ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ТОШКЕНТ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Г.Худойберганов, А.Ворисов, Ҳ.Мансуров

КОМПЛЕКС АНАЛИЗ

(Маърузалар)

ТОШКЕНТ
«УНИВЕРСИТЕТ»
1998

Мазкур қўлланма университетларнинг математика, механика, тадбиқий математика ва информатика йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлайдиган факультетлар талабалари учун мўлжалланган.

Қўлланма бакалаврлар учун мўлжалланган ўқув дастури асосида ёзилган бўлиб, унда комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси баён этилган.

СЎЗ БОШИ

Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг IX сессиясида Президентимиз И.А.Каримовнинг «Баркамол авлод - Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори» мавзусидаги сўзлаган нутқида «Келажак авлод ҳақида қайғуриш, соғлом баркамол наслни тарбиялаб етиштиришга интилиш бизнинг миллий хусусиятимиздир» деб таъкидланди.

Мазкур сессияда таълим-тарбия тизимининг истиқболини белгилаб берувчи кадрлар тайёрлашнинг миллий дастури қабул қилинди. Миллий дастурнинг мақсади, вазифалари ва уни рўёбга чиқариш босқичлари белгилаб берилди. Жумладан, таълим дарсликдан бошланиши, дарслик яратишга энг илғор, энг шарафли вазифа сифатида қараш кўрсатиб ўтилди.

Маълумки, Мирзо Улуғбек номидаги Тошкент Давлат университети Олий таълимнинг 22 йўналиши бўйича малакали кадр(мутахассис)лар тайёрловчи республикамизнинг етакчи олий ўқув юрти ҳисобланади. Шу муносабат билан университетлар учун мазкур йўналишлар бўйича меёрий ҳужжатлар: давлат таълим стандартлари, ўқув режалари, дастурлар ишлаб чиқилди, нашр қилинди ва ўқув жараёнига тадбиқ этилди. Навбатдаги долзарб, масала ушбу бакалаврлар тайёрлаш ўқув дастурлари асосида замон талабига жавоб берувчи дарслик ва қўлланмалар яратишдан иборатдир. Бу масалани ечиш борасида университет профессор-ўқитувчилари томонидан қатор режа ва тадбирлар белгиланди. Талабаларни ўқув қўлланмалари билан тезкорликда таъминлаш мақсадида тажрибали профессор-ўқитувчилар томонидан муайян фанлар бўйича маърузалар матни нашрга тайёрланиб, чоп этила бошланди.

Ушбу қўлланма математика, механика, тадбиқий математика ва информатика йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлаш ўқув режасининг асосий фанларидан бири – комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси (Комплекс анализ)га бағишланган. Уни ёзилишида юқорида қайд этилган ўқув дастури асос қилиб олинди. Муаллифлар кўп йиллар давомида талабалар учун ўқилган маърузалар, олиб борилган амалий машғулотлардан фойдаландилар. Маърузалар матни чоп этишга тайёрлангунга қадар бир неча маротаба синовдан ўтказилди. Муаллифлар ҳар бир маърузани, мавзуни қисқа, математик қатъий, ўз навбатида талаба томонидан ўқишли бўлишига эришишни ўз олдиларига мақсад қилиб қўйдилар.

Мазкур қўлланма саккиз бобдан иборат. Унда дастлаб комплекс сонлар, комплекс аргументли функциялар лимити, узлуксизлиги; голоморф функциялар, элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган акслантиришлар, сўнгра комплекс аргументли функцияларнинг интеграллари, Коши теоремаси, Кошининг интеграл формуласи, даражали ҳамда Лоран қаторлари, голоморф функцияларнинг ҳоссалари, чегирмалар ва уларнинг татбиқлари баён этилган.

Айни пайтда, бакалаврлар учун мўлжалланган ўқув дастурида комплекс анализнинг давом, геометрик принциплар бўлимлари бўлмаганлиги сабабли биз уларнинг баёнини кейинги босқич мутахассислик (магистрлар) учун ёзиладиган қўлланмага қолдирдик.

Китоб қўлёзмасини ўқиб, унинг яхшиланишига ўз хиссаларини қўшган профессор А.Саъдуллаевга, доцентлар Б.Шойим-қулов, Т.Тўйчиевларга муаллифлар миннатдорчилик билдирадилар.

Қўлланмадаги камчиликларни бартараф этишга ва уни яхшилашга қаратилган фикр-мулоҳазаларини билдирган ҳамкасбларга муаллифлар олдиндан миннатдорчилик изҳор этадилар.

1-БОБ

КОМПЛЕКС СОНЛАР

1-§. Комплекс сон тушунчаси

Текисликда Декарт координаталар системаси берилган бўлсин. Абсциссалар ўқида жойлашган нуқталар тўпламини R_x, ординаталар ўқида жойлашган нуқталар тўпламини R_y орқали белгилайлик.

Ихтиёрий $x \in R_x$, $y \in R_y$ ҳақиқий сонлардан (x,y) жуфтликни ҳосил қиламиз. Бунда, агар $y=0$ бўлса, $(x,0)=x$ деб қараймиз. Бундай жуфтликлардан ташкил топган

$$C = \{(x,y): x \in R_x, y \in R_y\}$$

тўпламда арифметик амаллар киритилиши мумкин.

Агар $(x_1,y_1) \in C$, $(x_2,y_2) \in C$ жуфтликлар учун $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ бўлса, бу жуфтликлар ўзаро тенг дейилади ва $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ каби белгиланади.

Ушбу $(x_1+x_2, y_1+y_2) \in C$ жуфтлик (x_1,y_1) ҳамда (x_2,y_2) жуфтликлар йиғиндиси дейилади ва $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$ каби белгиланади:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2).$$

(x_1,y_1) жуфтликдан (x_2,y_2) жуфтликнинг айирмаси деб шундай (x,y) жуфтликка айтиладики,

$$(x,y)+(x_2,y_2)=(x_1,y_1) \qquad (1)$$

бўлади. Бу айирма

$$(x,y)=(x_1,y_1)-(x_2,y_2)$$

каби ёзилади. (1) дан

$$(x+x_2,y+y_2)=(x_1,y_1)$$

ва демак,

$$\begin{matrix} x+x_2=x_1 & & x=x_1-x_2 \\ & \Rightarrow & \\ y+y_2=y_1 & & y=y_1-y_2 \end{matrix}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2).$$

Ушбу

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) \in \mathbf{C}$$

жуфтлик (x_1, y_1) ҳамда (x_2, y_2) жуфтликларнинг кўпайтмаси дейилади ва

$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)$$

каби белгиланади:

$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad (2)$$

(x_1, y_1) жуфтликнинг (x_2, y_2) жуфтликка нисбати деб шундай (x, y) жуфтликка айтиладики,

$$(x_2, y_2)\cdot(x, y) = (x_1, y_1), \qquad (x_1^2 + y_2^2 > 0)$$

бўлади. Нисбат

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)}$$

каби белгиланади.

(1) дан фойдаланиб (2) ни қуйидагича ёзамиз:

$$(x_2 x - y_2 y,\ x_2 y + y_2 x) = (x_1, y_1)$$

Бу тенгликдан

$$x_2 x - y_2 y = x_1$$
$$x_2 y + y_2 x = y_1$$

яъни

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$\frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right).$$

Шундай қилиб, **C** тўплам элементлари устида тўрт амал - қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амаллари киритилади. Бу амаллар қуйидаги хоссаларга эга:

1^0. Коммутативлик:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1),$$
$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_2, y_2)\cdot(x_1, y_1).$$

2^0. Ассоциативлик:

$$[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)],$$
$$[(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)]\cdot(x_3, y_3) = (x_1, y_1)\cdot[(x_2, y_2)\cdot(x_3, y_3)].$$

3^0. Дистрибутивлик:

$$[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]\cdot(x_3,y_3)=(x_1,y_1)(x_3,y_3)+(x_2,y_2)(x_3,y_3)$$

Бу хоссалар содда исботланади. Биз улардан бирини, масалан, 3^0-хоссанинг исботини келтирамиз.

Равшанки,

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2).$$

Унда, бир томондан

$$[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]\cdot(x_3,y_3)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\cdot(x_3,y_3)=$$
$$=((x_1+x_2)x_3-(y_1+y_2)y_3,(x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3)=$$
$$=(x_1x_3+x_2x_3-y_1y_3-y_2y_3,x_1y_3+x_2y_3+y_1x_3+y_2x_3)$$

иккинчи томондан эса

$$(x_1,y_1)(x_3,y_3)+(x_2,y_2)(x_3,y_3)=(x_1x_3-y_1y_3,x_1y_3+x_3y_1)+$$
$$+(x_2x_3-y_2y_3,x_2y_3+x_3y_2)=$$
$$=(x_1x_3-y_1y_3+x_2x_3-y_2y_3,x_1y_3+x_3y_2+x_2y_3+x_3y_1)$$

бўлишини топамиз. Бу ва (1), (2) муносабатлардан 3^0-хоссанинг исботи келиб чиқади.

Юқорида келтирилган

$$C=\{(x,y):x\in R_x,y\in R_y\}$$

тўплам элементлари устида арифметик амалларнинг бажарилиши ва уларнинг 1^0-3^0- хоссаларга эга эканлиги, табиий равишда C тўплам элементини сон деб қараш имконини юзага келтиради.

Одатда, C тўплам элементи (x,y) жуфтлик комплекс сон дейилади ва у битта харф билан белгиланади:

$$z=(x,y)$$

Демак, C тўплам комплекс сонлар тўпламини ифодалар экан.

Маълумки, $\forall x\in R_x$ учун

$$(x,0)=x.$$

Бу эса ҳақиқий сон комплекс соннинг хусусий холи эканини билдиради. Демак, $R_x\subset C$.

2-§. Комплекс соннинг кўринишлари

1^0. Комплекс соннинг алгебраик кўриниши. Ушбу $(0,1)\in C$ комплекс сонни олиб, уни i орқали белгилайлик:

$$(0,1)=i.$$

Равшанки,

$$(0,1)\cdot(0,1)=i\cdot i=i^2$$

бўлади. Кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1.$$

Демак,

$$i^2=-1.$$

Квадрати -1 га тенг бўлган ҳақиқий сон мавжуд бўлмаганлиги сабабли i ҳақиқий сон эмас. Уни мавҳум бирлик деб юритилади.

Энди $(0,\beta)\in \mathbf{C}$ комплекс сонни олайлик, бунда β - ихтиёрий ҳақиқий сон. Бу сонни қуйидагича

$$(0,\beta)=(\beta\cdot 0-0\cdot 1,\ \beta\cdot 1+0\cdot 0) \qquad (3)$$

ёзиш мумкин. Равшанки,

$$(\beta\cdot 0-0\cdot 1,\ \beta\cdot 1+0\cdot 0)=(\beta,0)(0,1) \qquad (4)$$

бўлади. Агар

$$(\beta,0)=\beta,\quad (0,1)=i$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (3) ва (4) муносабатлардан

$$(0,\beta)=\beta\cdot i=i\cdot\beta$$

эканлиги келиб чиқади.

Демак,

$$(\alpha,0)=\alpha,\qquad (0,1)=i,\qquad (0,\beta)=i\cdot\beta. \qquad (5)$$

Энди ихтиёрий $(x,y)\in \mathbf{C}$ комплекс сонни олайлик. Уни қуйидагича

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)$$

ёзиш мумкин. (5) муносабатлардан фойдаланиб

$$(x,y)=x+iy$$

бўлишини топамиз. Бу комплекс соннинг алгебраик кўринишини ифодалайди.

Шундай қилиб, ихтиёрий $z=(x,y)$ комплекс сонни

$$z=x+iy \qquad (6)$$

кўринишда ёзиш мумкин экан. Одатда комплекс соннинг (6) кўриниши унинг алгебраик кўриниши дейилади. Бунда x - ҳақиқий сон z комплекс соннинг-ҳақиқий қисми дейилади ва у Re z каби белгиланади:

$$x=\operatorname{Re} z$$

(Re лотинча Realis - «ҳақиқий» деган маънони англатувчи сўздан олинган).

У ҳақиқий сон z комплекс соннинг мавҳум қисми дейилади ва у Im z каби белгиланади:

$$y=\operatorname{Im} z$$

(Im лотинча Imaginarins - «мавхум» деган маънони англатувчи сўздан олинган).

Комплекс соннинг бу кўринишда икки

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

комплекс сонларнинг тенглиги, йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати қуйидагича

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

бўлади.

Ихтиёрий $z = x + iy$ комплекс сон берилган бўлсин. Ушбу $x - iy$ комплекс сон $z = x + iy$ комплекс соннинг қўшмаси дейилади ва $\bar{z}$ каби белгиланади:

$$\bar{z} = x - iy.$$

Қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

1) $z + \bar{z} = 2x$.

2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $\quad (\overline{z_2} \neq 0)$

5) $\overline{(\bar{z})} = z$

Бу тенгликлар тўғрилигини кўрсатиш қийин эмас. Биз улардан бирининг, масалан $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Айтайлик,

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

бўлсин. Унда

$$\bar{z}_1 = x_1 - iy_1, \quad \bar{z}_2 = x_2 - iy_2$$

бўлади. Равшанки,

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$$

Демак,

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$$

Иккинчи томонда

$$(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

бўлиши келиб чиқади.

1-эслатма. n та $z_1,z_2,\dots,z_n$ комплекс сонларнинг йиғиндиси ҳамда кўпайтмаси юқоридагидек киритилади ва улар учун мос хоссалар ҳамда тенгликлар ўринли бўлади. Жумладан

$$\overline{z_1+z_2+\ldots+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_n},$$

$$\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_n},$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу $(2+i)^3$ комплекс соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисмини топинг.

Равшанки,

$$(2+i)^3=8+3\cdot 4\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3$$

Агар

$$i^2=-1,\quad i^3=i^2\cdot i=-i$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$(2+i)^3=2+11i$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\mathrm{Re}(2+i)^3=2,\qquad \mathrm{Im}(2+i)^3=11.$$

2. Ушбу

$$z_1=1+\sqrt{3}\cdot i,\qquad z_2=1-\sqrt{3}\cdot i,$$

комплекс сонларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатини топинг.

Юқорида келтирилган қоидалардан фойдаланиб топамиз:

$$z_1+z_2=(1+\sqrt{3}\cdot i)+(1-\sqrt{3}\cdot i)=(1+1)+(\sqrt{3}-\sqrt{3})\cdot i=2,$$

$$z_1-z_2=(1+\sqrt{3}\cdot i)-(1-\sqrt{3}\cdot i)=(1-1)+(\sqrt{3}+\sqrt{3})\cdot i=2\sqrt{3}i,$$

$$z_1\cdot z_2=(1+\sqrt{3}\cdot i)\cdot(1-\sqrt{3}\cdot i)=(1\cdot 1)+\sqrt{3}(-\sqrt{3}))\cdot(-1)+$$
$$+(1\cdot(-\sqrt{3})+\sqrt{3}\cdot 1)i=4+0\cdot i=4,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{1\cdot 1+\sqrt{3}(-\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2}+\frac{\sqrt{3}\cdot 1-1\cdot(-\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2}i=$$
$$=\frac{-2}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{4}i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3.Ихтиёрий

$$z_1 = x_1 + i \cdot y_1, \qquad z_2 = x_2 + i \cdot y_2, \qquad (x_2^2 + y_2^2 > 0)$$

комплекс сонлар учун

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}$$

бўлишини кўрсатинг.

$\frac{z_1}{z_2}$ нисбатнинг сурат ва махражини $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

Равшанки,

$$(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2) = (x_2 \cdot x_2 - y_2 \cdot (-y_2)) + (x_2(-y_2) + x_2 y_2) \cdot i =$$
$$= x_2^2 + y_2^2 + 0 \cdot i = x_2^2 + y_2^2.$$

Натижада,

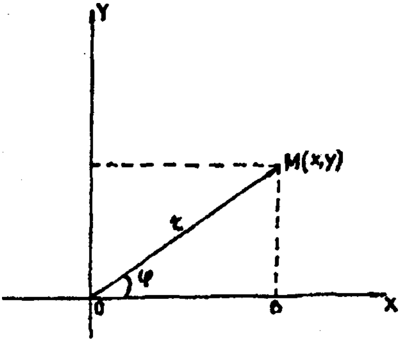
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}$$

бўлади.

2⁰. **Комплекс сонининг тригонометрик кўриниши.** Ихтиёрий

$$z = x + iy \qquad (6)$$

комплекс сонни олайлик. Текисликда, координаталари x ва y бўлган M(x,y) нуқтани қараймиз (1-чизма).



1-чизма

Маълумки , $\overrightarrow{OM}$ шу М нуқтанинг радиус-вектори дейилади. Бу радиус-векторнинг узунлиги r , унинг Ох ўқи билан ташкил этган бурчаги φ бўлсин (1- чизма).

1-чизмада тасвирланган ОМВ тўғри бурчакли учбурчакдан топамиз:

$$x = r\cdot\cos\varphi, \qquad y = r\cdot\sin\varphi. \qquad (0\le\varphi<2\pi)$$

Унда (6) комплекс сон қуйидагича

$$z = x+iy = r\cdot\cos\varphi + i\cdot r\cdot\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) \qquad (7)$$

ифодаланади. Одатда комплекс соннинг бу ифодаси унинг тригонометрик кўриниши дейилади. Бунда r мусбат сон z комплекс соннинг модули дейилиб, $|z|$ каби белгиланади: $r=|z|$, φ бурчак эса z комплекс соннинг аргументи дейилиб, $\arg z$ каби белгиланади: $\varphi=\arg z$.

Яна ΔOMB дан, Пифагор теоремасига кўра

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \quad (0\le r<+\infty) \qquad (8)$$

ҳамда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \text{яъни} \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad (9)$$

бўлишини топамиз.

Демак, $z=x+iy$ комплекс соннинг модули (8) формула, аргументи эса (9) формула ёрдамида топилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$z=-1+\sqrt{3}\cdot i$$

комплекс соннинг модулини ҳамда аргументини топинг.

Берилган комплекс сонда $x=-1$, $y=\sqrt{3}$ бўлади. (8) ва (9) формулаларга кўра

$$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}, \qquad \text{яъни} \quad \varphi=\frac{2\pi}{3}$$

бўлади.

2. Ушбу

$$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

комплекс сонни тригонометрик кўринишда ифодаланг.

Берилган комплекс сонда $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлиб

$$r=|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,$$

$$\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

бўлади. У ҳолда (7) формулага кўра берилган комплекс сон қуйидаги

$$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

тригонометрик кўринишга эга бўлади.

3°. Комплекс сонннинг кўрсаткичли кўриниши. Фараз қилайлик, $z\in C$ сонннинг модули r $(0\le r<+\infty)$ аргументи эса φ $(0\le\varphi<2\pi)$ бўлсин. Унда бу комплекс сон

$$z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$$

тригонометрик кўринишга эга бўлади.

Комплекс анализ курсида муҳим бўлган қуйидаги

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi \qquad (10)$$

Эйлер формуласидан ((10) тенгликнинг исботи 3-боб, 5-§ да келтирилади) фойдалансак, z комплекс сонннинг ушбу

$$z=re^{i\varphi} \qquad (11)$$

ифодасига келамиз. Бу комплекс сонннинг кўрсаткичли ифодаси дейилади.

Шундай қилиб, биз мазкур параграфда комплекс сонннинг турли кўринишларини келтирдик. Қаралаётган масаланинг талабига қараб комплекс сонннинг у ёки бу кўринишидан фойдаланилади.

Масалан, иккита

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1},\quad z_2=r_2e^{i\varphi_2}$$

комплекс сонлар учун $z_1\cdot z_2$ ва $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2\ne0)$ ларнинг ифодалари содда кўринишга эга бўлади:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad (12)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \qquad (13)$$

Юқоридаги (12), (13) муносабатлардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1^0. Иккита z_1 ва z_2 комплекс сонлар кўпайтмасининг модули шу сонлар модулларининг кўпайтмасига тенг:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

аргументи эса шу сонлар аргуменларининг йиғиндисига тенг:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

2^0. Иккита z_1 ва z_2 комплекс сонлар нисбати $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ нинг модули шу сонлар модулларининг нисбатига тенг:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

аргументи эса шу сонлар аргументларининг айирмасига тенг:

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

3-§. Комплекс сонни даражага кўтариш ва ундан илдиз чиқариш

Айтайлик $z_1, z_2, \ldots, z_n$ комплекс сонлар берилган бўлсин. Иккита комплекс сонлар кўпайтмаси сингари бу n та комплекс сонлар кўпайтмаси

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \ldots \cdot r_n \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)} \qquad (14)$$

бўлади. Бунда $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $k = 1,2,\ldots,n$. Хусусан $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ бўлса, (14) тенглик ушбу

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \qquad (15)$$

кўринишга эга бўлиб, бу z комплекс соннинг n - даражаси дейилади.

Равшанки,

$$r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi).$$

Демак,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \qquad (16)$$

Одатда (16) формула Муавр формуласи дейилади.

Айтайлик, $z \in \mathbf{C}$ комплекс сон ва тайинланган $n \in \mathrm{N}$ сонлар берилган бўлсин.

Ушбу

$$\xi^n = z \qquad (17)$$

тенгликни қаноатлантирувчи ξ комплекс сон z комплекс сондан олинган n - даражали илдиз дейилади ва у $\sqrt[n]{z}$ каби белгиланади:

$$\xi = \sqrt[n]{z}.$$

Берилган комплекс сон қуйидаги

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (18)$$

тригонометрик кўринишда бўлсин.

ξ комплекс сонни ушбу

$$\xi = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad (19)$$

кўринишда излаймиз.

Унда (17), (18) ва (19) муносабатларга кўра

$$[\rho(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

бўлади.

Энди

$$[\rho(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

формулани эътиборга олиб, қуйидаги

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

тенгликка келамиз. Ундан

$$\left.\begin{aligned} \rho^n \cos n\psi &= r\cos\varphi \\ \rho^n \sin n\psi &= r\sin\varphi \end{aligned}\right. \qquad (20)$$

бўлиши келиб чиқади.

Бу тенгликларни квадратга кўтариб, сўнг уларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$\rho^{2n}(\cos^2 n\psi + \sin^2 n\psi) = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \rho^{2n} = r^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}.$$

Топилган ρ нинг қийматини (20) тенгликлардаги ρ нинг ўрнига қўйсак, ушбу

$$\cos n\psi = \cos\varphi$$

$$\sin n\psi = \sin\varphi$$

тенгламалар ҳосил бўлади.

Агар маълум бўлган

$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

тенгликларни эътиборга олсак, унда

$$n\psi=\varphi+2k\pi,$$

яъни

$$\psi_k=\frac{\varphi+2k\pi}{n} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

бўлишини топамиз.

Демак, изланаётган $\xi=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$ комплекс соннинг модули

$$\rho=\sqrt[n]{r}.$$

аргументи эса

$$\psi_k=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

бўлар экан. Демак

$$\xi=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}) \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1) \qquad (21)$$

бўлади.

Мисол. Ушбу $\sqrt[4]{-1}$. илдизнинг барча қийматларини топинг.

Аввало $z=-1\in C$ сонни тригонометрик кўринишда ёзиб оламиз. Равшанки, бу соннинг модули 1 га, аргументи эса π га тенг:

$$|-1|=1, \quad \arg(-1)=\pi$$

Демак,

$$-1=1(\cos\pi+i\sin\pi).$$

(21) формулага кўра

$$\sqrt[4]{-1}=1\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \qquad (k=0,1,2,3)$$

бўлди. Бу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$k=0$ бўлганда $\quad z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1$ бўлганда $\quad z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$

$k=2$ бўлганда $\quad z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};$

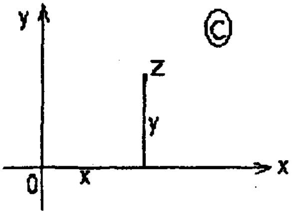
$k=3$ бўлганда $\quad z_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

4-§. Комплекс сонларни геометрик тасвирлаш. Комплекс текислик. Риман сфераси

Ихтиёрий z $(z \in C)$ комплекс сонни олайлик. Бу сон (x,y) жуфтлик билан аниқлансин:

$$z=(x,y) \quad (x \in R_x, y \in R_y).$$

Текисликда абциссаси x га, ординатаси эса у га тенг бўлган нуқта z комплекс соннинг геометрик тасвири дейилади (2-чизма).



2-чизма

Хусусан, $(x,0)=x$ кўринишдаги комплекс соннинг (ҳақиқий соннинг) геометрик тасвири абциссалар ўқида жойлашган нуқта бўлади. $(0,y)=yi$ кўринишдаги комплекс соннинг (соф мавҳум соннинг) геометрик тасвири эса ординаталар ўқида жойлашган нуқта бўлади.

Абциссалар ўқи ҳақиқий ўқ, ординаталар ўқи эса мавҳум ўқ деб юритилади.

Демак, C тўпламдан олинган ҳар бир комплекс сонга текисликда, бу сонни геометрик тасвирловчи битта нуқта мос келар экан.

Энди текисликда ихтиёрий нуқта олайлик. Унинг абциссаси x, ординатаси y бўлсин. Бу сонлардан тузилган (x,y) жуфтлик битта комплекс сонни аниқлайди. Олинган нуқтага шу комплекс сонни мос қўйиш билан текисликдаги ҳар бир нуқтага битта комплекс сон мос келишини аниқлаймиз.

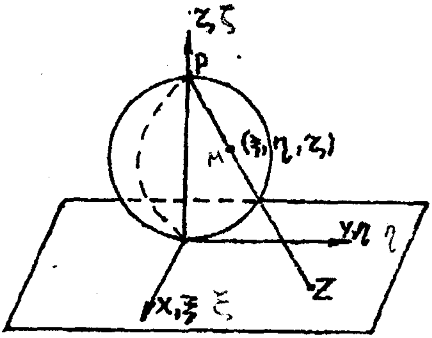
Шундай қилиб, комплекс сонлар тўплами C билан текисликдаги барча нуқталар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади. Бу эса C тўпламнинг геометрик тасвирини текислик деб қараш имконини беради. Бундай текислик комплекс сонлар текислиги деб аталади ва у ҳам C каби белгиланади.

Комплекс сонни бошқача ҳам тасвирлаш мумкин. Бунинг учун R^3 фазода $O\xi\eta\zeta$ Декарт координаталар системасини олиб, унда маркази $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ нуқтада, радиуси $\frac{1}{2}$ га тенг бўлган ушбу

$$S=\left\{(\xi,\eta,\zeta)\in R^3:\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right\} \tag{22}$$

сферани қараймиз. Равшанки, бу сфера $O\zeta$ ўқни (0,0,0) ҳамда (0,0,1) нуқталарда кесади. Сферанинг (0,0,1) нуқтасини P ҳарфи билан белгилаб, уни қутб деб юритамиз.

Айтайлик. $O\xi$ ҳамда $O\eta$ координата ўқлари мос равишда комплекс текисликдаги ҳақиқий ҳамда мавҳум ўқлар билан уст-ма-уст тушсин (3-чизма).



3-чизма

Ихтиёрий z комплекс сонни олайлик. Унинг комплекс текисликдаги тасвири бўлган z нуқта билан сферанинг P нуқтасини тўғри чизиқ кесмаси ёрдамида бирлаштирамиз. Бу тўғри чизиқ сферани M нуқтада кесади (3-чизма). Бу нуқта z комплекс соннинг сферадаги тасвири дейилади.

Келтирилган қоидага кўра комплекс текисликдаги ҳар бир нуқтага (комплекс сонга) сферада битта нуқта мос келишини кўрамиз.

Энди сферанинг ихтиёрий A нуқтасини (P нуқтадан бошқа) олайлик. P ва A нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ комплекс текисликни бирор нуқтада кесади. Уни сферанинг A нуқтасига мос қўямиз. Бу қоидага кўра сферадаги ҳар бир нуқтага комплекс текисликда битта нуқта мос келишини кўрамиз.

Шундай қилиб, комплекс текисликдаги барча нуқталар тўплами билан ($\mathbf{C}$ билан) сферанинг $S\backslash\{P\}$ нуқталари тўплами ўзаро бир қийматли мосликда бўлар экан.

Шуни таъкидлаш лозимки, комплекс текисликдаги z нуқта координата бошидан узоқлаша борган сари унинг сферадаги тасвири P нуқтага (қутбга) яқинлаша боради.

Агар комплекс текисликда $z=\infty$ деб аталувчи «нуқта» (чексиз узоқлашган нуқта) олинса ва уни сферадаги P га мос келувчи нуқта деб қаралса, унда

$$\overline{C} = C \cup \{z = \infty\}$$

тўплам билан S сфера нуқталаридан иборат тўплам ўзаро бир қийматли мосликда бўлади:

$$S \sim \overline{C}$$

Бу мослик комплекс текисликнинг стереографик проекцияси дейилади.

Одатда $\overline{C}$ тўплам кенгайтирилган комплекс текислик, S сирт эса Риман сфераси деб аталади. Сферадаги нуқта координаталари билан комплекс текисликдаги мос нуқта координаталари орасидаги боғланишни топиш қийин эмас.

Айтайлик, комплекс текисликдаги $z=x+iy$ нуқтага S сферадаги $A = A(\xi,\eta,\zeta)$ нуқта мос келсин (3-чизма).

Равшанки, $P = P(0,0,1) \in S$ ҳамда $z = x+iy \in C$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси (параметрик тенгламаси) қуйидагича

$$\begin{cases} \xi = tx, \\ \eta = ty, \\ \zeta = 1-t \end{cases} \qquad (23)$$

бўлади, бунда t=0 бўлганда P нуқта, t=1 бўлганда эса z нуқта ҳосил бўлади.

Комплекс текисликдаги z нуқта координаталари x ва y лар маълум бўлганда A нуқтанинг координаталари ξ,η,ζ лар қуйидагича аниқланади.

Маълумки, $A = A(\xi,\eta,\zeta)$ нуқта ҳам (23) тўғри чизиқда ҳам S сферада ётади. Шуни эътиборга олиб, $\xi = tx$, $\eta = ty$, $\zeta = 1-t$ ларни сфера тенгламаси

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

даги ξ, η ва ζ ларнинг ўрнинга қўйиб топамиз:

$$t^2x^2+t^2y^2+\frac{1}{4}-t+t^2=\frac{1}{4}\Rightarrow t\left(x^2+y^2+1\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\left(|z|^2+1\right)=1\Rightarrow t=\frac{1}{1+|z|^2}.$$

Демак,

$$\begin{aligned}\xi &= tx = \frac{x}{1+|z|^2},\\ \eta &= ty = \frac{y}{1+|z|^2}, \qquad (24)\\ \zeta &= 1-t = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.\end{aligned}$$

бўлади.

Сферадаги A нуқтанинг координаталари ξ,η,ζ лар маълум бўлганда текисликдаги z нуқтанинг координаталари x ва y лар қуйидагича аниқланади: (23) тўғри чизиқ тенгламасидан

$$t=1-\zeta$$

бўлишини топиб, уни (23) системанинг биринчи иккита тенгламасидаги t нинг ўрнига қўямиз:

$$\xi=(1-\zeta)x,$$
$$\eta=(1-\zeta)y.$$

Бу тенгликлардан

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}, \qquad y=\frac{\eta}{1-\zeta},$$

бўлиши келиб чиқади.

Комплекс текисликда

$$z_1=x_1+iy_1, \qquad z_2=x_2+iy_2$$

нуқталарни олайлик. Бу нуқталарга мос келувчи сферадаги нуқталар, яъни уларнинг стереографик проекциялари

$$A_1=A_1(\xi_1,\eta_1,\zeta_1), \qquad A_2=A_2(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$$

бўлсин.

Ушбу

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

миқдор z_1 ва z_2 нуқталар орасидаги масофа (Евклид масофаси) дейилади.

A_1 $A_1(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ ва $A_2 = A_2(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$ нуқталар орасидаги масофа z_1 ва z_2 нуқталар орасидаги сферик масофа деб аталади ва у $\rho(z_1,z_2)$ каби белгиланади.

Равшанки, $A_1 = A_1(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ ва $A_2 = A_2(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$ нуқталар орасидаги масофа

$$\rho(z_1,z_2) = \sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}$$

бўлади (қаралсин, [1], 14-боб, 1-§).

Юқорида келтирилган (23) формулага кўра

$$\xi_1 = \frac{x_1}{1+|z_1|^2}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{1+|z_1|^2}, \quad \zeta_1 = \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}$$

$$\xi_2 = \frac{x_2}{1+|z_2|^2}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{1+|z_2|^2}, \quad \zeta_2 = \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}$$

бўлишини эътиборга олиб z_1 ва z_2 нуқталар орасидаги сферик масофани топамиз:

$$\rho(z_1,z_2) = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}. \qquad (25)$$

Кенгайтирилган комплекс текислик $\overline{C}$ да $z_2 = \infty$ бўлган ҳолда (25) формула

$$\rho(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \qquad (26)$$

кўринишда бўлади.

5-§. Комплекс текисликда чизиқлар ва соҳалар

1^0. Комплекс текисликда чизиқлар. Эгри чизиқ геометриянинг дастлабки, айни пайтда муҳим тушунчаларидан бўлиб, уни текисликда нуқтанинг узлуксиз ҳаракати натижасида қолдирган изи деб қараш мумкин.

Ҳаракатдаги нуқтанинг координаталарини x ва y дейилса, равшанки, улар бирор t ўзгарувчининг узлуксиз функциялари бўлади:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

Айни пайтда (x,y) жуфтлик комплекс сонни ифодалагани сабабли, уни

$$z = x + iy$$

кўринишда ёзиш мумкин. Натижада

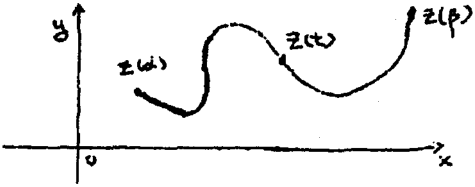
$$z = x + iy = x(t) + iy(t) = z(t)$$

бўлади.

Демак,

$$z = z(t), \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

функция $[\alpha,\beta]$ сегментни комплекс текислик нуқталарига акслантиради ва бу нуқталар тўплами эса комплекс текисликда эгри чизиқни ифодалар экан. Бунда $z_0 = z(\alpha)$ эгри чизиқнинг бошланғич нуқтаси, $z_1 = z(\beta)$ эса эгри чизиқнинг сўнги (охирги) нуқтаси бўлади (4-чизма).



4-чизма

Агар $z(\alpha) = z(\beta)$ бўлса, яъни эгри чизиқнинг бошланғич ва охирги нуқталари устма-уст тушса, бундай эгри чизиқ ёпиқ дейилади.

Агар $z = z(t)$ эгри чизиқда t ўзгарувчининг иккита турли t_1 ва t_2 $(t_1 \neq t_2)$ қийматларига мос келадиган $z(t_1)$ ва $z(t_2)$ нуқталар ҳам турлича бўлса, у ҳолда эгри чизиқ Жордан чизиғи дейилади. Бошқача қилиб айтганда Жордан чизиғи $[\alpha,\beta]$ сегментни ўзаро бир қийматли ва узлуксиз акслантириш натижасидаги аксидан иборат бўлар экан.

2^0. Комплекс текисликда очиқ ва ёпиқ тўпламлар. Соҳалар. Бирор $z_0 \in C$ нуқта ҳамда ε мусбат сонни олайлик.

1-таъриф. Ушбу

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи z $(z \in \mathbf{C})$ нуқталардан иборат тўплам z_0 нуқтанинг атрофи (ε-атрофи) дейилади ва $U(z_0,\varepsilon)$ каби белгиланади. Демак,

$$U(z_0,\varepsilon) = \left\{z \in \mathbf{C}: |z - z_0| < \varepsilon\right\}.$$

Шунга ўхшаш $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ нуқтанинг атрофи (ε-атрофи) тушунчаси киритилади:

$$\overline{U}(z_0,\varepsilon) = \left\{z \in \overline{\mathbf{C}}: \rho(z, z_0) < \varepsilon\right\}$$

Ушбу

$$\left\{z \in \mathbf{C}: 0 < |z - z_0| < \varepsilon\right\}$$

$$\left(\left\{z \in \overline{\mathbf{C}}: 0 < \rho(z, z_0) < \varepsilon\right\}\right)$$

тўплам $z_0 \in \mathbf{C}$ $\left(z_0 \in \overline{\mathbf{C}}\right)$ нуқтанинг ўйилган атрофи дейилади.

Фараз қилайлик, комплекс текислик $\mathbf{C}$ да бирор D тўплам берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар $z_0 \in D$ нуқта ўзининг бирор атрофи билан шу D тўпламга тегишли бўлса, z_0 нуқта D тўпламнинг ички нуқтаси дейилади.

3-таъриф. Барча нуқталари ички нуқталардан иборат тўплам очиқ тўплам дейилади.

Агар $z_0 \in \mathbf{C}$ нуқтанинг ($z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ нуқтанинг) ихтиёрий ўйилган атрофида $D \subset \mathbf{C}$ тўпламнинг ($D \subset \overline{\mathbf{C}}$ тўпламнинг) камида битта нуқтаси бўлса, z_0 нуқта D тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.

4-таъриф. Агар D тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, D ёпиқ тўплам дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$D = \left\{z \in \mathbf{C}: |z - z_0| < r\right\}$$

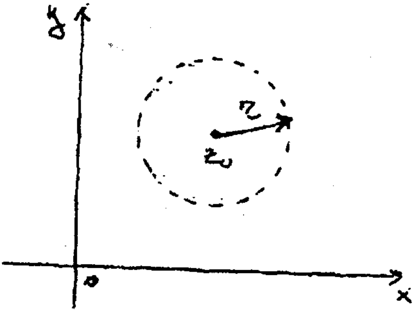
тўпламни қарайлик. Бунда $z_0 \in \mathbf{C}$ берилган нуқта, r эса мусбат сон. Бу тўплам очиқ тўплам бўлади. Қаралаётган D тўплам маркази z_0 нуқтада, радиуси r га тенг бўлган доирани ифодалайди.

Ҳақиқатан ҳам, $z = x + iy$, $z_0 = a + ib$ дейилса, унда

$$|z - z_0| < r \Rightarrow |x + iy - (a + ib)| < r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2.$$

бўлади (5-чизма).



5-чизма

2. Ушбу

$$D = \{z \in C: r_0 < |z - z_0| < r_1\}$$

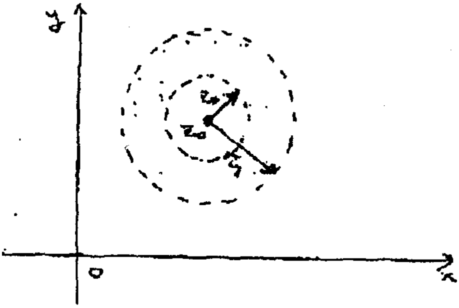
тўпламни қарайлик. Бунда $z_0 \in C$ берилган нуқта, r_0 ва r_1 лар мусбат сонлар. Бу тўплам очиқ тўплам бўлади. D тўплам маркази z_0 нуқтада, радиуслари r_0 ва r_1 $(r_0 < r_1)$ бўлган айланалар билан чегараланган шаклни-ҳалқани ифодалайди.

Ҳақиқатан ҳам, юқоридагидек, $z = x + iy$, $z_0 = a + ib$ бўлса, унда

$$r_0 < |z - z_0| < r_1 \Rightarrow r_0 < |x + iy - (a + ib)| < r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r_1 \Rightarrow r_0^2 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < r_1^2.$$

бўлади (6-чизма).



6-чизма

. Ушбу

$$D = \{z \in C \,|\, |z - z_0| \le r\}$$

тўплам ёпиқ тўплам бўлади.

5 - таъриф. Агар $D \subset C$ шундай тўплам бўлсаки, унга тегишли ихтиёрий z_1 ва z_2 нуқталарни бирлаштирувчи чизиқ шу тўпламга тегишли бўлса, D боғламли тўплам дейилади.

Масалан, ушбу

$$D_1 = \{z \in C \,|\, |z - z_0| < r_1\},$$

$$D_2 = \{z \in C \,|\, |z - z_0| > r_2\},$$

$$D_3 = \{z \in C \,|\, r_2 < |z - z_0| < r_1\}$$

тўпламлар боғламли тўпламлар бўлади.

6 - таъриф. Агар D тўплам ($D \subset \overline{C}$) ҳам очиқ ҳам боғламли тўплам бўлса, у соҳа деб аталади.

Юқорида келтирилган D_1, D_2, D_3 тўпламлар соҳа бўлади, чунки уларнинг ҳар бири биринчидан очиқ тўпламлар, иккинчидан боғламли тўпламлардир.

Маълумки, тўпламнинг лимит нуқтаси шу тўпламга тегишли бўлиши ҳам мумкин, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин.

D соҳанинг ўзига тегишли бўлмаган лимит нуқтаси унинг чегаравий нуқтаси дейилади.

7 - таъриф. D соҳанинг барча чегаравий нуқталаридан иборат тўплам D соҳанинг чегараси дейилади ва ∂D каби белгиланади.

Масалан, ушбу

$$D = \{z \in C \,|\, |z - z_0| < r\}$$

соҳанинг чегараси

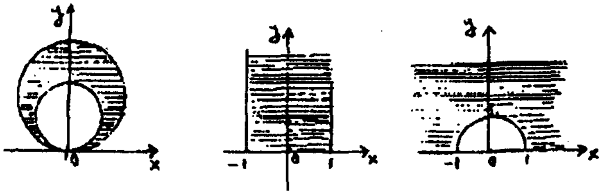
$$\partial D = \{z \in C \,|\, |z - z_0| = r\}$$

яъни маркази z_0 нуқтада, радиуси r га тенг бўлган айлана бўлади.

Айтайлик, $D \subset \overline{C}$ соҳа берилган бўлиб, унинг чегараси ∂D бўлсин.

Агар ∂D боғламли тўплам бўлса, D бир боғламли соҳа дейилади.

Қуйидаги 7-чизмада тасвирланган соҳалар бир боғламли соҳаларга мисол бўлади:



7-чизма

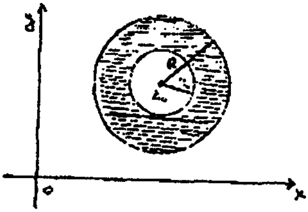
1-теорема (Жордан теоремаси). Ихтиёрий ёпиқ Жордан чизиғи комплекс текисликни иккита бир боғламли соҳаларга ажратади.

Бу теоремадан ихтиёрий ёпиқ Жордан чизиғи билан чегараланган текислик бўлаги бир боғламли соҳа бўлиши кўринади.

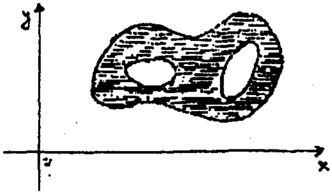
Чегараси бир нечта ёпиқ Жордан чизиқларидан иборат соҳа кўп боғламли соҳа дейилади. Масалан, ушбу

$$D = \{z \in C r < |z - z_0| < R\}$$

соҳа икки боғламли соҳадир (8-чизма).



8-чизма



9-чизма

9-чизмада 3 боғламли соҳа тасвирланган.

6-§. Комплекс сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити

Математик анализ курсида ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити тушунчалари киритилиб, улар батафсил ўрганилган эди. Худди шунга ўхшаш комплекс сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити тушунчалари киритилади.

Фараз қилайлик, f ҳар бир n ($n \in N$) натурал сонга бирор z_n комплекс сонни ($z_n \in C$) мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: N \to C \qquad (n \to z_n)$$

Бу акслантириш тасвирларидан тузилган

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

ифода комплекс сонлар кетма-кетлиги дейилади ва у $\{z_n\}$ каби белгиланади.

Масалан, $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n} + i\frac{1}{n}\right\}$:

$$1+i, \quad \frac{1}{2}+i\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}+i\frac{1}{3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n}+i\frac{1}{n}, \quad \dots$$

комплекс сонлар кетма-кетлигидир.

Бирор

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

комплекс сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

8 - таъриф. Агар шундай мусбат ўзгармас M сон мавжуд бўлсаки, $\forall n \in N$ учун $|z_n| \le M$ тенгсизлик ўринли бўлса, $\{z_n\}$ кетма-кетлик чегараланган дейилади.

Масалан, ушбу

$$\{z_n\} = \left\{\frac{n}{1+n^2} + i\frac{n}{1+n^2}\right\}$$

комплекс сонлар кетма-кетлиги чегараланган, чунки $\forall n \in N$ учун

$$|z_n| = \left|\frac{n}{1+n^2} + i\frac{n}{1+n^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{n}{1+n^2}\right)^2 + \left(\frac{n}{1+n^2}\right)^2} = \sqrt{2}\,\frac{n}{1+n^2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

бўлади.

$\{z_n\}$ комплекс сонлар кетма-кетлиги ҳамда *a* комплекс сон берилган бўлсин.

9 - таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал $n_0 = n_0(\varepsilon)$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ сонлар учун

$$|z_n - a| < \varepsilon \qquad (a \ne \infty)$$

тенгсизлик бажарилса, a комплекс сон $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади ва

$$\lim_{n \to \infty} z_n = a$$

ёки

$$n \to \infty \text{ да } \quad z_n \to a$$

каби белгиланади.

Агар $\{z_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.

10-таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал $n_0 = n_0(\varepsilon)$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ натурал сонлар учун

$$|z_n| > \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз дейилади ва

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$$

ёки

$$n \to \infty \text{ да } \quad z_n \to \infty$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу

$$\{z_n\} = \{a^n\} \qquad (a \in C, |a| < 1)$$

комплекс сонлар кетма-кетлигининг лимитини топинг.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра n_0 натурал сон қуйидагича

$$n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[\log_{|a|} \varepsilon\right]$$

аниқланса, ($|a|^n < \varepsilon$ тенгсизликни ечиб топилади:

$$|a|^n < \varepsilon \Rightarrow \log_{|a|}|a|^n > \log_{|a|}\varepsilon \Rightarrow n > \log_{|a|}\varepsilon \quad),$$

у ҳолда барча $n > n_0$ учун

$$|z_n| < |a|^n < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса 2-таърифга биноан

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

бўлишини билдиради.

Энди яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссаларини келтирамиз.

1^0. Агар $\{z_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.

Исбот. $\{z_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \qquad (a \in C)$$

бўлсин. Унда таърифга биноан $\forall\varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

бўлади. Бу тенгсизликдан фойдаланиб, топамиз:

$$|z_n| = |(z_n - a) + a| \le |z_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$$

Демак, $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг $(n_0 + 1)$ - ҳадидан кейинги барча ҳадлари учун

$$|z_n| < \varepsilon + |a|$$

тенгсизлик бажарилади.

Агар

$$\varepsilon + |a|,\ |z_1|,\ |z_2|,\ \ldots,\ |z_{n_0}|$$

сонларнинг энг каттасини M десак, у ҳолда $\forall n \in N$ учун

$$|z_n| \le M$$

бўлади. Бу эса $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини билдиради.

2^0. Агар $\{z_n\}$ ва $\{z_n'\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} z_n' = a' \qquad (a \in C, a' \in C)$$

бўлса, у ҳолда

$$\{z_n \pm z_n'\},\ \{z_n \cdot z_n'\},\ \left\{\frac{z_n}{z_n'}\right\} \qquad (z_n' \ne 0)$$

кетма-кетликлар ҳам яқинлашувчи бўлиб,

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm z_n') = a \pm a'$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot z_n') = a \cdot a'$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{z_n}{z_n'}\right) = \frac{a}{a'} \qquad (a' \ne 0)$

бўлади.

Бу тенгликларнин исботлаш қийин эмас. Биз улардан бирини, масалан, 1)-нинг исботини келтирамиз.

Айтайлик,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} z_n' = a'$$

бўлсин. Лимит таърифига биноан $\forall\varepsilon > 0$ берилганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун

$$|z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (27)$$

бўлади.

Шунингдек, $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0' \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0'$ сонлар учун

$$|z_n' - a'| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (28)$$

бўлади.

Энди n_0 ва n_0' натурал сонлардан каттасини $\overline{n_0}$ деб олсак, унда барча $n > \overline{n_0}$ лар учун бир вақтда (27) ва (28) тенгсизликлар ўринли бўлади. Демак, $n > \overline{n_0}$ бўлганда

$$\left|\left(z_n \pm z_n'\right) - \left(a \pm a'\right)\right| = \left|\left(z_n - a\right) \pm \left(z_n' - a'\right)\right| \le$$

$$\le |z_n - a| \pm |z_n' - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n\to\infty}\left(z_n \pm z_n'\right) = a \pm a'$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди комплекс сонлар кетма-кетлиги лимитининг мавжудлиги ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Фараз қилайлик, $\{z_n\}$ (n=1,2,...) комплекс сонлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, z_n (n=1,2,...) нинг ҳақиқий қисми $\operatorname{Re} z_n = x_n$ (n=1,2,...) , мавҳум қисми $\operatorname{Im} z_n = y_n$ (n=1,2,...) бўлсин:

$$z_n = x_n + iy_n \qquad (n=1,2,...)$$

Натижада иккита $\{x_n\}$ ҳамда $\{y_n\}$ ҳақиқий сонлар кетма-кетликларига эга бўламиз.

2-теорема. $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ комплекс сонлар кетма-кетлиги $a = \alpha + i\beta$ $(a \in C)$ лимитга эга бўлиши учун $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ ҳақиқий сонлар кетма-кетликлари лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$$

бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Айтайлик, $\{z_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = \alpha + i\beta$$

Лимит таърифига биноан $\forall\varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Равшанки,

$$|z_n - a| = |(x_n + iy_n) - (\alpha + i\beta)| =$$

$$= |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2}.$$

Демак,

$$\sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} < \varepsilon.$$

Кейинги тенгсизликдан

$$(x_n - \alpha)^2 < \varepsilon^2, \ (y_n - \beta)^2 < \varepsilon^2,$$

яъни

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon, \quad |y_n - \beta| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар лимитга эга ва

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$$

бўлишини билдиради.

Етарлилиги. Айтайлик, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$$

бўлсин. Лимит таърифига биноан $\forall\varepsilon > 0$ берилганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун

$$|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (29)$$

бўлади.

Шунингдек, $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0' \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0'$ лар учун

$$|y_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (30)$$

бўлади. Агар n_0 ва n_0' натурал сонлардан каттасини $\overline{n_0}$ деб олсак, унда барча $n > \overline{n_0}$ лар учун бир вақтда (29) ҳамда (30) тенгсизликлар ўринли бўлади.

Равшанки

$$|z_n - a| = |(x_n + iy_n) - (\alpha + i\beta)| =$$
$$= |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)| \le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|.$$

Юқоридаги (29) ҳамда (30) тенгсизликлардан фойдаланиб, барча $n > \overline{n_0}$ лар учун

$$|z_n - a| \le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса $\{z_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга ва

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2-эслатма. Бу теореманинг етарлилигини яқинлашувчи кетма-кетликларнинг 2^0-хоссасидан фойдаланиб ҳам исботлаш мумкин.

Келтирилган теорема комплекс сонлар кетма-кетлигининг лимитини ўрганишни ҳақиқий сонлар кетма-кетлигининг лимитини ўрганишга келтирилишини ифодалайди.

Мисол. Ушбу

$$\{z_n\} = \left\{\frac{3n+2}{4n+3} + i\frac{2n-5}{5n-1}\right\} \qquad (n=1,2,...)$$

комплекс сонлар кетма-кетлигининг лимитини топинг.

Равшанки,

$$z_n = \frac{3n+2}{4n+3} + i\frac{2n-5}{5n-1} \qquad (n=1,2,...)$$

комплекс соннинг ҳақиқий қисми

$$x_n = \frac{3n+2}{4n+3}, \qquad (n=1,2,...)$$

мавҳум қисми эса

$$y_n = \frac{2n-5}{5n-1}, \qquad (n=1,2,...)$$

бўлади.

Агар

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+3} = \frac{3}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{5n-1} = \frac{2}{5}$$

эканини эътиборга олсак, унда теоремага кўра берилган комплекс сонлар кетма-кетлигининг лимити $\frac{3}{4}+i\frac{2}{5}$ га тенг бўлишини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{4n+3} + i\,\frac{2n-5}{5n-1}\right) = \frac{3}{4} + i\frac{2}{5}.$$

2-БОБ

КОМПЛЕКС АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАР. ГОЛОМОРФ ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Комплекс аргументли функциялар, уларнинг лимити, узлуксизлиги

1^0. **Комплекс аргументли функция тушунчаси.** Комплекс сонлар текислиги $\mathbf{C}$ да бирор E тўплам берилган бўлсин: $E \subset \mathbf{C}$.

1-таъриф. Агар E тўпламдаги ҳар бир z комплекс сонга бирор f қоида ёки қонунга кўра битта w комплекс сон мос қўйилган бўлса, E тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва у

$$f: z \to w \quad \text{ёки} \quad w = f(z)$$

каби белгиланади. Бунда E функциянинг аниқланиш тўплами, z - эркли ўзгарувчи ёки функция аргументи, f эса z ўзгарувчининг функцияси дейилади.

Айтайлик,

$$w = f(z)$$

функция бирор E $(E \subset \mathbf{C})$ тўпламда берилган бўлсин, яъни f қоидага кўра ҳар бир

$$z = x + iy \in E$$

комплекс сонга битта

$$w = u + iv \qquad (u \in R, v \in R)$$

комплекс сон мос қўйилган бўлсин. Демак,

$$w = u + iv = f(x + iy).$$

Кейинги тенгликдан

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, E тўпламда $w = f(z)$ функциянинг берилиши шу тўпламда x ва y ҳақиқий ўзгарувчиларнинг

$$u = u(x, y),$$
$$v = v(x, y)$$

функцияларининг берилишидек экан.

Одатда, $u = u(x, y)$ функция $f(z)$ функциянинг ҳақиқий қисми, $v = v(x, y)$ эса $f(z)$ нинг мавҳум қисми дейилади:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z),$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Мисол. Ушбу

$$f(z)=\frac{z+3}{z+5}$$

функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топинг.

Берилган функцияда $z = x + iy$ эканини эътиборга олиб, уни

$$f(z)=u+iv$$

кўринишида ёзиб, қуйидаги тенгликни топамиз:

$$u+iv=\frac{z+3}{z+5}=\frac{x+iy+3}{x+iy+5}=\frac{[(x+3)+iy][(x+5)-iy]}{(x+5)^2+y^2}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+8x+15}{x^2+y^2+10x+25}+i\frac{2y}{x^2+y^2+10x+25}.$$

Демак,

$$u=u(x,y)=\frac{x^2+y^2+8x+15}{x^2+y^2+10x+25},$$

$$v=v(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2+10x+25}.$$

Эркли z ўзгарувчи E тўпламда ўзгарганда $w=f(z)$ фукциянинг мос қийматларидан иборат тўплам

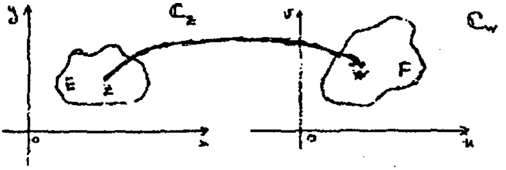
$$F=\{f(z)=u+iv: z=x+iy\in E\}$$

бўлсин. Одатда, бу тўплам функция қийматлари тўплами дейилади.

Демак, E тўпламда $(E\subset C)$

$$w=f(z)$$

функциянинг берилиши Oxy - комплекс текисликдаги E тўпламни (тўплам нуқталарини) Ouv - комплекс текисликдаги F тўпламга (тўплам нуқталарига) акс эттиришдан иборат экан (10-чизма).



10-чизма

Шу сабабли $w=f(z)$ функцияни E тўпламнинг F тўпламга акслантириш деб ҳам юритилади.

Фараз қилайлик, $w = f(z)$ функция E тўпламда $(E \subset \mathbf{C})$ берилган бўлиб,

$$F = \{f(z): z \in E\}$$

бўлсин. Сўнгра F тўпламда $(F \subset \mathbf{C})$ ўз навбатида бирор

$$\zeta = \varphi(w)$$

фукция берилган бўлсин. Натижада, E тўпламдан олинган ҳар бир z га F тўпламда битта w сон $(f: z \to w)$ ва F тўпламдан олинган бундай w сонга битта ζ сон $(\varphi: w \to \zeta)$ мос қўйилади:

$$z \xrightarrow{f} w \xrightarrow{\varphi} \zeta .$$

Демак, E тўпламдан олинган ҳар бир z га битта ζ сон $(\zeta \in \mathbf{C})$ мос қўйилиб, $z \to \zeta$ функция ҳосил бўлади. Бундай функция мураккаб функция дейилади ва

$$\zeta = \varphi(f(z))$$

каби белгиланади.

$w = f(z)$ функция E тўпламда берилган бўлиб, F эса шу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин: $F = \{f(z): z \in E\}$.

F тўпламдан олинган ҳар бир w сонга E тўпламда битта z сон мос қўйилишини ифодаловчи функция $w = f(z)$ функцияга нисбатан тескари функция дейилади ва

$$z = f^{-1}(w)$$

каби белгиланади.

Фараз қилайлик, $w = f(z)$ функция E тўпламда $(E \subset \mathbf{C})$ берилган бўлсин.

2 - таъриф. Агар z аргументнинг E тўпламдан олинган турли қийматларида $f(z)$ функциянинг мос қийматлари ҳам турлича бўлса, бошқача айтганда $f(z_1) = f(z_2)$ тенгликдан $z_1 = z_2$ тенглик $(z_1, z_2 \in E)$ келиб чиқса, $f(z)$ функция E тўпламда бир япроқли (ёки бир варақли) функция дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

функциянинг $E = \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$ тўпламда бир япроқли бўлишини кўрсатинг.

Айтайлик, $z_1, z_2 \in E$ учун

$$f(z_1) = f(z_2),$$

яъни

$$\frac{1}{z_1 - 1} = \frac{1}{z_2 - 1}$$

бўлади. Равшанки, кейинги тенгликдан

$$z_1 - 1 = z_2 - 1$$

ундан $z_1 = z_2$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2 \qquad (z_1, z_2 \in E)$$

Бу эса берилган функциянинг E да бир япроқли эканини билдиради.

2°. Функция лимити. Фараз қилайлик, $w = f(z)$ функция E $(E \subset C)$ тўпламда берилган бўлиб, z_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

3-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, z аргументнинг $0 < |z - z_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $z \in E$ қийматларида

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A комплекс сон $f(z)$ функциянинг $z \to z_0$ даги лимити деб аталади ва

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

каби белгиланади.

4-таъриф. Агар $\forall M > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, z аргументнинг $0 < |z - z_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $z \in E$ қийматларида

$$|f(z)| > M$$

тенгсизлик бажарилса, $z \to z_0$ даги $f(z)$ функциянинг лимити ∞ дейилади.

Айтайлик, $z = \infty$ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $p = p(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, z аргументнинг $|z| > p$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $z \in E$ қийматларида

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A комплекс сон $f(z)$ функциянинг $z \to \infty$ даги лимити дейилади ва

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = A$$

каби белгиланади.

Энди, z, z_0 ҳамда A комплекс сонларни

$$z = x + iy,$$
$$z_0 = x_0 + iy_0,$$
$$A = \alpha + i\beta$$

деб, сўнг

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

эканлигини эътиборга олиб, $z \to z_0$ да $f(z)$ функциянинг A лимитга эга бўлиши $x \to x_0$, $y \to y_0$ да $u(x,y)$ ҳамда $v(x,y)$ функцияларнинг мос равишда α ва β лимитларга эга бўлишига эквивалент эканлигини ифодаловчи теоремани келтирамиз.

1-теорема. $w = f(z)$ функциянинг $z \to z_0$ да A лимитга,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

эга бўлиши учун

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \alpha \;, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \beta$$

бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Айтайлик,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

бўлсин. Лимит таърифига биноан $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топиладики, z аргументнинг $0 < |z - z_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $z \in E$ қийматларида

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Равшанки,

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$
$$f(z) - A = [u(x,y) - \alpha] + i[v(x,y) - \beta]$$

бўлиб,

$$|z - z_0| < \delta$$

бўлишидан

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

бўлиши келиб чиқади.

Иккинчи томондан қуйидаги

$$|u(x,y) - \alpha| = |Re(f(z) - A)| \le |f(z) - A| < \varepsilon,$$
$$|v(x,y) - \beta| = |Im(f(z) - A)| \le |f(z) - A| < \varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Демак, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сон топиладики, $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ бўлганда

$$|u(x,y)-\alpha|<\varepsilon,$$

$$|v(x,y)-\beta|<\varepsilon.$$

тенгсизликлар бажарилади. Бу эса

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=\alpha\ ,\qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=\beta$$

эканлигини билдиради.

Етарлилиги. Айтайлик,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=\alpha\ ,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=\beta$$

бўлсин. Лимит таърифига асосан, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ га кўра шундай $\delta_0>0$ сон топиладики,

$$|x-x_0|<\delta_0,\quad |y-y_0|<\delta_0$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x, y да

$$|u(x,y)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

шунингдек

$$|v(x,y)-\beta|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

тенгсизликлар бажарилади. Бу тенгсизликлардан фойдаланиб, топамиз:

$$|f(z)-A|=|u(x,y)+iv(x,y)-(\alpha+i\beta)|=$$

$$=|(u(x,y)-\alpha)+i(v(x,y)-\beta)|=$$

$$=\sqrt{(u(x,y)-\alpha)^2+(v(x,y)-\beta)^2}<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}}=\varepsilon.$$

Демак,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A\ .$$

Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\operatorname{Re}z}{|z|} \qquad (z\neq 0)$$

лимитни ҳисобланг.

Аввало берилган $f(z)=\frac{z\operatorname{Re}z}{|z|}$ функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топамиз:

$$f(z)=\frac{z\operatorname{Re}z}{|z|}=\frac{(x+iy)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Демак,

$$\operatorname{Re}f(z)=u(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\operatorname{Im}f(z)=v(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Маълумки,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}v(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Унда 1-теоремага мувофиқ

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z\operatorname{Re}z}{|z|}=0.$$

бўлади.

Юқорида келтирилган теорема комплекс ўзгарувчили функциянинг лимитини ўрганишни ҳақиқий ўзгарувчили функциянинг лимитини ўрганишга келтирилишини ифодалайди. Маълумки, „Математик анализ" курсида ҳақиқий ўзгарувчили функция лимити батафсил ўрганилган. Шуни эътиборга олиб, комплекс ўзгарувчили функция лимити ҳақидаги тасдиқларнинг айримларини келтириш билан кифояланамиз.

Айтайлик, $f(z)$ ҳамда $g(z)$ функциялар E тўпламда $(E\subset \mathbf{C})$ берилган бўлиб, z_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A\,, \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) = B$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0} [f(z)\cdot g(z)] = A\cdot B,$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \qquad (B \neq 0)$$

бўлади.

3°. **Функциянинг узлуксизлиги.** Фараз қилайлик, $w = f(z)$ функция E тўпламда $(E \subset C)$ берилган бўлиб, z_0 нуқта $(z_0 \in E)$ шу E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

6-таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, z аргументнинг $|z - z_0| < \delta$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи барча $z \in E$ қийматларида

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(z)$ функция z_0 нуқтада узлуксиз деб аталади.

(Равшанки, бу ҳолда

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

бўлади).

Одатда, $z - z_0$ айирма функция аргументининг орттирмаси дейилади ва Δz каби белгиланади:

$$\Delta z = z - z_0.$$

Ушбу

$$f(z) - f(z_0)$$

айирма эса, функция орттирмаси дейилади. Уни Δf каби белгиланади:

$$\Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Шу тушунчалардан фойдаланиб, функциянинг z_0 нуқтада узлуксизлигини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

7-таъриф. Агар $\Delta z \to 0$ да Δf ҳам нолга интилса,

$$\lim_{\Delta z\to 0} \Delta f = 0$$

$f(z)$ функция z_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

8-таъриф. Агар $f(z)$ функция E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, $f(z)$ функция E тўпламда узлуксиз дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(z)=\frac{1}{z} \qquad (z\neq 0)$$

функциянинг ихтиёрий $z_0\in C$ $(z_0\neq 0)$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

$\forall z_0\in C$ нуқтани $(z_0\neq 0)$ олайлик. Бу нуқтага Δz орттирма бериб, функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta f=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\frac{1}{z_0+\Delta z}-\frac{1}{z_0}=\frac{-\Delta z}{z_0(z_0+\Delta z)}.$$

Равшанки,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-\Delta z}{z_0(z_0+\Delta z)}=0.$$

Демак, берилган функция $\forall z_0\in C$ нуқтада $(z_0\neq 0)$ узлуксиз бўлади.

Айтайлик, $w=f(z)$ функция $z_0\in E$ нуқтада $(E\subset C)$ узлуксиз бўлсин:

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$$

Сўнг

$$z=x+iy,$$

$$z_0=x_0+iy_0,$$

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

дейлик.

Ушбу параграфда келтирилган 1-теоремага кўра

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$$

муносабат

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v(x_0,y_0)$$

муносабатларга эквивалент бўлади. Бундан эса қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема. $w = f(z)$ функциянинг z_0 нуқтада узлуксиз бўлиши учун

$$\mathrm{Re} f(z) = u(x,y),$$
$$\mathrm{Im} f(z) = v(x,y)$$

функцияларнинг (x_0,y_0) нуқтада узлуксиз бўлиши зарур ва етарли.

Демак, комплекс ўзгарувчили $f(z)$ функциянинг z_0 нуқтада узлуксиз бўлиши, иккита ҳақиқий ўзгарувчили

$$\mathrm{Re} f(z) = u(x,y), \ \mathrm{Im} f(z) = v(x,y)$$

функцияларнинг (x_0,y_0) нуқтада узлуксиз бўлишига эквивалент бўлар экан. Бундан, ҳақиқий ўзгарувчили узлуксиз функциялар ҳақидаги тасдиқлар комплекс ўзгарувчили узлуксиз функцияларда ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади. Жумладан қуйидаги тасдиқлар ўринлидир:

1) Агар $f(z)$ ҳамда $g(z)$ функциялар z_0 нуқтада узлуксиз бўлса,

$$f(z) \pm g(z), f(z) \cdot g(z), \frac{f(z)}{g(z)} \quad (g(z) \neq 0)$$

функциялар ҳам z_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

2) Агар $f(z)$ функция ёпиқ $\overline{D}$ тўпламда узлуксиз бўлса, функция $\overline{D}$ да чегараланган бўлади, яъни шундай ўзгармас M $(M \neq \infty)$ сон мавжудки, $\forall z \in \overline{D}$ учун

$$|f(z)| \leq M$$

бўлади.

3) Агар $f(z)$ функция ёпиқ $\overline{D}$ тўпламда узлуксиз бўлса, функция модули $\overline{D}$ да ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади, яъни шундай $z_1, z_2 \in \overline{D}$ нуқталар топиладики, $z \in \overline{D}$ учун

$$|f(z)| \leq |f(z_1)|,$$
$$|f(z)| \geq |f(z_2)|.$$

бўлади.

4) Агар $f(z)$ функция z_0 нуқтада узлуксиз бўлса, $|f(z)|$ функция ҳам шу z_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

Бу тасдиқнинг исботи қуйидаги

$$\left| |f(z)| - |f(z_0)| \right| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

тенгсизликдан келиб чиқади.

$w = f(z)$ функция E тўпламда $(E \subset C)$ берилган бўлсин.

9-таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, E тўпламнинг $|z' - z''| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий z' ва z'' $(z', z'' \in E)$ нуқталарда

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(z)$ функция E тўпламда текис узлуксиз дейилади.

3-теорма (Кантор теоремаси). Агар $f(z)$ функция чегараланган ёпиқ тўпламда узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.

Исбот. Айтайлик,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

функция чегараланган ёпиқ E тўпламда $(E \subset C)$ узлуксиз бўлсин. 2-теоремага кўра ҳақиқий ўзгарувчили $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар ҳам шу E тўпламда узлуксиз бўлади. Айни пайтда бу функциялар E да текис узлуксиз ҳам бўлади.

Унда $\forall\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топиладики, ушбу

$$\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta \qquad (1)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $(x', y') \in E$, $(x'', y'') \in E$ нуқталарда

$$\left.\begin{aligned} &|u(x', y') - u(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \\ &|v(x', y') - v(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

тенгсизликлар бажарилади.

Агар $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ дейилса, унда (1) ва (2) муносабатлардан фойдаланиб

$$|z' - z''| = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta,$$

$$|f(z') - f(z'')| = \sqrt{\left[u(x', y') - u(x'', y'')\right]^2 + \left[v(x', y') - v(x'', y'')\right]^2} <$$

$$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, $\forall\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топиладики, Е тўпламнинг $\left|z' - z''\right| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий z', z'' $(z', z'' \in E)$ нуқталарида

$$\left|f(z') - f(z'')\right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилар экан. Бу эса $f(z)$ функциянинг Е да текис узлуксиз бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2-§. Функциянинг дифференциалланувчилиги. Коши-Риман шартлари

$w = f(z)$ функция Е тўпламда $(E \subset C)$ берилган бўлсин. Бу Е тўпламдан z_0 нуқтани олиб унга шундай Δz орттирма берайликки, $z_0 + \Delta z \in E$ бўлсин. Натижада $f(z)$ функция ҳам z_0 нуқтада

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

орттирмага эга бўлади.

10 - таъриф. Агар $\Delta z \to 0$ да $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ нисбатнинг лимити

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит комплекс ўзгарувчили $f(z)$ функциянинг z_0 нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва $f'(z_0)$ каби белгиланади:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Мисол. Ушбу

$$f(z) = z^2$$

функциянинг $\forall z_0 \in C$ нуқтада ҳосиласини топинг.

z_0 нуқтага Δz орттирма бериб, шу нуқтадаги функция орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^{\,2} =$$
$$= 2z_0 \cdot \Delta z + (\Delta z)^2.$$

Унда

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = 2z_0 + \Delta z$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=2z_0$$

бўлади. Демак, $f'(z_0)=2z_0$.

11 - таъриф. Агар $f(z)$ функция $z_0\in E$ нуқтада $f'(z_0)$ ҳосилага эга бўлса, функция z_0 нуқтада дифференциалланувчи дейилади.

Агар $f(z)$ функция E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, функция E тўпламда дифференциалланувчи дейилади.

Айтайлик, $f(z)$ функция z_0 нуқтада $f'(z_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Унда, равшанки,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)$$

бўлиб,

$$\Delta f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\alpha(z_0,\Delta z)\cdot\Delta z$$

бўлади. Бу ерда $\Delta z\to 0$ да $\alpha(z_0,\Delta z)$ ҳам нолга интилади: $\alpha(z_0,\Delta z)\to 0$. Натижада қуйидаги тасдиққа келамиз.

4 - теорема. $f(z)$ функциянинг $z_0\in E$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг орттирмаси $\Delta f(z_0)$ ни ушбу

$$\Delta f(z_0)=A\Delta z+\alpha(z_0,\Delta z)\cdot\Delta z$$

кўринишда ифодаланиши зарур ва етарли. Бунда A миқдор Δz ҳамда $\alpha(z_0,\Delta z)$ ларга боғлиқ бўлмаган миқдордир.

Биз юқорида комплекс ўзгарувчили функциянинг ҳосиласи ҳамда дифференциалланувчи бўлиши тушунчаларининг киритилиши ҳақиқий ўзгарувчили функциянинг ҳосиласи ҳамда дифференциалланувчи бўлиши тушунчаларининг киритилиши каби эканини кўрдик. Демак, комплекс ўзгарувчили функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблашда ҳақиқий ўзгарувчили функциянинг ҳосилаларини ҳисоблашдаги маълум қоида ва жадваллардан фойдаланиш мумкин.

Баъзи қоидаларни келтирамиз:

1) Агар $f(z)=c-\mathrm{const}$ бўлса, $f'(z)=0$ бўлади,

2) $(k\cdot f(z))'=k\cdot f'(z)$, $k=\mathrm{const}$

3) $(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z)$,

4) $(f(z)\cdot g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$,

5) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z)\neq 0$

6) Агар $w=f(z), F=\varphi(w)$ бўлиб, $F=\varphi(f(z))$ бўлса, у ҳолда

$$\left(\varphi(f(z))\right)' = \varphi'(w)\cdot f'(z)$$

бўлади.

7) Агар $w=f(z)$ ва $z=f^{-1}(w)$ бўлса,

$$\left(f^{-1}(w)\right)' = \frac{1}{f'(z)}, \quad \left(f'(z)\neq 0\right)$$

бўлади.

Гарчи комплекс ҳамда ҳақиқий ўзгарувчили функциялар ҳосилалари тушунчаларининг киритилиши бир ҳил бўлса ҳам, комплекс ўзгарувчили функциянинг ҳосилага эга бўлсин дейилиши (бинобарин, дифференциалланувчи бўлсин дейилиши) талаби анча оғир талаб ҳисобланади. Битта содда мисол қарайлик.

Ушбу

$$f(z)=x$$

функцияни олайлик. Агар бу функцияни ҳақиқий ўқда жойлашган E тўпламда $(E\subset R)$ қаралса, равшанки, у ҳосилага эга бўлиб, $f'(z)=1$ бўлади.

Энди $f(z)=x$ функцияни комплекс текислик C да қарайлик. Равшанки, бу функция учун

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

бўлади. Бу нисбат $z\to z_0$ да лимитга эга эмас, чунки, $x=x_0$ $y\neq y_0$ да нисбат 0 га тенг, $x\neq x_0$, $y=y_0$ да эса 1 га тенг. Демак, $f(z)=x$ функция дифференциалланувчи эмас.

Фараз қилайлик,

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

функция бирор D соҳада $(D\subset C)$ берилган бўлиб, $z_0=x_0+iy_0\in D$ бўлсин.

12 - таъриф. Агар ҳақиқий ўзгарувчили $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ функциялар (x_0,y_0) нуқтада $\left((x_0,y_0)\in R^2\right)$ дифференциалланувчи бўлса, $f(z)$ функция z_0 нуқтада ҳақиқий анализ маъносида (қисқача R^2 маънода) дифференциалланувчи дейилади.

Масалан,

$$f(z)=|z|^2+i(\mathrm{Re}\,z\cdot\mathrm{Im}\,z)^2 \qquad (z=x+iy)$$

функция ихтиёрий $z\in\mathbf{C}$ нуқтада R^2 маънода дифференциалланувчи бўлади, чунки

$$u(x,y)=|z|^2=x^2+y^2,$$

$$v(x,y)=[\mathrm{Re}\,z\cdot\mathrm{Im}\,z]^2=(x\cdot y)^2$$

бўлиб, бу функциялар ихтиёрий $(x,y)\in\mathrm{R}^2$ нуқтада дифференциалланувчи (уларнинг барча хусусий ҳосилалари мавжуд ва узлуксиз).

Ушбу

$$f(z)=\sqrt[3]{\mathrm{Re}\,z\cdot\mathrm{Im}\,z} \qquad (z=x+iy)$$

функция $z=0$ нуқтада R^2 маънода дифференциалланувчи эмас, чунки

$$u(x,y)=\sqrt[3]{xy},$$

$$v(x,y)=0$$

бўлиб, $u(x,y)$ функция $(0,0)\in\mathrm{R}^2$ нуқтада дифференциалланувчи эмас.

5-теорема. $f(z)$ функциянинг z_0 нуқтада $f'(z_0)$ ҳосилага эга бўлиши учун

1) $f(z)$ нинг z_0 нуқтада ҳақиқий анализ маъносида (R^2 маънода) дифференциалланувчи бўлиши ва

2) ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(z)$ функция z_0 нуқтада $(z_0\in D)$ $f'(z_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0),$$

яъни

$$\Delta f(z_0)=f'(z_0)\cdot\Delta z+\alpha\Delta z \tag{4}$$

бўлади. Бу ерда

$$\Delta z=z-z_0=(x+iy)-(x_0+iy_0)=(x-x_0)+i(y-y_0)=$$
$$=\Delta x+i\Delta y,$$

$$\begin{aligned}\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = \left[u(x,y) + iv(x,y)\right] - \\ -\left[u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)\right] = \left[u(x,y) - u(x_0,y_0)\right] + \\ +i\left[v(x,y) - v(x_0,y_0)\right] = \Delta u + i\Delta v\end{aligned}$$

бўлиб, α эса Δx ва Δy ларга боғлиқ ва улар нолга интилганда нолга интилади:

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \alpha = 0 \ .$$

Энди $f'(z_0)$ ҳамда α ларни

$$f'(z_0) = a + ib\,, \ \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad \left(\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha_1 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha_2 = 0\right)$$

деб, (4) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)(\Delta x + i\Delta y)\,.$$

Бу тенгликдан, ҳақиқий ҳамда мавҳум қисмларини тенглаб топамиз:

$$\begin{aligned}\Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y\,, \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y \qquad (5)\end{aligned}$$

Демак, $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ функциялар (x_0,y_0) нуқтада дифференциалланувчи. Айни пайтда $f(z)$ функция z_0 нуқтада R^2 маънода дифференциалланувчи бўлади.

Модомики, $f(z)$ функция z_0 нуқтада $f'(z_0)$ ҳосилага эга экан, унда $\Delta z \to 0$, жумладан $\Delta z = \Delta x \to 0$ $(\Delta y = 0)$, $\Delta z = \Delta y \to 0$ $(\Delta x = 0)$ бўлганда ҳам

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$$

нисбатнинг лимити ҳар доим $f'(z_0)$ га тенг бўлаверади. (5) тенгликлар $\Delta z = \Delta x$ $(\Delta y = 0)$ бўлганда

$$\begin{aligned}\Delta u &= a\Delta x + \alpha_1\Delta x \\ \Delta v &= b\Delta x + \alpha_2\Delta x\,, \qquad (6)\end{aligned}$$

$\Delta z = \Delta y$ $(\Delta x = 0)$ бўлганда эса

$$\begin{aligned}\Delta u &= -b\Delta y - \alpha_2\Delta y \\ \Delta v &= a\Delta y + \alpha_1\Delta y \qquad (7)\end{aligned}$$

тенгликларга келади.

(6) муносабатлардан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = b \ ,$$

(7) муносабатлардан эса

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -b \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликлардан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик $f(z)$ функция z_0 нуқтада R^2 маънода дифференциалланувчи бўлиб, теоремада келтирилган иккинчи шарт бажарилсин. $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ функциялар (x_0,y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлгани учун

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \ ,$$

$$\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y \ .$$

бўлади. Бу ерда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ларнинг ҳар бири нолга интилади. У ҳолда

$$\Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x +$$

$$+\alpha_2 \Delta y + i\left[\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y\right].$$

бўлади. Теореманинг иккинчи шарти

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

дан фойдаланиб топамиз:

$$\Delta f(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta x + i\Delta y) +$$

$$+(\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta z +$$

$$+\left[(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right] \cdot \Delta z$$

Бу тенгликдан эса

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}, \quad (8)$$

бўлиши келиб чиқади.

Кейинги тенгликдаги

$$(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

ифода учун

$$\left|(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le |\alpha_1 + i\beta_1|\cdot\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| +$$

$$+|\alpha_2 + i\beta_2|\cdot\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le |\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_2 + i\beta_2| \le$$

$$\le |\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2| < \varepsilon$$

бўлади, чунки $\Delta z \to 0$ да яъни $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да

$$\alpha_1 \to 0,\ \beta_1 \to 0,\ \alpha_2 \to 0,\ \beta_2 \to 0$$

Шуни эътиборга олиб, $\Delta z \to 0$ да (8) тенгликда лимитга ўтиб

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

бўлишини топамиз. Демак, $f(z)$ функция z_0 нуқтада $f'(z_0)$ ҳосилага эга ва

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

бўлади. Теорема исбот бўлди.

Теоремада келтирилган (3) шартлар Коши-Риман шартлари дейилади.

Эслатма. Юқорида келтирилган теорема $f(z)$ функция ҳосиласининг мавжудлигини тасдиқлабгина қолмасдан, уни ҳисоблаш йўлини кўрсатади:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Мисол. Ушбу

$$f(z) = z^2$$

функция ихтиёрий $z \in \mathbf{C}$ нуқтада ҳосилага эга бўладими ?

Берилган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy\,.$$

Бундан

$$Ref(z)=u(x,y)=x^2-y^2, \quad Imf(z)=v(x,y)=2xy$$

бўлишини топамиз.

Равшанки, $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$ функциялар $\forall(x,y)\in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи.

Иккинчи томондан

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y, \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

бўлиб,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

бўлади. Демак, $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ функциялар учун Коши-Риман шартлари бажарилади. Келтирилган теоремага кўра $f(z)=z^2$ функция $\forall z\in\mathbf{C}$ нуқтада ҳосилага эга бўлади.

Фараз қилайлик, $f(z)$ функция $\left(f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\right)$ $z_0=x_0+iy_0\in D$ $\left(D\subset\mathbf{C}\right)$ нуқтада R^2 маънода дифференциалланувчи бўлсин. Ушбу

$$du(x_0,y_0)+idv(x_0,y_0)$$

ифода $f(z)$ функциянинг z_0 нуқтадаги дифференциали дейилади ва $df(z_0)$ каби белгиланади:

$$df(z_0)=du(x_0,y_0)+idv(x_0,y_0).$$

Равшанки,

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$df=\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right]+i\left[\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx++\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Демак,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad (9)$$

Қуйидаги

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

ўзгарувчиларни олайлик. Равшанки,

$$dz = dx + idy,$$

$$d\bar{z} = dx - idy.$$

Бу тенгликлардан

$$dx = \frac{1}{2}\left(dz + d\bar{z}\right), \quad dy = \frac{1}{2i}\left(dz - d\bar{z}\right) \qquad (10)$$

бўлишини топамиз.

(9) ва (10) тенгликлардан

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}\left(dz + d\bar{z}\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{1}{2i}\left(dz - d\bar{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}.$$

бўлиши келиб чиқади.

Агар

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (11)$$

кўринишда белгиланса унда f(z) функция дифференциали учун ушбу

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

тенгликка келамиз.

Айтайлик, u(x,y) ва v(x,y) функциялар бирор нуқтада Коши-Риман шартларини бажарсин:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Унда (11) тенгликка кўра шу нуқтада

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Аксинча, $f(z)$ функция учун бирор нуқтада

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

бўлсин. Равшанки, (11) тенгликка кўра шу нуқтада

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

бўлади, яъни Коши-Риман шартлари бажарилади.

Демак, бирор нуқтада Коши-Риман шартларининг бажарилиши шу нуқтада

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

тенгликнинг ўринли бўлишига эквивалент экан. Бу ҳол юқорида келтирилган 5 - теоремани қуйидагича ифодалаш мумкинлигини кўрсатади.

6 - теорема. $f(z)$ функциянинг z_0 нуқтада $f'(z_0)$ ҳосилага эга бўлиши учун

1) $f(z)$ нинг z_0 нуқтада ҳақиқий анализ маъносида (R^2 маънода) дифференциаланувчи бўлиши ва

2) шу нуқтада ушбу

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Агар $w = f(z)$ функция z_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, шу нуқтада $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ бўлиб, функциянинг ҳосиласи

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z},$$

дифференциали эса

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz = f'(z_0)dz$$

кўринишда бўлади.

Комплекс анализда ҳосилага эга бўлган функциялар С-дифференциалланувчи функциялар дейилади .

Кўп ҳолларда $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функциянинг дифференциаланувчи бўлиши шартларини қутб координатала-рида ифодалаш лозим бўлади.

Равшанки, қутб координаталарида

$$x = \rho\cos\varphi, \ y = \rho\sin\varphi$$

$$|z| = \rho \, , \qquad \arg z = \varphi \qquad (0 < \rho < +\infty, \; 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

бўлади.

7-теорема. $f(z)$ функциянинг z_0 нуқтада $f'(z_0)$ ҳосилага эга бўлиши учун

1) u ва v функцияларнинг ρ ва φ ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида z_0 нуқтада дифференциаланувчи бўлиши ва

2) ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Фараз қилайлик, $w = f(z)$ функция бирор D соҳада $(D \subset C)$ берилган бўлсин.

13-таъриф. Агар $f(z)$ функция z_0 $(z_0 \in D)$ нуқтанинг бирор $U(z_0, \varepsilon)$ атрофида $(U(z_0, \varepsilon) \subset D)$ C-дифференциалланувчи бўлса, $f(z)$ нуқтада голоморф (ёки аналитик) деб аталади.

14-таъриф. Агар $f(z)$ функция D соҳанинг ҳар бир нуқтасида голоморф бўлса, функция D соҳада голоморф дейилади.

Одатда D соҳада голоморф бўлган функциялар синфи $V(D)$ каби белгиланади.

15-таъриф. Агар $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ функция $z = 0$ нуқтада голоморф бўлса, $f(z)$ функция «∞» нуқтада голоморф дейилади.

16-таъриф. Агар $\overline{f(z)}$ функция z_0 $(z_0 \in D)$ нуқтада голоморф бўлса, $f(z)$ функция z_0 нуқтада антиголоморф дейилади.

Айтайлик, R^2 фазодаги E соҳада $(E \subset R^2)$ $F = F(x, y)$ функция берилган бўлиб, у шу соҳада иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}$$

эга бўлсин.

17-таъриф. Агар E соҳанинг ҳар бир нуқтасида

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \qquad (12)$$

тенглик бажарилса, $F(x,y)$ функция E соҳада гармоник функция дейилади .

Одатда, (12) Лаплас тенгламаси дейилади .Бу тенглама ушбу

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Лаплас оператори ёрдамида қуйидагича ёзилади :

$$\Delta F = 0$$

Лаплас оператори учун

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

бўлишини эътиборга олсак , унда (12) тенгликни қуйидагича

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

ёзиш мумкин.

Қуйида голоморф функция билан гармоник функциялар орасидаги муносабатни ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

8-теорема. D соҳада $(D \subset C)$ голоморф бўлган ҳар қандай $f(z)$ функциянинг ҳақиқий ҳамда мавҳум қисмлари $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ функциялар шу соҳада гармоник бўлади.

Исбот. Айтайлик, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функция D соҳада голоморф бўлсин. Унда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

тенгликлар бажарилади.

Бу тенгликлардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Агар

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда юқоридаги тенгликлардан

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

бўлиши келиб чиқади.Бу эса $u(x,y)$ функциянинг гармоник функция эканлигини билдиради.

Худди шунга ўхшаш $v(x,y)$ функциянинг гармоник функция бўлиши кўрсатилади . Теорема исбот бўлди.

3-§. Ҳосила модули ва аргументининг геометрик маъноси. Конформ акслантиришлар

Фараз қилайлик,

$$w = f(z)$$

функция бирор D соҳада $(D \subset C_z)$ берилган бўлсин. Уни (z) текисликнинг нуқталарини (w) текислик нуқталарига акслантириш деб қараймиз .

Бу $w = f(z)$ функция $z_0 \in D$ нуқтада $f'(z_0)$ $(f'(z_0) \neq 0)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, топамиз :

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \to z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}$$

$(w_0 = f(z_0))$. Равшанки , бу тенгликдан

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| \cdot |z - z_0| + o(|z - z_0|)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $|z - z_0|$ етарлича кичик бўлганда $|z - z_0|$ ҳамда $|w - w_0|$ миқдорлар пропорционал бўлиб, $|f'(z_0)|$ эса шу пропорционалликнинг коэффициентини ифодалайди.

$w = f(z)$ акслантириш ёрдамида $|z - z_0| = r$ айлана, чексиз кичик миқдор $o(|z - z_0|)$ аниқлигида

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| \cdot r$$

айланага аксланади. Агар $|f'(z_0)| < 1$ бўлса , унда $|z - z_0| = r$ айлана сиқилади , $|f'(z_0)| > 1$ бўлганда эса чўзилади .

Демак, функция ҳосиласининг модули $w = f(z)$ акслантиришда «чузилиш» коэффициентини билдирар экан (чузилишнинг сақланиши).

Энди ҳосила аргументининг геометрик маъносига тўхталамиз.

Фараз қилайлик, $w = f(z)$ акслантириши z_0 нуқтанинг бирор атрофида ҳосилага эга бўлиб, $f'(z_0) \neq 0$ бўлсин.

z_0 нуқтадан ўтувчи силлиқ

$$\gamma = \{z \in C_z : z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

эгри чизиқни олиб, унинг йўналиши бўйича шу эгри чизиққа z_0 нуқтада уринма ўтказамиз. Бу уринманинг ҳақиқий ўқнинг мусбат қисми билан ташкил этган бурчаги φ бўлсин :

$$\varphi = \arg z'(t_0)$$

$w = f(z)$ акслантириш эса γ эгри чизиқни C_w текисликда Γ эгри чизиққа ўтказсин.

$$\Gamma = \{w \in C_w : w = w(t) = f[z(t)], \alpha \leq t \leq \beta\}$$

Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоидасига биноан

$$w'(t) = f'(z) \cdot z'(t)$$

бўлиб, $t = t_0$ да

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \quad (z_0 = z(t_0), \alpha \leq t_0 \leq \beta) \qquad (13)$$

бўлади. Шартга кўра $f'(z_0) \neq 0$ ва $z'(t_0) \neq 0$ (γ нинг *силлиқлигидан*) бўлгани учун $w'(t_0) \neq 0$ бўлади. Бинобарин, $w_0 = f(z_0)$ нуқтада Γ эгри чизиқнинг уринмаси мавжуд. Бу уринманинг бурчак коэффициентини ψ билан белгилаймиз: $\psi = \arg w'(t_0)$.

Юқоридаги (13) тенгликдан

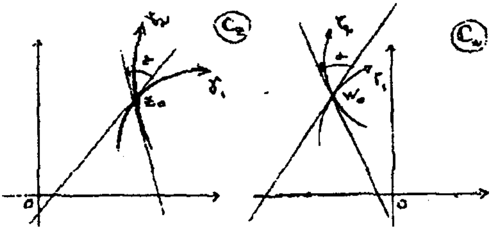
$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

яъни

$$\psi = \arg f'(z_0) + \varphi \qquad (14)$$

келиб чиқади.

Агар $\theta = \psi - \varphi$ миқдорнинг $w = f(z)$ акслантириш натижасида γ эгри чизиқнинг z_0 нуқтадаги бурилиш бурчаги эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда (14) тенгликдан z_0 нуқтадан ўтувчи барча силлиқ эгри чизиқлар бир хил $\theta = \arg f'(z_0)$ бурчакка бурилишини кўрамиз (11-чизма) (*бурчакнинг сақланиши*).



11-чизма

18 - **таъриф.** Агар $w=f(z)$ акслантириш z_0 нуқтада чўзилиш ва бурчак сақланиш хоссаларига эга бўлса, бундай акслантиришга z_0 нуқтада конформ акслантириш дейилади.

Юқоридагилардан кўринадики, агар $w=f(z)$ функция z_0 нуқтанинг бирор атрофида голоморф бўлиб, $f'(z_0)\neq 0$ бўлса, $w=f(z)$ акслантириш z_0 нуқтада конформ бўлади.

Агар $w=f(z)$ акслантириш D соҳада бир япроқли бўлиб, соҳанинг ҳар бир нуқтасида конформ бўлса, у D соҳада конформ акслантириш дейилади.

Конформ акслантиришлар назариясида асосан қуйидаги икки масала ўрганилади:

1) E соҳада $(E\subset C_z)$ $w=f(z)$ акслантириш берилган ҳолда E нинг аксини, яъни $f(E)$ ни топиш;

2) иккита E $(E\subset C_z)$ ҳамда F $(F\subset C_w)$ соҳалар берилган ҳолда E ни F га конформ акслантирадиган $w=f(z)$ ни топиш.

Бу масалаларни ҳал қилишда қуйидаги теоремалардан фойдаланилади.

9 - **теорема.** (Риман теоремаси). Агар E $(E\subset \overline{C}_z)$ ва F $(F\subset \overline{C}_w)$ соҳалар чегараси 2 та нуқтадан кам бўлмаган (континиум бўлган) бир боғламли соҳалар бўлса, E соҳани F соҳага конформ акслантирувчи $w=f(z)$ функция мавжуд.

10 - **теорема.** (соҳанинг сақланиш принципи). Агар $f(z)$ функция E соҳада голоморф бўлиб, $f(z)\neq \text{const}$ бўлса, $f(E)$ ҳам соҳа бўлади.

3-БОБ

ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАР ЁРДАМИДА БАЖАРИЛАДИГАН КОНФОРМ АКСЛАНТИРИШЛАР

Мазкур бобда элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар билан шуғулланамиз.

1-§. Чизиқли функция

Ушбу

$$w = az + b \qquad (1)$$

кўринишдаги функция чизиқли функция (чизиқли акслантириш) дейилади, бунда a, b лар ўзгармас комплекс сонлар ва $a \neq 0$.

Бу функция $\overline{C}_z$ тўпламда аниқланган, унга тескари функциялар ҳам чизиқли функция бўлиб, у қуйидаги

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a} \qquad (2)$$

кўринишга эга.

(1) ва (2) акслантиришлардан $\overline{C}_z$ ва $\overline{C}_w$ текислик нуқталари ўзаро бир қийматли мосликда эканлиги келиб чиқади. Бунда $z = \infty$ да $w = \infty$ бўлади ва аксинча.

Равшанки,

$$w' = (az + b)' = a.$$

Демак,

$$w = az + b$$

акслантириш $\overline{C}_z$ текисликни $\overline{C}_w$ текисликка конформ акслантиради.

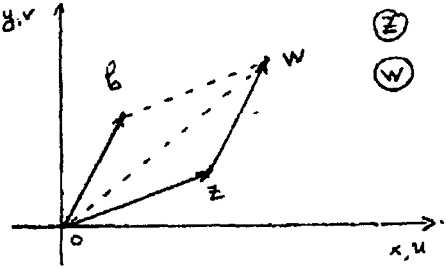
Ихтиёрий $z \in \overline{C}_z$ нуқтани олайлик. Бу z нуқта (1) акслантириш ёрдамида w нуқтага $(w \in \overline{C}_w)$ ўтади.

Чизиқли функция ёрдамида бажариладиган акслантиришни аниқлаш учун аввало унинг хусусий ҳолларини қараймиз.

1^0. Айтайлик,

$$w = z + b \qquad (3)$$

бўлсин. Агар комплекс сон вектор орқали ифодаланишини эътиборга олсак, унда (3) акслантириш z ва b векторлар йиғиндиси орқали топилишини кўрамиз. Демак, бу ҳолда z га кўра унинг акси w параллел кўчириш орқали топилар экан. Бу жараён 12-чизмада тасвирланган.



12-чизма

2⁰. Айтайлик,

$$w = e^{i\alpha}z \quad (\alpha \in R)$$

бўлсин. Аввало

$$e^{i\alpha} = cos\alpha + i\,sin\,\alpha$$

эканини эътиборга олиб, сўнг

$$z = |z|(cos\varphi + i\,sin\,\varphi)$$

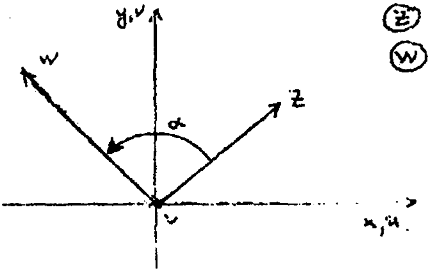
тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$w = e^{i\alpha}z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot|z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= |z|\cdot[\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)].$$

Демак,

$$|w| = |z|, \quad \arg w = \varphi + \alpha = \arg z + \alpha$$

бўлади. Бу ҳолда z га кўра унинг акси w, z векторни α бурчакка буриш билан топилар экан. Бу жараён 13- чизмада тасвирланган.



13-чизма

3^0. Айтайлик,

$$w = kz \quad (k > 0)$$

бўлсин. У ҳолда z га кўра унинг акси w, z векторни чўзиш (k>1) ёки сиқиш (k < 1) билан топилади.

Юқорида келтирилган ҳоллардан кўринадики,

$$w = az + b$$

чизиқли функция ёрдамида акслантириш $\overline{C}_z$ текисликдаги соҳани «параллел кўчириш», «бурчакка буриш» ҳамда «чўзиш ёки сиқиш»ни амалга оширар экан.

Мисоллар. 1. Учлари

$$A = 1 + i, \quad B = 1 + 3i, \quad C = 2 + i$$

нуқталарда бўлган ABC учбурчакни

$$w = iz + 1$$

чизиқли функция ёрдамида акслантиринг.

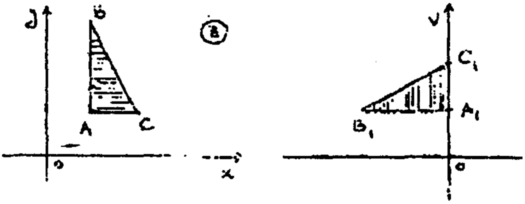
Равшанки, бу $w = iz + 1$ чизиқли функция C_z тексиликдаги ABC учбурчакни C_w текисликдаги $A_1B_1C_1$ учбурчакка акслантиради. Унинг A_1, B_1, C_1 учлари мос равишда A,B,C нуқталарнинг акси бўлади:

$$A_1 = w(A) = i(1 + i) + 1 = i,$$

$$B_1 = w(B) = i(1 + 3i) + 1 = i - 2,$$

$$C_1 = w(C) = i(2 + i) + 1 = 2i.$$

Демак, $w = iz + 1$ функция учлари 1+i; 1+3i; 2+i нуқталарда бўлган ABC учбурчакни учлари i; i-2; 2i нуқталарда бўлган $A_1B_1C_1$ учбурчакка акслантиради (14-чизма).



14-чизма

2. C_z тексиликдаги

$$D = \{z \in C_z : |z - z_0| < r\}$$

доирани C_w текисликдаги

$$\{w \in C_w : |w| < 1\}$$

бирлик доирага акслантирувчи чизиқли функцияни топинг.

Ушбу

$$w_1 = z - z_0$$

чизиқли функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция $\mathbb{C}_z$ текисликдаги

$$D = \{z \in \mathbb{C}_z : |z - z_0| < r\}$$

доирани $\mathbb{C}_{w_1}$ текисликдаги

$$\{w_1 \in \mathbb{C}_{w_1} : |w_1| < r\}$$

доирага акслантиради.

Қуйидаги

$$w = \frac{1}{r} w_1$$

чизиқли функция эса,

$$\{w_1 \in \mathbb{C}_{w_1} : |w_1| < r\}$$

доирани

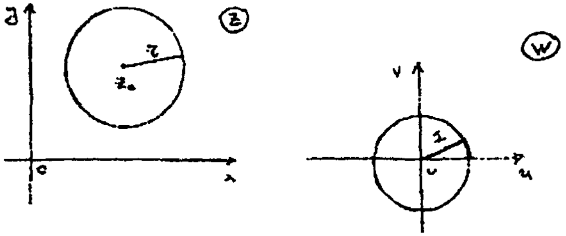
$$\{w \in \mathbb{C}_w : |w| < 1\}$$

бирлик доирага акслантиради.

Шундай қилиб, берилган D соҳани $\mathbb{C}_w$ текисликдаги бирлик доирага акслантирувчи чизиқли акслантириш

$$w = \frac{1}{r}(z - z_0)$$

кўринишга эга бўлади (15-чизма).



15-чизма

Фараз қилайлик, $w = f(z)$ функция бирор E соҳада $(E \subset \overline{\mathbb{C}})$ берилган бўлсин.

Агар $a \in E$ нуқтада

$$f(a) = a$$

тенглик бажарилса, $z=a$ нуқта $w=f(z)$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси дейилади.

Юқорида келтирилган

$$w=az+b$$

чизиқли акслантириш:

1) $a=1$ бўлганда $z=\infty$ қўзғалмас нуқтага,

2) $a\neq 1$ бўлганда иккита $z_1=\infty, z_2=\frac{b}{1-a}$ қўзғалмас нуқталарга эга бўлади.

Мисол. C_z текисликдаги $z_0=1+i$ нуқтани қўзғалмас қолдириб, $z_1=2+i$ нуқтани эса $w_1=4-3i$ нуқтага ўтказадиган чизиқли акслантиришни топинг.

Топилиши лозим бўлган чизиқли акслантиришни қуйидаги

$$w=az+b \qquad (4)$$

кўринишда излаймиз.

$z_0=1+i$ нуқта қўзғалмас бўлганлиги сабабли

$$az_0+b=z_0 \qquad (5)$$

бўлади. (4) ва (5) муносабатлардан

$$w-z_0=a(z-z_0)$$

бўлиши келиб чиқади.

z_1 нуқта акслантириш натижасида w_1 нуқтага ўтишидан фойдаланиб

$$w_1-z_0=a(z_1-z_0)$$

яъни

$$4-3i-(1+i)=a[2+i-(1+i)]$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликдан

$$a=3\text{-}4i$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, изланаётган чизиқли акслантириш

$$w=z_0+a(z-z_0)=1+i+(3-4i)\cdot[z-(1+i)]=(3-4i)z-6+2i.$$

бўлади.

2-§. Каср-чизиқли функция

Ушбу

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (6)$$

кўринишдаги функция каср-чизиқли функция (каср-чизиқли акслантириш) дейилади, бунда a, b, c, d, лар ўзгармас комплекс сонлар ва

$$ad - bc \neq 0. \qquad (7)$$

(7) шартнинг бажарилмаслиги w функциянинг ўзгармас бўлиб қолишига олиб келади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$ad - bc = 0$$

бўлса, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(b \neq 0, d \neq 0)$ бўлиб,

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{b(\frac{a}{b}z+1)}{d(\frac{c}{d}z+1)} = \frac{b}{d} = \text{const}.$$

бўлади.

Биз c≠0 бўлганда

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w(-\frac{d}{c}) = \infty, \qquad (8)$$

$$c = 0 \quad \text{бўлганда} \quad w(\infty) = \infty$$

деб қараймиз.

(6) муносабатни z га нисбатан ечиш натижасида берилган каср чизиқли функцияга нисбатан тескари бўлган

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a} \qquad (9)$$

функцияга келамиз. Бу ерда ҳам

c≠0 бўлганда, $z(\infty) = -\frac{d}{c}$, $z(\frac{a}{c}) = \infty.$,

c = 0 бўлганда, $z(\infty) = \infty$

деб қараймиз.

Демак,

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

функция $\overline{C}_z$ тўпламда

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

функция эса $\overline{C}_w$ тўпламда аниқланган.

Айни пайтда (6) функция $\overline{C}_z$ тўплам нуқталарини $\overline{C}_w$ тўплам нуқталарига ўзаро бир қийматли акслантиради.

Равшанки,

$$w' = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{(cz+d)a - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

бўлиб, бу ҳосила

$$\overline{C}_z \setminus \{z \in \overline{C}_z : z = -\frac{d}{c},\ z = \infty\}$$

тўпламда чекли ҳамда (8) шартга биноан $w' \neq 0$.

Демак,

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

акслантириш

$$\overline{C}_z \setminus \{z \in \overline{C}_z : z = -\frac{d}{c},\ z = \infty\}$$

тўпламда конформ акслантирш бўлади.

Энди

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (6)$$

акслантиршнинг $z = -\frac{d}{c}$ ва $z=\infty$ нуқталарда конформ бўлишини кўрсатамиз.

1) $c\neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) акслантиришнинг $z = -\frac{d}{c}$ нуқтада конформ бўлишини кўрсатиш учун

$$w = \frac{1}{w_1}$$

ни қараймиз.

Равшанки,

$$w_1 = \frac{cz+d}{az+b},$$

$$w_1' = \frac{bc-ad}{(az+b)^2}$$

бўлиб,

$$w_1'(-\frac{d}{c}) = \frac{c^2}{bc-ad} \neq 0$$

бўлади. Демак, қаралаётган акслантириш $z = -\frac{d}{c}$ нуқтада конформ бўлади.

(6) акслантиришнинг $z=\infty$ нуқтада конформ бўлишини кўрсатиш учун

$$z = \frac{1}{z_1}$$

ни қараймиз. Унда

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a+bz_1}{c+dz_1},$$

$$w'=\frac{bc-ad}{(c-dz_1)^2}$$

бўлиб, $z_1=0$ бўлганда

$$w'=\frac{bc-ad}{c^2}\neq 0$$

бўлади. Демак, (6) акслантириш $z=\infty$ нуқтада конформ бўлади.

2) $c=0$ бўлсин. Бу ҳолда

$$w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$$

бўлиб, $z=\infty$ нукта $w=\infty$ нуқтага аксланади.

Агар $z=\frac{1}{z_1}$, $w=\frac{1}{w_1}$ дейилса, унда

$$w_1=\frac{dz_1}{a+bz_1},$$

$$w_1'=\frac{ad}{(a+bz_1)^2}$$

бўлиб, $z_1=0$ нуқтада

$$w_1'=\frac{d}{a}\neq 0$$

бўлади. Демак, (6) акслантириш $z=\infty$ нуқтада конформ акслантириш бўлади.

Шундай қилиб,

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

акслантириш $\overline{C}_z$ текислик нуқталарини $\overline{C}_w$ текислик нуқталарига конформ акслантирар экан.

Каср чизиқли акслантириш ёрдамида $\overline{C}_z$ даги соҳанинг аксини аниқлаш учун аввал (6) нинг хусусий холларини қараймиз:

1^0. (6) да

$$a=0,\ b=1,\ c=1,\ d=0$$

бўлсин. Бу ҳолда каср чизиқли функция ушбу

$$w=\frac{1}{z}$$

кўринишга келади.

кенгайтирилган комплекс текислик $\overline{C}_z$ да конформ акслантириш эканлигини кўрдик.

Энди каср-чизиқли акслантиришнинг хоссаларини келтирамиз.

1^0. Каср-чизиқли акслантиришга тескари бўлган акслантириш каср-чизиқли бўлади, каср чизиқли акслантиришнинг суперпозицияси ҳам каср-чизиқли бўлади.

(6) ва (9) муносабатлардан (6) каср-чизиқли акслантиришга тескари акслантириш каср чизиқли бўлиши келиб чиқади.

Айтайлик, иккита

$$w_1 = w_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \quad (a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0),$$

$$w = w(w_1) = \frac{a_2w_1 + b_2}{c_2w_1 + d_2} \quad (a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0)$$

каср-чизиқли акслантиришлар берилган бўлсин. Бу акслантиришнинг суперпозициясини қараймиз:

$$w(w_1) = w(w_1(z)) = \frac{a_2\dfrac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} + b_2}{c_2\dfrac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} + d_2} =$$

$$= \frac{(a_1a_2 + c_1b_2)z + a_2b_1 + b_2d_1}{(a_1c_2 + c_1d_2)z + c_2b_1 + d_1d_2} = \frac{az + b}{cz + d}$$

бунда

$$a = a_1a_2 + c_1b_2,$$
$$b = a_2b_1 + b_2d_1,$$
$$c = a_1c_2 + c_1d_2,$$
$$d = c_2b_1 + d_1d_2.$$

бўлиб,

$$ad - bc = (a_1a_2 + c_1b_2)(c_2b_1 + d_1d_2) -$$
$$-(a_2b_1 + b_2d_1)(a_1c_2 + c_1d_2) =$$
$$= (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) \neq 0$$

бўлади. Демак, $w(w_1(z))$ каср-чизиқли акслантириш бўлади.

2°. Каср-чизиқли акслантириш

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$\overline{C}_z$ текисликдаги айланани ёки тўғри чизиқни $\overline{C}_w$ текисликдаги айлана ёки тўғри чизиққа акслантиради.

Маълумки, $w = az + b$ ҳамда $w = \frac{1}{z}$ кўринишдаги акслантиришларнинг ҳар бири $\overline{C}_z$ текисликдаги айланани ёки тўғри чизиқни C_w текисликдаги айланага ёки тўғри чизиққа акслантиради.

Каср чизиқли акслантириш эса чизиқли ҳамда $w = \frac{1}{z}$ кўринишдаги акслантиришларнинг бирин-кетин бажарилишидан иборат. Бинобарин, каср чизиқли акслантириш $\overline{C}_z$ текисликдаги айлана ёки тўғри чизиқни $\overline{C}_w$ текисликдаги айлана ёки тўғри чизиққа акслантиради.

Одатда, бу хосса каср-чизиқли акслантиришнинг доиравийлик хоссаси дейилади.

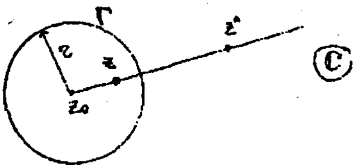
Каср-чизиқли акслантиришнинг кейинги хоссаларини келтиришдан аввал баъзи тушунчалар билан танишамиз.

Фараз қилайлик, комплекс текисликда

$$\Gamma = \left\{ z \in C : |z - z_0| = r \right\}$$

айлана берилган бўлсин.

1 - таъриф. Агар z ва z^* нуқталар Γ айлана марказидан чиққан битта нурда ётиб, бу нуқталардан айлана марказигача бўлган масофалар кўпайтмаси айлана радиуси квадратига тенг бўлса, z ва z^* нуқталар Γ айланага нисбатан симметрик нуқталар дейилади (16-чизма).



16-чизма

Равшанки, бу ҳолда

$$arg(z^* - z_0) = arg(z - z_0),$$

$$|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = r^2$$

бўлиб,

$$z^* - z_0 = \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}$$

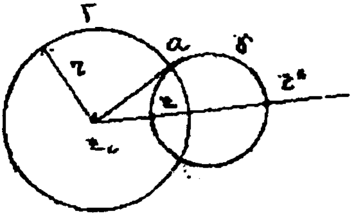
бўлади.

2 - лемма. Берилган z ва z^* нуқталарнинг Γ айланага нисбатан симметрик бўлиши учун шу z ва z^* нуқталар орқали ўтувчи ҳар қандай γ айлананинг $\left(\gamma\subset\overline{C}_z\right)\Gamma$ айланага ортогонал бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Айтайлик, z ва z^* нуқталар Γ айланага нисбатан симметрик бўлсин. Демак,

$$\arg(z^*-z_0)=\arg(z-z_0),$$

$$|z^*-z_0|\cdot|z-z_0|=r^2. \quad (16)$$



17-чизма

Шу z ва z^* нуқталар орқали ўтувчи γ айланани қараймиз. z_0 нуқтадан γ айланага уринма ўтказамиз. Уриниш нуқтаси a бўлсин. Унда геометрия курсидан маълум бўлган тасдиққа кўра

$$|z_0-a|^2=|z_0-z^*|\cdot|z_0-z| \quad (17)$$

бўлади. (16) ва (17) муносабатлардан

$$|z_0-a|^2=r^2$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, z_0 нуқтадан γ айланага ўтказилган уринманинг z_0a қисми Γ айлананинг радиуси экан (17-чизма).

$$|z_0-a|=r$$

Бу эса Γ ва γ айланаларнинг ортогонал бўлишини билдиради.

Етарлилиги. Фараз қилайлик, z ва z^* нуқталардан ўтувчи ҳар қандай γ айлана $\left(\gamma\subset\overline{C}_z\right)\Gamma$ айланага ортогонал бўлсин. Хусусан, бу айлана z ва z^* нуқталардан ўтувчи $z\,z^*$ тўғри чизиқ бўлиши ҳам мумкин. Унда zz^* тўғри чизиқ Γ айланага ортогонал бўлганлиги учун у z_0 нуқтадан ўтади, яъни

$$\arg(z-z_0)=\arg(z^*-z_0)$$

бўлади.

Иккинчи томондан, геометрия курсидан маълум бўлган [illegible] кўра

$$|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|=r^2$$

бўлади. Демак, z ва z^* нуқталар Г айланага нисбатан симметрик бўлади. Лемма исбот бўлди.

3°. Ҳар қандай

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

каср чизиқли акслантириш $\overline{C}_z$ текисликдаги Г айланага нисбатан симметрик бўлган z ва z^* нуқталарни $\overline{C}_w$ текисликдаги Г айлананинг акси w(Г) айланага нисбатан симметрик бўлган w(z) ва $w(z_0)$ нуқталарга ўтказади.

Каср чизиқли акслантиришнинг 2^0-хоссасига кўра Г айлананинг $\overline{C}_w$ текисликдаги акси w(Г) ҳам айлана бўлади.

z ва z^* нуқталарнинг акси w(z) ва $w(z^*)$ бўлсин. Бу w(z) ва $w(z^*)$ нуқталарнинг w(Г) айланага нисбатан симметрик бўлишини кўрсатамиз.

z ва z^* нуқталар орқали ўтувчи ихтиёрий γ айланани олайлик. z ва z^* нуқталар Г айланага нисбатан симметрик нуқталар бўлгани учун исбот этилган леммага биноан Г ва γ айланалар ортогонал бўлади.

Каср чизиқли акслантириш конформ бўлгани сабабли w(Г) ҳамда w(γ) айланалар ортогонал бўлади. Унда леммага кўра w(z) ва $w(z^*)$ нуқталар w(Г) айланага нисбатан симметрик бўлади. Хосса исбот бўлди.

4°. $\overline{C}_z$ текисликда берилган турли z_1, z_2, z_3, нуқталарни $\overline{C}_w$ текисликда берилган турли w_1, w_2, w_3 нуқталарга ўтказувчи каср чизиқли акслантириш мавжуд ва у ягонадир.

Айтайлик,

$$w=w(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

каср чизиқли акслантириш z_1, z_2, z_3 текисликдаги турли $\overline{C}_z$ нуқталарни $\overline{C}_w$ текисликдаги турли w_1, w_2, w_3 нуқталарга акслантирсин. Унда

$$w_1 = w(z_1) = \frac{az_1+b}{cz_1+d},$$

$$w_2 = w(z_2) = \frac{az_2+b}{cz_2+d},$$

$$w_3 = w(z_3) = \frac{az_3+b}{cz_3+d}.$$

бўлади.

Қуйидаги айирмаларни ҳисоблаймиз:

$$w-w_1 = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{(ad-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)},$$

$$w_3-w_1 = \frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)},$$

$$w-w_2 = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d} = \frac{(ad-bc)(z-z_2)}{(cz+d)(cz_2+d)},$$

$$w_3-w_2 = \frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d} = \frac{(ad-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}.$$

Бу айирмалардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{(ad-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)} \cdot \frac{(cz+d)(cz_2+d)}{(ad-bc)(z-z_2)} :$$

$$: \frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)} \cdot \frac{(cz_3+d)(cz_2+d)}{(ad-bc)(z_3-z_2)} =$$

$$= \frac{(cz_2+d)(z-z_1)}{(cz_1+d)(z-z_2)} : \frac{(cz_2+d)(z_3-z_1)}{(cz_1+d)(z_3-z_2)} =$$

$$= \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Демак,

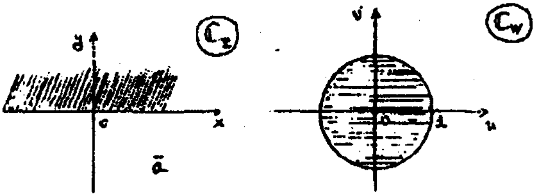
$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Бу изланаётган каср чизиқли аксланишдир.

5°. Юқори ярим текислик $\{z \in C_z : \text{Im} z > 0\}$ ни $\overline{C}_w$ текисликдаги бирлик доира $\{w \in C_w : |w| < 1\}$ га аксалантирувчи каср чизиқли функция ушбу

$$w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{z-\bar{a}} \quad (\varphi \in R; \text{Im} a > 0)$$

кўринишда бўлади (18-чизма).



18-чизма

Ҳақиқатан, юқори ярим текисликда a нуқтани ($a \in \{z \in C_z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$) олайлик. Равшанки, бу a нуқтага ох ўқига нисбатан симметрик бўлган нуқта $\bar{a}$ бўлади.

Изланаётган акслантириш z=a нуқтани $\bar{C}_w$ текисликдаги бирлик доира маркази w=0 нуқтага ўтказадиган бўлса, каср чизиқли акслантиришнинг 3°-хоссасига кўра $z=\bar{a}$ нуқта w=0 нуқтага бирлик айланага нисбатан симметрик бўлган w=∞ нуқтага ўтказиши лозим. Демак, бундай акслантиришни бажарувчи функция

$$w = \alpha \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

кўринишда бўлади. Айни пайтда бу акслантириш ҳақиқий ўқда жойлашган z=x нуқтани C_w текисликдаги $|w| = 1$ бирлик айлана нуқтасига ўтказиши керак. Бинобарин

$$|w| = 1 \qquad (18)$$

бўлади. Демак,

$$|w| = |\alpha| \frac{|z-a|}{|z-\bar{a}|} \qquad (19)$$

(18) ва (19) тенгликлардан (z - ҳақиқий бўлгани учун)

$$|z-a| = |z-\bar{a}|$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада

$$|\alpha| = 1,$$

яъни

$$\alpha = e^{i\varphi} \quad (\varphi \in R)$$

бўлади.

Шундай қилиб, юқори ярим текисликни бирлик доирага акслантирувчи каср чизиқли функция

$$w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

кўринишда бўлар экан.

6°. Комплекс текислик C_z даги бирлик доира

$$\{z \in C_z : |z| < 1\}$$

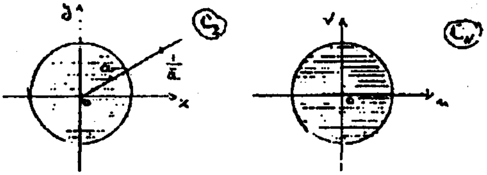
ни C_w текисликдаги бирлик доира

$$\{w \in C_w : |w| < 1\}$$

га акслантирувчи каср чизиқли функция ушбу

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (\varphi \in R, |a| < 1)$$

кўринишда бўлади (19-чизма).



19-чизма

Бирор $a \in \{z \in C_z : |z| < 1\}$ нуқтани олиб, уни

$$a = re^{i\varphi}$$

кўринишда ифодалаймиз. Унда a нуқтага бирлик айланага нисбатан симметрик бўлган нуқта

$$a^* = \frac{1}{r}e^{i\varphi} = \frac{1}{re^{-i\varphi}} = \frac{1}{\bar{a}}$$

бўлади. Изланаётган акслантириш $z = a$ нуқтани C_w текисликдаги бирлик доира маркази $w = 0$ га ўтказадиган бўлса, каср чизиқли акслантиришнинг 3°-хоссасига кўра, $z = \frac{1}{\bar{a}}$ нуқта $w = 0$ нуқтага $|w| = 1$ айланага нисбатан симметрик бўлган $w = \infty$ нуқтага ўтказиши лозим.

Демак, бундай акслантиришни бажарувчи функция

$$w = \alpha_1 \frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = \alpha \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (\alpha = -\bar{a}\alpha_1)$$

кўринишда бўлади.

Энди $|z| = 1$ бўлганда $|w| = 1$ бўлишидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$|w| = |\alpha|\cdot\frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|},$$

$$1 = |\alpha|\cdot\frac{|z-a|}{\left|z(\frac{1}{z}-\bar{a})\right|} = |\alpha|\cdot\frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|}$$

(Чунки, $z = e^{i\varphi} \Rightarrow \frac{1}{z} = e^{-i\varphi} = \bar{z}$).

Равшанки,

$$|z-a| = |\bar{z}-\bar{a}|$$

Демак, $|\alpha| = 1$, яъни $\alpha = e^{i\varphi}$ бўлади.

Шундай қилиб, C_z тексиликдаги бирлик доирани C_w текисликдаги бирлик доирага акслантирувчи каср чизиқли функция ушбу

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

кўринишда бўлар экан.

Мисоллар. 1. C_z текисликдаги 1; i; -1 нуқталарни мос равишда C_w текисликдаги -1; 0; 1 нуқталарга акслантирувчи каср чизиқли функцияни топинг.

Каср чизиқли акслантиришнинг 4°-хоссасида келтирилган

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

тенгликда

$$z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1$$
$$w_1 = -1,\ w_2 = 0,\ w_3 = 1.$$

деб топамиз:

$$\frac{w-(-1)}{w-0}\cdot\frac{1-0}{1-(-1)} = \frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \frac{z-i}{zi-1}$$

Демак, изланаётган каср чизиқли функция

$$w = \frac{z-i}{zi-1}$$

бўлади.

2. Комплекс текислик C_z да $z_1 = 1+i$ нуқта учун ушбу $\{z \in C_z : |z| = 1\}$ айланага нисбатан симметрик бўлган нуқтани топинг.

Изланаётган нуқтани z_1^* дейлик. Бу нуқтани топишда

$$z_1^* - z_0 = \frac{r^2}{\overline{z_1 - z_0}}$$

формуладан фойдаланамиз. $z_0 = 0$, $r = 1$ эканлигини эътиборга олиб

$$z_1^* = \frac{1}{\overline{z_1}}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$z_1^* = \frac{1}{\overline{z_1}} = \frac{1}{\overline{1+i}} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

экан.

3-§. Даражали функция

Ушбу

$$w = z^n \qquad (20)$$

кўринишдаги функция даражали функция (акслантириш) дейилади, бунда n - натурал сон.

Бу функция бутун комплекс текислик C_z да аниқланган бўлиб, унинг ҳосиласи

$$w' = n \cdot z^{n-1}$$

га тенг.

Демак, (20) функция бутун текислик C да голоморф, $n>1$ ва $z\neq0$ бўлганда унинг ёрдамида бажариладиган акслантириш $C\backslash\{0\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида конформ акслантириш бўлади.

C_z ва C_w текисликларда қутб координаталарини киритамиз:

$$z = re^{i\varphi}, \quad (r = |z|, \varphi = \arg z)$$

$$w = \rho e^{i\psi}, \quad (\rho = |w|, \psi = \arg w)$$

Натижада (20) акслантириш ушбу

$$\rho e^{i\psi} = r^n e^{i\varphi n}$$

кўринишга эга бўлади. Ундан эса,

$$\rho = r^n, \psi = n\varphi$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$w = z^n$$

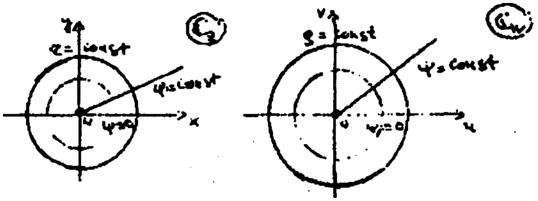
акслантириш қутб координаталар системасида ушбу

$$\left.\begin{array}{l}\rho = r^n \\ \psi = n\varphi\end{array}\right\} \qquad (21)$$

акслантиршга ўтади. Бинобарин, (20) акслантиришни ўрганиш (21) акслантиришни ўрганишга келади.

(21) акслантиршдан топамиз:

1) $r = \mathrm{const}$ бўлганда $\rho = \mathrm{const}$ бўлади. Демак, (20) акслантириш C_z текисликдаги маркази $z=0$ нуқтада бўлган айланаларни C_w текисликдаги маркази $w=0$ нуқтада бўлган айланаларга акслантиради (20-чизма).



20-чизма

2) $\varphi = \mathrm{const}$ бўлганда $\psi = \mathrm{const}$ бўлади. Демак, (20) акслантириш C_z текисликдаги $z=0$ нуқтадан чиққан нурларни, C_w текисликдаги $w=0$ нуқтадан чиққан нурларга акслантиради (20-чизма).

Айни пайтда (20) акслантириш $\varphi=0$ нурни (ҳақиқий мусбат йўналиш бўйича олинган нурни), $\psi=0$ нурга, C_z текисликдаги $\varphi=\alpha$ нурни эса, C_w текисликдаги $\psi = n\cdot\alpha$ нурга акслантиради (20-чизма).

Юқорида келтирилган тасдиқлардан

$$w = z^n$$

акслантириш C_z текисликдаги

$$D = \{z \in C_z : 0 < \arg z < \alpha\} \quad \left(\alpha < \frac{2\pi}{n}\right)$$

соҳани (учи $z=0$ нуқтада бўлган бурчакни - секторни) C_w текисликдаги

$$w(D) = \{w \in C_w : 0 < \arg w < n\alpha\}$$

соҳага (учи $w=0$ нуқтада бўлган бурчакка - секторга) акслантириши келиб чиқади.

деб оламиз. Унда (26) акслантириш ушбу

$$u+iv=\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)$$

кўринишга келади.

Равшанки,

$$re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}=\left(r+\frac{1}{r}\right)cos\varphi+i\left(r-\frac{1}{r}\right)sin\varphi$$

Натижада

$$u+iv=\frac{1}{2}\left[\left(r+\frac{1}{r}\right)cos\varphi+i\left(r-\frac{1}{r}\right)sin\varphi\right]$$

бўлиб, ундан

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)cos\varphi,$$

$$v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)sin\varphi$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

акслантириш ушбу

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)cos\varphi,\\ v&=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)sin\varphi\end{aligned}\qquad(27)$$

акслантиришга келади. (27) муносабатдан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

1) C_z текисликда радиуси ρ га $(0<\rho<1)$ тенг бўлган

$$z=\rho e^{i\varphi},\quad (0\le\varphi\le 2\pi)$$

айланани олайлик. Жуковский функцияси ёрдамида бу айлана C_w текисликдаги

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi,\\ v&=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi\end{aligned}\qquad (0\le\varphi\le 2\pi)$$

чизиққа аксланади.

Агар

$$a_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \quad b_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$$

дойилса, унда

$$u = a_\rho \cos\varphi,$$

$$v = b_\rho \sin\varphi$$

бўлиб,

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1$$

бўлади. Бу C_w текисликда фокуслари ±1 нуқтада , ярим ўқлари a_ρ ва b_ρ бўлган эллипсни ифодалайди.

Демак, Жуковский функцияси

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

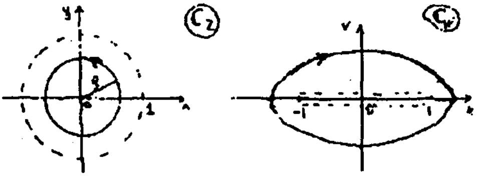
C_z текисликдаги радиуси ρ $(0<\rho<1)$ бўлган

$$z = \rho e^{i\varphi} \qquad (28)$$

айланани, C_w текисликдаги

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1 \qquad (29)$$

эллипсга акслантиради (23-чизма).



23-чизма

2) C_z текисликда радиуси ρ га $(\rho>1)$ тенг бўлган ушбу

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi}, \quad (0 \le \varphi \le 2\pi) \qquad (30)$$

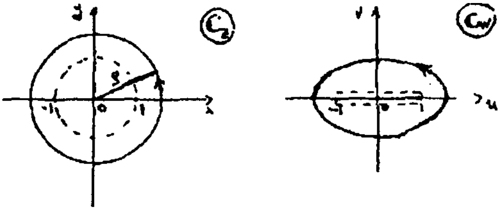
айланани олайлик. Жуковский функцияси

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

бу айланани ҳам

$$\frac{u^2}{a_\rho^2}+\frac{v^2}{b_\rho^2}=1 \qquad (31)$$

эллипсга акслантиради (24-чизма).



24-чизма

3) C_z текисликда радиуси $\rho=1$ бўлган

$$z=e^{i\varphi}, \quad (0\le\varphi\le 2\pi)$$

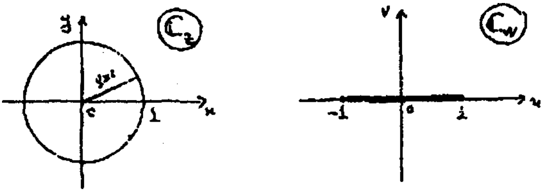
айланани олайлик. Жуковский функцияси ёрдамида бу айлана C_w текисликдаги

$$\begin{aligned} u &= \cos\varphi, \\ v &= 0 \end{aligned} \qquad (0\le\varphi\le 2\pi)$$

чизиққа аксланади.

Равшанки, бу чизиқ C_w текисликдаги $[-1,1]\in R$ кесмани ифодалайди.

Демак, Жуковский функцияси C_z текисликдаги $\rho=1$ радиусли айланани C_w текисликдаги $[-1,1]\in R$ кесмага акслантиради. (25-чизма).



25-чизма

4) C_z текисликда

$$z=\rho e^{i\alpha}, \quad (0\le\rho\le+\infty)$$

яъни

$$\{z\in C_z : arg\, z=\alpha\}$$

нурни олайлик. (26) акслантириш бу нурни C_w текисликдаги

$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\alpha, \qquad (0 \le \rho \le +\infty) \qquad (32)$$
$$v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\alpha$$

чизиққа акслантиради. (32) муносабатдан топамиз:

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1 \qquad \left(\alpha \ne \frac{k\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots\right) \qquad (33)$$

Равшанки, бу чизиқ фокуслари ±1 нуқтада бўлган гипербола бўлиб, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бўлганда (33) чизиқ гиперболанинг ўнг тармоғининг юқори қисмини, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бўлганда эса чап тармоғининг юқори қисмини ифодалайди.

Демак, Жуковский функцияси

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

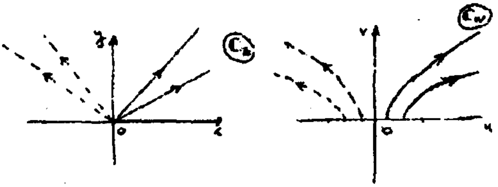
C_z текисликдаги

$$\{z \in C_z : \arg z = \alpha\}$$

нурни C_w текисликдаги

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$$

гиперболанинг қисмига акслантиради (26-чизма).



26-чизма

Жумладан, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ функция ёрдамида қуйидаги акслантиришлар

$$\left\{z \in C_z : \arg z = \frac{\pi}{2}\right\} \to \left\{w \in C_w : Re\,w = 0\right\},$$

$$\left\{z \in C_z : \arg z = \frac{3\pi}{2}\right\} \to \left\{w \in C_w : Re\,w = 0\right\},$$

$$\left\{z \in C_z : \arg z = 0\right\} \to \left\{w \in C_w : Re\,w = [1,+\infty]\right\},$$

$$\left\{z \in C_z : \arg z = \pi\right\} \to \left\{w \in C_w : Re\,w = [-\infty,-1]\right\}.$$

бажарилади.

Фараз қилайлик, Жуковский функцияси

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

C_z текисликдаги турли z_1 ва z_2 нуқталарни C_w текисликдаги битта нуқтага акслантирсин.

Унда

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \quad (z_1 \neq z_2)$$

яъни

$$z_1 + \frac{1}{z_1} - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 \cdot z_2}\right) = 0$$

бўлади. Кейинги тенгликдан

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \qquad (34)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, Жуковский функцияси бирор соҳада ўзаро бир қийматли бўлиши учун шу соҳанинг ихтиёрий турли икки z_1 ва z_2 нуқталарида $z_1 \cdot z_2 = 1$ шартнинг бажармаслиги зарур ва етарли бўлади.

Қуйидаги

$$D_1 = \left\{z \in C_z : |z| > 1\right\},$$

$$D_2 = \left\{z \in C_z : |z| < 1\right\},$$

$$D_3 = \left\{z \in C_z : Im\,z > 0\right\},$$

$$D_4 = \left\{z \in C_z : Im\,z < 0\right\}$$

соҳаларнинг ҳар биридан олинган ихтиёрий иккита турли z_1 ва z_2 нуқталар (34) шартнинг бажармаслигини кўрсатиш қийин эмас. Бинобарин, Жуковский функцияси бу соҳаларда ўзаро бир қийматли функция бўлади.

Энди C_z текисликдаги бу D_1, D_2, D_3, D_4 соҳаларни Жуковский функцияси C_w текисликдаги қандай соҳаларга акслантиришини топамиз.

1) Айтайлик, C_z текисликда

$$D_1 = \{z \in C_z : |z| > 1\}$$

соҳа - бирлик доиранинг ташқариси берилган бўлсин.

Равшанки, Жуковский функцияси бу соҳада конформ акслантириш бўлади.

D_1 соҳада ихтиёрий

$$\{z \in C_z : |z| = \rho, \rho > 1\}$$

айланани олайлик. Маълумки, бундай айлана Жуковский функцияси

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (26)$$

ёрдамида C_w текисликдаги эллипсга аксланади.

Агар айлана радиуси ρ $(1,+\infty)$ оралиқда ўзгара борса, уларга мос эллипслар C_w текисликдаги

$$C_w \setminus \{w \in C_w : w \in [-1, 1]\}$$

соҳани ҳосил қилади.

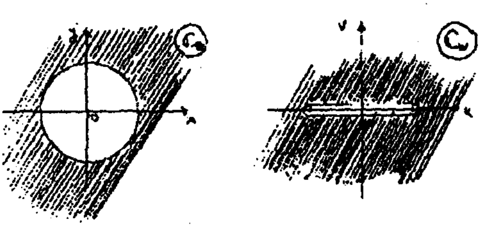
Демак, (26) акслантириш C_z текисликдаги бирлик доира ташқариси D_1 соҳани C_w текисликдаги

$$C_w \setminus \{w \in C_w : w \in [-1, 1]\}$$

соҳага конформ акслантиради:

$$w(D_1) = C_w \setminus \{w \in C_w : w \in [-1, 1]\}$$

(27-чизма).



27-чизма

2) C_z текисликда ушбу

$$D_2 = \{z \in C_w : |z| < 1\}$$

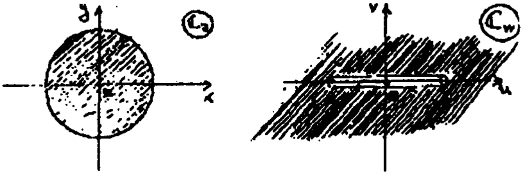
соҳани - бирлик доирани олайлик. Юқоридагидек кўрсатиш мумкинки, (26) акслантириш D_2 соҳани C_w текисликдаги

$$C_w \setminus \{w \in C_w : w \in [-1, 1]\}$$

соҳага конформ акслантиради:

$$w(D_2) = C_w \setminus \{w \in C_w : w \in [-1, 1]\}$$

(28-чизма).



28-чизма

3) C_z текисликда

$$D_3 = \{z \in C_z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$$

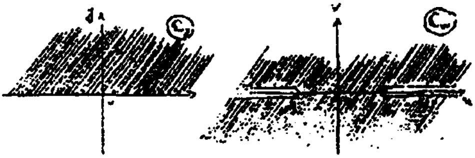
соҳани - юқори ярим текисликни қарайлик. (26) акслантириш бу D_3 соҳани C_w текисликдаги

$$C_w \setminus \{w \in C_w : w \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$$

соҳага конформ акслантиради:

$$w(D_3) = C_w \setminus \{w \in C_w : w \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$$

(29-чизма).



29-чизма

4) C_z текисликда

$$D_4 = \{z \in C_z : \mathrm{Im}\, z < 0\}$$

пастки ярим текисликни қарайлик. (26) акслантириш бу D_4 соҳани C_w текисликдаги

$$C_w \setminus \{w \in C_w : w \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$$

соҳага конформ акслантиради:

$$w(D_4) = C_w \setminus \{w \in C_w : w \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$$

(30-чизма).

30-чизма

Мисоллар. 1. Жуковский функцияси ёрдамида C_z текисликдаги

$$\ell=\left\{z\in C_z: |z|=1, \frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{7\pi}{4}\right\}$$

ёйнинг аксини топинг.

Равшанки,

$$\ell=\left\{z\in C_z: |z|=1, \frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{7\pi}{4}\right\}=\left\{r=1, \quad \frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}\right\}.$$

(27) муносабатга кўра

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi=\cos\varphi,$$

$$v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi=0$$

бўлади.

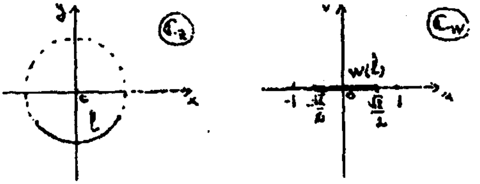
Агар $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$ бўлганда

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\varphi<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

бўлишини эътиборга олсак,

$$w(\ell)=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}<u<\frac{\sqrt{2}}{2}, v=0\right\}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

эканини топамиз (31-чизма).



31-чизма

2. Ушбу

$$w = \frac{z}{z^2+1}$$

акслантириш ёрдамида C_z текисликдаги

$$D = \{z \in C_z : |z| < 1\}$$

соҳанинг (бирлик доиранинг) C_w текисликдаги аксини топинг.

Аввало берилган

$$w = \frac{z}{z^2+1}$$

функцияни қуйидаги

$$w = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Агар

$$w_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right)$$

десак, унда

$$w = \frac{1}{2 \cdot w_1}$$

бўлади.

Маълумки, $w_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right)$ Жуковский функцияси бирлик доира

$$D = \{z \in C_z : |z| < 1\}$$

ни

$$C_{w_1} \setminus \{w_1 \in C_{w_1} : w_1 \in [-1,1]\}$$

(тўпламга) соҳага ([-1,1] кесманинг ташқарисига) акслантиради.

Каср чизиқли

$$w = \frac{1}{2 \cdot w_1}$$

функция [0,1] кесмани $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ нурга, [-1,0] кесмани эса $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ нурга акслантиради.

Демак, берилган D соҳанинг акси

$$w(D) = C_w \setminus \left\{w \in C_w : w \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right\}$$

бўлади.

5-§. Кўрсаткичли функция

Комплекс сонлар текислиги C да ихтиёрий z ни олиб, қуйидаги

$$z_n=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \quad (n=1,2,3,..)$$

кетма-кетликни қараймиз. Бу комплекс сонлар кетма-кетлиги $n\to\infty$ да лимитга эга бўлишини кўрсатамиз.

Агар $z=x+iy$ десак, унда

$$z_n=\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n$$

бўлади.

Энди z_n нинг модули ва аргументини топамиз:

$$|z_n|=\left|1+\frac{x+iy}{n}\right|^n=\left|1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right|^n=\left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}\right)^n=$$

$$=\left[\left(1+\frac{2x}{n}\right)+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}},$$

$$\arg z_n=\arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n=n\arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)=n\cdot\arg\operatorname{tg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}.$$

Агар

$$\left[\left(1+\frac{2x}{n}\right)+\frac{x^3+y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}}=\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}}+\alpha_n,$$

$$n\cdot\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}=n\cdot\frac{y}{n+x}+\beta_n.$$

бўлишини эътиборга олсак, бундан

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\beta_n=0$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \arg z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{y}{1+\frac{x}{n}} = y \qquad (36)$$

бўлиши келиб чиқади.

Модомики, z_n кетма-кетликнинг модули $|z_n|$ нинг ҳамда аргументи $arg z_n$ нинг лимити мавжуд экан, унда z_n кетма-кетликнинг ҳам лимити мавжуд бўлади. Равшанки, бу лимит z ўзгарувчига боғлиқ бўлади.

2 - таъриф. Ушбу

$$z_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, ..)$$

кетма-кетликнинг лимити e^z функция дейилади.

Демак,

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n. \qquad (z \in C)$$

Одатда

$$w = e^z \qquad (37)$$

функцияни кўрсаткичли функция дейилади.

Келтирилган таъриф ҳамда (35) ва (36) муносабатлардан кўринадики,

$$\begin{aligned} &|e^z| = e^x, \quad arg e^z = y, \\ &e^z = e^{x+iy} = e^x(cos y + i sin y) \end{aligned} \qquad (38)$$

бўлади.

Энди $w = e^z$ функциянинг асосий хоссаларини келтирамиз.

1°. Кўрсаткичли $w = e^z$ функция бутун комплекс текисликда голоморф функция бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$w = e^z = u + iv$$

деб, (38) муносабатдан фойдаланиб

$$u = e^x cos y, \quad v = e^x sin y$$

бўлишини топамиз. Равшанки, бу функциялар R^2 маънода дифференциалланувчи. Айни пайтда бу функция учун

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x cos y$$

бўлиб,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

бўлади (Коши-Риман шарти бажарилади).

2-боб, 2-параграфда келтирилган теоремага кўра $w=e^z$ функция C да голоморф бўлади.

2°. $w=e^z$ функция комплекс текислик C нинг ҳар бир нуқтасида ҳосилага эга ва

$$w'=\left(e^z\right)'=e^z$$

бўлади.

2-бобнинг 2-параграфида келтирилган формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\left(e^z\right)'=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^x\left(\cos y+i\sin y\right)\right]=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)=e^z$$

3°. Кўрсаткичли функция учун ушбу

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

формула ўринли бўлади.

Айтайлик, $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ бўлсин. Унда

$$e^{z_1}=e^{x_1}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right), \quad e^{z_2}=e^{x_2}\left(\cos y_2+i\sin y_2\right)$$

бўлади.

Комплекс сонларни кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{x_1}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)\cdot e^{x_2}\left(\cos y_2+i\sin y_2\right)=$$
$$=e^{x_1}\cdot e^{x_2}\left[\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)\left(\cos y_2+i\sin y_2\right)\right]=$$
$$=e^{x_1+x_2}\left[\left(\cos y_1\cdot\cos y_2-\sin y_1\cdot\sin y_2\right)+i\left(\sin y_1\cdot\cos y_2+\cos y_1\cdot\sin y_2\right)\right]=$$
$$=e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\right]=e^{z_1+z_2}$$

Демак,

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$$

4°. Кўрсаткичли функция

$$w(z)=e^z$$

даврий функция бўлиб, унинг даври $T=2\pi i$ га тенг.

Эйлер формуласига кўра

$$e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

бўлишини эътиборга олиб, ҳамда кўрсаткичли функциянинг 3°-хоссаси-дан фойдаланиб $\forall z\in C$ учун

$$w(z+2\pi i)=e^{z+2\pi i}=e^z$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$w(z+2\pi i)=w(z).$$

Бу эса $w(z)=e^z$ функциянинг даврий функция эканини, унинг даври $T=2\pi i$ га тенглигини билдиради.

Энди $w=e^z$ функция ёрдамида бажариладиган акслантиришни ўрганамиз.

Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи учун

$$w'=e^z\neq 0 \quad (z\in C)$$

бўлганлиги сабабли, бу функция ёрдамида бажариладиган акслантириш *C* текисликнинг ҳар бир нуқтасида конформ акслантириш бўлади.

Айтайлик, $w=e^z$ функция C текисликнинг ихтиёрий турли z_1 ва z_2 нуқталарини C_w текисликдаги битта нуқтасига акслантирсин. Унда

$$e^{z_1}=e^{z_2},$$

яъни

$$e^{z_1-z_2}=1$$

бўлиб,

$$z_1-z_2=2k\pi i \quad (k=0,\pm1,\pm2,...) \qquad (39)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $w=e^z$ функция C_z текисликдаги бирор соҳада ўзаро бир қийматли функция бўлиши учун шу соҳага тегишли бўлган турли z_1 ва z_2 нуқталарда (39) шартни бажармаслиги зарур ва етарли.

Масалан, бундай соҳа сифатида

$$D=\{z\in C:\quad 0<\operatorname{Im}z<2\pi\}$$

соҳани олиш мумкин.

Демак, $w=e^z$ функция ёрдамида бажариладиган акслантириш бу D соҳанинг ҳар бир нуқтасида конформ бўлиб, функция шу соҳада ўзаро бир қийматли экан. Бинобарин, $w=e^z$ функция ёрдамида бажариладиган акслантириш D соҳада конформ акслантириш бўлади.

Энди D соҳанинг акси $w(D)$ ни топамиз.

Ушбу

$$z=x+it \quad (z\in C_z)$$

тўғри чизиқни олайлик. Бунда $-\infty<x<+\infty$ ва t тайинланган бўлиб, $0<t<2\pi$. Равшанки, бу тўғри чизиқ ох ўқига параллел бўлиб, D соҳага тегишли бўлади.

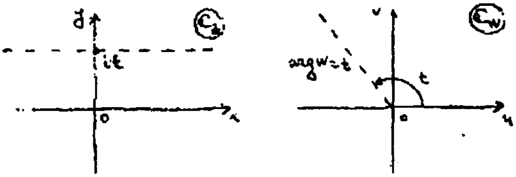
$w = e^z$ функция ёрдамида бу тўғри чизиқ C_w текисликдаги

$$w = e^{x+it} = e^x \cdot e^{it} \qquad (40)$$

га аксланади. (40)- C_w текисликдаги 0 нуқтадан чиққан

$$\{w \in C_w : arg\, w = t\}$$

нурни ифодалайди (32-чизма).



32-чизма

t параметр 0 дан 2π гача ўзгара борса, унда

$$z = x + it \qquad -\infty < x < +\infty ,$$

тўғри чизиқлар

$$D = \{z \in C_z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$$

соҳани ҳосил қилиб, бу чизиқларнинг $w = e^z$ функция ёрдамидаги акслари

$$\{w \in C_w : arg\, w = t\}$$

нурлар эса соат стрелкасига қарши ҳаракатлана бориб, C_w текисликни тўлдира боради.

Бунда

$$z = x, \quad z = x + i2\pi \qquad -\infty < x < +\infty .$$

тўғри чизиқларнинг акси мос равишда

$$\{w \in C_w : arg\, z = 0\}, \quad \{w \in C : arg\, w = 2\pi\}$$

бўлиб, улар C_w текисликда

$$\{w \in C_w : w \in [0, +\infty)\}$$

нурни ифодалайди.

Шундай қилиб

$$w = e^z$$

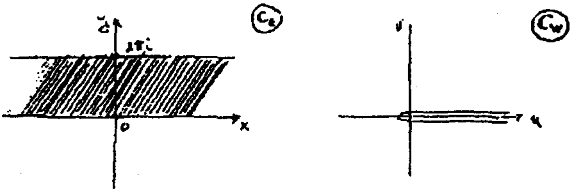
функция ёрдамида бажариладиган акслантириш C_z текисликдаги

$$D = \{z \in C_z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$$

соҳани, C_w текисликдаги

$$C_w \setminus \{w \in C_w: w \in [0,+\infty)\}$$

соҳага конформ акслантирар экан (33-чизма).



33-чизма

Энди C_z текисликда

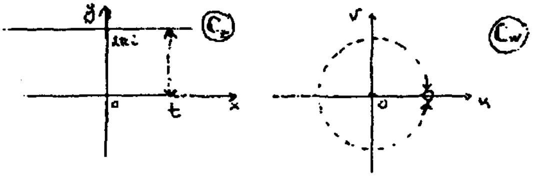
$$z = t + iy, \qquad (41)$$

бунда $0 < y < 2\pi$ ва t тайинланган бўлиб, $-\infty < t < +\infty$, тўғри чизиқ қисмини олайлик. Равшанки, у мавҳум ўққа параллел бўлиб, D соҳага тегишли бўлади.

$w = e^z$ функция ёрдамида (41) C_w текисликдаги

$$w = e^{t+iy} = e^t \cdot e^{iy} \quad (|w| = e^t, arg\, w = y)\ (0 < y < 2\pi) \qquad (42)$$

га аксланади. (42)-маркази 0 нуқтада, радиуси e^t га тенг ва $(e^t,0)$ нуқтага эга бўлмаган айланани ифодалайди: (34-чизма).



34-чизма

Демак,

$$w(t+iy) = \{w \in C_w: |w = e^t|\} \setminus \{u = e^t\}$$

Мисоллар. 1. Кўрсаткичли $w = e^z$ функция C_z текисликдаги

$$D = \left\{z \in C_z: 0 < \mathrm{Re}\, z < 1, 0 < \mathrm{Im}\, z < \frac{\pi}{2}\right\}$$

соҳани, C_w текисликдаги қандай соҳага акслантиради ?

$z = x + iy, \quad w = \rho e^{i\varphi}$ деб олайлик. Унда

$$\rho \cdot e^{i\varphi} = e^{x+iy}$$

бўлиб, D соҳада

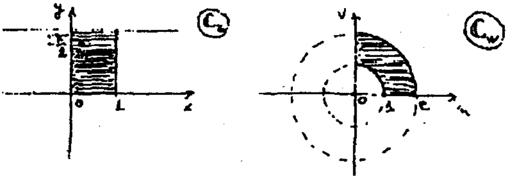
$$e^0 < \rho < e^1$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

бўлади. Шуларни эътиборга олиб топамиз:

$$w(D) = \left\{ w \in \mathbf{C}_w : w = \rho e^{i\varphi}; \quad 1 < \rho < e, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

(35-чизма).



35-чизма

2. Ушбу

$$w = e^z$$

функция ёрдамида C_z текисликдаги

$$D = \{ z \in \mathbf{C}_z : Re\, z > 0, -\pi < Im\, z < \pi \}$$

соҳанинг C_w текисликдаги аксини топинг.

Агар $z = x + iy, \quad w = \rho e^{i\varphi}$ дейилса, унда

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 : \quad x > 0, \quad -\pi < y < \pi \right\}$$

бўлиб,

$$\rho > 1, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

бўлади. Демак,

$$w(D) = \left\{ w \in \mathbf{C}_w : w = \rho e^{i\varphi}; \quad \rho > 1, \quad -\pi < \varphi < \pi \right\} =$$

$$= \left\{ w \in \mathbf{C}_w : |w| > 1 \right\} \setminus \left\{ w \in \mathbf{C}_w : w \in (-\infty, -1) \right\}.$$

6-§. Тригонометрик ва гиперболик функциялар

Тригонометрик ҳамда гиперболик функциялар кўрсаткичли функция орқали киритилади.

3 - таъриф. Ушбу

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$\mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}, \quad \mathrm{ctg}z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$$

кўринишдаги функциялар тригонометрик функциялар дейилади.

$w = \sin z$ ва $w = \cos z$ функциялар бутун комплекс текис-лик C да аниқланган, $w = \mathrm{tg}z$ функция

$$C \setminus \left\{ z \in C : z = k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

тўпламда, $w = \mathrm{ctg}z$ функция эса

$$C \setminus \left\{ z \in C_z : z = k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

тўпламда аниқланган.

Қуйидагича

$$\mathrm{ch}z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}, \quad \mathrm{cth}z = \frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}} \qquad (44)$$

аниқланган функциялар гиперболик функциялар дейилади.

Тригонометрик ҳамда гиперболик функциялар ўзаро қуйидаги

$$\cos z = \mathrm{ch}z, \quad \sin z = -i\,\mathrm{sh}iz, \quad \mathrm{th}z = -i\mathrm{tg}iz$$

$$\mathrm{ch}z = \cos iz, \quad \mathrm{sh}z = -i \sin iz, \quad \mathrm{cth}z = i\mathrm{ctg}iz$$

муносабатлар билан боғланган. Биз улардан бирини, масалан

$$\mathrm{sh}z = -i\,\sin iz$$

бўлишини кўрсатамиз.

(43) ва (44) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\sin iz = \frac{1}{2i}\left(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = -\frac{1}{i}\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = -\frac{1}{i}\mathrm{sh}z.$$

Демак,

$$\mathrm{sh}z = -i\,\sin iz\,.$$

Тригонометрик функциялар кўрсаткичли функция орқали таърифланганидан, уларнинг кўрсаткичли функциялар хоссаларига ўхшаш хоссаларга эга бўлиши келиб чиқади. Айни пайтда тригонометрик функциялар орасида ҳақиқий аргументли тригонометрик функциялар орасидаги муносабатлар каби формулалар ўринли бўлади.

Биз қуйида тригонометрик функцияларнинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

1°. Ушбу

1) $sin^2 z + cos^2 z = 1$,

2) $sin(z_1 + z_2) = sin z_1 \cdot cos z_2 + cos z_1 \cdot sin z_2$,

3) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$,

4) $sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = cos z, \quad cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -sin z$,

5) $sin(z + \pi) = -sin z, \quad cos(z + \pi) = -cos z$

формулалар ўринли.

Бу формулаларнинг ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас. $w = sin z$ ва $w = cos z$ функцияларнинг таърифларидан фойдаланиб топамиз:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.$$

Қолган тенгликлар ҳам шунга ўхшаш исботланади.

2°. $w = sin z$ тоқ функция, $w = cos z$ эса жуфт функция бўлади.

Бу хоссанинг ўринли бўлиши $w = sin z$, функцияларнинг таърифларидан бевосита келиб чиқади.

3°. Тригонометрик функциялар даврий бўлиб, $w = sin z$, $w = cos z$ функцияларнинг даври 2π га, $w = tg z$, $w = ctg z$ функцияларнинг даври эса π га тенг.

Ҳақиқатан, $w = sin z$ функция таърифи ҳамда

$$e^{2\pi i} = 1$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$w(z + 2\pi) = sin(z + 2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} \cdot e^{2\pi i} - e^{-iz} \cdot \frac{1}{e^{2\pi i}}\right) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = sin z = w(z).$$

Демак,

$$sin(z + 2\pi) = sin z.$$

Бу эса $w = sin z$ даврий функция ва унинг даври 2π га тенг бўлишини билдиради.

$w = tg z$ функция таърифидан фойдаланиб, ушбу

$$\operatorname{tg}(z+\pi) = -i\frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}} = \frac{e^{i\pi}\left(e^{iz} - e^{-iz}\cdot e^{-2\pi i}\right)}{e^{i\pi}\left(e^{iz} + e^{-iz}\cdot e^{-2\pi i}\right)} =$$

$$= -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \operatorname{tg}(z)$$

тенгликка келамиз. Демак, $\operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg}(z)$.

Шунга ўхшаш $w = \cos z$, $w = \operatorname{ctg} z$ функцияларнинг даврий функция эканлигини кўрсатилади.

4°. $w = \sin z$ ва $w = \cos z$ функциялар $\forall z \in \mathbf{C}$ да ҳосилага эга бўлиб, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$ бўлади.

$w = \operatorname{tg} z$ функция $\forall z \in \mathbf{C}\setminus\left\{z \in \mathbf{C}\!: z = k\pi + \frac{\pi}{2};\ \ k = 0, \pm 1, \ldots\right\}$ да ҳосилага эга бўлиб,

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z} \qquad (45)$$

бўлади.

$w = \operatorname{ctg} z$ функция $\forall z \in \mathbf{C}\setminus\{z \in \mathbf{C}\!: z = k\pi;\ \ k = 0, \pm 1, \ldots\}$ да ҳосилага эга бўлиб,

$$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z} \qquad (46)$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - \quad iz}{\quad}\right)' = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}\cdot i + e^{-iz}\cdot i\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$+ e^{-iz}\Big)' = \frac{1}{2}\left(e^{iz}\cdot i - e^{-iz}\cdot i\right) =$$

$$-\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

6) формулаларнинг тўғрилиги

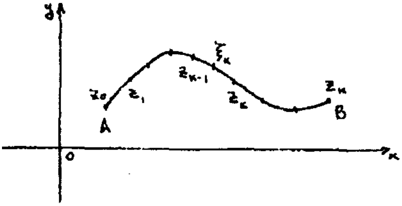
Тр y = sinx, y = cosx функ-
таърифлан бўлишини биламиз.
рига ўхшаш хо кцияларнинг қийматлари
тригонометрик фун и мумкин:
нометрик функциялар
лар ўринли бўлади.

4 - БОБ

КОМПЛЕКС АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ИНТЕГРАЛИ

1 - § . Интеграл тушунчаси

1°. Интеграл таърифи. Комплекс сонлар текислиги C_z да бирор силлиқ (бўлакли силлиқ) $\gamma = AB$ эгри чизиқни олайлик (36 - чизма).



36-чизма

$\gamma = AB$ эгри чизиқни A дан B га қараб

$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$$

нуқталар ёрдамида n та

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$$

бўлакларга ажратамиз (бунда AB эгри чизиқнинг боши A нуқта z_0, охири B нуқта эса z_n бўлсин.

γ_k лар $(k = 1,2,3,\ldots,n)$ узунликлари ℓ_k ларнинг $(k = 1,2,3,\ldots,n)$ энг каттасини λ билан белгилаймиз:

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \ell_k$$

Айтайлик, γ эгри чизиқда $f(z)$ функция берилган бўлсин. Ҳар бир γ_k да ихтиёрий ξ_k нуқта олиб, сўнг $f(z)$ функциянинг шу нуқтадаги $f(\xi_k)$ қийматини $z_k - z_{k-1}$ га кўпайтириб, ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

йиғиндини тузамиз. Бу йиғинди $f(z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси дейилади.

Равшанки, $f(z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси γ эгри чизиқнинг бўлинишига ҳамда ҳар бир γ_k да олинган ξ_k нуқталарга боғлиқ бўлади.

1-таъриф. Агар $\lambda \to 0$ да $f(z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси γ эгри чизиқнинг бўлиниши усулига ҳамда γ_k да ξ_k нуқтанинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда чекли лимитга эга бўлса , бу лимит $f(z)$ функциянинг γ эгри чизиқ бўйича интеграли деб аталади ва

$$\int_\gamma f(z)dz$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) \qquad (1)$$

Бу ҳолда $f(z)$ функция γ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи дейилади.

Мисол. $f(z)=1$ функциянинг боши a $(a \in C_z)$ нуқтада, охири b $(b \in C_z)$ нуқтада бўлган силлиқ (бўлакли силлиқ) эгри чизиқ бўйича интегралини топамиз.

Равшанки, $f(z)=1$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) =$$
$$= z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0$$

бўлади. Агар

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \int_\gamma dz$$

ва $z_0 = a,\ z_n = b$ эканини эътиборга олсак, унда

$$\int_\gamma dz = b - a$$

бўлиши келиб чиқади.

Хусусан, $a=b$ бўлса, яъни γ ёпиқ эгри чизиқ бўлса

$$\int_\gamma dz = 0 \qquad (2)$$

бўлади.

2^0. **Интегралнинг мавжудлиги.** Энди комплекс аргументли функция интегралининг мавжудлиги масаласини қараймиз.

Юқорида келтирилган таърифдан кўринадики, (1) интеграл γ эгри чизиққа ҳамда унда берилган $f(z)$ функцияга боғлиқ бўлади.

Фараз қилайлик, $\gamma = AB$ $(\gamma \subset C_z)$ эгри чизиқ

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

кўринишда берилган бўлсин. Бунда $x(t), y(t)$ функциялар $[\alpha,\beta]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $x'(t), y'(t)$ ҳосилаларга эга $\left(x'^2(t) + y'^2(t) > 0\right)$ t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $z = z(t)$ нуқта A дан B га қараб $\gamma = AB$ ни чиза боради.

γ эгри чизиқда

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

функция аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

$[\alpha,\beta]$ сегментни

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$$

$$\left(t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n; t_0 = \alpha, t_n = \beta\right)$$

нуқталар ёрдамида n та бўлакка ажратамиз.

$z = z(t)$ функция бу нуқталарни γ эгри чизиқ нуқта-ларига акслантиради. t_k $(k = 0,1,2,\dots\dots,n)$ нуқталарнинг γ эгри чизиқдаги аксларини

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_n \qquad \left(z_0 = A, z_n = B\right)$$

дейлик.

Натижада бу нуқталар ёрдамида γ эгри чизиқ γ_k бўлакларга $(k = 0,1,2,\dots\dots,n)$ ажралади, ҳар бир γ_k да ихтиёрий $\zeta_k (\zeta_k = \xi_k + i\eta_k)$ нуқтани оламиз. Равшанки,

$$\zeta_k = z(\tau_k) \qquad \left(t_{k-1} \le \tau_k \le t_k\right)$$

бўлади.

Энди ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

йиғиндини қараймиз. Бу йиғиндида

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k),$$
$$z_k - z_{k-1} = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) =$$
$$= (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)]\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k] + \qquad (3)$$
$$+ i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k]$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир йиғинди $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ функцияларнинг эгри чизиқли интеграллари учун интеграл йиғиндилардир. Қаралаётган $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функция γ эгри чизиқда узлуксиз. Бинобарин, $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ функциялар ҳам γ да узлуксиз. Демак, бу функцияларнинг γ эгри чизиқ бўйича интеграллари мавжуд ва

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] = \int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

бўлади.

(3) тенгликда $\lambda \to 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) =$$
$$= \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

Бундан эса $\lambda \to 0$ да σ йиғинди чекли лимитга эга ва

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

1-теорема. Агар $f(z)$ функция γ эгри чизиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг γ эгри чизиқ бўйича интеграли мавжуд ва

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

бўлади.

Бу теорема, бир томондан узлуксиз функция интеграли-нинг мавжудлигини ифодаласа, иккинчи томондан комплекс аргументли функция интегралини эгри чизиқли инрегралар орқали ифодаланишини кўрсатади.

Мисол. Ушбу

$$\int_{\gamma} zdz$$

интегрални қарайлик, бунда γ - боши $a(a \in C_Z)$ нуқтада, охири $b(b \in C_Z)$ нуқтада бўлган силлиқ (бўлакли силлиқ) эгри чизиқ.

Равшанки, $f(z) = z$ функция γ эгри чизиқда узлуксиз. Бинобарин, бу функциянинг интеграли мавжуд. $f(z) = z$ функциянинг γ эгри чизиқ бўйича интегралини таърифга кўра топишда ζ_k ва z_n нуқталарни интеграл йиғинди ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш мумкин. Шуни эътиборга олиб $f(z) = z$ функция интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1})$$

да ζ_k нуқта сифатида

$$\zeta_k = \frac{1}{2}(z_k + z_{k-1})$$

ни оламиз. Унда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(z_n^2 - z_0^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

бўлиб,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

бўлади. Демак,

$$\int_{\gamma} zdz = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

Хусусан, $b = a$ бўлса, яъни γ ёпиқ чизиқ бўлса,

$$\int_{\gamma} z dz = 0 \qquad (4)$$

бўлади.

3^0. **Интегралнинг хоссалари.** Юқорида кўрдикки, узлуксиз $f(z)$ комплекс ўзгарувчили функциянинг γ эгри чизиқ бўйича интеграли эгри чизиқли интегралларга келар экан. Бинобарин, комплекс аргументли функция интеграли ҳам эгри чизиқли интеграллар хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Уларни асосан исботсиз келтирамиз.

1) Агар $f(z)$ функция γ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи бўлса, у ҳолда $a \cdot f(z)$ функция (a ўзгармас комплекс сон) ҳам γ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи ва ушбу

$$\int_{\gamma} a f(z) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz$$

формула ўринли бўлади.

2)Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функцияларнинг ҳар бири γ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(z) \pm g(z)$ функция ҳам шу γ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи ва ушбу

$$\int_{\gamma} [f(z) \pm g(z)] dz = \int_{\gamma} f(z) dz \pm \int_{\gamma} g(z) dz$$

формула ўринли бўлади.

3) Агар $f(z)$ функция γ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи бўлиб,

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \qquad (\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

бўлади.

4) Агар $f(z)$ функция γ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = -\int_{\gamma} f(z) dz$$

бўлади, яъни γ эгри чизиқда йўналиш ўзгартирилса, интеграл ишорасини ўзгартиради.

5) Агар $f(z)$ функция γ эгри чизиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int_{\gamma} |f(z)|\cdot|dz| \qquad (5)$$

бўлади, бунда $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Интеграл таърифига кўра

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1}),$$

$$\int_{\gamma} |f(z)|\cdot|dz| = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot|z_k - z_{k-1}| \qquad (6)$$

бўлади.

Маълумки,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1})\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot|z_k - z_{k-1}|$$

Бу тенгсизликда $\lambda \to 0$ да лимитга ўтиб, юқоридаги (6) муносабатни эътиборга олсак,

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int_{\gamma} |f(z)|\cdot|dz|$$

бўлиши келиб чиқади.

Жумладан,

$$M = \max_{\gamma}|f(z)|$$

бўлганда (5) тенгсизликдан

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \le M\cdot \ell(\gamma) \qquad (7)$$

бўлиши келиб чиқади,бунда $\ell(\gamma) - \gamma$ эгри чизиқ узунлиги.

Комплекс аргументли функция интегралининг кейинги хоссаси функциянинг эгри чизиқ бўйича интегралини унинг синиқ чизиқ бўйича интеграли билан яқинлаштириш мумкинлигини кўрсатади.

6) Фараз қилайлик $f(z)$ функция D соҳада ($D \subset \mathbb{C}_z$) узлуксиз бўлиб, γ шу соҳага тегишли бўлган бўлакли- силлиқ эгри чизиқ бўлсин. У ҳолда $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам D соҳага тегишли бўлган шундай P синиқ чизиқ топиладики,

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{P} f(z)dz\right| < \varepsilon$$

бўлади.

4^0. Интегрални ҳисоблаш. Айтайлик, комплекс сонлар текислиги C_z да γ эгри чизиқ ушбу

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

тенглама билан берилган бўлиб, $x(t)$, $y(t)$ функциялар 2^0- пунктда келтирилган барча шартларни каноатлантирсин. Бу эгри чизиқда $f(z)$ функция берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда 1-теоремага кўра

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

бўлади.

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги эгри чизиқли интегралларни [2], 19-боб, 2- § да келтирилган формулалардан фойдаланиб, Риман интеграллари орқали ёзамиз:

$$\int_{\gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\left[u(x(t),y(t))\cdot x^{'}(t) - v(x(t),y(t))\cdot y^{'}(t)\right]dt,$$

$$\int_{\gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\left[v(x(t),y(t))\cdot x^{'}(t) + u(x(t),y(t))\cdot y^{'}(t)\right]dt.$$

Натижада

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta}\left[u(x(t),y(t))\cdot x^{'}(t) - v(x(t),y(t))\cdot y^{'}(t)\right]dt +$$

$$+i\int_{\alpha}^{\beta}\left[v(x(t),y(t))\cdot x^{'}(t) + v(x(t),y(t))\cdot y^{'}(t)\right]dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\left[u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\right]\cdot\left[x^{'}(t) + iy^{'}(t)\right]dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\cdot z^{'}(t)dt$$

бўлади. Демак,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\cdot z^{'}(t)dt \qquad (8)$$

Шундай қилиб, комплекс аргументли функциянинг интеграли Риман интеграли орқали (8) формула ёрдамида ҳисобланар экан.

Изох. (8) тенглик билан аниқланган интегрални комплекс аргументли функция интеграли таърифи сифатида қараш мумкин.

Мисол. Ушбу

$$I_n = \int_\gamma (z-a)^n dz \qquad (\text{ n-бутун сон})$$

интегрални ҳисобланг, бунда

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C}_z : |z-a| = \rho, \quad \rho > 0\}$$

айланадан иборат (йўналиш соат стрелкасига қарама-қарши олинган)

γ айлананинг тенгламасини қуйидаги

$$z = z(t) = a + \rho e^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Унда

$$dz = d(a+\rho e^{it}) = i\rho e^{it} dt$$

бўлиб, (8) формулага кўра

$$I_n = \int_\gamma (z-a)^n dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt$$

бўлади.

Агар $n \neq -1$ бўлса,

$$I_n = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = i\rho^{n+1} \left.\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} = 0$$

бўлади.

Агар $n = -1$ бўлса,

$$I_{-n} = i \int_0^{2\pi} e^{it\cdot 0} dt = 2\pi i$$

бўлади. Демак,

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

2-§. Коши теоремаси

1°. Коши теоремаси комплекс ўзгарувчили функциялар назариясининг фундаментал теоремаси ҳисобланади.

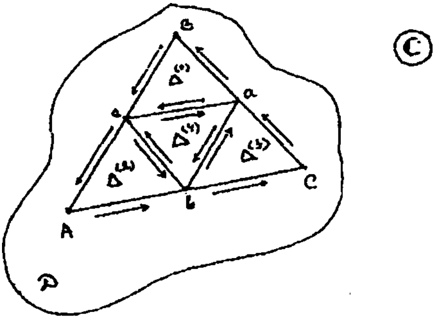
Биз ушбу параграфда мазкур теоремани ўрганамиз.

2-теорема (Коши теоремаси). Агар $f(z)$ функция бир боғламли D соҳада ($D \subset C_z$) голоморф бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциянинг D соҳада ётувчи ҳар қандай силлиқ (бўлакли силлиқ) γ ёпиқ чизиқ (ёпиқ контур) бўйича интеграли нолга тенг бўлади:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 .$$

Исбот. Теореманинг исботини бир нечта босқичда келтирамиз.

а) γ эгри чизиқ учбурчак контуридан иборат бўлсин: $\gamma = \Delta$ (37-чизма).



37-чизма .

Бу учбурчакнинг периметри ℓ га тенг бўлсин. Бу ҳолда теоремани исботлаш учун тескарисини фараз қиламиз, яъни $f(z)$ функция бир боғламли D соҳада голоморф бўлса ҳам бу функциянинг D соҳада ётувчи ABC учбурчак контури Δ бўйича интеграли нолга тенг бўлмасин:

$$\int_{\Delta} f(z)dz \neq 0 .$$

Айтайлик,

$$\left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| = M > 0$$

бўлсин.

$\Delta = ABC$ учбурчакни, унинг томонлари ўрталарини бирлаштирувчи тўгри чизиқ кесмалари ёрдамида 4 та

$$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$$

учбурчакларга ажратамиз. Равшанки, бу учбурчак контурлари учун

$$\Delta^{(1)} = aB + Bc + ca,$$
$$\Delta^{(2)} = cA + Ab + bc,$$
$$\Delta^{(3)} = bC + Ca + ab,$$
$$\Delta^{(4)} = ac + cb + ba$$

бўлиб,

$$\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz = \int_{aB} f(z)dz + \int_{Bc} f(z)dz + \int_{ca} f(z)dz,$$
$$\int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz = \int_{cA} f(z)dz + \int_{Ab} f(z)dz + \int_{bc} f(z)dz,$$
$$\int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz = \int_{bC} f(z)dz + \int_{Ca} f(z)dz + \int_{ab} f(z)dz,$$
$$\int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz = \int_{ac} f(z)dz + \int_{cb} f(z)dz + \int_{ba} f(z)dz$$

бўлади. Кейинги тенгликларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz = \\
&= \left[\int_{aB} f(z)dz + \int_{Bc} f(z)dz + \int_{ca} f(z)dz + \int_{bC} f(z)dz + \int_{Ca} f(z)dz\right] + \\
&\quad + \left(\int_{ca} f(z)dz + \int_{ac} f(z)dz\right) + \left(\int_{bc} f(z)dz + \int_{ac} f(z)dz\right) + \\
&\quad + \left(\int_{ab} f(z)dz + \int_{ba} f(z)dz\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Агар

$$\int_{aB} f(z)dz + \int_{Bc} f(z)dz + \int_{cA} f(z)dz +$$

$$+ \int_{Ab} f(z)dz + \int_{bC} f(z)dz + \int_{Ca} f(z)dz = \int_{\Delta} f(z)dz,$$

$$\int_{ca} f(z)dz + \int_{ac} f(z)dz = 0, \quad \int_{bc} f(z)dz + \int_{cb} f(z)dz = 0,$$

$$\int_{ab} f(z)dz + \int_{ba} f(z)dz = 0,$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (9) муносабатдан

$$\int_{\Delta} f(z)dz = \int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz$$

эканлиги келиб чиқади.

Равшанки,

$$M = \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| \le \left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz\right|.$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги қўшилувчилардан камида биттаси $\frac{M}{4}$ дан кичик бўлмайди (акс ҳолда

$$M = \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| < 4 \cdot \frac{M}{4} = M$$

бўлиб, $M < M$ каби маъносиз тенгсизликка келиб қолади).

Айтайлик,

$$\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4}$$

бўлсин, бунда Δ_1 учбурчак $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$ учбурчаклардан бири ва унинг периметри $\frac{1}{2^n}$ га тенг.

Энди Δ_1 учбурчакни юқоридаги усул билан 4 та $\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(3)}, \Delta_1^{(4)}$ учбурчакларга ажратамиз. Бу учбурчаклар орасида шундай Δ_2 учбурчак топиладики,

$$\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4^2}$$

бўлади. Δ_2 учбурчакнинг периметри $\frac{\ell}{2^2}$ га тенг.

Бу жараённи чексиз давом эттира борамиз. Натижада

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots \quad (10)$$

учбурчаклар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. (10) учбурчаклар кетма-кетлиги учун:

1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$;

2) Δ_n учбурчакнинг периметри $\frac{1}{2^n}$ га тенг ва $n \to \infty$ да $\frac{1}{2^n} \to 0$;

3) ҳар бир Δ_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ учбурчак учун

$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4^n} \qquad (11)$$

бўлади.

1) ва 2) тасдиқлардан барча $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots$ учбурчакларга тегишли бўлган ягона z_0 нуқта $(z_0 \in D)$ мавжуд бўлиши келиб чиқади.

Шартга кўра $f(z)$ функция z_0 нуқтада голоморф. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ сон топиладики,

$$|z - z_0| < \delta \quad (12)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча z лар учун

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z)\right| < \varepsilon,$$

яъни

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0)| < \varepsilon \cdot |z - z_0| \qquad (13)$$

бўлади.

Энди (2) ва (4) формулаларга кўра

$$\int_{\Delta_n} dz = 0, \quad \int_{\Delta_n} zdz = 0$$

ва n нинг етарлича катта қийматида

$$\Delta_n \subset \{z \in \mathbf{C}_z : |z - z_0| < \delta\}$$

бўлишини ҳамда (13) тенгсизликни эътиборга олиб топамиз:

$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\Delta_n}[f(z)-f(z_0)-f'(z)(z-z_0)]dz\right| \le$$

$$\le \int_{\Delta_n}|f(z)-f(z_0)-f'(z)(z-z_0)|dz < \qquad (14)$$

$$< \varepsilon\cdot\int_{\Delta_n}|z-z_0|\,|dz| \le \varepsilon\cdot\frac{\ell^2}{4^n}$$

(11) ва (14) муносабатлардан

$$\frac{M}{4^n} \le \left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| < \varepsilon\cdot\frac{\ell^2}{4^n}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$M < \varepsilon\cdot\ell^2.$$

Бу тенгсизлик $M > 0$ деб қилинган фаразга зид (чунки, ε - ихтиёрий мусбат сон). Зиддиятлик бўлмаслиги учун $M = 0$ бўлиши керак. Шундай қилиб $M = 0$, яъни

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0$$

бўлади.

б) γ эгри чизиқ кўпбурчак контуридан иборат бўлсин:

$$\gamma = P.$$

Равшанки, кўпбурчак чекли сондаги учбурчакларга ажралади ва

$$\int_{P} f(z)dz$$

интеграл эса бу учбурчаклар бўйича олинган интеграллар йиғиндисига тенг бўлади. Учбурчаклар бўйича олинган интегралларнинг ҳар бири а) ҳолга биноан нолга тенг бўлади. Бинобарин, $f(z)$ функциянинг кўпбурчак контури бўйича олинган интеграли ҳам нолга тенг бўлади:

$$\int_{P} f(z)dz = 0$$

в) γ эгри чизиқ ихтиёрий силлиқ (бўлакли силлиқ) ёпиқ эгри чизиқ бўлсин. Интегралнинг 6-хоссасига кўра D соҳага тегишли бўлган шундай P кўпбурчак топиладики,

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{P} f(z)dz\right| < \varepsilon$$

бўлади, бунда ε - ихтиёрий мусбат сон. б) ҳолга биноан

$$\int_P f(z)dz = 0$$

Демак,

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| < \varepsilon$$

Бундан эса

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

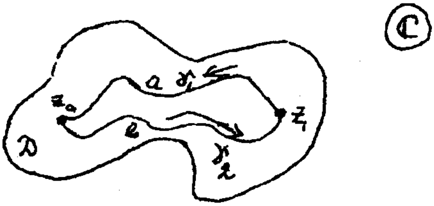
бўлиши келиб чиқади. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

1-натижа. Агар $f(z)$ функция бир боғламли D соҳада ($D \subset C_z$) голоморф бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциянинг интеграли интеграллаш эгри чизиғига (интеграллаш йўлига) боғлиқ бўлмайди, яъни бошланғич ва охирги нуқталари умумий ҳамда D соҳада ётувчи γ_1 ва γ_2 эгри чизиқлар учун

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

бўлади.

Исбот. D соҳанинг z_0 ва z_1 нуқталарини бирлаштирувчи ва шу соҳага тегишли бўлган ихтиёрий $\gamma_1 = z_0 a z_1$ ҳамда $\gamma_2 = z_0 b z_1$ силлиқ (бўлакли силлиқ) эгри чизиқларни олайлик (38-чизма).



38-чизма

Бу ҳолда $z_0 a z_1$ ва $z_0 b z_1$ эгри чизиқлар биргаликда D соҳага тегишли бўлган γ ёпиқ чизиқни ташкил этади:

$$\gamma = \gamma_1^- \cup \gamma_2 .$$

Унда Коши теоремасига мувофиқ

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad (15)$$

бўлади. Интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб, топамиз:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz =$$
$$= \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz \qquad (16)$$

(15) ва (16) муносабатлардан

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди Коши теоремасининг умумлашишини ифодаловчи теоремаларни исботсиз келтирамиз.

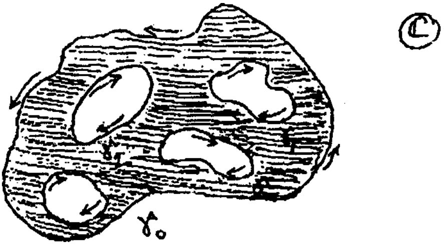
Айтайлик, D $(D \subset C_z)$ чегараланган бир боғламли соҳа бўлиб, унинг чегараси ∂D силлиқ (бўлакли силлиқ) ёпиқ эгри чизиқдан иборат бўлсин.

3-теорема. Агар f(z) функция бир боғламли D соҳада голоморф бўлиб, ∂D да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

бўлади. Бу ерда ∂D нинг йўналиши мусбат йўналиш.

Фараз қилайлик, D $(D \subset C_z)$ ва ўзаро кесишмайдиган $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, силлиқ (бўлакли силлиқ) ёпиқ эгри чизиқлар билан чегараланган кўп боғламли соҳа бўлсин (39-чизма)



39-чизма

Равшанки, D соҳанинг чегараси

$$\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_n$$

бўлади. Бунда γ_0 ёпиқ чизиқда йўналиш соат стрелкаси йўналишга қарши, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, ёпиқ чизиқларда эса йўналиш соат стрелкаси йўналиши бўйича олинади (39-чизма).

Одатда бундай йўналишда олинган чегара ориентирланган чегара дейилади. Уни ∂D дейлик.

4-теорема. Агар f(z) функция D соҳада голоморф ва ∂D да узлуксиз бўлса, у ҳолда f(z) функциянинг ∂D буйича интеграли нолга тенг бўлади:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

Бу кўп боғламли соҳа учун Коши теоремасидир.

Мисол. Ушбу

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{z-2i} dz$$

интегралнинг нолга тенг бўлишини кўрсатинг, бунда

$$\gamma = \{z \in C_z : |z| = 1\}$$

Агар D $(D \subset C_z)$ деб қуйидаги

$$D = \left\{z \in C_z : |z| < \frac{3}{2}\right\}$$

соҳа олинса, унда биринчидан

$$f(z) = \frac{z^2}{z-2i}.$$

функция D да голоморф бўлади, иккинчидан қаралаётган γ ёпиқ чизиқ D соҳага тегишли бўлади: $\gamma \subset D$.

Унда Коши теоремасига кўра

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \frac{z^2}{z-2i} dz = 0$$

бўлади.

2^0. **Бошланғич функция тушунчаси.** Фараз қилайлик, f(z) функция D соҳада $(D \subset C_z)$ аниқланган бўлсин.

2-таъриф. Агар D соҳада f(z) функция шу соҳада голоморф бўлган F(z) функциянинг ҳосиласига тенг бўлса, яъни

$$F'(z) = f(z) \qquad (z \in D)$$

бўлса, у ҳолда $F(z)$ функция D соҳада $f(z)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади.

Агар D соҳада $F(z)$ функция $f(z)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса $F(z)+C$ ҳам (C-ихтиёрий ўзгармас комплекс сон) $f(z)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$(F(z)+C)' = F'(z) = f(z).$$

Энди бошланғич функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теоремани келтирамиз.

5-теорема. Агар $f(z)$ функция бир боғламли D соҳада ($D \subset C_z$) голоморф бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция шу соҳада бошланғич функцияга эга бўлади.

Исбот. D соҳада z_0 ва ихтиёрий z нуқталарни олиб, уларни шу соҳада ётувчи силлиқ (бўлакли силлиқ) чизиқ билан бирлаштирамиз. Унда

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

интеграл z га боғлиқ бўлади. Уни $F(z)$ орқали белгилаймиз:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta. \qquad (17)$$

Коши теоремасининг натижасига кўра бу интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди. Бинобарин, $F(z)$ функция D соҳада бир қийматда аниқланади.

Энди (17) функцияни D соҳада берилган $f(z)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлишини кўрсатамиз.

z нуқтага шундай Δz орттирма берайликки, $z+\Delta z$ нуқта z нуқтанинг D соҳага тегишли етарлича кичик атрофида ётсин. У ҳолда $F(z)$ функциянинг орттирмаси учун қуйидагига

$$F(z+\Delta z)-F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta \quad (\zeta \in D)$$

эга бўламиз. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δz га бўламиз:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta. \qquad (18)$$

Равшанки,

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta = f(z)\cdot\Delta z,$$

яъни

$$\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta = f(z) \qquad (19)$$

бўлади.

(18)ва (19) муносабатлардан фойдаланиб

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta$$

ифодани топамиз.

Кейинги тенгликдан

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta| \qquad (20)$$

бўлиши келиб чиқади.

Яна Коши теоремасининг натижасидан фойдаланиб, z ва $z+\Delta z$ нуқталарини бирлаштирувчи ва D соҳада ётувчи чизиқ сифатида шу нуқталарни бирлаштирувчи кесмани оламиз. Унда ζ нинг $[z, z+\Delta z]$ кесмага тегишли бўлишидан ушбу

$$|z-\zeta|\le|\Delta z|$$

тенгсизликка эга бўламиз.

$f(z)$ функция z нуқтада узлуксиз. Демак, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топиладики, $|\Delta z|<\delta$ бўлганда

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб, (20) муносабатдан топамиз:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|<$$

$$<\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\int_{z}^{z+\Delta z}|d\zeta|=\frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z|=\varepsilon$$

Демак,

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon$$

Бундан эса

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

яъни

$$F'(z) = f(z)$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Айтайлик $F_1(z)$ ва $F_2(z)$ функцияларнинг хар бири D соҳада битта $f(z)$ функция учун бошланғич функция бўлсин. Унда $F_1(z)$ ва $F_2(z)$ функциялар D соҳада бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$F_1'(z) = f(z), \quad F_2'(z) = f(z)$$

бўлганлигидан

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z)$$

функция учун

$$\Phi'(z) = 0 \qquad (z \in D)$$

бўлади. Агар $\Phi(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дейилса, унда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

бўлиб, $\Phi(z)$ функциянинг ўзгармас эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z) = C \qquad (C = \text{const})$$

яъни

$$F_1(z) = F_2(z) + C \qquad \text{бўлади.}$$

Юқорида айтилганлардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

2 - натижа. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция бир боғламли D соҳада $(D \subset C_z)$ голоморф бўлсин. У ҳолда

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + C \qquad (21)$$

функция D соҳада $f(z)$ нинг бошланғич функцияси бўлади, бунда C-ихтиёрий комплекс сон.

(21) формула бошланғич функциянинг умумий кўринишини ифодалайди.

(21) тенгликдан, аввал $z = z_0$ деб

$$\Phi(z_0) = C$$

сўнгра $z = z_1$ деб

$$\Phi(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + C = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \Phi(z_0)$$

тенгликларни топамиз. Охирги тенгликдан эса

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) \qquad (22)$$

бўлиши келиб чиқади. Одатда (22) формула Ньютон-Лейбниц формуласи дейилади.

Айтайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялари D соҳада голоморф бўлсин.

Маълумки,

$$[f(z)\cdot g(z)]' = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z).$$

Бу тенгликни интеграллаб, топамиз:

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z)\cdot g(z)]' dz = \int_{z_0}^{z_1} f'(z)\cdot g(z)dz + \int_{z_0}^{z_1} f(z)\cdot g'(z)dz \qquad (23)$$

Агар

$$\int_{z_0}^{z_1} [f(z)\cdot g(z)]' dz = f(z_1)\cdot g(z_1) - f(z_0)\cdot g(z_0) = [f(\zeta)\cdot g(\zeta)]_{z_0}^{z_1}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (23) тенглик ушбу

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\cdot g'(z)dz = [f(z)\cdot g(z)]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(z)\cdot g(z)dz$$

тенгликка келади. Бу бўлаклаб интеграллаш формуласидир.

Мисол. Ушбу

$$\int_{1}^{1+i} z^2 dz$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки, $f(z) = z^2$ функция бутун комплекс текислик C_z да голоморф. Берилган интеграл $z_0 = 1$, $z_1 = 1 + i$ нуқталарни бирлаштирувчи йўлга боғлиқ бўлмайди. Шуни эътиборга олиб интеграллаш чизиғи γ сифатида

$$\gamma = \{z = x + iy \in C_z : x = 1, 0 \le y \le 1\}$$

тўғри чизиқ кесмасини оламиз.

Бу γ чизиқда

$$z = 1+iy, \quad dz = idy$$

бўлишидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_1^{1+i} z^2 dz = \int_\gamma z^2 dz = \int_0^1 (1+iy)^2 \cdot idy = i\int_0^1 (1+2iy-y^2)dy =$$

$$= i\left(y + iy^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -1 + \frac{2}{3}i$$

Демак,

$$\int_1^{1+i} z^2 dz = -1 + \frac{2}{3}i$$

3-§. Кошининг интеграл формуласи

Мазкур бобнинг аввалги параграфида Коши теоремасини ўрганган эдик. Ушбу параграфда эса Коши теоремасидан фойдаланиб комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида муҳим бўлган Кошининг интеграл формуласини келтирамиз.

Комплекс сонлар текислиги C_z да чегараланган D соҳани қарайлик. Унинг чегараси ∂D силлиқ (бўлакли силлиқ) чизиқдан иборат. Бу ёпиқ эгри чизиқ мусбат йўналишда олинган бўлсин. Айтайлик,

$$\overline{D} = D \cup \partial D$$

тўпламда $f(z)$ функция аниқланган бўлсин.

6-теорема. Агар $f(z)$ функция D соҳада голоморф бўлиб, $\overline{D}$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall z \in D$ нуқта учун

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}dt \quad (23)$$

тенглик ўринли бўлади.

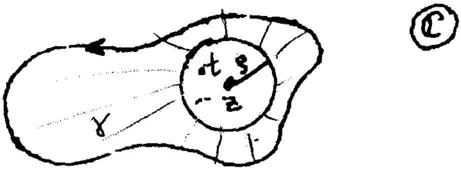
Исбот. D соҳада ихтиёрий z нуқта олиб, унинг шундай

$$B_\rho = \{t : |t-z| < \rho : \rho > 0\}$$

атрофини қараймизки,

$$\overline{B}_\rho \subset D$$

бўлсин (40-чизма).



40-чизма

Бу соҳанинг чегараси

$$\partial B_\rho = \{t: |t - z| = \rho \ , \rho > 0\}$$

бўлади. Энди чегараси

$$\gamma = \partial D \cup \partial \overline{B}_\rho$$

бўлган ушбу

$$D_\beta = D \setminus \overline{B}_\rho$$

соҳани қараймиз.

Равшанки, бу соҳада

$$\frac{f(t)}{t - z}$$

функция t ўзгарувчининг функцияси сифатида голоморф бўлиб, унинг чегарасида узлуксиз бўлади. Унда Коши теоремасига биноан

$$\int_\gamma \frac{f(t)}{t - z} dt = 0 ,$$

яъни

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t - z} dt + \int_{\partial B_\rho^-} \frac{f(t)}{t - z} dt = 0 \quad (24)$$

бўлади. Агар

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t - z} dt = - \int_{\partial B_\rho^-} \frac{f(t)}{t - z} dt$$

эканлигини эътиборга олсак, унда (24) тенгликдан

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t - z} dt = \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t)}{t - z} dt \quad (25)$$

бўлиши келиб чиқади.

Маълумки,

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{dt}{t - z}$$

интегралда ∂B_ρ айлана учун $t = z + \rho \cdot e^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ бўлганлиги сабабли

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{1}{t - z} dt = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho \cdot e^{i\varphi}}{\rho \cdot e^{i\varphi}} d\varphi$$

бўлиб,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{1}{t - z} dt = 1$$

бўлади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $f(z)$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(z)}{t - z} dt = f(z) \quad (26)$$

Сўнг ушбу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t - z} dt - f(z)$$

айирмани қараймиз. Бу айирмани, (25) ва (26) тенгликлардан фойдаланиб, қуйидагича ёзиш мумкин

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t - z} dt - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t) - f(z)}{t - z} dt \quad (27)$$

Шартга кўра $f(z)$ функция z нуқтада $(z \in D)$ голоморф. Бинобарин, функция шу нуқтада узлуксиз. Унда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $\rho < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи B_ρ айлананинг ихтиёрий t нуқтаси учун

$$|f(t) - f(z)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t - z} dt - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t) - f(z)}{t - z} dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} |f(t) - f(z)| |dt| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \cdot \int_{\partial B_\rho} |dt| = \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon.$$

Демак,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t - z} dt - f(z) \right| = \varepsilon. \quad (28)$$

Шундай қилиб, ρ нолга интила борганда (27) айирманинг модули етарлича кичик бўлар экан.

Айни пайтда,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{t-z}dt$$

ифода ρ га боғлиқ эмас. Унда (28) муносабатдан

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{t-z}dt-f(z)=0,$$

яъни

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (23)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса теоремани исботлайди.

Одатда (23) формула Кошининг интеграл формуласи дейилади.

Кошининг интеграл формуласи $f(z)$ голоморф функциянинг D соҳадаги қийматларини унинг чегараси ∂D даги қийматлари орқали ифодалайди.

Энди Кошининг интеграл формуласини хусусий ҳолда, чегараси айланадан иборат соҳа учун келтирамиз.

Комплекс текислик C_z да ушбу

$$D=\{z\in C_z:|z-z_0|<r,\quad r>0\}$$

доирани $(z_0\in C_z)$ қарайлик. Равшанки, бу доиранинг чегараси

$$\partial D=\{z\in C_z:|z-z_0|=r,\quad r>0\}$$

айлана бўлади.

Айтайлик, $f(z)$ функция

$$\overline{D}=D\cup\partial D$$

тўпламда берилган бўлсин.

7-теорема. Агар $f(z)$ функция D доирада голоморф бўлиб, $\overline{D}$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f(z_0+ze^{i\varphi})d\varphi \qquad (29)$$

Исбот. Кошининг интеграл формуласига кўра

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(t)}{t-z_0}dt \qquad (30)$$

бўлади.

Равшанки, маркази z_0 нуқтада ($z_0 \in \mathbf{C}_z$) радиуси r бўлган ∂D айланада

$$t = z_0 + re^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

бўлиб, $dt = ire^{i\varphi}d\varphi$ бўлади. Унда

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(t)}{t - z_0} dt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\varphi}) \cdot ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi = \tag{31}$$

$$= i \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi$$

бўлади.

(30) ва (31) муносабатлардан

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема ўрта қиймат ҳақидаги теорема деб юритилади.

Мисол. Ушбу

$$\int\limits_\gamma \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда

$$\gamma = \left\{ z = x + iy \in \mathbf{C}_z : x^2 + y^2 + 6y = 0 \right\}$$

ёпиқ чизиқдан иборат.

Равшанки,

$$x^2 + y^2 + 6y = 0 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot 3y + 9 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \quad \Rightarrow |z + 3i| = 3$$

Демак,

$$\gamma = \left\{ z \in \mathbf{C}_z : |z + 3i| = 3 \right\}.$$

Бу айлана билан чегараланган соҳани - доирани D дейлик:

$$D = \left\{ z \in \mathbf{C}_z : |z + 3i| < 3 \right\}.$$

Агар

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - 2i}$$

дейилса, унда берилган интеграл қуйдагича

$$\int\limits_\gamma \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \int\limits_\gamma \frac{f(z)}{z + 2i} dz$$

бўлади.

$f(z)$ функция $\overline{D}$ да голоморф бўлгани учун Кошининг интеграл формуласига мувофиқ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z+2i}dz = f(-2i).$$

бўлади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z+2i}dz = -2\pi i\cdot f(-2i) = 2\pi i\cdot\frac{\sin(-2i)}{-2i-2i} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin(2i) = \frac{\pi}{2}i\cdot \mathrm{sh}2$$

Демак

$$\int_{\gamma}\frac{\sin z}{z^4+4}dz = \frac{\pi}{2}i\cdot \mathrm{sh}2 .$$

5–БОБ

ҚАТОРЛАР

1-§.Сонли ва функционал қаторлар

Математик анализ курсида ҳадлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган сонли қаторларни, шунингдек ҳадлари ҳақиқий ўзгарувчили функциялардан иборат бўлган функционал қаторларни батафсил ўрганган эдик.

Ушбу параграфда ҳадлари комлекс сонлар ҳамда комплекс ўзгарувчили функциялар бўлган қаторларни қараймиз. Бу ҳолда ҳам қаторларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги, яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари, текис яқинлашувчилик, ҳадлаб дифференциаллаш ва интеграллаш каби масалалар ўрганилади. Бу ерда келтирилиши лозим бўлган маълумотлар аввалгиларига ўхшаш бўлганлиги учун биз қуйида ҳадлари комлекс сонлар ҳамда комплекс ўзгарувчили функциялар бўлган қаторларга доир асосий тушунча ва тасдиқларни келтириш билан кифояланамиз.

1^0. Сонли қаторлар. Бирор

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

комлекс сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик ҳадларидан тузилган ушбу

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

ифода қатор (сонли қатор) дейилади ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots \quad (1)$$

бунда $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$ комлекс сонлар қаторининг ҳадлари дейилади. (1) қатор ҳадларидан ташкил топган қуйидаги

$$S_1 = z_1,$$

$$S_2 = z_1 + z_2,$$

$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

йиғиндилар (1) қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади.

1 - таъриф. Агар (1) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

бўлса, у ҳолда (1) яқинлашувчи қатор дейилади, S эса қатор йиғиндиси дейилади ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

каби ёзилади.

Агар $\{S_n\}$ кетма-кетлик узоқлашувчи бўлса, у ҳолда (1) қатор узоқлашувчи дейилади.

Айтайлик,

$$z_n = x_n + iy_n \quad (x_n \in R,\ y_n \in R,\ n=1,2,\ldots)$$

бўлсин. У ҳолда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i\sum_{k=1}^{n} y_k$$

бўлади.

1 - теорема. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n + \ldots ,$$

қаторларнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарли. Бунда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

бўлади.

Бу теоремадан математик анализ курсида ўрганилган қаторлар ва улар ҳақидаги маълумотлар ҳадлари комплекс сонлардан иборат бўлган қаторлар учун ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади.

Жумладан қуйидаги тасдиқлар ўринли бўлади:

1) Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$$

қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} az_n = az_1 + az_2 + az_3 + \ldots + az_n + \ldots$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси a·S га тенг бўлади, бунда a- ўзгармас комплекс сон.

2) Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n + \ldots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда S_1 ва S_2 бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + \xi_n) = (z_1 + \xi_1) + (z_2 + \xi_2) + (z_3 + \xi_3) + \ldots + (z_n + \xi_n) + \ldots$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S_1 + S_2$ га тенг бўлади.

3) Айтайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин.

Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n| + \cdots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

У ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолют яқинлашувчи қатор дейилади

Шунингдек қуйидаги теорема ўринли бўлади.

2-теорема (Коши). Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилиб, $\forall n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \ldots$ бўлганда

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+m}| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Хусусан, (1) қатор яқинлашувчи бўлса,

$$|z_{n+1}| < \varepsilon$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} z_{n+1} = 0$$

бўлади. Бу (1) қатор яқинлашувчилигининг зарурий шартини ифодалайди.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторнинг умумий ҳади

$$z_n = \frac{e^{in}}{n} = \frac{\cos n + i \sin n}{n} = \frac{\cos n}{n} + i \frac{\sin n}{n}$$

бўлади. Маълумки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

қаторлар яқинлашувчи. 2-теоремадан фойдаланиб берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

2^0. Функционал кетма-кетликлар ва қаторлар. $u_k(z)$ функциялар $(k=1,2,\dots,n,\dots)$ $E\subset C$ тўпламда берилган бўлсин.

E тўпламда z_0 нуқтани олиб, $\{u_n(z_0)\}$ комплекс сонлар кетма-кетлигини қараймиз.

Агар бу кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, $\{u_k(z)\}$ функционал кетма-кетлик z_0 нуқтада яқинлашувчи, z_0 нуқта эса яқинлашиш нуқтаси дейилади.

$\{u_k(z)\}$ функционал кетма-кетликнинг барча яқинлашиш нуқталардан иборат тўплам $\{u_k(z)\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш тўплами дейилади.

Айтайлик, *M* тўплам $(M\subset C_z)$ $\{u_k(z)\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш тўплами бўлсин. Равшанки, бу ҳолда, ҳар бир $z\in M$ да

$$\lim_{n\to\infty} \{u_n(z)\}$$

мавжуд бўлиб, у z ўзгарувчига боғлиқ бўлади. Уни $\{u_n(z)\}$ функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси дейилади:

$$\lim_{n\to\infty} \{u_n(z)\} = u(z)$$

Фараз қилайлик, *E* тўпламда $(E\subset C_z)$

$$u_1(z), u_2(z), u_3(z), \ldots, u_n(z), \ldots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик ҳадларидан ташкил топган ушбу

$$u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots$$

ифода функционал қатор дейилади ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots \quad (2)$$

Бу функционал қатор ҳадларидан тузилган қуйидаги

$S_1(z)=u_1(z)$,

$S_2(z)= u_1(z)+u_2(z)$,

$S_3(z)= u_1(z)+u_2(z)+u_3(z)$,

. . . .

$S_n(z)= u_1(z)+u_2(z)+u_3(z)+\ldots+u_n(z)$,

. . . .

йиғиндилар (2) функционал қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади.

2-таъриф. Агар $n \to \infty$ да $\{S_n(z)\}$ функционал кетма-кетлик E тўпламда $(E \subset C_z)$ яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$$

бўлса, у ҳолда (2) функционал қатор *E* да яқинлашувчи, S(z) эса унинг йиғиндиси дейилади.

3-таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилсаки, $\forall n > n_0$ ва $\forall z \in E$ учун

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ функционал қатор E тўпламда S(z) йиғиндига текис яқинлашади дейилади.

3-теорема. (Вейерштрасс аломати). Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots$$

функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(z)$ (n=1,2,...) ҳади M тўпламда $(M \subset C_z)$

$$|u_n(z)| \le a_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

тенгсизликларни қаноатлантириб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ функционал қатор M тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}$$

функционал қаторни қарайлик.

Бу қаторнинг умумий ҳадини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$u_n(z) = \frac{\sin nz}{n^2} = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2in^2} =$$

$$= \frac{e^{in(x+iy)} - e^{-in(x+iy)}}{2in^2} = \frac{e^{inx} \cdot e^{-ny} - e^{-inx} \cdot e^{ny}}{2in^2}$$

Агар $y \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$|u_n(z)| = \left|\frac{\sin nz}{n^2}\right| \geq \frac{1}{2n^2}\left\| e^{-ny} \right| - \left| e^{ny} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left| e^{-ny} - e^{ny} \right|$$

бўлиб,

$$\lim_{n \to \infty} |u_n(z)| = \infty$$

бўлади. Демак, берилган функционал қатор

$$E_1 = \{ z \in \mathbf{C}_z : z = x + iy,\ y \neq 0 \}$$

тўпламда узоқлашувчи.

Агар $y = 0$ бўлса, у ҳолда

$$|u_n(z)| = \frac{\sin nz}{n^2}$$

бўлади. Аммо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}$$

қаторнинг ҳадлари учун

$$\left|\frac{\sin nz}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

бўлганлиги ва

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

сонли каторнинг яқинлашувчилиги сабабли берилган функционал қатор Вейерштрасс аломатига кўра $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$ тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Энди текис яқинлашувчи функционал қаторнинг баъзи ҳоссаларини келтирамиз:

1) Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(z)$ $(n = 1,2,3,...)$ M тўпламда $(M \subset C_z)$ узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор йиғиндиси S(z) ҳам M тўпламда узлуксиз бўлади.

2) Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(z)$ $(n=1,2,3,...)$ D соҳада $(D \subset C_z)$ узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор D да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда D соҳада ётувчи ҳар қандай силлиқ (бўлакли силлиқ) γ чизиқ бўйича

$$\int_{\gamma} u_n(z)dz \quad (n=1,2,3,...)$$

интеграллардан тузилган

$$\int_{\gamma} u_1(z)dz + \int_{\gamma} u_2(z)dz + ... + \int_{\gamma} u_n(z)dz + ...$$

қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси

$$\int_{\gamma} S_n(z)dz$$

га тенг бўлади:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma} u_n(z)dz = \int_{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)dz$$

2-§. Даражали қаторлар

1^0. **Даражали қатор.** Функционал қаторлар орасида, уларнинг хусусий ҳоли бўлган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \qquad (3)$$

ёки

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots \qquad (4)$$

қаторлар (бунда $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ ҳамда z_0 комплекс сонлар) математика ва унинг татбиқларида муҳим рол ўйнайди.

(3) ва (4) қаторлар даражали қаторлар дейилади.

$c_0, \ c_1, \ c_2, \ldots$ комплекс сонлар даражали қаторнинг коэффициентлари дейилади.

Агар (4) қаторда $z - z_0 = \zeta$ дейилса, у ҳолда (4) қатор ζ ўзгарувчига нисбатан (3) кўринишдаги қаторга келади. Бинобарин, (3) кўринишдаги қаторларни ўрганиш етарли бўлади.

Равшанки, ҳар қандай даражали қатор $z = 0$ нуқтада яқинлашувчи бўлади.

4-теорема (Абель теоремаси). Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \qquad (3)$$

даражали қатор z нинг $z = z_0$ $(z_0 \neq 0)$ қийматида яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор

$$\{z \in C : |z| < |z_0|\}$$

доирада абсолют яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n = c_0 + c_1 z_0 + c_2 z_0^2 + \ldots + c_n z_0^n + \ldots$$

қатор (сонли қатор) яқинлашувчи. қатор яқинлашишининг зарурий шартига биноан

$$\lim_{n \to \infty} c_n z^n = 0$$

бўлади. Модомики, $\{c_n z_0^n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга экан, унда бу кетма-кетлик чегараланган, яъни шундай ўзгармас $M > 0$ сон мавжудки, $\forall n \in N$ учун

$$\left|c_n z_0^n\right| \le M$$

бўлади. Бу тенгсизликни эътиборга олиб топамиз:

$$\left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n\right| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n. \qquad (5)$$

Энди ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n z^n\right| = \left|c_0\right| + \left|c_1 z\right| + \left|c_2 z^2\right| + \ldots + \left|c_n z^n\right| + \ldots$$

қатор билан бирга қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = M + M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right| + M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^2 + \ldots + M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n + \ldots$$

қаторни қарайлик.

Равшанки, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ қатор яқинлашувчи бўлади (чунки бу геометрик қатор бўлиб, $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$).

Юқорида келтирилган (5) тенгсизликдан фойдаланиб

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n z^n\right|$$

қаторнинг $\left\{z \in \mathbf{C} : |z| < |z_0|\right\}$ доирада яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Демак, берилган

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

қатор $\left\{z \in \mathbf{C} : |z| < |z_0|\right\}$ доирада абсолют яқинлашувчи. Теорема исбот бўлди.

1 - натижа. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

даражали қатор z нинг $z = z_1$ қийматида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор

$$\left\{z \in \mathbf{C} : |z| > |z_1|\right\}$$

соҳада узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган даражали қатор $z=z_1$ нуқтада узоқлашувчи бўлсин. Унда бу қатор z нинг $\{|z|>|z_1|\}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида ҳам узоқлашувчи бўлади, чунки $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ қатор z нинг $\{|z|>|z_1|\}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бирор $z=z^*$ қийматида яқинлашувчи бўладиган бўлса, Абель теоремасига биноан бу қатор $z=z_1$ нуқтада ($|z_1|<|z^*|$) ҳам яқинлашувчи бўлиб қолади. Бу эса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ қаторнинг $z=z_1$ нуқтада узоқлашувчи дейилишига зиддир. Демак, берилган қатор $\{z\in\mathbf{C}:|z|>|z_1|\}$ да узоқлашувчи. Натижа исбот бўлди.

2^0. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш доираси. Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \quad (3)$$

даражали қатор берилган бўлсин.

5-теорема. Агар (3) даражали қатор z нинг баъзи $(z\neq 0)$ қийматларида яқинлашувчи, баъзи қийматларида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ягона R сон $(R>0)$ топиладики, (3) даражали қатор

$$\{z\in\mathbf{C}:|z|<R\} \qquad (6)$$

доирада яқинлашувчи,

$$\{z\in\mathbf{C}:|z|>R\}$$

соҳада ((6) доира ташқарисида) эса узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Айтайлик, (3) даражали қатор $z=z_0$ $(z_0\neq 0)$ нуқтада яқинлашувчи, $z=z_1$ нуқтада узоқлашувчи бўлиб, бу нуқталар $z=0$ нуқтадан чиқувчи битта нурда жойлашсин. Равшанки,

$$|z_0|<|z_1|$$

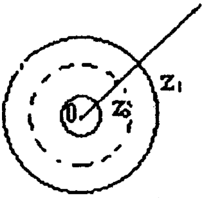
бўлади. Унда Абель теоремаси ва унинг натижасига кўра (3) даражали қатор

$$\{z\in\mathbf{C}:|z|<|z_0|\}$$

доирада яқинлашувчи (абсолют яқинлашувчи),

$$\{z\in\mathbf{C}:|z|>|z_1|\}$$

соҳада эса узоқлашувчи бўлади (41-чизма).



41-чизма

Демак, $[z_0,z_1]$ сегментни қарайдиган бўлсак, унда бу сегментнинг чап чеккасида қатор яқинлашувчи, ўнг чеккасида эса қатор узоқлашувчи бўлади. $[z_0,z_1]$ сегментнинг ўртаси $\frac{z_0+z_1}{2}$ нуқтани олиб, бу нуқтада (3) қаторни қараймиз. Агар $\frac{z_0+z_1}{2}$ нуқтада қатор яқинлашувчи бўлса, унда $\left[\frac{z_0+z_1}{2},z_1\right]$ сегментни, $\frac{z_0+z_1}{2}$ нуқтада қатор узоқлашувчи бўлса, $\left[z_0,\frac{z_0+z_1}{2}\right]$ сегментни олиб, уни $[z_0^{(1)},z_1^{(1)}]$ деймиз. Демак, (3) қатор $[z_0^{(1)},z_1^{(1)}]$ сегментнинг чап чеккаси $z_0^{(1)}$да яқинлашувчи, ўнг чеккаси $z_1^{(1)}$ да узоқлашувчи ва

$$[z_0^{(1)},z_1^{(1)}]\subset[z_0,z_1],\quad |z_0^{(1)}-z_1^{(1)}|=\frac{|z_0-z_1|}{2}$$

бўлади.

Сўнг $[z_0^{(1)},z_1^{(1)}]$ сегментни ўртаси $\frac{z_0^{(1)}+z_1^{(1)}}{2}$ ни олиб, шу нуқтада (3) қаторни қараймиз. Агар қатор $\frac{z_0^{(1)}+z_1^{(1)}}{2}$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, унда $\left[\frac{z_0^{(1)}+z_1^{(1)}}{2},z_1^{(1)}\right]$ сегментни, узоқлашувчи бўлса, $\left[z_0^{(1)},\frac{z_0^{(1)}+z_1^{(1)}}{2}\right]$ сегментни олиб уни

$\left[z_0^{(2)}, z_1^{(2)}\right]$ деймиз. Демак (3) қатор $\left[z_0^{(2)}, z_1^{(2)}\right]$ сегментнинг чап чеккаси $z_0^{(2)}$ нуқтада яқинлашувчи, ўнг чеккаси $z_1^{(2)}$ нуқтада узоқлашувчи ва

$$\left[z_0^{(2)}, z_1^{(2)}\right] \supset \left[z_0^{(1)}, z_1^{(1)}\right], \quad \left|z_0^{(2)} - z_1^{(2)}\right| = \frac{|z_0 - z_1|}{2^2}$$

бўлади. Шу жараённи давом эттириш натижасида

$$\left[z_0^{(1)}, z_1^{(1)}\right], \left[z_0^{(2)}, z_1^{(2)}\right], \ldots, \left[z_0^{(n)}, z_1^{(n)}\right], \ldots$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади.

Равшанки, бу сегментларнинг ҳар бирининг чап чеккаси $z_0^{(n)}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ нуқталарда (3) қатор яқинлашувчи, ўнг чеккаси $z_1^{(n)}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ нуқталарда (3) қатор узоқлашувчи бўлади.

Иккинчи томондан бу сегментлар учун:

$$1) \left[z_0^{(1)}, z_1^{(1)}\right] \supset \left[z_0^{(2)}, z_1^{(2)}\right] \supset \ldots \supset \left[z_0^{(n)}, z_1^{(n)}\right] \supset \ldots,$$

$$2) \left|z_0^{(n)} - z_1^{(n)}\right| = \frac{|z_0 - z_1|}{2^n}$$ бўлиб, $n \to \infty$ да

$$\left|z_0^{(n)} - z_1^{(n)}\right| \to 0$$

бўлади. У ҳолда барча сегментларга тегишли бўлган ягона z^* нуқта мавжуд бўладики,

$$\lim_{n\to\infty} z_0^{(n)} = \lim_{n\to\infty} z_1^{(n)} = z^*$$

бўлади. Бу z^* соннинг модулини R билан белгилайлик:

$$R = \left|z^*\right|$$

Энди берилган даражали қатор

$$\{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$$

да яқинлашувчи,

$$\{z \in \mathbf{C} : |z| > R\}$$

да эса узоқлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Юқорида айтилган нурда ихтиёрий

$$z \in \{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$$

нуқтани олайлик. Унда

$$\lim_{n\to\infty} z_0^{(n)} = z^*$$

бўлганлиги сабабли, шундай натурал n_0 сон топиладики,

$$|z'| < |z_0^{(n_0)}| < R$$

бўлади. $z_0^{(n_0)}$ нуқтада қатор яқинлашувчи.

Демак, Абель теоремасига кўра z' нуқтада ҳам қатор яқинлашувчи бўлади.

Нурда ихтиёрий

$$z'' \in \{z \in C : |z| > R\}$$

нуқтани олайлик. Унда

$$\lim_{n\to\infty} z_1^{(n)} = z^*$$

бўлганлиги сабабли, шундай натурал n_1 сон топиладики,

$$|z''| > |z_0^{(n_1)}| > R$$

бўлади. $z_1^{(n_1)}$ нуқтада қатор узоқлашувчи. Унда натижага кўра z'' нуқтада даражали қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, R $(R = |z^*|)$ сон топилдики, (3) даражали қатор

$$\{z \in C : |z| < R\}$$

доирада яқинлашувчи,

$$\{z \in C : |z| > R\}$$

соҳада (доира ташқарисида) қатор узоқлашувчи бўлар экан. Теорема исбот бўлди.

4-таъриф. Агар (3) даражали қатор $\{z \in C : |z| < R\}$ да яқинлашувчи, $\{z \in C : |z| > R\}$ да узоқлашувчи бўлса, R сон (3) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси, $\{z \in C : |z| < R\}$ доирада эса R сон (3) даражали қаторнинг яқинлашиш доираси дейилади.

Эслатма. (3) даражали қатор

$$\{z \in C_z : |z| = R\}$$

айлана нуқталарида яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

3^0. Коши-Адамар теоремаси. Маълумки, ҳар қандай даражали қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \quad (3)$$

ўзининг коэффициентлари кетма-кетлиги $\{c_n\}$ билан аниқланади.

Берилган (3) даражали қатор коэффициентлари ёрдамида ушбу

$$|c_0|, |c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \ldots, \sqrt[n]{|c_n|}, \ldots \quad (7)$$

сонлар кетма-кетлигини тузамиз.

Ҳар қандай сонлар кетма-кетлигининг юқори лимити мавжуд бўлганлиги сабабли (7) кетма-кетлигининг ҳам юқори лимити мавжуд бўлади. Уни ℓ орқали белгилайлик:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \ell,$$

(3) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси қуйидаги теорема ёрдамида топилади. Бу теремани исботсиз келтирамиз.

6-теорема (Коши-Адамар теоремаси). Берилган

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

даражали қаторнинг яқилашиш радиуси

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad (8)$$

бўлади.

(8) формулада $\ell = 0$ бўлганда $R = +\infty$, $\ell = +\infty$ бўлганда эса $R = 0$ деб олинади.

4^0. Даражали қаторнинг хоссалари. Даражали қаторнинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \quad (3)$$

даражали қатор берилган бўлсин.

1) Агар (3) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R\ (R > 0)$ бўлса, у ҳолда бу қатор

$$\{z \in \mathbb{C}: |z| \le R_1;\ R_1 < R\}$$

доирада текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси R га тенг бўлганлиги сабабли, қатор

$$\{z \in C: |z| < R\}$$

доирада яқинлашувчи бўлади.

$z_0 \in \{z \in C: |z| < R_1; R_1 < R\}$ нуқтани олайлик. Равшанки, бу нуқтада даражали қатор абсолют яқинлашувчи, яъни

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n|$$

қатор яқинлашувчи бўлади.

$\forall z \in \{z \in C: |z| \le |z_0|\}$ учун ҳар доим

$$|c_n z^n| \le |c_n| \cdot |z_0^n| = |c_n z_0^n|$$

бўлганлигидан Вейерштрасс аломатига кўра

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

қатор $\{z \in C: |z| \le R_1; R_1 < R\}$ да текис яқинлашувчи бўлади.

2-натижа. (3) даражали қатор йиғиндиси

$$\{z \in C: |z| \le R_1; R_1 < R\}$$

да узлуксиз функция бўлади.

2) Агар (3) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R\,(R > 0)$ бўлса, у ҳолда бу қаторни $\{z \in C: |z| \le R_1; R_1 < R\}$ да ҳадлаб дифференциаллаш мумкин.

Исбот. Айтайлик, (3) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R\,(R > 0)$ бўлиб, унинг йиғиндиси f(z) бўлсин:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Аввало берилган (3) даражали қатор ҳадларининг ҳосилаларидан тузилган ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \ldots + n c_n z^{n-1} + \ldots \qquad (9)$$

даражали қаторнинг ҳам яқинлашиш радиуси R бўлишини кўрсатамиз.

(8) формулага кўра (9) қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n\,|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|c_n|}\right)} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} = 1 \cdot R = R$$

бўлади. Демак, (9) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳам R га тенг бўлар экан.

(9) қатор

$$D_0 = \left\{ z \in C: |z| \le R_1;\ R_1 < R \right\}$$

да текис яқинлашувчи бўлади. Бинобарин, унинг йиғиндиси

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$$

шу D_0 да узлуксиз бўлади.

Энди

$$S(z) = f'(z)$$

бўлишини кўрсатамиз.

D_0 доирада 0 ва z нуқталарни бирлаштирувчи ва шу D_0 да ўтувчи ихтиёрий силлиқ (бўлакли силлиқ) γ эгри чизиқни олайлик.

Равшанки,

$$\int_{\gamma} t^n dt = \int_0^z t^n dt = \frac{z^{n+1}}{n+1}, \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$\int_{\gamma} nc_n t^{n-1} dt = nc_0 \int_0^z t^{n-1} dt = nc_0 \frac{z^n}{n} = c_n z^n.$$

Энди

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$$

қаторни ҳадлаб интеграллаб, топамиз:

$$\int_0^z S(z)dt = \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} nc_n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_0^z t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

Демак,

$$\int_0^z S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Агар

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенгликлардан

$$\int_0^z S(z)dt = f(z) - c_0$$

эканлиги келиб чиқади.

Демак,
$$\int_0^z S(t)dt$$
функция $f(z)$ учун бошланғич функция бўлади:
$$S(z)=f'(z).$$
Шундай қилиб
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$
бўлганда
$$f'(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n z^{n-1}$$
бўлишини, яъни (3) даражали қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкинлиги кўрсатилди.

Модомики, R_1 ни R га ҳар қанча яқин келтириш мумкин экан, унда (3) қатор, равшанки,
$$\{z\in C: |z|<R\}$$
да ҳадлаб дифференциалланади.

Худди шу йўл билан даражали қаторни исталган марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкинлигини кўрсатиш мумкин.

5^0. **Тейлор қатори.** Айтайлик,
$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+...$$
даражали қатор берилган бўлиб, унинг яқинлашиш радиуси $R\ (R>0)$ бўлсин. Равшанки, бу қатор
$$\{z\in C: |z-z_0|<R\}$$
доирада яқинлашувчи бўлади. Берилган даражали қаторнинг йиғиндиси $f(z)$ дейлик:
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n= \tag{10}$$
$$=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+...$$
Юқорида келтирилган даражали қаторнинг 2)-хоссасидан фойдаланиб, (10) қаторни кетма-кет дифференциаллаймиз:
$$f'(z)=c_1+c_2\cdot 2(z-z_0)+c_3\cdot 3(z-z_0)^2+...+c_n n(z-z_0)^{n-1}+...,$$
$$f''(z)=c_2\cdot 2+c_3\cdot 3\cdot 2(z-z_0)+...+c_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2}+...,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Бу тенгликларда $z = z_0$ деб оламиз:

$$f(z_0) = c_0 ,$$

$$f'(z_0) = 1!c_1 ,$$

$$f''(z_0) = 2!c_2 ,$$

$$f'''(z_0) = 3!c_3 ,$$

....

$$f^{(n)}(z_0) = n!c_n$$

....

Демак,

$$c_0 = f(z_0), \quad c_1 = \frac{f'(z_0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!},$$

$$c_3 = \frac{f'''(z_0)}{3!}, \ldots, c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ldots$$

бўлади.

Шундай қилиб,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

даражали қаторнинг коэффициентлари $f(z)$ функция ва унинг ҳосилаларининг z_0 нуқтадаги қийматлари орқали ифодаланади. Коэффициентларнинг бу қийматларини (10) га қўйсак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \qquad (11)$$

бўлади.

Одатда (11) даражали қаторга Тейлор қатори дейилади.

6-БОБ

ГОЛОМОРФ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида асосан голоморф функциялар ўрганилади.

Биз мазкур курснинг 2-4 бобларида голоморф функция тушунчаси билан танишдик, уни характерловчи фундаментал теоремаларни (Коши теоремаси, Кошининг интеграл формуласи) келтирдик. Аслида бу теоремалар голоморф функцияларнинг муҳим хоссаларидир.

Ушбу бобда голоморф функцияларнинг ўрганилган муҳим хоссаларини яна бир бор келтириб, кейинги хоссаларини баён этамиз.

1^0. **Коши теоремаси.** Агар $f(z)$ функция бир боғламли D соҳада $(D \subset C_z)$ голоморф бўлса, у ҳолда $f(z)$ функциянинг D соҳада ётувчи ҳар қандай силлиқ (бўлакли силлиқ) γ ёпиқ чизиқ (ёпиқ контур) бўйича интеграли нолга тенг бўлади:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Бу хосса 4-бобда батафсил ўрганилган эди.

2^0. **Кошининг интеграл формуласи.** Агар $f(z)$ функция D соҳада $(D \subset C_z)$ голоморф бўлиб, $\overline{D}$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall z \in D$ учун

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

тенглик ўринли бўлади.

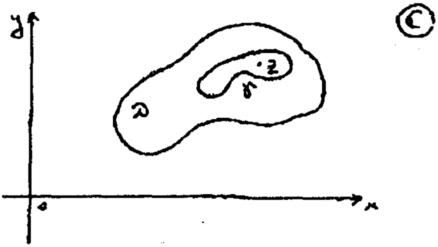
Бу хосса ҳам 4-бобда батафсил баён этилган.

3^0. **Голоморф функциянинг исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиши.** Агар $f(z)$ функция D соҳада $(D \subset C_z)$ голоморф бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция D да исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиб,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \qquad (n=1,2,3,...) \qquad (1)$$

бўлади.

Бу ерда $\gamma - D$ соҳада ётувчи, (бўлакли силлиқ) ёпиқ чизиқ бўлиб, z эса γ чизиқ билан чегараланган соҳага тегишли нуқта (42 чизма).



42-чизма

Исбот. Кошининг интеграл формуласига кўра

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{t-z}dt$$

бўлади.

z нуқтага Δz орттирма бериб, $f(z)$ функциянинг орттирмасини топамиз:

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{t-z-\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(t)\left(\frac{1}{t-z-\Delta z}-\frac{1}{t-z}\right)dt=$$

$$=\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)}dt.$$

Унда

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)}dt$$

бўлади. Кейинги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)}dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt+ \qquad (2)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\Delta z\cdot f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)^2}dt.$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Исбот. $U_\rho(a)$ нинг чегарасини γ дейлик:

$$\gamma=\{z\in C_z:|z-a|<\rho,\rho>0\}$$

Кошининг интеграл формуласига кўра

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (5)$$

бўлади.

Аввало $\frac{1}{t-z}$ функцияни қуйидагича

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-a-(z-a)}=\frac{1}{(t-a)\left(1-\frac{z-a}{t-a}\right)}$$

ёзиб, сўнг

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{1}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}} \qquad (6)$$

Бу геометрик қатор бўлиб, унинг махражи

$$\frac{z-a}{t-a}$$

га тенг. Равшанки, $t\in\gamma$ учун қўйидаги тенгсизлик

$$\left|\frac{z-a}{t-a}\right|=\frac{|z-a|}{\rho}=q<1$$

ўринли. Демак, (4) қатор яқинлашувчи.

(6) тенгликнинг ҳар икки томонини $\frac{1}{2\pi i}f(t)$ га кўпайтириб, сўнг γ чизиқ бўйича интеграллаб, ушбу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}(z-a)^n dt$$

тенгликка келамиз.

(5) ва (6) муносабатлардан

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}(z-a)^{n}dt \qquad (7)$$

бўлиши келиб чиқади.

Интеграл остидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}(z-a)^{n}$$

қаторнинг ҳадлари учун

$$\left|\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}(z-a)^{n}\right|<\frac{1}{\rho}Mq^{2} \qquad (n=1,2,\dots)$$

$(M=\max\limits_{\gamma}|f(t)|)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Равшанки,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{\rho}\cdot q^{n} \qquad (q<1)$$

қатор яқинлашувчи. Унда Вейерштрасс аломатига кўра

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}(z-a)^{n}$$

функционал қатор γ да текис яқинлашувчи бўлади. Бинобарин, бу қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин. Унда (7) тенглик ушбу

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt\right]\cdot(z-a)^{n} \qquad (8)$$

кўринишга келади.

Мазкур бобнинг 3^0-пунктида келтирилган (1) формуладан фойдаланиб

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (9)$$

бўлишини топамиз. Натижада (8) ва (9) тенгликлардан

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^{n}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(z)$ функциянинг Тейлор қаторига ёйилганлигини билдиради.

Бу хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

3 - натижа. Агар $f(z)$ функция ёпиқ

доирада голоморф бўлиб, бу доиранинг чегараси $\gamma = \partial U_\rho(a)$ айланада

$$|f(z)| \le M \quad (M = \mathrm{const})$$

бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция Тейлор қаторининг c_n коэффициентлари учун

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0,1,2,\dots) \qquad (10)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (9) формуладан

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(t)|}{|t-a|^{n+1}}\cdot dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}$$

бўлиши келиб чиқади

Одатда (10) тенгсизлик Коши тенгсизликлари дейилади.

5^0. **Лиувилль теоремаси.** Агар $f(z)$ функция комплекс текислик C да (комплекс текисликнинг ҳар бир нуқтасида) голоморф бўлиб, у чегараланган бўлса, $f(z)$ функция C да ўзгармас бўлади.

Исбот. Голоморф функциянинг 4^0-хоссасига кўра $f(z)$ функция $|z-a| < \rho$ доирада $z-a$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйилади:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

бунда

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt.$$

Коши тенгсизлиги (10) га биноан

$$|f(z)| \le M \quad (|f(z)| \le M;\ n = 0,1,2,\dots)$$

бўлади. $f(z)$ функция C да голоморф бўлгани учун бу тенсизликда ρ ни исталганча катта қилиб олиш мумкин. Шунинг учун $n = 1,2,3\dots$ бўлганда

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{M}{\rho^n} = 0 \qquad (n = 1,2,3\dots)$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{M}{\rho^n}=0 \qquad (n=1,2,3\dots)$$

бўлади. Айни пайтда (10) тенгсизликнинг чап томони ρ га боғлиқ эмас. Бинобарин, $n=1,2,3\dots$ бўлганда

$$c_n=0 \quad (n=1,2,3\dots)$$

бўлади. Демак, $\mathbf{C}$ да $f(z)=c_0$ $(c_0=\text{const})$.

6°. Морера теоремаси. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция бир боғламли D соҳада $D\subset \mathbf{C}_z$ аниқланган ва узлуксиз бўлиб, γ эса шу D соҳада ётувчи ихтиёрий силлиқ (бўлакли силлиқ) ёпиқ чизиқ бўлсин. Агар

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция D соҳада голоморф бўлади.

Исбот. Теоремада келтирилган шарт бажарилганда функция D соҳада бошланғич $F(z)$ функцияга эга бўлиб, $F(z)$ функция D соҳада $\mathbf{C}$-дифференциалланувчи, яъни голоморф бўлади.

3^0- хоссанинг 1-натижасига кўра $F'(z)$ ҳам D соҳада голоморф бўлади. Айни пайтда

$$F'(z)=f(z)$$

бўлганлиги сабабли $f(z)$ функция D соҳада голоморф бўлади.

Бу хосса функция голоморфлигининг етарли шартини ифодалайди.

7^0. Ягоналик теоремаси. Фараз қилайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар D соҳада $(D\subset \mathbf{C}_z)$ голоморф бўлсин. Агар бу функциялар D соҳага тегишли ва ҳеч бўлмаганда битта лимит нуқта z_0 $(z_0\in D)$ га эга бўлган E тўпламда $(E\subset D)$ бир-бирига тенг

$$f(z)=g(z) \quad (z\in E)$$

бўлса, у ҳолда $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар D соҳада айнан бир-бирига тенг бўлади:

$$f(z)\equiv g(z) \quad (z\in D).$$

Исбот. Модомики, z_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси экан, унда E тўпламга тегишли турли $z_1,z_2,z_3,\dots,z_n,\dots$ $z_n\in E$, $n=1,2,3\dots$ нуқталардан тузилган ва z_0 га интилувчи

$\forall z \in E$ да $f(z)=g(z)$ бўлгани учун

$$f(z_n)=g(z_n) \qquad (n=1,2,3...)$$

бўлади.

Энди $f(z)$ ва $g(z)$ функцияларни z_0 нуқтанинг

$$B=\{z \in C_z : |z-z_0|<\rho, \rho>0\}$$

атрофида (бунда $\rho<d$, d-эса z_0 нуқтадан ∂D гача бўлган масофа) Тейлор қаторига ёйамиз:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k,$$
$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k. \qquad (11)$$

$z_k \to z_0$ бўлганлиги сабабли k нинг бирор қийматидан бошлаб, кейинги z_k лар

$$B=\{z \in C_z : |z-z_0|<\rho\}$$

доирага тегишли бўлади. Шунинг учун $f(z_k)=g(z_k)$ бўлиб, (11) муносабатлардан

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_k-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z_k-z_0)^k \qquad (12)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликда $z_k \to z_0$ да лимитга ўтиб

$$a_0 = b_0 \qquad (13)$$

бўлишини топамиз.

Бу (13) тенгликни эътиборга олиб, (12) тенгликнинг ҳар икки томонини $z_k - z_0$ га бўлсак, унда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z_k-z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z_k-z_0)^{k-1} \qquad (14)$$

ҳосил бўлади.

Кейинги тенгликда $z_k \to z_0$ да лимитга ўтиб

$$a_1 = b_1 \qquad (15)$$

бўлишини топамиз. Бу (15) тенгликни эътиборга олиб, (14) тенгликнинг ҳар икки томонини $z_k - z_0$ га бўлсак, унда

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k(z_k-z_0)^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} b_k(z_k-z_0)^{k-2}$$

ҳосил бўлади. Сўнг $z_k \to z_0$ да лимитга ўтиб

$$a_2 = b_2$$

бўлишини топамиз.

Бу жараённи давом эттира бориб

$$a_k = b_k \quad (k = 3,4,5,\dots)$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_k - z_0)^k ,$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z_k - z_0)^k$$

лар учун

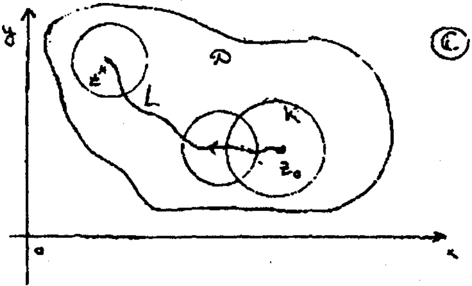
$$a_k = b_k \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

бўлади. Демак, $B = \{z \in C_z : |z - z_0| < \rho \}$ доирада

$$f(z) = g(z)$$

бўлади.

D соҳада ихтиёрий z^* нуқтани олиб, z_0 ва z^* нуқталарни D соҳада ётувчи узлуксиз L чизиқ билан бирлаштирамиз. (43-чизма)



43-чизма

В доирада L эгри чизиқ қисмида бирор α $(\alpha \in L)$ нуқтани оламиз. Сўнг В да α га интилувчи

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_k, \dots$$

$$(\lim t_k = \alpha)$$

кетма-кетликни қараймиз. Равшанки,

$$f(z_k) = g(z_k) \qquad (k = 1,2,3\dots)$$

бўлади.

Энди $f(z)$ ва $g(z)$ функцияларни α нуқтанинг

$$B_1 = \{z \in C_z : |z - \alpha| < \rho_1 , \rho_1 > 0\}$$

атрофида (бунда $\rho_1 < d_1$ бўлиб, d_1-эса L ва ∂D чизиқлар орасидаги масофа) Тейлор қаторига ёйамиз:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k (z - z_0)^k ,$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b'_k (z - z_0)^k .$$

Юқорида келтирилган мулоҳазани такрорлаб

$$a'_k = b'_k \qquad (k = 1,2,3,...)$$

ва, демак, B_1 доирада

$$f(z) = g(z)$$

бўлишини топамиз.

α нуқтани L чизиқ бўйлаб z^* нуқтага томон силжита бориб ва яна юқорида келтирилган мулоҳазаларни такрорлаб

$$f(z^*) = g(z^*)$$

бўлишини топамиз.

z^* нуқта D соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлганлиги сабабли, D соҳада

$$f(z) = g(z)$$

бўлади.

8^0. Вейерштрасс теоремаси. Агар

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + ... \qquad (16)$$

функционал қаторнинг ҳар бир $f_n(z)$ $(n = 1,2,...)$ ҳади D соҳада $(D \subset C_z)$ голоморф бўлиб, бу қатор D соҳада ётувчи ихтиёрий F ёпиқ тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор йиғиндиси

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (17)$$

функция D соҳада голоморф бўлади.

Исбот. D соҳада ихтиёрий z_0 нуқтани олиб, унинг шундай

$$U_\delta(z_0) = \{z \in C_z : |z - z_0| < \delta , \delta > 0\}$$

атрофини қараймизки, $\overline{U}_\delta(z_0) \subset D$ бўлсин.

Шартга кўра (16) қатор $\overline{U}_\delta(z_0)$да текис яқинлашувчи. Демак, қатор $U_\delta(z_0)$да ҳам текис яқинлашувчи бўлади.

$f_n(z)$ $(n=1,2,...)$ функция D соҳада голоморф бўлгани учун у (16) қаторнинг ҳар бир ҳади $U_\delta(z_0)$да ҳам голоморф бўлади. Бинобарин, $f_n(z)$ $(n=1,2,...)$ функция $U_\delta(z_0)$ да узлуксиз. Унда қатор йиғиндиси $f(z)$ функция ҳам $U_\delta(z_0)$ да узлуксиз бўлади.

Энди $U_\delta(z_0)$да ётувчи ёпиқ силлиқ (бўлакли силлиқ) γ чизиқни олайлик $(\gamma \subset U_\delta(z_0))$. (17) қаторни γ чизиқ бўйича ҳадлаб интеграллаб, топамиз:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\Big)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz. \qquad (18)$$

Коши теоремасига кўра

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 0 \quad (n=1,2,3,...) \qquad (19)$$

бўлади.

(18) ва (19) муносабатлардан

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Морера теоремасидан фойдаланиб, $f(z)$ функцияни $U_\delta(z_0)$да ва, демак, z_0 нуқтада голоморф бўлишини топамиз.

Қаралаётган z_0 нуқта D соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлганлигидан $f(z)$ функциянинг D соҳада голоморф бўлиши келиб чиқади.

4-натижа. Юқорида келтирилган Вейерштрасс теоремасининг шарти бажарилганда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

қаторни исталган марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлиб,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (k=1,2,...)$$

бўлади.

9°. *Голоморф функциянинг ноллари.* Голоморф функциянинг ноллари ҳақидаги хоссани келтиришдан аввал баъзи тушунчалар ва тасдиқларни баён этамиз.

Фараз қилайлик, бирор $f(z)$ функция кенгайтирилган комплекс текислик $\overline{C}$ да берилган бўлиб, $a \in \overline{C}$ бўлсин.

Агар

$$f(a)=0$$

бўлса, a комплекс сон $f(z)$ функциянинг ноли дейилади.

Айтайлик, $f(z)$ функция $z=a$ нуқтада голоморф бўлсин. Бу функцияни a нуқта атрофида даражали қаторга ёйамиз:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (20)$$

Агар $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг ноли бўлса, у ҳолда

$$f(a)=c_0=0$$

бўлиб, (20) формула ушбу

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

кўринишга келади.

Айтайлик, (20) формулада

$$c_1=c_2=\ldots=c_{m-1}=0 \qquad (21)$$

бўлиб,

$$c_m\neq 0$$

бўлсин. У ҳолда (20) тенгликдан

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_m(z-a)^m+c_{m+1}(z-a)^{m+1}+$$

$$+c_{m+2}(z-a)^{m+2}+\ldots=$$

$$=(z-a)^m\left[c_m+c_{m+1}(z-a)+\ldots\right]$$

бўлиши келиб чиқади.

Маълумки,

$$c_i=\frac{f^{(i)}(z)}{i!}.$$

Юқоридаги (21) муносабатни эътиборга олиб,

$$f^{(i)}(a)=0 \quad (i=1,2,\ldots,m-1)$$

бўлишини топамиз.

Бу ҳолда $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг m каррали ноли дейилади.

Шундай қилиб, $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг m каррали ноли бўлса, у ҳолда

$$f(z)=(z-a)^m g(z)$$

бўлиб,

$$g(z)=c_m+c_{m+1}(z-a)+c_{m+2}(z-a)^2+\ldots$$

$(g(a)\neq 0)$ функция $z=a$ нуқтада голоморф бўлади.

Аксинча, агар $f(z)$ функция қуйидагича

$$f(z)=(z-a)^m g(z)$$

ифодаланиб, $g(z)$ функция $z=a$ нуқтада голоморф бўлса, $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг m каррали ноли бўлади.

$f(z)$ функция $z=\infty$ нуқтада голоморф бўлсин. Бу ҳолда $z=\infty$ нуқта атрофида $f(z)$ функция ушбу

$$f(z)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{1}{z^n} \qquad (22)$$

қаторга ёйилади.

$z=\infty$ нуқта $f(z)$ функциянинг ноли бўлсин.

Равшанки, бу ҳолда

$$c_0=f(\infty)=0$$

бўлиб, (22) формула ушбу

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{1}{z^n} \qquad (23)$$

кўринишга келади.

Айтайлик, (23) формулада

$$c_1=c_2=\ldots=c_{m-1}=0$$

бўлиб,

$$c_m\neq 0$$

бўлсин. Бу ҳолда $z=\infty$ нуқта $f(z)$ функциянинг m каррали ноли бўлади. У ҳолда (23) формуладан

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}c_n\frac{1}{z^n}=c_m\frac{1}{z^m}+c_{m+1}\frac{1}{z^{m+1}}+c_{m+2}\frac{1}{z^{m+2}}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{z^m}\left(c_m+c_{m+1}\frac{1}{z}+c_{m+2}\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{z^m}\varphi(z)$$

бўлишини топамиз. Бу ерда

$$\varphi(z)=c_m+c_{m+1}\frac{1}{z}+c_{m+2}\frac{1}{z^2}+\ldots$$

функция учун

$$\varphi(\infty)=c_m\neq 0$$

бўлиб, $\varphi(z)$ функция $z=\infty$ нуқтада голоморф бўлади.

Аксинча, агар $f(z)$ функция қуйидагича

$$f(z)=\frac{1}{z^m}\varphi(z)$$

ифодаланиб, $\varphi(z)$ функция $z=\infty$ нуқтада голоморф бўлса, у ҳолда $z=\infty$ нуқта $f(z)$ функциянинг m каррали ноли бўлади.

Энди голоморф функциянинг ноллари ҳақидаги хоссани келтирамиз.

Теорема. Фараз қилайлик, $f(z)$ функция $z=a$ нуқтада голоморф бўлиб, шу $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг ноли бўлсин: $f(a)=0$. У ҳолда ё $f(z)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида айнан нолга тенг: $f(z)\equiv 0$, ёки a нуқтанинг шундай атрофи топиладики, бу атрофда $f(z)$ функциянинг $z=a$ нуқтадан бошқа ноли бўлмайди.

Исбот. Шартга кўра $f(z)$ функция $z=a$ нуқтада голоморф. Унда функция $z=a$ нуқта атрофида қаторга ёйилади:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad (24)$$

Айтайлик, (24)да барча c_n лар нолга тенг бўлсин:

$$c_0=c_1=c_2=\ldots=0$$

Равшанки, Бу ҳолда функция $z=a$ нуқта атрофида $f(z)=0$ бўлади.

Энди (24) да

$$c_0=c_1=c_2=\ldots=c_{m-1}=0$$

бўлиб,

$$c_m\neq 0$$

бўлсин. Бу ҳолда $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг m каррали ноли бўлиб, у қуйидагича

$$f(z)=(z-a)^m g(z)$$

ифодаланади. Бу ерда $g(z)$ функция $z=a$ нуқтада голоморф ва $g(a)\neq 0$. Айни пайтда $g(z)$ функция $z=a$ нуқтада узлуксиз ҳам бўлади. Унда $g(a)\neq 0$ бўлганлиги сабабли $z=a$ нуқтанинг шундай атрофи топиладики, бу атрофда $g(z)\neq 0$ бўлади. Бинобарин, шу атрофда $f(z)$ функциянинг $z=a$ нуқтадан бошқа ноллари бўлмайди.

Бу хосса голоморф функция ноллари яккаланган бўлишини билдиради.

7-БОБ

ЛОРАН ҚАТОРЛАРИ. МАХСУС НУҚТАЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

Биз 6-бобда голоморф функцияларни ўргандик. Жумладан, f(z) функция

$$D = \{z \in C_z : |z-a| < R\}$$

доирада голоморф бўлса, у Тейлор қатори

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

га ёйилишини кўрдик. Бу ерда

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$$

бўлади $(\gamma_r = \{|t-a| = r\}, 0 < r < R)$.

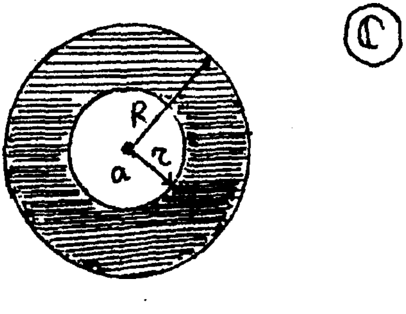
f(z) функция ҳалқада голоморф бўлса, уни шу ҳалқада қаторга ёйиш масаласи комплекс анализ ва унинг татбиқларида муҳим аҳамиятга эга.

1-§.Лоран қаторлари

1^0. Лоран қатори тушунчаси. Айтайлик, f(z) функция ушбу

$$K = \{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

соҳада (ҳалқада, 44-чизма) голоморф бўлсин, бунда r≥0, $R \le +\infty$.



44-чизма

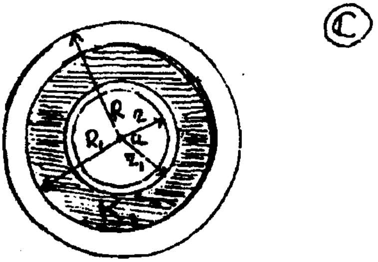
К соҳада ихтиёрий z нуқта олиб, уни тайинланган деб қараймиз. Сўнг шундай

$$K_1 = \{t \in \mathbf{C}_z : r_1 < |t-a| < R_1\}$$

соҳани (ҳалқани) оламизки, бунда

$$r < r_1 < R_1 < R$$

бўлиб, $z \in K_1$ бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $K_1 \subset K$ бўлади (45-чизма).



45-чизма

Ушбу

$$\{t \in \mathbf{C}_z : |t-a| = r_1\}, \quad \{t \in \mathbf{C}_z : |t-a| = R_1\}$$

айланаларни мос равишда γ_1, Γ_1 орқали белгилаймиз:

$$\gamma_1 = \{t \in \mathbf{C}_z : |t-a| = r_1\},$$

$$\Gamma_1 = \{t \in \mathbf{C}_z : |t-a| = R_1\}.$$

Унда K_1 соҳанинг чегараси

$$\partial K_1 = \gamma_1^- \cup \Gamma_1$$

бўлади. Бу ерда γ_1 ва Γ_1 айланаларда йўналиш соат стрелкаси йўналишига қарши қилиб олинган.

Қаралаётган f(z) функция $K(K_1 \subset K)$ соҳада голоморф бўлганлиги сабабли Кошининг интеграл формуласига кўра $\forall z \in K_1$ учун

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_1} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

бўлади. Равшанки,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_1} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Демак,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}dt \quad (1)$$

$\forall t\in\Gamma_1$ учун текис яқинлашувчи $\left(\left|\frac{z-a}{t-a}\right|<1\right)$ ушбу

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{(t-a)\left(1-\frac{z-a}{t-a}\right)}=\frac{1}{t-a}+\frac{z-a}{(t-a)^2}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}}+\ldots$$

қаторни $\frac{1}{2\pi i}f(t)$ га кўпайтириб, сўнг Γ_1 бўйича ҳадлаб интегралласак,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}dt=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \quad (2)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt \quad (n=0,1,2,\ldots) \quad (3)$$

(Шуни таъкидлаш лозимки, бу ҳолда (3) муносабатдаги c_n коэффициентлар 5-боб, 2-§ да келтирилганидек $\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$ га тенг қилиб олиб бўлмайди. Сабаби, $f(z)$ функция a нуқтада голоморф бўлмаслиги мумкин).

Энди (1) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи интеграл остидаги $\frac{1}{t-z}$ функцияни $\forall t\in\gamma_1$, учун қуйидагича

$$\frac{1}{t-z}=-\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{t-a}{z-a}}=-\frac{1}{z-a}-\frac{t-a}{(z-a)^2}-\ldots-\frac{(t-a)^n}{(z-a)^{n+1}}-\ldots \quad (4)$$

ёзиб оламиз. $\forall t\in\gamma_1$ да

$$\left|\frac{t-a}{z-a}\right|=\frac{r_1}{|z-a|}=q<1$$

бўлганлиги сабабли (3) қатор текис яқинлашувчи бўлади.

Юқоридагидек, (4) тенгликнинг ҳар икки томонини $\frac{1}{2\pi i}f(t)$ га кўпайтириб, сўнг γ_1 бўйича ҳадлаб интеграллаб

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}dt=\sum_{n=1}^{\infty}d_n(z-a)^{-n} \qquad (5)$$

бўлишини топамиз, бунда

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(t)\cdot(t-a)^{n-1}dt \qquad (n=0,1,2,\dots) \qquad (6)$$

бўлади. Натижада (1), (2) ва (5) муносабатлардан

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cdot(z-a)^{-n} \qquad (7)$$

бўлиши келиб чиқади.

(3) ва (6) формулалардаги 1,2,3,... қийматларни қабул қиладиган n индексни, -1,-2,-3,... қийматларни қабул қиладиган –n индекс билан алмаштирсак, унда (6) формула ушбу

$$d_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(t)\cdot(t-a)^{-n-1}dt \qquad (8)$$

кўринишга келади.

Агар z нуқта K соҳадаги ихтиёрий нуқта эканини, $f(z)$ функция шу соҳада голоморф бўлишини ҳамда γ_1 ва Γ_1 чизиқлар K соҳага тегишлилигини эътиборга олсак, Коши теоремасига кўра

$$\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt=\int_{\Gamma_1}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt,$$

умуман,

$$\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt=\int_{\Gamma_1}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt=\int_{K_\rho}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt$$

бўлишини топамиз. Бу ерда

$$K_\rho=\left\{t\in C_z:\left|t-a\right|=\rho; r_1<\rho<R_1\right\}.$$

Энди (3) ва (8) тенгликларни солиштириб

$$d_{-n}=c_n \quad (n=0,1,2,\dots)$$

яъни

$$d_n=c_{-n}$$

бўлишини топамиз. Бу ҳол

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ ва } \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n}$$

йиғиндиларни бирлаштириб, ушбу

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

кўринишда ёзиш имконини беради:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{-n}.$$

Демак,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

бўлиб, бунда

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

бўлади.

Шундай қилиб қуйдаги теоремага келамиз:

1-теорема. Ушбу

$$\{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

соҳада(ҳалқада) голоморф бўлган ихтиёрий f(z) функция шу соҳада яқинлашувчи

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

қаторнинг йиғиндиси сифатида ифодаланади:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Бу ерда қаторнинг коэффициентлари

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

бўлиб, $r < \rho < R$ бўлади. Одатда, бу теорема Лоран теоремаси дейилади.

1-таъриф. Коэффициентлари

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

формулалар ёрдамида аниқланадиган

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

қатор f(z) функциянинг K соҳадаги (ҳалқадаги) Лоран қатори дейилади.

f(z) функция K соҳада (ҳалқада) голоморф бўлса, теоремага биноан

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

бўлишини эътиборга олиб, бу ҳолда f(z) функция *K* соҳада (ҳалқада) Лоран қаторига ёйилади деб айтамиз.

Демак, f(z) функциянинг Лоран қатори z-a нинг мусбат ва манфий бутун даражалари бўйича ёйилган қаторни ифодалар экан.

Юқорида айтилганлардан ҳамда даражали қаторлар ҳақидаги маълумотлардан фойдаланиб, қуйидаги хулосаларга келамиз.

1) Лоран қатори

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

ни иккита

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad (9)$$

ва

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n \qquad (10)$$

қаторларнинг йиғиндисидан иборат деб қараш мумкин. Одатда (9) қатор Лоран қаторининг тўғри қисми, (10) қатор эса Лоран қаторининг бош қисми дейилади.

2) Лоран қаторининг тўғри қисми

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

5-боб, 2-§ да ўрганилган даражали қатордир. Унинг яқинлашиш соҳаси Абель теоремасига кўра $|z-a|<R$ доирадан иборат бўлиб, яқинлашиш радиуси Коши-Адамар формуласи

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$$

га кўра топилади. (9) қатор $|z-a|<R_1$ $(R_1<R)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

3) Лоран қаторининг бош қисми

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n \qquad (10)$$

да $w = \frac{1}{z-a}$ дейилса, унда бу қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$$

кўринишга эга бўлади. Бу қатор Абел теоремасига кўра

$$|w| < \frac{1}{r}$$

да яқинлашувчи бўлиб, яқинлашиш радиуси Коши-Адамар формуласига кўра

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$$

бўлади. Демак,

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$$

қатор доиранинг ташқи қисми бўлган

$$|z-a| > r$$

соҳада яқинлашувчи бўлади.

4) Агар $r \geq R$ бўлса, Лоран қаторининг яқинлашиш соҳаси бўш тўплам бўлади.

Агар $r < R$ бўлса, Лоран қатори

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

нинг яқинлашиш соҳаси

$$\{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

ҳалқадан иборат бўлади.

5) Агар f(z) функциянинг Лоран қатори

$$K = \{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

соҳада (ҳалқада) яқинлашувчи бўлса, Абель теоремасига кўра қатор

$$\{z \in C_z : r_1 \leq |z-a| \leq R_1\}$$

$(r < r_1 < R_1 < R)$ ёпиқ соҳада текис яқинлашувчи бўлади.

Вейерштрасс теоремасига кўра Лоран қаторининг йиғиндиси f(z) функция

$$\{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

соҳада голоморф бўлади.

2°. Функцияни Лоран қаторига ёйилмасининг ягоналиги

Биз

$$K = \{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

соҳада (ҳалқада) голоморф бўлган ҳар қандай f(z) функцияни Лоран қатори

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

га ёйилишини кўрдик. Равшанки, f(z) функциянинг Лоран қатори (Тейлор қатори сингари) ўз коэффициентлари

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dz$$

билан тўлиқ аниқланади.

Энди f(z) функциянинг Лоран қаторига ёйилмасида коэффициент c_n лар ягона ҳолда аниқланишини, яъни f(z) функция турли усуллар билан Лоран қаторига ёйилганда уларда коэффициентлар ҳар доим бир хил бўлишини кўрсатамиз.

2-теорема. f(z) функция $K = \{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$ соҳада (ҳалқада) голоморф бўлсин. Бу функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ягонадир.

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни K соҳада (ҳалқада) голоморф бўлган f(z) функциянинг Лоран қатори иккита

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (11)$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^n \qquad (12)$$

бўлиб, $c_n \neq c'_n$ бўлсин. Ушбу

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^n$$

тенгликнинг ҳар икки томонини $(z-a)^{-m-1}$ (m- тайинланган бутун сон) га кўпайтирамиз:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^{n-m-1}.$$

(11) ва (12) қаторлар $\{z \in C_z : |z-a| = \rho\}$, $(r < \rho < R)$ айланада текис яқинлашувчи бўлганлиги сабабли уларни шу айлана бўйича ҳадлаб интеграллаш мумкин. Ҳадлаб интеграллаб қуйидаги

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz \qquad (13)$$

тенгликка келамиз.

Маълумки, ихтиёрий бутун k сони учун

$$\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^k dz = \begin{cases} 0, & k \neq -1 \\ 2\pi i, & k = -1 \end{cases}$$

бўлади. Бу тенгликдан фойдаланиб, (13) муносабатдан

$$c_n = c'_n$$

бўлишини топамиз. Бу эса теремани исботлайди.

Одатда, бу теорема ягоналик теоремаси дейилади.

Эслатма. Функцияларни Лоран қаторига ёйиш масаласи унинг c_n коэффициентларини аниқлаш билан ҳал қилинади. Бу c_n коэффициентлар интегралларни ҳисоблаш билан топилади. Кўпинча бундай интегралларни ҳисоблаш қийин бўлади. Ягоналик теоремаси функцияларни Лоран қаторига ёйишда бошқа усуллардан фойдаланиш имкониятини яратади.

Шунинг учун функцияларни Лоран қаторига ёйишда турли усуллардан фойдаланиш мумкин бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

функцияни

$$K = \{z \in C_z : 1 < |z| < 2\}$$

соҳада (ҳалқада) Лоран қаторига ёйинг.

Берилган

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

функция $z = 1, z = 2$ нуқталарда голоморф бўлмасдан

$$K=\{1<|z|<2\}$$

соҳада(ҳалқада) голоморф. Бинобарин, 1-теоремага кўра функция шу ҳалқада Лоран қаторига ёйилади. Бу ёйилмани топиш учун қаралаётган функцияни қуйидагича

$$f(z)=\frac{z}{z^2-3z+2}=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1} \qquad (14)$$

ёзиб оламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги $\frac{2}{z-2}$ функция $\{|z|<2\}$ доирада голоморф.

Равшанки,

$$\frac{2}{z-2}=\frac{2}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)}=-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

бўлиб,

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z}{2}\right)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot z^n$$

бўлади. Демак,

$$\frac{2}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot z^n$$

бўлиб, бу қатор $\{|z|<2\}$ да яқинлашувчи бўлади.

Энди (14) тенгликнинг ўнг томонидаги $-\frac{1}{z-1}$ функцияни олиб, уни қуйидагича

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

ёзиб оламиз. Равшанки, бу функция $\{|z|>1\}$ да голоморф бўлиб, у яқинлашувчи

$$-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)$$

қаторга ёйилади. Демак,

$$\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

бўлиб, у $\{|z|>1\}$ да яқинлашувчи бўлади.

Натижада $K=\{1<|z|<2\}$ соҳа (ҳалқа) да (14) тенгликка кўра

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n,$$

яъни

$$f(z)=-\left(\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n\right)$$

бўлади. Демак,

$$\frac{z}{z^2-3z+2}=-\left(\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n\right).$$

3°. Лоран қатори коэффициентлари учун Коши тенгсизликлари. Фараз қилайлик, f(z) функция

$$K=\{z\in C_z: r<|z-a|<R\}$$

соҳада (ҳалқада) голоморф бўлиб,

$$\max_{z\in\gamma_\rho}|f(z)|=M,\quad \gamma_\rho=\{|z-a|=\rho\},\quad r<\rho<R$$

бўлсин. У ҳолда f(z) функциянинг K ҳалқадаги Лоран қатори

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

коэффициентлари учун ушбу

$$|c_n|\le\frac{M}{\rho^n}\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\dots)\qquad (15)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, Лоран қатори коэффициентлари учун

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-a|=\rho}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt$$

бўлишини эътиборга олиб,

$$|c_n|=\left|\frac{1}{2pi}\int_{|t-a|=r}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt\right|\le\frac{1}{2p}\int_{|t-a|=r}\frac{|f(t)|}{|t-a|^{n+1}}|dt|\le$$

$$\le\frac{M}{2pr^{n+1}}\int_{|t-a|=r}|dt|=\frac{M}{2pr^{n+1}}\cdot 2pr=\frac{M}{r^n}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Бу тенгсизликлар Коши тенгсизликлари дейилади.

2-§. Махсус нуқталар ва уларнинг турлари

1°. Махсус нуқталар. Биз аввалги бобларда голоморф функциялар ва уларни хоссаларини ўргандик. Агар $a \in C$ нуқтада f(z) функциянинг голоморф бўлиши шарти бажарилмаса, у ҳолда функцияни шу нуқта атрофида ўрганилади.

Одатда, бундай нуқта f(z) функциянинг махсус нуқтаси деб қаралади.

2-таъриф. Агар f(z) функция ушбу

$$\{z \in C: \ 0 < |z - a| < r\}$$

соҳада (а нуқтанинг ўйилган атрофида) голоморф бўлса, у ҳолда а нуқта f(z) функциянинг яккаланган махсус нуқтаси дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{1}{z + i}$$

функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция

$$\{z \in C: \ 0 < |z + i| < r\}$$

соҳада (ҳалқада) голоморф. Бинобарин, $a = -i$ нуқта берилган функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлади.

3-таъриф. Агар f(z) функция ушбу

$$\{z \in C: \ R < |z| < +\infty\}$$

соҳада голоморф бўлса, у ҳолда $a = \infty$ нуқта f(z) функциянинг яккаланган махсус нуқтаси дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(z) = e^z$$

функцияни қарайлик. Бу функция

$$\{z \in C: \ R < |z| < +\infty\}$$

соҳада голоморф. Демак, $a = +\infty$ нуқта берилган $f(z) = e^z$ функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлади.

Функциянинг яккаланмаган махсус нуқталари ҳам бўлади. Масалан, ушбу

$$f(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}} \qquad (16)$$

функцияни қарайлик. Равшанки,

$$a=0 \text{ ҳамда } a_n=\frac{1}{n} \qquad (n=\pm1,\pm2,\dots)$$

нуқталар (16) функциянинг махсус нуқталари бўлади. Бунда $a=0$ махсус нуқта берилган функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлмайди.

Дарҳақиқат,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

бўлганлиги сабабли, $a=0$ нуқтанинг ҳар қандай ўйилган атрофи

$$U_\delta(a)=\left\{0<|z|<\delta\right\}$$

да функциянинг махсус нуқталари бўлади. Демак, $a=0$ берилган функциянинг яккаланмаган махсус нуқтаси экан.

Биз қуйида яккаланган махсус нуқталарни ўрганамиз.

2°. Яккаланган махсус нуқталарнинг турлари. Айтайлик a нуқта $f(z)$ функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлсин. Унда $f(z)$ функция

$$\left\{z\in\mathbb{C}:\ \ 0<|z-a|<r\right\}$$

соҳада (a нуқтанинг ўйилган атрофида) голоморф.

$f(z)$ функциянинг $z\to a$ даги лимитининг характерига қараб яккаланган махсус нуқталар турларга ажралади.

4-таъриф. Агар $z\to a$ да $f(z)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб,

$$\lim_{z\to a} f(z)=A \qquad (A\text{-чекли})$$

бўлса, у ҳолда a нуқта $f(z)$ функциянинг бартараф қилининадиган (четлатилиши мумкин бўлган) махсус нуқтаси дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}$$

функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция $\mathbb{C}\setminus\{z=0\}$ да голоморф бўлиб, $a=0$ нуқта унинг яккаланган махсус нуқтаси бўлади. Айни пайтда

$$\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to0}\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)=\lim_{z\to0}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots\right)=1$$

бўлади.

Демак, a нуқта берилган функциянинг бартараф қилинадиган махсус нуқтаси бўлади.

5-таъриф. Агар $z \to a$ да $f(z)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб,

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$$

бўлса, у ҳолда a нуқта $f(z)$ функциянинг қутб махсус нуқтаси дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{z}{z+1}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $C\setminus\{z=-1\}$ да голоморф бўлиб, $a=-1$ нуқта унинг яккаланган махсус нуқтаси бўлади. Бу функция учун

$$\lim_{z\to -1} \frac{z}{z+1} = \infty$$

бўлганлиги сабабли $a=-1$ берилган функциянинг қутб нуқтаси бўлади.

6-таъриф. Агар $z \to a$ да $f(z)$ функциянинг лимити мавжуд бўлмаса, у ҳолда a нуқта $f(z)$ функциянинг ўта (муҳим) махсус нуқтаси дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $C\setminus\{z=0\}$ да голоморф бўлиб, $z=0$ нуқта унинг яккаланган махсус нуқтаси бўлади.

Қаралаётган функциянинг $z \to 0$ да лимити мавжуд эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар $z = x$ бўлиб 0 га интилса, унда

$$\lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty, \qquad \lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

бўлади, ва демак, $z = x \to 0$ да лимити мавжуд эмас.

Агар $z = iy$ бўлиб 0 га интилса, унда

$$e^{\frac{1}{z}} = \cos\frac{1}{y} - i\sin\frac{1}{y}$$

бўлишини эътиборга олиб, $z = iy \to 0$ да $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ функциянинг лимити мавжуд эмаслигини топамиз. Демак, $z=0$ нуқта берилган функциянинг ўта махсус нуқтаси бўлади.

3°. Махсус нуқталар билан Лоран қаторлари орасидаги боғланишлар.

Фараз қилайлик, f(z) функция

$$K = \{z \in C_z : 0 < |z - a| < r\}$$

соҳада (а нуқтанинг ўйилган атрофида) голоморф бўлиб, а нуқта шу функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлсин. Унда 1-теоремага кўра f(z) функция К да Лоран қатори

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (17)$$

га ёйилади. Қаралаётган функциянинг Лоран қатори (17) га нисбатан қуйидаги учта ҳолни қараймиз:

а) (17) қаторда $z-a$ айирманинг манфий даражали ҳадлари қатнашмаган ҳол;

б) (17) қаторда $z-a$ айирманинг манфий даражали ҳадларидан чекли сондагиси қатнашган ҳол;

в) (17) қаторда $z-a$ айирманинг чексиз кўп манфий даражали ҳадлари қатнашган ҳол. Мана шу ҳолларга қараб f(z) функциянинг яккаланган махсус нуқталарининг турларини аниқлаш мумкин бўлади.

Бартараф этиладиган махсус нуқта

3-теорема. f(z) функциянинг яккаланган махсус $a \in C$ нуқтаси унинг бартараф этиладиган махсус нуқтаси бўлиши учун функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси (17) да $z-a$ айирманинг манфий даражали ҳадлари қатнашмаслиги зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. а нуқта f(z) функциянинг бартараф этиладиган махсус нуқтаси бўлсин. Унда $z \to 0$ да f(z) функциянинг чекли лимити мавжуд бўлади:

$$\lim_{z \to a} f(z) = A \qquad (A\text{-чекли}).$$

Чекли лимитга эга бўлган функциянинг хоссасига биноан а нуқтанинг ўйилган

$$\{z \in C: \ 0 < |z-a| < R\}$$

атрофида f(z) функция чегараланган бўлади, яъни шундай ўзгармас $M > 0$ топиладики,

$$|f(z)| \le M$$

тенгсизлик бажарилади. Ушбу

$$0 < \rho < R$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий ρ сонини олайлик. Унда Коши тенгсизликларига кўра f(z) функциянинг Лоран қатори коэффициентлари учун

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \qquad (18)$$

бўлади.

Агар $n=-1,-2,-3,\ldots$ бўлиб, $\rho\to0$ да $0<\rho<R$

$$\lim_{\rho\to0}\frac{M}{\rho^n}=0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (18) муносабатдан

$$c_{-1}=c_{-2}=\ldots=c_{-n}=\ldots=0$$

бўлишини топамиз. Бу эса (17) Лоран қаторида $z-a$ айирманинг манфий даражали ҳадлари бўлмаслигини билдиради. Бошқача айтганда бу ҳолда (17) Лоран қаторининг бош қисми айнан нолга тенг бўлади.

Етарлилиги. Айтайлик, f(z) функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси (17) да $z-a$ айирманинг манфий даражада қатнашган ҳадлари бўлмасин, яъни Лоран қаторининг бош қисми айнан нолга тенг бўлсин. Бу ҳолда f(z) функциянинг Лоран қатори ушбу

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots \qquad (19)$$

кўринишга эга бўлади. Демак, a нуқта f(z) функциянинг бартараф этиладиган махсус нуқтаси. Теорема исбот бўлди.

4-теорема. f(z) функциянинг яккаланган махсус $a\in C$ нуқтаси унинг бартараф этиладиган махсус нуқтаси бўлиши учун a нуқтанинг бирор ўйилган атрофи $\{z\in C:\ 0<|z-a|<R\}$ да f(z) функциянинг чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган 3-теореманинг исботи кабидир.

Фараз қилайлик, a нуқта f(z) функциянинг бартараф этиладиган махсус нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда $z\to0$ да f(z) функция чекли лимитга эга бўлади. Агар

$$\lim_{z\to a}f(z)=f(a)$$

деб олинса, функциянинг a нуқтадаги махсуслиги бартараф этилади. Махсус нуқтанинг бартараф этиладиган деб номланишининг боиси ҳам шундадир.

Қутб нуқта

5-теорема. f(z) функциянинг яккаланган махсус $a \in C$ нуқтаси унинг қутб нуқтаси бўлиши учун функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси (17) да $z-a$ айирманинг манфий даражали ҳадларидан чекли сондагисининг бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. а нуқта f(z) функциянинг қутб нуқтаси бўлсин. Унда $z \to 0$ да f(z) функциянинг лимити мавжуд бўлиб,

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

бўлади.

Бу ҳолда а нуқтанинг ўйилган $U = \{0 < |z-a| < r\}$ атрофи топиладики, бу атрофда f(z) голоморф функция бўлиб,

$$f(z) \neq 0 \qquad (z \in U)$$

бўлади. U да ушбу

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

функцияни қарайлик. Равшанки бу функция U да голоморф бўлади.

Иккинчи томондан

$$\lim_{z \to a} \varphi(z) = 0$$

бўлади. Демак, $z=a$ нуқтада $\varphi(z)$ функциянинг бартараф этиладиган махсус нуқтаси экан.

Агар

$$\lim_{z \to a} \varphi(z) = 0 = \varphi(a)$$

дейилса, унда $\varphi(z)$ функция $\{z \in C: |z-a| < r\}$ доирада голоморф бўлиб қолади.

$z=a$ нуқта $\varphi(z)$ функциянинг ноли бўлгани учун уни

$$\varphi(z) = (z-a)^n \cdot \psi(z)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $\psi(z)$ а нуқтада голоморф функция бўлиб, $\psi(z) \neq 0$ бўлади.

Шундай қилиб, қаралаётган U атрофда

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{\psi(z)} \qquad (19)$$

бўлишини топамиз.

Энди $\frac{1}{\psi(z)}$ функцияни а нуқта атрофи $\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|<r\}$ да Тейлор қаторига ёйамиз:

$$\frac{1}{\psi(z)}=c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+\ldots+c_0(z-a)^n+\ldots\quad,\qquad(20)$$

бунда

$$c_{-n}=\frac{1}{\psi(a)}\neq 0.$$

(19) ва (20) муносабатлардан

$$f(z)=c_{-n}(z-a)^{-n}+c_{-n+1}(z-a)^{-n+1}+\ldots+c_{-1}(z-a)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, а нуқта f(z) функциянинг қутб нуқтаси бўлганда, унинг Лоран қатори бош қисми ҳадларининг сони чекли бўлар экан.

Етарлилиги. Айтайлик, а нуқтанинг бирор ўйилган атрофи $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z-a|<r\}$ да f(z) функциянинг Лоран қатори-даги z-a айирманинг манфий даражали ҳадларининг сони чекли бўлсин:

$$f(z)=c_{-n}(z-a)^{-n}+c_{-n+1}(z-a)^{-n+1}+\ldots+c_{-1}(z-a)^{-1}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\qquad(c_{-n}\neq 0)\qquad(21)$$

Равшанки, f(z) ва $(z-a)^n\cdot f(z)=\psi(z)$ функциялар $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z-a|<r\}$ да голоморф бўлади.

Юқоридаги (21) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\psi(z)=(z-a)^n\cdot f(z)=c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+c_{-n+2}(z-a)^2+\ldots$$

Бундан эса

$$\lim_{z\to a}\Psi(z)=c_{-n}\neq 0$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада

$$\lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}\frac{\Psi(z)}{(z-a)^n}=\infty$$

бўлишини топамиз. Бу эса а нуқта f(z) функциянинг қутб нуқтаси эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

6-теорема. f(z) функциянинг яккаланган махсус $a \in \mathbb{C}$ нуқтаси унинг қутб нуқтаси бўлиши учун

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)} \quad (\varphi(z)\neq 0)$$

функция a нуқта атрофида голоморф бўлиб, $\varphi(a)=0$ бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Айтайлик a нуқта f(z) функциянинг қутб нуқтаси бўлсин. Унда

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$$

функция a нуқта атрофида голоморф бўлиб, $\varphi(a)=0$ бўлиши юқорида келтирилган теореманинг исботлаш жараёнида кўрсатилган эди.

Етарлилиги. Фараз қилайлик,

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$$

a нуқтанинг атрофида голоморф бўлиб, $\varphi(a)=0$ бўлсин. Модомики, $\varphi(z)\neq 0$ экан, унда ягоналик теоремасига биноан a нуқтанинг шундай ўйилган атрофи

$$\{z\in \mathbb{C}\colon\ 0<|z-a|<r\}$$

топиладики, бу атрофда $\varphi(z)\neq 0$ бўлади. Демак, шу атрофда

$$f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$$

функция голоморф, a нуқта эса унинг яккаланган махсус нуқтаси бўлади. Айни пайтда

$$\lim_{z\to a} f(z)=\lim_{z\to a}\frac{1}{\varphi(z)}=\infty$$

бўлади. Бу эса a нуқта f(z) функциянинг қутб нуқтаси эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема функциянинг қутб нуқталари билан унинг ноллари орасидаги боғланишни ифодалайди.

Биз 6-боб 9^0-да функция нолларининг тартиби тушунчаси билан танишган эдик. Ундан фойдаланиб ушбу таърифни келтирамиз.

7-таъриф. Ушбу

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$$

функциянинг a нуқтадаги нолининг тартиби f(z) функциянинг a нуқтадаги қутб нуқтаси тартиби дейилади.

Масалан, ушбу

$$\varphi(z)=\frac{(z-2)^3}{z}$$

функцияни қарайлик. Равшанки, $z=2$ нуқта бу функциянинг 3-тартибли ноли. $z=2$ нуқта

$$f(z)=\frac{z}{(z-2)^3}$$

функциянинг 3-тартибли қутб нуқтаси бўлади.

Юқорида келтирилган 6-теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. f(z) функциянинг а қутб нуқтасининг тартиби

$$f(z)=c_{-m}(z-a)^{-m}+c_{-m+1}(z-a)^{-m+1}+\ldots+c_{-1}(z-a)^{-1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

ёйилмадаги m сонга тенг бўлади.

Ўта (муҳим) махсус нуқта

7-теорема. f(z) функциянинг яккаланган махсус $a\in C$ нуқтаси унинг ўта (муҳим) махсус нуқтаси бўлиши учун функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси (17) да z-a айирманинг манфий даражали ҳадларидан чексиз кўп сондагисининг бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи 5- ва 6- теоремалардан келиб чиқади.

Функциянинг ўта махсус нуқта атрофидаги характерини қуйидаги теорема ифодалайди.

8-теорема(Ю. В. Сохоцкий теоремаси). Агар $a\in C$ нуқта f(z) функциянинг ўта махсус нуқтаси бўлса, у ҳолда ҳар қандай А сони $(A\in\overline{C})$ олинганда ҳам, а га яқинлашувчи шундай $\{z_n\}$ кетма-кетлик $(z_n\to a)$ топиладики,

$$\lim_{z\to\infty}f(z_n)=A$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик, $A=\infty$ бўлсин. Бу ҳолда а га яқинлашувчи ҳар қандай $\{z_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам $(z_n\to a)$

$$\lim_{z\to\infty}f(z_n)=\infty$$

бўлишини кўрсатиш керак.

Шартга кўра а нуқта f(z) функциянинг ўта махсус нуқтаси. Унда 4-теоремага кўра а нуқтанинг шундай ўйилган атрофи

$$U_{r_1}(a)=\{z\in C:\ 0<|z-a|<r_1\}$$

топиладики, бу атрофда f(z) функция чегараланмаган бўлади:

$$|f(z)|>M \qquad (z\in U_{r_1}(a))$$

Хусусан, $z_1\in U_{r_1}(a)$ учун

$$|f(z_1)|>1$$

бўлади.

Энди а нуқтанинг ушбу

$$U_{r_2}(a)=\left\{z\in C:\ 0<|z-a|<\frac{|z_1-a|}{2}\right\}$$

атрофини оламиз. Равшанки, $U_{r_2}(a)\subset U_{r_1}(a)$ бўлади.

Қаралаётган f(z) функция бу атрофда ҳам чегараланмаганлиги учун, шундай $z_2\in U_{r_2}(a)$ нуқта топиладики,

$$|f(z_2)|>2$$

бўлади.

Бу жараённи давом эттира бориб, n та қадамдан кейин, а нуқтанинг

$$U_{r_n}(a)=\left\{z\in C:\ 0<|z-a|<\frac{|z_1-a|}{2^{n-1}}\right\}$$

атрофига келамизки, $z_n\in U_{r_n}(a)$ учун

$$|f(z_n)|>n \qquad (22)$$

бўлади.

Шу мулохазани давом эттираверишнатижасида $\{z_n\}$ кетма-кетлик ҳосил бўлиб, $n\to\infty$ да $z_n\to a$ бўлади. Унда (22) муносабатдан

$$\lim_{z\to\infty} f(z_n)=\infty$$

бўлиши келиб чиқади.

Айтайлик, $A\neq\infty$ бўлсин. Агар а нуқтанинг ихтиёрий кичик

$$U_\delta(a)=\{z\in C:\ 0<|z-a|<\delta\}$$

атрофида z нуқта топилсаки, $f(z)=A$ бўлса, у ҳолда бундай z нуқталардан тузилган $\{z_n\}$ кетма-кетлик учун $z_n\to a$ бўлиб,

$$\lim_{z\to\infty} f(z_n)=A$$

бўлади.

Агар a нуқтанинг ихтиёрий кичик $U_\delta(a)$ атрофида $f(z)=A$ бўладиган нуқталар бўлмаса, у ҳолда, равшанки, бу атрофда

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$$

функция голоморф бўлади.

Модомики, $z=a$ нуқта $\varphi(z)$ функциянинг ўта махсус нуқтаси экан, унда юқорида исбот этилганига кўра, a нуқтага яқинлашувчи шундай $\{z_n\}$ кетма-кетлик топиладики,

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z_n)=\infty$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}\left(A+\frac{1}{\varphi(z)}\right)=A$$

Сохоцкий теоремаси исбот бўлди.

8-БОБ

ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. Чегирмалар ва уларни ҳисоблаш

1^0. Чегирма тушунчаси. Фараз қилайлик, f(z) функция

$$K=\{z\in C:\ \ 0<|z-a|<R\}$$

соҳада голоморф бўлиб, а нуқта бу функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлсин.

7-бобнинг 1- § да келтирилган 1- теоремага кўра f(z) функция K да ушбу Лоран қаторига ёйилади:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+ \qquad (1)$$
$$+c_{-1}(z-a)^{-1}+c_{-2}(z-a)^{-2}+...+c_{-n}(z-a)^{-n}+...$$

Равшанки, бу қатор K соҳада текис яқинлашувчи, жумладан K соҳага тегишли бўлган

$$\gamma_\rho=\{z\in C:\ \ |z-a|=\rho;\ \ 0<\rho<R\}$$

айланада ҳам текис яқинлашувчи бўлади. Бинобарин, (1) қаторни γ_ρ айлана бўйича ҳадлаб интеграллаш мумкин:

$$\int_{\gamma_\rho}f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_{\gamma_\rho}(z-a)^n dz+c_{-1}\int_{\gamma_\rho}(z-a)^{-1}dz+$$
$$+c_{-2}\int_{\gamma_\rho}(z-a)^{-2}dz+...+c_{-n}\int_{\gamma_\rho}(z-a)^{-n}dz+... \ .$$

Бу ерда γ_ρ да мусбат йўналиш олинган.

Маълумки,

$$\int_{\gamma_\rho}(z-a)^m dz=\begin{cases}0, & m\neq-1,\\ 2\pi i, & m=-1\end{cases}$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб

$$\int_{\gamma_\rho}f(z)dz=c_{-1}\cdot2\pi i\ \ ,$$

яъни

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} f(z)dz = c_{-1}$$

бўлишини топамиз.

1-таъриф. Ушбу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} f(z)dz$$

миқдор, яъни f(z) функциянинг Лоран қаторига ёйилмасидаги c_1 коэффициент f(z) функциянинг яккаланган махсус а нуқтасидаги чегирмаси дейилади ва $\operatorname{res}\limits_{z=a} f(x)$ каби белгиланади:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_p} f(z)dz \qquad (2)$$

(res - французча Residn сўзининг қисқача ёзилиши бўлиб, у «чегирма»деган маънони англатади).

Бу таъриф ва 7-боб, 2-§ да келтирилган 3-теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Агар $z = a$ нуқта f(z) функциянинг бартараф этиладиган махсус нуқтаси бўлса, функциянинг шу нуқтадаги чегирмаси нолга тенг бўлади:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0$$

Мисол. Ушбу

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $z = 0$ нуқтанинг ўйилган атрофи $\{z \in \mathbf{C}:\ 0 < |z| < R\}$ да голоморф ва унинг учун $z = 0$ нуқта яккаланган махсус нуқта бўлади. Берилган функциянинг $\{z \in \mathbf{C}:\ 0 < |z| < R\}$ даги Лоран қатори

$$\frac{\sin z}{z} = 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \ldots$$

бўлади. Равшанки, бу ҳолда $c_{-1} = 0$ бўлади. Демак, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ функциянинг $z = 0$ нуқтадаги чегирмаси

$$\operatorname{res}_{x=0} f(z) = \operatorname{res}_{x=0}\frac{\sin z}{z} = 0$$

бўлади.

Энди функциянинг ∞ даги чегирмаси тушунчасини келтирамиз.

Айтайлик, f(z) функция $\{z\in C:\ R_0<|z|<\infty\}$ соҳада голоморф ва $a=\infty$ нуқта унинг учун яккаланган махсус нуқта бўлсин.

2-таъриф. Ушбу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\bar{R}}} f(z)dz$$

миқдор, яъни f(z) функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси (1) даги c_{-1} коэффициентни манфий ишора билан олинган қиймати f(z) функциянинг яккаланган махсус $a=\infty$ нуқтадаги чегирмаси дейилади ва $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$ каби белгиланади:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\bar{R}}} f(z)dz$$

Юқоридагидек, f(z) функциянинг $\{z\in C:\ R_0<|z|<\infty\}$ даги Лоран қатори

$$f(z)=c_0+c_{-1}z^{-1}+c_{-2}z^{-2}+\ldots+c_{-n}z^{-n}+\ldots+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

ни

$$\gamma_R=\{z\in C:\ |z|=R_0,\ \ R_0<R\}$$

айлана бўйича ҳадлаб интеграллаб

$$\int_{\gamma_{\bar{R}}} f(z)dz=2\pi i\cdot(-c_{-1}),$$

яъни

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\bar{R}}} f(z)dz=-c_{-1}$$

бўлишини топамиз.

а) Фараз қилайлик, а нуқта f(z) функциянинг оддий (бир каррали) қутб нуқтаси бўлсин.

Маълумки, бу ҳолда f(z) функциянинг а нуқта атрофидаги Лоран қатори ушбу

$$f(z)=c_{-1}(z-a)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

кўринишга эга бўлади. Кейинги муносабатдан

$$c_{-1}=(z-a)f(z)-(z-a)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликда $z\to a$ да лимитга ўтиб

$$c_{-1} = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]$$

бўлишини топамиз.

Демак, f(z) функциянинг a нуқтадаги чегирмаси

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right] \qquad (3)$$

бўлади.

Хусусан, $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ бўлиб, $\varphi(z)$ ва $\psi(z)$ функциялар a нуқтада голоморф, $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$ бўлса, a нуқта f(z) функциянинг қутб нуқтаси бўлганда

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)} =$$

$$= \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

бўлади. Демак,

$$\operatorname*{res}_{z=a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \qquad (4)$$

б) Фараз қилайлик, a нуқта f(z) функциянинг m каррали қутб нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда f(z) функциянинг a нуқта атрофидаги Лоран қатори ушбу

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \qquad (5)$$

$$+c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

кўринишга эга бўлади.

(5) тенгликнинг ҳар икки томонини $(z-a)^m$ га кўпайтириб қуйидаги

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} +$$

$$+c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + \ldots + c_n(z-a)^{n+m} + \ldots$$

тенгликка келамиз.

m-1 марта дифференциаллаш натижасида

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] = (m-1)!c_{-1} + \frac{m!}{1!}c_0(z-a) +$$

$$+\frac{(m+1)!}{2!}c_1(z-a)^2 + \ldots$$

бўлади.

Кейинги тенгликда $z \to a$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]=(m-1)!c_{-1}.$$

Бундан эса

$$c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, бу ҳолда f(z) функциянинг $z=a$ нуқтадаги чегирмаси

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \qquad (6)$$

бўлади.

Хусусан, $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$ бўлиб, $\varphi(z)$ a нуқтада голоморф ва $\varphi(a)\neq 0$ бўлса, унда (6) муносабатдан

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\operatorname*{res}_{z=a}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}=\frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(a) \qquad (7)$$

бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$f(z)=\frac{z^2}{z+2}$$

функцияни қарайлик. Равшанки, $z=-2$ нуқта бу функциянинг оддий қутб нуқтаси бўлади. (3) формуладан фойдаланиб, берил-ган функциянинг $z=-2$ қутб нуқтасидаги чегирмасини топамиз:

$$\operatorname*{res}_{z=-2}\frac{z^2}{z+2}=\lim_{z\to-2}\left[(z+2)\frac{z^2}{z+2}\right]=\lim_{z\to-2}z^2=4.$$

Эслатма. Муҳим махсус нуқталарда чегирма ҳисоблаш учун функцияни Лоран қаторига ёйиб c_{-1} коэффициентни топиш керак. Бу ҳолда умумий формула йўқ.

3^0. Чегирмалар ҳақида теоремалар.

Энди чегирмалар ҳақидаги теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. Фараз қилайлик, f(z) функция бир боғламли D соҳада берилган бўлиб, шу соҳага тегишли чекли сондаги махсус $z_1, z_2, \dots, z_n$ нуқталардан бошқа барча нуқталарда голоморф бўлсин. Бу яккаланган махсус $z_1, z_2, \dots, z_n$ нуқталар D соҳада ётувчи силлиқ ёпиқ γ чизиқ ичида жойлашсин. У ҳолда

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

бўлади. Бунда γ ёпиқ чизиқ мусбат йўналишда олинган.

Исбот. Марказлари z_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ нуқталарда, етарлича кичик радиусли γ_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ айланаларни оламизки, бу айланалар γ ёпиқ чизиқ ичида ётсин ва $\gamma_k \cap \gamma_i = \varnothing$ $(k \neq i, i = 1,2,\ldots,n)$ бўлсин. У ҳолда Кошининг кўп боғламли соҳалар ҳақидаги теоремасига кўра

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz \qquad (8)$$

бўлади, бунда γ_k айланаларда соат стрелкаси йўналишига қарши йўналиш олинган.

Агар

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{rez}_{z=z_k} f(z)$$

эканлигини эътиборга олсак, унда (8) тенгликдан

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса теоремани исботлайди.

Бу теоремадан функцияларнинг интегралларини ҳисоблашда фойдаланилади.

2-теорема. Фараз қилайлик, f(z) функция кенгайтирилган комплекс текисликнинг чекли сондаги махсус $z_1, z_2, \ldots, z_n$ нуқталаридан бошқа барча нуқталарда голоморф бўлсин. У ҳолда бу функциянинг $z_1, z_2, \ldots, z_n$ нуқталардаги ҳамда $z = \infty$ нуқтадаги чегирмалари йиғиндиси нолга тенг бўлади:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0 \qquad (9)$$

Исбот. Текисликда R радиусли шундай

$$\gamma_R = \{z \in C : \ |z| = R\}$$

айланани оламизки, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ яккаланган махсус нуқталар шу айлана ичида жойлашсин. Бу айланада йўналишни мусбат қилиб оламиз.

Юқорида исбот этилган 1-теоремага кўра

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\text{res}}\, f(z) \qquad (10)$$

Иккинчи томондан (9) муносабатга кўра

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = -2\pi i\, \underset{z=\infty}{\text{res}} f(z) \qquad (11)$$

бўлади.

(10) тенгликдан (11) тенгликни ҳадлаб айириб, топамиз:

$$0 = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\text{res}}\, f(z) + 2\pi i\, \underset{z=\infty}{\text{res}} f(z).$$

Демак,

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\text{res}}\, f(z) + \underset{z=\infty}{\text{res}} f(z) = 0.$$

Теорема исбот бўлди.

2-§. Чегирмалар назариясининг баъзи татбиқлари

Ушбу параграфда функциянинг чегирмалари ҳақидаги маълумотлар ва тасдиқлардан фойдаланиб, функцияларнинг ёпиқ эгри чизиқ (ёпиқ котур) бўйича олинган интегралларини ҳамда маълум синф аниқ интегралларни ҳисоблаймиз.

1^0. Функциянинг ёпиқ эгри чизиқ бўйича интегралларини ҳисоблаш. Функция чегирмаси таърифи:

$$\underset{z=a}{\text{res}} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} f(z)dz$$

ёпиқ эгри чизиқ бўйича олинган

$$\int_{|z|=1} f(z)dz$$

интегрални ҳисоблаш имконини беради.

Масалан, ушбу

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$$

интегрални қарайлик. Интеграл остидаги $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ функциянинг $z=0$ нуқтанинг ўйилган атрофи $\{z\in\mathbf{C}:\ 0<|z|<R\}$ даги Лоран қатори

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\dots$$

бўлиб, бунда $c_{-1}=1$ бўлади. Демак,

$$\int\limits_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=0}e^{\frac{1}{z}}=2\pi i$$

бўлади.

Маълумки, чегирмалар ҳақидаги 1-теоремага асосан f(z) функциянинг ёпиқ эгри чизиқ γ бўйича олинган интеграли шу функциянинг γ ичида ётган махсус нуқталардаги чегирмалари орқали ифодаланар эди. Бинобарин, бундай интеграллар чегирмаларни ҳисоблаш билан боғлиқ.

Масалан, ушбу

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^2dz}{(z^2+1)(z+3)}$$

интегрални қарайлик. Интеграл остидаги

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}$$

функция учун $z_1=i,\ z_2=-i,\ z_3=-3$ махсус нуқталар (қутб нуқталар) бўлиб, улардан иккитаси $z_1=i,\ z_2=-i$ лар $\{z\in\mathbf{C}:\ |z|=2\}$ айлана ичида ётади. 2-теоремага биноан

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^2dz}{(z^2+1)(z+3)}=2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=i}f(z)+\operatorname*{res}_{z=-i}f(z)\right]$$

бўлади.

Энди (3) формуладан фойдаланиб, функциянинг $z_1=i,\ z_2=-i$ нуқталардаги чегирмаларини ҳисоблаймиз:

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\operatorname*{res}_{z=i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}=\lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z+1)(z+3)}(z-i)\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z+3)}=\frac{i^2}{2i(i+3)}=\frac{1}{2(1-3i)},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)} = \lim_{z\to -i}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}(z+i)\right] =$$

$$= \lim_{z\to -i} \frac{z^2}{(z+i)(z+3)} = \frac{i^2}{-2i(-i+3)} = \frac{1}{2(1-3i)}.$$

Натижада

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z+3)} = 2\pi i\left(\frac{1}{2(1-3i)} + \frac{1}{2(1+3i)}\right) = \frac{\pi i}{5}$$

бўлишини топамиз.

Яна бир неча мисоллар қараймиз.

Мисол. Ушбу

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги

$$f(z) = \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = \frac{z}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin z\right)}$$

функциянинг $z_1 = \frac{\pi}{4}$, $z_2 = -\frac{\pi}{4}$ махсус нуқталари (қутб нуқталари) $\{z \in C: \ |z| = 1\}$ айлана ичида ётади. Унда

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} + \operatorname*{res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}\right]$$

бўлади.

Энди (4) формуладан фойдаланиб, чегирмаларни ҳисоблаймиз:

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{1}{2} - \sin^2 z\right)'_{z=\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{(-\sin 2z)_{z=\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z} = \frac{\frac{\pi}{4}}{-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\pi}{4}.$$

Демак,

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{\frac{1}{2}-\sin^2 z} = 2\pi i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -\pi^2 i$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz$$

интегрални ҳисобланг. Интеграл остидаги

$$f(z) = \frac{z^3}{z^4-1}$$

функциянинг 4 та махсус z_1, z_2, z_3, z_4 нуқталари (қутб нуқталари) бўлиб, барчаси $\{z \in \mathbf{C}: |z| = 2\}$ айлана ичида жойлашганлиги сабабли 1-теоремага кўра

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{z^3}{z^4-1} \qquad (12)$$

бўлади.

Маълумки, 2-теоремага мувофиқ

$$\sum_{k=1}^{4} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{z^3}{z^4-1} + \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^3}{z^4-1} = 0 \qquad (13)$$

бўлади. Агар

$$f(z) = \frac{z^3}{z^4-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)$$

бўлишидан

$$-c_{-1} = \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^3}{z^4-1} = -1$$

эканлигини эътиборга олсак, унда (13) муносабатдан

$$\sum_{k=1}^{4} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{z^3}{z^4-1} = 1 \qquad (14)$$

бўлиши келиб чиқишини топамиз.

(12) ва (14) муносабатлардан топамиз:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1} dz = 2\pi i .$$

Энди функциянинг чегирмасидан фойдаланиб, айрим кўринишдаги аниқ интегралларни ҳисоблаймиз.

2^0. $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш. Рационал функция $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ нинг $[0, 2\pi]$ оралиқ бўйича аниқ интеграли

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi$$

ушбу

$$z = e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad (15)$$

алмаштириш ёрдамида комплекс ўзгарувчили функциянинг ёпиқ эгри чизиқ бўйича олинган интегралига келади.

Аввало шуни айтиш керакки, (15) алмаштиришда φ ўзгарувчи 0 дан 2π гача ўзгарганда z ўзгарувчи мусбат йўналишда олинган бирлик айлана $\{z \in C: \ |z| = 1\}$ ни ҳосил қилади.

Равшанки,

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$
$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (16)$$

бўлиб,

$$dz = ie^{i\varphi} d\varphi = izd\varphi,$$

яъни

$$d\varphi = \frac{dz}{zi} \qquad (17)$$

бўлади. Натижада

$$R(\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi = R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = \frac{dz}{zi} = R_1(z) dz .$$

бўлиб, қаралаётган аниқ интеграл $R_1(z)$ рационал функциянинг $\{z \in C: \ |z| = 1\}$ айлана бўйича олинган интегралига келади:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi = \int\limits_{|z|=1} R_1(z) dz .$$

Бу тенгликдаги

$$\int\limits_{|z|=1} R_1(z)dz$$

интеграл учун, чегирмалар ҳақидаги теоремага мувоффиқ

$$\int\limits_{|z|=1} R_1(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R_1(z)$$

бўлади. Бу ерда $z_1, z_2, \dots, z_n$ лар $R_1(z)$ функциянинг бирлик айлана ичида жойлашган махсус нуқталари.

Мисол. Ушбу

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + cos\varphi} \qquad (a > 1)$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $z = e^{i\varphi}$ алмаштириш бажариб, (16) ва (17) муносабатлардан фойдаланиб

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + cos\varphi} = \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z_i}dz}{a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \qquad (18)$$

бўлишини топамиз. Интеграл остидаги

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \qquad (a > 1)$$

функциянинг иккита

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} \;, \quad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

махсус нуқталари бўлиб, улардан $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ бирлик айлана $\{z \in \mathbf{C} : \; |z| = 1\}$ нинг ичида жойлашгандир. Демак,

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \qquad (19)$$

бўлади.

Энди (3) формуладан фойдаланиб, чегирмани ҳисоблаймиз:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \lim_{z \to -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})}{z^2 + 2az + 1} =$$

$$= \lim_{z \to -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})}{\left[z - (-a - \sqrt{a^2 - 1})\right]\left[z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})\right]} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} \qquad (20)$$

(18), (19) ва (20) тенгликлардан

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos\varphi} = \frac{2}{i} 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (a > 1)$$

бўлишини топамиз.

Мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos\varphi}{2 - \sin\varphi} d\varphi$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $z = e^{i\varphi}$ алмаштириш бажариб, (16) ва (17) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos\varphi}{2 - \sin\varphi} d\varphi = \int_{|z|=1} \frac{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{2 - \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{zi} = -\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} dz \qquad (21)$$

Интеграл остидаги

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)}$$

функциянинг 3 та

$$z_1 = 0 \ , \quad z_2 = 2i + i\sqrt{3} \ , \quad z_3 = 2i - i\sqrt{3}$$

махсус нуқталари бўлиб, улардан

$$z_1 = 0 \ , \quad z_3 = (2 - \sqrt{3})i$$

лар $\{z \in C : \ |z| = 1\}$ айлананинг ичида жойлашган.

Демак,

$$\int_{|x|=1} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz + 1)} dz =$$
$$= 2\pi i \left[\underset{z=0}{\text{res}} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} + \underset{z=(2-\sqrt{3}i)}{\text{res}} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} \right] \qquad (22)$$

Энди (3) формуладан фойдаланиб, чегирмаларни ҳисоблаймиз:

$$\underset{z=0}{\text{res}} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} = \lim_{z \to 0} \left[z \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} \right] = -1 ,$$

$$\operatorname*{res}_{z=(2-\sqrt{3})i}\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}=$$

$$=\lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}\left\{\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}\left[z-(2-\sqrt{3})i\right]\right\}= \qquad (23)$$

$$=\lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}\frac{z^2+4z+1}{z(z-(2i+i\sqrt{3}))}=1+\frac{2i}{\sqrt{3}}$$

(21), (22) ва (23) тенгликлардан

$$\int_0^{2\pi}\frac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi}\,d\varphi=-2\pi i\left[-1+\left(1+\frac{2i}{\sqrt{3}}\right)\right]=\frac{4\pi}{3}$$

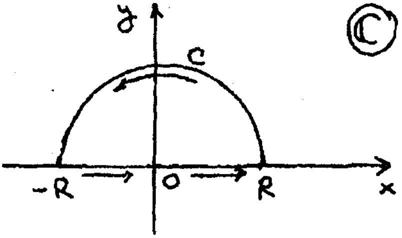
бўлиши келиб чиқади.

3^0. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш. Айтайлик, x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлган R(x)

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

бўлиб, бунда P(x) ва Q(x) лар мос равишда n ва m даражали кўпҳадлар, ва $m-n\geq 2$ бўлсин. R(x) функция ҳақиқий ўқда қутб нуқтага эга бўлмасин.

Маркази координаталар бошида радиуси R бўлган айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми C ҳамда ҳақиқий ўқнинг [-R,R] кесмасидан ташкил топган γ_R ёпиқ эгри чизиқни оламиз (46-чизма).



46-чизма

Равшанки,

$$\gamma_R = [-R,R] \cup C$$

Сўнг

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

рационал функцияни қараймиз.

Энди R радиусни шундай катта қилиб оламизки, R(z) функциянинг барча юқори ярим текисликдаги махсус нуқталари шу γ_R ёпиқ эгри чизиқ ичида жойлашсин.

Чегирмалар ҳақидаги теоремага кўра

$$\int_{\gamma_R} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z) \qquad (24)$$

бўлади. Бу ерда $z_1, z_2, \ldots, z_p$ лар R(z) функциянинг γ_R ёпиқ эгри чизиқ ичидаги махсус нуқталари (қутб нуқталари).

Равшанки,

$$\int_{\gamma_R} R(z)dz = \int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C} R(z)dz \qquad (25)$$

бўлади. (24) ва (25) муносабатлардан

$$\int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z) \qquad (26)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдаги

$$\int_{C} R(z)dz$$

интегрални баҳолаймиз.

Агар

$$|R(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{a_n z^n}{b_m z^m}\left[\frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m z} + \ldots + \frac{b_1}{b_m z^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m z^m}}\right]\right| =$$

$$= \left|\frac{a_n}{b_m z^{m-n}}\right| \cdot \left|\frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m z} + \ldots + \frac{b_1}{b_m z^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m z^m}}\right|$$

ҳамда $m-n\geq 2$ бўлишини эътиборга олсак, унда R нинг етарлича катта қийматларида

$$|R(z)|<\frac{K}{R^2} \qquad (K=\text{const})$$

бўлишини топамиз. Натижада

$$\left|\int\limits_C R(z)dz\right|<\frac{K}{R^2}\pi R=\frac{K\pi}{R}$$

бўлади. Кейинги муносабатдан

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_C R(z)dz=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқоридаги (26) тенгликда $R\to\infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\operatorname*{res}_{z=z_k}R(z)\,. \qquad (27)$$

Демак, R(z) функция юқорида айтилган шартларни қаноатлантирса, унда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$$

интеграл R(z) функциянинг юқори ярим текисликдаги барча махсус нуқталаридаги чегирмалари йиғиндисини $2\pi i$ га кўпайтирилганига тенг бўлар экан.

(27) тенглик қуйидагича

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k}R(z) \qquad (28)$$

ҳам ёзилади.

Мисол. Ушбу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

интегрални ҳисобланг. Равшанки,

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$$

функция учун $z=i$ нуқта юқори ярим текисликда жойлашган иккинчи тартибли қутб нуқта бўлади. Демак,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)^2}$$

Энди (6) формуладан фойдаланиб, функциянинг чегирмасини ҳисоблаймиз:

$$\underset{z=i}{\mathrm{res}}\frac{1}{(z^2+1)^2}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+i)^2}\right]=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=-\frac{2}{8i^3}=-\frac{1}{4}i\,.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=2\pi i\left(-\frac{1}{4}i\right)=\frac{\pi}{2}.$$

бўлади.

АДАБИЁТЛАР

1. Т. Жўраев, А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов, Ҳ. Мансуров, А.Ворисов. Олий математика асослари. 1-том, Тошкент, «Ўзбекистон», 1995.

2. Т. Азларов, Ҳ. Мансуров, Математик анализ. 2-том, Тошкент, «Ўқитувчи», 1994.

3. А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов, Ҳ. Мансуров, А.Ворисов, Т. Тўйчиев. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами (комплекс анализ). 3-том, Тошкент, «Ўзбекистон» (нашриётда).

4. Ш. Мақсудов, М. Салоҳиддинов, С. Сирожиддинов. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси. Тошкент, «Ўқитувчи», 1996.

5. Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. 1-часть. М.: Наука, 1985.

6. Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982.

7. И. И. Привалов. Введение в теорию функции комплексного переменного. М.: Госиздат физ-мат литературы, 1977.

8. М. А. Евграфов. Аналитические функции. М.: Наука, 1968.

9. А. И. Маркушевич. Краткий курс теории аналитических функции. М.: Физматгиз, 1966.

10. Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И.Г. Абраманович. Сборник задач по теории функции комплексного переменного, М.: Физматгиз, 1960.

11. М.А. Евграфов, К.А. Бежанов, Ю. В. Сидоров, М.В. Федорюк, М. И. Шабунин. Сборник задач по теории аналити-ческих функции, М.: Наука, 1972.

Гулмирза Худайберганов, Азизжон Ворисов,
Ҳожакбар Мансуров

Комплекс анализ
(маърузалар)

Муҳаррир О.Зикиров
Бадиий муҳаррир О.Муинов

Босишга рухсат этилди 22.10.98. Ёзув қоғозига офсет босма усулида босилди. Бичими 84x108$^{1}/_{32}$. Нашриёт ҳисоб табаги 11,2. Шартли босма табақ 10,5. Адади 1000 нусха. Баҳоси шартнома асосида. Буюртма № -64.

"Университет" нашриёти. Тошкент, Талабалар шаҳарчаси, ТошДУнинг маъмурий биноси.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Янгийўлдаги ижара пудратидаги китоб фабрикасида босилди. Янгийўл, Самарканд кўчаси, 44.