoriy butun sonlar, m esa 1 dan katta natural son deb hisoblaymiz.

1°. $a \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$.

2°. Agar $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ bo'lsa, u holda $b \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$ bo'ladi.

3°. Agar $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ va $b \equiv c(\mathrm{mod}\, m)$ bo'lsa, u holda $a \equiv c(\mathrm{mod}\, m)$ bo'ladi.

4°. Taqqoslamalarni hadma-had qo'shish va hadma-had ko'paytirish mumkin, ya'ni, agar $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ va $c \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$ bo'lsa, u holda $a + c \equiv b + d(\mathrm{mod}\, m)$ va $ac \equiv bd(\mathrm{mod}\, m)$ bo'ladi.

5°. Taqqoslamaning ikkala tarafini ham ixtiyoriy songa ko'paytirish mumkin. Ya'ni, $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ bo'lsa, u holda $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, m)$ bo'ladi.

6°. Agar $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ bo'lsa, u holda $a^n \equiv b^n(\mathrm{mod}\, m)$ bo'ladi. Bu yerda n ixtiyoriy natural son.

Yuqoridagi xossalardan, agar $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ bo'lsa, u holda koeffitsiyentlari butun sonlardan iborat $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ko'phad uchun

$$f(a) \equiv f(b)(\mathrm{mod}\, m) \qquad (*)$$

bo'lishi kelib chiqadi (isbot qiling).

Taqqoslamalarning xossalaridan 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13 ga bo'linish alomatlarini keltirib chiqarish mumkin.

Misol. 9 ga bo'linish alomatini ko'rib chiqaylik. Buning uchun ixtiyoriy natural son n uchun taqqoslamadan foydalanamiz. U holda (*) taqqoslamaga asosan

$$\overline{a_0a_1\ldots a_n} = a_010^n + a_110^{n-1} + \ldots + a_{n-1}10 + a_n \equiv$$
$$\equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n(\mathrm{mod}\, 9).$$

Ya'ni son 9 ga bo'linishi uchun, uning raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linishi zarur va yetarli ekan.

Misol. 7 ga bo'linish alomati. 7 ga bo'linish alomatini keltirib chiqarish uchun $1000 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$ taqqoslamadan foydalanamiz. Berilgan $\overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1} a_n}$ natural sonni $\overline{a_0 a_1 a_2} \cdot 1000^m +$ $+\ldots + \overline{a_{n-5} a_{n-4} a_{n-3}} \cdot 1000 + \overline{a_{n-2} a_{n-1} a_n}$ ko'rinishda yozib olamiz. Ya'ni 1000 asosli sonli sistemaga o'tkazib olamiz. $g(a)$ orqali $\overline{a_0 a_1 a_2} \cdot (-1)^m + \ldots + \overline{a_{n-5} a_{n-4} a_{n-3}} \cdot (-1) + \overline{a_{n-2} a_{n-1} a_n}$ yig'indini belgilab olsak, $\overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1} a_n} \equiv g(1000) \equiv g(-1) (\mathrm{mod}\, m)$ hosil bo'ladi. Demak, $\overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1} a_n}$ natural son 7 ga bo'linishi uchun $g(-1)$ yig'indining 7 ga bo'linishi zarur va yetarli.

Xuddi shunday 13 ga bo'linish alomatini hosil qilish mumkin.

1000 dan kichik sonlarning 7 ga bo'linishini tekshirish uchun ham taqqoslamaning xossalaridan foydalanish mumkin. Buning uchun $100 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$; $10 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7)$ taqqoslamalarni hisobga olsak,

$$\overline{a_0 a_1 a_2} = a_0 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_2 = 2a_0 + 3a_1 + a_2 (\mathrm{mod}\, 7).$$

Masalan, 341 sonining 7 ga bo'linishini tekshirish uchun $2 \cdot 3 +$ $+ 3 \cdot 4 + 1 = 19$ sonining 7 ga bo'linish yoki bo'linmasligini tekshirish yetarli. Tekshirishning yanada osonroq bo'lishi uchun taqqoslama xossalariga ko'ra $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \equiv 6 + 12 + 1 \equiv 7 +$ $+ 12 \equiv 12 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7)$ ekanligidan foydalanamiz. Demak, $341 \not\vdots\, 7$.

Taqqoslama yordamida berilgan sonni birorta songa bo'lgandagi qoldiqni topish masalasini ham osongina hal qilish mumkin.

Misol. 2006^{13} ni 17 ga bo'lgandagi qoldiqni toping.

Yechish. $2006 \equiv 2 \cdot 1000 + 6 \equiv 2 \cdot 100^2 + 6 \equiv 2 \cdot (-2) + 6 = 2$.

U holda, $(2006)^{13} \equiv 2^{13} \equiv 2^{4 \cdot 3 + 1} \equiv (2^4)^3 \cdot 2 \equiv (-1)^3 \cdot 2 \equiv -2 \equiv$ $\equiv 15 (\mathrm{mod}\, 17)$. Demak, 2006^{13} ni 17 ga bo'lganda 15 qoldiq qolar ekan.

12- §. BOSHQA ASOSLI SANOQ SISTEMALARIDA BO'LINISH BELGILARI

$(\overline{a_0 a_1 ... a_n})_g = a_0 g^n + a_1 g^{n-1} + ... + a_{n-1} g + a_n$ – g asosli sistematik son berilgan bo'lsin.

p son g ning bo'luvchisi bo'lsin, u holda $(\overline{a_0 a_1 ... a_n})_g$ sistematik son p ga bo'linishi uchun a_n ning p ga bo'linishi zarur va yetarli.

$(\overline{a_0 a_1 ... a_n})_g$ sistematik sonning $(g-1)$ ga bo'linishi uchun uning raqamlari yig'indisi $(g-1)$ ga bo'linishi zarur va yetarli.

$(\overline{a_0 a_1 ... a_n})_g$ sistematik sonning $(g+1)$ ga bo'linishi uchun uning juft o'rindagi raqamlari yig'indisi bilan toq o'rindagi raqamlari yig'indisining ayirmasi $(g+1)$ ga bo'linishi zarur va yetarli.

Bu xossalarning isboti 10 lik sanoq sistemasidagi shu kabi bo'linish alomatlari isboti kabi.

Masalan. $(\overline{a_0 a_1 ... a_n})_9$ sistematik son 3 ga bo'linishi uchun a_n ning 3 ga bo'linishi zarur va yetarli.

13- §. EYLER FUNKSIYASI

Har bir natural m son uchun $\varphi(m)$ orqali 1 dan m gacha bo'lgan m bilan o'zaro tub sonlar sonini belgilab olamiz. Masalan, $m = 12$ bo'lsa, 1, 5, 7, 11 sonlar 12 bilan o'zaro tub. Demak, $\varphi(12) = 4$. Shunday qilib, har bir m son uchun $\varphi(m)$ mos qo'yiladi. Bu funksiya *Eyler funksiyasi* deyiladi.

Agar p tub son bo'lsa, $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ ekanini ko'rish qiyin emas. Haqiqatan ham, 1 dan p^α gacha bo'lgan barcha sonlar soni p^α ga teng. Bu sonlardan $p, 2p, ..., p^2, ..., p^{\alpha-1}, 2p^{\alpha-1}, ..., (p-1)p^{\alpha-1}, p^\alpha$ sonlar p^α bilan o'zaro tub bo'lmaydi. Bu sonlarning soni $p^{\alpha-1}$ ta. Demak, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

Eyler funksiyasi multiplikativ funksiya, ya'ni o'zaro tub a, b sonlar uchun $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$ bo'lishini hisobga olsak, kanonik yoyilmasi $p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ bo'lgan m natural son uchun $\varphi(m)=m(1-\frac{1}{p_1})...(1-\frac{1}{p_k})$ bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan ham,

$$\varphi(m)=\varphi(p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k})=\varphi(p_1^{\alpha_1})...\varphi(p_k^{\alpha_k})=$$
$$=(p^{\alpha_1}-p^{\alpha_1-1})...(p^{\alpha_k}-p^{\alpha_k-1})=$$
$$=p_1^{\alpha_1}(1-\frac{1}{p_1})...p_k^{\alpha_k}(1-\frac{1}{p_k})=$$
$$=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_k})m\cdot(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_k}).$$

Agar $(a, m)=1$ bo'lsa, u holda $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\bmod m)$ bo'lishini L. Eyler, m sonining barcha bo'luvchilari Eyler funksiyalarining yig'indisi m ga teng bo'lishini Gauss isbot qilgan.

Masalan, 12 son uchun

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(6)+\varphi(12)=1+1+2+2+2+4=12.$$

Agar $m=p$ va $a \,⁄\!\!\!\vdots\, p$ bo'lsa, u holda $a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$ bo'lishini Ferma isbot qilgan.

$(a, m)=1$ bo'lsin, u holda $a^k\equiv 1(\bmod m)$ taqqoslamani qanoatlantiradigan eng kichik natural son a ning m modul bo'yicha *tartibi (ko'rsatkichi)* deyiladi. Eyler teoremasidan $\varphi(m)\vdots k$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, a ning m modul bo'yicha tartibi $\varphi(m)$ ning bo'luvchilari orasida bo'lar ekan.

Masalan, 2 sonining 7 modul bo'yicha tartibi $\varphi(7)=6$ ning bo'luvchilaridan biriga teng:

$$2^2\equiv 4(\bmod 7),\qquad 2^3\equiv 1(\bmod 7).$$

Demak, 2 ning 7 modul bo'yicha tartibi 3 ga teng ekan.

14- §. TUB SONLAR TARIXIDAN

Qadimgi grek olimi Erotosfen dunyoda birinchilardan bo'lib, yerning o'lchamlarini aniqladi, parallellar va meridianlar tushunchalarini kiritdi. Pifagor esa „yerni shar shaklida" degan farazni o'rtaga tashladi: „Tabiatda hamma narsa mukammal, shuning uchun ham yer mukammal ko'rinishda bo'lishi darkor. Geometrik jismlardan eng mukammali shardir. Demak, yer shar shaklida bo'lishi kerak". Lekin yerning shar shaklida ekanligini isbot qilish va uning radiusini o'lchash faqat Erotosfengagina nasib qildi. U birinchi bo'lib yer yuzi xaritasini tuzib chiqdi. O'sha paytda ma'lum bo'lgan Yevropa, Osiyo, Liviya, Arabiston, Ariana, Hindistonlargina uning xaritasidan joy olgan (А. М. Куприн. Слово о карте. Изд. „Недра", 1987).

Tub sonlarni ko'z oldimizda quyidagicha tasavvur qilishimiz mumkin.

Xayolan ko'z oldingizga xonadoningizdan chiqib, samoga qarab cho'zilib ketgan elektr simini keltiring.

Bu simning har bir metriga bittadan lampochka osilgan bo'lib, bu lampochkalar ketma-ket natural sonlar bilan nomerlangan bo'lsin.

Simdan tok o'tganda faqat tub nomerli lampochkalar yonsin.

Endi tarmoq bo'ylab fazoga sayohat qilaylik.

Ko'z oldimizda quyidagi hodisalar namoyon bo'ladi:

1- lampochka o'chiq.

2–3—ketma-ket ikkita lampochka yongan! Bunaqasi boshqa uchramaydi!

3 va 5; 5 va 7; 11 va 13; 17 va 19; 29 va 31; 41 va 43; 71 va 73; 101 va 103 sonlar *egizak sonlar* deyiladi.

Birinchi yuzta natural sonlar bilan nomerlangan lampochkalardan 75 ta o'chiq va 25 ta nur sochib turgan lampochkalarni ko'ramiz.

Birinchi mingtalikda 832 va 168 ta.

Birinchi milliontalikda esa 921502 va 78468 ta mos ravishda o'chiq va nur sochuvchi chiroqlarni ko'rasiz.

Qorong'ilikda uchishda davom etaylik. Orqada ham, oldinda ham zim-ziyo qorong'ilik. Lekin umid uchqunlari so'nmaydi, chunki Evklid teoremasiga asosan oldinda cheksiz ko'p nur sochuvchi chiroqlar uchraydi.

Agar bizning uchish tezligimiz hatto 300000 km/s, ya'ni yorug'lik tezligiga teng bo'lsa ham nur sochuvchi chiroqlar ko'rinmaydi. Lekin biz bilamizki, P. L. Chebishev teoremasiga asosan, qancha masofa bosib o'tgan bo'lsak, ya'ni shuncha masofadan so'ng yana nur sochuvchi chiroq ko'rinadi deb o'zimizga taskin bera olamiz.

1 dan 1000 gacha bo'lgan tub sonlar jadvalini keltiramiz:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

E'tibor bersak, tub sonlarga oid masalalarni hal qilish jarayonida, buyuk matematiklarning shavkatli mehnatlari oqibatida matematikaning eng go'zal sohasi – „Sonlar nazariyasi" hosil bo'ldi. Shunisi qiziqki, sonlar nazariyasi muammolari qanchalik murakkab bo'lmasin, masalaning mazmuni hatto maktab yoki litsey o'quvchilari uchun ham tushunarli.

Masalan, Goldbax muammosi. 1742- yili Sankt-Peterburg akademiyasining a'zosi Goldbax L. Eylerga yozgan xatida quyidagi farazni bayon qildi: Beshdan katta bo'lgan har qanday natural son ko'pi bilan 3 ta tub son yig'indisi sifatida ifoda qilinadi.

Haqiqatan, $6 = 3 + 3$, $7 = 5 + 2$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, $11 = 7 + 2 + 2$ va hokazo.

Kinbor 1000 gacha, Obri 2000 gacha, Mile 9 mln gacha Goldbax gipotezasi to'g'ri bo'lishini tekshirganlar.

Goldbax muammosidan yana ikkita faraz (gipoteza) kelib chiqadi:

har qanday 4 dan ichik bo'lmagan juft son ikkita tub son yig'indisiga teng;

har qanday 7 dan kichik bo'lmagan toq son uchta tub son yig'indisiga teng.

Eyler Goldbax muammosini hal qilgani yo'q, lekin u bu muammoni hal qilish uchun har qanday 4 dan kichik bo'lmagan juft son ikkita tub son yig'indisiga tengligini isbot qilish yetarli bo'lishini ko'rsatdi.

Haqiqatan, agar $2m = p_1 + p_2$ bo'lsa.

$$2n + 1 = 2n + 3 - 2 = 2(n - 1) + 3 = p_1^1 + p_2^1 + 3.$$

Lekin, 200 yil mobaynida Goldbax muammosini hech kim hal qila olgani yo'q. Faqatgina 1937- yili akademik I. M. Vinogradov har qanday 7 dan katta toq sonning 3 ta tub son yig'indisiga tengligini isbot qildi. Bu teoremadan har qanday 10 dan kichik bo'lmagan juft son 4 ta tub son yig'indisiga tengligi kelib chiqadi. Haqiqatan,

$2n - 1 = p_1 + p_2 + p_3$ yoki $2n = p_1 + p_2 + p_3 + 1 = p_1 + p_2 + p_3 + 1 =$

$= p_1 + p_2 + p_3 + 3 - 2$ yoki $2n + 2 = p_1 + p_2 + p_3 + 3$.

Shunday qilib, hozirgacha Goldbax muammosi to'liq hal qilingani yo'q.

Ushbu muammoga o'xshash turli muammolarni hal qilish jarayonida sonlar nazariyasi fan sifatida shakllandi.

O'rta asrlarda sonlar nazariyasining gullab yashnashi buyuk fransuz matematigi P. Ferma nomi bilan bog'liq. Lekin, XVII asrda yashagan P. Ferma o'z kashfiyotlarining qolipga tushirilgan yozma bayonini qoldirmagan.

Sonlar nazariyasi eng avval fan sifatida Leonard Eylerning (1707—1783) ilmiy ishlarida shakllandi. L. Eylerning faoliyati aqlni lol qoldiradigan darajada boy. L. Eyler 1735- yili bitta ko'zi, 1766- yili ikkinchi ko'zi ham ko'rmay qolishiga qaramay, umrining oxirgi yillarida uning ilmiy faolligi kamaymadi, aksincha, hatto Eylerning ilmiy faolligi yana ham oshib bordi. Uning ilmiy ishlari 72 jildlik asarlar to'plamida joylashgan. Ilmiy ishlaridan yuzdan ortig'i sonlar nazariyasiga bag'ishlangan. P. Fermaning deyarli barcha isbotsiz keltirgan teoremalari Eyler tomonidan to'liq isbot qilinib, ko'pgina matematik qonuniyatlar kashf qilindi.

U haqida „Boshqalar uchun nafas olish jarayoni qanday kechsa, Eyler uchun hisoblash jarayoni shunday tabiiy jarayon" yoki „Yuragi urishdan to'xtaganda ham miyasi hisoblashdan to'xtamagan matematik" deyishadi.

Eyler tub sonlarga oid izlanishlarida $x = 1, 2, ..., 40$ bo'lganida tub son bo'ladigan $p(x) = x^2 - x + 41$ ko'rinishdagi polinomni kashf qildi. $p(x)$ ko'phadning birinchi 2398 ta natural sonlar orasidagi qiymatlaridan teng yarmisi tub sonlar bo'lishini isbot qildi. Yana $q(x) = x^2 + x + 72491$ ko'phad orqali ifoda qilinadigan 5000 ta tub sonlarni aniqladi.

Undan tashqari barcha qiymatlari tub sonlardan iborat n darajali ko‘phad mavjud emasligini isbot qildi. Eyler o‘z ishlari bilan addidtiv sonlar nazariyasiga asos soldi. Sonlar nazariyasida ko‘pgina qonuniyatlarning isboti Eyler nomi bilan bog‘liq. Lekin, hozirgi kunga kelib ham o‘z yechimini topmagan muammolar juda ham ko‘p.

Egizak tub sonlar, ya’ni 3 va 5; 5 va 7; 11 va 13; ...; 239 va 241 sonlar juftligi cheksiz ko‘pmi yoki cheklimi?

2^n+1, 2^n-1, n^2+1 ko‘rinishdagi tub sonlar cheksiz ko‘pmi?

Mersen tub sonlari

Ixtiyoriy p tub son uchun $M_p=2^p-1$ ko‘rinishdagi tub sonlar mukammal sonlar muammosi bilan jiddiy shug‘ullangan fransuz monaxi Meren Mersen sharafiga *Mersen tub sonlari* deb ataladi.

Yuqoridagi formulaga asosan $M_2=3$, $M_3=7$, $M_5=31$, $M_7=127$, $M_{11}=2047=23\cdot 89$ bo‘lishini hisoblab topish qiyin emas. Demak 2^p-1 ko‘rinishdagi sonlarning hammasi ham tub son emas ekan.

1756- yili L. Eyler M_{31} tub son bo‘lishini isbot qildi. Bir asrdan ko‘proq davr mobaynida M_{31} eng katta Mersen tub soni bo‘lib qoldi. Fransuz matematigi Lukas 1876-yili $M_{127}=$ $=170141183460469231731687303715884105727$ — son Mersenning tub soni bo‘lishini isbotladi. So‘ngra D. X. Lemar EHM orqali $P=521$, $P=607$, $P=1279$, $P=2203$, $P=2281$ tub sonlar uchun ham M_p Mersenning tub sonlari bo‘lishini ko‘rsatdi.

Keyinchalik Rizel (1958), $P=3217$, Gurvis (1962) $P=4253$, $P=4423$, Gillels (1964) $P=9689$, $P=9941$, $P=11213$ sonlar uchun M_p Mersen tub sonlari bo‘lishini aniqladilar.

Lukas topgan M_{127} 39 ta raqamdan tashkil topganligini ko‘rgan edik, hozirda eng katta Mersen tub soni 3376 raqamdan iborat bo‘lib, bu son Amerikaning Illinoys universiteti matematiklari tomonidan hisoblab topilgan. Ular topgan sonlari bilan juda ham faxrlanadilar va matematika fakultetidan yuboriladigan har bir xat solingan konvert ustiga shu sonni yozib qo‘yadigan bo‘ldilar.

Tabiiy savol tug‘iladi M_{M_p} Mersen soni bo‘ladimi?

Masalan, $M_{M_2} = 2^3 - 1 = 7$ – tub son; $M_{M_3} = 2^7 - 1 = 127$ – tub son $M_{M_5} = 2^{31} - 1$ – tub son (Eyler isbot qilgan); $M_{M_7} = M_{127}$ – tub son (Lukas isbot qilgan).

Ajoyib matematik P. Ferma

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \tag{1}$$

ko'rinishdagi barcha sonlar tub sonlar bo'lishini to'liq ishonch bilan aytgan. (1) formula bilan ifodalanadigan sonlar *ferma sonlari* deb aytiladi.

$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$, $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$, $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$,

$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$, $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$, $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 65536 \cdot 65536 + 1 = 641 \cdot 6700417$. F_5 murakkab son bo'lishini Eyler ko'rsatgan.

F_n formula bilan ifodalanadigan keyingi murakkab son $F_{12} = 2^{4096} + 1$ — 1883-yili rus ruhoniysi Pervushin tomonidan aniqlandi.

Endi F_5 murakkab son ekanligining isbotini keltiramiz:

$$641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4 \Rightarrow 5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}, \tag{2}$$

$$641 = 5 \cdot 128 + 1 = 5 \cdot 2^7 + 1 \Rightarrow 5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}. \tag{3}$$

(2) taqqoslamaning ikkala tarafini 2^{28} ga ko'paytiramiz:

$$5^4 \cdot 2^{28} \equiv -2^{32} \pmod{641}.$$

(3) ning ikkala tarafini 4-darajaga oshiramiz:

$5 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ hosil bo'lsa, oxirgi 2 ta taqqoslamalarni bir-biridan ayirsak, $2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$ hosil bo'ladi. Demak, $2^{32} + 1 \vdots 641$.

II BOB. MUNTAZAM KO‘PYOQLILAR

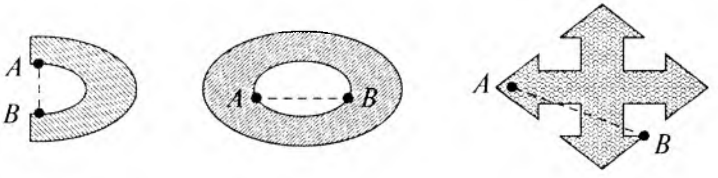
1-§. QAVARIQ SHAKLLAR

Uch o‘lchovli Evklid fazosidan, ya’ni R^3 dagi har qanday M to‘plam uchun A va B nuqtalarning A to‘plamga tegishliligidan AB kesma M ning to‘plamostisi bo‘lishi kelib chiqsa, M to‘plam *qavariq to‘plam* deyiladi.

Agar geometrik shaklni hosil qilgan nuqtalar to‘plami qavariq to‘plam bo‘lsa, bunday geometrik shakl *qavariq* deyiladi.

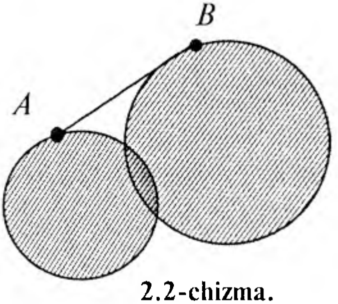
Masalan, doira, kesma, nur, to‘g‘ri chiziq, tekislik, yarim tekislik, fazo, yarim fazolar, shar, ellipsoid bilan chegaralangan geometrik jism, bularning hammasi qavariq geometrik shakllardir.

Tekislikda qavariq bo‘lmagan shakllarga misol sifatida AB kesma shaklga tegishli bo‘lmagan shakllarni keltirish mumkin (2.1-chizma).

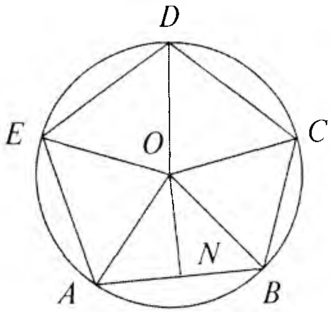


2.1-chizma.

Qavariq to‘plamlarning kesishmasi yana qavariq to‘plam bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Lekin, hatto ikkita qavariq to‘plamning yig‘indisi qavariq bo‘lmasligi ayon. Masalan, ikkita doira yig‘indisi qavariq bo‘lmasligi mumkin (2.2-chizma).



2.2-chizma.



2.3-chizma.

Tekislikda qavariq ko'pburchaklarni chekli sondagi yarim tekisliklarning kesishmasi sifatida qarash mumkin.

Tekislikda tomonlari o'zaro teng, ichki burchaklari ham o'zaro teng bo'lgan qavariq ko'pburchak *muntazam ko'pburchak* deyiladi. Bayonimiz yengil bo'lishi uchun muntazam ko'pburchak uchun quyidagi belgilashlarni kiritib, muntazam ko'pburchaklarning asosiy xossalarini ko'rib chiqamiz.

a – muntazam ko'pburchakning tomoni;

n – tomonlari soni;

R – tashqi chizilgan aylana radiusi;

r – ichki chizilgan aylana radiusi;

S – yuzi;

α – markaziy burchagi: $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$;

β – ichki burchagi.

Masalan, yuqoridagi parametrlarni muntazam 5 burchak uchun hisoblab chiqaylik. Bu ko'pburchakning tomoni a ga teng bo'lsin. Muntazam beshburchakning markaziy burchagi $\alpha = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Agar markazni ko'pburchak uchlari bilan tutashtirsak, muntazam beshburchak 5 ta teng yonli, o'zaro teng uchburchaklarga bo'linadi (2.3-chizma).

AOB uchburchakni qaraydigan bo'lsak, O uchidan AB tomoniga tushirilgan medianasi, ham balandlik, ham uchburchak AOB ning bissektrisasi bo'ladi:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} = \sin 36^\circ, \quad \frac{ON}{OA} = \frac{r}{R} = \cos 36^\circ.$$

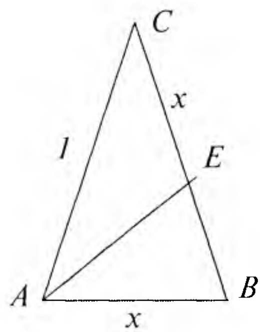
Demak,

$$R = \frac{a}{2\sin 36^\circ}, \quad r = R\cdot\cos 36^\circ = \frac{a}{2}\cdot\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ};$$

$$S = \frac{5a\cdot r}{2} = \frac{5a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot \cdot\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{5}{4}\cdot a^2\cdot\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}.$$

Shunday qilib, bu masala sin 36° ni hisoblash bilan bog'liq ekan. 36° ni hisoblash uchun yon tomoni 1 ga teng bo'lgan uchidagi burchagi 36° li teng yonli uchburchak chizaylik (2.4- chizma).

Bu uchburchakning asosidagi *A* burchagining *AE* bissektrisasini o'tkazsak, *ABC* ga o'xshash bo'lgan *ABE* uchburchak hosil bo'ladi. Bu uchburchaklar mos tomonlarining nisbatlari teng. Ya'ni, $\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x}$, bundan $x^2+x-1=0$, $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. U holda sinuslar teoremasiga asosan,



2.4- chizma.

$$\frac{\sin 36^\circ}{x}=\frac{\sin 72^\circ}{1}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{2\cos 36^\circ}{1}\Rightarrow\cos 36^\circ=\frac{1}{2x}=\frac{2}{2\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Demak, $\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. U holda bu tenglikdan sin 36°$=$

$=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, $\cos 18^\circ=\sin 72^\circ=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$; $\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Shunday qilib, $R=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$; $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$; $S=\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.

Yuqoridagi hisoblashlarni muntazam uchburchak, kvadrat, muntazam oltiburchaklar uchun ham bajarib, hisoblashlar natijalarini jadvalga joylaymiz:

n	R	r	S	$\alpha=\frac{360^\circ}{n}$	β	
3	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	120°	60°	$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$; $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2	90°	90°	$d=a\sqrt{2}$; $\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$
5	$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	72°	108°	$\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
6	α	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$	60°	120°	

Qavariq ko'pyoqning yoqlari bir xil muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'lib, har bir uchidan chiqqan qirralarining soni bir xil bo'lsa, bunday ko'pyoq *muntazam ko'pyoq* deyiladi.

Endi qanday muntazam ko'pyoqlar mavjudligi masalasini muhokama qilib chiqamiz.

Ma'lumki, muntazam ko'pyoqning har bir uchidagi tekis burchaklari yig'indisi 360° dan kichik.

Agar n muntazam ko'pyoqning yog'idagi ko'pburchakning burchaklari (tomonlari) soni, k – bitta umumiy uchga ega qirralari soni, β – uchidagi tekis burchagi (yog'idagi ko'pburchakning ichki burchagi) bo'lsa, u holda quyidagi holatlar bo'lishi mumkin:

n	β	k	Uchidagi tekis burchaklar yig'indisi	Ko'pyoqli burchak hosil bo'ladi-mi?
3	60°	3	180°	Ha
3	60°	4	240°	Ha
3	60°	5	300°	Ha
3	60°	6	360°	Yo'q
4	90°	3	270°	Ha
4	90°	4	360°	Yo'q
5	108°	3	324°	Ha
5	108°	4	432°	Yo'q
$n \geq 6$	$\geq 120°$	3	$\geq 360°$	Yo'q

Jadvaldan ko'rinadiki, faqat 5 xil muntazam ko'pyoq mavjud bo'lishi mumkin ekan:

$n = 3,\ k = 3;$

$n = 3,\ k = 4;$

$n = 3,\ k = 5;$

$n = 4,\ k = 3;$

$n = 5,\ k = 3.$

5 xil muntazam ko'pyoq yana *Platon jismlari* ham deb yuritiladi.

Qavariq bo'lmagan muntazam (yulduzsimon) ko'pyoqlilar *Puanso jismlari* deyiladi.

Eyler teoremasi. *Ixtiyoriy qavariq ko'pyoqda Q – qirralar soni, U – uchlari soni, Y – yoqlari soni bo'lsa, u holda bu kattaliklar orasida quyidagi bog'lanish mavjud:*

$$Y + U - Q = 2\,. \qquad (1).$$

Muntazam ko'pyoqlar uchun $Q = \frac{n \cdot Y}{2}$; $Q = \frac{k \cdot U}{2}$; $U = \frac{2Q}{k}$; $Y = \frac{2Q}{n}$ tengliklar ham o'rinli. U holda bu tengliklardan va Eyler teoremasidan $P = \dfrac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}$ hosil bo‘ladi.

Endi muntazam ko‘pyoqlarning har biri uchun yoqlari, uchlari, qirralari sonini hisoblab chiqish imkoniyatiga egamiz. Har bir ko‘pyoq o‘zining yoqlari soniga qarab nomlangan:

n	k	Q	$Y=\frac{2P}{n}$	$U=\frac{2P}{k}$	
3	3	6	4	4	Tetraedr
3	4	12	8	6	Oktaedr
3	5	30	20	12	Ikosaedr
4	3	12	6	8	Geksaedr
5	3	30	12	20	Dodekaedr

2-§. MUNTAZAM KO‘PYOQLARNI YASASH

Eng osoni kubni yasab olish va qolgan muntazam ko‘pyoqlarni kub orqali yasash.

Muntazam ko‘pyoqlarni yasash jarayonida quyidagilarga e’tibor berish lozim:

muntazam ko‘pyoqlarning hamma yoqlari bir-biriga teng;

ikki yoqli burchaklar teng;

ko‘pyoqli burchaklari teng;

bitta uchidan chiqqan qirralarining oxirlari bitta tekislikda yotadi;

har bir yog‘i uchun unga parallel yoq mavjud (tetraedrdan tashqari);

har bir qirra uchun unga parallel qirra mavjud (tetraedrdan tashqari);

har bir qirra uchun unga perpendikular bo‘lgan qirra mavjud;

hamma uchlari kubning markazidan teng uzoqlikda joylashgan.

Muntazam ko‘pyoqning quyidagi elementlari uzunliklari uning asosiy parametrlari deyiladi:

r – muntazam ko‘pburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi;

R – muntazam ko‘pburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi;

r_0 – ko‘pyoqqa ichki chizilgan sferaning radiusi;

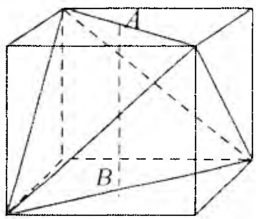
R_0 – ko‘pyoqqa tashqi chizilgan sferaning radiusi;

r_r – qirralariga urinuvchi sfera radiusi;

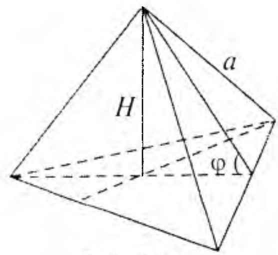
φ – ikki yoqli burchak;
S – to'la sirti;
V – hajmi;
a – ko'pyoqning qirrasi;
b – kubning qirrasi.

Muntazam tetraedr. Kubning biror uchidan uning shu uch tegishli bo'lgan yoqlarining diagonallarini o'tkazamiz, shu diagonallarning uchlarini tutashtirsak, hosil bo'lgan ko'pyoq muntazam tetraedr bo'ladi (2.5-chizma).

Agar b – kubning qirrasi bo'lsa, muntazam tetraedrning qirrasi $a = b\sqrt{2}$. Tetraedr uchlari kubning uchlarida yotgani uchun kubga tashqi chizilgan sfera tetraedrga ham tashqi chizilgan sfera bo'ladi va $R_0 = \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.



2.5-chizma.



2.6-chizma.

Tetraedr qirralariga urinuvchi sferaning radiusi $r_r = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

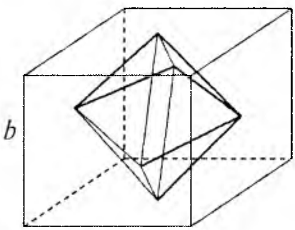
2.6-chizmadan, $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Agar R_0 ma'lum bo'lsa, $r_0 = H - R_0$. Demak, $r_0 = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. Tetraedrning to'la sirti $S_{t.s.} = a^2\sqrt{3}$, hajmi esa $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ bo'lishini hisoblab topish qiyin emas.

Muntazam tetraedr uchun quyidagini bilish foydadan holi emas:

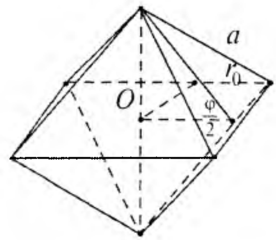
Kubdan har birining hajmi $\frac{1}{6}b^3$ ga teng bo'lgan to'rtta bir xil piramidani kesib tashlasak, hosil bo'lgan shakl tetraedr bo'ladi. Demak, tetraedrning hajmi quyidagiga teng: $b^3 - \frac{4}{6}b^3 = \frac{b^3}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Tetraedrni kubning markazi bilan ustma-ust tushadigan nuqtasini tetraedr uchlari bilan tutashtirsak, tetraedr asoslari tetraedr yoqlaridan iborat, umumiy uchi esa kubning markazidan iborat 4 ta bir xil piramidaga ajraladi. Bundan

$$V = 4 \cdot \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot r_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} .$$



2.7-chizma.



2.8-chizma.

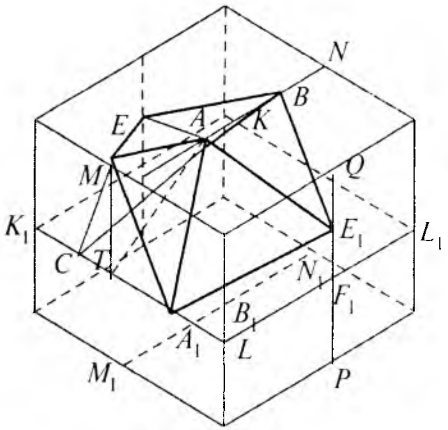
Muntazam oktaedr. Kub yoqlarining markazlarini kubni o'rayotgandek ketma-ket tutashtiramiz. Natijada perpendikular tekisliklarda yotuvchi uchta kvadrat hosil bo'ladi. Kvadrat tomonlari esa oktaedrning qirralaridan iboratdir. U holda, agar b kubning qirrasi bo'lsa, oktaedrning qirrasi $a = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ bo'ladi. 2.7-chizmadan $R_0 = \frac{b}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $r_r = \frac{a}{2}$. Endi 2.8-chizmaga murojaat qilsak, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2} : h = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Agar $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ formulani e'tiborga olsak, $\cos\varphi = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$; $r_0 = \frac{a}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Agar oktaedr markazini uning uchlari bilan tutashtirsak, r_0 shu piramidalar balandliklari bilan bir xil bo'lishi ko'rinadi.

U holda $V = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^3\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ va oktaedr to'la sirti

$$S_{\text{t.s.}} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3} .$$

Muntazam ikosaedr. Qirrasi b ga teng kub berilgan bo'lsin. Har bir yog'idagi kvadratlarning o'rta chiziqlarini o'tkazamiz: $MN \parallel M_1N_1$, $KL \parallel K_1L_1$, $RQ \parallel R_1Q_1$ (2.9- chizma).



2.9-chizma.

Har bir oʻrta chiziqda teng kesmalar ajratamiz: $AB = A_1B_1 = CD = C_1D_1 = EF =$ $= E_1F_1$. Natijada, $MA = NB =$ $= KC = LD = ... = F_1P_1$ va $AD =$ $= AB = ... = BE_1 = E_1C$. AB kesmani a orqali belgilasak,

$$MA = NB = \frac{b-a}{2}.$$

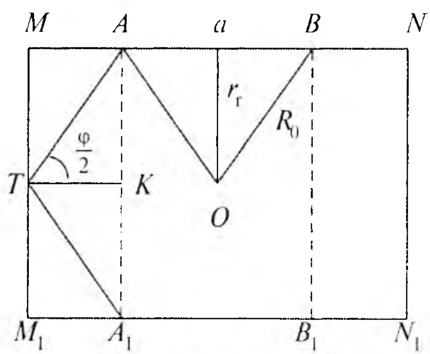
TMA uchburchakdan $MA^2 = AT^2 - MT^2$,

$$AT = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{4}a^2 - \frac{b^2}{4}; \quad a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b; \quad b = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Shunday qilib, hosil boʻlgan koʻpyoqning hamma yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat muntazam koʻpyoq boʻlib, uning har bir qirrasi $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ ga teng. Hamda har bir uchidan 5 ta qirra chiqadi. Kubning har bir yogʻida koʻpyoqning ikkitadan uchi joylashgan. Demak, koʻpyoqning 12 ta uchi, 30 ta qirrasi, 20 ta yogʻi bor.

2.10-chizmadan $r_r = \frac{1}{2}b = \frac{a}{4}(\sqrt{5}+1)$ boʻlishi koʻrinib turibdi.



2.10-chizma.

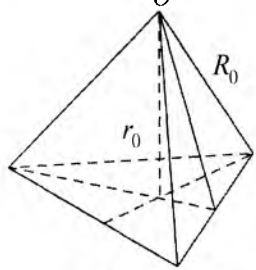
Koʻpyoqning qolgan parametrlarini hisoblash uchun kubning MNN_1M_1 tekislik orqali hosil qilingan kesimini (2.9-chizma) tahlil qilsak,

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{MA}{AT}=\frac{MA}{h}=\frac{b-a}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}};\ \cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{6};\ \cos\varphi=-\frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$R_0=OB;\ R_0^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+(r_r)^2=\frac{a^2}{8}(\sqrt{5}+5);\ R_0=\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Bu ko'pyoqning ixtiyoriy bitta yog'ini kubning O markazi bilan tutashtirsak, asosi muntazam uchburchakdan iborat bo'lgan, yon qirralari R_0 ga, balandligi r_0 ga teng piramida hosil bo'ladi (2.11-chizma).

Bu piramida hajmini topib, 20 ga ko'paytirsak, ko'pyoqning hajmi kelib chiqadi:



2.11-chizma.

$$V=20\cdot\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot r_0;\ r_0^2=R_0^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2h^2=$$

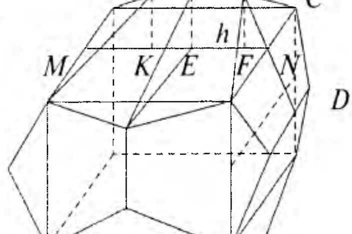
$$=\frac{a^2}{24}(7+3\sqrt{5});\quad r_0=\frac{a}{2\sqrt{6}}\sqrt{7+3\sqrt{5}}.$$ Bundan $V=\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$ ekanligini hosil qilamiz. Ko'pyoqning to'la sirti $S_{t.s.}=$

$$=20\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=5a^2\sqrt{3}.$$

Muntazam dodekaedr. Ikosaedr hosil qilingani kabi, yana qirrasi b ga teng kubning har bir yog'ining o'rta chizig'ini o'tkazamiz. Uzunligi $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ bo'lgan kesmani kub yog'ining o'rta chizig'iga shunday joylashtiramizki, natijada bu kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqta kub yog'ining o'rta chizig'ini ham teng ikkiga bo'lsin. Endi uzunligi a ga teng kesmani shunday h balandlikka ko'taramizki, natijada $a=AB=BC=BD=\ldots$ bo'lsin (2.12-chizma).

BCN uchburchakdan $BN=$
$$=\sqrt{a^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\cdot a;$$ BNF uchburchakdan $h^2BN^2-FN^2=\frac{a^2}{4}$;

$h=\frac{a}{2}$ larni; EKL uchburchakdan



2.12- chizma.

$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{b}{2}:h=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2};\cos\varphi=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ larni hosil qilamiz. Ko'pyoqqa tashqi chizilgan sferaning radiusi kub diagonalining yarmiga teng:

$$R_0=\frac{b\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot a=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}.$$

Ko'pyoqning qirralariga urinuvchi sfera radiusi

$$r_r=\frac{b}{2}+h=\frac{a}{\sqrt{5}-1}+\frac{a}{2}=\frac{a}{4}(3+\sqrt{5}).$$

Ko'pyoqning hajmini va to'la sirtini hisoblash uchun tomoni a ga teng bo'lgan muntazam beshburchakni ko'rib chiqamiz. 2.11-chizmadan:

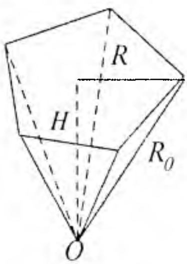
$$\angle NBC=\frac{1}{2}\angle DBC=\frac{108^\circ}{2}=54^\circ.$$

U holda,

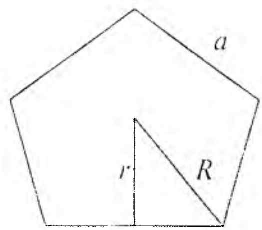
$$\angle BCN=36^\circ;\ \sin 36^\circ=\frac{NC}{BC}=\frac{b}{2}:a=\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Endi asosining tomonlari a ga teng muntazam beshburchakdan iborat, markazi kubning markazi bo'lgan O nuqtada yotgan piramidaning hajmini topamiz.

Piramidaning yon qirralari R_0 ga, balandligi esa $H=r_0$ ga teng (2.13-chizma). $\sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ni e'tiborga olsak, tomoni a ga teng bo'lgan muntazam beshburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi $R=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$, ichki chizilgan aylananing radiusi esa $r=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$ bo'ladi (2.14-chizma).



2.13-chizma.



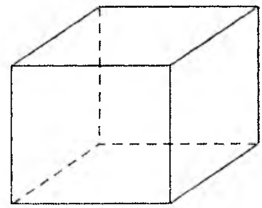
2.14-chizma.

Endi H ni hisoblaymiz: $H = r_0 = \sqrt{R_0^2 - R^2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

U holda muntazam beshburchakning yuzi $S = \frac{5}{4} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$.

Ko'pyoqlining to'la sirti $S_{t.s.} = \frac{15a^2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$ va hajmi $V = \frac{a^3}{4} \cdot (15+7\sqrt{5}) =$ $= \frac{b^3}{4}(\sqrt{5}+5)$ bo'ladi.

Muntazam geksaedr (kub). Kubning qirrasi a, tashqi chizilgan sferaning radiusi R_0 kub diagonalining yarmiga teng $R_0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, kubga ichki chizilgan sfera radiusi $r_0 = \frac{a}{2}$. Kub qirralariga urinuvchi sfera radiusi $r_r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (2.15-chizma).



2.15-chizma.

Kubning hajmi a^3 ga, to'la sirti esa $6a^2$ ga teng.

Muntazam ko'pyoqlar parametrlarining qiymatlarini quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

Muntazam ko'pyoq	Tetraedr	Kub	Oktaedr	Ikosaedr	Dodekaedr
$\cos\varphi$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$
R_0	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$
r_0	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}a$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$
r_r	$\frac{a\sqrt{2}}{4}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}a$	$\frac{a}{4}(3+\sqrt{5})$
S_n	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$5a^2\sqrt{3}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{15a^2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$
V	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	a^3	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}) = \frac{5}{6}a^3\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$

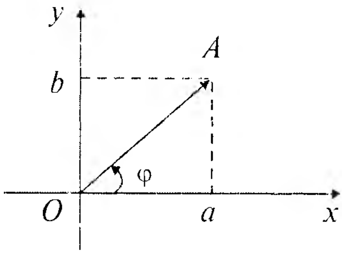
III BOB. TENGLAMALAR

1- §. KOMPLEKS SONLAR

Agar bizga $x^2-4=0$ kvadrat tenglama berilgan bo'lsa, $x^2=-4$, $x=\pm\sqrt{4}, x_{1,2}=\pm 2$, ya'ni kvadrat tenglamaning ikkita ildizini hosil qilamiz. Endi, $x^2+1=0$ tenglamani yuqoridagidek usulda yechmoqchi bo'lsak, $x^2=-1$ hosil bo'ladi. Bilamizki, har qanday haqiqiy sonning kvadrati manfiy emas. Demak, $x^2=-1$ tenglamani qanoatlantiradigan haqiqiy son yo'q. Shu yerda tenglama haqiqiy ildizga ega emas ekan deb xulosa chiqarib, fikrimizni yakunlashimiz mumkin. Lekin tenglamani haqiqiy son qanoatlantirmasa, haqiqiy son bo'lmagan boshqa son qanoatlantirishi mumkin-ku, deb fikrimizni davom ettirishimiz ham mumkin.

$x^2=-1$ tenglamani qanoatlantiruvchi $x=\pm\sqrt{-1}$, ya'ni $\sqrt{-1}$ ifodani i bilan belgilasak, $i^2=-1$ hosil bo'ladi. i ifoda *mavhum birlik* deb ataladi. Ixtiyoriy a, b haqiqiy sonlar uchun $z=a+bi$ ko'rinishdagi ifoda esa *kompleks son* deyiladi. Dekart koordinatalar sistemasida har bir $a+bi$ kompleks songa $A(a, b)$ nuqtani mos qo'ysak, tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami bilan barcha kompleks sonlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi (3.1-chizma).

$\overrightarrow{OA}$ vektorni esa kompleks sonning geometrik ifodasi sifatida qarash mumkin. $\overrightarrow{OA}$ vektorni OX o'qining musbat yo'nalishi bilan, soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda hisoblaganda hosil qilgan φ burchak, kompleks sonning argumenti, $\overrightarrow{OA}$ vektor uzunligi kompleks *sonning moduli* deb ataladi. $\overrightarrow{OA}$ vektor uzunligini r orqali belgilasak, chizmadan $\sin\varphi=\frac{b}{r}$, $\cos\varphi=\frac{a}{r}$



3.1- chizma.

ekanligini kelib chiqadi va bundan $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ifodani hosil qilamiz. Bu ifoda kompleks sonning *trigonometrik shakli* (formasi) deyiladi.

Kompleks sonning argumenti

$a>0,\ b>0$ bo'lsa, u holda $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$;

$a<0,\ b>0$ bo'lsa, u holda $\varphi=\pi-\operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$;

$a<0,\ b\le 0$ bo'lsa u holda $\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$;

$a>0,\ b\le 0$ bo'lsa, u holda $\varphi=2\pi-\operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$;

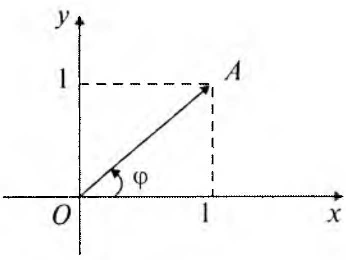
$a=0,\ b>0$ bo'lsa, u holda $\varphi=\frac{\pi}{2}$;

$a=0,\ b<0$ bo'lsa, u holda $\varphi=\frac{3\pi}{2}$

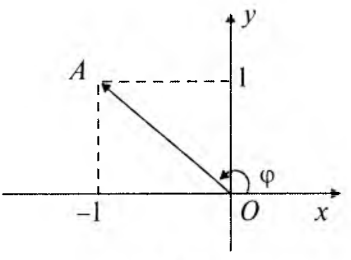
formulalar orqali hisoblanadi.

Misol. 1) $1+i$; 2) $-1+i$; 3) $-1-i$; 4) $1-i$ kompleks sonlarni trigonometrik ko'rinishda ifodalang.

Yechish. 1). Dekart koordinatalar tekisligida berilgan $1+i$ kompleks sonning o'rnini aniqlaymiz (3.2-chizma):



3.2-chizma.



3.3-chizma.

Chizmadan $r=\sqrt{2}$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$ larni topib, berilgan kompleks sonning trigonometrik shaklini yozamiz:

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+2k\pi)).$$

2) 3.3-chizmadan $r = \sqrt{2}$; $\varphi = \pi - \frac{\pi}{4}$ larni topib,

$$-1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4})) =$$
$$= \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi))$$

ifodani hosil qilamiz.

3) 3.4-chizmadan $r = \sqrt{2}$; $\varphi = \pi + \frac{\pi}{4}$ larni topib,

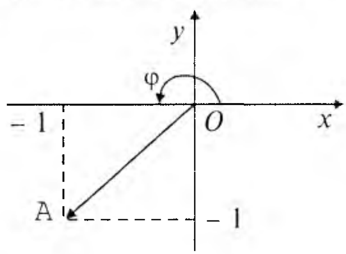
$$-1 - i = \sqrt{2}(\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{4})) =$$
$$= \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi))$$

ifodani hosil qilamiz.

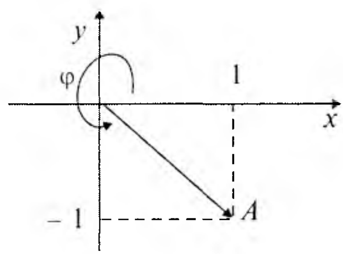
4) 3.5- chizmadan $r = \sqrt{2}$; $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ larni topib,

$$-1 + i = \sqrt{2}(\cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{4})) =$$
$$= \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi))$$

ifodani keltirib chiqaramiz.



3.4- chizma.



3.5 - chizma.

Agar $a = c, b = d$ bo'lsa, u holda $a + bi$ va $c + di$ kompleks sonlar teng deyiladi.

$a + bi$ va $c + di$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. U holda kompleks sonlarning yig'indisi, ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Agar $a+bi \neq 0$, ya'ni $a^2+b^2 \neq 0$ bo'lsa, $a+bi$ ga teskari kompleks son quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2-(bi)^2}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Haqiqatan ham, $(a+bi)(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)=1$ bo'lishini tekshirib chiqish qiyin emas.

Barcha kompleks sonlar to'plamini C bilan belgilaymiz, R – barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin, u holda $R \subset C$ bo'lishi ravshan. Haqiqatan, har qanday a haqiqiy son uchun $a=a+0\cdot i \in C$

Undan tashqari kompleks sonlar quyidagi xossalarga ega bo'lishini tekshirib chiqish qiyin emas:

$z=a+bi$, $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, $z_3=a_3+b_3i$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin.

1°. Ixtiyoriy $z_1, z_2 \in C$ uchun $z_1+z_2 \in C$ va $z_1\cdot z_2 \in C$.

2°. Ixtiyoriy $z \in C$, $0 \in C$ lar uchun $z+0=z$.

3°. Ixtiyoriy $z \in C$ uchun $-z \in C$ va $z+(-z)=0$.

4°. Ixtiyoriy $z_1, z_2 \in C$ uchun $z_1+z_2=z_2+z_1$.

5°. Ixtiyoriy $z_1, z_2, z_3 \in C$ uchun $(z_1+z_2)+z_3=z_1+$ $+(z_2+z_3)$.

6°. $1=1+0\cdot i \in C$ va ixtiyoriy $z \in C$ uchun $1\cdot z=z$.

7°. Ixtiyoriy $z \neq 0$, $z \in C$ uchun $z^{-1} \in C$ va $z\cdot z^{-1}=1$.

8°. Ixtiyoriy $z_1, z_2, z_3 \in C$ uchun $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+$ $+z_1\cdot z_3$.

Agar $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ kompleks sonlar berilgan bo'lsa, u holda $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+$ $+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

Haqiqatan ham,

$$z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+$$

$+ i^2 \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) = r_1 \cdot r_2((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) +$
$+ i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)) = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) +$
$+ i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$

Agar xususiy holda $z_1, z_2, ..., z_n$ kompleks sonlar $z = r(\cos\varphi +$ $+ i\sin\varphi)$ ga teng deb olsak, u holda $z^n = r^n(\cos n\cdot\varphi + i\sin n\cdot\varphi)$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$ $+ i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ tenglikni mustaqil tekshirib ko'ring.

2- §. KOMPLEKS SONDAN ILDIZ CHIQARISH

Trigonometrik shaklda yozilgan $z = r(\cos(\varphi + 2\pi k) +$ $+ i\sin(\varphi + 2\pi k))$ kompleks son berilgan bo'lsin. Bu sondan chiqarilgan n- darajali kompleks ildiz $\rho(\cos x + i\sin x)$ bo'lsin deb faraz qilsak, u holda $\rho^n(\cos n\cdot x + i\sin n\cdot x) = r(\cos(\varphi + 2\pi k) +$ $+ i\sin(\varphi + 2\pi k))$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} +$ $+ i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$ kompleks sonlar z dan chiqarilgan barcha n- darajali ildizlardir. Ularning soni n ta, chunki k ga barcha $0, 1, ..., n-1$ qiymatlarni bersak, $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ har xil n ta kompleks son hosil bo'ladi ($z_0 = z_n$, $z_1 = z_{n+1}, ...$ bo'lishini tekshirib ko'ring).

Misol. $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3},\ k = 0, 1, 2.$

Ildizlarni $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ orqali belgilasak, u holda $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} +$ $+ i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Misol. 1 dan chiqarilgan barcha n- darajali kompleks ildizlarni $n = 4,\ 6,\ 8,\ 12$ lar uchun hisoblab ko'ring.

Misollar.

1. Amallarni bajaring:

1) $\frac{(3-4i)(4-3i)}{2+i}$; 2) $(3-2i)(5+6i)$;

3) $(1-2i)^2$; 4) $(1-2i)(1+2i)^2$.

2. Trigonometrik ko'rinishga keltiring:

1) $2+2i$; 2) $1-\sqrt{3}i$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 4) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3-§. KUB TENGLAMALAR

$$ay^3+by^2+cy+d=0,\ a\neq 0 \tag{1}$$

ko'rinishdagi kubik tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglamaning ikkala tomonini a ga bo'lib

$$y^3+b_1y^2+c_1y+d_1=0 \tag{2}$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Hosil bo'lgan tenglamada $y=x-\frac{b_1}{3}$ almashtirishni bajarib, tenglamani

$$x^3+px+q=0 \tag{3}$$

ko'rinishga keltiramiz.

Agar (3) tenglama ildizlaridan biri x_0 bo'lsa, u $u^2-x_0u-\frac{p}{3}=0$ kvadrat tenglama ildizlarining yig'indisiga teng bo'lishi ravshan. Faraz qilaylik α, β shu kvadrat tenglamaning ildizlari bo'lsin, u holda

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x_0,\\ \alpha\cdot\beta=-\frac{p}{3}.\end{cases} \tag{4}$$

Bu ifodalarni (3) tenglamaga qo'ysak,

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0$$

tenglama hosil bo'ladi. (4) sistemadagi $\alpha\cdot\beta=-\frac{p}{3}$ ni e'tiborga olib,

$$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=-q,\\ \alpha^3\cdot\beta^3=-\frac{p^3}{27}\end{cases}$$

tengliklarni yozish mumkin bo'ladi. Demak, α^3,β^3 lar Viyet teoremasiga ko'ra

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{5}$$

kvadrat tenglamaning ildizlari bo'ladi.

Agar $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ belgilash kiritsak, u holda (5) kvadrat tenglamadan $z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}$, bundan esa $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$, $\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ larni hosil qilamiz. Bu ifodalardan, *Kordano formulalari* deb ataluvchi

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

formulani hosil qilamiz.

Har bir kompleks sonning uchta uchinchi darajali ildizi mavjudligidan biz α ning ham, β ning ham uchtadan qiymatlarini hosil qilamiz. U holda $\alpha + \beta$ ning 9 ta qiymati hosil bo'ladi. Shulardan faqat uchtasigina (3) tenglamaning ildizlari bo'ladi.

Agar 1 dan chiqarilgan 3-darajali ildizlar

$$\varepsilon_0 = 1;\ \ \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \ \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ hamda } \alpha_0\ \ \alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$$

ildizlardan biri bo'lsa, u holda qolganlari $\alpha_1 = \alpha_0 \cdot \varepsilon_1, \alpha_2 = \alpha_0 \cdot \varepsilon_2$ bo'lishini ko'rish mumkin. Xuddi shunday $\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ ildizlardan biri β_0 bo'lsa, $\beta_1 = \beta_0 \cdot \varepsilon_1, \beta_2 = \beta_0 \cdot \varepsilon_2$ qolgan ildizlar bo'ladi. Endi $x_0 = \alpha_0 + \beta_0$ (3) tenglamaning ildizlaridan biri bo'lsa, $\alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}$ shartga ko'ra $x_1 = \alpha_0 \cdot \varepsilon_1 + \beta_0 \cdot \varepsilon_2$, $x_2 = \alpha_0 \cdot \varepsilon_2 + \beta_0 \cdot \varepsilon_1$ kompleks sonlar (3) tenglamaning qolgan ildizlaridir.

Agar berilgan (3) tenglamada

1) $D > 0$ bo'lsa, u holda tenglamaning bitta haqiqiy va ikkita bir-biriga qo'shma kompleks ildizlari mavjud;

2) $D = 0$ bo'lsa, tenglamaning uchta haqiqiy ildizi bo'lib, ularning kamida bittasi karrali;

3) $D < 0$ bo'lsa, tenglama uchta turli haqiqiy ildizga ega.

Misol. $ix^3 - 3ix + 2 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamadan keltirilgan kub tenglama hosil qilamiz, buning uchun tenglamani $(-i)$ ga ko'paytiramiz: $x^3 + 3x - 2i = 0$. Bu yerda $p = 3$, $q = -21$, $D = 0$ bo'lganligi uchun $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{i}$ ga ega bo'lamiz. Demak, $\alpha_1 = -i$. $\alpha_1 \cdot \beta_1 = -1$ bo'lishini e'tiborga olsak, $\beta_1 = i$. U holda $x_1 = -2i$; $x_2 = i$; $x_3 = i$.

Geometriya kursida ratsional koeffitsiyentli $x^3 + ax^2 + bx = c = 0$ kub tenglama ildizlari kvadrat radikallarda yechilsa, uzunligi tenglama ildiziga teng bo'lgan kesmani sirkul va chizg'ich yordamida yasash mumkinligi, aks holda esa bunday kesmani sirkul va chizg'ich yordamida yasab bo'lmasligi isbot qilingan.

Kubni ikkilantirish masalasi. Qirrasining uzunligi 1 ga teng kub berilgan bo'lsa, hajmi berilgan kub hajmidan ikki marta katta kub yasang.

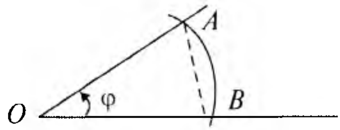
Yechish. Masala shartiga ko'ra $x^3 = 2$ yoki $x = \sqrt[3]{2}$. Demak, bunday kubni sirkul va chizg'ich orqali yasab bo'lmaydi.

Burchakni teng uchga bo'lish masalasi. Sirkul va chizg'ich yordamida berilgan ixtiyoriy burchakni teng uchga bo'ling.

Yechish. Bu masalani yechishda quyidagi teoremadan foydalanamiz:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *kub tenglama kvadrat radikallarda yechilishi uchun, u kamida bitta ratsional ildizga ega bo'lishi zarur va yetarli.*

Uchi O nuqtada, tomonlari OA, OB nurlardan iborat φ burchak berilgan bo'lsin. O nuqtani markaz qilib, radiusi 1 ga teng yoy chizamiz (3.6- chizma). U holda $OB = \cos\varphi$. Agar OB kesma berilgan bo'lsa, sirkul va chizg'ich yordamida φ burchakni yasash mumkin va, aksincha, φ burchak berilgan bo'lsa, OB kesmani yasash mumkin. Izlanayotgan burchak $\frac{\varphi}{3}$ bo'lgani uchun agar $x = \cos\frac{\varphi}{3}$ kesmani sirkul va chizg'ich yordamida yasay olsak, u holda $\frac{\varphi}{3}$ burchakni ham sirkul va chizg'ich yordamida yasash mumkin.



3.6- chizma.

Shunday qilib, berilgan masala, agar $a = \cos\varphi$ kesma berilgan bo'lsa, $x = \cos\frac{\varphi}{3}$ kesmani yasash mumkinmi degan masalaga teng kuchli.

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = (\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3})^3 =$$

$$= \cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{3} + i(3\cos^2\frac{\varphi}{3}\cdot\sin\frac{\varphi}{3} - \sin^3\frac{\varphi}{3})$$

bo'lganidan

$$\cos\varphi = \cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{3} = \cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}(1-\cos^2\frac{\varphi}{3}) =$$

$$= \cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3} + 3\cos^3\frac{\varphi}{3} = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Bundan $4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3} - \cos\varphi = 0$. Agar $a = \cos\varphi$ va $x = \cos\frac{\varphi}{3}$ ekanligini e'tiborga olsak, $4x^3 - 3x - a = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz.

Agar $a = 0$ bo'lsa, ya'ni $\varphi = 90^\circ$ bo'lsa, u holda hosil qilingan tenglama kvadrat radikallarda yechiladi. Ya'ni 90° li burchakni sirkul va chizg'ich yordamida teng uchga bo'lish mumkin.

Umumiy holda esa bu tenglama kvadrat radikallarda yechilmaydi.

Masalan, $\varphi = 60^\circ$ bo'lsin, u holda tenglama $8x^3 - 6x - 1 = 0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning ratsional ildizi mavjud bo'lsa, u ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$ lardan biriga teng bo'lishi kerak. Lekin, bu sonlar tenglamani qanoatlantirmaydi.

Muntazam yettiburchak yasash haqidagi masala. Sirkul va chizg'ich yordamida muntazam yettiburchak yasash mumkin emasligini ko'rsatamiz.

Birlik doiraga ichki chizilgan muntazam ko'pburchak berilgan bo'lsin. U holda $z^7 - 1 = 0$ tenglamaning barcha kompleks ildizlari tekislikda muntazam yettiburchakning uchlarini ifodalaydi. Bu tenglamaning bitta ildizi 1 ga teng. U holda $z^7 - 1 = (z-1)(z^6 +$

$+ z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ bo'lgani uchun tenglamaning qolgan ildizlari

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \qquad (*)$$

tenglama ildizlaridan iborat. Bu tenglamaning ikkala tomonini z^3 ga bo'lib, quyidagi ko'rinishga keltirib olamiz:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

va unga $t = z + \frac{1}{z}$ belgilashni kiritsak,

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0 \qquad (**)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning ham ratsional ildizlari yo'q.

Demak, (**) tenglama kvadrat radikallarda yechilmaydi. Bundan (*) tenglamaning ham kvadrat radikallarda yechilmasligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, tekislikda (*) tenglama ildizlarini sirkul va chizg'ich yordamida yasash mumkin emas.

4- §. YASASHGA DOIR AYRIM MASALALAR

Ferma sonlari va aylanani teng bo'laklarga bo'lish masalasi. Buyuk nemis matematigi Karl Fridrix Gauss (1777–1855) 1801-yili o'zining „Arifmetik tadqiqotlar" nomli asarida sirkul va chizg'ich yordamida 17 burchakli muntazam ko'pburchak yasash usulini bayon qilib, qanday n lar uchun sirkul va chizg'ich yordamida muntazam n burchak yasash mumkin va qandaylari uchun yasab bo'lmasligi masalasini hal qildi.

Agar muntazam n burchak yasalgan bo'lsa, uning har bir burchagini sirkul va chizg'ich yordamida teng ikkiga bo'lib, muntazam $2n$ burchak yasash mumkin. Agar muntazam $2n$ burchak yasalgan bo'lsa, uning uchlarini bittadan oralatib to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirsak, muntazam n burchak hosil bo'ladi. Shuning uchun muntazam n burchaklarni yasash masalasini faqat toq n lar uchun hal qilish yetarli.

G a u s s   t e o r e m a s i. *Burchaklari soni toq son bo'lgan muntazam n burchak yasash uchun n ham tub son, ham Fermaning tub sonlari bo'lishi zarur va yetarli.*

Bizga ma'lum bo'lgan Fermaning tub sonlari 3, 5, 17, 257, 65537 lardan iborat. Demak, muntazam 7, 9, 11 va hokazo burchakli ko'pburchaklarni sirkul va chizg'ich yordamida yasab bo'lmas ekan.

Gauss teoremasiga asosan, $n = 3, 5, 15, 17, 51, 85$ natural sonlar uchun sirkul va chizg'ich yordamida muntazam n burchak yasash mumkin.

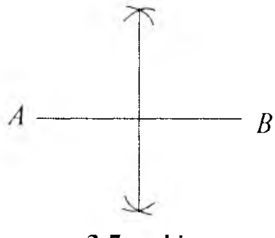
Agar muntazam n burchakning markaziy burchagiga teng bo'lgan $\frac{360^\circ}{n}$ burchakni sirkul va chizg'ich yordamida yasash mumkin bo'lsa, bunday muntazam n burchakni ham sirkul va chizg'ich yordamida yasash mumkin.

Sirkul va chizg'ich yordamida berilgan burchakka teng burchakni, berilgan burchakning $\frac{1}{2n}$, $(n \in N)$ qismiga teng burchaklarni yasash mumkin. Undan tashqari 2 ta burchak ayirmasiga teng burchakni ham yasash mumkin. Masalan, sirkul va chizg'ich yordamida 60°, 30°, 15°, 7,5°, 3,75°, 120°, 150°, 75°,..., 90°, 45°, 22,5°, ... ; $15 - 9 = 6°$, 3°, 12°, 24°, $24 - 3 = 21°$, 48°, 72° va hokazo burchaklarni yasash mumkin.

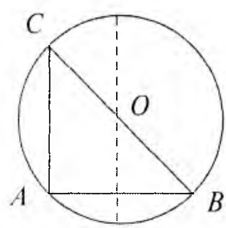
Qadimgi grek matematiklari sirkul va chizg'ich yordamida muntazam uchburchak, kvadrat, muntazam beshburchak, muntazam oltiburchak va bu muntazam ko'pburchaklardan hosil qilinishi mumkin bo'lgan (muntazam sakkizburchak, muntazam o'nburchak...) muntazam ko'pburchaklarni yasay olganlar.

Sirkul va chizg'ich yordamida yasashga oid masalalarning ba'zi namunalarini ko'rib chiqamiz:

Kesmaga o'rta perpendikular o'tkazish. AB kesma berilgan bo'lsin. Sirkulning ignali uchini A nuqtaga qo'yib, radiusi AB kesmadan kattaroq bo'lgan aylana chizamiz. Sirkulni o'zgartirmasdan B nuqtani markaz qilib yana aylana chizamiz. Aylanalar kesishish nuqtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq AB kesmaga o'rta perpendikular bo'ladi (3.7-chizma).

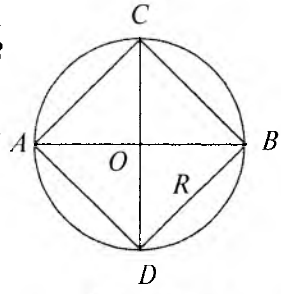


3.7 - chizma.



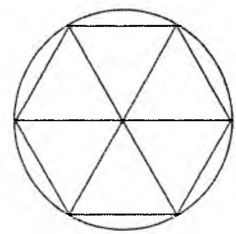
3.8- chizma.

AB kesmaning A uchidan unga perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazish. AB kesmaga o‘rta perpendikular o‘tkazamiz. A va B nuqtalardan o‘tuvchi markazi o‘rta perpendikularda yotuvchi aylana chizamiz. Diametrga tiralgan burchak 90°. Demak, $\angle C + \angle B = 90°$ (3.8-chizma).



3.9- chizma.

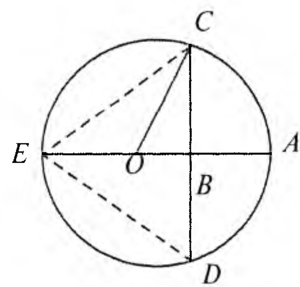
Aylanani teng 4 bo‘lakka bo‘lish. Buning uchun ixtiyoriy diametrga perpendikular qilib ikkinchi diametrni o‘tkazish yetarli. Hosil bo‘lgan diametrlar uchlarini tutashtirsak, aylanaga ichki chizilgan kvadrat hosil bo‘ladi. Agar aylana radiusi R ga teng bo‘lsa, Pifagor teoremasiga asosan, kvadratning tomoni $R\sqrt{2}$ ga teng bo‘ladi, $BC = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ (3.9-chizma).



3.10- chizma.

Aylanani teng 3 bo‘lakka bo‘lish.

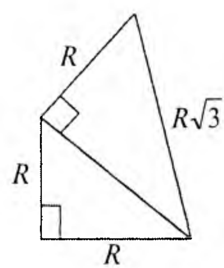
1-usul. Eng osoni, aylanaga ichki chizilgan muntazam oltiburchakning tomoni aylana radiusiga tengligidan foydalanib, aylanani teng 6 burchakka bo‘lib, bo‘linish nuqtalarini bitta oralatib belgilasak, aylana teng uchga bo‘linadi (3.10-chizma).



3.11- chizma.

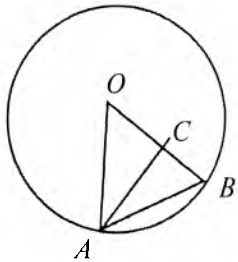
2-usul. Aylananing OA radiusiga CD o‘rta perpendikular o‘tkazamiz. CD aylanaga ichki chizilgan muntazam uchburchakning tomoni bo‘ladi, chunki $\angle OCB = 30°$, $\angle COB = 60°$ (3.11-chizma).

3-usul. Aylanaga muntazam uchburchak ichki chizilgan deb faraz qilaylik. U holda uning tomoni $a = R\sqrt{3}$ bo‘lishini hisoblab topish qiyin emas (3.12-chizma).

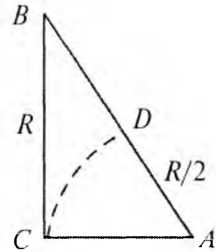


3.12- chizma.

Aylanani teng 10 ta bo‘lakka bo‘lish. Aylanaga muntazam 10 burchak chizilgan deb faraz qilaylik. $\triangle AOB$ shu ko‘pbur-



3.13- chizma.



3.14- chizma.

chakning 1/10 qismi bo‘lsin. U holda $\angle AOB = 36^\circ$, $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$. AB muntazam 10 burchakning tomoni. Uni x orqali belgilab, $\angle OAB$ ning AC bissektrisasini o‘tkazamiz (3.13-chizma):

Uchburchak bissektrisasining xossasiga ko‘ra $\frac{x}{R} = \frac{R-x}{x}$, bundan $x^2 + Rx - R^2 = 0$ tenglama hosil bo‘ladi. Tenglamadan $x = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{R}{2}$ qiymatni hosil qilamiz. Bu kesmani yasash qiyin emas (3.14-chizma).

Quyidagi masalalarni mustaqil ishlab ko‘ring.

Besh burchakli muntazam ko‘pburchak yasalgan deb faraz qilib, 15 burchakli muntazam ko‘pburchak yasang.

Yechish. 15 burchakli muntazam ko‘pburchakning markaziy burchagi $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$. Bu burchakni 72° li burchakdan foydalanib yasash mumkin, chunki, $2 \cdot 72^\circ - 120^\circ = 24^\circ$.

O‘n yetti burchakli muntazam ko‘pburchak yasalgan deb faraz qilib, 51 burchakli muntazam ko‘pburchak yasang.

Yechish. $\alpha_{51} = \frac{360^\circ}{51} = 7^\circ + \frac{1^\circ}{17}$; $\alpha_{17} = \frac{360^\circ}{17} = 21^\circ + \frac{3^\circ}{17}$. α_{17} ni yasay olamiz deb faraz qilamiz. U holda α_{34} ni ham yasay olamiz.

$\alpha_{17} = \frac{360^\circ}{17} = 21^\circ + \frac{3^\circ}{17}$; $\alpha_{34} - \alpha_{51} = 3^\circ + \frac{9^\circ}{17}$; $\alpha_{51} = \alpha_{34} - 3^\circ - \frac{9^\circ}{17}$;

$\alpha_{17} - 21^\circ = \frac{3^\circ}{17}$. α_{17} va α_{34} larni chiza olamiz. U holda

$\frac{3^\circ}{17}$; 3°; 21°; α_{51} larni ham chiza olamiz.

O‘n yetti burchakli muntazam ko‘pburchak chizilgan bo‘lsa, 85 burchakli muntazam ko‘pburchakni qanday yasash mumkin?

J a v o b : $\alpha_{85} = \frac{360^\circ}{85} = \frac{72}{17} = 24\frac{3}{7}$.

Toq n lar uchun sirkul va chizg‘ich yordamida nechta n burchakli muntazam ko‘pburchaklar yasash mumkin? Eng katta n nechaga teng?

J a v o b : 1) $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$,

2) $n = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537 = 4294967295$.

IV BOB. TEZ HISOBLASH

1- §. KVADRATGA KO‘TARISH

Besh bilan tugaydigan ikki xonali sonni quyidagicha yozish mumkin: $10a + 5$. Uni kvadratga ko‘taramiz:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100(a + 1)a + 25.$$

Natijaning ko‘rinishiga e’tibor qilaylik: birinchi qo‘shiluvchi a ning ixtiyoriy qiymatlarida ikkita nol bilan tugaydigan (yuzga ko‘paytirilgani uchun) sondir. Unga 25 ni qo‘shib, oxirgi ikkita raqami 25 ni beruvchi umumiy natijani hosil qilamiz. Shunday qilib, 5 bilan tugaydigan ikki xonali sonning kvadratini topish uchun avval 25 ni yozamiz, uning oldiga esa berilgan sonning o‘nliklar xonasi a ni undan keyin keladigan $a + 1$ ga ko‘paytirishdan hosil bo‘ladigan sonni yozamiz.

Ellikka yaqin bo‘lgan sonning kvadratini topish qoidasini quyidagi formuladan foydalanib hosil qilish mumkin:

$$(50 + a)^2 = 2500 + 100a + a^2 = 100(25 + a) + a^2,$$

$$(50 - a)^2 = 100\ (25 - a^2) + a^2.$$

Kasr qismi yarimga teng bo‘lgan aralash sonni kvadratga ko‘tarish oson:

$$(a + \frac{1}{2})^2 = a(a + 1) + \frac{1}{4}.$$

Ixtiyoriy a sonni $a^2 = (a + b)\ (a - b) + b^2$ formula yordamida kvadratga ko‘tarish mumkin.

Masalan, $17^2 = 14 \cdot 20 + 9$; $115^2 = 110 \cdot 120 + 25$.

Sonlar kvadratlarining jadvalini tuzish. Butun sonlar kvadratlari jadvalini $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a^2 + a + (a + 1)$ formuladan foydalanib tuzamiz. Bu formuladan quyidagi qoidani keltirib chiqaramiz: berilgan a dan keyin keluvchi $a + 1$ sonning kvadratini topish uchun berilgan sonning kvadratiga o‘sha sonning o‘zini va undan keyin keluvchi sonni qo‘shish kerak. Jadval tuzishda sonlarni faqat qo‘shish bilangina kifoyalanish mumkinligi ko‘rinib turibdi. Qo‘shishni esa cho‘tda bajarish qulaydir.

Kublar jadvalini tuzish qiyinroq:

Sonlar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Sonlarning kublari	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197
1-tartibli ayirmalar		1	7	19	37	61	91	127	169	217	271	331	397	469
2-tartibli ayirmalar		6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78

Birinchi tartibli ayirma ikkita yonma-yon turgan sonlar kublarining ayirmasidir. 2-tartibli ayirma esa ikkita ketma-ket kelgan 1-tartibli ayirmalarni ayirish bilan topiladi. Jadvalning to'rtinchi qatori (2-tartibli ayirmalar qatori)ni osongina davom ettirish mumkinligini ko'ramiz: u yerdagi har bir son o'zidan oldingi songa 6 ni qo'shishdan hosil qilingan.

2-tartibli ayirmalarni bilsak, u holda 1-tartibli ayirmalar qatorini davom ettirishimiz mumkin. Buning uchun 2- tartibli ayirmani ma'lum bo'lgan birinchi tartibli ayirmaga qo'shish kerak. Bu jadvalda strelka bilan ko'rsatilgan. Aytaylik, jadval 13 ning kubi bilan tugagan bo'lsin (jadvalga qarang): $13^3 = 2197$. Keyingi sonning, ya'ni 14 ning kubini qanday qilib topish mumkin? Buning uchun avval mos „ikkinchi tartibli ayirmani topamiz (78), unga birinchi tartibli ayirma (469) ni va 14 dan oldin kelgan sonning kubini qo'shamiz: $78 + 469 + 2197$. Qo'shish natijasida o'n to'rtning kubi bo'lgan 2744 ni hosil qilamiz.

Kublar jadvalini tuzishning topilgan yo'li to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilaylik. Birinchi va ikkinchi tartibli ayirmalar qanday o'zgarishini kuzatib boramiz. $R_1 = (a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$ bo'lsin, undan keyin keladigan birinchi tartibli ayirma $R_1 = (a+2)^3 - (a+1)^3 = 3a^2 + 9a + 7$ ga teng. Bularga mos ikkinchi tartibli ayirma $R_2 = R_1 - R_1$ ga yoki $R_2 = 6a + 6$ ga teng.

a ga 0, 1, 2, 3, 4 va hokazo qiymatlar berib, mos ikkinchi tartibli ayirmalar ketma-ketligi 6, 12, 18, 24 va hokazoni hosil qilamiz, ya'ni jadvalning to'rtinchi qatorini xohlagancha davom ettira olamiz.

Kublar jadvaliga o'xshash jadvallarni butun sonlarning boshqa darajalari uchun ham tuzish mumkin.

2- §. NEPER TAYOQCHALARI

Neper tayoqchalari ko‘paytirish va bo‘lish amallarini bajarishda ishlatiladigan eng sodda „hisob mashina“si bo‘lib xizmat qilishi mumkin. Bu „mashina“ni yasash juda oson: noldan to‘qqizgacha nomerlangan bir xil uzunlikdagi va kenglikdagi karton tayoqchalar to‘plamini tayyorlash kifoya. Har bir karton tayoqcha o‘z nomeriga ega va to‘qqizta teng kvadratga bo‘lingan. Har qaysi kvadrat pastki chap burchakdan yuqorigi o‘ng burchakka qarab yo‘nalgan diagonal bilan ikki qismga bo‘lingan. *n*- nomerli tayoqcha kvadratlariga har qaysi bir xonali sonning *n* bilan ko‘paytmasi (*n* ga ko‘paytirish jadvali) mos ravishda yozib chiqiladi. Bunda birlik (xona) raqamlari o‘ng tomondagi uchburchakka, o‘nlik (xona) raqamlari esa chap tomondagi uchburchakka yoziladi.

Nomerlangan tayoqchalardan boshqa yana bitta „ishchi“ (nomersiz) tayoqcha tayyorlash lozim. Hisoblashda bunday tayoqchalardan qanday foydalaniladi? Aytaylik, 238 ni biror songa ko‘paytirish kerak bo‘lsin. Buning uchun Neper tayoqchalarining bir-biriga yonma-yon qilib qo‘yganda 238 hosil bo‘ladiganlari (2, 3, 8 nomerlar yozilganlari) olinadi (4.1-chizma).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

4.1-chizma.

Chizmada 238 ni 1, 2, 3, ..., 9 ga ko‘paytirish natijasini ayoniy ko‘rsatuvchi „ishchi“ tayoqcha o‘ng tomondan joylashtirilgan.

Blok tayoqchalaridan tuzilgan birinchi qatorda $238 \cdot 1$ nimaga tengligini, ikkinchi qatorda $238 \cdot 2 = 476$ ekanini (bunda diagonal bo'yicha yotgan raqamlar qo'shiladi), uchinchi qatorda $238 \cdot 3 = 714$ ekanini ko'ramiz va hokazo (4.2-chizma).

Neper tayoqchalari yordamida bir xonali sonlarga ko'paytirishnigina emas, balki ko'p xonali sonlarga ko'paytirishni ham bajarish mumkin. 238·578 ni hisoblash kerak bo'lsin. Amallarni ustun shaklida yozib (buni bajaring), 238·8, 238·7, 238·5 larni topishimiz kerak. Bularning natijalarini Neper tayoqchalaridan foydalanib topishimiz va yozishimiz mumkin. Neper tayoqchalari ko'paytirishnigina emas, balki bo'lishni ham yengillashtirishi ravshan. Agar biror sonni 238 ga bo'lmoqchi bo'lsak, u holda bo'lish amali yozma ravishda bajariladi, Neper tayoqchalari yordamida esa bo'linmaning raqamlarini topish ancha osonlashadi.

	2	3	8
1	0/2	0/3	0/8
2	0/4	0/6	1/6
3	0/6	0/9	2/4
4	0/8	1/2	3/2
5	1/0	1/5	4/0
6	1/2	1/8	4/8
7	1/4	2/1	5/6
8	1/6	2/4	6/4
9	1/8	2/7	7/2

4.2- chizma

Bir nechta bir xil raqamli sonlarni ko'paytirishda bir xildagi o'shancha Neper tayoqchalari kerak. Neper tayoqchalari to'plamini katakli bloknot varag'idan yasash mumkin.

3- §. TRAXTENBERG USULI BO'YICHA KO'PAYTIRISH

Berilgan birorta son ustida ko'paytirish amalini bajarish uchun bu sonning har bir raqami (birlik xonasidagi raqamdan boshlab) ishlab chiqiladi. Bunda qo'shni raqamlardan turlicha foydalaniladi. Sondagi „qo'shni" raqam deb ishlanayotgan raqamdan o'ng tomonda turgan raqamni aytishga kelishib olamiz. Birlik xona raqami uchun „qo'shni" raqam nolga teng, eng chap tomonda turgan raqam esa son oldiga xayolan yozilgan nol uchun qo'shni raqam bo'ladi. Ko'paytirish qoidalari:

11 ga ko'paytirish. Har bir raqamga uning qo'shnisini qo'shing.

Misol. 1234·11.

Ko'payuvchining raqamlarini birlik xona raqamidan boshlab ishlab chiqamiz:

4 ga uning qo'shnisini, ya'ni nolni qo'shamiz, 4 hosil bo'ladi. Navbatdagi ishlanadigan raqam 3. Unga 4 ni qo'shib, 7 ni hosil qilamiz. So'ngra 2 ga uning qo'shnisini, ya'ni 3 ni qo'shamiz, 5 hosil bo'ladi. 1 ga 2 ni qo'shamiz, 3 hosil bo'ladi. Nihoyat, nolga

(ko'payuvchi oldiga xayolan yozilgan) uning qo'shnisi 1 ni qo'shamiz. 1 hosil bo'ladi. Shunday qilib, javobda hosil bo'ladigan sonning barcha raqamlarini hosil qildik. J a v o b : 13574.

Ko'paytirishni ko'rsatilgan qoida bo'yicha bajarar ekanmiz, barcha hisoblashlarni og'zaki o'tkazamiz va natijani bir yo'la yozamiz.

Agar ikkita „raqamni" qo'shganda o'ndan katta son, masalan, 12 hosil bo'lsa, u holda odatdagicha yo'l tutamiz: 2 ni yozamiz, 1 ni dilda saqlaymiz.

12 ga ko'paytirish. Raqamni ikkilantiring va qo'shnisini qo'shing.

Misol. 123·12.

Ko'payuvchining raqamlarini, ya'ni 3, 2, 1 raqamlarni galma-galdan ishlab chiqamiz. 3 ni ikkilantiramiz va nolni qo'shamiz, 6 hosil bo'ladi. 2 ni ikkilantiramiz va 3 ni qo'shamiz, 7 hosil bo'ladi. 1 ni ikkilantiramiz va 2 ni qo'shamiz, 4 hosil bo'ladi. Ko'payuvchi oldiga xayolan yozilgan nolni ikkilantiramiz va qo'shnisi, ya'ni 1 ni qo'shamiz, 1 hosil bo'ladi. Shunday qilib, natijada 1476 chiqadi.

E s l a t m a . Quyida 6, 7 va 5 ga ko'paytirish qoidalarida bir xonali sonning yarmisini topishga to'g'ri keladi. Juft sonning yarmini odatdagicha topamiz, toq son bo'lgan holda uning yarmi deb hosil bo'lgan sonning butun qismi olinadi. Masalan, to'qqizning „yarmi" 4, yettining yarmi 3 bo'ladi va hokazo.

6 ga ko'paytirish. Qo'shni raqamning yarmisini va agar ishlanayotgan raqam toq bo'lsa, 5 ni ham qo'shing.

Misol. 2328 · 6.

Ko'payuvchining hamma raqamlarini birin-ketin ishlab chiqamiz: 8 ga uning qo'shnisi bo'lgan nolning yarmini, ya'ni nolni qo'shamiz, 8 bo'ladi. 2 ga 8 ning yarmini qo'shamiz, 6 bo'ladi. 3 ga 2 ning yarmi va 5 ni qo'shamiz, 9 bo'ladi. 2 ga 3 ning „yarmini", ya'ni 1 ni qo'shib, 3 hosil qilamiz.

Nolga 2 ning yarmini qo'shamiz, 1 chiqadi.

Javob topilgan raqamlardan iborat bo'ladi: 13968.

7 ga ko'paytirish. Raqamni ikkilantiring va qo'shnisining yarmini qo'shing.

Agar ishlanayotgan raqam toq bo'lsa, yana 5 ni ham qo'shing.

5 ga ko'paytirish. Qo'shni raqamning yarmini oling, agar ishlanayotgan raqam toq bo'lsa, yana 5 ni ham qo'shing.

4- §. KUB ILDIZNI TEZ HISOBLASH

Agar biror a son ikki xonali sonning kubi bo'lsa, u holda $\sqrt[3]{a}$ nimaga teng ekanligini osongina topish mumkin. Bir xonali sonlarning kublarini topamiz:

$1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$ va nihoyat $10^3 = 1000$.

Bunda sonlarning kublari har xil raqamlar bilan tugashini ko'ramiz. Lekin olti holda kublarning birlik raqami kubga ko'tarilayotgan sonning birlik raqamlari bilan bir xil. Qolgan hollarda kubning birlik raqami kubga ko'tarilayotgan sonning birlik raqamini o'nga to'ldiruvchi raqamdan iborat. Demak, kubning oxirgi raqami bo'yicha kub ildizning birlik raqamini topish oson: agar birlik raqam 1, 4, 5, 6, 9, 0 raqamlaridan biri bo'lsa, u holda kub ildizning birlik raqami ham o'sha raqamdan iborat bo'ladi. Agar kubning birlik raqami 2, 3, 7, 8 sonlaridan biri bo'lsa, u holda kub ildizning birlik raqami uchun javob mos ravishda 8, 7, 3, 2 raqamlaridan biri bo'ladi. Shunday qilib, birliklar raqamini topishimiz mumkin. O'nliklar raqamini topish uchun kub ildizdan chiqarilayotgan sonning oxirgi uchta raqamini o'chiramiz, boshqacha aytganda kvadrat ildiz chiqarishda sonlarni qanday qilib granlarga ajratgan bo'lsak, shunday yo'l tutamiz; faqat bu holda granda uchta raqam bo'ladi. Berilgan sonda qanday sonning kubi bor ekanini aniqlaymiz.

Aytilganlarni ushbu misolda tushuntiramiz: $\sqrt[3]{1728}$ ni topish kerak bo'lsin. Ildizdan chiqadigan sonning birlik raqami 2 ga teng $(2 + 8 = 10)$, chunki $8 = 2^3$. Oxirgi uchta raqamni o'chiramiz: 1 soni qoladi. Bu son birning kubidir, demak, o'nlik raqami 1 ga teng.

Shunday qilib $\sqrt[3]{1728} = 12$. Yana bir misol: $\sqrt[3]{328509}$ ni topaylik. Javobda hosil qilinadigan sonning birlik raqami 9 ga teng, so'ngra: 328509; 328 sonida 6 ning kubi bor, chunki $7^3 = 343$, bu 328 dan katta $(6^3 = 216)$, $216 < 328$. Demak, ildiz 69 ga teng.

Kub ildizni tez hisoblash usulini matematika to'garagi mashg'ulotlari yoki matematik kecha o'tkazishda sahnadan turib juda ta'sirchan namoyish qilish mumkin.

Tez hisoblovchi rolini olib boruvchi o'tirganlarning bir nechtasiga birorta ikki xonali sonni kubga ko'tarishni iltimos qiladi va aytilgan sonlarning kub ildizlarini darrov chiqarib beradi.

(Birorta matematik ma'lumotnomadagi kublar jadvalidan ixtiyoriy ikki xonali sonning kubini ayrim qog'ozlarga yozib, o'tirganlarga avvaldan berib qo'yish tavsiya qilinadi.)

Eslatma. Birorta ikki xonali sonning beshinchi darajasidan iborat bo'lgan sonning beshinchi darajali ildizini topish yana ham sodda ekaniga ishonch hosil qilish qiyin emas. Javobda hosil bo'ladigan sonning va darajaga ko'tarilgan sonning birlik raqami bir xildir:

$1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$, $4^5 = 1024$, $5^5 = 3125$ va hokazo. O'nlik raqamini topish uchun sonning raqamlarini o'ngdan chapga beshtadan qilib granlarga ajratish kerak.

Kvadrat va kub ildizlarni taqribiy hisoblash. 8- sinf dasturida kvadrat ildizlarning kami bilan yoki ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlari qaraladi. Shu munosabat bilan ildizning taqribiy qiymatini hisoblashning o'zining soddaligi bilan ajralib turuvchi yana bir usuli bilan tanishish foydalidir. Bu usul quyidagidan iborat:

$\sqrt{10}$ ning taqribiy qiymatini topish talab qilingan bo'lsin. Natijani $3 + x$ bilan belgilaymiz, bu yerda $x < 1$, chunki $3 < \sqrt{10} < 4$. Ildizning ta'rifiga ko'ra $(3 + x)^2 = 10$, $9 + 6x + x^2 = 10$, $|x| < 1$ bo'lgani uchun $x^2 < |x|$ va shuning uchun x^2 ni tashlab, $9 + 6x = 10$ ni hosil qilamiz.

$$x = \frac{1}{6}; \quad \sqrt{10} = 3 + x; \quad \sqrt{10} \approx 3\frac{1}{6}.$$

Kub ildizning taqribiy qiymatini ham shunga o'xshash topish mumkin, bunda x qanchalik kichik bo'lsa, natija shuncha aniq bo'ladi.

x ga nisbatan kichik bo'lgan x^2 ni tashlab yuborish o'quvchilarni birinchi va ikkinchi tartibli cheksiz kichik miqdorlarni o'zlashtirishga tayyorlab boradi.

5- §. FIBONACHCHI SONLARINI QO'SHISH

Ikkita ixtiyoriy son yozing, ularning ketidan bu sonlarning ikkitasi yig'indisiga teng bo'lgan uchinchi sonni yozing va hokazo. Bunday yo'l bilan hosil qilingan sonlar *Fibonachchi sonlari* deb ataladi. O'nta ketma-ket kelgan Fibonachchi sonlarining yig'indisini topaylik:

$$2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 = 374.$$

Bu yig'indini boshqacha usulda ham topish mumkin: qatorning oxiridan to'rtinchi sonni 11 ga ko'paytiramiz, natija darhol hosil bo'ladi, ya'ni $34 \cdot 11 = 374$.

Agar mos amallarni umumiy ko'rinishda bajarib chiqsak, bu qoida osongina topiladi. Dastlabki sonlar a va b bo'lsin, u holda o'nta qo'shiluvchi quyidagicha bo'ladi:

$$a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b) + (5a + 8b) +$$
$$+ (8a + 13b) + (13a + 21b) + (21a + 34b) = 55a + 88b = 11(5a + 8b).$$

Yig'indi qator oxiridan to'rtinchi qo'shiluvchi bilan 11 ning ko'paytmasiga teng ekanini ko'ramiz.

Ismni topish. Quyidagi 1-jadval bo'yicha o'ylangan ismni topib bera olishingizni ayting.

1-jadval

Anvar	Gulchehra	Murod
Alisher	Jo'ra	Noila
Baxtiyor	Javod	Ozoda
Vali	Jamila	Po'lat
Vahob	Zamira	Ra'no
Vazira	Zuhra	Said
Vasila	Karima	Tursunoy
Ravshan	Karomat	Yusuf
G'ulom	Laylo	Yodgor
Go'zal	Latofat	
Ulug'bek	Lola	

Bu jadvaldagi har bir ism o'z nomeriga ega. Endi 1-jadvaldagi ismlardan 2-jadvalni tuzamiz.

2-jadval

Zamira	Ravshan	Vali	Alisher	Anvar
Zuhra	G'ulom	Vahob	Baxtiyor	Baxtiyor
Karima	Go'zal	Vazira	Vazira	Vahob
Karomat	Ulug'bek	Vasila	Vasila	Vasila
Laylo	Gulchehra	Gulchehra	Go'zal	G'ulom
Latofat	Jo'ra	Jo'ra	Ulug'bek	Ulug'bek
Lola	Javod	Javod	Javod	Jo'ra
Murod	Jamila	Jamila	Jamila	Jamila
Noila	Noila	Laylo	Karima	Zuhra
Ozoda	Ozoda	Latofat	Karomat	Karomat
Po'lat	Po'lat	Lola	Lola	Latofat
Ra'no	Ra'no	Murod	Murod	Murod
Said	Said	Said	Po'lat	Ozoda
Tursunoy	Tursunoy	Tursunoy	Ra'no	Ra'no
Yusuf	Yusuf	Yusuf	Yusuf	Tursunoy
Yodgor	Yodgor	Yodgor	Yodgor	Yodgor

Ismni topish jarayoni: 2-jadvalda beshta ustun bo'lib, bu ustunlar 16, 8, 4, 2, 1 sonlarga mos keladi. Masalan, „Lola" ismi o'ylangan bo'lsin. O'ynayotgan o'quvchi bu ism jadvalning birinchi, uchinchi va to'rtinchi ustunlarida joylashganini aytadi. Boshqaruvchi bu ustunlarga mos keluvchi sonlarni dilida qo'shib chiqadi ($16 + 4 + 2 = 22$) va bu nomerga qaysi ism mos kelishini 1-jadvaldan ko'rib oladi.

6- §. KO'PAYTIRISHNING RUSCHA USULI

Ikkita ko'paytuvchining ko'paytmasini topishning qadimgi usuli shu nom bilan ataladi. Bu usul ko'paytuvchilardan birini ikkiga bo'lib, ikkinchisini ikkiga ko'paytirganda ko'paytmaning o'zgarmasligiga asoslangan.

Masalan,

$16 \cdot 23$	$32 \cdot 27$
$8 \cdot 46$	$16 \cdot 54$
$4 \cdot 92$	$8 \cdot 108$
$2 \cdot 184$	$4 \cdot 216$
$1 \cdot 368$	$2 \cdot 432$
	$1 \cdot 864$

Ko'rib chiqilgan misollarda hamma ish silliqqina bajarildi, ya'ni birinchi ko'paytuvchini ikkiga bo'ldik, ikkinchi ko'paytuvchini ikkiga ko'paytirdik va bo'lishda hech qanday qoldiq qolmadi. Ikkiga bo'lishda toq songa duch kelib qolsak, nima qilamiz? Bu holda quyidagicha yo'l tutiladi: birinchi ustun sonlarini (qoldiqqa e'tibor bermasdan) ikkiga bo'laveramiz, ikkinchi ustun sonlarini esa ikkilantiraveramiz. Natijani hosil qilish uchun ikkinchi ustundan birinchi ustunda uning qarshisida toq sonlar turganlarini olib yozamiz va ularni qo'shamiz. Masalan:

$36 \cdot 27$

$18 \cdot 54$

$9 \cdot 108$

$4 \cdot 216$

$2 \cdot 432$

$1 \cdot 864$

Ikkinchi ustunda 9 va 1 toq sonlar qarshisida turgan 108 va 864 sonlarni qo'shamiz: $108 + 864 = 972$. Demak, $36 \cdot 27$ ko'paytma 972 ga teng.

Tatbiq etilgan qoidani tushuntirish uchun birinchi ko‘paytuvchini ikkining darajalari yig‘indisi shaklida yozish, ya’ni sonni ikkilik sanoq sistemasida tasvirlashdan foydalanish lozim:

$$36 = 32 + 4 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0,$$

u holda $36 \cdot 27$ ko‘paytma quyidagicha tasvirlanadi:

$$36 \cdot 27 = (32 + 4) \cdot 27 = 864 + 108.$$

Shunday qilib, oxirgi natija ikkinchi ustunning birinchi ustundagi toq sonlar qarshisida turgan sonlarini qo‘shish natijasida hosil qilinadi, chunki ana shu hollardagina sonning ikkilik sistemadagi tasvirida ikkining darajasi oldidagi koeffitsiyent birga teng. Yana bir misol:

$39 \cdot 21$
$19 \cdot 42$
$9 \cdot 84$
$4 \cdot 168$
$2 \cdot 336$
$1 \cdot 672$

Javob: $21 + 42 + 84 + 672 = 819.$

$39 \cdot 21 = (32 + 4 + 2 + 1) \cdot 21 = 672 + 84 + 42 + 21 = 819.$

V BOB. TURLI MASALALAR

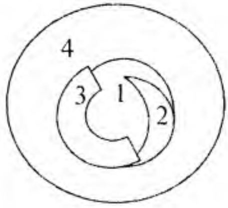
1- §. TO'RT RANG MUAMMOSI

Matematikadan yiroq bo'lgan kishilar orasida matematika qadimdan paydo bo'lgan fan, go'yo undagi barcha qonun-qoidalar ma'lum va o'zgarmas (ikki karra ikki — to'rt!) hamda uni o'rganayotganlar ilgari kashf etilgan teoremalardan foydalanadilar va ularni masalalar yechishga tatbiq etadilar xolos, degan fikr-mulohazalar rasm bo'lib qolgan.

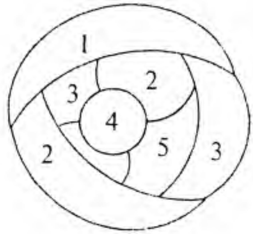
Aslida esa matematika jadal sur'atlar bilan rivojlanmoqda. Butun Yer sharida, har kuni uzluksiz ravishda kashfiyotlar qilinmoqda. „Matematika" referativ jurnali mayda harflar bilan turli matematik kashfiyotlar haqidagi referatlarni e'lon qilib bormoqda. Ularning soni yiliga taxminan 1500 betni tashkil etadi. Kunora o'ttizga yaqin yangilik kashf etiladi. Hamisha ko'plab masalalar va muammolar paydo bo'lib turadi va ularni hal etish matematikaning fan sifatida rivojlanishiga yordam beradi. Hozirgi zamon fani oldida juda ham murakkab masalalar turibdi. Ayoniyligi bilan ajoyib bo'lgan quyidagi fikr mavjud: bilimlarimiz sferasi qancha kengaysa, uning hali bizga ma'lum bo'lmagan soha bilan yondashish chegarasi shuncha katta bo'ladi. Matematika dialektik xarakterga ega, bu fan taraqqiyoti davrida shunday savol va masalalar uchraganki, uning ustida ko'pgina matematiklar o'n, hatto, yuz yillab bosh qotirganlar. Matematik muammolarning ko'pchiligi juda ham murakkab, ularni hal etish, hatto mutaxassisga ham qiyinlik qiladi, shu bilan birga ta'rifi juda ham sodda, har kim ham tushuna oladigan, ammo hali hal etilmagan muammolarga misollar keltirish mumkin.

Matematiklar yuz yildan ortiqroq uringan shunday masalalardan biri, XIX asrda paydo bo'lgan, to'rt rang muammosi deb ataluvchi masaladir.

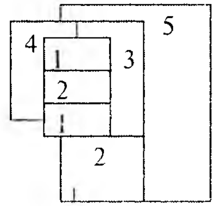
Uni quyidagicha ifodalash mumkin: ixtiyoriy xayoliy geografik xaritani umumiy uzunlikdagi qo'shni davlatlar turli rangda bo'ladigan qilib bo'yash uchun eng kamida necha (n) xil bo'yoq kerak bo'lishini aniqlash kerak. (Bunday bo'yab chiqishni „to'g'ri" deb ataymiz). Tekislik va sfera uchun $n \leq 5$ ekanligi isbot qilingan. Sodda misol (5.1- chizma) dan n ning qiymati to'rtdan kichik



5.1- chizma.



5.2-chizma.



5.3-chizma.

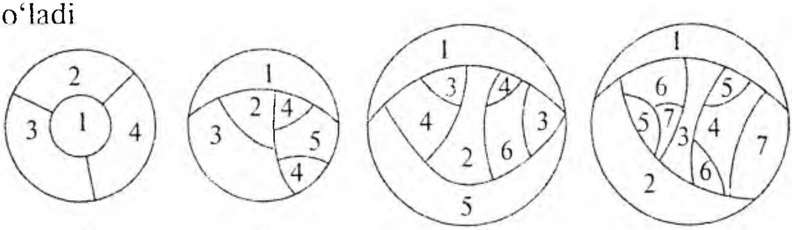
emasligi ko'rinadi, shunday qilib, $n \geq 4$, $4 < n < 5$ ekanligi, ya'ni har qanday xaritani bo'yash uchun 4 yoki 5 xil (undan ortiq emas) bo'yoq kerak ekanligi kelib chiqadi. Amalda, davlatlar qanday joylashgan bo'lmasin har doim to'rt xil bo'yoq bilan masalani hal qilish mumkinligi ko'rilgan. Biroq buni isbot qilishni, shu bilan birga inkor etishni hech kim uddasidan chiqmagan.

Bu gipotezaning noto'g'ri ekanligini ko'rsatish uchun esa davlatlarning shunday joylashishini ko'rsatuvchi misol topish kerakki, bunda bo'yab chiqish uchun 4 xil emas, balki 5 xil bo'yoq kerak bo'lsin.

1- vazifa. 5.2- va 5.3 - chizmadagi holatlarning har birida to'rt xil bo'yoq bilan kifoyalanish mumkin ekanligini ko'rsating.

2- vazifa. Bo'yash uchun davlatlarning murakkab joylashishlarini o'zingiz o'ylab toping.

Shunisi qiziqki, xaritani bo'yash haqidagi masala tekislik va sferaga qaraganda ancha murakkab bo'lgan sirtlar uchun hal qilingan. Masalan, tor (tor modeliga misol qilib teshikkulchani olish mumkin) sirtidagi ixtiyoriy xaritani 7 xil bo'yoq bilan „to'g'ri" bo'yash mumkin ekanligi isbotlangan. Sferadan boshqa har qanday yopiq sirt unda tasvirlangan ixtiyoriy xaritani „to'g'ri" bo'yash uchun ketadigan bo'yoqlarning eng kichik soni, shunday xaritadagi davlatlarning mumkin bo'lgan eng katta soni bilan mos keladiki, bunda har bir davlat qolgan barcha davlatlar bilan chegaradosh bo'ladi



a) *b)* *d)* *e)*

5.4- chizma.

Masala. Orolda m ta davlat joylashgan va bitta davlat bir nechta viloyatga ega bo'lishi mumkin bo'lsin.

Bir davlatga tegishli viloyatlarni bir xil rangga bo'yashga kelishib olamiz. Har bir davlat qolgan boshqa davlatlar bilan chegaradosh bo'lishi uchun orolni eng kamida nechta n viloyatga bo'lish (n — bo'lish soni) kerak?

5.4- chizmadagi hollar quyidagi jadvalga mos keladi:

	a	*b*	*d*	*e*
m	4	5	6	7
n	4	6	8	10

2- §. PIFAGOR TEOREMASINING HAR XIL ISBOTLARI

To'g'ri burchakli uchburchak tomonlari orasidagi bog'lanishni ifodalovchi Pifagor teoremasi quyidagicha ifodalanadi: agar to'g'ri burchakli uchburchakning tomonlari bir xil masshtab bilan o'lchangan bo'lsa, u holda gipotenuzani ifodalovchi son kvadrati, katetlarni ifodalovchi sonlar kvadratlarining yig'indisiga teng. (Qisqacha: to'g'ri burchakli uchburchakda to'g'ri burchak qarshisidagi tomonning kvadrati, to'g'ri burchakni tashkil etuvchi tomonlar kvadratlarining yig'indisiga teng. Yana ham qisqaroq: gipotenuzaning kvadrati katetlar kvadratlarining yig'indisiga teng.)

Teoremaning geometrik ma'nosi quyidagicha: gipotenuzaga yasalgan kvadratning yuzi, katetlarga yasalgan kvadratlar yuzlari yig'indisiga teng.

Pifagor teoremasi geometriyaning eng qadimgi teoremalaridan biri bo'lib, qadimgi grek olimi Pifagorgacha ham (uning nomi bilan yuritilsa-da) ma'lum bo'lgan. Asrlar o'tmoqda, lekin teoremaga bo'lgan qiziqish susaymayotir. Uning yangidan yangi isbotlari vujudga kelmoqda.

1887- yilda Moskvada Yuriy Vipperning „Pifagor teoremasining qirq beshta isboti" („Сорок пять доказательств Пифагоровой теоремы") nomli kitobi bosilib chiqdi. Agar shu kunlarda birorta odam yuqoridagiga o'xshash kitob yozganida edi, u holda bu kitobning sarlavhasida uch xonali son turgan bo'lar edi. Inson tafakkuri bepoyon. Hattoki, ilgaridan ma'lum bo'lgan narsalarni yangicha ma'noda ko'rish mumkin. Mana shuning uchun ham

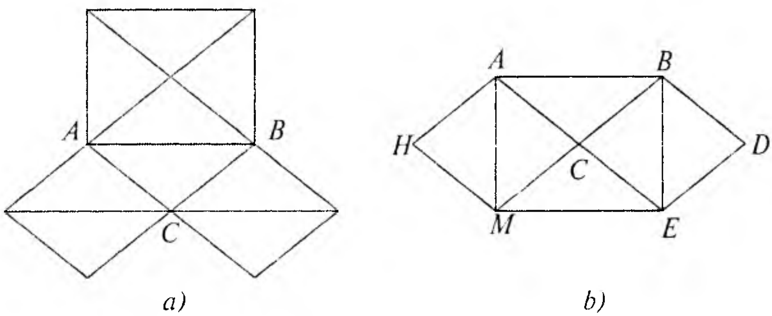
Pifagor teoremasi matematika to'garagi uchun juda ham o'rinli va foydali mavzu bo'lishi mumkin. Pifagor teoremasining har xil isbotlari bayon qilingan bir nechta ma'ruzani eshitgach, o'quvchilar teoremaning yangi isbotlarini topishda o'z kuchlarini sinab ko'rishlari mumkin.

Pifagor teoremasining har xil isbotlariga olib keluvchi shartlardan biri to'g'ri burchakli uchburchak tomonlarida yasalgan kvadratlarning joylashishidagi turli-tumanlik ekanligini qayd qilamiz.

Pifagor teoremasining bir nechta isbotini keltiramiz.

Xususiy hol: to'g'ri burchakli uchburchak teng yonli bo'lsin.

1. Berilgan ABC to'g'ri burchakli uchburchak tomonlarida kvadratlar chizamiz (5.5- *a*, *b* chizmalar).



5.5- chizma.

5.5-*a* chizmada katetlarga yasalgan kvadratlar gipotenuzaga yasalgan kvadratlar tarkibiga kiruvchi uchburchaklarga teng uchburchaklardan tuzilganini ko'ramiz.

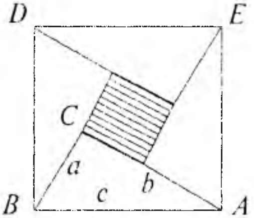
2. Butun shakl (5.5-*b* chizma) gipotenuzaga qurilgan kvadratdan ikkita BDE va AHM uchburchak qadar katta; shu shakl bir vaqtning o'zida katetlarga qurilgan kvadratlardan ikkita ABC va MCE uchburchak qadar katta, biroq bu uchburchaklar o'zaro teng; teng shakllardan teng qismlar ayirilsa teng qismlar qoladi, demak, gipotenuzaning kvadrati katetlar kvadratlari yig'indisiga teng.

3. Tomonlari a, b, c bo'lgan ABC uchburchakdan tashqari (5.6-chizmada ko'rsatilganidek) yana unga teng uchta uchburchak chizamiz. Natijada tomoni c ga teng bo'lgan katta kvadrat va tomoni $b - a$ ga teng bo'lgan kichik kvadrat hosil bo'ladi. Katta kvadrat kichik kvadratdan va to'rtta teng uchburchakdan tuzilgan:

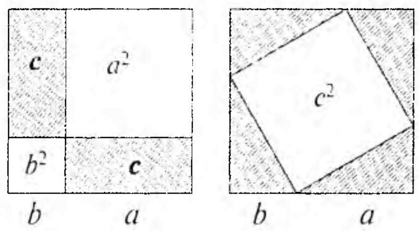
$$c^2 = (b-a)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab \quad \text{yoki} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Ana shuni isbot qilish kerak edi.

4. Tomoni $a+b$ ga teng bo'lgan ikkita teng kvadrat qismlarga bo'lingan (5.7-chizma), ularning ichida tomonlari a, b, c ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak bor. Berilgan ikki kvadratning har birida shunday uchburchaklardan to'rttadan bor, ularni tashlab yuborib, $a^2 + b^2 = c^2$ ni hosil qilamiz.



5.6- chizma.

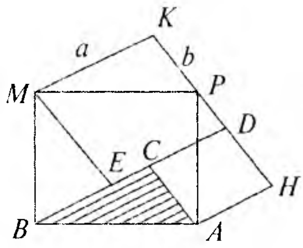


5.7- chizma.

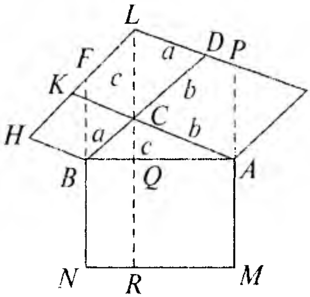
5. ABC uchburchak berilgan (5.8-chizma). Gipotenuzaga $ABMP$ kvadratni va AC katetga $ACDH$ kvadratni yasaymiz. Uchburchak tomonlarini a, b, c bilan belgilaymiz. D va P ni tutashtirsak, $HP = a$ hosil bo'ladi. MP ni gipotenuza deb olib, unda katetlari a va b bo'lgan to'g'ri burchakli KPM uchburchak yasaymiz va M nuqtadan BC tomonga perpendikular tushirib, tomoni a ga teng bo'lgan $MKDE$ kvadratni hosil qilamiz. Bu shakl butun gipotenuzaning kvadratidan MKP va APH uchburchak qadar ortiq va butun shakl ikki katetning kvadratlaridan ($ACDH$ va $KDEM$ dan) BME va ABC uchburchak qadar ortiq. Biroq, bu uchburchaklar o'zaro teng, demak, gipotenuzaning kvadrati katetlar kvadratlari yig'indisiga teng.

6. To'g'ri burchakli ABC uchburchak tomonlariga tashqi kvadratlar yasaymiz (5.9-chizma).

HK va ED tomonlarni L nuqtada kesishguncha davom ettirib, har biri berilgan uchburchakka teng ikkita uchburchakdan tuzilgan to'g'ri to'rtburchak hosil qilamiz. BN ga parallel bo'lgan BF, RL, AP shtrix chiziqlarni o'tkazib, hosil bo'lgan parallelogrammlarni qaraymiz.



5.8- chizma.



5.9- chizma.

$LCBF$ parallelogrammning asosi uchun CB tomon qabul qilinsa, u holda LD balandlik bo‘ladi, demak, uning yuzi a^2 ga teng bo‘ladi. Bu parallelogramm $NBQR$ to‘rtburchakka tengdosh. Shunday qilib, katta kvadratning bir qismi bo‘lgan $NBQR$ to‘rtburchakning yuzi a^2 ga teng. Shunday mulohaza yuritib, $AMRQ$ to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $ACLP$ parallelogrammning yuzi $(b)^2$ ga teng ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Shunday qilib, $c^2 = a^2 + b^2$.

7. Berilgan to‘g‘ri burchakli ABC uchburchak tomonlarida kvadratlar emas, balki ularning yarmi – to‘g‘ri burchakli, teng yonli uchburchaklar chizamiz (5.10- chizma).

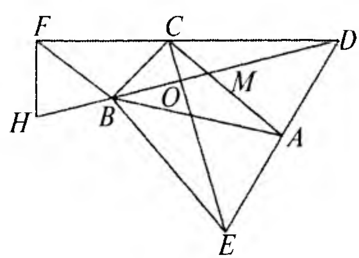
Yasash. $AD \perp AC$, $AD = AC$, $BF \perp BC$, $BF = BC$, $AE \perp AB$, $AE = AB$.

D nuqtani B bilan, C nuqtani E bilan tutashtirib, hosil bo‘lgan uchburchaklarni qaraymiz. Quyidagilar ma’lum bo‘ladi:

$$\triangle MBC \sim \triangle MDA,\ \triangle CAE = \triangle BAD \Rightarrow BD = CE.$$

$\angle MBC = \angle BDA$; $\angle FCD = 180°$ ekanligini ko‘ramiz, chunki u bitta to‘g‘ri burchak va ikkita 45° li burchakdan tuzilgan.

F uchdan BD tomon davomiga perpendikular tushiramiz. Unda FBH uchburchak BCO uchburchakka teng bo‘ladi, $FH = OB$, demak, BFD uchburchak BCE uchburchakka teng, bu esa bizga $ABFD$



5.10- chizma.

to'rtburchak $BCAE$ to'rtburchakka teng degan xulosa chiqarishga imkon beradi, ya'ni

$$\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}+S_{\Delta ABC}=\frac{c^2}{2}+S_{\Delta FBC};\quad a^2+b^2=c^2.$$

3- §. PIFAGOR SONLARI. FERMANING BUYUK TEOREMASI

$n = 2$ da

$$x^n+y^n=z^n \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi, noldan farqli butun sonlar uchligi *pifagor sonlari* deyiladi.

Masalan: 3, 4, 5; 6, 8, 10; 11, 60, 61 va hokazo. Pifagor sonlari to'g'ri burchakli uchburchak tomonlarining uzunliklarini ifodalaydi. Ushbu

$$c^2=a^2+b^2 \qquad (2)$$

tenglikni qanoatlantiradigan pifagor sonlarini topish usulini qaraylik: (2) tenglikni $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$ ko'rinishida yozamiz va $\frac{a}{c}=x;\ \frac{b}{c}=y$ deb belgilaymiz, u holda $x^2+y^2=1$, bundan $x^2=(1-y)(1+y)$ yoki

$$\frac{x}{1-y}=\frac{1+y}{x} \qquad (3)$$

proporsiyadagi nisbatning kattaligini t bilan belgilab, x va y ni t bilan ifodalashimiz mumkin:

$x=\frac{2t}{1+t^2};\ y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, so'ngra $t=\frac{m}{n}$ deb olamiz va x, y ni, so'ngra, a, b, c ni topamiz: $c=m^2+n^2$, $a=2mn$, $b=m^2-n^2$ (bunda $m>n$) ni hosil qilamiz. Endi m va n ga turli qiymatlar berib, pifagor sonlarini hosil qilamiz (o'ngdagi jadvalga qarang).

Pifagor sonlarining har bir uchligida 3, 5, 4 ga bo'linadigan sonlar bor. Buni isbot qilib ko'ring.

Ma'lumki, pifagor sonlarining qandaydir a, b, c uchligini topgandan so'ng uning uchliklaridan hosil qilingan cheksiz ko'p uchliklarni hosil qilishimiz mumkin, ular ak, bk, ck ko'rinishga ega bo'ladi, bunda k – ixtiyoriy son. Haqiqatan, agar a, b, c

m	n	$a = 2mn$	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2 + n^2$	Pifagor sonlari
2	1	4	3	5	3, 4, 5
3	2	12	5	13	5, 12, 13
4	1	8	15	17	8, 15, 17
4	3	24	7	25	7, 24, 25
5	2	20	21	29	10, 21, 29
5	3	30	16	34	16, 30, 34
5	4	40	9	41	9, 40, 41
6	1	12	35	37	12, 35, 37
6	5	60	11	61	11, 60, 61

sonlarning qandaydir uchligi (1) tenglamani qanoatlantirsa, u holda bu tenglamani ak, bk, ck sonlari ham qanoatlantiradi.

Berilgan sonlarga o'xshash yangi uchliklar hosil bo'lmasligi uchun a, b, c o'zaro tub sonlar bo'lishi, ya'ni m va n sonlar birdan katta umumiy bo'luvchilarga ega bo'lmasligi kerak.

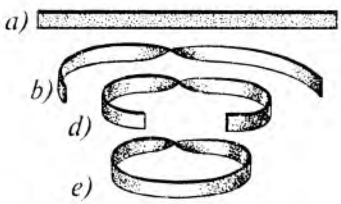
Bu masalani umumlashtirishga harakat qilib ko'ramiz: n ko'rsatkichga 3, 4, 5 va hokazo qiymatlar berib (1) tenglamaning noldan farqli, butun sonli yechimlarini topish mumkin emasmikin?

Ma'lumki, bu masala bilan matematiklar uch yuz yildan beri shug'ullanishadi, lekin hozirgacha uzil-kesil javob topilgani yo'q. Fermaning buyuk teoremasi deb atalgan bu muammoni isbot qilishni yoki inkor etishni hech kim uddasidan chiqmagan edi. $n > 2$ da (1) tenglik to'g'ri bo'ladigan, noldan farqli, x, y, z sonlar mavjud emas. Hozirgi kunda bu masala hal qilingan ko'rinadi. (Olimpiada masalalari qismini qarang.)

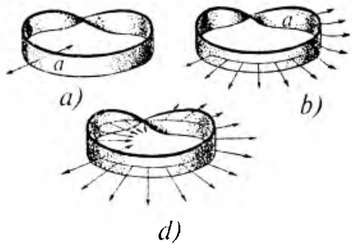
4- §. QIZIQARLI TOPOLOGIYA

Topologiya fanining o'ziga xos tomonlari bilan tanish bo'lmagan kishiga uning qanday fan ekanligini qisqacha tushuntirib berish oson ish emas. Eng avval topologiyada uchraydigan ba'zi ma'lumotlar va masalalar bilan tanishib chiqamiz.

Myobius yaprog'i. Myobius yaprog'i deb ataluvchi sirtning eng sodda modelini hosil qilish uchun to'g'ri to'rtburchakli $ABCD$ qog'ozni D nuqta A nuqtaga, C nuqta esa B nuqtaga tushadigan qilib burash va halqaga o'xshatib yopishtirish kerak (5.11-chizma). Bu sirt qator ajoyib xossalarga ega. U bir tomonlidir: uning ichki tomonini bir xil, tashqi tomonini boshqa xil rangga bo'yashga urinib



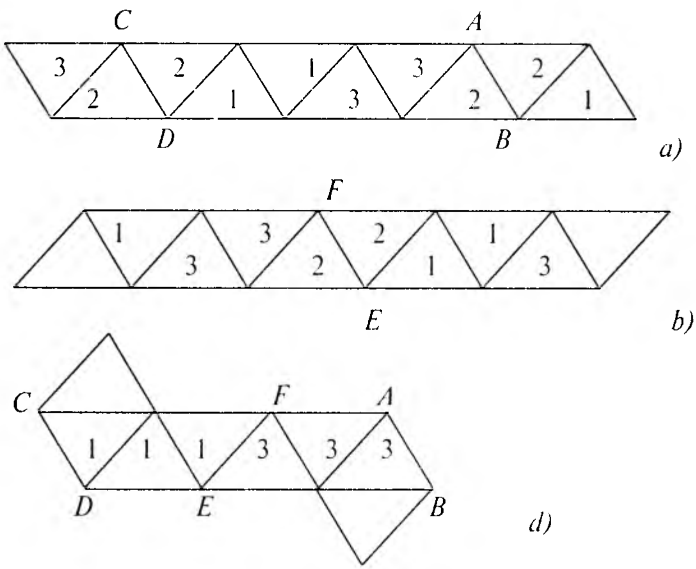
5.11- chizma.



5.12- chizma.

ko'ring, buning uddasidan chiqa olmaysiz. Uni faqat bir xil rangga bo'yash mumkin. Harakatni biror *A* nuqtadan boshlab sirtning o'rta chizig'idan borsak, butun sirtni bosib o'tib, yana *A* nuqtaga (sirtning chetini bosib o'tmay) sirtning boshqa tomonidan qaytib kelamiz (5.12-chizma).

Myobius yaprog'i ikkita chetga ega bo'lgan tekis qog'ozni yopishtirishdan hosil bo'ldi; biroq sirtning cheti bitta yopiq chiziqdan iborat: sirtning chetidagi birorta *M* nuqtadan chiqib, uning cheti bo'yicha harakatlana borib, butun chetini bosib o'tgach, chetdan hech ajralmasak-da va uni ko'ndalangiga kesib o'tmasak-da, *N* nuqtaga kelamiz.



5.13- chizma.

Biz Myobius yaprog‘ini qirqishda yana ham qiziq ahvolni ko‘ramiz. Agar yaproqni o‘rta chizig‘i bo‘yicha qiyib chiqsak, nima hosil bo‘ladi? Ikkita halqa hosil bo‘lishini kutish mumkin, aslida esa sirt ikki qismga ajralmaydi, balki bitta buralgan halqa hosil bo‘ladi. Sirtni o‘rta chizig‘i bo‘yicha qiyish ishini takrorlaymiz. Bu gal oldingi tajribani hisobga olib, yana bitta yangi halqa hosil bo‘lishiga umid qilasiz; lekin bu gal ham sizga „sog‘lom fikr“ pand beradi — bir-biri bilan zanjir hosil qiluvchi ikkita buralgan halqa hosil bo‘ladi.

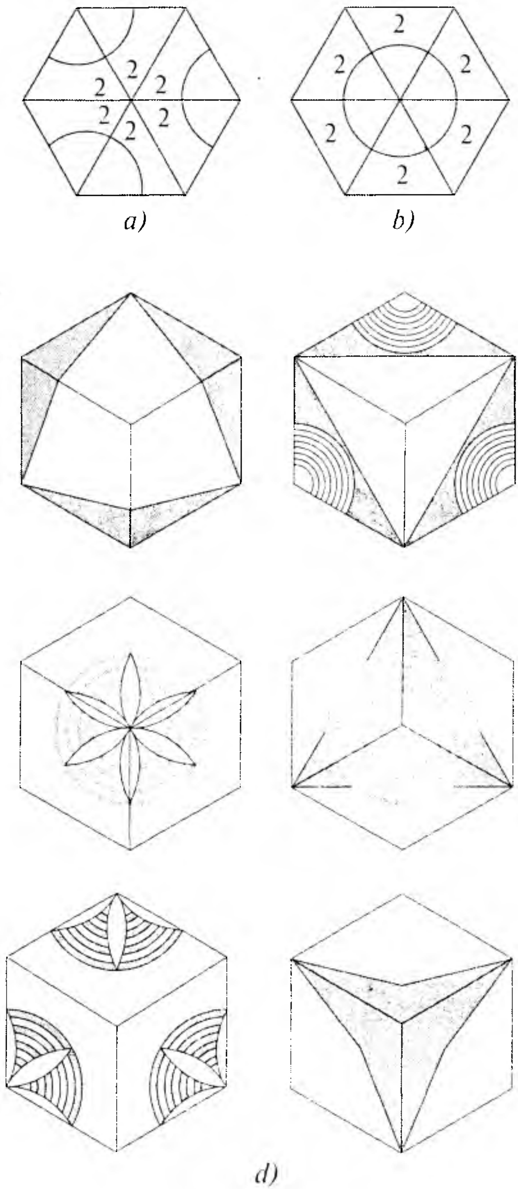
Myobius yaprog‘ining ezilgan holatiga fleksagon misol bo‘lishi mumkin. Uni bir varaq qog‘ozdan yasab olish qiyin emas.

Qog‘oz tasmani muntazam uchburchaklarga bo‘lamiz va ularni uch xil rangga bo‘yaymiz yoki 5.13- *a* chizmada ko‘rsatilgani kabi nomerlab chiqamiz, unda qog‘oz tasmaning orqa tomoni 5.13-*b* chizmadagi ko‘rinishga ega bo‘ladi. 5.13- *a* chizmaga qarab, tasmani 5.13- *d* chizmadagi shakl hosil bo‘ladigan qilib bukamiz. So‘ngra, hosil bo‘lgan shaklni bekilmay qolgan ikkita 2 ni, „berkitish“ uchun *EF* chiziq bo‘yicha bukamiz. Natijada yuqorida barcha 3 raqamli uchburchaklar qoladi, pastki tomonda esa barcha 1 raqamli uchburchaklar bo‘ladi. Bo‘sh uchburchaklarni bir-biriga joylashtirib yopishtiramiz. Fleksagon tayyor bo‘ldi. Fleksagonda, 5.14-*a* chizmada ko‘rsatilgani kabi, burchaklarni belgilab chiqing, endi fleksagonni „teskarisiga ag‘daring“, natijada o‘sha nomerli uchburchaklarning boshqacha joylanishini hosil qilasiz (5.14-*b* chizma).

Fleksagonning sirtini bezab va turlicha bo‘yab qiziq-qiziq natijalar hosil qilish mumkin (5.14-*d* chizma).

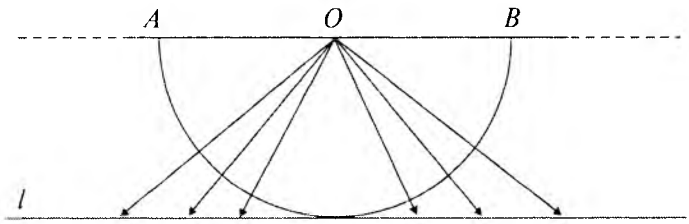
Shakllarning topologik xossalarini, ya’ni gomeomorf akslantirishlarda o‘zgarmaydigan xossalarini o‘rganishda Myobius yaprog‘iga tez-tez murojaat qilinadi. Qanday ikkita shakl o‘zaro gomeomorf ekanini tasavvur qilish uchun bizga yirtilmaydigan materialdan yasalgan, har qanday cho‘zilishga va burilishga chidamli ikki shakl berilgan deb faraz qilaylik. Agar egish, cho‘zish yoki qisish (uzib yubormasdan) yordamida bir shaklni ikkinchi shakl bilan ustma-ust joylashtirish mumkin bo‘lsa, bunday shakllar *gomeomorf shakllar* deyiladi.

Sfera, kub, ellipsoid kabi sirtlar; aylana, ellips, uchburchak va kvadrat konturi kabi chiziqlar gomeomorf shakllarga misol bo‘ladi. Yarim aylananing (5.15- chizma) chekka *A* va *B* uchlarini



5.14-chizma.

qo'yib yuborib, *l* to'g'ri chiziqqa gomeomorf akslanadigan shakl hosil qilamiz. Demak, to'g'ri chiziq chekka nuqtalari qo'yib yuborilgan yarim aylanaga gomeomorf ekan.

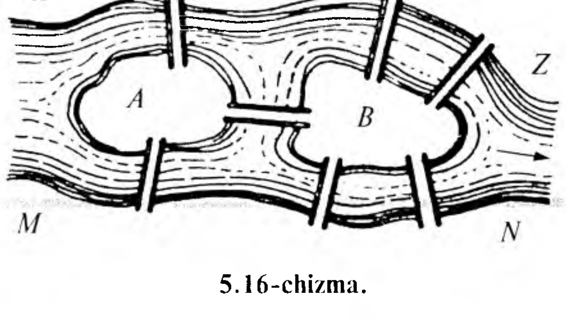


5.15-chizma.

Yarim aylana kesmaga gomeomorfdir (chunki yarim aylanani to'g'rilash yoki kesmani yarim aylana qilib burish mumkin), demak, *A* va *B* chekka nuqtalari qo'yib yuborilgan yarim aylana chekka nuqtalari bo'lmagan kesmaga gomeomorfdir. Bundan chekka nuqtalari bo'lmagan ochiq kesmaga to'g'ri chiziq ham gomeomorf ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan, ochiq kesmani cheksiz to'g'ri chiziqqacha „cho'zish" mumkin.

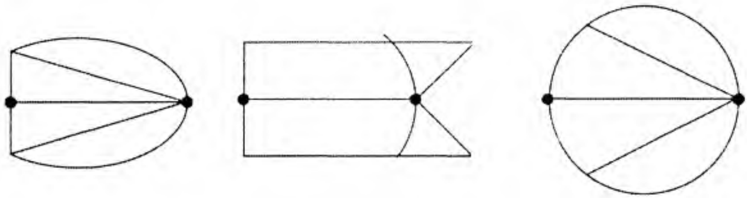
Topologik xarakterga ega bo'lgan masalalarni asosan u yoki bu shaklni qalamni qog'ozdan ko'tarmay va yurib o'tilgan yo'ldan qaytib o'tmasdan chizish mashqi bilan bog'liq bo'lgan matematik ermaklar ko'rilayotganda yechishga to'g'ri keladi. Bir marta qalam yurgizish bilan chizish mumkin bo'lgan chekli sondagi yoylardan tuzilgan bunday shakl *unikursal shakl* deyiladi. Shaklning unikursallik xossasi gomeomorf akslantirishlarda o'zgarmaydi, ya'ni u topologik invariantdir.

Masalan, Eylerning yetti ko'prik haqidagi masalasini qaraylik: *A* va *B* orollarni o'zaro va *KZ* hamda *MN* qirg'oqlar bilan tutashtiruvchi yettita ko'prikdan o'tish bo'yicha yuring (5.16-chizma).



5.16-chizma.

Bu masala sharti bir marta qalam yurgizish bilan o'zaro gomeomorf bo'lgan *a*, *b*, *d* (5.17-chizma) shakllardan birini



a) b) d)

5.17- chizma.

chizishni talab etish bilan teng kuchli, biroq buni bajarish mumkin emas, shuning uchun Eylerning yetti ko'prik haqidagi masalasi yechimga ega emas.

5- §. MATEMATIK SOFIZMLAR

Sofizm deb odatda oldindan xato qilib tuzilgan, yuzaki qaraganda to'g'ri bo'lib ko'rinadigan, lekin yanglish natijaga olib keladigan xulosaga aytiladi.

Ko'p hollarda matematik sofizmlar matematik qonun va qoidalarni noto'g'ri yoki to'liq bo'lmagan holda tatbiq qilish, mantiqning ma'lum normalarini buzish asosida tuziladi. Sofizmni ochish — bu da'voni isbotlashda muhokamada yo'l qo'yilgan xatoni ko'rsatishdir. Sofizmlarni ochishni o'rganish tanqidiy muhokamani rivojlantirishga imkon yaratadi, matematik tasdiqning har bir natijasini tekshirish va isbotlashning qanchalik zarurligini ko'rsatadi.

Yechimlarida birinchi qarashda sezib bo'lmaydigan xatolar bo'lgan bir necha sodda sofizm va masalalarni ko'rib chiqamiz.

Ortiqcha bir soat qayerdan paydo bo'lib qoldi?

Arava 336 km yurishi kerak edi. Yo'lning birinchi yarmida u yuksiz soatiga 8 km tezlik bilan, ikkinchi yarmida esa yuk bilan soatiga 6 km tezlik bilan yurdi. Shunday qilib, aravaning o'rtacha tezligi $\frac{6+8}{2} = 7$ (km/soat) ga teng va u butun yo'lni $336 : 7 = 48$ soatda bosib o'tishi kerak.

Boshqacha mulohaza yuritib, yo'lning birinchi qismiga $168 : 8 = 21$ soat, ikkinchi qismiga esa $168 : 6 = 28$ soat, hammasiga 21 soat + 28 soat = 49 soat sarf qilinganini ko'ramiz.

Ortiqcha bir soat qayerdan kelib qoldi?

T u s h u n t i r i s h . Xato aravaning o'rtacha tezligini noto'g'ri hisoblashda. Agar arava yo'lning birinchi va ikkinchi qismini ayni bir xil vaqt ichida yurgandagina o'rtacha tezlikni biz qo'llagan usul bilan topsa bo‘lar edi. Biroq arava soatiga 8 km tezlik bilan yurgandagi vaqt arava soatiga 6 km tezlik bilan yurgandagi vaqtga qaraganda kam bo‘lgani uchun o‘rtacha tezlik soatiga 7 km dan kam bo‘ladi.

$$336 : (21 + 28) = 6\frac{42}{49} \text{ (km/soat)}.$$

Haqiqatan, arava soatiga 7 km tezlik bilan 42 soat yurgan. Bu vaqtda u $7 \cdot 42 = 294$ km yurgan, qolgan $336-294 = 42$ km ni soatiga 6 km tezlik bilan 7 soatda (42 : 6) bosgan. Shunday qilib, arava $42 + 7 = 49$ soat yo‘lda bo‘lgan.

2. Bir so‘m qani?

Ikki savatning har birida 30 tadan anor bo‘lib, ular quyidagi narx bilan sotiladi: birinchi savatdagi anorning 3 tasi bir so‘m, ikkinchi savatdagi anorning ikkitasi bir so‘m. Sotuvchi ayol bu anorlarni $\frac{30}{3} + \frac{30}{2} = 25$ so‘mga sotishini hisobladi.

U quyidagicha mulohaza yuritdi: birinchi savatdagi anorlarning uchtasi bir so‘m, ikkinchi savatdagi anorlarning ikkitasi bir so‘m, demak, beshta anorni ikki so‘mdan sotsam bo‘ladi. Barcha anorlarni aralashtirib yubordi. Sotuvchi ayol anorlarni sotib bo‘lgach, o‘ylaganidek 25 so‘m emas, 24 so‘m bo‘lganini payqadi. Haqiqatan, 60:5=12 (beshtadan), 2 so‘m · 12 = 24 so‘m. Bir so‘m qani?

T u s h u n t i r i s h . Birinchi savatdan 3 donadan 10 marta anor olish mumkin, ikkinchi savatdan esa 2 donadan 15 marta anor olish mumkin. O‘nta 3 tadan olinganini (3 taliklar 10 ta edi) o‘nta ikkitadan olingan anorlar bilan birlashtirib har beshtasini 2 so‘mdan sotish mumkin bo‘lgan o‘nta beshtalik hosil qildik (2 so‘m · 10 = 20 so‘m). Ikkinchi savatda qolgan 10 ta anorning har ikkitasini bir so‘mdan, ya’ni 5 so‘mga sotish kerak edi, sotuvchi ayol esa bu o‘nta anorni (beshtasini ikki so‘mdan) 4 so‘mga sotdi, natijada 1 so‘m zarar ko‘rdi.

3. Tuyalarni bo‘lish.

Qari bir chol o‘limidan so‘ng tuyalarini o‘g‘illari bo‘lib olishlarini vasiyat qildi. Bunda katta o‘g‘li barcha tuyalarning yarmisini, o‘rtancha o‘g‘li uchdan birini va kichik o‘g‘li to‘qqizdan birini olishi kerak edi. Chol o‘ldi va undan o‘g‘illariga 17 ta tuya meros qoldi. O‘g‘illar tuyalarni bo‘lmoqchi bo‘lishdi, biroq 17 soni na 2 ga, na 3 ga va na 9 ga bo‘linar edi. Ularning boshi qotib qoldi. Shu payt ularning oldidan tuya mingan donishmand o‘tib qoladi. Aka-ukalar undan yordam so'rashdi: donishmand o'zining tuyasini to'pga qo'shib, 18 ta tuyani aka-ukalar o'rtasida bo'la boshladi. Katta o'g'il $18 \cdot \frac{1}{2} = 9$ tuya, o'rtancha o'g'il $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ tuya va kichik o'g'il $18 \cdot \frac{1}{9} = 2$ tuya oldi. Shunday yo'l bilan merosni aka-ukalar o'rtasida bo'lib bergach, „Men sizlarga o'zlaringizning 17 ta tuyangizni qoldiraman", — dedi va o'z tuyasiga minib yo'lida davom etdi. Bunday bo'lishni qanday tushuntirish kerak?

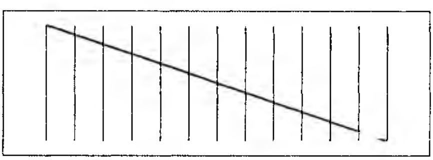
T u s h u n t i r i s h . Agar aka-ukalarga qolgan merosni 1 bilan belgilasak, u holda o'g'illarga ajratilgan qismlarning yig'indisi birni bermaydi: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$. Demak, $1 - \frac{17}{18} = \frac{1}{18}$ qism bo'lishda ishtirok etmay qoldi, bunga aqli yetgan donishmand o'zining tuyasini qo'shib, 18 ta tuyani bemalol $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ nisbatlarda bo'ldi. $\frac{1}{18}$ qism, ya'ni bitta ortiqcha ekanligini bilgan donishmand o'z tuyasidan ajrab qolmasligiga ishonchi komil edi.

4. Sirli ravishda g'oyib bo'lish.

To'g'ri to'rtburchak shaklidagi karton bo'lagiga bir-biridan baravar uzoqlikda turgan o'n uchta bir xil chiziq chizamiz (5.18-chizma).

Endi to'g'ri to'rtburchakni uning eng chapdagi chiziqchaning yuqori uchini eng o'ng tomondagi chiziqchaning pastki uchi bilan tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'yicha kesamiz. To'g'ri to'rtburchakning ikkala bo'lagini kesish chizig'i bo'yicha bir qadam suramiz. Chiziqchalarni sanab chiqib, ular 12 ta bo'lib qolganini ko'ramiz. Bitta chiziqcha qayoqqa g'oyib bo'ldi?

T u s h u n t i r i s h . Kesish chizig'i birinchi va oxirgi chiziqchani qismlarga ajratmaydi. Bitta bo'limga surishdan keyin birinchi chiziqchaga ikkinchi chiziqchaning qismi, ikkinchiga — uchinchining qismi qo'shilib ketadi va hokazo. Oxirgi o'n uchinchi chiziqcha esa o'zidan oldingi chiziqchaga butunlay qo'shilib ketadi. Shunday qilib, o'n uchta chiziqcha o'rniga o'n ikkita (lekin ulardan uzunroq) chiziqcha hosil bo'ladi. Oddiy ko'z bilan qaraganda bunday uzayishni sezish qiyin.



5.18 - chizma.

5. Bir ikkiga teng.

Quyidagi tenglikning to‘g‘ri ekanligi ravshan:

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2 \tag{1}$$

Ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$(x - x)\,(x + x) = x\,(x - x). \tag{2}$$

So‘ngra quyidagicha mulohaza yuritamiz: har biri ikkitadan ko‘paytuvchiga ega bo‘lgan ikkita o‘zaro teng ko‘paytma bor. Bu ko‘paytmalar bittadan teng $(x - x)$ ko‘paytuvchilarga ega bo‘lgani uchun, ularning ikkinchi ko‘paytuvchilari ham o‘zaro teng bo‘ladi:

$$\begin{gathered} x + x = x, \\ 2x = x, \\ 2 = x : x, \\ 2 = 1. \end{gathered} \tag{3}$$

(Oxirgi tenglikning har ikki tomonini 2 ga ko‘paytirib, yana $4 = 2$ ekanligini ham „isbot qilamiz“.) Xato qayerda?

T u s h u n t i r i s h . (2) tenglikdan (3) tenglikka o‘tishda xatoga yo‘l qo‘yilgan. Ko‘paytmalar teng bo‘lganda ko‘paytuvchilarning ham o‘zaro tengligi ko‘paytma nolga teng bo‘lganda to‘g‘ri emas.

O‘quvchilar tenglamalar bilan tanishayotganlarida (2) tenglikdan (3) ga o‘tish — tenglikning har ikkala tomonini $(x - x)$ ga qisqartirish yo‘li bilan amalga oshirilishini ko‘radilar. U holda xatoni tushuntirish ancha yengillashadi: tenglikning har ikkala tomoni nolga teng ifodaga bo‘linyapti, nolga bo‘lish mumkin emas!

Bu sofizmni matematika kechasida sahnalashtirilgan holda o‘tkazish mumkin. Bunda ikkita o‘quvchi qatnashadi. Masalan:

I — Bugun juda xursand ko‘rinasan?

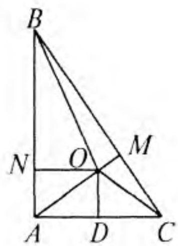
II — Nega xursand bo‘lmay, axir men bugun matematikadan 4 baho oldim!

I — Bekorga xursand bo‘lyapsan: sen olgan 4 baho ikki baho bilan baravar. Xohlasang, buni senga isbot qilib beraman. (U $4 = 2$ ekanligini „isbotlaydigan“ hisoblashlar yozilgan plakatni ochib ko‘rsatadi va „isbotlab“ beradi.)

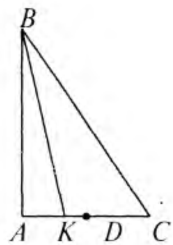
II — Haqiqatan ham qiziq. Shunday mulohaza yuritar ekansan o‘zing matematikadan necha baho olasan?

I — Uch!

II — Ha, unchalik emas? Lekin sen xafa bo‘lma, uch beshga teng! Agar $2 = 4$ bo‘lsa, uning har ikki tomoniga bittadan qo‘shib, yana o‘zaro teng ifoda hosil qilamiz:



5.19 - chizma.



5.20 - chizma.

$2 + 1 = 4 + 1$ yoki $3 = 5$.

I va II — O'rtoqlar, iltimos, qaysi birimiz haqlimiz, yordam bering!

6. „Gipotenuza katetga teng".

ABC to'g'ri burchakli uchburchak berilgan: *BO* chiziq *B* burchakning bissektrisasi, $AD = DC$; $OD \perp AC$; $OM \perp BC$; $ON \perp$ $\perp AB$ (5.19-chizma).

Quyidagicha mulohaza yuritamiz: $\triangle BON = \triangle BOM$, $\triangle AOD =$ $= \triangle DOC$, $\triangle NOA = \triangle OMC$.

Bu uchburchaklarning mos ravishda teng elementlarini topamiz: $AN = MC$, $BN = BM$, demak, $BC = AB$.

Bu sofizmning noto'g'ri ekanligini isbotlash uchun uchburchak ichki burchagining bissektrisasi asosni yondosh tomonlarga proporsional bo'laklarga bo'lishi haqidagi teoremadan foydalanamiz. Haqiqatan, bissektrisaning *AC* tomon bilan kesishgan *K* nuqtasi (5.20-chizma) *AC* tomonning o'rtasi bo'lgan *D* nuqtadan chapda yotadi, chunki $AK < KC$, shuning uchun $AB < BC$.

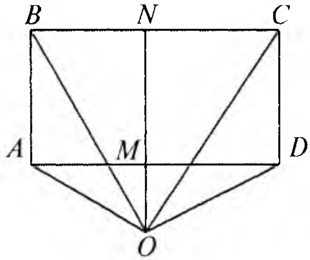
7. „To'g'ri burchak o'tmas burchakka teng".

Berilgan: $\angle BAD$ — to'g'ri burchak; $\angle ADC$ — o'tmas burchak: $AB = CD$; $MA = DM$; $BN = NC$, $MO \perp AD$; $NO \perp BC$ (5.21-chizma).

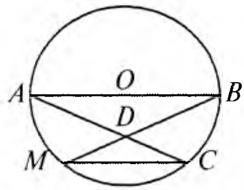
"Isboti". $\triangle BNO = \triangle ONC$, demak, $BO = OC$, lekin $AO =$ $= OD$ va $AB = CD$ bo'lgani uchun $\triangle ABO = \triangle OCD$ va $\angle BAO =$ $= \angle CDO$. Biroq o'zaro teng *MAO* va *OMD* uchburchaklarda mos burchaklar teng; $\angle MAO = \angle MDO$.

Demak, $\angle BAO - \angle MAO = \angle CDO - \angle MDO$ yoki $\angle BAD = \angle CDM$.

T u s h u n t i r i s h. „Isbot" qilishda *CO* to'g'ri chiziq *AD* kesmani kesadi deb noto'g'ri fikr yuritilgan. Sofizmni „isbotlashda"



5.21- chizma.



5.22- chizma.

hosil qilingan natija – CO chiziq AD kesmani kesmasligidan dalolat beradi.

8. „Aylananing har qanday vatari uning diametriga teng“.

Birorta aylana berilgan. Uning AB diametrini va AC vatarini o‘tkazamiz. Bu vatarning o‘rtasi D nuqtani topamiz va B, O nuqtalardan BM vatarni o‘tkazamiz. M va C nuqtalarni tutashtirib, ikkita ABD va MDC uchburchak hosil qilamiz. Bu uchburchaklar ikkita burchaklari va bir tomonlariga ko‘ra teng (5.22-chizma). Demak, $AC = AB$, chunki teng uchburchaklarda teng burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi.

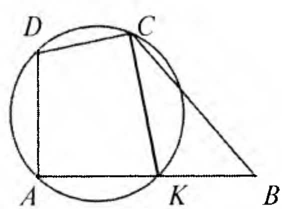
Tushuntirish. Yo‘l qo‘yilgan xatoni sezish oson. Uchburchaklarni taqqoslashda teng tomonlarga yopishgan burchaklar teng deb noto‘g‘ri xulosa chiqarilgan. Shunday qilib, bu yerda uchburchaklar tengligining ikkinchi alomati noto‘g‘ri qo‘llanilgan.

9. „Uchburchakning tashqi burchagi u bilan qo‘shni bo‘lmagan ichki burchagiga teng“.

$ABCD$ – qarama-qarshi burchaklarining yig‘indisi $180°$ga teng bo‘lgan ixtiyoriy to‘rtburchak bo‘lsin (5.23-chizma).

A, D, C nuqtalardan aylana o‘tkazamiz. Aylana bilan kesilgan K nuqtani C uchi bilan tutashtirib, aylanaga ichki chizilgan $AKCD$ to‘rtburchakni hosil qilamiz. Demak, $\angle D + \angle K = 180°$; bundan $\angle K = \angle B$ ekanligi, ya’ni uchburchakning tashqi burchagi u bilan qo‘shni bo‘lmagan ichki burchagiga teng ekanligi chiqadi.

Tushuntirish. A, D va C nuqtalardan aylana o‘tkazar ekanmiz, u B nuqtadan o‘tmaydi deb hisoblagan edik. Bu noto‘g‘ri va shuning uchun yanglish xulosa kelib chiqdi.



5.23-chizma.

10. „Ikki karra ikki — besh“.

Birinchi darajali tenglama berilgan:

$$8x - 12 = 10x - 15.$$

Soddalashtiramiz: $4(2x - 3) = 5(2x - 3)$. Uni $(2x - 3)$ ga qisqartirsak, $4 = 5$ yoki boshqacha: $2 \cdot 2 = 5$ hosil bo‘ladi.

T u s h u n t i r i s h. Berilgan tenglamani qisqartirmasdan yechib, $x = \frac{3}{2}$ ekanligini topamiz. Demak, tenglamaning ikkala tomonini nolga teng ifodaga bo‘lgan ekanmiz.

11. „Uch to‘rtga teng“.

Ushbu sistema berilgan: $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ x = 4 - 2y. \end{cases}$

Bu sistemani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yechamiz: $x = 4 - 2y$ ni birinchi tenglamaga qo‘yamiz. Natijada $4 - 2y + 2y = 3$, ya’ni $4 = 3$ ni hosil qilamiz.

T u s h u n t i r i s h. Hosil qilingan ma’nosiz natija sistema yechimga ega emasligidan dalolat beradi. Haqiqatan, birinchi tenglamada $x + 2y$ yig‘indi uchga teng, ikkinchi tenglamadan esa xuddi shu $x + 2y$ yig‘indining to‘rtga tengligi kelib chiqadi.

12. „Ikki birga teng“.

Quyidagi tenglikning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish oson:

$$1 - 3 + \frac{9}{4} = 4 - 6 - \frac{9}{4}.$$

Uni quyidagicha qayta yozib olamiz:

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2.$$

Har ikki tomondan kvadrat ildiz chiqarsak:

$$1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} \text{ yoki } 1 = 2.$$

T u s h u n t i r i s h. Biz $\sqrt{a^2} = a$ deb xatoga yo‘l qo‘ydik. Aslida esa $\sqrt{a^2} = |a|$ ekanligini nazarda tutish kerak edi, u holda tenglikning har ikkala tomonidan kvadrat ildiz chiqarib,

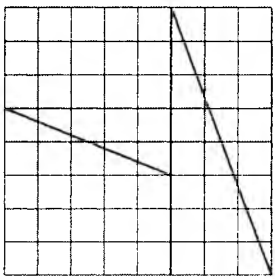
$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$, $\left|1 - \frac{3}{2}\right| = \left|2 - \frac{3}{2}\right|$ yoki $\left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$ ni, bundan $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ni hosil qilar edik.

13. „64 sm^2 = 65 sm^2“.

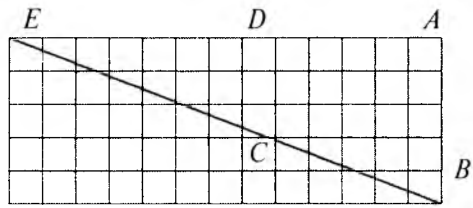
Tomoni 8 sm ga teng bo‘lgan kvadrat 5.24- chizmada ko‘rsatilgandek bo‘laklarga bo‘linadi. Bu bo‘laklardan o‘lchovlari 13 sm va 5 sm bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak tuziladi (5.25-chizma).

Kvadratning yuzi $S = 8 \cdot 8 = 64$ sm, to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi esa $S_1 = 13 \cdot 5 = 65$ sm^2 .

Shunday qilib, 64 sm^2 = 65 sm^2.



5.24- chizma.



5.25- chizma.

Tushuntirish. $BADC$ trapetsiyaga DCE uchburchakni yonma-yon qilib qo‘yamiz. BC va CE bir to‘g‘ri chiziq tashkil etadimi? Ma’lum bo‘lishicha tashkil etmas ekan. Haqiqatan, agar ular bir to‘g‘ri chiziq tashkil etsa, ABE uchburchak CDE uchburchakka o‘xshash bo‘lib, $\frac{AB}{AE} = \frac{CD}{DE}$ tenglik o‘rinli bo‘lib qolar edi. Biroq $\frac{AB}{AE} = \frac{5}{13}$, $\frac{CD}{DE} = \frac{3}{8}$, $\frac{5}{13} \neq \frac{3}{8}$, demak, ayrim bo‘laklardan to‘g‘ri to‘rtburchak tuzilganda ular orasida ochiqliklar qoladi. Ana shu ochiqliklar yig‘indisi 1 sm^2 ga teng bo‘ladi.

14. Axilles va toshbaqa.

Axilles (qadimgi grek afsonalaridagi qahramon) A punktdan chiqib, u bilan bir vaqtda B punktdan chiqib, Axillesning tezligidan 10 marta kam tezlik bilan qochib ketayotgan toshbaqani quvib ketdi. Axilles hech qachon toshbaqani quvib yeta olmasligini „isbotlaymiz“. Haqiqatan, Axilles B nuqtaga kelganida u bu yerda toshbaqani uchratmaydi — toshbaqa allaqachon B_1 nuqtada bo‘ladi. Axilles B_1 nuqtaga kelgunicha toshbaqa B_1 nuqtadan oldinda bo‘lgan birorta B_2 nuqtaga yetib olishga ulguradi va hokazo. Bu jarayon cheksiz davom etganligi uchun Axilles hech qachon toshbaqani quvib yeta olmaydi!

T u s h u n t i r i s h . Aniqlik uchun $AB = 100$ m. Axillesning tezligi 10 m/s, toshbaqaning tezligi 1 m/s deylik. U holda AB yo'lni o'tish uchun 10 s, keyingi qismini o'tish uchun 1 s, uchinchi qismga $\frac{1}{10}$ s va hokazo vaqt ketgan bo'lsin:

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$$

Yig'indisi $S = \frac{a_1}{1-q}$ formula bilan hisoblanadigan va $11\frac{1}{9}$ (s) ga teng bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hosil bo'ladi. Demak, aslida Axilles toshbaqani $11\frac{1}{9}$ sekunddan keyin quvib yetadi. Sodda arifmetik hisoblash ham bizni shu natijaga olib keladi:

$$10 \text{ m/s} - 1 \text{ m/s} = 9 \text{ m/s};\ 100 : 9 = 11\frac{1}{9} \text{ (s)}.$$

6- §. MATEMATIK PARADOKSLAR

Matematik sofizmlarni ba'zan paradokslar deb ham atashadi. Ko'pincha, odatdagi tasavvurlarga mos kelmaydigan tasodifiy hodisalar paradoks hisoblanadi. Shu nuqtayi nazardan ba'zi bir matematik sofizmlarni paradoks deb yuritish mumkin, biroq odatda matematik paradoks deyilganda yuzaki qaragandagina ma'nosiz bo'lib tuyuluvchi, aslida esa to'g'ri bo'lgan tasdiqqa aytiladi. Bir nechta sodda matematik paradokslarni qaraymiz.

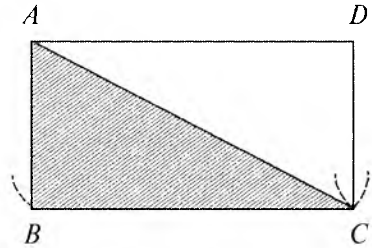
1) $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak AD tomoni atrofida aylantirilmoqda (5.26-chizma). ABC uchburchakning aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi ACD uchburchakning aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmidan katta. ABC uchburchak ACD uchburchakka teng bo'lsa-da, teng uchburchaklarning aylanishidan hosil bo'lgan jismlar turli hajmga ega.

Oddiy hisoblashlar aytilganning to'g'riligini tasdiqlaydi. Belgilash kiritamiz: $BC = h$, $AB = r$, u holda ACD uchburchakning AD o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan geometrik jismning hajmi: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

ABC uchburchakning o'sha o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi: $V_2 = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

Shunday qilib, $V_2 = 2V_1$.

2) Yer shari va apelsin. Yer shari ekvator bo‘ylab halqa shaklida o‘rab chiqilgan, xuddi shuningdek, apelsin ham o‘zining katta aylanasi bo‘ylab o‘rab chiqilgan deb tasavvur qilaylik. So‘ngra, har bir halqa bir metr uzaytirildi deb faraz qilaylik. U holda halqalar jismlar sirtidan bo‘shashib, halqa bilan sirt orasida ma’lum oraliq qoladi. Bu oraliq Yer sharida ham, apelsinda ham bir xil bo‘ladi.



5.26- chizma.

Aytilganlarning to‘g‘riligiga hisoblash yordamida ishonch hosil qilamiz. C — Yer shari ekvatorining uzunligi, R — Yerning radiusi bo‘lsin. S — apelsin ekvatorining uzunligi, r — apelsinning radiusi bo‘lsin (barcha uzunliklar metr bilan berilgan). Ma’lumki, $C = 2\pi R$, $S = 2\pi r$. Halqalar bir metr uzaytirilgandan keyin, ularning uzunliklari quyidagilarga teng bo‘ladi: Yer halqasi $C+1$, apelsin halqasi $S+1$. Halqalarning radiuslarini mos ravishda R_1 va r_1 bilan belgilasak, ushbu munosabatlar hosil bo‘ladi:

$$C+1 = 2\pi R_1,\ \ S+1 = 2\pi r_1 \ \text{ bundan } \ R_1 = \frac{C+1}{2\pi},\ \ r_1 = \frac{S+1}{2\pi}.$$

Hosil bo‘lgan oraliq Yer shari uchun $R_1 - R = \frac{C+1}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$ ga, apelsin uchun $r_1 - r = \frac{S+1}{2\pi} - \frac{S}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$ ga teng. Demak, ular teng.

3) Yer sharining qaysi nuqtasidan chiqqanimizda janubga meridian bo‘ylab 10 km, so‘ngra sharq tomonga parallel bo‘yicha 10 km yurib, dastlab chiqqan nuqtamizga qaytib kelamiz?

Aniq va yagona bo‘lib ko‘rinadigan javob shimoliy qutbdir. Haqiqatda esa masala shartlariga javob beradigan nuqtalar to‘plami cheksiz ko‘p. Aql bovar qilmaydi, lekin fakt! Haqiqatan, janubiy qutbga yaqin uzunligi 10 km bo‘lgan parallelni tasavvur qilaylik, u holda undan 10 km shimolda joylashgan parallelning meridian bo‘yicha olingan barcha nuqtalari masala shartini qanoatlantiradi.

4) To‘plamlar nazariyasi paradokslari haqida. To‘plam tushunchasi — matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. Chekli to‘plam qaralganda tekshirish unchalik qiyinchilik tug‘dirmaydi. „Elementlari ko‘p“, „elementlari kam“, „yig‘indi“

tushunchalari aniq ma'noga ega. Biroq natural sonlar arifmetikasidan boshlab biz cheksiz to'plamlarga duch kelamiz. Chekli to'plamlarga taalluqli qoidalarni to'g'ridan-to'g'ri cheksiz to'plamga tatbiq qilish mumkin emas. Masalan, XVIII asr matematiklari orasida $1-1+1-1+1-1+\ldots$ cheksiz qator xususida uzoq vaqt qizg'in tortishuvlar davom etgan.

Bu qator yig'indisini quyidagicha hisoblash mumkinga o'xshaydi:

$S=(1-(1-1+1-1+1-1+\ldots)=0$, lekin bir vaqtning o'zida $S=(1-(1-1+1-1+1-1+\ldots)=1-S$, bundan $2S=1$; $S=\frac{1}{2}$. Nihoyat, $S=1-((1-1)+(1-1)+\ldots)=1$. Qarama-qarshilikka duch keldik. Bu ziddiyat cheksiz obyektlarga chekli to'plamlarga xos tushunchalarni to'g'ridan-to'g'ri tatbiq etishimiz natijasida kelib chiqadi. Qo'shiluvchilar cheksiz bo'lgan holda yig'indiga ta'rif bermasdan, „yig'indi"ni qo'shiluvchilar soni chekli bo'lgan holdagi kabi hisoblashga tushib ketdik.

Cheksiz to'plamlarga murojaat qilgan paytimizdan boshlab bizning „ayoniy" bo'lgan tushuncha va tasavvurlarimiz o'z kuchini yo'qotadi, masalan: „butun o'zining qismidan katta". Barcha natural sonlar to'plami barcha juft sonlar to'plami va barcha kasr sonlar to'plami bilan taqqoslanishi mumkin. Ko'rib turibmizki, cheksiz to'plamlar quyidagi paradoksal xossaga ega ekan: cheksiz to'plam o'zining qism to'plamlaridan biriga ekvivalent bo'lishi mumkin. Undan tashqari, to'plam o'zining birorta qism to'plamiga ekvivalent bo'lgan holda va faqat shu holdagina, cheksiz bo'lishini isbot qilish mumkin. Ma'lum bo'lishicha, eng kamida ikki turdagi cheksizlik bo'lishi mumkin. Birinchi tur natural sonlar qatori yordamida, ikkinchi tur esa haqiqiy sonlar to'plami yordamida ifodalangan. Natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lgan barcha to'plamlar (butun sonlar to'plami, tub sonlar to'plami, to'liq kvadratlar to'plami, uchga karrali sonlar to'plami va hokazo) quvvati „alef — nol" bo'lgan sanoqli to'plamlar deyiladi. Haqiqiy sonlar quvvati kontinuum quvvati deyiladi. Ixtiyoriy uzunlikdagi to'g'ri chiziqning har qanday kesmasi kontinuum quvvati bilan xarakterlanadi. Shunga o'xshash gaplarni tekis shaklning nuqtalari to'plami, masalan, kvadrat uchun, hajmga ega bo'lgan shakl nuqtalari to'plami, kub uchun va umuman ixtiyoriy sondagi o'lchovli fazoning ixtiyoriy obyekti uchun ham aytish mumkin.

Kontinuum quvvat sanoqli to'plamning quvvatidan cheksiz son marta kattadir.

Ancha yuqori quvvatga ega bo'lgan to'plamlar tuzish yo'li ma'lum: berilgan to'plamning barcha qism to'plamlari to'plamini ko'rish yetarli, natijada berilgan to'plamga ekvivalent bo'lmagan to'plam hosil qilamiz. Barcha qism to'plamlardan to'plam tuzish jarayoni quvvatlari o'sib boradigan ekvivalent bo'lmagan cheksiz to'plamlar zanjirini hosil qiladi. Yangi to'plamlarni hosil qilishning bu yo'li tasodiflarga boy.

O'zini o'z elementlaridan biri sifatida saqlovchi to'plamni noto'g'ri to'plam, qolgan barcha to'plamlarni esa to'g'ri to'plam deymiz. Barcha to'g'ri to'plamlardan tuzilgan to'plamni A bilan belgilaylik. U holda A yo to'g'ri, yo noto'g'ri to'plam bo'ladi. Agar A to'g'ri to'plam bo'lsa, A ning ta'rifiga ko'ra u A ga tegishli bo'ladi, demak, noto'g'ri to'plam ta'rifiga ko'ra u noto'g'ri to'plam bo'ladi. Qarama-qarshilikka duch keldik. Ikkinchi tomondan, agar A noto'g'ri to'plam bo'lsa, u holda A ning ta'rifiga ko'ra u A ga tegishli bo'lmaydi. U o'ziga tegishli emas, ya'ni noto'g'ri to'plam emas, bu bizni yana zidlikka olib keladi.

Keltirilgan bu misol odatda „to'plamlar nazariyasi paradokslari" deb ataluvchi klassik qarama-qarshiliklarning biridir. Intuitiv „to'plam" tushunchasini cheklanmagan holda bemalol ishlatish qarama-qarshiliklarga olib keladi. Bizning cheksizlik haqidagi tasavvurlarimiz, tajriba natijasida hosil qilingan teng kuchli tabiiy asosga ega emas, ular abstraksiya yo'li bilan hosil qilinadi. To'plam ta'rifi intuitsiyaga emas, balki aksiomatik nazariyaga tayangan bo'lishi zarur.

To'plamni aniq va to'la ta'riflamaslik natijasida kelib chiqadigan qarama-qarshiliklarga ega bo'lgan bir qancha sodda masalalar mavjud.

Misollar. 1) Bir varaq qog'ozning bir tomoniga „Orqa tomonda yozilgan jumla haqiqat" deb, orqa tomoniga esa „Orqa tomonda yozilgan jumla yolg'on" deb yozilgan.

Aytaylik, birinchi yozuv to'g'ri bo'lsin, u holda u bir vaqtning o'zida yolg'on hamdir, chunki to'g'ri deb orqa tomonda yozilgan jumlani olish kerak bo'ladi.

Endi birinchi yozuv yolg'on bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda qog'ozning orqa tomonida yozilgan tasdiqqa ishonish kerak emas, demak, birinchi tomonda yozilgan yozuv yolg'on emas, to'g'ri ekan. Yana qarama-qarshilikka duch keldik.

2) Bir askarga u xizmat qilayotgan bo'limdagi o'zlari soqollarini ololmaydigan va faqat shunday askarlarning soqolini olish buyurildi. O'ziga gal kelganda uning boshi qotib qoldi: o'zi soqolini olishi mumkin bo'lganlar qatoriga kirgani uchun, u o'zining ham soqolini boshqalar qatori olishi kerak, biroq ikkinchi tomondan u faqat o'zlari soqollarini ololmaydiganlarning soqolini olishi kerak, askarning o'zi esa bundaylar qatoriga kirmaydi, demak, u o'zining soqolini olishi kerak emas!

Cheksiz to'plamlarni, jumladan, ular ichida eng kichik quvvatga ega bo'lgan sanoqli to'plamni („alef-nol"), undan keyin keladigan kontinuum quvvatga ega bo'lgan to'plamlarni tekshirish natijasida „sanoqli to'plam quvvati bilan kontinuum quvvati orasidagi quvvatga ega bo'lgan to'plam mavjud emasmi?" degan savol paydo bo'ldi. Bu savol kontinuum muammosi degan nom oldi. To'plamlar nazariyasi asoschisi Georg Kantor oraliq to'plam mavjud emas degan fikrni aytgan (kontinuum gipoteza). Yana paradoks: ma'lum bo'lishicha kontinuum gipotezasini na rad etib bo'ladi, na isbot qilib bo'ladi!

Nemis matematigi Kurt Gyodel Kantor gipotezasini hech qanday usul bilan rad etib bo'lmasligini isbotladi, 1963- yilda esa Pol Koen kontinuum gipotezaga qarama-qarshi bo'lgan fikrni hech qanday mantiqiy mulohazalar yordamida rad etib bo'lmaslikni, ya'ni sanoqli to'plamlardan quvvatliroq, biroq kontinuum to'plamidan quvvatsiz bo'lgan oraliq to'plamlar mavjud ekanligini rad etish mumkin emasligini isbot qildi.

To'plamlar nazariyasi faqat matematikaga, mantiqqa, falsafaga emas, balki amaliyotga olib boruvchi keng istiqbollar ochilib bormoqda. „To'plamlarning elementlari turli xil narsalar: harflar, atomlar, sonlar, funksiyalar, nuqtalar, burchaklar va hokazolar bo'lishi mumkin. Bu yerdan eng avval to'plamlar nazariyasining juda ham kengligi va uning bilimlarning ko'pgina sohalariga (matematikaga, mexanikaga, fizikaga) tatbiq qilinishi ravshandir" (N. N. Luzin).

VI BOB. SHAKLNING GO'ZALLIGI

1- §. MATEMATIK NAQSHLAR

Go'zallikni ko'rish va sezish orqali mushohada qilish birinchi navbatda, uning boshlang'ich elementlarini — rangini, chiziqlarini, chizmaini, ularning uyg'unligi va mutanosibligini nozik idrok etishni nazarda tutadi. Biz matematikadan mashg'ulotlar o'tkazayotganda go'zallikning boshlang'ich, eng sodda elementlari — chizma va chiziqlarga duch kelamiz. Ko'pincha go'zallikning mazmunini tashkil etuvchi mutanosiblik tushunchasi asosida matematik munosabatlar yotadi. Bu fikr ajoyib yozuvchi K. Paustovskiyning „Oltin gul" povestida yorqin ifodalangan: „Poyezdda rassom bilan uchrashgandan keyin Sankt-Peterburgga keldim. Shunda yana qarshimda Sankt-Peterburgning maydonlari va proporsional binolarining muhtasham ansambllari namoyon bo'ldi.

Men ular arxitekturasining sirini bilmoq uchun ularga uzoq tikilib qoldim. Ularning siri, binolar u qadar ulkan bo'lmasalarda, kishida ulug'vor imorat kabi taassurot qoldirishida edi. Ajoyib inshootlardan biri — Bosh shtab binosi Qishki saroyning ro'parasida silliq yoy kabi joylashgan, uning balandligi to'rt qavatli uydan oshmaydi. Biroq bu bino Moskvadagi istagan baland qavat binodan ulug'vorroq ko'rinadi.

Buning siri murakkab emas. Binolarning ulug'vorligi ularning mutanosibligi, garmonik proporsiyasi va bezaklari — deraza bandlari, kartush va naqshlarining soni uncha ko'p emasligiga bog'liqdir.

Ana shu binolarga qaraganingda yaxshi did — bu avvalo me'yor hissi ekanligini tushunasan kishi". Yozuvchi davom etib „... bu binolar qismlarining mutanosibligi, ortiqcha narsa yo'qligi, bezaklarning uncha ko'p emasligi, har bir chizig'i ko'rinib turgan va kishiga zavq bag'ishlaydigan soddalik qonunlarining ..." qanchalik muhim ekanligini ta'kidlaydi. Shunisi qiziqki, qadimgi greklarning estetik ongiga me'yor prinsipi singib ketgan. Me'yor, mo'tadillik, mutanosiblik — haqiqatning va go'zallikning ko'rsatkichlari hisoblangan. Me'yorga ega bo'lmagan barcha narsa, har qanday mutanosibsizlik beo'xshov, xunuk, haqiqiy bo'lmagan narsa kabi idrok etilgan. Qadimgi grek filosofi Platon (eramizdan oldingi 427—347- y.) bunday deb yozgan edi: „Deyarli hamma, ko'rish orqali idrok qilinadigan go'zallikni qismlarning bir-biri va bir butun narsaning nafis bo'yoqlar bilan mutanosibligi vujudga keltiradi deydilar. Buni tasdiqlayotganlar uchun ham, umuman barcha qolganlar uchun ham go'zal bo'lishlik — simmetrik va mutanosib bo'lishlik demakdir" . Pifagorchilar aylanani va sferani ularning to'liq aylanma simmetriyaga va mukammal geometrik ko'rinishga ega bo'lgani uchun universal ko'rkam chizma deb hisoblagan.

Geometriyani, chiziqlarning va boshqa geometrik chizmalarning go'zalligini, mutanosibligini, simmetrikligini sezmasdan o'rganib bo'ladimi? Go'zallik hamma yerda mavjud, — deydi, ajoyib matematiklaridan biri, akademik P. S. Aleksandrov.

Faqat matematika, aniqrog'i geometriya har bir kishiga geometrik chizmalar chiziqlari guruhining tashqi go'zalligidan zavq olishgagina emas, balki go'zallikning asosida yotuvchi mutanosiblik va simmetriyaning matematik asosini tushunishga ham imkon beradi.

Matematikada chuqur matematik mazmunli hamda chiroyli chizmalari, ornamentlari bilan ajralib turadigan ajoyib geometrik chizmalarning modelini yasashga doir masalalar juda ko'p. Ajoyib, jilvador, ko'zni qamashtiradigan chiziqlar ham kam emas. Bunday masalalar zavqlanish, go'zallik hislarini uyg'otadi.

Misol.

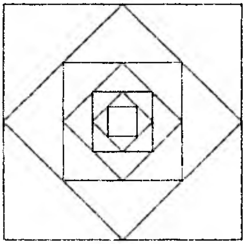
1. Ushbu $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots$ qatorning yig'indisini toping va uning geometrik tasvirini bering.

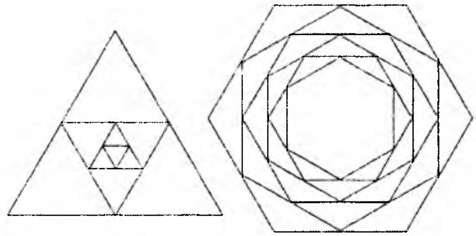
Yechish. Yig'indini cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisining formulasiga ko'ra topamiz:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Masalaning geometrik ma'nosi 6.1- chizmadan ko'rinib turibdi (bunda kvadratning tomoni birga teng deb olinadi). Shunga o'xshash masalani muntazam uchburchak va oltiburchak uchun ham tuzish mumkin (6.2-chizma.)

2. Qavariq n burchak diagonallarining sonini toping. n – 5, 12 uchun chizma yasang.



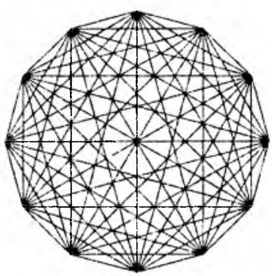


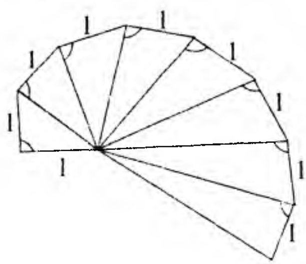
6.1 - chizma. 6.2- chizma.

Yechish. n burchakning har qaysi uchidan $n-3$ ta diagonal, hammasi bo'lib $(n-3)n$ ta diagonal o'tkazish mumkin, lekin har qaysi diagonal shunday yo'l bilan ikki marta sanalgani uchun, diagonallar soni N ni topish uchun hosil qilingan ko'paytmani 2 ga bo'lamiz. Shunday qilib, $N = \frac{(n-3)n}{2}$. Agar bitta uchdan, so'ngra qo'shni uchdan va hokazo uchlardan barcha mumkin bo'lgan diagonallarni o'tkazsak ham o'sha natijani hosil qilar edik:

$$N = ((n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1)-n =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)}{2} - n = \frac{(n-3)n}{2}.$$



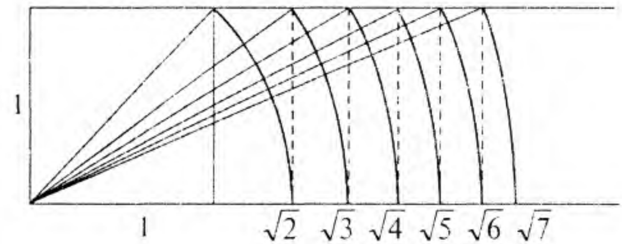


6.3 - chizma. 6.4 - chizma.

Agar tomonlarining soni yetarlicha katta bo'lgan muntazam ko'pburchak olsak va uning barcha diagonallarini chizib chiqsak, ajoyib, ko'z qamashtiruvchi rasm hosil bo'ladi (6.3-chizma). Bunga o'xshash chizmalar chizish majburiy bo'lmasdan, sinfdan tashqari ishlarda bajarilishi mumkin.

3. Uzunliklari $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ va hokazo sonlar bilan ifodalangan kesmalarni sirkul va chizg'ich yordamida yasang.

Yechish. 6.4-, 6.5-chizmalarga qarang.



6.5- chizma

4. Radiusi birlik uchun qabul qilingan aylana berilgan. Bu aylana atrofida u bilan konsentrik bo'lgan shunday aylanalar yasangki, hosil bo'lgan halqalar bir-biriga tengdosh va har birining yuzi kichik doiraning yuziga teng bo'lsin.

Yechish. Radiuslari $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5},...$ ga teng bo'lgan aylanalar yasab, yuzi π kv. birlikka teng bo'lgan bir xil yuzli qator halqalar hosil qilamiz (6.6-chizma).

5. Ushbu funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

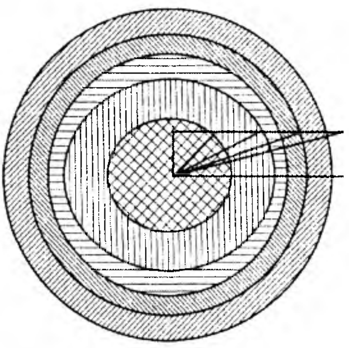
a) $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$;

b) $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

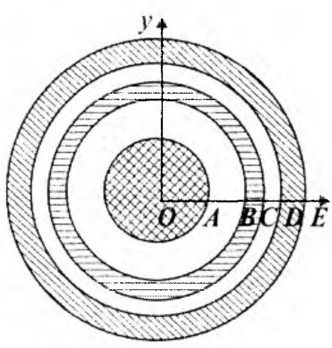
J a v o b. Har qaysi funksiyaning aniqlanish sohasi 6.7-chizmada ko'rsatilgan (shtrixlangan qism). Funksiyalar uchun:

a) $OA = 1$, $OB = \sqrt{2}$; $OC = \sqrt{3}$; $OD = \sqrt{4}$; $OE = \sqrt{5}$; ...

b) $OA = \sqrt{\pi}$; $OB = \sqrt{2\pi}$; $OC = \sqrt{3\pi}$; $OD = \sqrt{4\pi}$; $OE = \sqrt{5\pi}$; ...



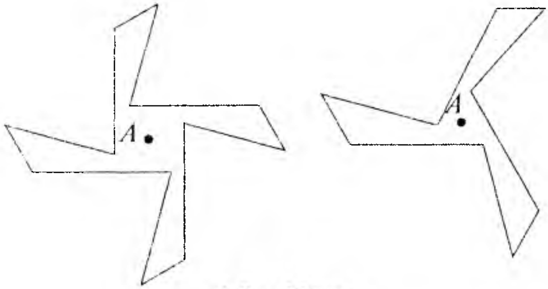
6.6- chizma.



6.7- chizma.

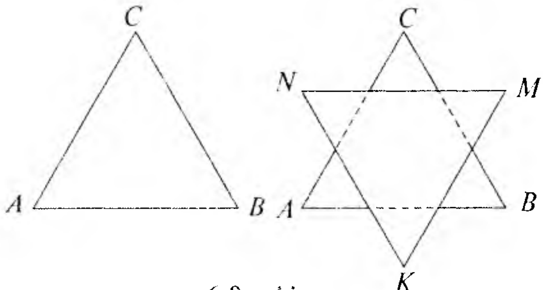
6. Birorta ko'pburchak va uning ichida shunday bir A nuqtani yasangki, bu nuqtadan qaralganda ko'pburchakning hech bir tomoni to'liq ko'rinmasin.

J a v o b . 6.8-chizmaga qarang.



6.8- chizma.

7. AB tomoni birga teng bo'lgan „tikanli" chiziq siniq chiziqlarining teng bo'g'inlari soni cheksiz o'sib borganda uning uzunligini hisoblang (6.9-chizma).



6.9- chizma.

Yechish. ABC uchburchakning perimetri uchga teng, $AKBMCN$ siniq chiziqning perimetrini P_1 desak; $P_1 = 4$; navbatdagi siniq chiziqning perimetri $P_2 = \frac{16}{3}$ va hokazo.

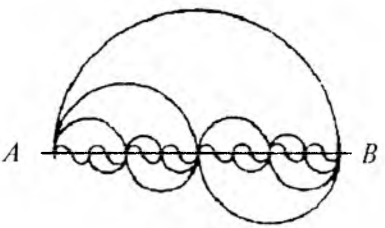
$$P_1 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4; \; P_2 = \frac{1}{9} \cdot 16 \cdot 3 = \frac{16}{3};$$

$$P_3 = \frac{1}{27} \cdot 64 \cdot 3 = \frac{64}{9}; \ldots; P_n = \frac{4^n}{3^{n-1}}; \ldots$$

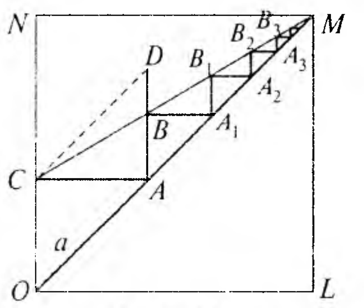
O'zgaruvchi perimetrning limitini topish oson:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = 3 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

8. Sofizm. „π soni 2 ga teng". Diametri $AB = a$ bo'lgan yarim aylana berilgan. Diametrni 2, 4, 8, ... teng qismlarga bo'lamiz va 6.10-chizmada ko'rsatilgandek yarim aylanalar chizamiz. Bo'lish jarayonini cheksiz davom ettirib, AB kesmaga juda ham yaqinlashib keladigan va limiti shu AB ga teng bo'lgan to'lqinsimon chiziqlar ketma-ketligini hosil qilamiz: $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = AB$. Ixtiyoriy to'lqinsimon chiziq uzunligini hisoblab, $l_n = \frac{\pi}{2}\cdot AB$ o'zgarmas kattalikni hosil qilamiz, demak, uning limiti $\frac{\pi}{2}\cdot AB$ ga teng. Oxirgi natijani oldingi natija bilan solishtirib, $\frac{\pi}{2}\cdot AB = AB$; bundan $\pi = 2$ ni hosil qilamiz.



6.10- chizma.



6.11- chizma.

Tushuntirish. $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = AB$ degan tasdiq noto'g'ri.

9. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig'indisi formulasini geometrik usul bilan chiqarish (6.11-chizma).

Aytaylik, $OC = a$; $AB = aq$, $q<1$ bo'lsin. $OLMN$ — kvadrat. U holda $\frac{AB}{OC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \ldots = \frac{A_nB_n}{A_{n-1}B_{n-1}}$ yoki $\frac{aq}{a} = \frac{A_1B_1}{aq}$, bundan $A_1B_1 = aq^2$ ni topamiz, so'ngra: $\frac{aq^2}{aq} = \frac{A_2B_2}{aq^2}$, bundan $A_2B_2 = aq^3$. Shunga o'xshash $A_3B_3 = aq^4, \ldots, A_nB_n = aq^{n+1}$ ekanini topamiz.

$LM = OC + AB + A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots$ ekanini, ya'ni

$$LM = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \qquad (1)$$

ekanini ko'ramiz.

Kvadratning LM tomoni nimaga tengligini boshqa yo'l bilan hisoblaylik. Buning uchun ba'zi bir geometrik yasashlarni bajaramiz. Ulardan:

$$AD = OC; \ \angle BDC = 45^\circ.$$

CDB va MCO uchburchaklarning o'xshashligidan

$$\frac{BD}{OC} = \frac{CD}{OM} \qquad (2)$$

proporsiya hosil bo'ladi. $\triangle\ CDA \sim \triangle\ OML$ dan

$$\frac{CD}{OM} = \frac{AD}{ML} \qquad (3)$$

ni topamiz. (2) va (3) tengliklarni solishtirib,

$$ML = \frac{OM \cdot AD}{CD} = \frac{AD \cdot OC}{BD} = \frac{a}{1-q} \qquad (4)$$

ni hosil qilamiz. (1) va (4) tengliklarni solishtirib, ushbuni topamiz:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

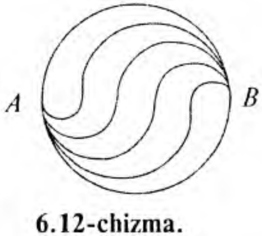
10. Aylana diametri har biri a ga teng bo'lgan n ta qismga bo'lingan. a, $2a$, $3a$, ... , $(n - 1)a$ kesmalarda yarim aylanalar yasalgan (6.12- chizma). Hosil bo'lgan barcha polosalar teng-doshligini isbot qiling.

Yechish. Bitta polosaning yuzini hisoblaymiz. AB diametrning bir tomonida diametri ka ga teng yarim aylana olinadi, u holda $r = \frac{ka}{2}$ va yarim doiraning yuzi $S = \frac{\pi a^2 k^2}{8}$ ga teng bo'ladi.

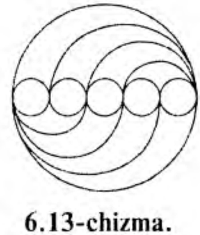
Polosaning ko'rilayotgan qismining ostki chegarasi radiusi $r_1 = \frac{k-1}{2} a$ ga teng, yuzi esa $S_1 = \frac{\pi a^2}{8}(k-1)^2$ ga teng bo'lgan yarim doiradan iborat.

Polosa AB diametrining ikkinchi tomonidagi qismi radiuslari

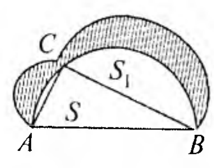
$$R = \frac{(n-k+1)a}{2} \text{ va } R_1 = \frac{(n-k)a}{2}$$



6.12-chizma.



6.13-chizma.



6.14- chizma.

bo'lgan, yuzlari mos ravishda

$$\sigma = \frac{\pi a^2}{8}(n-k+1)^2 \text{ va } \sigma_1 = \frac{\pi a^2}{8}(n-k)^2$$

bo'lgan yarim doiralar bilan chegaralangan. Izlangan yuza

$$S - S_1 + \sigma - \sigma_1 = \frac{\pi a^2}{4} n .$$

Shunday qilib, istagan bir polosaning yuzi k ga bog'liq emas va a diametrning n ta doirasiga teng (6.13-chizma).

11. Gippokrat „oycha"lari.

1) Shtrixlangan ikkita „oycha"ning yuzi yarim doiraga ichki chizilgan to'g'ri burchakli ABC uchburchakning yuziga teng ekanligini isbotlang (6.14-chizma).

Yechish. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ tenglikning har ikki tomonini $\frac{\pi}{4}$ ga ko'paytirib, $\pi \cdot \frac{AB^2}{4} = \pi \cdot \frac{AC^2}{4} + \pi \cdot \frac{BC^2}{4}$ ni hosil qilamiz. Endi hosil qilingan tenglikning har qaysi tomonidan ikkita segmentning yig'indisi $S + S_1$ ni ayiramiz, natijada teng yuzlar qoladi.

2) Shtrixlangan „oycha"lar yuzlarining yig'indisi $ABCD$ kvadrat yuziga tengligini isbot qiling (6.15- a chizma).

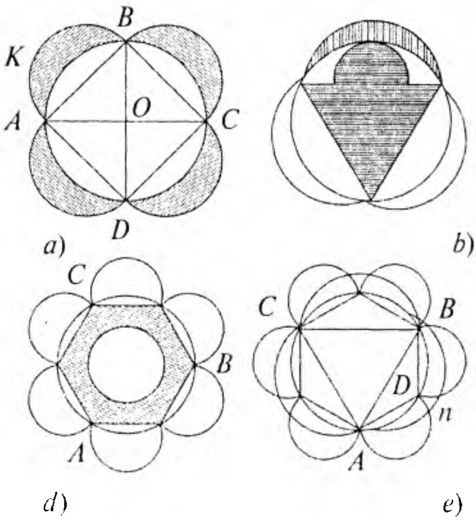
I s b o t . Doiralarning yoki yarim doiralar yuzlarining nisbati ular diametrlari kvadratlarining nisbati kabi bo'lgani uchun ushbuni yoza olamiz:

$$\frac{S_{AKB}}{S_{ABC}} = \frac{AB^2}{AC^2}, \text{ lekin } AC^2 = 2AB^2, \text{ ya'ni } \frac{S_{AKB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}; \; S_{AKB} = \frac{1}{2} S_{ABC},$$

demak, shtrixlangan bitta „oycha"ning yuzi ABO uchburchakning yuziga teng. Kvadratning yuzi to'rtta „oycha" yuzlarining yig'indisiga teng.

Mashqlar. R radiusli doiraga ($ABCD$ kvadrat bo'lgan holdagiga o'xshash) muntazam uchburchak, muntazam oltiburchak va hokazolarni ichki chizib „oycha"lar yasang. Barcha „oycha"larning yuzlarini hisoblang, unga teng chizmalarni toping.

(Yechishning ba'zi variantlari 6.15- chizmalarda keltirilgan: 6.15- *b* chizmada uchta „oycha" yuzlarining yig'indisi ichki chizilgan uchburchak yuzi bilan radiusi R ga teng bo'lgan yarim doira yuzining yig'indisiga teng. 6.15- *d* chizmada oltita „oycha" yuzlarining yig'indisi shtrixlangan sohaning yuziga teng. 6.15- *e*



6.15- chizma.

chizmada yuzi AnB „oycha"ning yuziga teng uchta katta „oycha" ning yuzi uchta kichik „oycha" yuziga BD diametrli doiraning yuzi qo'shilganiga teng).

12. Arximed teoremasi. Arbelon (shtrixlangan o'roq) yuzi doira yuziga teng (6.16-chizma).

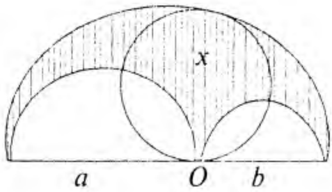
Isbot. $x^2 = ab$, $\frac{\pi}{4} \cdot x^2 = \frac{\pi}{4} \cdot ab$.

Ushbu $(a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$ ayniyatning har ikki tomonini $\frac{\pi}{8}$ ga ko'paytirib, $\frac{\pi}{8}(a+b) - \frac{\pi}{8}a^2 - \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{4}ab$ ni hosil qilamiz, bundan isbotlanishi kerak bo'lgan ifoda kelib chiqadi:

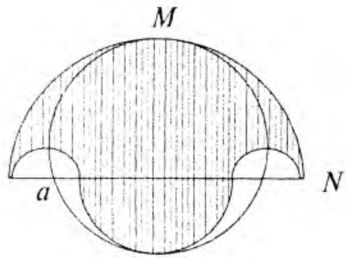
$$\frac{\pi}{8}(a+b)^2 - \frac{\pi}{8}a^2 - \frac{\pi}{8}b = \frac{\pi}{4}x^2 \quad (x \text{ — doiraning radiusi}).$$

13. Markazi O bo'lgan AB diametrli yarim aylana, diametrning ikkinchi tomonida esa markazi o'sha O nuqta bo'lgan ixtiyoriy r radiusli yarim aylana chizilgan. Diametrning qolgan bo'laklarida (6.17-chizmada ko'rsatilgandek) yana ikkita yarim aylana chizilgan, ularning radiusini a bilan belgilaymiz. CD kesmani diametr qilib doira yasalgan. Shu doiraning yuzi shtrixlangan chizma (salinon)ning yuziga teng ekanligini isbot qiling.

Yechish. r radiusli va $(r+2a)$ radiusli yarim doiralarning yuzlarini qo'shib, undan a radiusli ikkita yarim doira yuzini ayirib, salinonning yuzini hisoblash mumkin:



6.16- chizma.



6.17- chizma.

$$S = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi(r+2a)^2}{2} - \pi a^2 = \pi(a + r)^2.$$

CD diametrga yasalgan doiraning yuzi $\frac{\pi \cdot CD^2}{4} + \frac{\pi(2r+2a)^2}{2} =$ $= \pi(a + r)^2$.

Demak, u salinonning S yuziga teng ekan.

14. Yuzni hisoblashga doir chiroyli va ajoyib chizmali bir nechta masala keltiramiz.

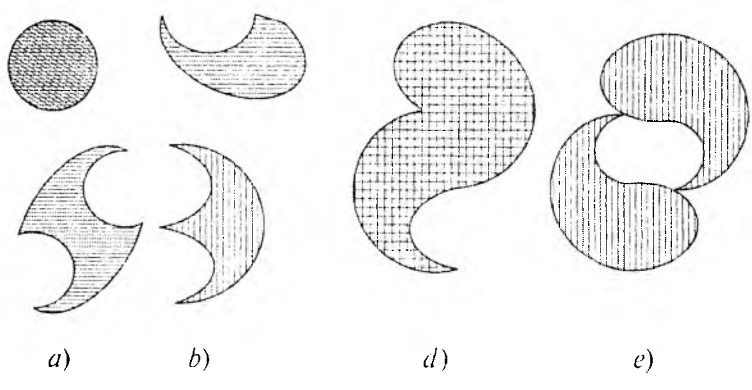
1) Yuzi:

a) berilgan doira yuziga teng bo'lgan (6.18- *a* chizma);

b) berilgan doira yuzidan ikki marta katta bo'lgan (6.18- *b* chizma);

d) uch marta katta bo'lgan (6.18- *d* chizma);

e) to'rt marta katta bo'lgan (6.18- *e* chizma) egri chiziqli chizma (doira emas) yasang. (Boshqacha javoblar ham keltirish mumkinligi ravshan.)



6.18- chizma.

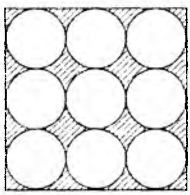
2) Kvadrdtga bir xil radiusli doiralar ichki chizilgan (6.19-chizma). Bu doiralar yuzlari yig'indisining kvadrat yuziga nisbati doiralar sonidan qat'iy nazar $\frac{\pi}{4}$ ga teng ekanligini isbotlang.

3) Teng tomonli uchburchakka bir xil radiusli doiralar 6.20-chizmadagidek ichki chizilgan. Ichki chizilgan doiralar yuzlari yig'indisining uchburchak yuziga nisbati doiralar soni cheksiz o'sganda $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ga teng ekanligini isbot qiling.

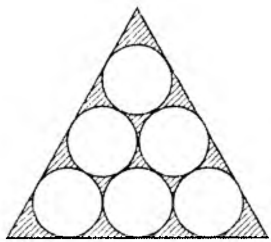
4) R radiusli aylanaga bir-biri bilan va katta aylana bilan urinadigan n ta ($n = 2, 3, 4, ...$) aylana ichki chizilgan (6.21-chizma):

a) ichki chizilgan aylananing radiusi r ni aniqlang;

J a v o b: $r = \frac{R \sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, bu yerda $\alpha = \frac{\pi}{n}$.



6.19- chizma.



6.20- chizma.

b) berilgan aylanaga konsentrik bo'lgan kichik aylananing radiusini aniqlang;

J a v o b: $\frac{R(1-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha}$.

d) shtrixlangan qismning yuzini toping;

J a v o b: $\pi R^2\left[1 - n\left(\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2\right]$.

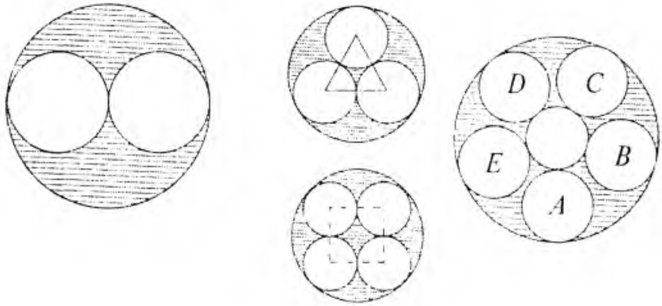
e) egri chiziqli $ABCDE$ yulduzning yuzini toping;

J a v o b: $2r^2(3\sqrt{3} - \pi)$.

f) bu yuzning n cheksiz o'sgandagi limitini toping.

J a v o b: πR^2.

5) R radiusli aylanaga muntazam n burchak ichki chizilgan. Ko'pburchakning har bir tomoniga uni diametr qilib yarim aylana ichki chizilgan (6.22- chizma):



6.21- chizma.

a) n burchakli $ABCDEF$ yulduzning yuzini toping.

J a v o b: $S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}(2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \pi + 2\alpha - 2\sin\alpha)$, bu yerda α — muntazam ko‘pburchakning markaziy burchagi. $n = 4$ da yuzning qiymati nolga teng ($n = 3$ da manfiy ishoraga ega) ekanligini eslatib o‘tamiz.

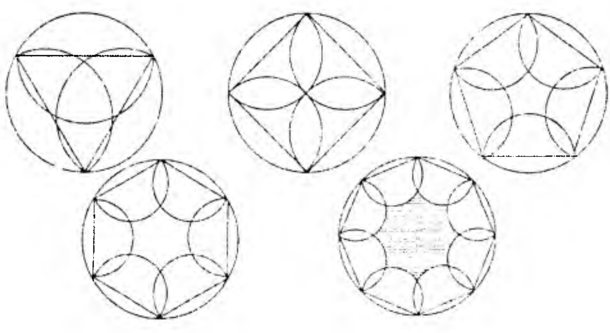
b) Hosil bo‘lgan butun „gul"ning — yulduzchaning yaproqlari bilan birga yuzini toping.

J a v o b: $S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}(2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \pi + 2\alpha - 2\sin\alpha)$.

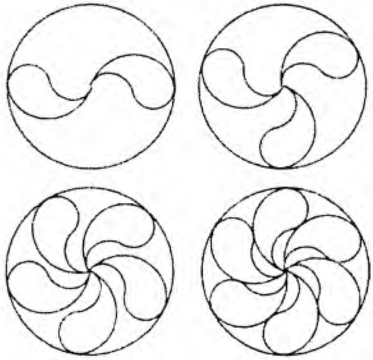
d) „Gul" yuzining n cheksiz o‘sib borgandagi limitini toping.

J a v o b: πR^2.

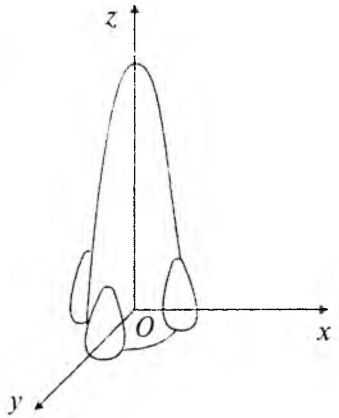
6) R radiusli doira n ta teng bo‘lakka bo‘lingan va har bir bo‘linish radiuslarida 6.23- chizmada ko‘rsatilgani kabi „qanot"lar yasalgan. Qaysi n nomerdan boshlab qanotlar bir-birining ustiga tushadi? J a v o b: $n = 6$.



6.22 - chizma.



6.23- chizma.



6.24- chizma.

15. Nuqtalarining koordinatalari to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 \le -(z-12), \\ 3(x-\sqrt{3})^2 + 3y^2 \le -(z-3), \\ 3(x+\sqrt{3})^2 + 3y^2 \le -(z-3), \\ 3x^2 + 3(y-\sqrt{3})^2 \le -(z-3), \\ 3x^2 + 3(y+\sqrt{3})^2 \le -(z-3), \\ z \ge 0 \end{cases}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi sirtlar bilan chegaralangan geometrik jismni aniqlang.

J a v o b : 6.24- chizmadan ravshan.

16. Funksiyalarning grafiklarini yasang:

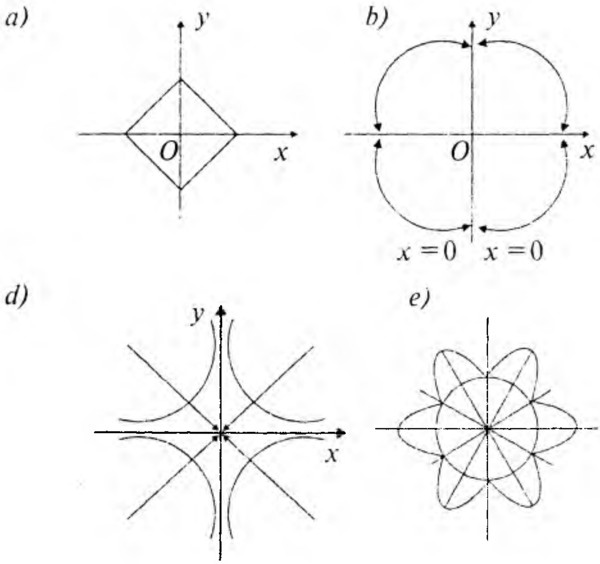
a) $|x| + |y| = 1$;

b) $(x - \frac{|x|}{x})^2 + (y - \frac{|y|}{y})^2 = 4$;

d) $|y| + \frac{1}{|y|} = |x| + \frac{1}{|x|}$;

e) $(\rho - 2)(\rho - 2 - |\cos 3\varphi|) = 0$.

J a v o b : 6.25- chizmalarga qarang.



6.25- chizma.

17. Funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping:

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

b) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$;

d) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$;

e) $y = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin \dfrac{y}{x^2} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Javoblar: 6.26- chizmalarga qarang.

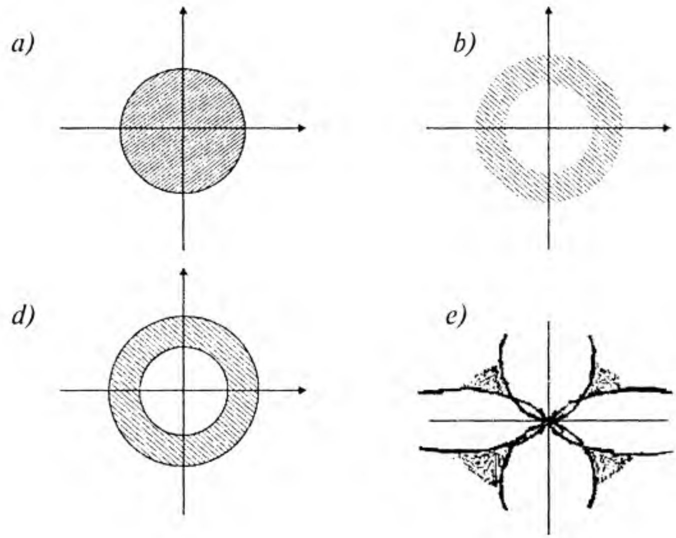
18. Qog'ozdan a) bitta, ikkita, uchta, to'rtta va hokazo simmetriya o'qiga ega bo'lgan;

b) simmetriya markaziga ega bo'lgan;

d) n- tartibli aylanish markaziga ega ($n = 2, 3, 4, 5$), lekin simmetriya o'qiga ega bo'lmagan chizma qiyib oling.

Tushuntirish. Bitta simmetriya o'qiga ega bo'lgan chizmani hosil qilish uchun bir varaq qog'ozni ikkiga buklash, unda ixtiyoriy naqshni chizish va u bo'yicha qiyish yetarli.

n ta simmetriya o'qiga ega bo'lgan chizma hosil qilish uchun qog'ozda muntazam $2n$ burchak yasash, qog'oz varag'ini markazda uchrashadigan radiuslari bo'yicha $2n$ qavatga buklash kerak.



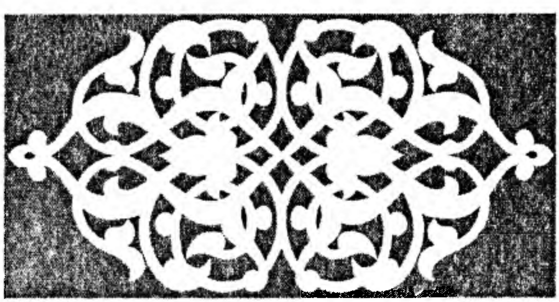
6.26- chizma.

Ikkita o'zaro perpendikular simmetriya o'qiga ega bo'lgan ixtiyoriy chizma simmetriya markaziga ega ekanligini ko'rsatish oson.

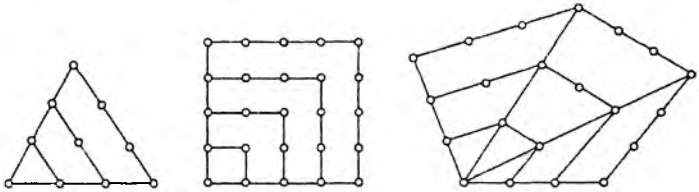
n- tartibli simmetriya markaziga ega bo'lgan chizma yasash uchun quyidagicha ish ko'riladi: uchi *O* nuqtada bo'lgan to'liq burchakni *n* ta teng bo'lakka bo'lamiz.

To'liq burchakning $\frac{1}{n}$ qismiga joylashadigan ihtiyoriy chizma chizib olib, uni qaychi bilan qiyamiz va „andaza" hosil qilamiz. Andazani *O* nuqta atrofida aylantirish bilan o'ylagan natijaga erishamiz.

6.27- chizmada qog'ozdan qirqilgan simmetrik chizmalarga misollar keltirilgan.



6.27- chizma.



a) b) d)

6.28- chizma.

19. Shaklli sonlar. Shaklli sonlar asosan ko'pburchaklar bilan ish ko'rilganda hosil bo'ladi. Tomonlari eng kam nuqtalardan tuzilgan uchburchak olamiz, so'ngra tomonlari ikki marta orttirilgan (6 ta nuqta), uch marta orttirilgan (10 ta nuqta) va hokazo uchburchaklar olamiz. Natijada „uchburchakli" sonlar hosil bo'ladi. Asos uchun kvadrat olsak, „kvadratli" sonlar hosil qilamiz va hokazo.

Shaklli yoki „ko'p burchakli" sonlar bilan qadim zamonda pifagorchilar ham shug'ullanganlar. Ular birliklarni muntazam ko'pburchaklar chizmaida joylashgan nuqtalar yordamida ifodalaganlar. 6.28-*a* chizmada „uchburchakli" sonlar tasvirlangan: $1,\ 1+2=3,\ 1+2+3=6,\ 1+2+3+4=10$ (bu sonlarning umumiy ifodasi ayirmasi birga teng bo'lgan arifmetik progressiyaning yig'indisidan iborat: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

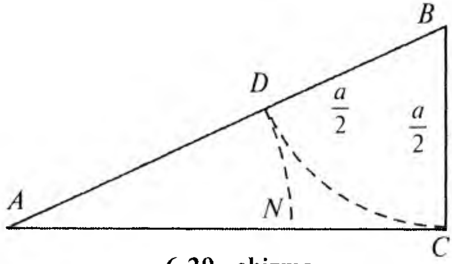
6.28- *b* chizmada „kvadrat" sonlarni ko'ramiz: $1,\ 1+3=4,\ 1+3+5=9,\ \ldots$ (bu sonlarning umumiy ifodasi $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$).

„Besh burchakli" sonlar: $1,\ 1+4=5,\ 1+4+7=12$ (28-*d* chizma). Ularning umumiy ifodasi: $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n+1)}{2}$.

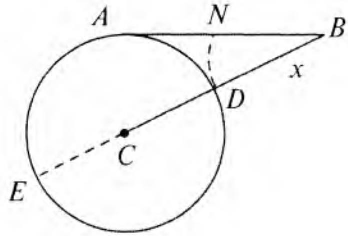
Bu jarayon har xil tartibli „ko'p burchakli" sonlarni aniqlaydi.

20. Oltin kesim. Oltin kesim (chet va o'rta nisbatda bo'lish) deb ataluvchi bu shoirona ibora ostida quyidagi masala yotadi: berilgan *a* kesmani shunday ikki bo'lakka bo'lish kerakki, katta kesmaning kichigiga nisbati berilgan kesmaning katta kesmaga nisbati kabi bo'lsin.

Katta qismining uzunligini x bilan belgilaymiz, u holda $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$ bo'ladi. Bundan



6.29- chizma.



6.30- chizma.

$$x^2 = a(a - x); \quad x^2 = a^2 - ax; \quad x^2 + ax - a^2 = 0 \qquad (1)$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}, \quad \text{bundan} \quad x_1 = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx$$

$\approx 0{,}618a$.

G e o m e t r i k y a s a s h . *I usul.* Sirkul va chizg‘ich yordamida $x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$ kesmani bir kateti $AC = a$, ikkinchi kateti $BC = \frac{a}{2}$ bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasidan ikkinchi $\frac{a}{2}$ katetning ayirmasi kabi topamiz (6.29- chizma). $AN = AD = x$ ekanini ko‘ramiz, demak, N—kerakli nisbatda bo‘luvchi nuqtadir.

II usul. (1) tenglikdan

$$a^2 = x(a + x) \qquad (2)$$

ekani chiqadi.

Y a s a s h . $AB = a$ bo‘lsin (6.30- chizma). $\frac{a}{2}$ radius bilan aylana chizamiz va A nuqtada AB urinma o‘tkazamiz. So‘ngra, B nuqtadan va markazdan kesuvchi o‘tkazamiz. $CD = a$ bo‘lgani uchun: $a^2 = (a + x)x$, demak, $BD = x$ va N oltin kesimni hosil qiluvchi nuqta ekan. Oltin kesim muntazam ko‘pburchaklarga doir qator masalalarni yechishga imkon beradi.

Ko‘pchilik aylanani sirkul va chizg‘ich yordamida beshta teng qismga bo‘lish usulini biladi, biroq bu yasashni matematik jihatdan asoslab berisha olmaydi.

Aylanani teng besh qismga bo‘lishga olib keluvchi amallar ketma-ketligini, ya’ni muntazam beshburchak yasashni ko‘rib chiqamiz (6.31- chizma).

AB va PQ — radiusi R ga teng bo'lgan aylananing diametrlari bo'lsin. OP radiusning o'rtasini topamiz va sirkulni AL qadar ochib (L ni markaz qilib) yoy chizamiz. Yoyning diametr bilan kesishish nuqtasi N ni A nuqta bilan tutashtiramiz, hosil bo'lgan AN kesma izlangan kesmadir — u ichki chizilgan muntazam beshburchakning tomoniga teng.

Ko'rib chiqilgan yasashni matematik jihatdan asoslashga harakat qilamiz.

R radiusli aylanaga muntazam va yulduzsimon beshburchaklar ichki chizilgan bo'lsin (6.32- chizma). Ba'zi bir shtrix chiziqlarni o'tkazib va ko'pburchaklarning burchaklarini aniqlab, quyidagi uchburchaklarning o'xshashligini isbot qilish oson:

$$\triangle BKJ \sim \triangle ABK \sim \triangle DAB \sim \triangle ODM$$

Uchburchakning o'xshashligidan mos tomonlarining proporsionalligi kelib chiqadi:

$$\frac{JK}{BK}=\frac{BK}{AK}=\frac{AB}{BD}=\frac{DM}{OD}.$$

Ushbu belgilashlarni kiritamiz: $JK=x$, $AJ=y$, $DM=a_{10}$, $OD=R$, u holda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{x+y}=\frac{x+y}{x+2y}=\frac{a_{10}}{R} \qquad (3)$$

bundan $y^2=x(x+y)$, $(x+y)^2=y(x+2y)$ tengliklar kelib chiqadi. Bu tengliklar AC kesma K nuqta bilan o'rta va chet nisbatda, uning katta qismi AK ham J nuqta yordamida o'rta va chet nisbatda bo'linishini ko'rsatadi.

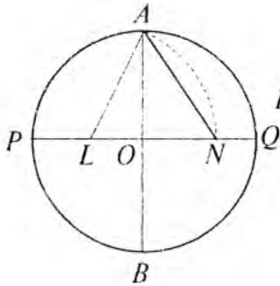
(3) tenglikning birinchi kasrini uning oxirgi kasriga tenglab, $\frac{x}{y}=\frac{a_{10}}{R}$ ni yoki (hosila proporsiyani tatbiq etib) $\frac{x+y}{y}=\frac{a_{10}+R}{R}$ ni topamiz, bundan

$$\frac{y}{x+y}=\frac{R}{a_{10}+R}. \qquad (4)$$

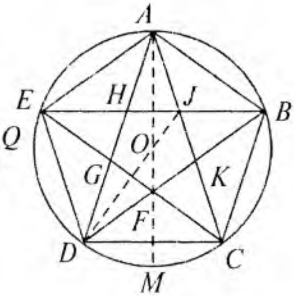
Endi (3) tenglikning ikkinchi kasrini shu tenglikning oxirgi kasri bilan tenglab, ushbuni hosil qilamiz:

$$\frac{y}{x+y}=\frac{a_{10}}{R}. \qquad (5)$$

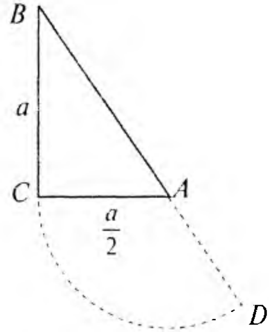
(4) va (5) tengliklarni solishtirsak:



6.31- chizma.



6.32- chizma.



6.33- chizma.

$$\frac{a_{10}}{R}=\frac{R}{a_{10}+R},$$

$$a_{10}^2+Ra_{10}-R^2=0, \qquad (6)$$

$$a_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \qquad (7)$$

(6) va (1) tengliklarni taqqoslab, quyidagi xulosaga kelamiz: oltin kesimdagi ikki kesmadan kattasi shunday aylananing radiusi bo‘lishi mumkinki, bu aylanaga tomoni kichik kesmaga teng bo‘lgan muntazam o‘nburchakni ichki chizish mumkin.

Bundan quyidagi masalalar kelib chiqadi:

1) R radiusli aylanani 10 ta teng bo‘lakka bo‘ling.

Berilgan R kesmani oltin kesim nisbatida bo‘lamiz. Uning katta kesmasi izlangan kesma bo‘ladi. Uni a_{10} bilan belgilaymiz. Darhaqiqat, oltin kesimda bo‘lgan ikkita R va a_{10} kesmadan kichigi (ya’ni a_{10}) ichki chizilgan muntazam o‘nburchakning tomoni bo‘ladi.

2) Tomoni berilgan a kesmaga teng bo‘lgan muntazam o‘nburchak yasang.

a kesmani o‘rta va chet nisbatda bo‘lingan birorta kesmaning kichik bo‘lagi deb olamiz. Bu kesmaning katta bo‘lagini R bilan belgilaymiz. U holda

$$\frac{a}{R}=\frac{R}{a+R};\quad a^2+aR=R^2;\quad R^2-aR-a^2=0.$$

$$R=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}.$$

R ni sirkul va chizg'ich yordamida yasash oson (6.33 - chizma). $BD = R$ ekanligi ko'rinib turibdi.

3) Sirkul va chizg'ich yordamida 36° li burchak yasash.

Yechish. 6.32- rasmdagi DOM teng yonli uchburchakning O uchidagi burchak 36° ga teng, bu burchak qarshisida yotgan DM kesma ichki chizilgan muntazam o'nburchakning tomoni, uchburchakning OM va OD tomonlari aylananing radiuslari. R ni bilgan holda sirkul va chizg'ich yordamida a_{10} ni topamiz, undan quyidagi yasashni mo'ljallaymiz: teng yonli uchburchakning yon tomoni uchun ixtiyoriy kesmani, asosi uchun esa bu kesmaning oltin kesim nisbatida bo'lingan katta bo'lagini olamiz. Yasalgan uchburchakning uchidagi burchak 36° ga teng.

4) Sirkul va chizg'ich yordamida 3° li burchak yasash.

Yechish. Burchakni teng ikkiga bo'lishni bilgan holda, quyidagini topamiz:

$$\frac{36^\circ}{2} = 18^\circ; \quad \frac{18^\circ}{2} = 9^\circ; \quad \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ; \quad \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ, \quad 15^\circ - 9^\circ = 6^\circ; \quad \frac{6^\circ}{2} = 3^\circ.$$

5) n° li burchakni (n — ixtiyoriy, uchga bo'linmaydigan natural son) sirkul va chizg'ich yordamida n ta teng bo'lakka bo'lish mumkinligini isbot qilish.

Yechish. 3° li burchak yasashni bilgan holda sirkul va chizg'ich yordamida kattaligi $3k^\circ$ bo'lgan ixtiyoriy burchak yasaymiz, shunday qilib n° li burchakning qismini yasay olamiz. Demak, $n^\circ = 3k^\circ + 1^\circ$ yoki $n^\circ = 3k^\circ - 1^\circ$, demak, bir gradusli burchakni hosil qilamiz.

Aylanani o'nta teng bo'lakka bo'lishni bilib olgach, ichki chizilgan muntazam beshburchakni ham yasash yo'lini topamiz. Buning uchun o'nburchakning uchlarini bittadan oralatib, tutashtirib chiqish kifoya. Ammo hali oldimizda aylanani teng besh bo'lakka bevosita bo'lish masalasini yechish turibdi. Geometrik yasashning to'g'riligini isbot qilaylik (6.31- chizma). Bu yasashning asosida Yevdoks teoremasi yotadi. Teorema bunday ifodalanadi: aylanaga ichki chizilgan muntazam beshburchak tomonining kvadrati shu aylanaga ichki chizilgan muntazam oltiburchak va o'nburchak tomonlari kvadratlarining yig'indisiga teng:

$$a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2. \qquad (8)$$

(8) tenglikning to'g'riligini muntazam ko'pburchaklarning tomonlarini ularga tashqi chizilgan aylana radiusi bilan ifodalab

ko'rsatish oson. Ma'lumki', $a_6 = R$, $a_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$. a_5 ni topish uchun muntazam ko'pburchak tomonlarini ikkilantirish formulasidan foydalanamiz:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

a_{10} ni bilgan holda $a_5^2 = \frac{5R^2 - \sqrt{5}R^2}{2}$ ni topamiz. Endi $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Yevdoks teoremasining juda ajoyib isbotini G. Timerdingning 1924- yilda bosilib chiqqan „Золотое деление" („Oltin kesim") kitobidan topish mumkin. Ana shu isbot bilan tanishib chiqaylik.

(3) tenglikdagi nisbatni t bilan belgilaymiz, u holda $\frac{x}{y} = t$; $\frac{y}{x+y} = t$.

Ikkala tenglikni hadma-had ko'paytirsak:

$$\frac{x}{x+y} = t^2. \tag{9}$$

$ABCDE$ va $FGHJK$ muntazam beshburchaklarning o'xshashligidan (6.32- chizma) $\frac{r}{R} = \frac{JK}{AB}$, bunda $R = OA$, kichik beshburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi r bilan belgilangan. $JK = x$, $AB = x + y$ bo'lgani uchun

$$\frac{r}{R} = \frac{y}{x+y} \tag{10}$$

(9) va (10) tengliklarni taqqoslab,

$$\frac{r}{R} = t^2 \quad \text{yoki} \quad r = Rt^2 \tag{11}$$

ni topamiz. AFC va AJO uchburchaklarning o'xshashligidan:

$\frac{R+r}{2y+x} = \frac{y}{R}$, bundan $R(R + r) = y(x + 2y)$ yoki

$$R^2 + Rr = y(x + 2y).$$

(1) munosabatga muvofiq oxirgi tenglikni $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$ chizmaida yozish mumkin. Shuni isbot qilish kerak edi.

6.31- chizmadan muntazam beshburchakning tomoni bir kateti $OA = R$, ikkinchisi $ON = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{R}{2} = a_{10}$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi ekani ko'rinadi. Demak, keltirilgan yasash to'g'ri.

Kesmani o'rta va chet nisbatda bo'lish turli matematik masalalarda tez-tez uchrab turadi, shu sababli matematiklarning e'tiboriga sazovor bo'lgan va a'lo baholangan. Pifagor bu bo'lishni oltin kesim yoki oltin proporsiya deb atagan. XV asrning yirik matematigi Luka Pacholi oltin kesim haqida qiziqarli kitob yozgan („О божественной пропорции"). Kitobni uning do'sti Leonardo da Vinchi bezagan, „oltin kesim" terminini ham u kiritgan. Bu masala faqat matematikadagina emas, balki botanikada, san'atda, texnikada va inson faoliyatining boshqa sohalarida ham keng qo'llanadi. Tabiatda, arxitekturada va san'atda ko'zga tashlanadigan ko'pgina qonunlar oltin kesim yordamida ifodalanadi va tasvirlanadi. Qadimda mistik g'oyalarni ham oltin kesim bilan bog'laganlar. Pifagorchilar hamma narsaning, har qanday borliqning asosi va mohiyati son deb hisoblaganlar. Matematika hayot ehtiyojlaridan kelib chiqqanligi ma'lum, matematika tabiatdagi aniq miqdoriy munosabatlarni aks ettiradi. Tabiatda va san'at asarlarida hukmronlik qiladigan oltin kesim umumiy kompozitsiyaning ayrim qismlarida birgina munosabat takrorlanishining umumiy qoidasidagi xususiy holdir.

Qadimgi pifagorchilar besh uchli yulduzni muqaddas simvol deb hisoblaganlar. Uni o'z boshini, ikki qo'lini va ikki oyog'ini kosmik doiraning chekkalarigacha cho'zgan odamning sxematik tasviri deb tasavvur qilganlar. Ba'zi naturalistlarni hozir ham dengiz yulduzlari, tikanterililar nima uchun beshburchak chizmada ekanligi qiziqtiradi. Ularning fikricha, ba'zi tirik organizmlarning beshlik strukturasi ushbu muhim geometrik fakt bilan bog'liq: beshburchak — bu tomonlarining soni diagonallari soniga teng bo'lgan yagona muntazam ko'pburchakdir. Bu hol olimlarning taxmin qilishicha, o'sish beshta yo'nalishda har taraflama rivojlanishini — uch, to'rt yoki olti yo'nalishda rivojlanishga qaraganda ancha oson qilib qo'yadi. Beshburchakli skelet mexanik mustahkam va baquvvat bo'ladi. Ko'pgina gullarda beshta yaproq bo'ladi. Shunisi qiziqki, jonsiz tabiatda beshlik struktura uchramaydi (masalan, hech mahal beshburchakli qor uchqunlari uchramaydi).

Tabiatni oddiygina kuzatish ham, uni chuqur o'rganish ham inson oldida go'zallik va ajablanish hislarini uyg'otadigan ajoyib dunyoni ochib beradi. Biz, tabiatning mahsuli, aqlli mavjudot bo'lgan inson tabiatda ming yillar davomida tabiiy tanlanish yo'li bilan amalda paydo bo'lgan ko'pgina masalalarni bir onda yechib berishini g'urur va mamnuniyat bilan qayd qilishimiz mumkin. Inson har xil matematik muammolarni bayon qilib berish va tushuntirishni o'rgandi, tabiatning sirlarini ochib berish shu emasmikan?

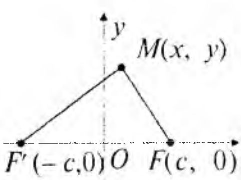
2- §. KASSINI OVALLARI VA BERNULLI LEMNISKATASI

Tabiatda matematika degan mavzuga doir quyidagi masalani ko'rib chiqamiz.

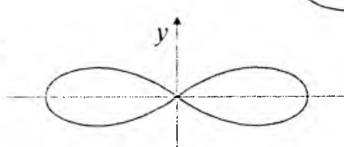
Kassini ovali deb shunday nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladiki, ulardan har birining fokuslar deb ataluvchi ma'lum ikki nuqtagacha bo'lgan masofalarining ko'paytmasi o'zgarmas bo'ladi. Fokuslar oralig'ini $2c$ bilan, masofalarning ko'paytmasini a^2 bilan belgilaymiz. 6.34- chizmada ko'rsatilganidek, to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasini olamiz va egri chiziqning tenglamasini tuzamiz: $M(x, y)$ ovalning nuqtasi bo'lsin, u holda $MF \cdot MF' = a^2$; $\sqrt{(x-c)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2$ ni soddalashtirib,

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = a^4 - c^4 \qquad (1)$$

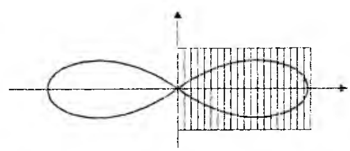
tenglamani hosil qilamiz.



6.34- chizma.



6.35- chizma.



6.36- chizma.

(1) tenglamaga kiruvchi a va c harflarning har xil qiymatlarida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha hollarni tekshiramiz.

B i r i n c h i h o l. $a = c$. Bunda (1) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0.$$

Qutb koordinatalari $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ ga o'tsak; $\rho^2=$ $=2c^2\cos 2\varphi$ hosil bo'ladi.

Hosil qilingan egri chiziq Kassini ovalining bir ko'rinishidir. Bu egri chiziqni mashhur matematik Yakov Bernulli tekshirgan, shuning uchun u Bernulli lemniskatasi deb ataladi. (Egri chiziqning nomi grekcha lemniskos, ya'ni o'rov degan ma'noni bildiruvchi so'zdan kelib chiqqan.)

Lemniskata grafigini uning qutb tenglamasi bo'yicha yasaymiz. Tenglamaning chap tomonida manfiy bo'lmagan ρ^2 miqdor turgani uchun uning o'ng tomoni ham manfiy qiymatlar qabul qila olmaydi, demak, $\cos 2\varphi \geq 0$, ya'ni

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi;$$

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Radius-vektor $2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$ da yoki $\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ da nolga aylanishini ko'ramiz. $\varphi=0$ qiymatga $\rho=\pm c\sqrt{2}$ qiymat mos keladi, qutb burchagi φ ortishi bilan ρ ning absolut qiymati kamayadi va $\varphi=\frac{\pi}{4}$ da $\rho=0$ bo'ladi (6.35- chizma). Egri chiziq O nuqtaga nisbatan simmetrik, chunki qutb burchagining har bir mumkin bo'lgan qiymatiga radius-vektorning egri chiziq tenglamasini qanoatlantiradigan ikkita (musbat va manfiy) qiymati mos keladi. Egri chiziq koordinata o'qlari bilan ustma-ust tushadigan ikkita simmetriya o'qiga ham ega.

Bernulli lemniskatasi ko'pgina ajoyib matematik xossalarga ega, shuningdek texnikada va fizikada amaliy tatbiq qilinadi. (Texnikada lemniskatadan temir va tramvay yo'llarining kichik radiusli burilishlarini hisoblashda foydalaniladi.)

Integrallashning eng sodda qoidalaridan va yuzning qutb koordinatalardagi $S=\frac{1}{2}\int\rho^2 d\varphi$ formulasidan foydalanib, lemniskata ichiga joylashgan qismning yuzini hisoblashimiz mumkin.

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2 d\varphi=\frac{c^2}{2};\quad S=2c\ \text{ yoki }\ S=(c\sqrt{2})^2.$$

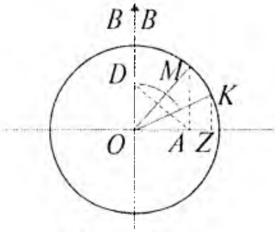
Shunday qilib, egri chiziq ikkita yaprog'ining yuzi tomoni $c\sqrt{2}$ ga teng bo'lgan kvadrat yuziga teng ekan (6.36- chizma).

Lemniskata nuqtalarini yasash. Lemniskata tenglamasini yozaylik: $\rho^2 = 2m^2 \cos 2\varphi$. Uni soddalashtirsak: $\rho^2 = 2m^2(\cos^2\varphi - 1)$.

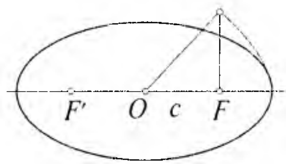
Bu yerda $2m^2 = c^2$ desak, tenglama $\rho^2 = c^2 2\cos^2\varphi - c^2$ ko'rinishga keladi.

Tenglamaning ko'rinishi bizni egri chiziq ixtiyoriy nuqtasining radius-vektorini gipotenuzasi $c\sqrt{2}\cos\varphi$ ga, bir kateti c ga teng bo'lgan uchburchakning kateti sifatida yasash fikriga olib keladi. $OA = c$ ni yasaymiz, $OB = c\sqrt{2}$ radiusli aylana o'tkazamiz (6.37- chizma).

Ixtiyoriy $\frac{\pi}{4}$ dan kichik φ burchak ostida OK nur o'tkazamiz, K nuqtadan qutb o'qiga KZ perpendikular tushiramiz.



6.37- chizma.



6.38- chizma.

$OZ = c\sqrt{2}\cos\varphi$ ekanini ko'ramiz. A nuqtadan OZ radiusga teng yoy bilan OE da D nuqtani belgilaymiz. Gipotenuzasi $AD = OZ = c\sqrt{2}\cos\varphi$, bir kateti $OA = c$ bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak hosil qilamiz. Demak, ikkinchi OD kateti qutb argumenti φ bo'lgan lemniskata nuqtasi radius-vektorining izlanayotgan kattaligi bo'ladi. Bu nuqtani topish uchun OK nur bilan kesishguncha OD radiusli yoy chizamiz. Shunday qilib, koordinatalari lemniskataning $\rho^2 = 2c^2\cos^2\varphi - c^2$ tenglamasini qanoatlantiradigan $M(\rho, \varphi)$ nuqtani yasadik.

φ burchakning qiymatini o'zgartira borib, egri chiziqning istalgancha nuqtalarini yasaymiz. (1) tenglamani tekshirishni davom ettiraylik. Unda o'zgaruvchilarning faqat juft darajalari qatnashgani uchun Ox va Oy o'qi Kassini ovali uchun simmetriya o'qi, koordinatalar boshi — simmetriya markazi bo'ladi deya olamiz. Darhaqiqat, $M(x_0, y_0)$ nuqta (1) egri chiziqqa tegishli bo'lsin. U holda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirgani uchun berilgan nuqtaga ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan $M_1(-x_0, y_0)$ nuqta ham (1) ni qanoatlantiradi. (Tenglamaga $-x_0$, y_0 sonlarni qo'yganimizda, tenglamaning sharti bo'yicha qanoatlantiruvchi x_0, y_0 qiymatlarni qo'ygandagi kabi natijani hosil qilamiz). Shunga o'xshash M nuqtaga abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan $M_2(x_0, -y_0)$ nuqta ham, M nuqtaga O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan $M_3(-x_0, -y_0)$ nuqta ham ovalning nuqtalari bo'ladi. Demak, egri chiziqning ixtiyoriy M nuqtasi uchun shu egri chiziqning o'zida unga ikkita koordinata o'qiga va koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar mavjud ekan. Simmetriya o'qlari odatda egri chiziqning *o'qlari* deb, simmetriya markazi esa uning *markazi* deb ataladi. Tenglamani qutb koordinatalar sistemasida qayta yozib olaylik:

$$\rho = c\sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}}. \tag{2}$$

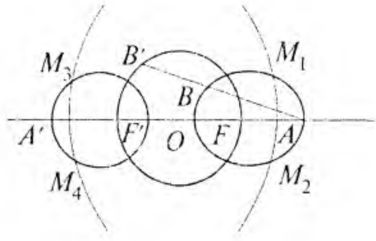
Yuqorida $a = c$ bo'lib, Kassini ovali Bernulli lemniskatasi bo'lgan holni ko'rgan edik. Yana ikki holni qaraymiz:

I k k i n c h i h o l. $a > c$. (2) tenglamada ildiz ostida manfiy ifoda hosil qiladigan minus ishorasini tashlab yuboramiz. Natijada:

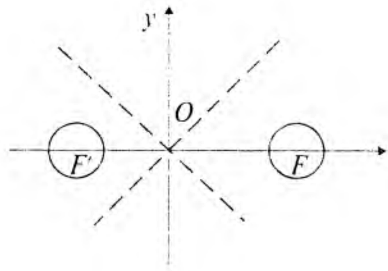
$$\rho = c\sqrt{\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Egri chiziqni yasash uchun $\varphi = 0$ deb olamiz, u holda radius-vektorning absolut qiymati bo'yicha eng katta qiymati $\rho = \pm\sqrt{a^2 + c^2}$ ni hosil qilamiz. φ burchak ortishi bilan $\cos 2\varphi$ ning qiymati kamayadi, demak, ρ ham kamayadi, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ da radius-vektor quyidagiga teng bo'ladi: $\rho = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$ (6.38- chizma).

Kassini ovalining nuqtalarini yasash. a va c ni bilgan holda F' va F fokuslarning va A', A uchlarining vaziyatini aniqlaymiz ($\varphi = 0$ da $\rho = \pm\sqrt{a^2 + c^2}$) (6.39- chizma). c ga teng radius bilan markazi



6.39- chizma.



6.40- chizma.

koordinatalar boshida bo'lgan aylana chizamiz, so'ngra A nuqtadan bu aylana bilan ikkita B va B' nuqtada kesishadigan ixtiyoriy nur o'tkazamiz. F va F' fokuslarni markaz qilib, AB va AB' radiusli aylanalar chizamiz.

Ularning juft-juft kesishish nuqtalari ovalga tegishli bo'ladi, chunki

$$M_1F\cdot M_1F' = M_2F\cdot M_2F' = M_3F\cdot M_3F' = M_4F\cdot M_4F' = AB\cdot AB' = a^2$$

tenglik bajariladi. ABB' nurning yo'nalishini o'zgartirib ovalning istagancha ko'p nuqtalarini yasash mumkin.

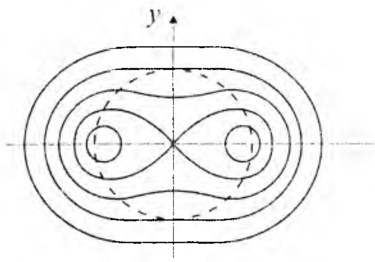
U c h i n c h i h o l. $a < c$. $a < c$ ekanligini, demak $\frac{a^2}{c^2} < 1$ ekanligini nazarga olib, $\frac{a^2}{c^2} = \sin 2\alpha$ belgilashni kiritamiz. $\frac{a^2}{c^2} \neq 1$ bo'lgani uchun $\sin 2\alpha < 1$ bo'lib, $\alpha < \frac{\pi}{4}$ bo'ladi.

Ovalning tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho = c\sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi - \cos^2 2\alpha)}.$$

Argumentga nolga teng qiymat beramiz, u holda $\rho_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$ va $\rho_2 = \sqrt{c^2 - a^2}$, so'ngra φ o'sishi bilan ρ_1 kamayadi, ρ_2 esa ortadi; nihoyat, $\varphi = \alpha$ da ρ_1 va ρ_2 ning qiymatlari teng bo'ladi: $\rho_1 = \rho_2 = c\sqrt{\cos 2\alpha}$. φ burchakni α dan $\frac{\pi}{2}$ gacha orttirib borilganda ρ ning mos qiymatlari mavhum bo'ladi (6.40- chizma). Shunday qilib, $a < c$ bo'lgan holda oval ikkita yopiq yaproqdan iborat.

6.41- chizmada Kassini ovallari oilasi tasvirlangan. Ularning chizmalari miqdoriy o'zgarishlar ($a > c$, $a = c$, $a < c$) natijasida



6.41- chizma.

sakrab-sakrab bo'ladigan sifat o'zgarishlarini boshidan kechirmoqda deyish mumkin. „Sakrash“ a qiymatlardan c ga juda yaqin, lekin unga teng bo'lmagan $a = c$ qiymatlariga o'tishda ro'y beradi.

Kassini ovallari haqidagi ba'zi umumiy mulohazalarni qaraylik. (1) tenglamani x bo'yicha differensiallab,

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') - 2c^2(2x - 2yy') = 0,$$

bundan

$$y' = -\frac{x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)}$$

ni topamiz.

y' ni nolga tenglab, har bir ovalning ekstremal nuqtalarini topamiz. $y \neq 0$ bo'lsin, u holda $x = 0$ va $x^2 + y^2 - c^2 = 0$ bo'lganda $y' = 0$ bo'ladi, ya'ni agar $x^2 + y^2 = c^2$ aylanani chizsak, har qanday ovalning bu aylana bilan kesishgan nuqtalari ekstremum nuqtalarini beradi. Bu nuqtalarda egri chiziqqa o'tkazilgan urinmalar Ox o'qqa parallel bo'ladi. Bu nuqtalarning koordinatalari:

$$x = \pm\sqrt{\frac{4c^4 - a^4}{2c}}; \quad y = \pm\frac{a^2}{2c}.$$

$4c^4 - a^4 \geq 0$ bo'lganda, ya'ni $a < c\sqrt{2}$ bo'lganda x haqiqiy qiymatlarga ega bo'lishi ko'rinib turibdi, demak, $a < c\sqrt{2}$ parametrga ega bo'lgan ovallar: $x^2 + y^2 = c^2$ aylana bilan to'rtta nuqtada kesishadi. $a > c\sqrt{2}$ bo'lgan ovallar bu aylana bilan kesishmaydi. Bundan tashqari, yuqorida aytilgani kabi y' $x = 0$ da ham nolga aylanadi. $x = 0$ ni (1) tenglamaga qo'yib, ikkita ekstremal nuqtaning koordinatalarini topamiz: $(0, \sqrt{a^2 - c^2})$ va $(0, -\sqrt{a^2 - c^2})$.

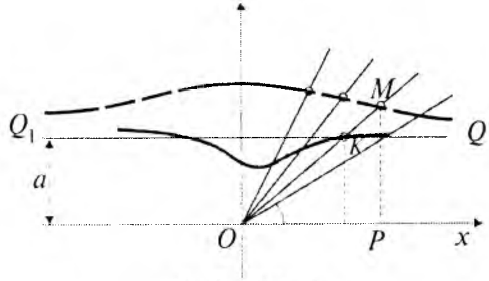
Bu nuqtalar parametri $a \geq c$ bo'lgan ovallarga tegishlidir. Parametrning kattaligidan qat'iy nazar konfokal ovallarning barcha ekstremal nuqtalari birgina $x^2 + y^2 = c^2$ aylanada yotgani kabi, bukilish nuqtalari birgina $\rho^2 = -c^2\cos 2\varphi$ lemniskatada yotishi ma'lum bo'ladi (6.41- chizma).

Nikomed konxoidasi. Birorta chiziqning konxoidasi — bu berilgan chiziq har bir nuqtasining radius-vektorini bir xil l kattalikka orttirish yoki kamaytirish natijasida hosil bo'ladigan silliq egri chiziqdir. Agar chiziqning qutb tenglamasi $\rho = f(\varphi)$ ma'lum bo'lsa, uning konxoidasining tenglamasi $\rho = f(\varphi) \pm l$ ko'rinishida bo'ladi. Konxoidani yasash (har bir nuqtaning radius-vektorini uzaytirish yoki qisqartirish kerak) bir qarashda sodda bo'lib ko'rinsa-da, aslida ko'pgina chiziqlarning konxoidalari juda murakkab va ularning grafiklari qiziq chizmalarga ega. Hatto eng sodda chiziq — to'g'ri chiziqning konxoidasi ham ancha murakkab va bu murakkablik l parametrning son qiymatlariga bog'liq. To'g'ri chiziq konxoidasi uni burchak triseksiyasi va kubni ikkilantirish haqidagi masalalarni yechishga tatbiq etgan qadimgi yunon geometri Nikomed (eramizdan oldingi II asr) nomi bilan yuritiladi. Nikomed konxoidasini miqdor o'zgarishlarning sifat o'zgarishlarga o'tishini ko'rsatuvchi yorqin misol sifatida qarab chiqamiz. Shunday qilib, konxoidaning bazisi deb ataluvchi berilgan Q_1Q to'g'ri chiziqdan a masofada joylashgan nuqta — konxoida qutbi berilgan bo'lsin. Konxoida qutbini qutb koordinatalar sistemasining qutbi deb olib, qutb o'qini Q_1Q bazisga parallel qilib o'tkazamiz (6.42-chizma). Q_1Q to'g'ri chiziqning tenglamasi: $\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi}$ ko'rinishga, konxoidaning qutb tenglamasi esa $\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi} + l$ ko'rinishga ega. To'g'ri burchakli Dekart koordinatalariga o'tib, quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,(y - a) = l\,y \qquad (1)$$

yoki

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = l^2 y^2. \qquad (2)$$



6.42- chizma.

Hosil qilingan tenglamada x ikkinchi darajada qatnashgani uchun konxoida ordinatalar o'qiga simmetrik deyish mumkin.

Konxoidaning Oy o'qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlash maqsadida (1) tenglamada $x = 0$ deylik, u holda $|y|\ (y - a) = l\,y$ tenglama hosil bo'ladi, buni yechib $y > 0$ da $y = a + l$, $y < 0$ da va $y = 0$ da $y = a - l$ ekanligini topamiz.

Shunday qilib, egri chiziq ordinata o'qi bilan $(0; a + l)$, $(0; a - l)$, $(0; 0)$ nuqtalarda uchrashar ekan ($l = a$ bo'lgan holda ikkinchi nuqta koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi).

Bazis chiziq Q_1Q to'g'ri chiziq konxoidaning asimptotasi ekanligini ko'rsatamiz. Konxoidaning ixtiyoriy nuqtasidan qutb o'qigacha bo'lgan masofani hisoblaylik:

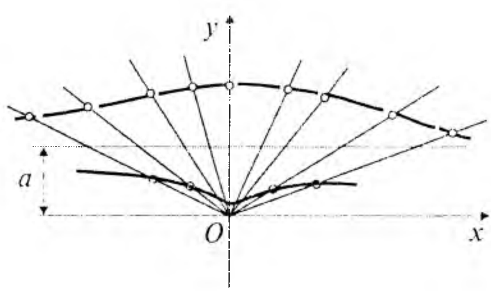
$$MP = \rho \sin\varphi = \left(\frac{a}{\sin\varphi} + l\right)\sin\varphi = \alpha + l\sin\varphi$$

so'ngra MP qiymatining limitini argument nolga intilganda topamiz:

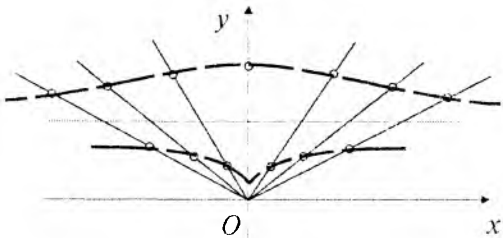
$$\lim_{\varphi\to 0} MP = \lim_{\varphi\to 0}(a + l\sin\varphi) = a\,.$$

Konxoidaning ta'rifidan, uning nuqtalarini yasash uchun OM nurni o'tkazish kerakligini va uni O nuqta atrofida aylantirib, uning Q_1Q to'g'ri chiziq bilan kesishgan har bir holatida kesishish nuqtasidan $KM = l$ kesmani qo'yib chiqish kerakligi ma'lum bo'ladi. Nikomed konxoidasi ikki tarmoqdan iborat: birinchi tarmoq nurni noldan 180° gacha burishda, ikkinchisi 180° dan 360° gacha burishda hosil bo'ladi (6.42- chizma).

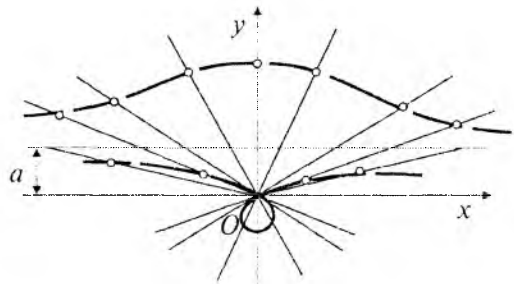
Nikomed konxoidasini uchta: $l < a$ (6.43- chizma), $l = a$ (6.44- chizma), $l > a$ (6.45- chizma) holni qarash bilan yasaymiz.



6.43- chizma.



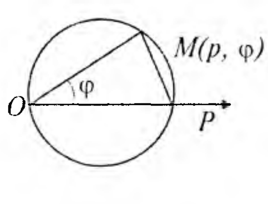
6.44- chizma.



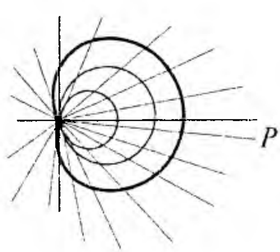
6.45- chizma.

Chizmalardan yuqoridagi tarmoqning chizmai uchala holda ham bir xilligi va unga qarashli $(0,\ a+j)$ nuqta ekstremum nuqta ekanligi ko'rinib turibdi. Egri chiziqning qolgan qismi butunlay l parametrga bog'liq. Agar $l < a$ bo'lsa, u holda konxoidaga pastki tarmoqdan tashqari maxsus nuqta deb ataluvchi ajratilgan O nuqta ham tegishli bo'ladi. $l = a$ da O nuqta maxsus qaytish nuqtasi, $l > a$ bo'lganda — maxsus tugun nuqta bo'ladi.

Paskal chig'anog'i (egri chizig'i). Paskal chig'anog'i deb aylana konxoidasiga aytiladi. Radiusi r ga teng bo'lgan $\rho = 2r\cos\varphi$ bazis aylana berilgan bo'lsin (6.46- chizma). O nuqta tenglamasi $\rho = 2r\cos\varphi + l$ bo'lgan konxoidaning qutb sistemasining qutbi bo'lsin.



6.46- chizma.



6.47- chizma.

l ning turli qiymatlarida konxoidaning grafigini yasaymiz. $l < 2r$ bo'lsin. φ burchak 0 dan $\frac{\pi}{2}$ gacha o'zgarganda radius-vektor $2r + l$ dan $\rho = l$ gacha o'zgaradi, so'ngra (II chorakda) ρ ning qiymati $\rho = 0$ gacha kamayib boradi:

$$\rho = 0; \quad 2r\cos\varphi + l = 0; \quad \cos\varphi = -\frac{l}{2r};$$

shundan keyin ρ manfiy qiymatlar olib kamaya boradi, demak, ρ ning son qiymatlarini nurlarning davomiga qo'yish kerak, ya'ni nuqtalar IV chorakda joylashgan $\varphi = \pi$ qiymatga $\rho = -2r + l$, $OA = |\rho|$ mos keladi (4.47- chizma). So'ngra, grafikni qutb o'qiga nisbatan akslantirish mumkin, chunki konxoida tenglamasiga kiruvchi $\cos\varphi$ kattalik juft funksiyadir.

Kitobxonga bir maslahat: agar siz parametri $l < 2r$ bo'lgan Paskal chig'anog'ining nuqtalarini yasamoqchi bo'lsangiz, qulaylik uchun, $l = r$ qiymatni oling.

$l = 2r$ bo'lgan holni ko'rib chiqaylik, bunda $\rho = 2r\cos\varphi + 2r = 2r(\cos\varphi + 1)$. φ argument 0 dan π gacha o'zgarganda ρ ning qiymati $\rho = 4r$ dan 0 gacha o'zgaradi, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ qutb burchakka $\rho = 2r$ qiymat mos keladi (6.48- chizma). Bu egri chiziq *kardioida* (yuraksimon egri chiziq) deb ataladi, uning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi:

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2).$$

Integral hisobning uncha murakkab bo'lmagan formulalarini tatbiq etib, kardioida yuzini hisoblashimiz mumkin:

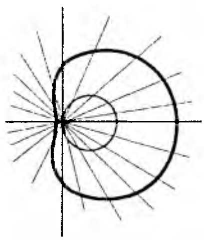
$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2 d\varphi, \quad S = \int_0^{\pi}\rho^2 d\varphi = 4r^2\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 1)d\varphi = 6\pi r^2,$$

demak, kardioidaning yuzi oltita bazis aylanasining yuziga teng.

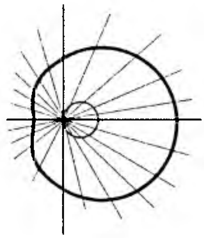
Endi Paskal chig'anog'i grafigini l parametrning $2r$ dan katta bo'lgan holi uchun yasaymiz. φ ga nolga teng qiymat berib, radius-vektorning mos qiymati $2r + l$ ni hosil qilamiz. So'ngra, qutb burchagi φ ning ortishi bilan radius-vektor qiymatining kamayishini ko'ramiz: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ burchakka $\rho = l$ qiymat, $\varphi = \pi$ ga esa radius-vektorning $l - 2r$ qiymati mos keladi. $l > 2r$ bo'lgani uchun

$\rho = 2r\cos\varphi + l$ ning qiymati manfiy bo'lishi mumkin emasligi ravshan (6.49- chizma). Aylananing konxoidasi bo'lgan Paskal chig'anog'ining tenglamasi Dekart koordinatalar sistemasida quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

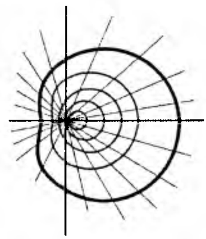
$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = l^2(x^2 + y^2).$$



6.48- chizma.



6.49- chizma.



6.50- chizma.

Demak, qaralayotgan egri chiziq son parametr l ga bog'liq bo'lmagan holda 4-tartibli algebraik chiziqdir. Dekart koordinatalari boshi egri chiziqqa tegishli va maxsus nuqtadir: $l < 2r$ bo'lgan holda — tugun, $l = 2r$ da qaytish nuqtasi va $l > 2r$ da ajratilgan maxsus nuqtadir. Oxirgi uchta grafik $\rho = 2r\cos\varphi + l$ tenglama bilan ifodalanadigan egri chiziqni tasvirlaydi. Ularda miqdoriy o'zgarishlar asosli sifat o'zgarishlarni keltirib chiqaradi (6.50- chizma).

Yuqorida matematikaning dialektik xarakterini ochib beruvchi ba'zi misollarni ko'rib chiqdik. Qarama-qarshiliklar birligi va kurashi qonuni, sifat o'zgarishlarning miqdor o'zgarishlariga o'tish qonuni hamda inkorni inkor qonuni dialektikaning asosiy qonunlaridan hisoblanadi. Tabiat, jamiyat va tafakkur dialektikaning ana shu qonunlari asosida taraqqiy etadi.

Matematikani o'rganar ekanmiz, dunyoni anglash mumkin ekanligiga, matematik abstraksiyalar (son, chizma va boshq.) insoniyatning asrlardan buyon davom etib kelgan amaliy tajribasi jarayonida turli obyektlar va hodisalarni real voqelik bilan kuzatishlari va ularni ilmiy ravishda umumlashtirishlari mahsuli ekaniga ishonch hosil qilamiz.

Insonning ilmiy dunyoqarashi (tabiatga va jamiyatdagi hodisalarga qarash sistemasi) bolalikdan chizmalana boradi. Matematika yoshlarda ilmiy g'oyalarning chizmalanishi haqida to'g'ri tasavvur hosil bo'lishiga yordam beradi.

Matematik bilimlar avlodlarimizning mashaqqatli mehnatlari evaziga to'plangandir.

O'quvchilar fan uzluksiz rivojlanishda ekanligini va o'z taraqqiyoti davomida uni hech narsa to'xtatib qololmasligini bilishlari kerak.

3- §. ASALARI UYASI HAQIDAGI MASALA

Asalari uyasini ko'zdan kechirar ekanmiz tabiatning mukammalligiga yana bir bor tasanno aytmasdan ilojimiz yo'q. Asalari uyasi har biri uchta yog'i teng romblardan, qolgan 6 ta yog'i teng trapetsiyalardan iborat 10 yoqlardan iboratdir.

Biz bu bo'limda asalari uyasining matematik tomondan qanchalik mukammal bo'lishini tekshirib chiqamiz. Buning uchun avval bir nechta yordamchi masalalarni muhokama qilishimizga to'g'ri keladi.

Parket tuzish masalasi. Faqat chegaralaridan iborat umumiy qismga ega bo'lgan chizmalar bilan to'ldirilgan tekislikni *parket* deb tushunamiz.

Bu paragrafda muntazam ko'pburchaklardan hosil qilinadigan parketlar haqida fikr yuritamiz. Agar parket faqat bir xil muntazam chizmalardan tuzilgan bo'lsa, *bir jinsli parket* deyiladi.

1- masala. Faqat qanday muntazam ko'pburchaklardan bir jinsli parketlar hosil qilish mumkin.

Yechish. Muntazam ko'pburchaklarning ichki burchaklari yig'indisi $180°\ (n-2)$ formula orqali hisoblanishini bilamiz, u holda uning bitta ichki burchagi $\frac{180°(n-2)}{n}$ ga teng. Endi hosil bo'ladigan parketning bitta uchida k ta shunday burchak joylashsin deb faraz qilsak, u holda $\frac{180°(n-2)}{n}k = 360°$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning natural sonlardan iborat yechimlarini topaylik:

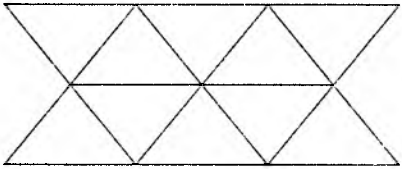
$$\frac{180°}{n}(n-2)k = 360° \Leftrightarrow \frac{(n-2)k}{n} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2n}{n-2}$$

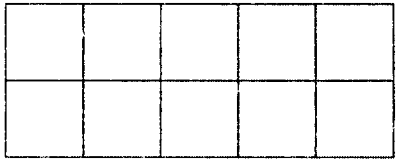
yoki $k = 2 + \frac{4}{n-2}$; k va n lar natural sonlar bo'lishini e'tiborga olsak,

$n=3,\ \ k=6,$

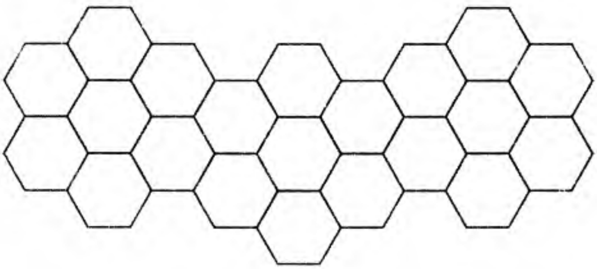
$n=4,\ \ k=4,$

$n=6,\ \ k=3$





6.51- chizma. 6.52 - chizma.



6.53- chizma.

yechimlar hosil bo‘ladi. Shunday qilib, muntazam uchburchaklardan, kvadratlardan, muntazam oltiburchaklardan iborat parketlar mavjud ekan (6.51—6.53- chizmalar).

2- masala. Doimiy perimetrga ega bo‘lgan 1-masaladagi muntazam ko‘pburchaklardan qaysi biri eng katta yuzga ega?

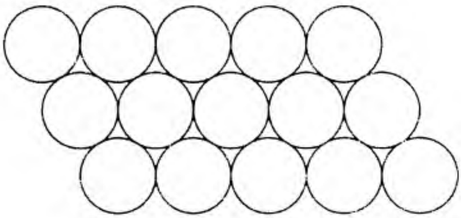
Yechish. Ko‘pburchaklar yuzlarini perimetrlari orqali ifoda qilaylik, u holda muntazam uchburchak, kvadrat va muntazam oltiburchaklar uchun mos ravishda quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$S_1 = \frac{p^2\sqrt{3}}{36}, \quad S_2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16},$$

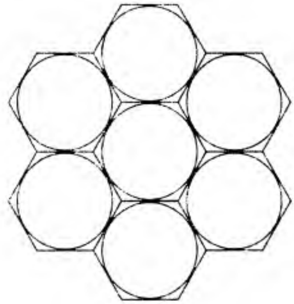
$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{p}{3} \cdot \frac{p}{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{p^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{p^2\sqrt{3}}{6}.$$

Bu yuzlar $\sqrt{3} : 6 : 12\sqrt{3}$ nisbatda bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Shunday qilib, muntazam oltiburchak eng katta yuzga ega bo‘lar ekan.

3- masala. Tekislikka, iloji boricha zich qilib, teng aylanalarni joylashtiring.



6.54- chizma.



6.55- chizma.

Yechish. Har bir aylana oltita aylanaga urinib (6.54- chizma), urinish nuqtalaridan o'tkazilgan urinmalar hosil qilgan oltiburchakka ichki chizilgan bo'ladi (tekshirib ko'ring) (6.55- chizma).

Agar har bir aylanani shunday tashqi chizilgan muntazam oltiburchaklar bilan almashtirsak, tekislik muntazam oltiburchaklar orqali to'liq qoplanadi.

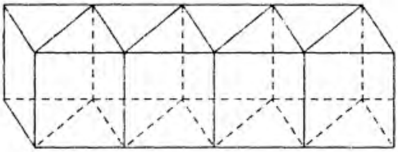
Asalarilar, tahminan chizma jihatdan ham o'lchov jihatdan ham bir xil bo'lganliklari sabab, o'z uyachalarini qurish jarayonlarida, uyachasini ichida ko'p martalab aylanib bir-biriga zich qilib parallel joylashtirilgan silindrlarni hosil qiladilar. Hosil bo'lgan chizmaning ko'ndalang kesimini qarasak, u aylanalardan tashkil topgan muntazam oltiburchakli naqshga o'xshaydi. Asalarilar ishlarini tugatgunlariga qadar uya yasalayotgan modda yarim suyuq yopishqoq holatda bo'ladi. Asalarilarning ishlari bitgunicha kapillar kuchlari aylanalarni ayrim burchaklari aylana chizmaini qisman saqlab qolgan tashqi chizilgan oltiburchaklarga aylantiradi. Hamda asalari uyasining chizmai muntazam olti burchakli prizmalardan iborat chizmaga keladi.

Asalarilar eng kam material sarf qilib, eng ko'p asal joylashadigan uya yasashlari kerak. Buning uchun albatta uyaning ko'ndalang kesimida yuqorida isbot qilinganiga ko'ra muntazam oltiburchakli parket chizmai hosil qilinishi kerak.

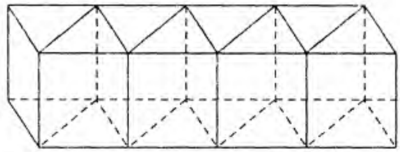
4- masala. Qanday bir xil to'g'ri prizmalar yordamida fazoni to'ldirish mumkin?

Yechish. Yuqorida biz muntazam ko'pburchaklar orqali tekislikni to'ldirish masalasini ko'rgan edik. Quyidagi rasmlardan ko'rinib turibdiki, muntazam prizmalarni shunday joylashtirish lozimki:

1) muntazam prizmalar bir-birining ichiga kirmasin;



6.56- chizma.



6.57- chizma.

2) fazoda bo'sh joylar qolmasin;

3) prizmalar bir-biriga parallel joylashsin.

Albatta, fazoni bunday to'ldirish faqat quyidagi 3-ko'rinishdagina bo'lishi mumkin.

5 -masala. 6.56—6.58- chizmalardagi yon yoqlarining yuzalari bir xil bo'lgan prizmalardan qaysi birining hajmi eng katta bo'ladi?

Yechish. Agar prizmalarning yon sirtlari P, balandliklari H bo'lsa, muntazam uchburchakli prizmaning hajmi

$$V_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{3H}\right)^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{9H^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H = \frac{\sqrt{3}P^2}{36H};$$

muntazam to'rtburchakli prizmaning hajmi

$$V_2 = \left(\frac{P}{4H}\right)^2 \cdot H = \frac{P^2}{16H};$$

muntazam oltiburchakli prizmaning hajmi

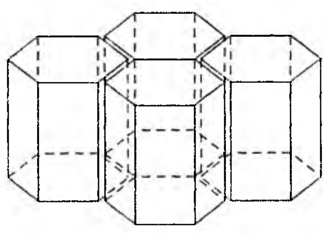
$$V_3 = 6 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{P}{6H}\right)^2 \sin 60^\circ \cdot H = \frac{3P^2}{36H^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H = \frac{\sqrt{3}P^2}{24H}$$

bo'ladi. Ularning nisbatlari

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{\sqrt{3}}{30} : \frac{1}{16} : \frac{\sqrt{3}}{24} \text{ yoki } V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{10\sqrt{3}} : \frac{1}{16} : \frac{1}{8\sqrt{3}}$$

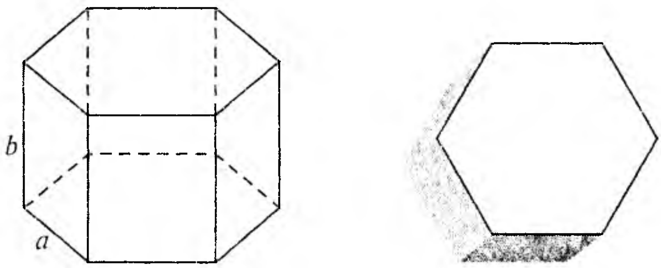
bo'ladi. Lekin $10\sqrt{3} > 16 > 8\sqrt{3}$ ekanligini e'tiborga olsak, muntazam oltiburchakli piramida hajmi eng katta bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, asalari uyasi muntazam oltiburchakli prizmalardan hosil qilinsa, bunday uyaga kam material sarf qilinib, ko'proq asal joylashtirish mumkin ekan. Asalari uyasidagi bu oltiburchakli prizma chizmaidagi bo'lakchani xonadon deb ataylik.



6.58- chizma.

Bunday xonadonning chizmai tepasi ochiq muntazam oltiburchakli



6.59- chizma.

prizma bo'lib, uning pastki asosi tomoni a ga teng bo'lgan muntazam oltiburchakdan iborat, prizma balandligini b ga teng deb faraz qilsak, u holda bunday xonadonning hajmi $V=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}b$, yon sirti $S_{yon}=6ab$, to'la sirti (tepasidagi yuzani hisoblamaganda) $S_{t.sirt}=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}+6ab$ formulalar bilan hisoblanishi ma'lum (6.59-chizma).

Lekin asalari uyasini diqqat bilan tekshirsak, bunday uya bir-biriga yopishgan 2 ta qismdan iborat bo'lib, har bir qism asoslari aynan muntazam oltiburchak bo'lmagan, tepa qismi esa muntazam oltiburchakli ko'pyoq chizmaidagi xonadonlardan iboratligini ko'ramiz.

Har bir xonadon chizmai qanday bo'lsa, eng kam material sarf qilinib, eng katta hajmni hosil qilish mumkin?

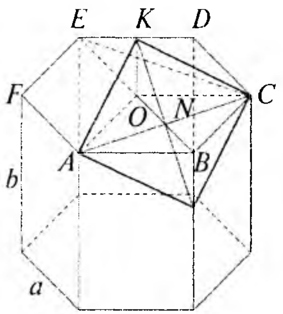
Bu masala asalarilar tomonidan bekam-ko'st hal qilingan.

Biz bu masalaning matematik yechimini ko'rib chiqamiz.

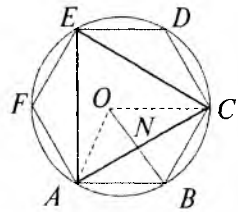
Asalari uyasidagi har bir xona, aslida asosi ko'pyoqli burchak hosil qiladigan 3 ta romb, yon yoqlari (devorlari) trapetsiyalardan, tepa qismi ochiq, muntazam 6 burchak chizmaidagi ko'pyoqlidan iboratdir. Bunday ko'pyoqlini hosil qilish uchun muntazam 6 burchakli prizma uchta uchidan piramida chizmaidagi bo'lakchalarni kesib olib asosiga qo'yib chiqish yetarli.

6- masala. Muntazam oltiburchakli prizmani olib, undan shunday ko'pyoqli hosil qilingki, uning to'la sirti aslicha qolib, hajmi imkon boricha katta bo'lsin.

Yechish. Muntazam oltiburchakning markazida shu ko'pburchak tekisligiga perpendikular o'tkazamiz, bu perpendikulardan ixtiyoriy K nuqtani belgilab olamiz (6.60-chizma).



6.60- chizma.



6.61- chizma.

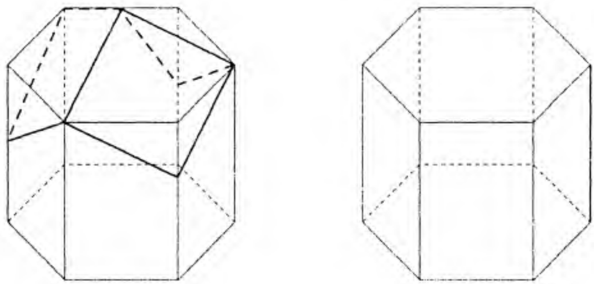
OK kesmani x orqali belgilaymiz $x = OK$. K nuqta va ACE teng tomonli uchburchakning har bir tomoni orqali o'tuvchi uchta tekislik o'tkazamiz. Bu tekisliklar prizmadan uchta bir xil uchburchakli piramidalar kesib oladi. Bu piramidalarni prizmaning yuqori asosiga terib chiqamiz. Bu piramidalar $ACOK$, $CEOK$, $EAOK$ lardan iborat. K nuqtali prizma o'qining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa ham hosil bo'lgan ko'pyoqning hajmi avvalgi muntazam oltiyoqli prizma hajmiga teng bo'ladi, lekin hosil bo'lgan ko'pyoqlining to'la sirti boshqacha bo'ladi. Hosil bo'lgan ko'pyoq yuqori asosi yoqlari uchta romb, yon yoqlari esa 6 ta trapetsiya, pastki asosi esa ochiq muntazam oltiburchakdan iborat ko'pyoqli chizmadir.

Bu o'nyoqning to'la sirti (ochiq asos hisobga olinmaydi) quyidagicha:

$S_{\text{t.sirt}} = 3 \cdot S_{\text{romb}} + 6 \cdot S_{\text{trapetsiya}}$ yoki $S_{\text{t.sirt}} = y = \frac{3}{2} a\sqrt{12x^2 + 3a^2} + 6ab - ax$ formula bilan hisoblanadi. Hosil bo'lgan $y = \frac{3}{2} \times \sqrt{12x^2 + 3a^2} + 6ab - ax$ funksiya ekstremumini topaylik: $y' = \frac{18ax}{\sqrt{13x^2 + 3a^2}} - 3a$. U holda $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ da $y_{\min} = 6ab + \frac{3a^2\sqrt{2}}{2}$.

Hosil bo'lgan xonaning to'la sirtini avvalgi xona sirti bilan solishtiramiz. Avvalgisi $S_{\text{t.s}} = 6ab + \frac{3}{2} a^2\sqrt{3}$, hosil bo'lgani $S_{\text{t.s}} = 6ab + \frac{3}{2} a^2 \cdot \sqrt{2}$.

Oqibatda hosil bo'lgan o'nyoqning to'la sirti kichikroq bo'lishi ko'rinib turibdi.

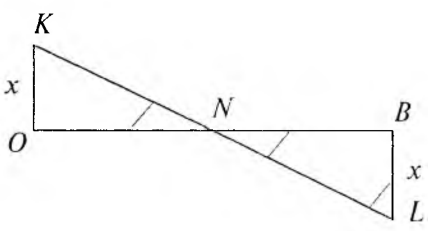


6.62- chizma.

Hosil bo'lgan ko'pyoqning K uchidagi fazoviy uchyoqli burchak butun son marta fazoviy to'liq burchakka joylashib, uni to'liq qoplaydi (6.62- chizma).

Yana asalari uyasi bilan bog'liq ba'zi masalalarni qarab chiqaylik.

1. $\alpha = \widehat{NLB}$ burchakni, ya'ni yuqori asosdagi uchyoqli burchakni muntazam oltiyoqli prizmadan kesib olishdan hosil bo'lgan burchakni hisoblaylik: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{NB}{x}\sqrt{2}$, u holda $\alpha = 54°44'48''$.



6.63- chizma.

Ma'lumki turnalar kuzda Janub o'lkalarga uchib ketayotganlarida 110° li burchak hosil qilib uchishadi. Bu burchakning yarmi, ya'ni uchburchak tomoni bilan uchish yo'nalish orasidagi burchak taxminan α ga teng. Undan tashqari ko'pgina kristallar ham $\alpha = 54°44'48''$ ga yaqin burchak hosil qiladilar.

2. Hosil bo'lgan LBN uchburchakning tomonlari nisbatini hisoblaymiz.

LBN uchburchakning tomoni α ga teng bo'lsa, $BL = x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $BN = \frac{a}{2}$, $LN = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. $BL : BN : LN = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ (6.63- chizma).

Uzunligi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ga teng kesmalarni Pifagor teoremasidan foydalanib sirkul va chizg'ich yordamida yasash mumkinligi hammaga ma'lum (6.64- chizma).

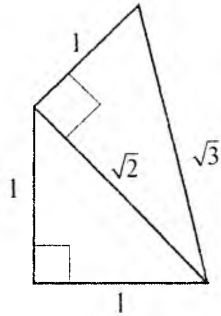
3. Qog'ozdan asalari uyasidagi bitta xonani yasash usulini ko'rib chiqamiz.

Qog'ozdan, $a = 2$ sm, $b = 5$ sm deb faraz qilib uchta bir xil romb va oltita bir xil trapetsiya qirqib olamiz. Buning uchun xona qirralarining uzunliklarini hisoblab olamiz:

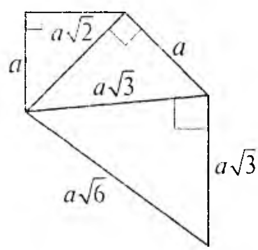
$$AC = a\sqrt{3}, \quad KC = KA = \frac{3}{4}a\sqrt{2},$$

$$OC = OA = a, \quad KL = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

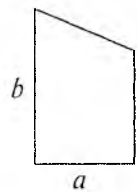
Birorta kesmani a orqali belgilasak, sirkul va chizg'ich yordamida burchak qirralarining o'lchamlarini topish mumkin.



6.64- chizma.



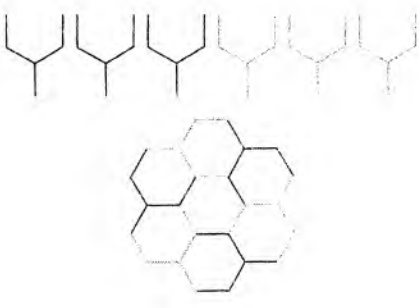
6.65- chizma.



6.66- chizma.

Shunday qilib, 6.65- chizma ko'rinishdagi 6 ta trapetsiya tomonlari $\frac{3}{4}a\sqrt{2}$, diagonallari $a\sqrt{3}$ va $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ ga teng 3 ta romb yasab, ularni ma'lum tartibda yelimlab chiqsak, asalari uyasining bitta xonasi hosil bo'ladi.

Qiziqarli masala. Asalari uyasini yasab ko'ring (6.67- chizma).



6.67- chizma.

VII BOB. AQLINGIZNI PESHLANG

1. Maktabda 500 nafar o'quvchi bor. Hech bo'lmaganda bir o'quvchining tug'ilgan kuni 2- fevral bo'lishi mumkin-mi? (Yo'q).

2. Maktabda 500 nafar o'quvchi bor, ulardan hech bo'lmaganda 2 nafari bir kunda tug'ilgan bo'lishi mumkin-mi? (Ha).

3. Savatda ikki xil navli olmalar bor. Ikkita bir xil navli olmalar chiqishi uchun kamida nechta olma olish zarur? (3 ta).

4. Tennis koptogini qay yo'nalishda otsak, ma'lum masofani bosib o'tib, to'xtaydi va qarama-qarshi yo'nalishda harakatlanadi? (Tik otsak).

5. Agar kasrning suratini maxrajiga oshirsak, kasr qanday o'zgaradi? (Kasrga bir qo'shiladi).

6. Ikkita har xil raqamlardan iborat bir xil harflar bilan boshlanadigan so'zlar bilan ifoda qilinadigan ikki xonali son mavjud-mi? (Ha, mavjud, 94).

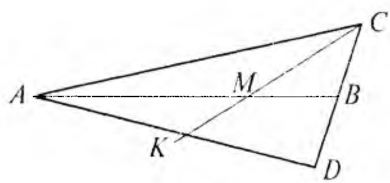
7. Uchburchakning o'rta chizig'i uning yuzini qanday nisbatda bo'ladi? (1/3).

8. Har xil harflar bilan boshlanib bir xil raqamlardan tashkil topgan 3 xonali sonni ayting. (Bunday son mavjud emas).

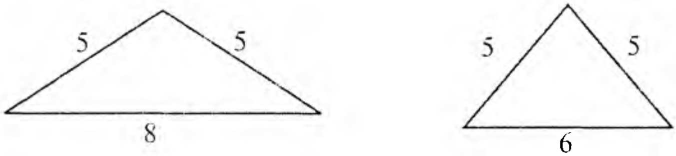
9. Bir kub metrda necha kub santimetr bor? (Bir million sm^3).

10. AB kesmani parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazmasdan teng 3 ga bo'ling.

Yechish. B nuqtadan ixtiyoriy to'g'ri chiziq o'tkazib, $DB = BC$ bo'ladigan qilib, C, D nuqtalarni belgilab olamiz. Agar K AD kesmaning o'rtasi bo'lsa, $MB = 1/3AB$ (7.1- chizma).



7.1- chizma.



7.2- chizma.

11. Barcha raqamlar ko'paytmasi nechaga teng, yig'indisi-chi? (0; 45).

12. Yuzlarini hisoblamasdan quyidagi (7.2- chizma) uchburchaklarning tengdosh bo'lishini, ya'ni yuzlari teng bo'lishini isbotlang.

Yechish. Asoslariga tushirilgan balandligi ham mediana, ham bissektrisa bo'lib, bu uchburchaklarni teng uchburchaklarga bo'ladi.

13. O'g'li otasidan 3 marta kichik, onasidan esa 20 yosh kichik. Agar har birining yoshiga 5 yildan qo'shilsa, ularning yoshlari yig'indisi 100 ga teng. Har birining yoshini toping. (15, 45, 35.)

14. Qirrasi 3 sm bo'lgan kubning qanday qismi qirrasi 1 sm bo'lgan kub hosil qiladi? (1/27).

15. Tomonlari butun sonlar bilan ifoda qilinadigan, perimetri yuziga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak tomonlarini toping.(6,3; 4,4.)

16. Agar kubning qirrasi 2 marta oshirilsa, kubning hajmi necha marta oshadi? To'la sirti-chi? (8, 4.)

17. Agar son 2 ga hamda 4 ga bo'linsa, 8 ga bo'linadi-mi? (Bo'linmasligi ham mumkin, masalan 12.)

18. Agar son 5 ga hamda 15 ga bo'linsa, u 75 ga bo'linadimi? (Bo'linmasligi ham mumkin, masalan 30.)

19. Kubning qirrasini 5 marta kamaytirsak, uning hajmi necha marta kamayadi? (125 marta.)

20. Rasmdagi insonning otasi gapirayotgan insonning yagona o'g'li. Rasm kimniki?

21. Butun sonning kvadrati qanday raqamlar bilan tugamaydi? (2, 3, 7, 8.)

22. Quyidagi sonlardan eng kattasini toping: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[15]{26}$. ($\sqrt[3]{2}$).

23. Otasi o'g'lidan 23 yosh katta. Necha yildan keyin o'g'li otasidan 25 yosh katta bo'ladi? (Hech qachon.)

24. Ikkita 5 ning orasiga qanday belgi qo'ysak, hosil bo'lgan son 5 dan katta 6 dan kichik bo'ladi? (Vergul.)

25. Kitobning narhi ming so'm va yana yarimta kitob narhiga teng. Kitob necha so'm? (2000 so'm).

26. Kitobning narhi 4000 so'm va yana kitob narhining uchdan birini qo'shganga teng. Kitob necha so'm? (6000 so'm).

27. Arifmetik amallar yordamida 5 ta 5 dan 100 hosil qiling. ($5\times5\times5 - 5\times5$.)

28. Arifmetik amallar yordamida 5 ta 1 dan 100 hosil qiling. ($111 - 11$.)

29. Bo'luvchidan uning uchdan bir qismini olib tashlasak, bo'linma qanday o'zgaradi? (1,5 marta ortadi.)

30. 3 ta 5 dan 0 hosil qiling. ($(5 - 5)\times5$).

31. Ovchi quyon va o'rdaklarni ovladi. Agar ovchi ovini joylagan qopda hamma oyoqlar soni 28 ta, hamma boshlar soni 10 ta bo'lsa, ovchi nechta quyon va nechta o'rdak ovlagan?

Yechish. Faraz qilaylik qopda faqat quyonlar bo'lsin. U holda oyoqlar soni 40 ta bo'lib, 12 ta oyoq ($40 - 28$) ortiqcha bo'lar edi. Bu oyoqlar soni o'rdaklarniki bo'lar edi. Demak, o'rdaklar soni $12 : 2 = 6$ ta. Endi qopdagilarning hammasi o'rdaklar bo'lsin. U holda quyonlarning oyoqlari soni $28 - 20 = 8$ ta, quyonlar esa $8 : 4 = 2$ ta ekan.

32. Musbat son kubining yarmi shu son yarmining kubidan necha marta katta? (4 marta.)

33. 100 ning uchdan bir qismining bir yarim barobari nechaga teng? (50.)

34. Otasi 32 yoshda, o'g'li 5 yoshda. Necha yildan keyin otasining yoshi o'g'lining yoshidan 4 marta kata bo'ladi? (4 yildan keyin).

35. Otam 31 yoshligida men 8 yoshda edim. Hozir otamning yoshi mening yoshimning 2 barobariga teng. Men necha yoshdaman? (23.)

36. Berilgan kasrlar maxrajlarini umumiy maxrajga keltirmasdan 22/35 va 110/177 larning qaysi biri kattaligini toping. (Birinchi kasrning surat va maxrajini 5 ga ko'paytiramiz. Birinchi kasr katta.)

37. Akasi necha yoshda bo'lsa, uning yoshi singlisining yoshidan shuncha marta katta. Singlisining yoshi nechada? (1)

38. To'rtta ketma-ket kelgan sonlarning ko'paytmasi 3024 ga teng. Shu sonlarni toping. (6, 7 ,8, 9.)

39. Raqamlari yig'indisi 2 ga teng bo'lgan barcha besh honali sonlarni aniqlang. (20000, 11000, 10100, 10010. 10001.)

40. Raqamlari yig'indisi 3 ga teng bo'lgan barcha 3 xonali sonlarni ayting. (300, 210, 201. 120, 102, 111).

41. Agar ustunlar orasidagi masofa 50 metrdan bo'lsa, 500 metr masofada nechta ustun bor? (11 ta).

42. Barcha ikki honali toq sonlar ko'paytmasi qanday raqam bilan tugaydi? (5 raqami bilan).

43. Birinchi 100 ta sonlardan barcha juftlarining yig'indisi, barcha toqlarining yig'indisidan nechtaga ko'p?

Yechish. $S_n \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n; S_j = 2+4+\ldots+100 = \frac{2+100}{2}\cdot 50 = 2550;$

$S_t = 1+3+\ldots+99 = \frac{1+99}{2}\cdot 50 = 2500$. Javob: 50 taga ko'p.

44. $63! \equiv 61! \pmod{71}$ ekanligini isbotlang.

Yechish. $63! - 61! = 61!(62\cdot 63 - 1) = 61!\cdot 3905 \vdots 71$.

45. Uchta ketma-ket natural sonlarning yig'indisi tub son bo'lishi mumkinmi? (Yo'q, chunki $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 =$ $= 3(n+1)$).

46. 123456 ni 9 ga bo'lmay, shu sonni 9 ga bo'lganda hosil bo'ladigan qoldiqni toping. (3.)

47. „*A*" shahardan „*B*" shahargacha bo'lgan masofani avtomobil 40 km/soat tezlik bilan bosib o'tdi. Orqaga, ya'ni „*B*" shahardan „*A*" shaharga yo'lni 60 km/soat tezlik bilan bosib o'tdi. Avtomobilning butun yo'lni bosib o'tishdagi, ya'ni „*A*" dan „*B*" gacha va „*B*" dan „*A*" gacha bo'lgan masofani bosib o'tishdagi o'rtacha tezligini toping. (48 km/s.)

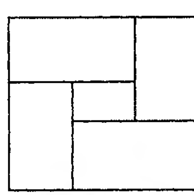
48. Ko'paytmasi 1680 ga teng bo'lgan 4 ta natural sonlarni toping. (5, 6, 7, 8.)

49. a^3 kattami yoki a mi?

Yechish. Agar $a > 1$ bo'lsa, u holda $a^3 > a$; agar $a > 1$ bo'lsa, u holda $a^3 > a$; $a = 0$ yoki $a = 1$ bo'lsa, u holda $a^3 > a$.

50. Kvadratni tomonlari qo'shni bo'lmagan 5 ta to'g'ri to'rtburchakka ajrating.

Javob: 7.3- chizmada keltirilgan.



7.3- chizma.

51. Sut to'ldirilgan bidon 30 kg, yarmi to'ldirilgan bidon 15,5 kg bo'lsa, bidonning og'irligini toping.

Yechish. x – to'la bidondagi sutning og'irligi; y – bidonning og'irligi bo'lsin.

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ \frac{x}{2} + y = 15{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 29, \\ y = 1. \end{cases}$$

52. Oltita to'qqiz orqali 100 ni hosil qiling.

Yechish. $99 + 99 : 99 = 100$.

53. Birinchi kastrul ikkinchisidan ikki marta baland, ikkinchi kastrul esa birinchisidan ikki marta keng. Qaysi biriga ko'proq suv sig'adi? (Ikkinchisiga.)

54. 10^{20} kattami yoki 20^{10} mi?

Yechish. $10^{20} = 10^{10} \cdot 10^{10} > 10^{10} \cdot 2^{10} = 20^{10}$.

55. Musbat sonning beshdan birini shu sonning yettidan biriga ko'paytirsak, yana shu son hosil bo'ladigan sonni toping.

Yechish. $\frac{1}{5}a \cdot \frac{1}{7}a = a$, $a^2 = 35a$, $a = 35$.

56. Million mm necha km ? (1 km.)

57. $\frac{22}{27}$ va $\frac{31}{36}$ kasrlardan qaysi biri katta?

Yechish. $1 - \frac{22}{27} = \frac{5}{27}$, $1 - \frac{31}{36} = \frac{5}{36}$, $\frac{5}{27} > \frac{5}{36}$ bo'lganidan, $\frac{22}{27} < \frac{31}{36}$.

58. Trapetsiya o'rta chizig'i uni ikkita trapetsiyaga bo'ladi. Hosil bo'lgan trapetsiyalar o'xshashmi? (Yo'q.)

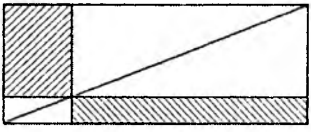
59. Balandligi 13 m li terakning uchiga chiqmoqchi bo'lgan qurt kunduzi 3 m balandga, kechqurun esa 2 m pastga o'rmalayapti. Qurt nechanchi kuni daraxt uchiga chiqadi? (17- kuni.)

60. Shtrixlangan to'rtburchaklar yuzalarining qaysinisi katta (7.4- chizma)? (Teng.)

61. 66^{66} va 33^{33} sonlari qanday raqamlar bilan tugaydi? (6 va 3.)

62. 7^7 ning oxirgi raqamini toping.

Yechish. 7 ning darajalari 7, 9, 3, 1 va yana davom ettirsak 7, 9, 3. Demak, 3 bilan tugar ekan.



7.4- chizma.

63. 100! sonida oxiridan boshlab hisoblaganda ketma-ket nechta nol raqami uchraydi? (24 ta.)

64. Har qanday natural son n uchun $n^5 - n$ son 30 ga bo'linishini isbot qiling.

I s b o t i : n^5, n sonlarining oxirgi raqamlari bir xil bo‘lgani uchun $n^5 - n = (n-1)n(n^2+1)(n+1) \vdots 2 \cdot 3 \cdot 5$.

65. 77^7 soni 5 ga bo‘linadimi? (Yo‘q, chunki 7 ning darajalari 7, 9, 3, 1 raqamlari bilan tugaydi.)

66. $\sqrt{x-5} + \sqrt{4-x} = \sqrt{x}$ tenglamani yeching. (Yechimi yo‘q.)

67. $3 - \sqrt{x+5} = 6$ tenglamani yeching. (Yechimi yo‘q.)

68. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 0$ tenglamani yeching. (Yechimi yo‘q.)

69. a kattami yoki $2a$ mi?

Yechish. $a > 0$ bo‘lsa, $2a > a$; $a = 0$ bo‘lsa, $2a = a = 0$; $a < 0$ bo‘lsa, $2a < a$.

70. $|a| - a$ ni hisoblang.

Yechish. $2a$, agar $a < 0$; 0, agar $a \geq 0$.

71. $|a| + a$ ni hisoblang. $\left(\begin{cases} 2a, & \text{agar, } a > 0; \\ 0, & \text{agar, } a < 0. \end{cases}\right)$.

72. Ikkita ketma-ket kelgan natural sonlar kvadratlari ayirmasi 81 ga teng. Shu sonlarni toping. (40, 41.).

73. Ketma-ket kelgan natural sonlar kublarining ayirmasi 331 ga teng. Shu sonlarni toping. (10, 11.)

74. Ikki nafar o‘quvchi kitob sotib olishmoqchi. Birinchi o‘quvchining puli kitob olish uchun 2700 so‘m kam. Ikkinchi o‘quvchining puli kitob narxidan 1 tiyin kam. Ular pullarini jamlashgandan so‘ng, yana pullari kitob olishga yetmadi. Kitob necha pul turadi. (2700 so‘m.)

75. Uch nafar ovchi atala pishirdilar. Atala uchun 1- ovchi ikki piyola un qo‘shdi, 2- ovchi esa bir piyola un qo‘shdi, 3- ovchida esa un yo‘q ekan. Ular atalani teng bo‘lib yeyishdi. So‘ngra 3- ovchi „Menda 5 ta o‘q bor. Shu o‘qlarni atala uchun qo‘shgan hissalaringga qarab bo‘lib olinglar“ deydi. Ovchilar o‘qlarni qanday bo‘lib oldilar? (Hamma o‘qlar birinchi ovchiga berildi.)

76. Agar uch xonali sonning chekkasidagi raqamlarning yig‘indisi o‘rtasidagi raqamiga teng bo‘lsa, bu son 11 ga bo‘linadi. Isbot qiling.

77. Raqamlari ko‘paytmasining ikkilanganiga teng bo‘lgan ikki xonali sonni toping. $36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$

78. $9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot ... \cdot 19$ ko'paytmaning oxiri qanday son bilan tugaydi? (5.)

79. Natural sonni necha marta o'ziga qo'shsak, a^n hosil bo'ladi ($n \in N$)?

Yechish. $x \cdot a = a^n$, x – butun son. $x = a^{n-1}$.

80. Ayriluvchi, ayiruvchi va ayirmaning yig'indisi 25 ga teng ayriluvchini toping.

Yechish. $a - b = c$ bo'lsin, u holda $a - b - c = 0$. Demak, $a + b + c = 2a = 25$, $a = 12{,}5$.

81. $121^6 + 234^6 + 16^6$ ga teng bo'lgan sonning oxirgi raqamini toping. (3.)

82. Sutdan 23% qaymoq, qaymoqdan 21% yog' olish mumkin. 483 kg sariq yog' olish uchun necha kg sut zarur?

Yechish. Faraz qilaylik, x kg sut olish mumkin bo'lsin. U holda $x \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}21 = 483$ kg. J a v o b: 1000 kg = 1 t.

83. Moychechak quritilganda o'z vaznining 84% ini yo'qotadi. 6,4 kg quritilgan moychechak hosil qilish uchun necha kg moychechak yig'ish zarur?

Yechish. $x \cdot 0{,}16 = 6{,}4$, $16x = 640$, $x = 40$ kg.

84. 222 ta 2 ni ko'paytirib hosil qilingan sonning oxirgi raqamini toping.

Yechish. Har 4 ta 2 ning ko'paytmasi 16 ga teng. 222 : 16 = 55 va 2 qoldiq qoladi. Demak, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 16 \cdot 55 + 4$. J a v o b: 4.

85. Yuzta 3 ni bir-biriga ko'paytirsak, hosil bo'lgan sonning oxirgi raqami nechaga teng?

Yechish. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3 = 81 \cdot 81 \cdot ... \cdot 81$. J a v o b: 1.

86. Yuk poyezdining uzunligi 1 km. Agar u 50 km/s tezlik bilan harakat qilsa, 1 km li tonneldan qancha vaqtda o'tadi?

Yechish. Masala shartiga ko'ra poyezd 2 km masofani bosib o'tishi kerak. $t = \frac{s}{v}$ formulaga asosan $t = \frac{2}{50}$ soat $= \frac{2}{50} \cdot 60$ min = 2 min 24 s.

J a v o b: 2 min 24 s.

87. Ikki kishi qirg'oqqa keldi. Lekin qirg'oqda faqat bir kishi sig'adigan qayiq bor. Ikkalasi ham daryoning bir qirg'og'idan ikkinchi qirg'og'iga suzib o'tdi. Bu hodisa qanday yuz berdi? (Ikkala kishi daryoning har xil qirg'og'iga kelishgan).

88. Ikki sonning yig'indisi shu sonlarning ayirmasiga teng. Shu sonlarni toping.

Yechish. $x+u=x-u$, $u=0$. J a v o b: ikkinchi son nol.

89. Teatrda, tomoshabinlar uchun har biri 24 tadan o'rindiq bo'lgan 26 qator joy bor. O'rindiqlar 1-qatordan boshlab nomerlangan. Tartib nomeri 375 ga teng o'rin nechanchi qatorda joylashgan?

Yechish. $375:24=15{,}625$. J a v o b: 16.

90. Agar kvadratning perimetrini 10% ga oshirsak, uning yuzasi necha % ga oshadi?

Yechish. Kvadratning tomoni x bo'lsin. $S=x^2$ – kvadratning yuzi. $\frac{4x\cdot 1{,}1}{4}=1{,}1x$ hosil bo'lgan kvadratning tomoni, $S'=(1{,}1x)^2=$ $=1{,}21x^2$ – hosil bo'lgan kvadratning yuzi. J a v o b: 21%.

91. Osmondagi qushchalarning har bittasi bittadan shoxchalarga qo'nsa, bitta shoxcha yetmaydi. Osmondagi qushchalarning har ikkitasi bittadan shoxchalarga qo'nsa, bitta qushcha yetmaydi. Nechta edi qushchalar? Nechta edi shoxchalar? (4 ta edi qushchalar, 3 ta edi shoxchalar).

92. Birinchisi 4 litrli, ikkinchisi 9 litrli idishlar yordamida qanday qilib 3 litr suvni boshqa idishga quyib olish mumkin?

Yechish. 9 litrli idishdan 4 litrli idishga 2 marta to'ldirib suv quysak, 3 litrli idishda 1 litr suv qoladi.

93. Uchta ketma-ket keluvchi natural sonlar yig'indisi 21 ga bo'linadimi?

Yechish. $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)\vdots 21$. U holda $n+1=7k$, bundan $n=7k-1$. J a v o b: bo'linadi, agar $n=7k-1$ bo'lsa.

94. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{9\cdot 10}$ yig'indini hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{8}-\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10})=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

J a v o b: $\frac{9}{10}$.

95. Agar $x=87$ bo'lsa, u holda $x^2-86x+113$ ifoda nechaga teng bo'lishini og'zaki hisoblang.

Yechish. $x\cdot(x-86)+113{,}87\cdot(87-86)+113=200$.

J a v o b: 200.

96. 49! ga teng natural son nechta nol bilan tugaydi?

Yechish. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 48 \cdot 49$ bu ko'paytmada har bir beshinchi ko'paytuvchi 5 ga bo'linadi, 25 esa 5 ga ikki marta bo'linadi. Har ikkinchi ko'paytuvchi esa 2 ga bo'linadi. Demak, nollar soni $45:5+1=9+1=10$ ga teng. J a v o b : 10 ta nol bilan tugaydi.

97. $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ ni hisoblang.

Yechish. $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = t$ bo'lsin. Ikkala tomonini 30° ga ko'paytirsak, $t = \frac{1}{8}$ hosil bo'ladi. J a v o b : $\frac{1}{8}$.

98. Ostankino teleminorasining og'irligi 30000 t, balandligi esa 530 m. Shu minoraning balandligi 53 sm bo'lgan nusxasining og'irligini toping.

Yechish. Minora bilan uning nusxasining o'xshashlik koeffitsiyenti $k = \frac{530m}{0{,}53m} = 10^3$ ga teng. O'xshash chizmalar hajmlarining nisbati o'xshashlik koeffitsiyentining kubiga teng. Shuning uchun nusxa og'irligi $3000 \cdot 10^3 \cdot 10^3 g \cdot 10^{-9} = 30g$.

99. Uch nafar dono insonlar haqida hikoya.

Qadim zamonlarda 3 nafar dono insonlar qaysi birlari aqlliroq ekanligini aniqlash masalasi ustida tortishib qolishibdi. Ularning muammosini bir yo'lovchi hal qilib bergan ekan.

— Mening qo'limda 2 ta oq, 3 ta qora qalpoq bor. Ko'zlaringizni yuminglar — debdi. So'ngra har bir donoga bittadan qalpoq kiydirib, endi ko'zlaringizni oching, kim o'zining boshidagi qalpoq rangini aniqlasa, o'sha aqlliroq bo'lishini aytibdi. Shundan so'ng donolarning eng donosi mening boshimdagi qalpoq qora debdi. U qanday qilib o'z boshidagi qalpoq rangini aniqlagan?

Yechish. U shunday fikrlagan. Agar mening boshimdagi qalpoq oq bo'lsa, qolgan donolardan biri albatta mening boshimda qora qalpoq deb aytgan bo'lar edi. Chunki uning boshida ham oq qalpoq bo'lganida edi donolarning boshqasi mening boshimda qora qalpoq degan bo'lar edi. Demak, mening boshimdagi qalpoq oq rangda bo'lishi mumkin emas.

100. I. N y u t o n   m a s a l a s i . O'tloqdagi maysa bir xil zichlikda, bir xil balandlikda o'sadi. Agar 70 ta sigir o'tloqdagi maysani 24 kunda, 30 ta sigir esa 60 kunda yeb bo'lsa, nechta sigir o'tloqdagi maysani 96 kunda yeb bo'ladi?

Yechish. 1. 70 ta sigir 24 kunda $70 \cdot 24 = 1680$ ulush maysa yeydi.

2. 30 ta sigir 60 kunda ulush maysa yeydi.

3. $60 - 24 = 36$ kunda o'tloqda $1800 - 1680 = 120$ ulush maysa qoladi.

4. Bir kunda $\frac{120}{36} = \frac{10}{3}$ ulush maysa o'sib chiqar ekan.

5. Boshida o'tloqda necha ulush maysa bor edi?

24 kunda $24 \cdot \frac{10}{3} = 80$ ulush maysa o'sib chiqqan. Demak, boshida $1680 - 80 = 1600$ ulush maysa bor ekan.

6. 96 kunda o'tloqda $96 \cdot \frac{10}{3} = 320$ ulush maysa o'sib chiqqan. Demak, 96 kunda $1600 + 320 = 1920$ ulush maysa hosil bo'ladi.

7. Sigirlar $1920 : 96 = 20$ ta.

J a v o b : 20 ta sigir.

101. Orasidagi masofa 360 km bo'lgan ikki shahardan bir-biriga qarama-qarshi yo'nalishda 2 ta avtomobil bir xil tezlik bilan yo'lga chiqdi. Avtomobillar bilan birga shaharlarning biridan bir qush 45 km/s tezlik bilan ikkinchi shaharga qarab uchib, qarama-qarshi tomondan kelayotgan avtomobil bilan uchrashganidan so'ng orqaga qarab ucha boshladi va yana qarshisidagi avtomobil bilan uchrashib orqaga qarab ucha boshladi, va h.k. Qushcha bu faoliyatni avtomobillar uchrashgunga qadar davom ettirdi. Qushcha necha km masofa bosib o'tgan?

Yechish. Avtomobillar yo'lning o'rtasida uchrashadilar. $180 : 60 = 3$ soat yo'l yurishadi. Shu vaqt davomida qush parvoz qilib, $45 \cdot 3 = 135$ km masofani uchib o'tgan. J a v o b : 135 km.

102. Sakkizlik sanoq sistemasida yozilgan 123 sonni o'nlik sanoq sistemasida yozing. J a v o b : 83.

103. Qaysi biri katta $\frac{37}{67}$ mi yoki $\frac{3737}{6767}$?

VIII BOB. OLIMPIADA MASALALARI

Olimpiadalar — Qadimgi Yunonistonning yuksak darajada rivojlangan madaniyati mahsulidir. Unda sport o'yinlari — yugurish, nayza uloqtirish, mushtlashish kabi musobaqalar qatorida aqliy faoliyat sohasida tortishuvlar ham o'tkazilgan. Ayniqsa, musobaqalarning har ikki turi bo'yicha g'oliblar alohida sharaflangan. Xususan, atoqli matematik va faylasuf olim Pifagor mushtlashish bo'yicha olimpiada chempioni bo'lgan.

Umuman, matematiklar hayotida musobaqa — masalalar yechishda kim g'olib bo'lishi, o'ziga xos mazmun va ma'no kasb etadi.

Samarqandda yashab ijod etgan atoqli matematik G'iyosiddin Jamshid al-Koshiyning Koshon shahriga (Erondagi shahar) otasiga yozgan bir xati saqlangan. Undan ma'lum bo'lishicha, Ulug'bek rahbarligidagi ilmiy majlis — seminarda olimlar turli masalalarni muhokama qilganlar. Seminarda madrasa toliblari ham qatnashib, o'z qobiliyatlarini namoyish qilganlar. Demak, bunday seminarlar yosh tolibi ilmlar uchun o'ziga xos olimpiada vazifasini bajargan.

Tarixdan ma'lumki, Italiyada XVII asrda matematika turnirlari mashhur bo'lgan. Turnir g'olibi bo'lish katta yutuq hisoblanib, matematiklar yangi masalalar va ularni yechish usullarini sir saqlaganlar. Kubik tenglamalar yechish musobaqasi ana shunday musobaqalardan biri bo'lib, turnirda g'olib bo'lish ishtiyoqi ko'pchilikni, $x^3+px+q=0$ ko'rinishdagi tenglama yechimi uchun formula topishga undagan. Ayniqsa, Fiori, Ferro va Tartalya kabi matematiklar qattiq urinishgan va Tartalya kubik tenglamani yechish qoidasini ishlab chiqib bir necha musobaqada g'olib bo'lgan. U o'zi yaratgan formulani sir tutgan. Boshqa italyan matematigi J.Kardano ko'p marta o'tinib so'ragani uchun Tartalya, qattiq sir tutish sharti bilan unga aytadi. Ammo, Kardano matematikadan yozayotgan navbatdagi risolasiga kub tenglamani yechish formulasini kiritib yuboradi. Shuning uchun, hozirgacha kub tenglamani yechish formulasi Kardano formulasi deyiladi. Albatta Tartalya Kardanoning bu ishidan bir umrga ranjigan. Shundan so'ng matematik turnirlar barham topdi va endi matematiklar topilgan yangi formulalarni sir saqlamaydigan, aksincha, tezroq e'lon qiladigan bo'ldilar.

Keyinchalik matematik musobaqalar boshqa chizmada — olimpiada nomi bilan o'quvchilarni matematikaga qiziqtirish vositasi sifatida qaytadan tug'ildi. Ma'lum bo'lishicha u birinchi marta 1894- yili Vengriyada o'tkazilgan.

Har yili bahorda, ya'ni 3-chorak va 4-chorak orasidagi bahorgi ta'til kunlari, mamlakatimizda matematika, fizika, kimyo, biologiya va boshqa fanlardan respublika olimpiadasi o'tkaziladi. Uning g'oliblari diplomlar, yorliq va turli sovg'alar bilan mukofotlanadi, bitiruvchi sinf o'quvchilariga esa respublika oliy o'quv yurtlariga kirish imtihonlarisiz talaba bo'lish imkoni beriladi. Ammo bu olimpiadada qatnashish oson emas. Buning uchun siz avval maktab, tuman, shahar va viloyat olimpiadalarida muvaffaqiyatli qatnashib, g'olib chiqishingiz lozim.

2007- yilda O'zbekiston Respublika matematika olimpiadasi o'tkazila boshlaganiga 45- yil to'ldi. Dastlabki rasmiy olimpiada 1962- yili Toshkentda, akademik Sa'di Xasanovich Sirojiddinov boshchiligida o'tkazilgan va bu tadbir endilikda har yili o'tkazilib kelinadi.

Odatda, olimpiadada 5 ta masala beriladi va ular shartli ravishda bir necha tipga bo'linadi: algebraik, sonli va mantiqiy, geometrik. O'quvchilar ularni yozma ish tartibida bajaradilar. Iqtidorli o'quvchi, ya'ni olimpiadaning haqiqiy g'olibi, alohida xususiyatga ega bo'lgan nostandart(noan'anaviy) masalalar yordamida aniqlanadi. Maktab va tuman olimpiadasida bunday o'quvchini aniqlash uchun 1 ta yoki 2 ta nostandart masala berish yetarli. Qolganlari osonroq, ya'ni darsda o'tilganlarga yaqin, ko'pchilik yecha oladigan bo'lishi lozim, aks holda boshqa o'quvchilarning matematikaga qiziqishini so'ndirib qo'yishimiz mumkin. Berilgan nostandart masala bilan esa ular ichidan g'olibni aniqlash qiyin bo'lmaydi. Shahar, viloyat olimpiadalarida bunday masalalar 2 tadan kam bo'lmasligi shart. Respublika matematika olimpiadasida 3 ta nostandart masala berib kelingan.

1997- yildan respublikamiz terma jamoasi Xalqaro matematika olimpiadasi (XMO)da qatnashib kelmoqda. XMO ikki kunda o'tadi va har kuni 3 tadan, ja'mi 6 ta masala yechiladi.

Olimpiada masalalari matematikaning qiziqarli masalalariga juda o'xshaydi. Ammo olimpiada masalalari maqsadiga ko'ra o'z oldiga kattaroq vazifalarni qo'yadi. Olimpiada masalalari, odatda, o'quvchi, talabadan o'z bilimini yangicha holatlarga qo'llashni, natijada o'z bilimini yanada oshirishni, o'z ustida ishlab iqtidorini — malakasini takomillashtirishni, umumiy qilib aytganda boy fantaziyaga ega bo'lishni o'rgatadi.

Olimpiada masalalarini yechishga o'rganish qiziqarli masalalarni yechishdan boshlanadi. Shuning uchun, ularning chegarasi qayerda boshlanib qayerda tugashini aniqlash mushkul. Masalan, qiziqarli masala biroz murakkablashtirilsa, olimpiada masalasi, shuningdek, olimpiada masalasi soddalashtirilsa, qiziqarli masala hosil bo'ladi.

O'quvchi qancha ko'p masala yechishni bilsa, yangi masalani bilganlariga taqqoslab, yechish yo'lini qidirishi va topishi osonlashadi. Demak, ko'plab masalalar yechish kerak. Shu maqsadda ushbu bo'lim yozildi.

1- §. OLIMPIADA MASALALARI

O1$_1$. Agar $a = \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{50}$ bo'lsa, u holda $a^3 - 30a$ butun son bo'lishini ko'rsating.

O1$_2$. $x^2 - 6rx + q = 0$ kvadrat tenglama har xil x_1 va x_2 ildizlarga ega. Agar p, x_1, x_2, q sonlar biror geometrik progressiyaning ketma-ket to'rtta hadi bo'lsa, u holda x_1 va x_2 larni toping.

O1$_3$. Uchburchakning uzunligi 2 va 4 bo'lgan tomonlari orasidagi A burchakdan chiqqan medianasi $\sqrt{7}$ ga teng. Shu A burchak qiymatini toping.

O1$_4$. a parametrning qanday qiymatlarida $(1 + a)x^2 + (1 - a)x + a + 3 = 0$ tenglama ildizlari butun son bo'ladi?

O1$_5$. Tomonlari uzunliklari 4, 6, 8 bo'lgan ABC uchburchak berilgan. Unga ichki chizilgan aylana uchburchak tomonlariga D, E, F nuqtalarda urinadi. Hosil bo'lgan DEF uchburchak yuzini toping.

O2$_1$. Ikki a va b natural sonlar uchun $ab = 2n - 1$ munosabat o'rinli. Agar $ab - a + b - 1$ ifoda 8 ga bo'linsa, u holda bu ifoda 16 ga ham bo'linishini isbotlang.

O2$_2$. Musbat $x_1, x_2, \dots, x_{2004}$ sonlari uchun

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_1^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_1^2}{x_{2004} + x_1} \geq \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004}\right)$$

tengsizlikni isbotlang.

O2$_3$. 2^{2004} va 5^{2004} sonlarning biri ikkinchisidan keyin, yonma-yon yozildi. Hosil bo'lgan yangi son necha xonali bo'ladi?

O2$_4$. $xy+1$, $yz+1$, $zx+1$ sonlar to'la kvadrat bo'ladigan x, y, z toq sonlar bormi? Agar bor bo'lsa, ularni toping.

O2$_5$. Agar uchburchak burchaklarining sinuslari ratsional sonlar bo'lsa, u holda shu burchaklar kosinuslari ham ratsional sonlar bo'lishini isbotlang.

O3$_1$. Qaysidir mamlakatning ixtiyoriy bir shahri, ko'pi bilan 3 ta boshqa shahar bilan havo yo'li orqali bog'langan. Bir shahardan ikkinchisiga borish uchun, ko'pi bilan bir marta qo'nib o'tiladi. Bu mamlakatdagi shaharlar soni eng ko'pi bilan nechta bo'lishi mumkin?

O3$_2$. Tekislikda bir nechta kesma ixtiyoriy tarzda joylashgan va ularning hech bir ikkitasi bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Ularning uchlarini, qandaydir usulda kesmalar bilan tutashtirib, o'z-o'zini kesmaydigan bitta siniq chiziq hosil qilish mumkinmi?

O3$_3$. Uchburchakning ikki uchi mahkamlangan. Uchinchi uchi shunday o'zgaradiki, asosdagi burchaklardan biri har doim ikkinchisidan 2 marta katta bo'lishi saqlanadi. Mana shu o'zgaruvchi nuqta (uchinchi uch) qanday egri chiziq chizadi?

O3$_4$. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi $\frac{16}{3}$ bo'lib, uning qaysidir hadi $\frac{1}{6}$ ga teng. Agar shu hadgacha bo'lgan barcha hadlar yig'indisining undan keyingi hadlar yig'indisiga nisbati 30 bo'lsa, u holda o'sha hadning nomerini toping.

O3$_5$. Agar r va r^2+2 sonlari tub bo'lsa, u holda r^3+2 ham tub son bo'lishini isbotlang.

O4$_1$. $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$ va 0 sonlaridan qaysi biri katta?

O4$_2$. Ketma-ketlik $x_1=2$ va $n\geq 2$ uchun $x_{n+1}=\dfrac{x_n^4+9}{10x_n}$ rekurrent formula bilan berilgan. Barcha n larda $\frac{4}{5}<x_n\leq\frac{5}{4}$ bo'lishini isbotlang.

O4$_3$. $\left[\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right]+\left[\sqrt{4x+2}\right]=18$ tenglamaning butun yechimlarini toping.

O4$_4$. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$ ifodani ko'paytuvchilarga ajrating.

O4$_5$. Agar to'g'ri to'rtburchakning diagonali va tomonlari uzunliklari butun songa teng bo'lsa, u holda uning yuzi 12 ga bo'linishini isbotlang.

O5$_1$. Aytaylik r tub son va n natural son bo'lib, $1+np$ to'la kvadrat bo'lsin. U holda $n+1$ soni p ta to'la kvadratlar yig'indisiga teng bo'lishini isbotlang.

O5$_2$. Agar a, b, c haqiqiy sonlar uchun $0 < a,\ b,\ c < 1$ bo'lsa, u holda $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$ tengsizlikni isbotlang.

O5$_3$. Ixtiyoriy $x \in R$ uchun $P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2(P(x))^2$ tenglikni qanoatlantiruvchi, haqiqiy koeffitsiyentli barcha $P(x)$ ko'phadlarni toping.

O5$_4$. Markazi O nuqtada va radiusi R bo'lgan aylana ichidagi, markazlari O_1, O_2 nuqtalarda bo'lgan ikki aylana o'zaro B nuqtada urinadi va katta aylanaga ichidan urinadi. U holda OO_1O_2 uchburchak perimetrini toping.

O5$_5$. Ixtiyoriy natural k son uchun $\sum\limits_{i=1}^{n}\{k\alpha_i\} < \frac{n}{2}$ tengsizlik bajariladigan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ratsional sonlar berilgan. Bu yerda $\{a\}$—belgi a sonning kasr qismini bildiradi.

a) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lardan hech bo'lmaganda bittasi butun son ekanligini isbotlang.

b) Bu tasdiq $\frac{n}{2}$ ni kattaroq son bilan almashtirganda ham o'rinli bo'ladimi?

O6$_1$. Haqiqiy sonlarda berilgan va $f(xf(y)) = f(xy) + x$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $f(x)$ funksiyalarni toping.

O6$_2$. Ketma-ketlikda $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$ va $n \geq 6$ uchun $a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_n - 1$ shart o'rinli bo'lsa, u holda $a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3 + \ldots + a^2{}_{70} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{70}$ ekanini isbotlang.

O6$_3$. Agar a, b, $c \geq 0$ bo'lsa, u holda $4(a+b+c)^3 \geq 27(a^2b + b^2c + c^2a)$ tengsizlikni isbotlang.

O6$_4$. $(m-n)^2 \cdot (n^2 - m) = 4m^2n$ tenglamani butun sonlarda yeching.

O6$_5$. O'tkir burchakli ABC uchburchakda CC_1 balandlik AB ni diametr qilib chizilgan aylanani M va N nuqtalarda, BB_1 balandlik AC ni diametr qilib chizilgan aylanani P va Q nuqtalarda kesadi. Hosil bo'lgan $MNPQ$ to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkinligini isbotlang.

O7$_1$. Ixtiyoriy n ta musbat $x_1, x_2, \ldots x_n$ sonlar uchun quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1^n+\left(n^n-1\right)x_1x_2\cdots x_n}}+\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_2^n+\left(n^n-1\right)x_1x_2\cdots x_n}}+\ldots+$$

$$+\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_n^n+\left(n^n-1\right)x_1x_2\cdots x_n}}\geq 1.$$

O7$_2$. Ixtiyoriy $n > 1$ natural son uchun n ning bo'luvchilari sonini $d(n)$ orqali belgilaylik. U holda $n=(d(n))^2$ shartni qanoatlantiradigan barcha n larni toping.

O7$_3$. Ushbu $x^{x+y}=y^{y-x}$ tenglamani natural sonlarda yeching.

O7$_4$. Agar x, y va z musbat sonlari uchun $x+y+z\geq 1$ bo'lsa, u holda $\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ ekanini isbotlang.

O7$_5$. Aytaylik ABC uchburchakda $AB > BC$ va BM mediana, BL bissektrisa bo'lsin. Agar M nuqtadan o'tuvchi va AB ga parallel to'g'ri chiziq BL ni D nuqtada, L nuqtadan o'tuvchi va BC ga parallel to'g'ri chiziq BM ni E nuqtada kessa, u holda $DE\perp BL$ ekanini isbotlang.

O8$_1$. Agar $0<x<\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geq 2\sqrt{2}$ ni isbotlang.

O8$_2$. Bo'luvchilari orasida ixtiyoriy raqam bilan tugaydigani (0 dan 9 gacha) albatta bor bo'lgan eng kichik natural sonni toping.

O8$_3$. Tinch turgan eskalatorda odam tepaga ko'tarilishdan ko'ra pastga tezroq tushadi. Bir odam yurib turgan eskalatorda pastga tushib yana qaytib chiqmoqchi. Savol: Bu ishni u pastga tomon yurib turgan eskalatorda tez bajaradimi yoki tepaga tomon yurib turganidami?

I z o h: Masalada tilga olingan tezliklar o'zgarmas va eskalatorning pastga hamda tepaga tezligi bir xil, qolaversa odamning tezligi hamma vaqt eskalator tezligidan katta.

O8$_4$. $989\cdot 1001\cdot 1007+320$ ifodani tub ko'paytuvchilarga ajrating.

O8$_5$. Ixtiyoriy uchburchakni shunday uch bo'lakka bo'lib, bu bo'laklardan to'g'ri burchakli uchburchak yasash mumkinligini isbotlang.

O9$_1$. Raqamlari yig'indisining kvadrati bilan kvadratining raqamlari yig'indisi teng bo'ladigan barcha ikki xonali sonlarni toping.

O9$_2$. Ushbu $(a-2)!+2b!=22c-1$ tenglikni qanoatlantiruvchi a, b, c tub sonlar uchligi topilsin.

O9$_3$. Agar $x \geq 0$, $y \geq 0$ va $x+y=2$ bo'lsa, u holda $x^2y^2(x^2+y^2) \leq 2$ tengsizlikni isbotlang.

O9$_4$. $x^4+7x^3+6x^2+5\sqrt{2003}\,x-2003=0$ tenglamaning barcha haqiqiy yechimlarini toping.

O9$_5$. Teng tomonli uchburchakning ichida olingan nuqtadan uchburchak uchlarigacha bo'lgan masofalar, mos ravishda 3, 4 va 5 birlikka teng. Uchburchak yuzini toping.

O10$_1$. Agar to'rtta tosh bilan pallali tarozida 1 kg dan 40 kg gacha o'lchash mumkin bo'lsa, u holda bu to'rt tosh og'irliklarini toping.

O10$_2$. Raqamlari har xil bo'lib, 99999 ga bo'linadigan o'n xonali sonlar nechta?

O10$_3$. $x^{10}+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1>0$ tengsizlikni isbotlang.

O10$_4$. Natural son n ning qanday qiymatlarida $\log_{2n-1}(n^2+2)$ ifoda ratsional son bo'ladi.

O10$_5$. Agar tomonlarining uzunliklari a, b va c bo'lgan uchburchakda $2c<a$ va $2c<b$ bo'lsa, u holda bu uchburchak balandliklaridan uchburchak qurib bo'lmasligini ko'rsating.

O11$_1$. $x^2+5y^2=z^2$ tenglamani natural sonlarda yeching.

O11$_2$. Agar biror p tub son uchun p^2+2543 ning bo'luvchilari soni 16 tadan kam bo'lsa, u holda p ni toping.

O11$_3$. Agar $[x]\cdot\{x\}=100$ bo'lsa, u holda $[x^2]-[x]^2$ ifoda qiymatini toping. Bu yerda $[x]$ belgi x ning butun, $\{x\}$ belgi kasr qismini bildiradi.

O11$_4$. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} y^2=(x+8)(x^2+2), \\ y^2-(8+4x)y+(16+16x-5x^2)=0. \end{cases}$$

O11$_5$. Aytaylik ABC uchburchakda $\angle A=70^\circ$ va bu uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi O nuqta bo'lsin. Agar $AC+AO=BC$ bo'lsa, u holda uchburchakning B burchagini toping.

O12$_1$. Biror M to'plamda 2005 ta element bor. Agar ixtiyoriy a, $b \in M$ uchun $a^2 + b\sqrt{2}$ – ratsional son bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a \in M$ uchun $a\sqrt{2}$ ham ratsional son bo'lishini isbotlang.

O12$_2$. Agar berilgan $\{a_n\}$ ketma-ketlikning hadlari, $m \geq n$ bo'lganda $a_{m+n} + a_{m-n} = (a_{2m} + a_{2n})$ shartni qanoatlantirsa va $a_1 = 1$ bo'lsa, u holda a_{2005} ni toping.

O12$_3$. Ushbu $f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y$ shartni qanoatlantiruvchi f(x) funksiyani toping.

O12$_4$. Agar $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ $(n \geq 2)$ bo'lsa, u holda

$a_n^2 \geq 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right)$ bo'lishini isbotlang.

O12$_5$. O'tkir burchakli ABC uchburchak berilgan. N nuqta AC tomonda va M nuqta AB tomonda shunday olinganki, $MN \parallel BC$. Shuningdek, CM va BN lar K nuqtada kesishadi. Agar A, B, K nuqtalardan o'tuvchi aylana BC ni P nuqtada, A, K, C nuqtalardan o'tuvchi aylana BC ni Q nuqtada kessa, u holda MP, AK, NQ to'g'ri chiziqlar bir nuqtada kesishishini isbotlang.

Olimpiadaga endi tayyorgarlik ko'rayotganlar, o'rganayotganlar uchun

1. Birliklar xonasidan 7 marta katta bo'lgan sonni toping.

2. To'rtta sonning yig'indisi 396. Agar birinchisiga 5 qo'shsak, ikkinchisidan 5 ni ayirsak, uchinchisini 5 ga ko'paytirsak va to'rtinchisini 5 ga bo'lsak, u holda bir xil son chiqadi. Bu sonlarni toping.

3. Uch xonali son berilgan. Uning orqasiga shu sonni yana yozib olti xonali son hosil qildik. Yangi son berilgan sondan necha marta katta?

4. Tomoni 6 sm bo'lgan kvadrat tomonlari o'rtalarini tutashtirib hosil qilingan kvadrat yuzini toping.

5. Tomoni 8 sm bo'lgan kvadrat tomonlari o'rtalarini tutashtirib kvadrat hosil qilindi. Yangi (ichki) kvadrat tomonlari o'rtalarini tutashtirib hosil qilingan kvadrat yuzini toping.

6. Sonlar qatoridagi qonuniyatni toping va navbatdagisini yozing:

a) 4; 5; 7; 10; 14; ... b) 6; 8; 12; 18; 26; ...

7. Ketma-ket kelgan to'rtta son ko'paytmasi 1680 ga teng. Shu sonlarni toping.

8. Besh xonali sonning chap tomoniga 6 raqamini yozib hosil qilingan son, o'ng tomoniga 6 raqami yozib hosil qilingan sondan 4 baravar katta bo'ladi. Shu besh xonali sonni toping.

9. Ikki xonali son berilgan. Uning orqasiga, shu sonni raqamlari o'rnini almashtirib yozdik. Yangi to'rt xonali son 11 ga qoldiqsiz bo'linishini ko'rsating.

10. Agar $2a + 1$ va $4a + 1$ sonlari tub bo'lsa, u holda a ni toping.

11. 100 va 90 sonlarini bitta songa bo'ldik. Birinchi gal 4, ikkinchi gal 18 qoldiqqa ega bo'ldik. Ular qaysi songa bo'lingan?

12. Ikkinchisi birinchisidan 2 marta, uchinchisi birinchisidan 3 marta katta, yig'indisi 222 bo'lgan uchta sonni toping.

13. 64 soni 8 ning kvadratiga va 4 ning kubiga teng. Yana bir shunaqa, biror sonning kvadrati va boshqasining kubi bo'lgan son toping.

14. Buyumning narxi 48 so'm va o'z narxining uchdan biri yig'indisiga teng. Buyumning narxi qancha?

15. Jadvalni shunday to'ldiringki, ixtiyoriy uchta ketma-ket son yig'indisi 15 ga teng bo'lsin:

	4							9		

16. Agar a, b, c musbat sonlar uchun $abc = 1$ bo'lsa, u holda $a + b + c \geq 3$ ekanini isbotlang.

17. Agar a, b, c musbat sonlar uchun $a + b + c = 1$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ ekanini isbotlang.

18. $90 \cdot N \cdot 18$ ko'paytma biror sonning kvadrati bo'ladigan eng kichik N ni toping.

19. $a^4 + b^4$ ifodani ko'paytuvchilarga ajrating.

20. Ixtiyoriy k son uchun $k^2 + 1 + \frac{1}{k^2+1} \geq 2$ ekanini isbotlang.

21. Qaysi biri katta:

a) 6^8 mi yoki 8^6 mi; b) 99^{20} mi yoki 9999^{10} mi.

22. 1, 2, 3, 4, 5 raqamlari yordamida 4 ga bo'linadigan nechta 5 xonali son tuzish mumkin?

23. Ixtiyoriy to'rtburchak tomonlari o'rtalarini tutashtirib hosil qilingan to'rtburchak parallelogramm ekanini isbotlang.

24. Qo'shni burchaklar bissektrisalari orasidagi burchak $90°$ ekanini isbotlang.

25. Radiusi 2 sm bo'lgan aylanada vatar $30°$ li burchak ostida ko'rinsa uning uzunligini toping.

26. Yer shariga belbog' qilib arqon tarang o'raldi. Arqonni kesib 1 metr ulansa, u ozgina bo'shab qoladi. Shu oraliqdan sichqon o'ta oladimi?

27. Bola muzqaymoq olmoqchi edi, puli 1 tiyin yetmadi. O'rtog'ida esa 12 tiyin yetmadi. Ikkisi qo'shib bitta muzqaymoq olishmoqchi bo'lsa ham pullari yetmadi. Muzqaymoq necha tiyin turadi?

28. Ikki son EKUKi 240 ga va EKUBi 8 ga teng. Agar kichigida kattasida qatnashmagan faqat bitta 5 ko'paytuvchi bor bo'lsa, u holda bu sonlarni toping.

29. Ixtiyoriy $a \neq 0$ uchun

$$1+\frac{1}{a^2} > \frac{2}{a} - \frac{11}{25a^2} + \frac{2}{5a}$$

tengsizlik o'rinli ekanini isbotlang.

30. Tomoni 12 sm bo'lgan muntazam uchburchakka aylana, aylanaga muntazam oltiburchak tashqi chizilgan. Oltiburchak tomonini diametr qilib chizilgan yarim doira yuzini toping.

31. Ixtiyoriy natural n soni uchun $\frac{10^n+2}{3} + \frac{10^{3n}+2^3}{3^2}$ ifoda yana natural son bo'lishini ko'rsating.

32. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = \sqrt{2004}$ tenglamada ildizlar belgisi cheksiz ko'p marta qatnashgan bo'lsa, x ni toping.

2- §. NOSTANDART MASALALAR HAQIDA

Dastlab, qanday masalalar nostandart deb atalishi haqida kelishib olaylik.

Har bir o'quv predmeti bo'yicha o'quv dasturi va unga mos standarti mavjud va ushbu standartga mos (doir) bo'lmagan misol va masalalar nostandart deyiladi. Demak, masalaning nostandart bo'lish yoki bo'lmasligi dasturga bog'liq.

Bugungi kunda xalq ta'limi vazirligi I—IX sinflar uchun matematika predmeti bo'yicha o'z dasturi va standartini, oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o'z dasturi va standartini yaratishgan. Ammo bu dasturlar va standartlar bir-biri bilan uzviy bog'langan emas.

Endi nostandart masalalarga o'tamiz. Bunda ayrim masalalar bir standart bo'yicha — standart, ikkinchisi bo'yicha — nostandart bo'lib qolish havfi bor.

1- masala. O'lchovi 4×4 bo'lgan kvadrat o'lchovlari 1×1 bo'lgan 16 ta kvadratchalarga bo'lingan va har bir kvadratchaga biror son yozilgan. Umumiy tomonga ega bo'lgan ikkita kvadratchalar qo'shni deb ataladi. Agar har bir kvadratchadagi son o'zining *qo'shni* kvadratchalariga yozilgan sonlar o'rta arifmetigiga teng bo'lsa, u holda kvadratchalarga yozilgan barcha 16 ta son bir-biriga teng ekanligini isbotlang.

Masalani yechishni nimadan boshlash kerak? Dastlabki qadam qanday bo'lishi kerak?

Maslahat. Agar masalada qandaydir yangi, Sizga noma'lum bo'lgan tushuncha kiritilgan bo'lsa, birinchi navbatda uni yaxshilab tushunib olish kerak. Bizda yangi tushuncha — qo'shni kataklar. Quyidagi chizmani chizib, kvadratchalarni nomerlab chiqamiz:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Shakldan, birinchi kvadratchaning qo'shnilari 2- va 5-kvadratchalar; ikkinchi kvadratchaning qo'shnilari 1-, 3- va 6-kvadratchalar; oltinchi kvadratchaning qo'shnilari 2-, 5-, 7- va 10- kvadratchalar ekanligi ko'rinadi. (Qo'shni katakcha ta'rifini yana bir o'qib chiqing). Aytaylik 1- katakchaga a_1 soni yozilgan bo'lsin. Endi yana bir marta masala shartini o'qib chiqamiz. U holda quyidagi tengliklar o'rinli bo'lishi ravshan:

$$a_1 = \frac{a_2 + a_5}{2}; \quad a_2 = \frac{a_1 + a_3 + a_6}{3}; \quad a_6 = \frac{a_2 + a_5 + a_7 + a_{10}}{4} \quad \text{va h. k.}$$

va bizda 16 ta noma'lum ishtirokidagi 16 ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi.

Bu tenglamalar sistemasi chiziqli tenglamalardan iborat va yuqori sinf o'quvchilari 1—2 soat urinib kerakli natijaga kelishlari mumkin. Ammo, masala shartida 10×10 o'lchovli kvadrat olinsa, yoki 1000×1000 o'lchovli kvadrat olinsa, u holda bu usul bilan masalani yechishga bir kun ham yetmaydi. Masalada berilgan kvadrat o'lchovi, o'z-o'zidan ravshan ahamiyatga ega emas, ya'ni masala xususan barcha o'lchovlar uchun o'rinli. Demak, biz boshqacha yo'l izlashimiz lozim. Dastlab sonlar o'rta arifmetigining xossalarini eslaylik.

Ikki a va b sonlarining o'rta arifmetigi, a va b ning kattasidan katta emas va kichigidan kichik emas, ya'ni $a \le b$ bo'lsa, u holda $a \le \frac{a+b}{2} \le b$ va bu yerda tenglik bajarilishi uchun $a = b$ bo'lishi shart.

Bu xossani ixtiyoriy a_1, $a_2, \ldots, a_n$ sonlar uchun quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \max(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Bu yerdagi $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ yozuvda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ larning eng kattasini tushunamiz (maximum — lotinchada „eng katta" degan ma'noni anglatadi) va $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ yozuvida a_1, $a_2, \ldots, a_n$ larning eng kichigini tushunamiz (minimum — lotinchada „eng kichik" degani.)

Masalan, $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 0$ bo'lsa, u holda $\max(a_1, a_2, a_3, a_4) = 4$, $\min(a_1, a_2, a_3, a_4) = -3$ ga teng.

Shunday qilib, agar, $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bo'lsa, u holda $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ bo'lishi kelib chiqadi.

Mana endi yechish usuli ko'rina boshladi. Katakchalardagi $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ sonlari uchun $\max(a_2, \ldots, a_{16}) = M$ bo'lsin. Tabiiyki, M soni berilgan $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ larning bittasiga teng, ya'ni katakchalardagi biror son M ga teng. U holda yuqoridagi mulohazadan ushbu katakchaning qo'shni katakchalaridagi sonlar ham M ga teng bo'lishi shart. Demak, ushbu katakchaga qo'shni katakchalardagi sonlar ham M ga teng va hokazo. Shunday qilib, barcha $a_2, \ldots, a_{16}$ sonlar bir-biriga teng.

Bu usul, berilgan kvadratning o'lchovi qanday bo'lishining ahamiyati yo'qligini ko'rsatadi.

2- masala. O'lchovi 4×4 bo'lgan kvadrat o'lchovlari 1×1 bo'lgan 16 ta kvadratchalarga bo'lingan va har bir kvadratchaga biror son yozilgan. Agar, har bir kvadratcha uchun, unga qo'shni bo'lgan kvadratchalardagi sonlar yig'indisi birga teng bo'lsa, u holda barcha kvadratchalardagi sonlarning yig'indisi qanchaga teng?

Qo'shni kvadratchalar qanday ekanligini 1- masalada tushunib oldik. 1- chizmadan ko'rinib turibdiki, burchaklardagi 1-, 4-, 13-, 16- katakchalar 2 tadan qo'shni katakchalarga ega; 2-, 3-, 5-, 8-, 9-, 12-, 14-, 15- katakchalar esa 3 tadan qo'shni katakchalarga ega va ichkaridagi 6-, 7-, 10-, 11- katakchalar esa 4 tadan qo‘shni katakchalarga ega. Agar i- chi katakchaga qo‘shni bo‘lgan katakchalardagi sonlarning yig‘indisini S_i deb belgilasak, u holda $S_1 = a_2 + a_5$; $S_4 = a_3 + a_8$; $S_{13} = a_9 + a_{14}$; $S_{16} = a_{16} + a_{15}$ va masala shartida berilishiga ko‘ra $S_1 + S_4 + S_{13} + S_{16} = 4$.

Endi $S_2 + S_3 + S_5 + S_8 + S_9 + S_{12} + S_{14} + S_{15}$ yig‘indini qarasak, birinchidan bu yig‘indi masala shartiga ko‘ra 8 ga teng, ikkinchidan esa bu yig‘indida barcha $a_1, a_2, ..., a_{16}$ lar qatnashib, a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{14}, a_{15} sonlari bir martadan, qolganlari esa 2 martadan qatnashadi.

Demak,

$$(S_1 + S_4 + S_{13} + S_{16}) + (S_2 + S_3 + S_5 + S_8 + S_9 + S_{12} + S_{14} + S_{15}) =$$
$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16})$$

tenglikni yozishimiz mumkin. Bu yerda tenglikning chap tomoni 12 ta teng. Demak, barcha sonlarning yig‘indisi 6 ga teng.

J a v o b: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} = 6$.

Ushbu ikki masalani birlashtiradigan tushuncha — qo‘shni kvadratchalar. Ular fizikada ishlatilgan masalalardan kelib chiqqan bo‘lib, qiziqarli tatbiqlarga ega.

Mustaqil yechish uchun quyidagi masalalarni e’tiboringizga havola qilamiz.

3-masala. Agar 1- masala shartida o‘rta arifmetik o‘rniga o‘rta geometrik (barcha sonlar musbat bo‘lgan holda) yoki o‘rta garmonik olinsa, masaladagi tasdiq saqlanadimi?

4-masala. Agar 2- masalada o‘lchovi 5×5 bo‘lgan kvadrat olinsa, u holda sonlar yig‘indisi qanchaga teng?

5-masala. Agar 2- masalada o‘lchovi $n\times n$ bo‘lgan kvadrat olinsa, u holda barcha n^2 ta sonlar yig‘indisini topish mumkinmi?

3- §. SONLARNING BUTUN VA KASR QISMLARI

Biror a sonni olib, $x \leq a$ tengsizlikni ko‘raylik. Tengsizlikning yechimi $(-\infty; a]$ bo‘lib, bu oraliqdagi eng katta butun sonni $[a]$ ko‘rinishda belgilaymiz va uni a sonning *butun qismi* deb olamiz.

Masalan,

$$[7] = 7;\ [\sqrt{2}] = 1;\ [0] = 0;\ [0{,}3] = 0;\ [-1] = -1;\ [-2{,}3] = -3$$

ekanini tekshirish qiyin emas. Demak, aniqlanishiga ko'ra $[a]$ albatta, butun son. Berilgan a sonning *kasr qismi* esa, $a-[a]$ ifodaga teng bo'lib, $\{a\}$ ko'rinishida belgilanadi.

Masalan,

$\{5,7\}=0,7$; $\{2\}=0$; $\{0\}=0$; $\{-0,2\}=0,8$; $\{-17/5\}=3/5$.

Ta'rifga ko'ra, $0\leq\{a\}<1$ tengsizlik o'rinli, $[x]$ esa butun son. Ushbu munosabatlarni tekshirib ko'ring:

1. $x=[x]+\{x\}$.

2. $[x]=n$ bo'lsa, $n\leq\{x\}<n+1$ tengsizlik bajariladi.

3. $[x+1]=[x]+1$, umuman, ixtiyoriy n butun son uchun $[x+n]=[x]+n$.

4. $\{x+1\}=\{x\}$, ixtiyoriy butun n uchun $\{x+n\}=\{x\}+n$.

5. $[\{x\}]=0$; $\{[x]\}=0$; $[[x]]=[x]$; $\{\{x\}\}=\{x\}$.

6. $\{x\}=\{y\}$ bo'lsa, $x-y$ ayirma butun son bo'ladi.

Kiritilgan $[x]$ va $\{x\}$ tushunchalar bilan yaqinroq tanishish uchun bir nechta misollar ko'ramiz.

1-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases}[x]=1,\\ [x^2]=2,\\ [x^3]=3,\\ [x^4]=4.\end{cases}$$

Yechish. Ta'rifdan foydalanib, sistemani ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{cases}1\leq x<2,\\ 2\leq x^2<3,\\ 3\leq x^3<4,\\ 4\leq x^4<5.\end{cases}$$

(1- tengsizlikka ko'ra 2- va 4- tengsizliklarning manfiy yechimlarini e'tiborga olmasak ham bo'ladi.) Demak,

$$1\leq x<2,\quad \sqrt{2}\leq x<\sqrt{3},\quad \sqrt[3]{3}\leq x<\sqrt[3]{4},\quad \sqrt[4]{4}\leq x<\sqrt[4]{5}$$

bo'lib, tengsizliklar sistemasining yechimi, bu qo'sh tengsizliklarning chap tomonlarida joylashgan 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$ sonlarning eng kattasi bo'lgan $\sqrt[3]{3}$ dan katta yoki teng va o'ng tomonida joylashgan 2, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$ sonlarning eng kichigi bo'lgan $\sqrt[4]{5}$ dan kichik bo'lishi shart.

Haqiqatan ham, $\sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$ bo'lib, tenglamalar sistemasining yechimi $[\sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{5})$ oraliqdan iborat.

2- misol. Ushbu $[x+[x]] = 2001$ tenglamani yeching.

Yechish. Yuqorida butun n son uchun $[x+n] = [x]+n$ munosabat keltirilgan edi. Demak, $[x+[x]] = [x]+[x] = 2\cdot[x]$ juft son bo'lib, 2001 ga teng bo'lishi mumkin emas. Tenglamaning yechimi yo'q.

3- misol. $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = 1$ tenglamani yeching.

Yechish. Hech bir butun son berilgan tenglamaning yechimi bo'la olmasligi ravshan. Shuningdek, biror a soni tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda $\frac{1}{a}$ ham albatta tenglamaning yechimi bo'lishiga e'tibor bering. Chunki x ning o'rniga $\frac{1}{x}$ yozsak, tenglamaning chap tomoni o'zgarmaydi.

Endi a son yechim bo'lgan holda, $-a$ ham tenglama yechimi bo'lishini isbotlaymiz.

Butun bo'lmagan har qanday x son uchun $\{x\}+\{-x\} = 1$ tenglik o'rinli, chunki, $0 < x < 1$ bo'lganda $\{x\} = x$, $\{-x\} = 1-x$ (masalan, $\{0,3\} = 0,3$, $\{-0,3\} = 0,7$). Qolgan hollarda $\{x-[x]\} = \{x\}$ tenglikdan foydalanish kifoya. Berilgan tenglamada x o'rniga $-x$ yozsak,

$$\{-x\} + \{-\frac{1}{x}\} = 1 - \{x\} + 1 - \{\frac{1}{x}\} = 2 - (\{x\} + \{\frac{1}{x}\}) = 2 - 1 = 1,$$

ya'ni, a yechim bo'lganda $-a$ ham yechim bo'lar ekan.

Shunday qilib, tenglamaning birdan katta yechimlari topilishi kifoya. Qolgan barcha yechimlar $-x$, $\frac{1}{x}$ va $-\frac{1}{x}$ ko'rinishda bo'ladi.

Endi $x>1$ deb, yechimni izlashga o'tamiz. U holda: $\{x\} + \frac{1}{x} = 1$ yoki $x - [x] + \frac{1}{x} = 1$ ni hosil qilamiz, chunki, $\{\frac{1}{x}\} = \frac{1}{x}$.

Bu yerda $[x] = n$ belgilash kiritsak, $x^2 - (n+1)x + 1 = 0$ kvadrat tenglamani yechish kerak bo'ladi. Oxirgi tenglamaning birdan katta yechimi:

$$x = \frac{1+n+\sqrt{(1+n)^2-4}}{2},\ n = 2, 3, 4, \dots \qquad (*)$$

Demak, $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = 1$ tenglamaning barcha yechimlari x, yoki $-x$, yoki $\frac{1}{x}$, yoki $-\frac{1}{x}$ ko'rinishda bo'lib, $n=1, 2, 3, 4,\dots$ qiymatlarda (*) dan topiladi. Nihoyat, $n \geq 2$ bo'lgani uchun $n^2 < (1+n)^2 - 4 < (1+n)^2$ tengsizlikdan $\sqrt{(1+n)^2-4}$ son butun va hatto, ratsional son ham bo'lmasligi kelib chiqadi. Demak, berilgan tenglamaning barcha yechimlari irratsional sonlar ekan. Masalan, $2 \pm \sqrt{3}$, $3 \pm 2\sqrt{2}$.

4-misol. $[x] + a\{x\} = b$ tenglama nechta yechimga ega?

Yechish. $a = 0$ holni tahlil qilishni o'quvchiga havola qilib, biz $a \neq 0$ holni o'rganamiz. Agar $[x] = n$ deb olsak, u holda $\{x\} = \frac{b-n}{a}$ va $0 \leq \{x\} < 1$ ekanligidan $0 \leq \frac{b-n}{a} < 1$ tengsizlikni hosil qilamiz. Endi, $a > 0$ yoki $a < 0$ bo'lishiga qarab, n ni aniqlash uchun $b - a < n \leq b$ yoki $b \leq n < b - a$ qo'sh tengsizliklarni yechish kerak. Ikkala holda ham, butun son n, uzunligi $|a|$ ga teng har qanday oraliqda yoki $[|a|]$ ta, yoki $[|a|] + 1$ ta yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

5-misol. Ketma-ketlik quyidagicha tuzilgan: birinchi toq son yoziladi, so'ngra undan keyingi kelgan ikki juft son yoziladi, so'ngra ulardan keyingi kelgan uchta toq son yoziladi, so'ngra ulardan bevosita keyin keluvchi to'rtta juft son yoziladi va hokazo. Bu ketma-ketlikning dastlabki hadlari 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 28,... lardan iborat. Shu ketma-ketlikning n-hadini toping.

Yechish. Izlanayotgan ketma-ketlikning n-hadi a_n bo'lsin. Yangi $b_n = 2n - a_n$ ketma-ketlik tuzib, uning bir nechta hadini hisoblab ko'raylik:

2_n: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24...
a_n: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19...
b_n: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5...

b_n ketma-ketlikning tuzilishidagi qonuniyat a_n ketma-ketliknikidan soddaroq ekanligiga e'tibor berdingizmi? Haqiqatan, b_n ketma-ketlikda bitta 1, ikkita 2, uchta 3, to'rtta 4 va hokazo sonlar ketma-ket yozilgan. Demak, b_n uchun formula topa olsak, $a_n = 2n - b_n$ tenglikdan a_n uchun ham formula kelib chiqadi.

Avval teskari masalani xususiy holda yechaylik: qanday n lar uchun b_n had 8 ga teng bo'ladi?

Ravshanki, 1 dan 7 gacha bo'lgan sonlar ketma-ketlikda egallagan joylar soni $1+2+...+7$ ga, ya'ni 28 ga teng, xuddi shunday 1 dan 8 gacha bo'lgan sonlar egallagan joylar soni $1+2+...+8=36$. Demak, $b_n=8$ bo'lsa, $29 \le n \le 36$ kelib chiqadi, ya'ni 28- o'rinda 7 lar tugaydi, 29- o'rindan 8 lar boshlanib, ular 36- o'rinda tugaydi. Arifmetik progressiya bilan tanish o'quvchilar yuqoridagi mulohazani osonlikcha umumiy holga o'tkaza oladilar. Ya'ni, agar $b_n=k$ bo'lsa, n nomer uchun $1+2+...+(k-1) \le n \le 1+2+...+k$ qo'sh tengsizlik bajariladi. Qo'sh tengsizlikning chap tomonini $\frac{k(k-1)}{2}+1 \le n$ ko'rinishda yozib olamiz.

Endi n tayinlangan son deb hisoblab, unga mos keluvchi k ni izlaymiz. Albatta, k oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng katta butun son bo'lishi kerak. Demak, k son $\frac{k(k-1)}{2}+1 \le n$ tengsizlikning eng katta butun yechimi bo'ladi. Hosil bo'lgan kvadrat tengsizlikni soddalashtirib, $k^2-k+2-2n \le 0$ ko'rinishga keltirib uning yechimi $\left[\frac{1-\sqrt{8n-7}}{2}; \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$ oraliqdan iborat ekanligini va bu oraliqdagi eng katta butun son $\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$ bo'lishini aniqlaymiz. Shunday qilib, $b_n=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$ va $a_n=2n-\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$ ekan.

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

I. Tenglamalarni yeching:

1) $2[x]=[3x]$;	4) $[x]\cdot\{x\}=3$;
2) $[x]+2001\cdot\{3x\}=0$;	5) $x-[\sqrt{x}]^2=4$;
3) $6\cdot[x]=47\cdot\{x\}$;	6) $3\cdot[x-7]=5\cdot\{3-x\}$.

II. Tengsizliklarni yeching:

1) $[x]\le\{x\}$;	3) $[x^2]\le[x]^2$;
2) $[x]<3\{x\}<\frac{1}{3}$;	4) $0,2<\{x\}<0,63\le[x]<5$.

III. Quyidagi formulalarni isbotlang:

1) $\{x+y\} = \{\{x\}+\{y\}\} = \{x\}+\{y\} - [\{x\}+\{y\}]$;

2) $[x+y] = [x]+[y]+[\{x\}+\{y\}]$.

IV. Ushbu ketma-ketliklarning umumiy hadini toping:

1) 1; 2; 3; 3; 4; 5; 6; 6; 7; 8; 9; 9; 10; 11; 12; 12; ...

2) 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; ... bu yerda 3 ta 1, so'ng 5 ta 2, 7 ta 3, 9 ta 4, 11 ta 5 va hokazo sonlar yozilgan.

3) 2; 3; 5; 6; 8; 10; 11; 13; 15; 17; 18; 20; 22; 24; 26; 27; 29; ...

4- §. QONUNIYAT TOPISHNI O'RGANING

Biror sonli ifoda berilgan bo'lib, uni hisoblaganda chiqadigan natija sonning oxirgi raqamini toping yoki haddan tashqari ko'p xonali, katta sonni boshqa bir songa bo'lgandagi qoldiqni toping kabi masalalar uchrab turadi. Bunday masalalar, odatda, turli matematik musobaqalarda, olimpiadalarda, o'quvchidan topqirlik, ijodkorlik talab qiladigan tadbirlarda ishlatiladi.

Masala. 2^{2006} ning oxirgi raqamini toping.

Bu masalani yechishda qanday yo'l tutishni bilamiz: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, . . . ketma-ketlikdan, 2 darajasining oxirgi raqami 4 qadamdan so'ng takrorlanishi va oxirgi raqam 2, 4, 8, 6 dan biri bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Demak, 2006 ni 4 ga bo'lgandagi qoldiq 2 ga ko'ra javob 4 bo'ladi.

Barcha matematika o'qituvchilari, 2 o'rnida boshqa son turganda ham masalani shu usulda yechish kerakligini bilishadi va iqtidorli o'quvchilariga o'rgatib borishadi.

Endi yuqoridagi masalani biroz o'zgartiramiz.

1- masala. 2^{2006} ning oxirgi ikki raqamini toping.

Bu masalani yechish uchun yuqoridagi ketma-ketlikni davom ettiramiz:

$2^1 = 02$, $2^2 = 04$, $2^3 = 08$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096$, $2^{13} = 8192$.

Ko'paytirish tobora qiyinlashib, zerikarli bo'lib bormoqda. Bizga, qidirilayotgan sonning faqat oxirgi ikki raqami zarur bo'lgani uchun, keyingi ko'paytirishlarni natija oxiridagi ikki xonali son uchun bajarish va oxirgi ikki xonasini qoldirish yetarli:

$$2^{14} = ...84,\ 2^{15} = ...68,\ 2^{16} = ...36,\ 2^{17} = ...72,\ 2^{18} = ...44,$$
$$2^{19} = ...88,\ 2^{20} = ...76,\ 2^{21} = ...52,\ 2^{22} = ...04,\ ...$$

So'nggi natija, takrorlanish 20 qadamdan keyin ro'y berishini ko'rsatadi. Bularni quyidagi ko'rinishda jadvalga joylaymiz.

1- jadval (2 ning darajalari uchun oxirgi ikki raqam)

1	52	**5**	32	**9**	12	**13**	92	**17**	72
2	04	**6**	64	**10**	24	**14**	84	**18**	44
3	08	**7**	28	**11**	48	**15**	68	**19**	88
4	16	**8**	56	**12**	96	**16**	36	**20**	76

Shunday qilib, 2^{2006} ning oxirgi ikki raqamini topish uchun 2006 ni 20 ga bo'lib 6 qoldiqni aniqlaymiz va 1- jadvaldan 6 ga mos kelgan son 64 ni topamiz. J a v o b : 64.

Jadval tuzilayotganda, agar 1- daraja va 21-darajaga mos oxirgi ikki raqam bir xil bo'lmasa, u holda 1 qoldiq katagiga 21- darajaga mos kelgan son yoziladi.

Demak, *2^n ning oxirgi ikki raqamini topish uchun, n ni 20 ga qoldiqli bo'lib ($n = 20q + r$), r qoldiq aniqlanadi va 1- jadvaldan r ga mos kelgan son topiladi.*

Misol. $2^{39 \cdot 41}$ ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. $39 \cdot 41$ ni 20 ga qoldiqli bo'lamiz. Qoldiq 19. 1- jadvaldan 19 ga mos kelgan son 88 ni topamiz. J a v o b : 88.

Yuqoridagi jadvalni hosil qilish uchun 2 ning 22-darajasigacha hisob olib bordik. Umuman olganda bu jarayon cheksiz davom etishi mumkin-ku, degan savol tug'iladi. Shuning uchun jadvalni to'ldirishdan oldin unda qancha element bor bo'lishi kerakligini bilish muhim.

Ma'lumki, 2 darajasining oxirgi raqami 2, 4, 8, 6 lardan biri bo'lib, 4 qadamdan so'ng takrorlanadi. Ulardan biri, masalan, 4 bo'lgan hol bilan quyidagi ishlarni amalga oshiramiz.

1. **04** $\cdot$ 16 = **64.** Ya'ni, $2^2 = 04$ ni, 4 raqam yana to'rt qadamdan keyin takrorlangani uchun $2^4 = 16$ ga ko'paytirdik.

2. 64 $\cdot$ 16 = 10**24**. Oldingi natijani yana 16 ga ko'paytirdik.

Bizga faqat oxirgi ikki raqami zarur bo'lgani uchun keyingi ko'paytirishlarni avvalgi natija oxiridagi ikki xonali son bilan bajarish yetarli:

3. 24 $\cdot$ 16 = 3**84**. 4. 84 $\cdot$ 16 = 13**44**. 5. 44 $\cdot$ 16 = 7**04**.

Shu yerda bu jarayonni to'xtatamiz, chunki 04 soni 5 qadamdan so'ng takrorlandi.

Demak. 2 darajasi bo'lgan sonning oxirgi raqami 4 xil ekanligidan va ularning har biri 5 qadamdan so'ng takrorlangani uchun 2 ning darajalari ichida, oxirgi ikki raqam $4 \cdot 5 = 20$ qadamdan so'ng takrorlandi. Shu sababli, 1-jadvalda 20 ta element bor.

Aytilganlarni quyidagicha tasvirlash mumkin:

$2^2 = 04$, $2^2 \cdot 2^4 = 2^6 = 64$, $2^6 \cdot 2^4 = 2^{10} = ...24$,
$2^{10} \cdot 2^4 = 2^{14} = ...84$, $2^{14} \cdot 2^4 = 2^{18} = ...44$, $2^{18} \cdot 2^4 = 2^{22} = ...04$.

2-masala. 3^{2006} ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. Ravshanki, 3 ning darajalarida oxirgi raqam 3, 9, 7, 1 lardan biri bo'ladi. Xuddi 1- masaladagi kabi mulohaza yuritib, ya'ni oxirgi ikki raqamdan tuzilgan ikki xonali sonni $3^4 = 81$ (4 qadamdan keyin takrorlanishni ta'minlaydigan son)ga ko'paytirib, bunga o'xshash masalalarni yechish uchun kerakli bo'lgan 2-jadvalni tuzamiz.

2- jadval (3 ning darajalari uchun oxirgi ikki raqam)

1	03	**5**	43	**9**	83	**13**	23	**17**	63
2	09	**6**	29	**10**	49	**14**	69	**18**	89
3	27	**7**	87	**11**	47	**15**	07	**19**	67
4	81	**8**	61	**12**	41	**16**	21	**20**	01

Endi 2006 ni 20 ga qoldiqli bo'lib, 6 qoldiqni aniqlaymiz va 2-jadvaldan 6 ga mos kelgan son 29 ni topamiz. Javob: 29.

Jadvaldan foydalanib quyidagilar oson topiladi:

$3^{2000} \Rightarrow 3^{20} \Rightarrow 01$, $3^{1999} \Rightarrow 3^{19} \Rightarrow 67$, $3^{3333} \Rightarrow 3^{13} \Rightarrow 23$.

3- masala. 4^{2006} ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. Bu sonning oxirgi raqami 4 yoki 6 bo'lganligi sababli, uning oxirgi ikki raqamini topish uchun kerak bo'ladigan jadval 10 ta elementdan tashkil topadi.

3- jadval (4 ning darajalari uchun oxirgi ikki raqam)

1	04	**3**	64	**5**	24	**7**	84	**9**	44
2	16	**4**	56	**6**	96	**8**	36	**10**	76

Demak, 2006 ni 10 ga qoldiqli bo'lib 6 qoldiqni aniqlaymiz va 3- jadvaldan 6 ga mos kelgan son 96 ni topamiz. Javob: 96.

Jadvaldan foydalanib quyidagilar oson topiladi:

$4^{2000} \Rightarrow 4^{10} \Rightarrow 76$, $4^{1999} \Rightarrow 4^9 \Rightarrow 44$, $4^{3333} \Rightarrow 4^3 \Rightarrow 64$.

4- masala. 5^{2005} ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. Bu masalaning javobi 25. Buni topish ixtiyoriy o'quvchining qo'lidan keladi, chunki $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$ ni hisoblab ko'rish hech bir qiyinchilik tug'dirmaydi.

Xohlovchilar bu masalani biroz o'zgartirib: 5^{2005} ning oxirgi uch raqamini toping, ko'rinishdagi masalani yechishga urinib ko'rishlari mumkin.

5-masala. 6^{2005} ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. Ravshanki, 6 ning har qanday darajasi 6 bilan tugaydi. Shu sababli, uning oxiridagi ikki xonali sonni tekshirish yetarli.

$$6^1 = 06,\ 6^2 = 36,\ 6^3 = 216,\ 6^4 = \ldots 96,\ 6^5 = \ldots 76,\ 6^6 = \ldots 56,$$
$$6^7 = \ldots 36.$$

Takrorlanish 5 qadamdan so'ng ro'y beryapti. Demak, javob: 76.

Masala xulosasini quyidagi jadvalga joylab qo'yamiz.

4- jadval (6 ning darajalari uchun oxirgi ikki raqam)

1	56	**2**	36	**3**	16	**4**	96	**5**	76

Bu masala ham oson yechilgani uchun uni biroz o'zgartirib: 6^{2005} ning oxirgi uch raqamini toping, ko'rinishdagi masalaga keltirib, yechishga urinib ko'rishni tavsiya qilamiz.

Jadvaldan foydalanib quyidagilar oson topiladi:

$6^{2000} \Rightarrow 6^5 \Rightarrow 76$, $\quad 6^{1999} \Rightarrow 6^4 \Rightarrow 96$, $6^{3333} \Rightarrow 6^3 \Rightarrow 16$.

6- masala. 7^{2005} ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. Ishni, avvalgi masalalardagi kabi 7 ning darajalari qanday raqam bilan tugashini aniqlashdan boshlaymiz.

$7^1=07$, $7^2=49$, $\quad 7^3=343$, $\quad 7^4=\ldots 01$, $\quad 7^5=\ldots 07$, $76=\ldots 49$.

7 raqami 5- qadamda takrorlanyapti. Bu ketma-ketlikda, oxirgi ikki raqam ham shu 4 qadam davrda takrorlanayotganini ko'rish qiyin emas. Demak, javob: 2005 ni 4 ga bo'lgandagi qoldiq 1 ga mos keladigan son 07.

5- jadval (7 ning darajalari uchun oxirgi ikki raqam)

1	07	2	49	3	43	4	01

Masalaning oson yechilishi uni murakkablashtirishga asos beradi: 7^{2005} ning oxirgi uch raqamini toping.

Jadvaldan foydalanib quyidagilar oson topiladi:

$7^{2000} \Rightarrow 7^4 \Rightarrow 01$, $\quad 7^{1999} \Rightarrow 7^3 \Rightarrow 43$, $7^{3333} \Rightarrow 7^1 \Rightarrow 07$.

7- masala. 82006 ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. Hech bir qiyinchiliksiz, 8 ning darajalari bo'lgan sonda oxirgi raqam 8, 4, 2, 6 lardan biri bo'lishini aniqlaymiz. Endi, 1- masaladagi kabi mulohaza yuritib, ya'ni 08 sonini, 84 ning oxirgi ikki raqami bo'lgan 96 ga ko'paytirib, oxirgi ikki raqam

$4 \cdot 5 = 20$ qadamdan so'ng takrorlanishi topiladi. Olingan ma'lumotlar asosida 6- jadvalni tuzamiz.

6- jadval (8 ning darajalari uchun oxirgi ikki raqam)

1	08	**5**	68	**9**	28	**13**	88	**17**	48
2	64	**6**	44	**10**	24	**14**	04	**18**	84
3	12	**7**	52	**11**	92	**15**	32	**19**	72
4	96	**8**	16	**12**	36	**16**	56	**20**	76

Yana bir bor 2006 ni 20 ga bo'lib 6 qoldiqni aniqlaymiz. 6-jadvalda 6 ga mos kelgan son 44 bo'ladi. J a v o b : 44.

Jadvaldan foydalanib quyidagilar oson topiladi:

$8^{2000} \Rightarrow 8^{20} \Rightarrow 76$, $8^{1999} \Rightarrow 8^{19} \Rightarrow 72$, $8^{3333} \Rightarrow 8^{13} \Rightarrow 88$.

8- masala. 9^{2007} ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. Ko'paytirish bajarib, 9 ning darajalari 9 yoki 1 bilan tugashini topamiz. Shu sababli, uning oxiridagi ikki xonali 09 yoki 01 sondan birini 9^2 ga ko'paytirib tekshirish yetarli:

$9^1 = 09$, $9^3 = 729$, $6^5 = \ldots 49$, $6^7 = \ldots 69$, $6^9 = \ldots 89$, $6^{11} = \ldots 09$.

Takrorlanish 5 qadamdan so'ng ro'y beryapti. Demak, davr $2 \cdot 5 = 10$ ga teng. 2007 ni 10 ga bo'lsak, qoldiq 7 va javob: 69.

Bunday masalalarni yechishga yordam beradigan jadval tuzib qo'yish foydadan holi emas.

7- jadval (9 ning darajalari uchun oxirgi ikki raqam)

1	09	**3**	29	**5**	49	**7**	69	**9**	89
2	81	**4**	61	**6**	41	**8**	21	**10**	01

Jadvaldan foydalanib quyidagilar oson topiladi:

$9^{2000} \Rightarrow 9^{10} \Rightarrow 01$, $9^{1999} \Rightarrow 9^9 \Rightarrow 89$, $9^{3333} \Rightarrow 9^3 \Rightarrow 29$.

Misollar yechish namunalari

1. $9^{19 \cdot 993}$ ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. 19·993 ni 10 ga bo'lsak, qoldiq 7. 7- jadvalga ko'ra, j a v o b : 69.

2. $9^{7^{1999}}$ ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. Yuqoridagi, 7- jadvalga ko'ra 7^{1999} ning oxirgi raqamini topish yetarli. Uni esa 5- jadvaldan topamiz: 1999 ni 4 ga bo'lsak, qoldiq 3. Demak, 7- jadvalga ko'ra, javob: 29.

3. $6^{4^{2000}}$ ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. 4- jadvalga ko'ra berilgan sonning oxirgi ikki raqami, 4^{2000} ni 5 ga bo'lgandagi qoldiq orqali topiladi. Bu qoldiq, $4^{2\cdot 1000}=$ $=16^{1000}=(15+1)^{1000}$ munosabatga asosan 1 ga teng. Demak, javob: 56.

4. 2^{7^7} ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. 7^7 ni 20 ga qoldiqli bo'lish kerak. Buning uchun 5-jadvaldan foydalanamiz, chunki bizga kerakli qoldiq 7^7 ning oxirgi ikki raqamiga bog'liq (negaligini mulohaza qilib ko'ring). Bu son 43. Uni 20 ga bo'lsak, qoldiq 3. Endi 1- jadvaldan javob aniqlanadi: 08.

5. $8^{6^{67}}$ ning oxirgi ikki raqamini toping.

Yechish. $8^{6^{67}}$ (4 – jadval) $\Rightarrow 8^{36}$ (6- jadval) $\Rightarrow 8^{16}$ $\Rightarrow 56.$

Mustaqil ishlash uchun mashqlar

Quyidagi sonlarning oxirgi ikki raqamini toping:

1. $2^{19^{99}}$, $2^{39\cdot 41}$, $2^{41^{41}}$, $2^{3294\cdot 4415}$.

2. $3^{19^{99}}$, $3^{39\cdot 41}$, $3^{41^{41}}$, $3^{3294\cdot 4415}$.

3. $4^{5^{1999}}$, $4^{39\cdot 41}$, $4^{4^{2005}}$, $4^{412!}$.

4. $6^{19^{99}}$, $6^{39\cdot 41}$, $6^{4^{2055}}$, $6^{3294\cdot 4415}$.

5. $7^{19^{99}}$, $7^{39\cdot 41}$, $7^{41^{41}}$. $7^{412!}$.

6. $8^{99^{199}}$, $8^{39\cdot 41}$, $8^{44433324}$, $8^{77^{77}}$, $8^{3294\cdot 4415}$, $8^{412!}$.

7. $9^{19^{99}}$, $9^{39\cdot 41}$, $9^{44433324}$, $9^{41^{41}}$, $9^{3294\cdot 4415}$, $9^{412!}$.

5- §. SONNING BO'LUVCHILARI SONI

Quyidagi masalani ko'raylik.

1-masala. 360 ning bo'luvchilari soni nechta?

Bu va bunga o'xshash masalalar oliy o'quv yurtiga kiruvchilar uchun chiqarilgan „Axborotnoma"da bor. Masala aytilishi va g'oyasi jihatdan maktab dasturiga mos keladi, chunki unda bor yo'g'i 360 ning bo'luvchilarini sanab chiqish talab qilinyapti. Ammo, test usulida berilgan bu masalani yechish, agar biror formulani bilmasa juda ko'p vaqtni oladi. Bunday masalalarning yechimini tezroq topish formulasi esa faqat oliy matematika kursida o'tiladi.

To'g'ri, bunday masalani tuzgan muallif maktab o'quvchisidan kengroq fikrlashni, kerakli formulani o'zi chiqarib olishini istagan bo'lishi mumkin. Lekin bu hammaning qo'lidan kelavermaydi.

Shu sababli biz, shu kabi masalalarni yechish formulasini va ular qanday kelib chiqqanini, mavjud adabiyotlardan foydalangan holda bayon qilib bermoqchimiz.

Yechish. Berilgan 360 sonini tub ko'paytuvchilarga ajratamiz: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Endi, 360 ning bo'luvchilari, $a = 2^m \cdot 3^n \cdot 5^k$ ko'rinishda bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bu yerda m soni 4 ta 0, 1, 2, 3; n soni 3 ta 0, 1, 2; k soni esa 2 ta 0, 1 qiymatlar qabul qilishi mumkin. U holda a ning mumkin bo'lgan qiymatlari soni $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ta (barcha kombinatsiyalar soni) bo'ladi. Demak, 360 ning 24 ta bo'luvchisi bor ekan.

Biror N natural sonining bo'luvchilari sonini, odatda $\tau(N)$ orqali belgilashadi. Bu yerda τ – grekcha harf bo'lib „tau" deb o'qiladi.

Misollar:

1. $\tau(4) = 3$, chunki 4 ning bo'luvchilari 3 ta: 1, 2, 4.

2. $\tau(6) = 4$, chunki 6 ning bo'luvchilari 4 ta: 1, 2, 3, 6.

3. $\tau(12) = 6$, chunki 12 ning bo'luvchilari 6 ta: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

4. $\tau(360) = 24$, chunki 360 sonining bo'luvchilari soni 24 ta, buni yuqorida yechib ko'rsatdik.

Endi umumiy holni ko'rib chiqamiz.

Aytaylik bizga biror N natural soni berilgan bo'lsin. Uni, arifmetikaning asosiy teoremasidan foydalanib yagona tarzda tub ko'paytuvchilarga yoyamiz:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}. \qquad (1)$$

Bu yerdagi $p_1, p_2, \ldots p_k$ lar bir-biridan farqli tub sonlar, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ lar esa natural sonlar.

Misollar. 1. $24 = 2^3 \cdot 3$.

2. $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.

3. $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

4. $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$.

5. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

6. $2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$.

T e o r e m a . *Agar natural son N ning (1) ko'rinishdagi yoyilmasi berilgan bo'lsa, u holda N ning bo'luvchilari soni quyidagi formula bilan hisoblanadi:*

$$\tau(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1). \qquad (2)$$

Ya'ni, bu formula yordamida ixtiyoriy N sonning bo'luvchilari sonini osongina topish mumkin ekan.

Misollar. 1. $\tau(24)=\tau(2^3\cdot3^1)=(3+1)(1+1)=4\cdot2=8.$

2. $\tau(240)=\tau(2^4\cdot3^1\cdot5^1)=(4+1)(1+1)(1+1)=5\cdot2\cdot2=20.$

3. $\tau(360)=(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot3\cdot2=24.$

4. $\tau(450)=\tau(2^1\cdot3^2\cdot5^2)=(1+1)(2+1)(2+1)=2\cdot3\cdot3=18.$

5. $\tau(600)=\tau(2^3\cdot3^1\cdot5^2)=(3+1)(1+1)(2+1)=4\cdot2\cdot3=24.$

6. $\tau(1001)=\tau(7^1\cdot11^1\cdot13^1)=(1+1)(1+1)(1+1)=2\cdot2\cdot2=8.$

7. $\tau(2205)=\tau(3^2\cdot5^1\cdot7^2)=(2+1)(1+1)(2+1)=3\cdot2\cdot3=18.$

Bu misollardan ko'rinadiki, N sonning bo'luvchilari soni uning tub ko'paytuvchilariga emas, balki N ning yoyilmasida ishtirok etgan tub ko'paytuvchilar darajasiga bog'liq ekan.

T e o r e m a n i n g   i s b o t i . Aytaylik N soni (1) yoyilmaga ega bo'lsin. U holda N ning ixtiyoriy a bo'luvchisi

$$a=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k} \qquad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerdagi β_1, β_2, … β_k natural sonlar bo'lib β_1 soni 0, 1, 2, … , α_1 qiymatlarni, ya'ni ja'mi α_1+1 ta qiymatni qabul qila oladi. Xuddi shuningdek, β_2 soni 0, 1, 2, … , a_2 qiymatlarni, ya'ni ja'mi α_2+1 ta qiymatni qabul qila oladi va hokazo. β_k soni 0, 1, 2, … , α_k qiymatlarni, ya'ni ja'mi a_k+1 ta qiymatni qabul qila oladi. Endi β_i ning bu qiymatlaridan bittadan olib (3) ga qo'yib, N ning barcha bo'luvchilarini topamiz. Bizni esa ularning nechtaligi qiziqtiradi. Bu son, mumkin bo'lgan qiymatlar miqdorlari ko'paytmasiga teng. Demak,

$$\tau(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

Teorema isbot bo'ldi.

Teoremadan qanday foydalanish yuqoridagi misollarda ko'rsatildi.

Kiritilgan tushunchadan foydalanib, ba'zi qiziqarli masalalarni ko'rib chiqamiz.

2- masala. Bir podsholikning qamoqxonasida 1 dan 100 gacha sonlar bilan nomerlangan xonalar bo‘lib, har birining eshigidagi kalitni o‘ng tomonga bir marta buraganda, eshik, qulf bo‘lsa ochilar, ochiq bo‘lsa qulflanar ekan. Podsho o‘z tug‘ilgan kuniga 100 kun qolganda qamoqxonadagi maxbuslardan bir qismini ozod qilmoqchi bo‘lib FARMONI OLIY chiqaribdi.

F A R M O N

Bugundan boshlab, har kuni qamoqxonadagi eshiklar kaliti quyidagi shartlar asosida bir marta buralsin:

1- kuni barcha eshiklar kaliti;

2- kuni 2- eshik va 2 ga karrali nomerli barcha eshiklar kaliti;

3- kuni 3- eshik va 3 ga karrali nomerli barcha eshiklar kaliti;

4- kuni 4- eshik va 4 ga karrali nomerli barcha eshiklar kaliti va hokazo 100- kuni 100- eshik kaliti. Oxirgi buralishdan so‘ng qaysi xona eshigi ochiq bo‘lsa, shu xonadagi maxbuslar ozod qilinsin.

S a v o l: Dastlabki holatda barcha eshiklar yopiq bo‘lgan bo‘lsa, u holda podsho farmoniga ko‘ra nechta va qaysi xonalardagi maxbuslar ozod bo‘lgan?

Yechish. Darrov javobni o‘qimasdan o‘zingiz yechishga urinib ko‘ring.

Ko‘rinib turibdiki, eshik nomeri bo‘lgan sonning bo‘luvchilari qancha bo‘lsa, eshik kaliti shuncha marta buraladi. Eshik esa kalit toq marta buralganda ochiladi. Bundan nomerining bo‘luvchilari soni toq bo‘lgan eshik ochiq bo‘lishi kelib chiqadi.

Qanday sonning bo‘luvchilari soni toq bo‘ladi?

Aytaylik N soni (1) yoyilmaga ega va uning bo‘luvchilari soni toq bo‘lsin. Yuqoridagi (2) formulaga ko‘ra har bir $\alpha_i + 1$ ko‘paytuvchi toq son bo‘lishi kerak, chunki ko‘paytma toq chiqishi uchun har bir ko‘paytuvchi toq bo‘lishi zarur va yetarli. Shuning uchun,

$$\alpha_i + 1 = 2m_i + 1.$$

Ya’ni $\alpha_i = 2m_i$. Bularni (1) ga olib borib qo‘yamiz:

$$N = p_1^{2m_1} p_2^{2m_2} \dots p_k^{2m_k} = \left(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}\right)^2 = M^2.$$

Demak, sonning bo‘luvchilari soni toq bo‘lishi uchun u boshqa bir sonning kvadratidan iborat bo‘lishi kerak ekan.

Shunday qilib, masalamizning javobi: 10 ta eshik ochiq bo'ladi. Ular 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100-nomerli xonalardan iborat.

3- masala. Agar N soni 12 ga bo'linsa va uning bo'luvchilari soni 14 ta bo'lsa, u holda N ni toping.

Yechish. Aytaylik $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ bo'lsin. Masala shartiga ko'ra $p_1 = 2$, $\alpha_1 \geq 2$ va $r_2 = 3$, $\alpha_2 \geq 1$, chunki N soni $12 = 2^2 \cdot 3$ ga bo'linadi. Shuningdek, (2) ga ko'ra

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1) = 14 = 2 \cdot 7 = 7 \cdot 2. \qquad (4)$$

Bulardan $k = 2$, $\alpha_1 + 1 = 7$ va $\alpha_2 + 1 = 2$ ekani kelib chiqadi. Shunday qilib, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 1$ va demak, $N = 2^6 \cdot 3 = 192$.

Yuqoridagi (4) munosabatdan kelib chiqadigan $\alpha_1 + 1 = 2$ va $\alpha_2 + 1 = 7$ bo'lgan hol masala yechimiga to'g'ri kelmaydi. Chunki bu holda $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 6$ bo'lib, $N = 2 \cdot 3^6$ soni 12 ga bo'linmaydi.

Javob: 192.

4- masala. Bo'luvchilari sonidan 4 marta ko'p bo'lgan sonni toping. Ya'ni, agar $N = 4\tau(N)$ bo'lsa, N ni toping.

Yechish. Aytaylik $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ yoyilmaga ega bo'lsin. Masala shartiga ko'ra

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} = 4(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha k + 1)$$

yoki

$$\frac{p_1^{\alpha_1}}{\alpha_1 + 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2}}{\alpha_2 + 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k}}{\alpha_k + 1} = 4 \qquad (5)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu yerdagi p_1, p_2, ... p_k lar 2, 3, 5, 7, ... tub sonlardan biri bo'lishi mumkin. Shuning uchun (5) dagi har bir ko'paytuvchini baholab ko'ramiz:

$p = 2$ uchun

$$\frac{2^1}{1+1} = 1 < \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} < \frac{2^3}{3+1} = 2 < \frac{2^4}{4+1} = \frac{16}{5} < 4 < \frac{2^5}{5+1},$$

$p = 3$ uchun

$$1 < \frac{3^1}{1+1} = \frac{3}{2} < \frac{3^2}{2+1} = 3 < 4 < \frac{3^3}{3+1},$$

$p = 5$ uchun

$$2 < \frac{5^1}{1+1} = \frac{5}{2} < 4 < \frac{5^2}{2+1},$$

$p = 7$ uchun

$$3 < \frac{7^1}{1+1} = \frac{7}{2} < 4 < \frac{7^2}{2+1}.$$

Keltirilgan munosabatlardan ko'rinadiki (5) tenglikni qanoatlantirishi mumkin bo'lgan qiymatlar quyidagilardan iborat:

$$\frac{2^1}{1+1}, \frac{2^2}{2+1}, \frac{2^3}{3+1}, \frac{2^4}{4-1}, \frac{3^1}{1+1}, \frac{3^2}{2+1}, \frac{5^1}{1+1}, \frac{7^1}{1+1}.$$

Ularni tahlil qilib, faqat $\frac{2^2}{2+1}$ va $\frac{3^2}{2+1}$ lar ko'paytmasi 4 bo'lishini aniqlaymiz. Demak, biz izlayotgan son $2^2 \cdot 3^2 = 36$ ekan.

Javob: $N = 36$.

Mustaqil ishlash uchun mashqlar

1. 26 ga bo'linadigan va bo'luvchilari soni 16 ta bo'lgan eng kichik 4 xonali sonni toping.

2. Agar N soni $N = p^m \cdot q^n$ ko'rinishda bo'lib $\tau(N^2) = 81$ bo'lsa, $\tau(N^3)$ ni hisoblang. Bu yerda p va q ixtiyoriy ikki tub son.

3. Agar $N = \tau(N)$ bo'lsa, N ni toping.

4. Agar $N = 2\tau(N)$ bo'lsa, N ni toping.

5. Agar $N = 3\tau(N)$ bo'lsa, N ni toping.

6- §. MATEMATIK MASALALAR YECHISHDA YO'L QO'YILADIGAN BA'ZI XATOLIKLAR HAQIDA

Matematik masalalarni yechishda, ba'zan ayrim xatoliklarga yo'l qo'yiladi. Chunki masala va misollarni yechishda turli xil, bir-biridan tamomila farq qiluvchi usullardan foydalaniladi va ularni ishlatish davomida oddiy narsalarga e'tibor berilmay qoladi. Bu holat esa ba'zi xatoliklarni keltirib chiqarishi mumkin.

Masalani yechishda ko'pchilik, ayrim hollarda masalani tuzgan odamning o'zi ham turli noaniqlikka yo'l qo'yadi.

Quyida shunday masalalardan ba'zilarini keltiramiz.

1- masala. Berilgan a parametrning qanday qiymatlarida

$$x^2 - 4x + a^2 - 1 = 0$$

tenglama har biri 1 dan katta bo'lgan ikkita turli ildizga ega bo'ladi?

Yechish. Odatda, bu masala quyidagicha yechiladi. Agar x_1, x_2 tenglama ildizlari bo'lsa, u holda masala shartiga ko'ra

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 2, \\ x_1 x_2 > 1, \\ D = 16 - 4(a^2 - 1) > 0 \end{cases}$$

munosabatlar o'rinli bo'lishi kerak. Viyet teoremasidan foydalansak, $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = a^2 - 1$ bo'ladi. Bundan $\begin{cases} a^2 - 1 > 1, \\ 16 - 4(a^2 - 1) > 0 \end{cases}$ sistemaga kelamiz. Uni intervallar metodi bilan yechib,

$$\begin{cases} a^2 - 2 > 0, \\ a^2 - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) > 0, \\ (a - \sqrt{5})(a + \sqrt{5}) < 0 \end{cases}$$

$a \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{5})$ javobni olamiz.

Ammo bu javob noto'g'ri. Chunki javoblar ichidan $a = \sqrt{3}$ bo'lgan holni qarasak, berilgan tenglama $x^2 - 4x + 2 = 0$ ko'rinishni oladi. Uni yechib $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ ildizlarni topamiz. Ko'rinib turibdiki $x_2 < 1$ bo'lib, masala shartiga mos kelmaydi. Xato qayerda?

Yuqorida, masalani yechish uchun tuzilgan tengsizliklar sistemasi tenglamaning ikkala ildizi ham 1 dan katta bo'lishining zaruriy shartini ifodalaydi xolos, ammo yetarli shart bo'la olmaydi.

To'g'ri javobni topish uchun tenglamani a parametrga nisbatan yechamiz va $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5 - a^2}$ ildizlarni topamiz.

Endi masala sharti quyidagi tengsizliklar sistemasiga teng kuchli bo'ladi:

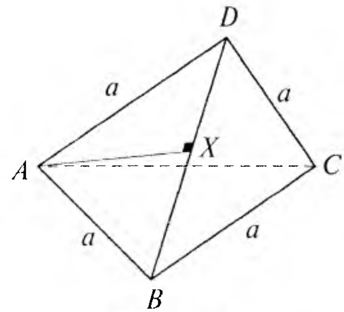
$$\begin{cases} 2 + \sqrt{5 - a^2} > 1, \\ 2 - \sqrt{5 - a^2} > 1, \\ a^2 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{5 - a^2} > 1, \\ a^2 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5 - a^2} < 1, \\ a^2 - 5 < 0. \end{cases}$$

Oxirgi sistemani yechib, $2 < a < \sqrt{5}$ yoki $-\sqrt{5} < a < -2$ javoblarni topamiz. Mana endi, masala to'g'ri yechildi.

J a v o b : $a \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{2}) \cup (2; \sqrt{5})$.

2- masala. *ABCD* muntazam tetraedr berilgan. Fazoda *X* nuqta shunday olinganki, $|XA| = |XC|$, $|XB = |XD|$, $|XA| = \sqrt{3}\,|XD|$ shartlar o'rinli. *X* nuqtaning tetraedrga nisbatan qanday holatda joylashganligini aniqlang (ichidami, tashqarisidami, yog'idami, qirrasidami — qayerida joylashgan?).

Yechish. Berilgan $ABCD$ muntazam tetraedrning har bir qirrasi uzunligi a bo'lsin (8.1- chizma). Osongina, BD qirraning o'rtasi bo'lgan X nuqta masala shartini qanoatlantirishini sezish qiyin emas. Tetraedr muntazam bo'lgani uchun ABD teng tomonli uchburchak bo'lib, AXD uchburchak to'g'ri burchakli bo'ladi.



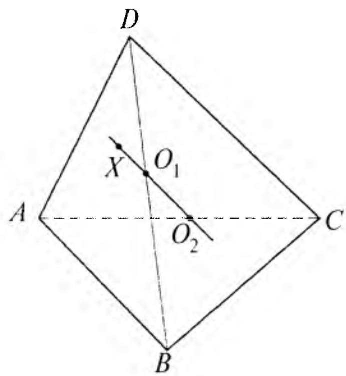
8.1-chizma.

Bundan $|AX| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

kelib chiqadi. Shuningdek, $|XA| = \sqrt{3}\,|XD|$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak, javob: izlanayotgan nuqta tetraedrning BD qirrasi o'rtasidagi nuqta ekan.

Agar shu javob bilan qanoatlansak xatoga yo'l qo'ygan bo'lamiz. Masalaning to'liq yechilgan deb hisoblanishi uchun, uning yana boshqa yechimi bor yoki yo'qligini isbotlash kerak.



8.2- chizma.

Masala shartini BD qirraning o'rtasi bo'lgan O_1 nuqta qanoatlantirishini bildik (8.2- chizma). Ammo, masala shartiga mos keluvchi yana bitta nuqta bor. Uni topish uchun O_1 nuqta va AC qirraning o'rtasi bo'lgan O_2 nuqta orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz va bu to'g'ri chiziqda X nuqtani shunday tanlaymizki O_1 nuqta XO_2 kesmaning o'rtasi bo'lib qolsin. Hosil bo'lgan X nuqta tetraedrning tashqarisida yotadi. Bu nuqta masala shartini qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

8.2-chizmadan $|AX| = |AO_2| = \frac{a}{2}$, $|XD| = |DO_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ munosabatlarni topamiz. Demak, $|AX| = \sqrt{3}\,XD$.

J a v o b: Izlanayotgan nuqta tetraedrning qirrasidagi yoki undan tashqarida yotgan nuqta bo'ladi.

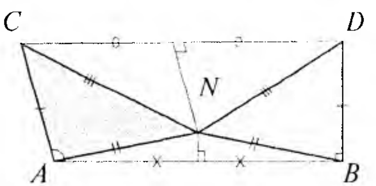
3- masala. To'g'ri burchak o'tmas burchakka tengligini ko'rsatuvchi quyidagi isbotning xatosini toping.

Biror AB kesma olib, uchlaridan ikkita o'zaro teng AC va BD kesmalarni birini tik ikkinchisini qiya qilib qo'yamiz (8.3-, 8.4-, 8.5- chizmalar). Aytaylik kesmalar AB to'g'ri chiziqdan yuqorida yotadigan va DBA to'g'ri burchak va CAB o'tmas burchak bo'ladigan qilib qo'yilgan bo'lsin. Bu burchaklar tengligini isbotlaymiz.

Isboti. Berilgan C va D nuqtalarni birlashtirib, $ABDC$ to'rtburchakni hosil qilamiz, bu to'rtburchakda AC tomon BD tomonga, AB tomon CD tomonga parallel emas.

Endi AB va CD kesmalar o'rtasidan perpendikular to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Kesmalar parallel bo'lmaganligi uchun ularga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqlar ham parallel emas va ustma-ust ham tushmaydi. Aytaylik ular N nuqtada kesishsin. Isbotni uchta holga ajratib ko'rib chiqamiz.

1- hol. Aytaylik N nuqta $ABCD$ to'rtburchak ichida yotgan bo'lsin (8.3- chizma). N nuqtani to'rtburchakning hamma uchlari bilan birlashtiramiz. Kesmaning o'rta perpendikulari xossasiga ko'ra, N nuqta AB kesmaning uchlaridan va shuningdek, CD kesmaning uchlaridan teng masofada joylashgan bo'ladi, ya'ni $|AN|=|BN|$ va $|CN|=|DN|$.



8.3- chizma.

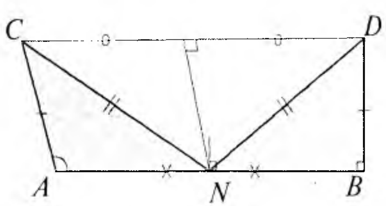
Masala shartiga ko'ra $|AC|=|BD|$. Shu sababli, NAC va NBD uchburchaklar uchta tomonlariga ko'ra o'zaro teng (uchburchaklar tengligining uchinchi alomati). Demak, $\angle NAC=\angle NBD$.

Shuningdek, ANB teng yonli uchburchakligidan $\angle NAB=\angle NBA$ bo'ladi. Bulardan

$$\angle CAN+\angle NAB=\angle CAB,\ \angle DBN+\angle NBA=\angle DBA$$

tengliklarni yozamiz.

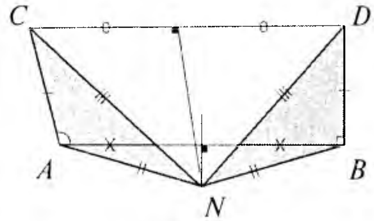
Hosil qilingan munosabatlardan $\angle CAB=\angle DBA$ ekanligi kelib chiqadi.



6.4- chizma.

2-hol. Aytaylik N nuqta AB kesmada yotsin. Bu holda N nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'ladi (8.4- chizma). Birinchi holdagi kabi, uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra $\triangle NAC = \triangle NBD$. Bundan $\angle CAB = \angle DBA$ kelib chiqadi.

3- hol. Aytaylik N nuqta AB to'g'ri chiziqdan pastda joylashgan bo'lsin (8.5- chizma).



8.5- chizma.

Yana, xuddi yuqoridagidek uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra $\triangle NAC = \triangle NBD$ va $\angle CAN = \angle RDBN$ bo'ladi.

Endi, ANB teng yonli uchburchakdan $\angle ABN = \angle NAB$ bo'lishi ravshan. Demak, $\angle CAN - \angle NAB = \angle DBN - \angle ABN$ yoki $\angle CAB = \angle DBA$ kelib chiqadi.

Yuqoridagi isbotlarning o'rinliligi ko'rinib turibdi. Barcha hollar to'la ko'rib chiqildi. Xato qayerda?

Masala isboti faqatgina N nuqta joylashishiga bog'liq emas. Mana shu 3- holni yaxshilab tahlil qilaylik.

ABD to'g'ri burchak va *ABN* o'tkir burchak yig'indisi har doim *DBN* o'tmas burchakni beradi (8.5- chizma), ammo *CAB* o'tmas burchakni *NAB* o'tkir burchak bilan qo'shganda u yana o'tmas burchak bo'ladi yoki yoyiq burchakdan katta burchak bo'lib qolishi mumkin. Bu esa, yuqoridagi kabi mulohazalar yuritishni tamomila o'zgartirib yuboradi.

Shunday qilib, 3- holni yana ikkiga ajratib ko'rishga to'g'ri keladi. Berilgan *CAB* o'tmas burchak va *CAN* uchburchak:

a) *AC* to'g'ri chiziqqa nisbatan bir tomonda joylashgan (8.5- chizma).

b) *AC* to'g'ri chiziqning ikki tomonida joylashgan (8.6- chizma).

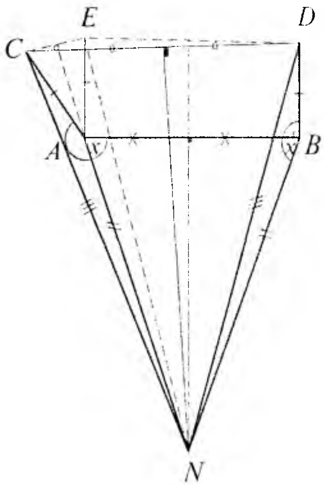
a) holda *CAB* burchak *CAN* burchakning biror qismi bo'lishi ko'rib chiqildi va $\angle CAB = \angle DBA$ tenglikka keldik.

b) holda bunday xulosaga kela olmaymiz: *DBA* to'g'ri burchak avvalgidek ikkita burchak ayirmasi kabi ifodalanadi, ya'ni $\angle DBA = \angle DBN - \angle ABN$.

Ammo, *CAB* o'tmas burchak, *DBN* burchak bilan qo'shilganda 360° ga teng, ya'ni $\angle CAN + \angle DBN = 360^\circ$ (8.6- chizma) bo'ladi.

O'rta perpendikularlar kesishgan N nuqta har doim, 8.6- chizmadagidek joylashgan bo'lishini ko'rsatamiz.

Chizma bo'laklari joylashganligi yaxshiroq ko'rinishi uchun 8.6-chizmada qo'shimcha yasashni amalga oshiramiz.



8.6- chizma.

A nuqtadan AB to'g'ri chiziqqa perpendikular o'tkazamiz va unda BD ga teng bo'lgan AE kesmani ajratamiz. E nuqtani D, N va C nuqtalar bilan tutashtiramiz. U holda $ABDE$ to'g'ri to'rtburchak hosil bo'ladi. AB kesmaning simmetriya o'qi bilan ED kesmaning simmetriya o'qi bir xil bo'lib, $NE = ND$ bo'ladi. Bundan esa $NE = NC$ kelib chiqadi. Demak, A va N nuqtalarning har biri CE kesmaning uchlaridan baravar uzoqlikda joylashgan. Bundan AN to'g'ri chiziq bu kesmaning simmetriya o'qi ekanligi kelib chiqadi.

$\triangle DBN$ ni AB kesmaning simmetriya o'qiga nisbatan almashtirsak, u $\triangle EAN$ ga o'tadi. Ammo, $\triangle CAN$ ni N nuqta atrofida $\angle BNA$ ga bursak, $\triangle DBN$ hosil bo'ladi.

Demak, to'g'ri burchak o'tmas burchakka tengligini ko'rsatuvchi quyidagi isbotning xatosi shundaki, 8.3-, 8.4-, 8.5-chizmalardagi holatlar hech qachon ro'y bermaydi. Faqat 8.6-chizma masala shartiga mos keladi.

7- §. SONLAR KVADRATLARI VA KUBLARI YIG'INDISI HAQIDA

Ko'pchilik, quyidagi formulani yaxshi biladi [4]:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (1)$$

Uni isbotlashning turli usullari mavjud. Masalan, matematik induksiya usuli bilan yoki $n+1$ ning kubi yoyilmasidan foydalanib isbotlash usullari keng qo'llaniladi. Bilmasangiz mustaqil isbotlashga harakat qiling.

Biz hozir, ko'rinishidan shu (1) yig'indiga juda o'xshash boshqa bir yig'indini hisoblash masalasini ko'rib chiqamiz.

1- masala. Ushbu algebraik yig'indini hisoblang:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2. \quad (2)$$

Yechish. Yig'indining oxirgi hadi qanday ishora bilan tugashi n ning juft yoki toqligiga bog'liq: agar n juft bo'lsa, oxirgi had oldida „–“ ishora, agar n toq bo'lsa, oxirgi had oldida „+“ ishora turadi. Shuning uchun har ikki holni alohida-alohida ko‘rib chiqishga to‘g‘ri keladi.

a) Aytaylik n toq, ya’ni $n = 2k - 1$ bo‘lsin. Demak, (2) yig‘indining oxirgi hadi musbat ishorali bo‘ladi. Birinchi hadini qoldirib, qolganlarini juft-jufti bilan ayirib hisoblaymiz:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - (2k-2)^2 + (2k-1)^2 = 1 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + \ldots + ((2k-1)^2 - (2k-2)^2) = 1 + 5 + 9 + \ldots + 4k - 3 =$$
$$= \frac{1+4k-3}{2} \cdot k = -k(2k-1).$$

Bu yerda biz, hosil bo‘lgan 1, 5, 9, ... , $4k - 3$,... arifmetik progressiyaning dastlabki k ta hadi yig‘indisini topish formulasidan foydalandik.

b) Aytaylik n juft, ya’ni $n = 2k$ bo‘lsin. U holda (2) yig‘indining oxirgi hadi manfiy ishorali bo‘ladi. Dastlabki k tasi uchun, yuqoridagidek a) holni qo‘llab topamiz:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - (2k-1)^2 - (2k)^2 = k(2k-1) - (2k)^2 =$$
$$= k(2k - 1 - 4k) = -k(2k+1).$$

Masala shu bilan yechildi desa ham bo‘ladi. Ammo, bu ikki holni birlashtirib bitta formula ko‘rinishda yozish, yechimga o‘ziga xos bir joziba beradi. Ozgina fikrlab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (3)$$

Masala hal bo‘ldi.

Oxirgi (3) tenglikni yuqoridagi (1) munosabat bilan solishtirib bir qancha qiziqarli formulalar hosil qilsa bo‘lar ekan.

Masalan, (1) ni ham, (3) ni ham $n = 2k$ bo‘lgan hol uchun yozib va natijalarni qo‘shib, dastlabki k ta toq sonlar kvadratlari yig‘indisi topiladi:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2^{k-1})^2 = \frac{k(2k+1)(2k-1)}{3}. \qquad (4)$$

Haqiqatan, (1) ga ko‘ra $n = 2k$ bo‘lganda

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k)^2 = \frac{k(2k+1)(4k+1)}{3} \qquad (1')$$

tenglikni, (3) ga ko‘ra $n = 2k$ bo‘lganda

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (2k-1)^2 - (2k)^2 = -k(2k+1) \qquad (3')$$

tenglikni yozamiz. Bu ikki tenglikni qo‘shib va natijani 2 ga bo‘lsak, (4) formula kelib chiqadi.

Olingan (4) tenglik *dastlabki k ta toq sonlar kvadratlari yig'indisi formulasi* deyiladi.

Xuddi shuningdek, (1′) dan (3′) ni ayirib va 2 ga bo'lib,

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2k)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} \tag{5}$$

dastlabki k ta juft sonlar kvadratlari yig'indisi uchun formula hosil qilamiz.

Shunisi qiziqarli-ki, (5) formulani bevosita (1) dan keltirib chiqarish ham mumkin ekan. Haqiqatan,

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2k)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) =$$

$$= 4 \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}.$$

U holda (1′) dan bu tenglikni ayirib, (4) formula topiladi.

Demak, (4) va (5) formulalarni keltirib chiqarish uchun 1-masala yechimidan foydalanish shart emas ekan. Bu mulohazalardan esa 1- masalani yechishning 2- usuli kelib chiqadi:

(1) dan (5) ni hosil qilamiz va ular yordamida (4) ni keltirib chiqaramiz. So'ngra (4) dan (5) ni ayirsak 1- masala yechiladi.

Yuqoridagi, (3) formulaning quyidagi ko'rinishi ahamiyatli:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}(1 + 2 + 3 + \dots + n). \tag{6}$$

Ya'ni, dastlabki n ta natural son kvadratlarining turli ishoralar bilan olingan algebraik yig'indisi dastlabki n ta natural son yig'indisining „+" yoki „–" ishora bilan olinganiga teng ekan.

Bu yerda biz $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ formuladan foydalandik.

Yana bir ma'lum formulani eslatamiz:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{7}$$

Shu formula bilan bog'liq quyidagi masalani qaraymiz, ya'ni (7) dan foydalanib, 1- masalani umumlashtirish mumkin ekan.

2- masala. Ushbu yig'indini hisoblang:

$$1^2 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (-1)^{n-1}n^3.$$

Yechish. Masalaning berilishi xuddi 1- masalaga o'xshaydi. Yig'indining oxirgi hadi qanday ishorada bo'lishi n ning juft yoki toqligiga bog'liq. Ammo, uni 1- masala kabi yechib bo'lmaydi, chunki 1- masalada $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ formuladan foydalanib arifmetik progressiya hosil qilgan bo'lsak, bu masalada $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ formula yordamida biror qonuniyat topish ko'rinmaydi. Shuning uchun 1- masalani yechishning 2- usulini qo'llaymiz.

Avvalo, (7) dan foydalanib *dastlabki k ta juft sonlar kublari yig'indisi formulasini* hosil qilamiz:

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2k)^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3) = 8\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 2k^2(k+1)^2.$$

Bu hosil qilingan formulani $n = 2k$ uchun yozilgan (7) formuladan ayirib, *dastlabki k ta toq sonlar kublari yig'indisi formulasini* topamiz:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3 = \left(\frac{2k(2k+1)}{2}\right)^2 - 2k^2(k+1)^2 = k^2(2k+1)^2 - 2k^2(k+1)^2 = k^2[(2k+1)^2 - 2(k+1)^2] = k^2(4k^2 + 4k + 1 - 2k^2 - 4k - 2) = k^2(2k^2 - 1).$$

Demak, quyidagi formulalarga ega bo'ldik:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2 - 1), \quad (8)$$

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2k)^3 = 2k^2(k+1)^2. \quad (9)$$

Masalani yechish uchun asosiy formulalar olindi.

a) Aytaylik $n = 2k$ bo'lsin. U holda (8) dan (9) ni ayiramiz:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots + (2k-1)^3 - (2k)^3 = -k^2(4k+3).$$

b) Aytaylik $n = 2k - 1$ bo'lsin. Oxirgi tenglikning har ikki tomoniga $(2k)^3$ ni qo'shamiz:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots - (2k-2)^3 + (2k-1)^3 = k^2(4k-3).$$

Xuddi 1- masaladagidek masala shu bilan yechildi desa bo'ladi. Ammo bu ikki holni birlashtirib bitta formula ko'rinishda yozishga urinamiz. Biroz harakat qilib, 2- masala yechimi uchun

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots + (-1)^{n-1}n^3 = (-1)^{n+1}\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)^2\left(2n + 1 + (-1)^n 2\right)$$

munosabatni topamiz. Bu yerda $\left[\frac{n}{2}\right]$ ifoda $\frac{n}{2}$ soning butun qismi.

Biz, asosan, sonlarning kvadratlari va kublari yig'indisi bilan bog'liq formulalarga doir masalalarga to'xtaldik. Ammo sonlarning 3 dan katta darajalari yig'indilari uchun ham formulalar bor. Demak, yuqoridagi g'oyalarni bu hollar uchun ham qo'llash mumkin.

Mustaqil ishlash uchun mashqlar

1. Ushbu yig'indini hisoblang:

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots + (-1)^{n-1}n^4.$$

Ko'rsatma. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ formuladan foydalaning.

2. Ushbu yig'indini hisoblang:

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \ldots + (-1)^{n-1}n^5.$$

Ko'rsatma. Buni yechishda

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

formuladan foydalaning.

3. a) dastlabki k ta toq sonlar 4- darajalari yig'indisi;

b) dastlabki k ta juft sonlar 4- darajalari yig'indisi;

d) dastlabki k ta toq sonlar 5- darajalari yig'indisi;

e) dastlabki k ta juft sonlar 5- darajalari yig'indisi formulasini toping.

4. Quyidagi yig'indilarni hisoblang:

a) $3^2 + 6^2 + 9^2 + \ldots + (3k)^2$;

b) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3k-2)^2$;

d) $2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3k-1)^2$.

5. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots + (-1)^{n-1}n^3$ yig'indini $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ formuladan foydalangan holda, biror qonuniyat topib hisoblang.

8- §. FERMANING BUYUK TEOREMASI ISBOTLANDI

1998- yil 18- avgust kuni Berlinda o'tgan matematiklar Xalqaro Kongressining ochilish marosimida an'anaviy Filds medallari va Nevanlinni sovrinlarini topshirish tantanalari bo'lib o'tdi. Taqdirlash marosimi 350 yil davomida hal qilinmay, matematiklarning ko'plab avlodlari boshini qotirib kelgan Fermaning mashhur Buyuk teoremasini isbotlagan Endryu Uaylsni tabriklash bilan davom etdi. E.Uaylsga maxsus tayyorlangan kumush quymasi topshirildi. Unga zarhal harflar bilan „Ushbu quyma uning barcha xizmatlarini bayon qilish uchun judayam torlik qiladi" jumlasi yozilgan edi.

AQSHning Priston universiteti professori, angliyalik metematik Endryu Uaylsning bu ishi osongina tan olingani yo'q. Birinchi marta u Fermaning Buyuk teoremasi isbotiga bag'ishlangan ishlarini 1993- yil 23- iyun chorshanba kuni Kembrijning Nyuton institutida sonlar nazariyasiga doir „L-funksiyalar va Arifmetika" dasturi bo'yicha uchta ma'ruzasida bayon qildi. Endryu Uaylsning isboti uzun va murakkab bo'lgani uchun 5- yil davomida yetakchi mutaxassislar tomonidan qayta-qayta tekshirib chiqildi va nihoyat to'g'ri deb e'tirof etildi.

Eslatib o'tamiz, Fermaning Buyuk teoremasi deb atalgan tasdiq quyidagidan iborat:

Ikkidan katta n natural soni uchun $a^n + b^n = c^n$ tenglama noldan farqli butun yechimlarga ega emas.

Agar $n = 2$ bo'lsa, tenglama $a^2 + b^2 = c^2$ ko'rinishda bo'lib, bu tenglama to'g'ri burchakli uchburchak tomonlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. U cheksiz ko'p yechimlarga ega.

Masalan, $3^2 + 4^2 = 5^2$ yoki $5^2 + 12^2 = 13^2$ va hokazo. Bunday yechimlar *Pifagor sonlari* deb ataladi. Pifagor sonlarining barchasini (Pifagor uchliklari) topish qoidasi yaxshi tanish. Bu fakt qadimgi yunonlarga, balki ulardan ham oldinroq Vavilonliklarga ma'lum bo'lgan.

Tarixiy ma'lumot. Per de Ferma (1601—1665- yillar) Fransiyaning Tuluza shahrida yashagan matematik, asli kasbi yurist. U bundan 350- yil oldin Pifagor sonlariga o'xshagan sonlarni 2 dan katta n lar uchun topish mumkin emas degan farazni ilgari surgan. Fermaning matematik sifatida mashhur bo'lishiga uning boshqa matematiklar bilan yozishgan xatlari, qo'lyozma holida tarqatilgan ko'plab risolalari sabab bo'lgan. U matematikaning bir qator sohalarida tadqiqot olib borgan bo'lsa ham unga asosan sonlar nazariyasi sohasidagi, ayniqsa, algebraik tenglamalarni butun sonlarda yechishga bag'ishlangan ishlari ko'proq shuhrat keltirgan. O'z ishlarini Ferma boshqa matematiklarni bahsga, musobaqaga chorlovchi chaqiriq sifatida yozgan. Ferma yozganlarini nashr qilishdan voz kechganligi sababli, o'g'li Samuel de Ferma otasi vafotidan so'ng uning xatlarini va e'lon qilinmagan risolalarini to'plab nashr qilishga urinadi. Shu maqsadda u otasining barcha qog'ozlarini va o'qigan kitoblarini titib chiqadi. Shu tariqa Fermaning „Buyuk teoremasi" e'lon qilinadi.

Ferma qadimgi yunon matematikasining mumtoz asarlaridan biri hisoblangan Diofantning „Arifmetika" kitobini o'qib, sonlar nazariyasi masalalariga qiziqib qoladi, kitob hoshiyalariga ko'plab izoh va fikrlar bildirilgan yozuvlar qoldiradi. Shunday fikrlardan biri, Diofant kitobidagi „Ikki son kvadratlarining yig'indisiga teng kvadrat sonni topish masalasi" bayon qilingan sahifa hoshiyasiga yozilgan.

Keyinchalik mashhur bo'lib ketgan bu yozuvda Ferma yuqoridagi masala kublar uchun va undan katta darajalar uchun o'rinli emasligini tasdiqlaydi. U yana „Menda bu tasdiqning haqiqatdan ajoyib isboti bor, lekin uni yozish uchun kitob hoshiyasidagi joy juda tor" deb yozib qo'ygandi.

Ferma tasdiqning $n = 4$ uchun isbotini nazarda tutgan bo'lishi ehtimol, ammo unga umumiy holda „isbot" ma'lum bo'lganiga ishonish qiyin. Aytaylik, $n = 4$ uchun Ferma yechimni topganidan so'ng, tasdiq ixtiyoriy tub son n uchun o'rinli — deya mulohaza yuritgan bo'lishi mumkin. Harqalay $n = 3$ bo'lgan holda ham Ferma tasdig'ini isbotlash oson emas va Ferma zamonida hali topilmagan yangi g'oyalarga asoslanadi.

XVIII asrda $n = 3$ uchun, ya'ni kublar uchun Fermaning Buyuk teoremasini shveysariyalik matematik Leonard Eyler deyarli hal qiladi. Uning isbotidagi chala joylarni esa XIX asr boshida Gauss to'ldirib mukammal isbotni berdi. 1820- yillarda fransuz matematiklari Dirixle va Lejandr bir-biridan bexabar holda $n = 5$ uchun, 1839- yili Lame $n = 7$ uchun isbotladi. Bu sohadagi katta siljish 1840- yili nemis matematigi Ernst Kummer tomonidan amalga oshirildi. Kummer kompleks sonlardan foydalanib yangi nazariya yaratadi (Kummerning ideal bo'luvchilar nazariyasi) va uning yordamida buyuk teoremani 37 dan kichik barcha tub sonlar uchun isbotladi. Kummerning ishlari sonlar nazariyasi va algebraning zamonaviy yo'nalishlariga asos bo'ldi.

Buyuk teoremaga taalluqli keyingi barcha tadqiqotlar asosan Kummer g'oyalarini rivojlantirishdan iborat bo'ldi. 1970- yilga kelib teorema 125000 dan kichik barcha tub n lar uchun isbotlandi. Ammo yechimni umumlashtirishga imkon beradigan biror qonuniyat topilmadi.

1983- yili nemis matematigi Gerxard Faltings bu yo'nalishda oldinga surilgan Mordell gipotezasini isbotladi:

2 dan katta barcha n ular uchun $a^n + b^n = c^n$ tenglamaning butun yechimlari soni chekli bo'ladi.

Boshqacharoq mulohaza qilib ko'raylik: tenglamaning har ikki tomoni c^n ga bo'lib $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = 1$ tenglamani hosil qilamiz. Endi Ferma teoremasi „$n > 2$ bo'lganda $x^n + y^n = 1$ $(x > 0,\ y > 0)$ tenglama ratsional yechimlarga ega emas, ya'ni $x^n + y^n = 1$ tenglama bilan aniqlangan egri chiziq birorta ham ratsional koordinatalarga ega bo'lgan nuqtalardan o'tmaydi" tasdig'iga teng kuchli bo'ladi.

Shunday qilib, Faltingsning natijasidan bu egri chiziq faqat chekli sondagi ratsional nuqtalardan o'tadi, degan xulosa chiqadi. Ammo, uning usulini takomillashtirib, egri chiziq birorta ham ratsional nuqtadan o'tmasligini isbotlash mumkinligi juda ham shubhali edi.

Endryu Uaylsning isboti mutlaqo yangi g'oya $y^2 = x \cdot (x - A) \cdot (x - B)$ ko'rinishdagi tenglamalar bilan ifodalanadigan elliptik egri chiziqlarni o'rganishda yapon matematigi Yutaka Tamiyama qo'llagan usullarga asoslangan. Bu tenglamada x va y kompleks o'zgaruvchilar, A va B — haqiqiy o'zgarmas sonlar.

Ko'plab matematiklarning tinimsiz izlanishlari natijasida Shimura—Tomiyama—Veyl gipotezasi tug'ildi:

A va B sonlar butun bo'lsa, $y^2 = x \cdot (x - A) \cdot (x - B)$ elliptik egri chiziq modular bo'ladi.

Modularlik xossasi ancha murakkab formulalar va tushunchalar orqali ifodalangani uchun uni bu yerda keltirishni lozim topmadik.

Serr va Ribetlar Frey degan olimlarning mulohazalarini o'rganib, Shimura—Tomiyama—Veyl gipotezasi bilan Buyuk teorema orasidagi bog'lanishni topdilar.

Faraz qilaylik, 2 dan katta p tub soni uchun Ferma tenglamasi yechimga ega, ya'ni shunday uchta a, b, c butun sonlari borki $a^p + b^p = c^p$ o'rinli bo'lsin. Freyning 1980- yillarda olg'a surgan g'oyasiga ko'ra $y^2 = x \cdot (x - a^p) \cdot (x - b^p)$ kub tenglama bilan aniqlangan elliptik egri chiziq modular bo'la olmaydi. Bu tasdiq 1990- yili Ribet tomonidan to'la isbotlandi. Shunday qilib, Shimura—Tomiyama—Veyl gipotezasi isbotlansa, unda Freyning elliptik egri chizig'i mavjud emasligi, bundan esa, o'z navbatida tenglamani qanoatlantiruvchi butun sonlarning mavjud emasligi, ya'ni Buyuk teorema isboti kelib chiqadi.

Endryu Uaylsning xizmati shundaki, u Shimura—Tomiyama—Veyl gipotezasini Frey tomonidan o'rganilgan egri chiziqlardan ham kengroq elliptik egri chiziqlar sinfi uchun isbotladi.

Uaylsning isboti judayam uzun va murakkab bo'lib, u ko'plab Mazur, Serr, Xayd, Flax, Kolivagin, Lenglende, Tanell, Ribet, Rubin va boshqa matematiklarning ishlaridagi g'oyalarni ishlatadi. (Bu olimlarning ko'plari yuqorida tilga olingan Nyuton institutida „L-funksiyalar va Arifmetika" dasturi bo'yicha tadqiqotlar olib borishda qatnashgan.)

Bu, albatta ajoyib isbot edi va uni kitob varag'ining hoshiyasiga yozib sig'dirish u yoqda tursin ancha-muncha kitobga ham sig'avermaydi, chunki isbot bir necha 100 sahifadan ortiqroq hajmni egallaydi. Ravshanki, bunday isbot XVII asrgacha ma'lum bo'lgan bilimlarga asoslanib topilishi mumkin emas edi.

9- §. PIFAGOR SONLARI VA PIFAGOR SONLARIGA O'XSHASH SONLAR

Pifagor nomi bilan bog'liq ushbu masalani ko'raylik. Pifagorga qanday aloqasi borligi keyinroq ma'lum bo'ladi.

1-masala. Ushbu

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

tenglamani natural sonlarda yeching.

Xuddi shu masalaga o'xshash quyidagi masalalarni yangi masalalar deyish mumkin.

2- masala. Biror k musbat butun son uchun

$$kx^2 + y^2 = z^2 \tag{2}$$

tenglamani natural sonlarda yeching.

3- masala. Biror k musbat butun son uchun

$$x^2 + ky^2 = z^2 \tag{3}$$

tenglamani natural sonlarda yeching.

4- masala. Biror k musbat butun son uchun

$$x^2 + y^2 = kz^2 \tag{4}$$

tenglamani natural sonlarda yeching.

Yuqoridagilardan ko'rinib turibdiki, 1-masala qolgan uch masalaning $k = 1$ bo'lgandagi xususiy holidan iborat.

1 - t a ' r i f. Berilgan (1) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar *Pifagor sonlari* deyiladi.

Xuddi shuningdek, quyidagi ta'rifni kiritish zarurligi o'z-o'zidan tushunarli.

2- ta'rif. Yuqoridagi (2) ((3) yoki (4)) tenglamalardan birini qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar *k-Pifagor sonlari* deyiladi.

Bu masalalarni yechishdan oldin ularning qanday paydo bo'lganligiga va yechimlari nima uchun shunday deb atalishiga to'xtalib o'taylik.

Ma'lumki, to'g'ri burchakli uchburchakda katetlar uzunliklari a, b va gipotenuza uzunligi c orasida

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (5)$$

bog'lanish mavjud bo'lib, uni *Pifagor teoremasi* deb yuritishadi. Tomonlari butun sonlar bilan ifodalangan uchburchaklarni *Pifagor uchburchaklari* deyishgan. Shu sababli, bu (5) bog'lanishni qanoatlantiruvchi butun musbat sonlarni *Pifagor sonlari* deb atashadi [5]. Pifagor sonlari haqida juda ko'p maqolalar yozilgan.

O'zimizcha shunday mulohaza yuritaylik:

(5) tenglamaga biror k sonini tirkaylikda, k ga bog'liq Pifagor sonlarini topaylik

$$ka^2 + b^2 = c^2. \qquad (6)$$

Bu yerda k ixtiyoriy musbat butun son. Masalan, $k = 9$ bo'lganda 9-Pifagor sonlari (1, 4, 5) va (4, 5, 13) uchliklar bo'ladi, chunki ular $9a^2 + b^2 = c^2$ tenglikni qanoatlantiradi:

$$9 \cdot 1^2 + 4^2 = 5^2, \ 9 \cdot 4^2 + 5^2 = 13^2.$$

Shuningdek, (2)—(4) formulalarni tekshirib, yuqoridagi masalalarni yechish o'ziga xos bir tadqiqot desa bo'ladi.

Kelinglar hammasini bir chetdan ko'rib chiqaylik.

1- masalaning yechimi. Aytaylik uch natural son (a, b, c) berilgan (1) tenglamaning biror yechimi bo'lsin: $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$. U holda ixtiyoriy natural son n uchun (na, nb, nc) uchlik ham (1) ni qanoatlantiradi, chunki $a^2 + b^2 = c^2$ tenglikning har ikki tomonini n^2 ga ko'paytirib, $n^2a^2 + n^2b^2 = n^2c^2$ tenglikka kelinadi.

Demak, tenglamaning biror yechimi topilsa, uning yana cheksiz ko'p yechimlarini topsa bo'lar ekan.

Shu bilan masala yechildi deb ayta olamizmi?

Yo'q, albatta, chunki (1) tenglamaning bir-biriga proporsional bo'lmagan yechimlari ham to'liq topildi deyishga asosimiz yo'q.

Kelgusida, (1) tenglamaning *asosiy yechimlari* deb shunday yechimlarga aytamizki, qolgan yechimlar ularni biror butun songa ko'paytirib hosil qilinadi. Asosiy yechimlarning o'ziga xos xususiyati shundaki, (a, b, c) uchlikning ixtiyoriy ikkitasi umumiy bo‘luvchiga ega bo‘lmaydi.

Masalan, aytaylik a va b biror p umumiy bo‘luvchiga ega bo‘lsin. U holda $a = pa_1$, $b = pb_1$ bog‘lanishlarni $a^2 + b^2 = c^2$ tenglikka qo‘yib $c^2 = p^2(a_1{}^2 + b_1{}^2)$ munosabatga kelamiz. Bundan c^2 ning p^2 ga, ya’ni c ning ham p ga bo‘linishi kelib chiqadi: $c = pc_1$. (Bu holatni isbotlash ham o‘ziga xos bir san’at. Mustaqil bajarib ko‘ring.) Demak, (a, b, c) yechim (a_1, b_1, c_1) yechimni p ga ko‘paytirish natijasida olinar ekan. Bu esa (a, b, c) uchlik asosiy yechim deganimizga zid. Xuddi shuningdek, a va c hamda b va c umumiy bo‘luvchiga ega bo‘lsa, u holda uchala a, b, c sonlari ham umumiy bo‘luvchiga ega bo‘lib qoladi. Shunday qilib, agar (a, b, c) uchlik asosiy yechim bo‘lsa, u holda $(a, b) = 1$, $(a, c) = 1$, $(b, c) = 1$ bo‘ladi.

Endigi vazifamiz (1) tenglamaning asosiy yechimlarini topishdan iborat.

E’tibor bersak, x, y, z sonlaridan ixtiyoriy ikkitasi juft son bo‘la olmaydi. Yuqorida aytganimizdek, umumiy bo‘luvchi bo‘lishi mumkin emas. Demak, x, y, z sonlaridan faqat bittasigina juft son bo‘ladi. Qolaversa, bu uch sonning hammasi ham bir paytda toq son bo‘la olmaydi. Chunki, toq sonning kvadrati ham toq son va ikki toq son yig‘indisi ham, ayirmasi ham juft son bo‘lishidan asosiy yechimdagi uchinchi son juft bo‘lib qoladi.

Shunday qilib, asosiy yechim hisoblangan uchta a, b, c sonlaridan biri juft va ikkitasi toq ekan. Yana bir bor e’tibor bering c toq bo‘lishi shart. Aks holda, c ni juft desak, u holda c^2 soni 4 ga bo‘linadi. Qolgan ikki son toq: $a = 2m + 1$, $b = 2k + 1$ bo‘lgani uchun

$$a^2 + b^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4k^2 + 4k + 1 = 4(m^2 + m + k^2 + k) + 2$$

tenglikdan $a^2 + b^2$ son juft bo‘ladi, ammo 4 ga bo‘linmaydi. Demak, c^2 ga teng emas.

Va nihoyat, asosiy yechimlar uchun mumkin bo‘lgan hollar quyidagicha bo‘lishi mumkin xolos: z – toq, x va y dan biri juft, biri toq.

Kelgusida, (1) tenglamada x va y lar teng huquqli qatnashgani uchun x ni toq, y ni juft deb olib asosiy yechimlarni qidiramiz.

Endi (1) tenglamani

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x) \qquad (7)$$

ko‘rinishda yozib olamiz. U holda $(z + x)$ va $(z - x)$ larning har biri ikki toq son yig‘indisi va ayirmasi sifatida juft son bo‘ladi. Demak, ularning har birini 2 ga bo‘lish mumkin.

Ushbu $\frac{z+x}{2}$ va $\frac{z-x}{2}$ sonlarni qaraymiz. Bu ikki son o'zaro tub. Haqiqatan, teskarisini faraz qilaylik, ya'ni ular biror m umumiy bo'luvchiga ega bo'lsin. U holda

$$\frac{z+x}{2}=mp, \quad \frac{z-x}{2}=mq$$

tengliklarni yozamiz. Ularni qo'shib va ayirib,

$$z=m(p+q), \quad x=m(p-q)$$

munosabatlarga kelamiz. Shartga ko'ra x va z umumiy bo'luvchiga ega emas. Demak, $(\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2})=1$.

Shunday qilib, u ham, $z+x$ va $z-x$ sonlar ham juft va (7) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2}. \tag{8}$$

Ya'ni kvadrat son $\left(\frac{y}{2}\right)^2$ o'zaro tub $\frac{z+x}{2}$ va $\frac{z-x}{2}$ ko'paytuvchilarga ajratildi. Bulardan va (8) tenglikdan $\frac{z+x}{2}$ va $\frac{z-x}{2}$ larning har biri kvadrat son bo'lishi kerakligini xulosa qilamiz (mustaqil isbotlang).

Nihoyat $\frac{z+x}{2}=m^2$, $\frac{z-x}{2}=n^2$ belgilashlar kiritib $(\frac{y}{2})^2=$ $=m^2n^2$ bog'lanishni va

$$x=m^2-n^2, \quad y=2mn, \quad z=m^2+n^2 \tag{9}$$

yechimlarni topamiz. Bu yerdagi m va n sonlar o'zaro tub sonlar, chunki m^2 va n^2 o'zaro tub edi.

Mana endi m va n ga ixtiyoriy o'zaro tub sonlarni qo'yib, (1) tenglamaning barcha asosiy yechimlarini topamiz.

Masalan, $m=2$, $n=1$ bo'lsa, yechim (3, 4, 5); $m=3$, $n=2$ bo'lsa, yechim (5, 12, 13) bo'ladi. 1- masala hal bo'ldi.

Yuqoridagi (9) yechimlar bilan bog'lab quyidagi masalani tavsiya qilsa bo'ladi.

5- masala. Uchalasi ham 3 xonali son bo'lgan eng kichik asosiy Pifagor sonlarini toping. Agar $a+b+c$ miqdor eng kichik bo'lsa, (a, b, c) asosiy yechim eng kichik deyiladi.

Yechish. Masala shartiga va (9) ga ko'ra $x, y, z \geq 100$, ya'ni

$$m^2 - n^2 \geq 100,\ 2mn \geq 100,\ \ m^2 + n^2 \geq 100$$

munosabatlarni yozamiz. Bulardan $m \geq 12$, $n \geq 5$ kelib chiqadi. Demak, $m = 12$, $n = 5$ bo'lganda (119, 120, 169) asosiy yechimni topamiz.

Endi keyingi masalalarni yechishga o'tsa bo'ladi.

2- masalaning yechilishi. Demak,

$$kx^2 + y^2 = z^2 \tag{2}$$

tenglamani natural sonlarda yechamiz.

Agar 1- masalaning yechilish g'oyalaridan foydalansak, k son biror toq son q ning kvadratiga teng, ya'ni $k = q^2$ bo'lsa, u holda $q^2x^2 + y^2 = z^2$ yoki $(qx)^2 + y^2 = z^2$ tenglamaga kelamiz va xuddi 1- masala yechimlari kabi

$$x = (m^2 - n^2)/q,\quad y = 2mn,\quad z = m^2 + n^2 \tag{10}$$

yechimlarga ega bo'lamiz. Demak, bu holda yechim $m^2 - n^2$ ifoda q ga qoldiqsiz bo'linadigan m va n lar uchungina mavjud bo'ladi, ya'ni m va n larni $m^2 - n^2$ ifoda q ga qoldiqsiz bo'linadigan qilib tanlab, (2) tenglama yechimlarini olamiz.

Agar $x = y$ bo'lsin desak, u holda (2) dan $(k + 1)x^2 = z^2$ tenglamaga kelamiz. Bu yerda $k + 1 = p^2$ bo'lsin deb faraz qilsak, $(x,\ x,\ px)$ yechimni topamiz. Demak, $k = p^2 - 1$ bo'lgan holda (2) tenglamaning ba'zi yechimlarini topsa bo'lar ekan.

Shuningdek, (2) tenglamaning xususiy holi bo'lgan

$$k^2x^2 + y^2 = z^2 \tag{2'}$$

tenglamada k soni ixtiyoriy Pifagor sonlaridan biri bo'lsa, ya'ni $(k,\ m,\ n)$ uchlik $k^2 + m^2 = n^2$ shartni qanoatlantirsa, u holda ixtiyoriy x uchun $(kx,\ mx,\ nx)$ uchlik (2') tenglama yechimlari bo'ladi.

Va hokazo bunday mulohazalarni istagancha davom ettirish mumkin. Ammo, bu bilan (2) tenglamani ixtiyoriy k uchun yechdik deya olmaymiz.

Endi k ning aniq bir qiymatlari uchun (2) tenglama qanday yechilishi mumkinligiga to'xtalib o'tamiz.

6- masala. 3- Pifagor sonlarini toping, ya'ni $3x^2 + y^2 = z^2$ tenglamani natural sonlarda yeching.

Yechish. Yuqoridagi mulohazalarga asosan ixtiyoriy n uchun $(n,\ n,\ 2n)$ uchlik 3- Pifagor sonlari bo'ladi.

Agar

$$3x^2 = 2y + 1 \qquad (11)$$

bo'lsin deb faraz qilsak, u holda $z = y + 1$ bo'ladi. (11) dan $y = 3n + 1$ bo'lishi kerak degan xulosa kelib chiqadi. Shuning uchun

$$3x^2 = 2(3n + 1) + 1 = 6n + 3,\ x^2 = 2n + 1.$$

Oxirgi tenglikdan x ham toq son ekan: $x = 2m + 1$. Buni so'nggi tenglikka qo'yib, $n = 2m(m+1)$ ni topamiz.

Demak, ixtiyoriy m uchun

$$x = 2m + 1,\ y = 6m(m + 1) + 1,\ z = 6m(m + 1) + 2 \qquad (12)$$

sonlari 3-Pifagor sonlari bo'ladi.

Endi $3x^2 + y^2 = z^2$ tenglamani umumiy holda yechishga urinib ko'raylik.

Biz asosiy yechimlarni qidirayotganimiz uchun, ya'ni y va z umumiy bo'luvchilarga ega bo'lmagan holni qarayotganimiz uchun, xuddi 1-masaladagidek x toq, y juft va z toq degan xulosaga kelamiz.

Ko'rinib turibdiki, $3x^2$ son 3 ga karrali, qolgan ikki noma'lum y va z uchun quyidagi hollardan biri bo'lishi mumkin (boshqa hollar shu ikki holdan biriga o'xshash bo'ladi):

a) $y = 3r + 1,\ z = 3s + 2.$ b) $y = 3r + 1,\ z = 3s + 1.$

Bu yerdagi s va t lar toq sonlar.

a) Aytaylik $y = 3r + 1$, $z = 3s + 2$ bo'lsin. Berilgan $3x^2 + y^2 = z^2$ tenglamani

$$3x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) = 3(s + r + 1)(3(s - r) + 1)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bundan $x^2 = (s + r + 1)(3(s - r) + 1)$.

Ushbu $s + r + 1$ va $3(s - r) + 1$ sonlarni qaraymiz. Bu ikki son o'zaro tub. Haqiqatan, teskarisini faraz qilaylik, ya'ni ular biror t umumiy bo'luvchiga ega bo'lsin. U holda $s + r + 1 = tp$, $3(s - r) + 1 = tq$ tengliklarni yozamiz. Bu yerdagi p va q lar ham toq sonlar. Ularning birinchisini 3 ga ko'paytirib, ikkinchisiga qo'shib va ayirib $2z = t(3p + q)$, $2y = t(3p - q)$ munosabatlarga kelamiz. Shartga ko'ra, y va z umumiy bo'luvchiga ega emas. Demak, $(s + r + 1, 3(s - r) + 1) = 1$.

Va nihoyat x^2 o'zaro tub ikki ko'paytuvchilarga ajratildi. Shuning uchun $s + r + 1$ va $3(s - r) + 1$ larning har biri kvadrat son bo'lishi kerakligini xulosa qilamiz.

Demak, $z+y=3n^2$, $z-y=m^2$, $x^2=m^2n^2$. Bulardan esa

$$x=mn,\ y=\frac{3n^2-m^2}{2},\ z=\frac{3n^2+m^2}{2} \qquad (13)$$

yechimlarni topamiz. Bu yerda m va n ixtiyoriy toq sonlar.

Kelgusida (13) ko'rinishdagi sonlarni *3-Pifagor sonlari* deb ataymiz.

Yuqorida topilgan xususiy 3-Pifagor sonlari mana shu (13) sonlardan kelib chiqadi. Masalan, $m=n=1$ bo'lganda $(n,\ n,\ 2n)$ 3-Pifagor sonlarining asosi (1, 1, 2).

$m=1$, $n=2p+1$ bo'lganda (12) formulalar bilan berilgan 3-Pifagor sonlari hosil bo'ladi.

b) Aytaylik $y=3r+1$, $z=3s+1$ bo'lsin. Yana bir bor $3x^2+y^2=z^2$ tenglamani $3x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)=(3(s+r)+2)3(s-r)$ ko'rinishda yozib olamiz. Bundan $x^2=(3(s+r)+2)(s-r)$.

Xuddi a) holdagidek $3(s+r)+2$ va $s-r$ sonlari o'zaro tub bo'ladi. Ammo $3(s+r)+2$ ko'rinishdagi sonlar biror sonning kvadrati bo'la olmaydi. Demak, bu holda $3x^2+y^2=z^2$ tenglama natural yechimlarga ega emas.

2- masalaning xususiy holi hal bo'ldi.

Paragraf boshida berilgan 3- va 4- masalalar ham xuddi 2-masala kabi yechiladi. Umumiy mulohazalar sal boshqacharoq bo'lishi mumkin, ammo yechilish g'oyasi saqlanadi. Bunday tekshirishni davom ettiruvchilarga omad tilaymiz. O'qituvchilar bu masalalarni iqtidorli o'quvchilariga ijodiy ish sifatida berishlari mumkin.

OLIMPIADA MASALALARINING JAVOBLARI

1_1. $\sqrt[3]{20}=b$, $\sqrt[3]{50}=c$, $a=b+c$ belgilashlar kiritamiz. U holda $b^3=20$, $c^3=50$ va $bc=10$ bo'ladi. Demak,

$$a^3-30a=a(a^2-30)=(b+c)(b^2+2bc+c^2-3bc)=(b+c)(b^2-bc+c^2)=b^3+c^3=20+50=70.$$

1_2. $x_1=-3$, $x_2=9$ va $x_1=2$, $x_2=4$.

1_3. $\angle A=60°$.

1_4. $a=-1,\ -\frac{5}{7},\ -3$.

1_5. $S_{DEF}=\left(1-\frac{9}{32}-\frac{1}{24}-\frac{25}{48}\right)S=\frac{15}{96}\cdot 3\sqrt{15}=\frac{15\sqrt{15}}{32}$.

2_1. Ixtiyoriy $n>1$ uchun $2n$ soni 4 ga qoldiqsiz bo'linadi. Bu tasdiq, odatda $2n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ kabi yoziladi. Demak, $2n-1\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ bo'ladi va masala shartiga ko'ra $ab\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ kelib chiqadi. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

a) $a\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ va $b\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$;

b) $a\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ va $b\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$.

Bizga kerakli ifodani quyidagicha almashtiramiz:

$ab-a+b-1=a(b-1)+(b-1)=(a+1)(b-1)$.

1-holda $a+1=0(\mathrm{mod}\ 4)$ va $b-1=0(\mathrm{mod}\ 4)$ bo'lib, bundan $(a+b)(b-1)\,\vdots\,16$ bo'lishi ravshan.

2- holda berilganlarni $a=4k+1$ va $b=4m+3$ $(m,k\in N)$ kabi yozamiz. U holda

$(a+1)(b-1)=(4k+2)(4m+2)=4(2k+1)(2m+1)$ bo'lib, $(a+1)(b-1)$ soni 8 ga bo'linmaydi. Demak, bu hol masala shartini qanoatlantirmaydi.

2_2. Berilgan tengsizlikning chap tomonini S orqali belgilaymiz:

$$S=\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x^2{}_{2004}}{x_{2004}+x_1}.$$

Shu yig'indiga o'xshash quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$S_1=\frac{x_2^2}{x_1+x_2}+\frac{x_3^2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_1^2}{x_{2004}+x_1}.$$

Bu yig'indilar ayirmasini ko'ramiz:

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2-x_3^2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x^2{}_{2004}-x_1^2}{x_{2004}+x_1}=x_1-x_2+x_2-x_3+\ldots+x_1=0.$$

Demak, $S = S_1$. U holda

$$2S=S+S_1=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2+x_3^2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x^2{}_{2004}+x_1^2}{x_{2004}+x_1}\geq$$

$$\geq\frac{(x_1+x_2)^2}{2(x_1+x_2)}+\frac{(x_1+x_2)^2}{2(x_1+x_2)}+\ldots+\frac{(x^2{}_{2004}+x_1)^2}{2(x_{2004}+x_1)}=$$

$$=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}+\ldots+\frac{x_{2004}+x_1}{2}=x_1+x_2+\ldots+x_{2004}.$$

Bu yerda $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ tengsizlikdan foydalandik. Shunday qilib,

$$S\geq\frac{1}{2}(x_1+x_2+\ldots+x_{2004}).$$

2_3. 2005 xonali son hosil bo'ladi.

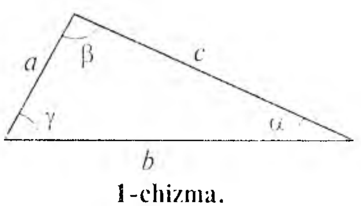
2_4. Masala shartlarni qanoatlantiruvchi x, y, z lar mavjud emas.

2_5. Kosinuslar teoremasiga ko'ra (1-chizmadan) $\cos\alpha=$ $=\frac{b^2-c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-\frac{a^2}{bc}\right]$ sinuslar teoremasiga ko'ra $\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, $\frac{b}{c}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ bo'ladi. Shuningdek, $\frac{a^2}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ ekanini topamiz.

Bulardan va masala shartiga ko'ra $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{b}$ ва $\frac{a^2}{bc}$ lar ham ratsional son bo'ladi. Qolaversa, ularning yig'indisi va ayirmasi ham ratsional son bo'ladi. Demak,

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-\frac{a^2}{bc}\right)$$

ratsional son ekan. Xuddi shu kabi, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ lar ham ratsional son bo'lishi kelib chiqadi.



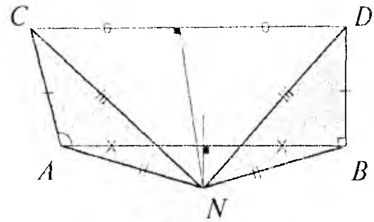
1-chizma.

3_1. Ko'pi bilan 10 ta shahar bor.

3_2. Bu holda ulardan siniq chiziq tuzib bo'lmaydi.

chi alomatiga ko'ra $\triangle NAC = \triangle NBD$. Bundan $\angle CAB = \angle DBA$ kelib chiqadi.

3- hol. Aytaylik N nuqta AB to'g'ri chiziqdan pastda joylashgan bo'lsin (8.5- chizma).



8.5- chizma.

Yana, xuddi yuqoridagidek uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra $\triangle NAC = \triangle NBD$ va $\angle CAN = \angle RDBN$ bo'ladi.

Endi, ANB teng yonli uchburchakdan $\angle ABN = \angle NAB$ bo'lishi ravshan. Demak, $\angle CAN - \angle NAB = \angle DBN - \angle ABN$ yoki $\angle CAB = \angle DBA$ kelib chiqadi.

Yuqoridagi isbotlarning o'rinliligi ko'rinib turibdi. Barcha hollar to'la ko'rib chiqildi. Xato qayerda?

Masala isboti faqatgina N nuqta joylashishiga bog'liq emas. Mana shu 3- holni yaxshilab tahlil qilaylik.

ABD to'g'ri burchak va ABN o'tkir burchak yig'indisi har doim DBN o'tmas burchakni beradi (8.5- chizma), ammo CAB o'tmas burchakni NAB o'tkir burchak bilan qo'shganda u yana o'tmas burchak bo'ladi yoki yoyiq burchakdan katta burchak bo'lib qolishi mumkin. Bu esa, yuqoridagi kabi mulohazalar yuritishni tamomila o'zgartirib yuboradi.

Shunday qilib, 3- holni yana ikkiga ajratib ko'rishga to'g'ri keladi. Berilgan CAB o'tmas burchak va CAN uchburchak:

a) AC to'g'ri chiziqqa nisbatan bir tomonda joylashgan (8.5- chizma).

b) AC to'g'ri chiziqning ikki tomonida joylashgan (8.6- chizma).

a) holda CAB burchak CAN burchakning biror qismi bo'lishi ko'rib chiqildi va $\angle CAB = \angle DBA$ tenglikka keldik.

b) holda bunday xulosaga kela olmaymiz: DBA to'g'ri burchak avvalgidek ikkita burchak ayirmasi kabi ifodalanadi, ya'ni $\angle DBA = \angle DBN - \angle ABN$.

Ammo, CAB o'tmas burchak, DBN burchak bilan qo'shilganda $360°$ ga teng, ya'ni $\angle CAN + \angle DBN = 360°$ (8.6- chizma) bo'ladi.

O'rta perpendikularlar kesishgan N nuqta har doim, 8.6- chizmadagidek joylashgan bo'lishini ko'rsatamiz.

Chizma bo'laklari joylashganligi yaxshiroq ko'rinishi uchun 8.6-chizmada qo'shimcha yasashni amalga oshiramiz.

b) Aytaylik $p = 3k + 2$ bo'lsin. U holda

$$p^2 + 2 = (3k + 2)^2 + 2 = 3(3k^2 + 4k + 2)$$

munosabatga ko'ra $p^2 + 2$ son bu gal ham tub bo'la olmaydi.

d) Aytaylik $p = 3$ bo'lsin. U holda $p^2 + 2 = 9 + 2 = 11$ tub son bo'lib, masala sharti bajariladi. Endi

$$p^3 + 2 = 27 + 2 = 29$$

tub son ekanligidan masala yechimi kelib chiqadi.

4_1. Bu sonlar teng.

4_2. O'rta arifmetik va o'rta geometrik miqdorlar orasidagi munosabatga ko'ra

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{10x_n} = \frac{x_n^3}{10} + \frac{3}{10x_n} + \frac{3}{10x_n} + \frac{3}{10x_n} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{x_n^3}{10} \cdot \frac{3}{10x_n} \cdot \frac{3}{10x_n} \cdot \frac{3}{10x_n}} =$$

$$= 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{27}{10}} = \frac{2\sqrt[4]{27}}{5} > \frac{4}{5}.$$

Endi berilgan ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Masala shartiga ko'ra $x_1 = 2 \in (1;\ 3)$ va $1 < x_{n-1} < 3$ bo'lsa,

$x_n = \dfrac{x_n^4 + 9}{10x_{n-1}} \in (1;\ 3)$ bo'ladi, ya'ni barcha n larda $x_n \in (1;3)$. Demak,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^4 - 10x_n^2 + 9}{10x_n} = \frac{\left(x_n^2 - 9\right)\left(x_n^2 - 1\right)}{10x_n} < 0$$

bo'lgani uchun barcha $n \geq 2$ larda $2 = x_n \leq x_2 = \frac{5}{4}$ bo'ladi.

4_3. $\{20;\ 21;\ 22;\ 23;\ 24\}$.

4_4. $-(y - z)(x - y)(x - z)$.

4_5. To'g'ri to'rtburchakning diagonali d va tomonlari uzunliklari a, b bo'lsin. U holda $a^2 + b^2 = d^2$ bo'ladi. Shuningdek, $S = ab$ bo'lishi ravshan.

Demak, agar a, b va d sonlar natural bo'lsa, u holda ab ko'paytmani 12 ga bo'linishini isbotlash kerak. Buning uchun esa ab ni 4 ga ham, 3 ga ham bo'linishini ko'rsatamiz.

1) 4 ga bo'linishi. Agar a va b juft sonlar bo'lsa, u holda $4 \,\vdots\, ab$ ekani tushunarli.

Faraz qilaylik a va b toq bo'lsin. U holda d juft son va $a^2 + b^2 \equiv$ $\equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$, $d^2 \equiv 0 (\mathrm{mod} 4)$ ya'ni $a^2 + b^2 \neq d^2$ bo'ladi.

Endi a toq, b juft bo'lsin. U holda d toq son va $a=2k+1$, $b = 2m$, $d=2n+1$ ($m, n, k\in Z$) bo'ladi. $a^2+b^2=d^2$ tenglik esa $4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 = 4n^2 + 4n + 1$ yoki $k(k+1) + m^2 = n(n+1)$ ko'rinishga keladi. Bundan $k(k+1)$ va $n(n+1)$ sonlari juft bo'lgani uchun m juft son degan xulosaga kelamiz, ya'ni $m=2t$, $t\in N$. U holda $b=4t$ va $S=ab=4at\,\vdots\,4$ bo'ladi.

2) 3 ga bo'linishi. Agar a va b lardan birortasi 3 ga bo'linsa, u holda $ab\,\vdots\,4$ ekani tushunarli.

Agar a va b lardan birortasi 3 ga bo'linmasa, u holda $a^2+b^2 \equiv 2(\mathrm{mod}3)$, $d^2\neq 2(\mathrm{mod}3)$ ekanligini tekshirish qiyin emas, ya'ni $a^2+b^2\neq d^2$ bo'ladi.

5_1. Masala shartiga ko'ra $1+np=k^2$, $k\in N$ bo'lsin. Bundan $np=k^2-1$, $n=\frac{(k-1)(k+1)}{p}\in N$ va p tub son bo'lgani uchun $(k-1)\,\vdots\,p$ yoki $(k+1)\,\vdots\,p$ bo'ladi.

Faraz qilaylik $(k-1)\,\vdots\,p$, ya'ni $k-1=pt$, $t\in N$ bo'lsin. U holda

$$n+1=\frac{(k-1)(k+1)}{p}+1=t(pt+2)+1=pt^2+2t+1=$$

$$=\underbrace{t^2+t^2+\ldots+t^2}_{p-1\text{ ta}}+(t+1)^2$$

bo'ladi.

Xuddi shuningdek, $(k+1)\,\vdots\,p$, ya'ni $k=pt-1$, $t\in N$ bo'lganda ham

$$n+1=\frac{(k-1)(k+1)}{p}+1=(pt-2)+1=t\,\underbrace{t^2+t^2+\ldots+t^2}_{p-1\text{ ta}}+(t-1)^2$$

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib masala to'liq yechildi.

5_2. Shartga ko'ra $0<c<1$ bo'lgani uchun, $0<1-c<1$ bo'ladi. U holda o'rta arifmetik va o'rta geometrik qiymatlar orasidagi munosabatdan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<\sqrt{ab}+$$

$$+\sqrt{(1-a)(1-b)}\le\frac{a+b}{2}+\frac{(1-a)+(1-b)}{2}=1.$$

Isbot tugadi.

5$_3$. $P(x) = x^2 + x$ yoki $P(x) = x^2 + x$, $P(x) = 0$, $P(x) = -\frac{1}{2}$.

5$_4$. $OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = 2R$.

5$_5$. a) Faraz qilaylik, $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i}$, $p_i \in Z$, $q_i \in N$, $\alpha_i \in Z$ va q_1, q_2, ..., q_n sonlarning EKUKi d bo'lsin. U holda $\alpha_i = \frac{p_i}{d}$ chizmaida ifodalaymiz, bu yerda $d_i = \frac{p_i}{q_i}$, $d \in Z$;

$$\{\alpha_i\} + \{(d-1)\alpha_i\} = \left\{\frac{d_i}{d}\right\} + \left\{(d-1\frac{d_i}{d}\right\} = \left\{\frac{d_i}{d}\right\} + \left\{-\frac{d_i}{d}\right\} = 1$$

bo'lgani uchun

$$\sum_{i=1}^{n}\{\alpha_i\} + \sum_{i=1}^{n}\{(d-1)\alpha_i\} = n$$

bo'ladi. Ya'ni $\sum_{i=1}^{n}\{\alpha_i\}$ yoki $\sum_{i=1}^{n}\{(d-1)\alpha_i\}$ sonlardan kamida bittasi $\frac{n}{2}$ dan kichik emas.

b) Bu hol uchun javob: yo'q. Chunki, agar $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \frac{1}{2}$ deb olsak, u holda toq k lar uchun

$$\sum_{i=1}^{n}\{k\alpha_i\} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{k}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

bo'lib, bu yig'indining qiymati $\frac{n}{2}$ dan katta bo'la olmaydi.

6$_1$. $f(x) = c + \frac{x}{c}$.

6$_2$. Qidirilayotgan yig'indini quyidagicha almashtiramiz:

$$a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + ... + a^2_{70} = a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 + a^2_5 + (a^2_6 - 1) + (a^2_7 - 1) + (a^2_8 - 1) + ... + (a^2_{70} - 1) + 65. \quad (1)$$

Masala shartiga ko'ra

$$a^2_6 - 1 = (a_6 + 1)(a_6 - 1) = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot (a^2_6 - 1) = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$$

bo'ladi, chunki $a_6 + 1 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$.

Xuddi shuningdek,

$$a^2{}_7 - 1 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ \ldots \cdot a_7 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6,$$

$$a^2{}_8 - 1 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_8 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7,$$

. . . .

$$a^2{}_{70} - 1 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{70} - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{69}$$

bo'ladi. Bu qiymatlarni (1) tenglikka olib borib qo'yamiz:

$$a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3 + \ldots + a^2{}_{70} = a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3 + a^2{}_4 + a^2{}_5 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 -$$
$$- a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_7 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 + \ldots$$
$$+ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_{70} - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_{69} + 65 = a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3 +$$
$$+ a^2{}_4 + a^2{}_5 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_{70} + 65 = 1^2 + 2^2 +$$
$$+ 3^2 + 4^2 + 5^2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 65 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_{70} = 55 - 120 +$$
$$+ 65 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_{70} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_{70}.$$

Demak, $a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3 + \ldots + a^2{}_{70} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_{70}$ tenglik isbotlandi.

6₃. Avval $4(x+y)^3 \in 27x^2y$ tengsizlikni isbotlaymiz.

Uchta son o'rta arifmetigi va o'rta geometrigi orasidagi munosabatga ko'ra $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y \in 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{4} \cdot y}$ bo'ladi.

Bundan $4(x+y)^3 = 4\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y\right)3 \geq 27x^2y$ kelib chiqadi.

Oxirgi tengsizlikdan foydalanib,

$$4(a + b + c)3 = 4\left(\left(a + \frac{c}{2}\right) + \left(b + \frac{c}{2}\right)\right)^3 \geq 27\left(a + \frac{c}{2}\right)^2\left(b + \frac{c}{2}\right)$$

tengsizlikni yozamiz. Endi

$$\left(a + \frac{c}{2}\right)^2\left(b + \frac{c}{2}\right) \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

tengsizlikni isbotlasak yetarli. Qavslarni ochib

$$\left(a^2 + ac + \frac{c^2}{4}\right)\left(b + \frac{c}{2}\right) = a^2b + \frac{a^2c}{2} + \frac{c^2b}{4} + \frac{c^3}{8} + \frac{ac^2}{2} + abc$$

tenglikka kelamiz.

Isbotlanishi kerak bo'lgan tengsizlik a, b, c larga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun, umumiylikka ziyon etkazmagan holda $a \geq b \geq c$ deb olishimiz mumkin. U holda $a \geq c$ dan $a^2c \in ac^2$; $a \geq b$ dan $abc \geq b^2c$ kelib chiqadi. Demak,

$$ab^2 + \frac{a^2c}{2} + \frac{ac^2}{2} + abc + \frac{c^2b}{4} + \frac{c^3}{8} \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

bo'ladi. Bu yerda $\frac{c^2b}{4} + \frac{c^3}{8} \geq 0$ tashlab yuborildi. Isbot tugadi.

6_4. Berilgan tenglamadan $m(m + n)^2 = n^2(m - n)^2$ tenglikka kelamiz. Masala shartiga ko'ra m va n butun son, demak, $m - n$ ham butun son bo'ladi. Bulardan $1 + \frac{m}{n}$ ning ham butun son bo'lishi kelib chiqadi. Shuning uchun $\frac{m}{n} = k$ belgilash kiritamiz. Demak, $m = kn$ va $k \neq 1$. Buni hosil qilingan tenglikka qo'yib, quyidagilarni topamiz:

$$kn(kn + n)^2 = n^2(kn - n)^2 \Rightarrow kn(k + 1)^2 = n^2(k - 1)^2 \Rightarrow$$

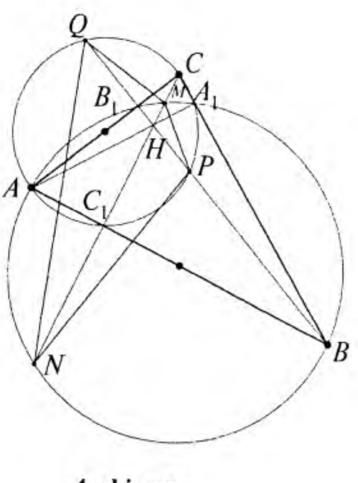
$$\Rightarrow k(k + 1)^2 = n(k - 1)^2 \Rightarrow n = \frac{k\cdot(k+1)^2}{(k-1)^2}; \; m = \frac{k^2\cdot(k+1)^2}{(k-1)^2}.$$

Bu ifodalarning butun qiymatlari berilgan masala javobi bo'ladi. m soni n ga karrali bo'lgani uchun n ning qiymatini tekshirish yetarli. Quyidagicha

$$\frac{k\cdot(k+1)^2}{(k-1)^2} = \frac{k\cdot(k-1+2)^2}{(k-1)^2} = k + \frac{4k(k-1)+4k}{(k-1)^2} = k + \left(\frac{2k}{k-1}\right)^2$$

almashtirishdan so'ng, ko'rinib turibdiki bu ifoda faqat $k = -1, 0, 2, 3$ lar uchun butun son bo'ladi.

Demak, javob: $(n; m)$: = (0; 0), (18; 36), (12; 36).



4-chizma.

6_5. Aytaylik uchburchakning balandliklari H nuqtada kesishsin. Masala shartiga moslab chizma chizamiz (4-chizma).

Bu aylanalarning ikkinchi kesishish nuqtasi A_1 uchun, AA_1 ham ABC uchburchak balandligi bo'ladi.

Endi, $MPNQ$ to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkinligini isbotlash uchun $QH \cdot HP = MH \cdot HN$ ekanini isbotlasak yetarli, chunki vatarlar xossasiga ko'ra bu tenglik o'rinli.

Shu xossaga ko'ra, AC diametrli aylanada $QH \cdot HP = AH \cdot HA_1$ tenglik, AB diametrli aylanada $MH \cdot HN = AH \cdot HA_1$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bulardan esa $QH \cdot HP = MH \cdot HN$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $MPNQ$ to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin ekan.

7$_1$. Agar $\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{x_i^n} = y_i$, $i = 1, 2, \ldots$ belgilash kiritsak, u holda

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1 \qquad (1)$$

bo'ladi va berilgan tengsizlik o'rniga

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+(n^n-1)y_1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1+(n^n-1)y_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{1+(n^n-1)y_n}} \geq 1$$

ni isbotlash kerak. Shuningdek,

$$1 + (n^n - 1)y_i = z_i^n \Rightarrow (z_1^n - 1)(z_2^n - 1) \ldots (z_n^n - 1) = (n^n - 1)^n \qquad (2)$$

larga ko'ra

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n} \geq 1$$

ni isbotlashga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n} < 1$ bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} \frac{z_1-1}{z_1} > \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \cdots + \frac{1}{z_n} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{1}{z_2 z_3 \cdots z_n}}, \\ \frac{z_2-1}{z_2} > \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3} + \cdots + \frac{1}{z_n} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{1}{z_2 z_3 \cdots z_n}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{z_n-1}{z_n} > \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_{n-1}} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{1}{z_2 z_3 \cdots z_{n-1}}} \end{cases}$$

lar o'rinli bo'ladi. Ularni hadma-had ko'paytirib, quyidagiga kelamiz:

$$\frac{(z_1-1)(z_2-1)\cdots(z_n-1)}{z_1 z_2 \cdots z_n} > (n-1)^n \frac{1}{z_1 z_2 \cdots z_n}.$$

Bundan

$$(z_1 - 1)(z_2 - 1) \cdots (z_n - 1) > (n - 1)^n \qquad (3)$$

kelib chiqadi. Endi $z_i = 1 + t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ belgilashga ko'ra $t_i > 0$ va

$$t_1 \cdot t_2 \cdot \cdot \cdot t_n > (n-1)^n \tag{4}$$

bo'ladi. Bularni (2) ga qo'yib

$$t_1 \cdot t_2 \cdots t_n \cdot \left(z_1^{n-1} + z_1^{n-2} + \cdots + z_1 + 1\right)\left(z_2^{n-1} + z_2^{n-2} + \cdots + z_2 + 1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(z_n^{n-1} + z_n^{n-2} + \cdots + z_n + 1\right) = (n-1)^n \tag{5}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Isbotni davom ettirishdan oldin quyidagi lemmani isbotlab olamiz.

1-l e m m a. *Ixtiyoriy musbat* a_i, b_i, ... c_i, $i = 1, 2, \ldots n$ *sonlari uchun*

$$\left(a_1^n + b_1^n + \ldots + c_1^n\right)\left(a_2^n + b_2^n + \ldots + c_2^n\right)\ldots\left(a_n^n + b_n^n + \ldots + c_n^n\right) \geq$$
$$\geq \left(a_1 a_2 \ldots a_n + b_1 b_2 \ldots b_n + \ldots + c_1 c_2 \ldots c_n\right)^n$$

munosabat o'rinli.

I s b o t i. Agar $a_i + b_i + \ldots + c_i = A_i^n, i = 1, 2, \ldots, n$ belgilasak, u holda

$$A_1 A_2 \cdots A_n = a_1 a_2 \cdots a_n + b_1 b_2 \cdots b_n + \cdots + c_1 c_2 \cdots c_n$$

tengsizlikni isbotlash talab qilinadi. Shuni isbotlaylik:

$$n\left(\frac{a_1}{A_1}\cdot\frac{a_2}{A_2}\cdots\frac{a_n}{A_n} + \frac{b_1}{A_1}\cdot\frac{b_2}{A_2}\cdots\frac{b_n}{A_n} + \cdots + \frac{c_1}{A_1}\cdot\frac{c_2}{A_2}\cdots\frac{c_n}{A_n}\right) \leq \frac{a_1^n}{A_1^n} +$$
$$+\frac{a_2^n}{A_2^n} + \cdots + \frac{a_n^n}{A_n^n} + \frac{b_1^n}{A_1^n} + \frac{b_2^n}{A_2^n} + \cdots + \frac{b_n^n}{A_n^n} + \cdots + \frac{c_1^n}{A_1^n} + \frac{c_2^n}{A_2^n} + \cdots + \frac{c_n^n}{A_n^n} = n$$

munosabatdan

$$a_1 a_2 \cdots a_n + b_1 b_2 \cdots b_n + \cdots + c_1 c_2 \cdots c_n = A_1 A_2 \cdots A_n$$

kelib chiqadi.

2-l e m m a. *Ixtiyoriy n ta musbat* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *sonlari uchun*

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1)\cdots(x_n + 1) \geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + 1\right)^n$$

tengsizlik o'rinli.

I s b o t i.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+1} = n \geq n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i+1}\right)^{\frac{1}{n}} + n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_i+1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

munosabatdan lemmadagi tengsizlik kelib chiqadi.

Asosiy tengsizlikni isbotlashda davom etamiz. 1-lemmaga ko'ra

$$\left(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}+\cdots+z_1+1\right)\left(z_2^{n-1}+z_2^{n-2}+\cdots+z_2+1\right)\cdots$$

$$\cdots\left(z_n^{n-1}+z_n^{n-2}+\cdots+z_n+1\right)\geq$$

$$\geq\left(\sqrt[n]{(z_1z_2\ldots z_n)^{n-1}}+\sqrt[n]{(z_1z_2\ldots z_n)^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{(z_1z_2\ldots z_n)}+1\right)^n=$$

$$=\left(\sqrt[n]{((1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n))^{n-1}}+\sqrt[n]{((1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n))^{n-2}}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\sqrt[n]{(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)}+1\right)^n\geq \text{(2-lemmaga asosan)}\geq$$

$$\geq\left(\left(\sqrt[n]{t_1t_2\cdots t_n}+1\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{t_1t_2\cdots t_n}+1\right)^{n-2}+\ldots+\left(\sqrt[n]{t_1t_2\cdots t_n}+1\right)+1\right)^n>$$

$$>\text{((4) ga ko'ra)}>\left(n^{n-1}+n^{n-2}+\ldots+n+1\right)^n=\left(\frac{n^n-1}{n-1}\right)^n.$$

Shunday qilib,

$$\left(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}+\cdots+z_1+1\right)\left(z_2^{n-1}+z_2^{n-2}+\cdots+z_2+1\right)\cdots$$

$$\cdots\left(z_n^{n-1}+z_n^{n-2}+\cdots+z_n+1\right)>\left(\frac{n^n-1}{n-1}\right)^n.$$

Yuqorida keltirilgan (5) tenglikka ko'ra $t_1\cdot t_2\cdot\cdots t_n<(n-1)^n$.

Bu esa (4) ga zid. Demak, $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\geq 1$. Masala yechildi.

7_2. Aytaylik $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_m^{\alpha_m}$ bo'lsin. Bu yerda p_1, p_2, p_3,...,p_m lar tub sonlar va $p_1<p_2<p_3<\ldots<p_m$. Ma'lumki, $d(n)=$ $=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_m+1)$. Masala shartiga ko'ra $n=$ $=(d(n))^2$. Shuning uchun, $\alpha_i=2\beta_i$ bo'ladi. Demak,

$$p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_m^{\alpha_m}=(2\beta_1+1)(2\beta_2+1)(2\beta_3+1)\cdots(2\beta_m+1).$$

Bundan $p_i\geq 3$ kelib chiqadi. Bernulli tengsizligiga ko'ra

$$p_i^{\beta_i}\geq 1+\beta_i(p_i-1)\geq 1+2\beta_i$$

bo'ladi. Ammo, $p_i^{\beta_i} \geq 1 + 2\beta_i$ munosabatda tenglik belgisi, faqat $p_i = 3$ va $\beta_i = 1$ bo'lganda bajariladi. Shunday qilib, $\alpha_i = 2\beta_i = 2$ va $n = 32 = 9$. Demak, javob: $n = 9$.

7$_3$. Umumiy holda $(x; y) = d$ deb olamiz: $x = dm$, $y = dn$, $(m; n) = 1$. U holda

$$(d \cdot m)^{d(m+n)} = (d \cdot n)^{d(n-m)} \Rightarrow (d \cdot m)^{m+n} = (d \cdot n)^{n-m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d^{2m} \cdot m^{m+n} = n^{n-m}$$

bo'lib, n^{n-m} ning m^{m+n} ga bo'linishi kelib chiqadi: $n^{n-m} \vdots\, m^{m+n}$. Demak, $m = 1$ va $d^2 = n^{n-1}$. Bu yerda, biror $q \in N$ uchun $n = q^2$ yoki $n - 1 = 2q$ deb olaylik.

Agar $n = q^2$ bo'lsa, u holda $d^2 = \left(q^{q^2-1}\right)^2$, ya'ni $d = q^{q^2-1}$ va $x = q^{q^2-1}$, $y = q^{q^2-1} \cdot q^2 = q^{q^2+1}$ bo'ladi.

Agar $n - 1 = 2q$ bo'lsa, u holda $n = 2q + 1$, bo'lib $d^2 = (2q + 1)^{2q}$ yoki $d = (2q + 1)^q$ bo'ladi. Bundan $x = (2q + 1)^q$, $y = (2q + 1)^{2q+1}$ bo'ladi.

Shunday qilib, $(x; y) := \{(q^{q^2-1}; q^{q^2+1}), ((2q+1)^q; (2q+1)^{2q+1})\}$, $q \in N$ javoblarga ega bo'lamiz.

7$_4$. Oson isbotlanadigan $\dfrac{1}{(a+b)(c+d)} \geq \dfrac{4}{(a+b+c+d)^2}$ tengsizlikka ko'ra

$$\frac{x\sqrt{x}}{yz} = \frac{x\sqrt{x}\left(x+\frac{1}{3}\right)}{yz\left(x+\frac{1}{3}\right)} \geq \frac{2x^2\sqrt{\frac{1}{3}}}{\left(x+\frac{1}{3}\right)(y+z)} \geq \frac{8x^2\sqrt{\frac{1}{3}}}{\left(x+y+z+\frac{1}{3}\right)^2}$$

bo'ladi. Xuddi shuningdek,

$$\frac{y\sqrt{y}}{z+x} \geq \frac{8x^2\sqrt{\frac{1}{3}}}{\left(x+y+z+\frac{1}{3}\right)^2} \quad \text{va} \quad \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{8z^2\sqrt{\frac{1}{3}}}{\left(x+y+z+\frac{1}{3}\right)^2}$$

tengsizliklar hosil qilinadi. Bu tengsizliklarni qo'shib,

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}\geq\frac{8\sqrt{\frac{1}{3}}}{\left(x+y+z+\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

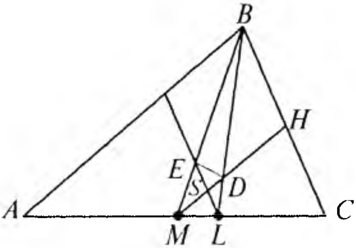
tengsizlikka kelamiz. Agar $\frac{8\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{3}\left(x+y+z+\frac{1}{3}\right)^2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ yoki unga teng kuchli $16(x^2+y^2+z^2)\geq 3(x+y+z+\frac{1}{3})^2$ tengsizlikni isbotlasak, u holda bizga kerakli tengsizlik kelib chiqadi.

Masala shartiga ko'ra $x+y+z\geq 1$. Bundan

$4(x+y+z)-3(x+y+z)\geq 1\Rightarrow 4(x+y+z)\geq 3(x+y+z)+1\Rightarrow$ $\Rightarrow 4(x+y+z)\geq 3(x+y+z+\frac{1}{3})$.

Oxirgi tengsizlikning har ikki tomonini kvadratga oshirsak, $16(x+y+z)^2\geq 9(x+y+z+\frac{1}{3})^2$ bo'ladi. Shuningdek, $16(x+y+z)^2\geq 3(x+y+z+\frac{1}{3})^2$ bo'lishi ravshan. Shunday qilib berilgan tengsizlik isbot bo'ldi.

7_5. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: $EL\cap MD=S$, $MD\cap BC=N$, $AM=MC$, $AB\parallel MN$. Bulardan $BN=NC$ kelib chiqadi. Shuningdek, $EL\parallel BC$ bo'lgani uchun $ES=SL$ bo'ladi (5-chizma). Agar $\angle ABC=b$ desak, u holda $\angle DBC=\frac{\beta}{2}$, $\angle ELD=\frac{\beta}{2}$, $\angle ABL=\frac{\beta}{2}$ bo'lib, $AB\parallel MN$ dan $\angle BDN=\angle CDL=\frac{\beta}{2}$ kelib chiqadi. Qolaversa, $ES=SL=SD$ lardan $\angle EDL=90°$ kelib chiqadi. Demak, $DE\perp BL$.



5-chizma.

8_1. Agar $0<x<\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\sin x$ va $\cos x$ lar musbat qiymatga ega. Shuning uchun o'rta arifmetik va o'rta geometrik qiymatlar orasidagi munosabatga ko'ra quyidagini yozishimiz mumkin:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}.$$

Ma'lumki, $x\in(0, \frac{\pi}{2})$ uchun $0 < \sin 2x < 1$. Demak,

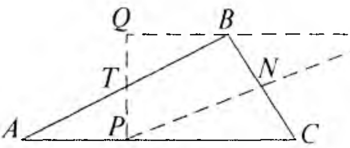
$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geq 2\sqrt{2}.$$

8₂. 270.

8₃. Odam tepaga tomon yurib turgan eskalatorda pastga tushib, yana qaytib chiqqanda kamroq vaqt sarflaydi.

8₄. $1009\cdot 997\cdot 991$.

8₅. Aytaylik ABC uchburchak berilgan bo'lsin. Uning A va C uchlaridagi burchaklarini o'tkir deb olamiz. AB tomon o'rtasini T, BC tomon o'rtasini N orqali belgilaylik. T nuqtaning AC to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasi P bo'lsin. Shuningdek, P nuqtaning Tga va Nga nisbatan simmetriklarini, mos ravishda, Q va R orqali belgilaymiz (6- chizmaga qarang).



6-chizma.

Ushbu $\angle A < 90°$ va $\angle C < 90°$ munosabatlarga ko'ra P nuqta AC kesmaning ichida yotishi kelib chiqadi.

ABC uchburchakni PT va PN kesmalar bo'yicha kesib uchta chizma hosil qilamiz. Ulardan to'g'ri burchakli uchburchak yasash mumkin. Haqiqatan, ATP uchburchak BTQ uchburchakka, CNP uchburchak BNR uchburchakka teng. Shuningdek,

$$\angle QBT+\angle ABC+\angle RBN=\angle BAC+\angle ABC+\angle BCA=180°.$$

Demak, $\triangle BTQ+\triangle BNR+\square BTPN=\triangle PQR$, $\angle PQR=\angle TPA=90°$.

9₁. 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31.

9₂. $a = 3$ yoki $a = 2$, $b = 5$, $c = 11$.

9₃. Umumiylikka zarar yetkazmagan holda $x=1+\varepsilon$, $y=1-\varepsilon$, $0\leq\varepsilon\leq 1$ deb olamiz. U holda

$$x^2y^2(x^2+y^2)=(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^2((1-\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)^2)=$$
$$=(1-\varepsilon^2)^2(2+2\varepsilon^2)=2(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2)=2(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^4)\leq 2.$$

9₄. $-3 \pm \sqrt{9+\sqrt{2003}}$.

9₅. $S = \frac{36+25\sqrt{3}}{4}$.

10₁. 1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg.

10₂. 3456 ta.

10₃. Agar $x \geq 0$ bo'lsa, u holda tengsizlikning to'g'riligi ravshan. Agar $x \leq -1$ bo'lsa, u holda $x^{10} + x^5 \geq 0$, $x^6 + x^3 \geq 0$, $x^2 + x \geq 0$ va $1 > 0$ tengsizliklarni qo'shib berilgan tengsizlikni hosil qilamiz. Endi $-1 < x < 0$ bo'lsin. U holda

a) agar $x^5 + x + 1 > 0$ bo'lsa, u holda $x^{10} + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^{10} + x^6 + x^2(1+x) + x^5 + x + 1 > 0$ bo'ladi.

b) agar $x^5 + x + 1 \leq 0$ bo'lsa, u holda $x^{10} + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^5(x^5 + x + 1) + x^2(1+x) + x + 1 > x^5(x^5 + x + 1) \geq 0$ bo'ladi.

10₄. $n = 5$.

10₅. Aytaylik berilgan uchburchak balandliklari mos ravishda h_a, h_b, h_c va yuzi S bo'lsin. U holda $h_a + h_b = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} < \frac{2S}{2c} + \frac{2S}{2c} = \frac{2S}{c} = h_c$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu esa uchburchak tengsizligiga zid. Demak, tomonlari h_a, h_b, h_c bo'lgan uchburchak mavjud emas.

11₁. Ma'lumki $z = n + mi$ kompleks son uchun $|z|^2 = n^2 + m^2$ tenglik bilan aniqlangan $|z|$ son z ning moduli deyiladi. Shuningdek, kompleks sonning moduli uchun $|z^2| = |z|^2$ munosabat o'rinli bo'lishini tekshirish qiyin emas. Agar z kompleks sonni $z = \sqrt{5}\, n + im$ ko'rinishda olsak, u holda $|z|^2 = 5n^2 + m^2$ bo'lishi ravshan. Endi, $z^2 = 5n^2 - m^2 + 2\sqrt{5}\, nmi$ bo'lgani uchun $|z^2|^2 = (|z|^2)^2$ tenglik

$$(5n^2 - m^2)^2 + 5(2nm)^2 = (5n^2 + m^2)^2$$

kabi yoziladi. Demak, $x = 5n^2 - m^2$, $y = 2nm$, $z = 5n^2 + m^2$ lar biz qidirayotgan yechimlar bo'ladi.

11₂. $r = 2$.

11₃. $|x^2| - |x|^2 = 200$.

11₄. Sistemaning ikkinchi tenglamasini

$$(y - (4 + 5x))(y - (4 - x)) = 0$$

ko'rinishga keltiramiz. Bundan, $y = 4 + 5x$ yoki $y = 4 - x$ kelib chiqadi. Agar $y = 4 + 5x$ bo'lsa, u holda birinchi tenglamaga ko'ra $x = -2$, $x = 0$ va $x = 19$ bo'ladi. Agar $y = 4 - x$ bo'lsa, u holda birinchi tenglamadan $x = -2$, $x = 0$ va $x = -5$ bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib berilgan tenglamaning yechimlari $(-2; 6)$, $(-2; -6)$, $(0; 4)$, $(-5; 9)$, $(19; 99)$ lardan iborat.

11_5. $\angle B = 35°$.

12_1. Masala shartiga ko'ra $a^2 + b\sqrt{2} \in Q$ va $b^2 + b\sqrt{2} \in Q$ bo'ladi. U holda

$$a^2 + b - b^2 - a = (a - b)(a + b - \frac{1}{2}) \in Q \qquad (1)$$

munosabatni yozishimiz mumkin. Agar $c \in M$ bo'lsa, u holda $c^2 + a\sqrt{2} \in Q$ va $c^2 + b\sqrt{2} \in Q$ bo'ladi. Bulardan $(a - b)\sqrt{2} \in Q$ bo'lishi ravshan. Oxirgidan va (1) dan $\frac{a + b - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \in Q$ kelib chiqadi. Bu esa $(a + b)\sqrt{2} \in Q$ ekanini bildiradi. Demak, $(a - b)\sqrt{2} \in Q$ ga ko'ra $2a\sqrt{2} \in Q$, ya'ni $a\sqrt{2} \in Q$ bo'ladi.

12_2. Dastlab $m = n = 0$ desak, $2a_0 = a_0$, ya'ni $a_0 = 0$ bo'ladi. Agar $m = n + 2$ desak, u holda masala shartiga ko'ra $a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(a_{2n+4} + a_2n)$ bo'ladi. Agar $n = 0$ desak, u holda masala shartidan $2a_m = \frac{1}{2} a_{2m}$, ya'ni $a_{2m} = 4a_m$ kelib chiqadi. Demak, $a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(4a_{n+2} + 4a_n) = 2a_{n+2} + 2a_n$ yoki $4a_{n+1} + 4a_1 = 2a_{n+2} + 2a_n$ bo'ladi. Bundan $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ hosil qilinadi. Bu rekkurent formulaga topilgan va berilgan $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ qiymatlarni qo'yib $a_2 = 4$, $a_3 = 9, \dots, a_n = n^2$ bo'lishini aniqlaymiz. Oxirgining o'rinliligi matematik induksiya metodi bilan isbotlanadi.

Isboti. Yuqoridagilarga ko'ra $n = 0$ va $n = 1$ da $a_2 = 4$, $a_3 = 9$ bo'lib, formula to'g'ri. Endi $a_n = n^2$ va $a_{n+1} = (n + 1)^2$ deb olib, $a_{n+2} = (n + 2)^2$ bo'lishini ko'rsatamiz. Bu qiymatlarni topilgan rekkurent formulaga qo'ysak,

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 = 2(n + 1)^2 - n^2 + 2 = 2n^2 + 4n + 2 - n^2 + 2 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$$

bo'ladi. Demak, $a_n = n^2$ munosabat to'g'ri. Shuning uchun $a_{2005} = 2005^2$.

12_3. Agar $y = -f^2(x)$ desak, o'ng tomon 0 bo'ladi. Demak, qandaydir bir a qiymatda $f(a) = 0$ bo'lishi kerak. Shuning uchun berilgan munosabatda $x = a$ desak, $f(f(y)) = y$ yoki $f(f(x)) = x$ bo'ladi. Bu yerda $x = 0$ desak, $f(f(0)) = 0$ kelib chiqadi. Endi berilgan tenglikda $x = y = 0$ desak, $f(f(0)) = f^2(0)$ bo'lib, yuqoridagi bilan birga $f(0) = 0$ bo'lishi ta'minlanadi. Berilgan tenglamada $y = 0$ desak,

$$f(xf(x)) = f^2(x) \qquad (*)$$

ga kelamiz. Bu yerda $x = f(x)$ desak, $f(f(x)f(f(x))) = f^2(f(x))$ va $f(f(x)) = x$ ga asosan $f(f(x)x) = x^2$ bo'ladi. Oxirgidan, (*) ga ko'ra $f^2(x) = x^2$, ya'ni $f(x) = \pm x$ bo'lishi kelib chiqadi. Javob: $f(x) = \pm x$.

12_4. Dastlab, $a_n^2 - 2\dfrac{a_n}{n} + \dfrac{1}{n^2} \geq 2\left(\dfrac{a_2}{2} + \dfrac{a_3}{3} + \dots + \dfrac{a_{n-1}}{n-1}\right) + \dfrac{1}{n^2}$ bo'lishini isbotlaymiz.

Ushbu $\left(a_n - \dfrac{1}{n}\right)^2 = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\right)^2 = a_{n-1}^2$ munosabatga ko'ra yuqoridagi tengsizlik o'rniga $a_{n-1}^2 \quad 2\left(\dfrac{a_2}{2} + \dfrac{a_3}{3} + \dots + \dfrac{a_{n-1}}{n-1}\right) + \dfrac{1}{n^2}$ tengsizlikni isbotlash yetarli. Va xokazo, shu kabi mulohaza yuritib isbotlanishi kerak bo'lgan tengsizlik quyidagicha bo'lishiga kelamiz:

$$a_2^2 > 2 \cdot \frac{a_2}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

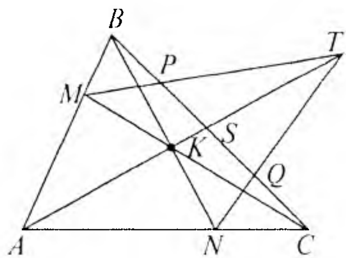
Bu esa, belgilashga asosan, $(1 + \frac{1}{2})^2 > 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$ yoki $1 > \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$ tengsizlikdan iborat.

Oxirgi tengsizlikni isbotlaymiz. Tekshirilishi oson bo'lgan $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ tengsizlikka ko'ra, $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2} < 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} < 1 - \dfrac{1}{n} < 1$ bo'ladi.

12_5. Aytaylik AK va BC to'g'ri chiziqlar S nuqtada, MP va AS to'g'ri chiziqlar T nuqtada, TN va BC to'g'ri chiziqlar Q nuqtada kesishsin (7- chizma). Agar $AKQN$ to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkinligini isbotlasak masala yechiladi.

Berilgan ABC uchburchakda Cheva teoremasiga ko'ra $\frac{BS}{SC}\cdot\frac{CN}{AN}\cdot\frac{MA}{MB}=1$ va $MN \parallel BC$. Bulardan $\frac{CN}{AN}=\frac{MB}{MA} \Rightarrow \frac{BS}{CS}=1$. Demak, $BS = SC$ bo'ladi. Shunday qilib $AKPB$ to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkinligidan $SK \cdot SA = SP \cdot SB$, ya'ni, $SP = SQ$ bo'lishini ko'rsatish yetarli. Hosil bo'lgan ABS uchburchakni AT kesadi. Menelay teoremasiga ko'ra $\frac{TS}{SA}\cdot\frac{MA}{MB}\cdot\frac{BP}{PS}=1$.

Xuddi shu kabi $\frac{TS}{SA}\cdot\frac{NA}{NC}\cdot\frac{CQ}{QS}=1 \Rightarrow \frac{BP}{PS}=\frac{CQ}{QC}$. Demak, $BS = SC$ va $SP = SQ$.



7- chizma.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *A. A. A'zamov, B. K. Xaydarov.* Matematika sayyorasi. „O'qituvchi", T., 1993.
2. *T. A. Azlarov, M. A. Mirzaahmedov, D. O. Otaqo'ziyev, M. A. Sobirov, S. T. To'laganov.* Matematikadan qo'llanma (maktab o'qituvchilari uchun qo'llanma). 2-qism. O'qituvchi, T., 1990.
3. *S. I. Afonina.* Matematika va go'zallik. „O'qituvchi", T., 1987.
4. *Sh. A. Ayupov, B. B. Rixsiyev, O. Sh. Qo'chqorov.* Matematika olimpiadalari masalalari. I, II qismlar, „FAN" T., 2004.
5. *В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович.* Наглядная топология. Наука, М., 1982.
6. *С.Г.Гиндикин.* Рассказы о физиках и математиках. Наука, М., 1985.
7. *А.П.Доморяд.* Математические игры и развлечения. ГосИздФиз-мат.лит., М.,1961.
8. *Г. Дэвенпорт.* Высшая арифметика. Наука, М., 1965.
9. Закономерности развития современной математики. Отв.редактор М. И. Панов, Наука, М.,1987.
10. *Е. И. Игнатьев.* В царстве смекалки. Наука, М., 1978.
11. Математический цветник. Сост. и ред. А.Дэвид Кларнер. Мир, М.. 1983.
12. *О. Оре.* Приглашение в теорию чисел. Наука, М., 1980.
13. *Д. Пойа.* Как решать задачу. Гос.уч-пед.изд. М., 1959.
14. *Г. Радемахер, О. Теплиц.* Числа и фигуры. Наука, М., 1966.
15. „Fizika, matematika va informatika" jurnali. 2001—2005- yillar sonlari.
16. Yosh matematik qomusiy lug'ati. Maxsus muharrir A. A'zamov. Qomuslar Bosh tahririyati, T., 1991.

MUNDARIJA

Q39 **Yunusov A. S.**
Qiziqarli matematika va olimpiada masalalari: Akademik litsey, kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'l. / A. S. Yunusov, S. I. Afonina, M. A. Berdikulov, D. I. Yunusova – T.: «O'qituvchi» NMIU, 2007. – 216 b.

I. Yunusov A.S. va boshq.

ББК 22.1z 722

Abduxalik Salijanovich Yunusov,
Stanislava Ivanovna Afonina,
Musirmonkul Abdullayevich Berdikulov,
Dilfuza Isroilovna Yunusova

QIZIQARLI MATEMATIKA VA OLIMPIADA MASALALARI

Akademik litsey, kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'llanma

«O'qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent — 2007

Muharrir *N.G'oipov*
Rasmlar muharriri *Sh.Xo'jayev*
Tex. muharrir: *S.Tursunova*
Musahhih *M.Mirsalikov*
Kompyuterda sahifalovchi *M. Sagdullayeva*

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 7.10.07. Bichimi $60\times90^{1}/_{16}$. Kegli 11 shponli. Tayms garn. Ofset bosma usulida bosildi. Shartli b. t. 13,5. Nashr. t. 13,5. 2000 nusxada bosildi. Buyurtma № 136.

O'zbekiston Matbuot va axborot agentligining „O'qituvchi" nashriyot-matbaa ijodiy uyi. Toshkent—129, Navoiy ko'chasi 30-uy. // Toshkent, Yunusobod dahasi, Murodov ko'chasi, 1- uy. Shartnoma 09—86—07.