ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЎРТА МАХСУС, КАСБ-ҲУНАР ТАЪЛИМИ МАРКАЗИ

ЎРТА МАХСУС, КАСБ-ҲУНАР ТАЪЛИМИНИ
РИВОЖЛАНТИРИШ ИНСТИТУТИ

Ж. Ҳ. Ҳусанов

МАТЕМАТИКА

(Прогрессия ва лимитлар)

*Академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари учун
ўқув қўлланма*

ТОШКЕНТ — «ЎҚИТУВЧИ» — 2002

Олий ва щрта махсус таолим вазирлиги, Щрта махсус касб-ъунар таолими Марказининг илмий-услубий кенгаши томонидан нашрга тавсия этилган.

Т а ы р и з ч и л а р : Техника фанлари номзоди, доцент Р. ЯРЫУЛОВ, педагогика фанлари номзоди, доцент МУСУРМАНОВ О.Л., Щзбекистон Республикасида хизмат кщрсатган халы таолими ходими, Олий тоифали Fыитувчи: Х. НАСИМОВ

Қўлланмада математиканинг муҳим бўлимларидан бўлган прогрессиялар, лимитлар ва сонли кетма-кетликлар мавзулари батафсил ритилган. Мазкур мавзулар математика чуқур ўрганиладиган академик лицейлар, мактаблар дастурларига мослаб ба н этилган. Назарий материални пухта ўзлаштиришга рдам берадиган кўплаб мисол ва масалалар келтирилган.

Қўлланма математика чуқур ўрганиладиган академик лицейлар, умумий ўрта таълим мактаблари, касб-ҳунар коллежлари учун мўлжалланган. Ундан ўқитувчилар, олий ўқув юрти талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

$X\frac{4306020000-144}{353(04)-2002}$ Қат. буюрт. 2002

ISBN — 5–645–03939–4

СЎЗ БОШИ

Мустақилликка эришгач, Ўзбекистон Республикасида халқ таълими тизими чуқур ислоҳ қилиниб, умумжаҳон таълим стандартларига мослаштирилмоқда. Жумладан, академик лицейлар ва касб-ҳунар коллежлари учун Давлат таълим стандартлари ишлаб чиқилиб, янги ўқув дастурлари қабул қилинди.

Таълим тизимини такомиллаштириш борасида амалга оширила тган кўпдан-кўп ишлар қаторида таълим турлари ва босқичлари ўртасида узвийликни, таълим мазмунининг узлуксизлигини таъминлашга, ўқув фанини ҳар томонлама мукаммал ўқитиш, ўқувчиларнинг ўқув малакаларини чуқурлаштириш ва ривожлантиришга хизмат этадиган янги ўқув-методик адаби тлар яратилмоқда.

Тақдим этила тган ушбу китоб математиканинг «Прогрессия, лимитлар ва сонли кетма-кетликлар» деб аталган мавзуларига бағишланган. Бу мавзулар элементар математика билан математик анализнинг бошланиши ва умуман, олий математика ўртасидаги ўзига хос кўприк вазифасини ўтайди. Шу боис мазкур қўлланмада ана шу мавзуларни батафсил ба н қилишга ҳаракат қилинди. Баъзи ўринларда материалнинг ба н қилиниши ўқувчи учун мураккаброқ туюлиши табиий, чунки қўлланма асосан, математика чуқур ўрганиладиган академик лицейлар, умумтаълим мактаблари ва касб-ҳунар коллежларига мўлжаллаб зилган. Айрим мавзуларга одатдагидан кўпроқ эътибор берилиб, улар жуда батафсил ба н қилинишига интилишнинг сабаби ҳам шунда.

Маълумки, мисол ва масалалар ечишни кўп машқ қилиш назарий материални пухта ўзлаштиришнинг омили эканини назарда тутган ҳолда қўлланмада ҳар бир мавзуни ба н этиш билан бир қаторда, дастлаб, етарлича мисоллар ечиб кўрсатилган, сўнгра мустақил ечиш учун параграфлар охирида машқлар, топшириқлар берилган. Қўлланмадаги барча машқлар ва топшириқларнинг жавоблари китоб охирида келтирилган.

Қўлланмани зишда муаллиф ўзининг кўп йиллар давомида олиб борган илмий-методик изланишлари натижаларидан, бир қанча вақт олий ўқув юртининг талабаларига ўқиган маърузаларидан, шунингдек, мавжуд адаби тлардан, хусусан, рус тилидаги китоблардан фойдаланди.

Китоб қўл змаси билан танишиб, ўзларининг қимматли фикрларини билдирган техника фанлари номзоди, доц. Р. Ярқулов, педагогика фанлари номзоди, доц. О. Мусурмоновларга, Х. Насимовга, шунингдек, қўл змани нашрга тай рлашдаги хизматлари учун Б.Деҳқонбоевга муаллиф ўз миннатдорчилигини билдиради.

Муаллиф китоб ҳақидаги барча фикр ва мулоҳазаларни мамнуният билан қабул қилади.

1- §. Арифметик прогрессия

Иккинчи ъадидан бошлаб ъар бир ъади олдинги ъадига Fзгармас бFлган бир хил d сонни ыщшишдан ъосил бщлган $\{a_n\}$, $n \in N$ кетма-кетлик *арифметик прогрессия* дейилади, яони

$$a_{n+1} = a_n + d, \; n \in N.$$

d сон арифметик прогрессиянинг *айирмаси*, a_1 сон арифметик прогрессиянинг *биринчи ҳади*, a_n сон эса арифметик прогрессиянинг *умумий ҳади* дейилади.

Масалан, 1, 6, 11, 16, 21, 26, ... кетма-кетлик иккинчи ъадидан бошлаб ъар бир ъади щзидан олдинги ъадга 5 ни ыщшишдан ъосил бщлгани учун арифметик прогрессиядир. Унинг биринчи ъади 1 га, айирмаси эса 5 га тенг.

Ихти рий $n \geq 2$ да

$$a_{n+1} - a_n = d,$$
$$a_n - a_{n-1} = d$$

га эгамиз. Шундай ыилиб, ($n \geq 2$)да

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$$

ки

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

яони арифметик прогрессиянинг иккинчи ъадидан бошлаб ъар бир ъади щзидан олдин ва кейин келган ъадларнинг *ўрта арифметик қийматига* тенг. Бу фикрнинг тескариси ъам тщьри бщлгани учун ыуйидаги тасдиы щринли: a, b, c сонлардан бири ыолган иккитасининг щрта арифметик ыийматига тенг бщлгандагина ва фаыат шу ъолдагина бу сонлар бирор арифметик прогрессиянинг кетма-кет келадиган ъадлари бщлади.

М и с о л . Умумумий ъади $a_n = 2n - 7$ бщлган $\{a_n\}$ кетма-кетлик арифметик прогрессия эканини исботланг.

И с б о т и . Бунинг учун юыорида берилган тасдиыдан фойдаланамиз. $n \geq 2$ да ыуйидагига эгамиз:

$$a_n=2n-7,\ \ a_{n-1}=2(n-1)-7=2n-9,$$
$$a_{n+1}=2(n+1)-7=2n-5.$$

Демак,

$$a_n=2n-7=\frac{(2n-5)+(2n-9)}{2}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}.$$

Шуни исботлаш талаб этилган эди.

Биринчи ъади a_1 га, айирмаси эса d га тенг бщлган $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг n-ъади ыуйидаги формула билан топилади:

$$a_n=a_1+(n-1)d,\ \ n\in N.$$

Масалан:

а) барча тоы натурал сонлардан тузилган 1, 3, 5, 7, 9, 11, . . . кетма-кетлик биринчи ъади 1 га, айирмаси эса 2 га тенг бщлган арифметик прогрессия бщлгани учун унинг умумий ъади:

$$a_n=1+2(n-1);$$

б) агар $\{a_n\}$ арифметик прогрессияда $a_1=7$ ва $d=3$ бҒлса, у ъолда:

$$a_n=7+3(n-1)=3n+4;$$

в) агар $\{a_n\}$ арифметик прогрессияда $a_1=10$ ва $d=-0{,}5$ бҒлса, у ъолда:

$$a_n=10-0{,}5(n-1)=-0{,}5n+10{,}5$$

бҒлади.

Айирмаси d га тенг бщлган $\{a_n\}$ арифметик прогрессия учун ушбу

$$a_n=a_k+d(n-k)$$

формула щринли, бунда n ва k — натурал сонлар.

Шундай ыилиб, $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг n-ъади кетма-кетликнинг исталган a_k ъади ва шу прогрессиянинг d айирмаси орыали топилиши мумкин экан. Ушбу

$$1\le k\le n-1 \text{ да } a_n=a_k+d(n-1)$$

формуладан

$$a_n=a_{n-k}+kd,\ \ 1\le k\le -1;$$
$$a_n=a_{n+k}-kd$$

экани келиб чиыади. Бундан:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, 1 \le k \le -1,$$

яони прогрессиянинг иккинчи ъадидан бошлаб исталган ъади шу ъаддан тенг узоыликдаги ъадлари йиьиндисининг ярмига тенг.

Бундан ташыари, агар $m + n = k + i$ (бу ерда m, n, k, i лар натурал сонлар) бщлса, $\{a_n\}$ арифметик прогрессия учун

$$a_m a_n = a_k + a_i$$

тенглик щринли бщлади.

$\{a_n\}$ кетма-кетлик арифметик прогрессия эканини кҒрсатиш учун ыатор олдига ÷ белги ыҒйилиб, бундай зилади: ÷ a_1, a_2, a_3..., a_n,.

Масалан, a_1=7, d=4 бщлган $\{a_n\}$ арифметик прогрессияни ыараймиз. Бу прогрессия учун ыуйидагиларга эгамиз:

а) $a_n = 7 + 7(n-1) \cdot 4$ ки a_n=4n+3;

б) $a_{10} = \frac{a_5 + a_{15}}{2}$, чунки a_5= a_{10}−5 ва a_{15}=a_{10}+5;

в) a_7+ a_8= a_5+ a_{10}, чунки 7+8=5+10.

a_n ни a_n=$nd + (a_1 - d)$ кщринишда зиб олсак, айирмаси d га тенг $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг ыиймати $x = n$ да

$$y = dx + (a_1 - d)$$

чизиыли функция ыабул ыиладиган ыийматга тенг бщлишини кщрамиз. Шунинг учун

$$(1;\ a_1),\ (2;\ a_2)\ (3;\ a_3),\ \ldots,\ (n;\ a_n)\ \ldots$$

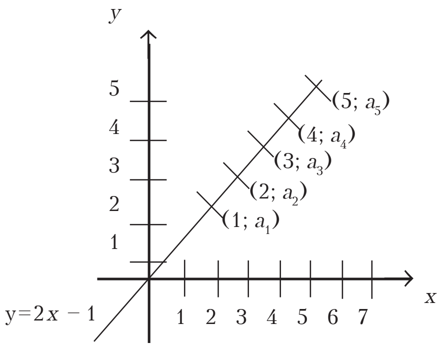
нуыталар, яони

(1; a_1), (2; a_1+d), (3; a_1+2d), ... , (n; a_1+ $(n-1)d$) нуыталар $y = dx + (a_1 - d)$ тщьри чизиыыа тегишли.

Масалан, умумий ъади a_n=2n − 1 бщлган прогрессияни, яони

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots,\ 2n-1,\ \ldots$$

прогрессияни $y = 2x + (1 - 2) = 2x - 1$ тщьри чизиыда т-ган нуыталар ординаталари сифатида тасвирлаш мумкин (1- чизма).

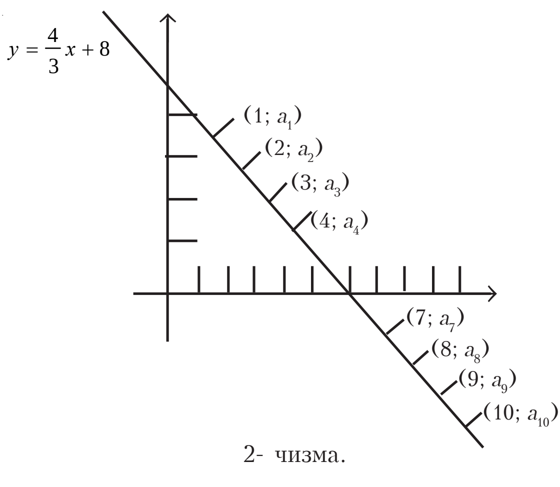


1- чизма.

Тескари тасдиы ъам тщъри: ихти   рий $y = ax + b$ чизиыли функциянинг x аргументи барча натурал сонларни ыабул ыилганда, $y = ax + b$ чизиыли функция ыийматлари биринчи ъади $a+b$ га, айирмаси эса a га тенг бщлган.

$a + b$, $2a + b$, $3a + b$, … , $na + b$, … арифметик прогрессия ъосил ыилади.

Масалан, $y = -\frac{4}{3}x - 8$ функция биринчи ъади $-\frac{4}{3} + 8 = \frac{20}{3}$, айирмаси $d = -\frac{4}{3}$ бщлган арифметик прогрессияни аниылайди: $\frac{20}{3}, \frac{16}{3}, \frac{12}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 0, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \ldots.$ (2-чизма):



2- чизма.

$\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг умумий ъадини тщртта a_1, a_n, d ва n миыдорлар ташкил ыилади(боьлайди). Агар бу миыдорларнинг 3 таси берилган бщлса, бу формуладан тщртинчи миыдорни топиш мумкин.

a_1 , d ва n ларни топишнинг мос формулаларини келтирамиз:

$$a_1 = a_n - d\,(n-1); \qquad d = \frac{a_n - a_1}{n-1}; \qquad n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1.$$

2 - м и с о л. $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг иккинчи ва тщртинчи ъадларининг йиьиндиси 16 га, биринчи ва бешинчи ъадларининг кщпайтмаси 64 га тенг. Шу прогрессиянинг биринчи ъади ва айирмасини топинг.

Е ч и л и ш и . Масала шартига кщра: $a_2 + a_4 = 16$; $a_1 \cdot a_5 = 64$.

Ушбу

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 8, \\ a_1(a_1 + 4d) = 64 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ъосил ыиламиз. Бу системанинг биринчи тенгламасидан $2d$ ни топамиз ва бу ыийматни иккинчи тенгламага ыщйиб,

$$a_1^2 - 16\,a_1 + 64 = 0 \qquad \text{ки}$$

$$(a_1 - 8)^2 = 0$$

тенгламани ъосил ыиламиз.

Шундай ыилиб, $a_1 = 8$. Демак, $2d = 8 - a_1 = 0$, яони $d = 0$.

3 - м и с о л . $\{a_n\}$ — арифметик прогрессия бщлсин. Агар $a_1a_4 = 22$, $a_2a_3 = 40$ бщлса, a_{12} ни топинг.

Е ч и л и ш и . d — прогрессиянинг айирмаси бщлсин, у ъолда $a_4 = a_1 + 3d$, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$ ларга эга бщламиз. Шундай ыилиб, a_1 ва d сонларни топиш учун масала шартидан

$$\begin{cases} a_1(a_1 + 3d) = 22, \\ a_1(a_1 + 2d) + d(a_1 + 2d) = 40 \end{cases}$$

тенгламалар системасига эга бFламиз, бу система

$$\begin{cases} a_1(a_1 + 2d) + a_1 d = 22, \\ a_1(a_1 + 2d) + d(a_1 + 2d) = 40 \end{cases}$$

системага тенг кучли.

Бу системанинг иккинчи тенгламасидан биринчи тенгламасини айирсак,

$$-a_1 d + d\ (a_1 + 2d) = 18,$$

яони $2d^2=18$ га эга бщламиз. Шундай ыилиб, d нинг ыийматлари учун иккита имкониятга эга бщлдик: $d_1=-3$ ки $d_2=3$. $d=d_1=-3$ да биринчи тенглама $a_1^2-9a_1-22=0$ кFринишига эга бFлади, бундан a_1 учун иккита имконият борлигини кFрамиз: $a_1=11$ ки $a_1=-2$. $d=d_2=3$ да a_1 учун ъам иккита имкониятга эга бщламиз: $a_1=-11$ ки $a_1=2$.

$a_{12}=a_1+11d$ бщлгани сабабли a_{12} учун -22, 22, -35, 35 ыийматлар мос келади.

4 - м и с о л. 5 ва 38 сонлар $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг мос равишда биринчи ва Fн иккинчи ъадлари. $n=2,3,\ldots$ бщлганда a_n ни топинг.

Е ч и л и ш и . $d = \dfrac{a_{12} - a_1}{12} = \dfrac{38-5}{11} = 3$ бщлгани учун излана тган ъадлар мос равишда ушбулардир:

$$8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29,\ 32,\ 35.$$

5 - м и с о л. 7 га бщлинадиган ъамма уч хонали натурал сонларни топинг.

Е ч и л и ш и . 7 га ыолдиысиз бщлинадиган энг кичик уч хонали натурал сон 105, энг катта уч хонали натурал сон эса 994.

Агар 7 га бщлинадиган барча уч хонали сонлар миыдорини m деб белгиласак, у ъолда $\{a_n\}$ биринчи ъади 105 ва айирмаси 7 га тенг прогрессия бFлиб, унинг дастлабки m та ъади 7 га ыолдиысиз бщлинадиган барча уч хонали натурал сонлардан иборат, бунда $a_m= 994$. Бундан $994=105+7(m-1)$ ки $m = (994 - 98) : 7=128$.

$\{a_n\}$ арифметик прогрессия дастлабки n та ъадининг йиьиндиси $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ четки ыщшилувчилар йиьиндиси ярми билан ъадлар сони кщпайтмасига тенг, яони

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Хусусий ъолда, арифметик прогрессиянинг a_k, a_{k+1}, ..., a_n $(1<k \le n)$ ъадлари йиьиндисини топиш керак бщлса, у ъолда олдинги формула щз тузилишини саылайди, яони

$$S_n - S_{n-1} = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n = \frac{a_k + a_n}{2}(n - k + 1).$$

Бу формуланинг геометрик тасвирини келтирамиз. Бунинг учун a_k , a_{k+1} , ... , a_n прогрессиянинг ъар бир ъадига баландлиги мос равишда $|a_k|, |a_{k+1}, \ldots,| \ldots, |a_n|$ га, ъар бирининг кенглиги эса 1 га тенг тщьри тщртбурчакни мос келтирамиз, бунда баландлиги $|a_j|$ га тенг тщьри тщртбурчакни, агар $a_j > 0$ бщлса, абсциссалар щыидан юьорига, агар $a_j < 0$ бщлса, бу щынинг бошыа томонига ыщямиз, агар $a_j = 0$ бщлса, тщьри тщртбурчакни (айниган тщьри тщртбурчакни) Ox оралиьига ыщямиз.

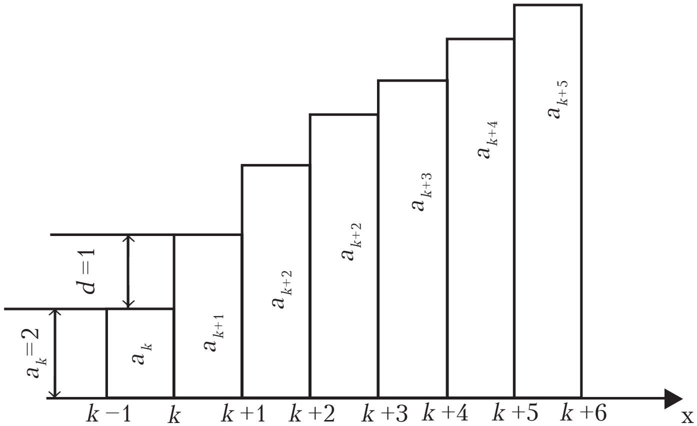
Масалан, 3-а чизмада $a_k = 2$ ва $d = 1$ бщлган прогрессиянинг дастлабки 7 та ъади кщрсатилган, 3-б чизма эса $a_k = 6$, $d = -2$ бщлган ъол учун тщьри келади. Бундай талыин этиш арифметик прогрессиянинг ъар бир ъади тщьри тщртбурчакнинг (мос тщьри тщртбурчакнинг абсциссалар щыидан юьорида ки пастда тишига ыараб) плюс ки минус ишора билан олинган юзини ифодалайди, агар ъад айниган тщьри тщртбурчакка мос келса, у нолга тенг бщлади. Шу билан бирга, $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$ йиьинди учун формулани мос тщьри тщртбурчаклар юзларининг (ишораларни ъисобга олган ъолда) алгебраик йиьиндиси сифатида талыин этиш мумкин.

Масалан, $k + n = (k+1) + (n-1) = (k+2) + (n-2) = \ldots$ бщлгани учун

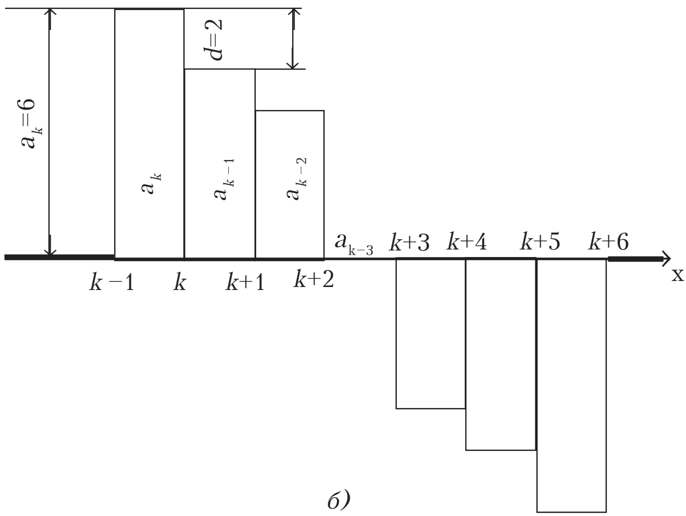
$$a_k + a_n = a_{k+1} + a_{n-1} = a_{k+2} + a_{n-2} = \ \ldots$$

4- чизмага мос келувчи прогрессия учун ($n = k+3$) бу тенгликлар ыуйидагиларни билдиради: чапдан биринчи тщртбурчак юьорисига тщртинчиси, иккинчисига учинчиси, учинчисига иккинчиси, тщртинчисига биринчиси ыщйилса, натижада томонлари $k+3-k+1=4$ ва $a_k + a_{k+3}$ га тенг $ABCD$ тщьри тщртбурчак ъосил бщлади (ыщшилувчилар сони тоы бщлганда щртадаги тщьри тщртбурчакка унинг щзи ыщйилади). 4- чизмадан кщринадики, $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3}$ йиьинди $ABCD$ тщьри тщртбурчак юзининг ярмига тенг бщлар экан, яони

$$\frac{1}{2}(a_k + a_{k+3}) \cdot 4 = 2(a_k + a_{k+3}).$$



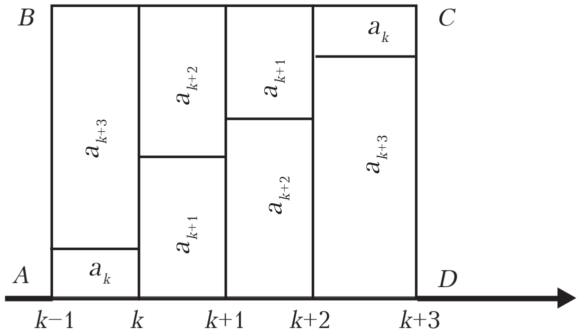
а)



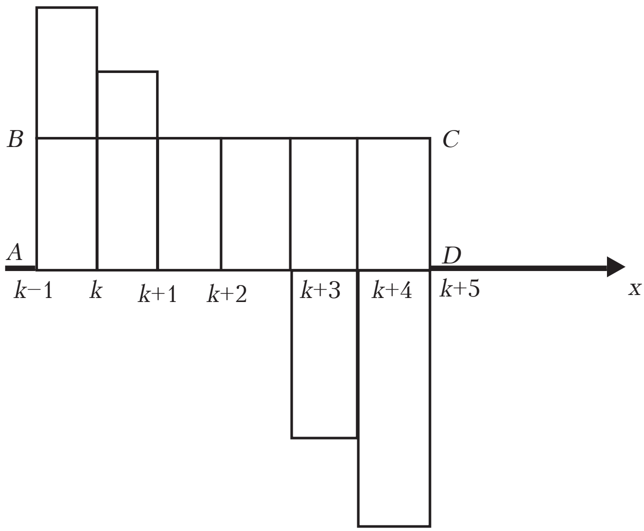
б)

3- чизма.

5- чизмага($n=k+5$) мос келувчи прогрессия учун томонлари a_k+a_{k+5} ва $k+5-k+1=6$ бщлган $ABCD$ тщьри тщртбурчак ъосил бщлади. Бу ерда 4- чизмадан фаръ шундаки, чапдан биринчи тщртбурчакка юъоридан олтинчи, иккинчисига бешинчи, бешинчисига иккинчи, олтинчисига биринчи тщьри тщртбурчак, учинчисига тщртинчи, тщртинчисига учинчи тщьри



4- чизма



5- чизма.

тщртбурчак ыщйилади. (Агар прогрессия икки ъадига мос келувчи тщртбурчаклар абсциссалар щыидан бир томонда жойлашган бщлса, улар бир-бирининг нига ыщйилади, агар щыыа нисбатан ъар хил томонда жойлашган бщлса, улар бир-бирининг устига ыщйилади.) Бу ъолда $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{k+4}+a_{k+5}$ йиьинди ъам *ABCD* тщьри тщртбурчак юзининг ярмига тенг, яони

$$\frac{1}{2}(a_k + a_{k+5}) \cdot 6 = 3(a_k + a_{k+5}).$$

Умумий ъолда ъам шундай мулоъаза юритиш мумкин.

6 - м и с о л. Мевазор боь мунтазам учбурчак шаклида бщлиб, унинг биринчи ыаторига 1 та, иккинчи ыаторига 2 та, учинчи ыаторига 3 та ва ъ.к., n - ыаторига n та дарахт щтказилган. Бу боьда 105 та дарахт бщлиши мумкинми?

Е ч и л и ш и . Пайыаймизки, n нинг шундай ыиймати мавжуд бщлиб, $1+2+\ldots+n=105$ тенглик щринли бщлганда бундай боь мавжуд бщлиши мумкин.

Чунки

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ldots$$

кетма-кетлик арифметик прогрессия бщлгани учун келтирилган тенгсизликдан:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 105.$$

Бундан $n=14$ эканини топамиз.

Шундай ыилиб, бундай боь мавжуд бщлиши мумкин ва унга кщчатларни 14 ыатор ыилиб кщрсатилган усулда щтказиш мумкин.

7 - м и с о л. Исботланг:

$$а)\ (1+2+3+\ldots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

$$б)\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+2)(2n+1)}{6}.$$

Е ч и л и ш и . а) бу мисолда 1, 2, 3, ... n сонлар учун кщпайтириш жадвалидан фойдалансак, ыуйидагига эга бщламиз (жадвалга ыаранг):

1	2	3	4	5	...	k
2	4	6	8	10	...	$2k$
3	6	9	12	15	...	$3k$
4	8	12	16	20	...	$4k$
5	10	15	20	25	...	$5k$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$	...	k^2

Жадвалда ажратилган икки ихти   рий чизиы орасидаги сонлар йиьиндисини, масалан

$$4+8+12+16+12+8+4;$$

$$k+2k+3k+4k+5k+6k+\ldots+k^2+\ldots+5k+4k+3k+2k+k$$

йиьиндиларни ыараймиз.

Арифметик прогрессия ъадлари йиьиндиси формуласи бщйича йиьиндилар мос равишда ыуйидагиларга тенг:

$$4\ (1+2+3+4+1+2+3)=4\cdot 4\cdot 4=4^3;$$

$$k(1+2+3+\ldots+k+1+2+\ldots+(k-1))=k\,\{2(1+2+\ldots+k)$$

$$k\left\{2\cdot\frac{k(k+1)}{2}-k=k^3.\right.$$

Шундай ыилиб, $n\ S\ \ n$ квадрат жадвалдаги барча сонларнинг йиьиндиси $1^3+2^3+\ldots+n^3$ га тенг. Бошыа томондан, биринчи, иккинчи, учинчи, … , n- сатрда турган сонлар йиьиндиси мос равишда ушбуларга тенг:

$$1+2+3+\ \ldots\ +n,$$

$$2(1+2+3+\ \ldots\ +n),$$

$$3(1+2+3+\ \ldots\ +n),$$

$$n\,(1+2+3+\ \ldots\ +n).$$

Бу йиьиндиларнинг ъаммасини ыщшиб, жадвалда турган барча сонларнинг йиьиндиси ыуйидагига тенг эканини кщрамиз:

$$(1+2+3+\ldots+n)(1+2+3+\ldots+n)=(1+2+3+\ldots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Талаб ыилинган тенглик исботланди.

б) ушбу

$$a\,(a+1)(a+2)-(a-1)\ \ a\ \ (a+1)=3a^2+3a$$

айниятдан фойдаланамиз.

Бу айниятда кетма-кет a=1, a =2, …, a =n деб олиб, ыуйидаги n та тенгликка эга бщламиз:

$$1\cdot 2\cdot 3-0\cdot 1\cdot 2=3\cdot 1^2+3\cdot 1,$$

$$2\cdot 3\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3=3\cdot 2^2+3\cdot 2,$$

$$3\cdot 4\cdot 5-2\cdot 3\cdot 4=3\cdot 3^2+3\cdot 3,$$

....

$$(n-1)n\,(n+1)-(n-2)(n-1)n=3(n-1)^2+3(n-1),$$

$$n\,(n+1)(n+2)-(n-1)n\,(n+1)=3n^2+3n.$$

Бу тенгликларни ыщшиб ва S_1=1+2+3+... n, $S_2=1^2+2^2+$ $...+n^2$ белгилашларни ыабул ыилиб, ушбу

$$n(n+1)(n+2)=3S_2+3S_1$$

тенгликка эга бщламиз, бундан S_2 учун изланa тган ифода келиб чиыади:

$$S_2=\frac{n(n-1)(n+2)-3S_1}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)-\frac{3}{2}n(n+1)}{3}=\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}.$$

Агар $\{a_n\}$ арифметик прогрессия берилган бFлса, у ъолда a_1, a_n, d, n ва S_n миыдорлар бир-бири билан ушбу

$$a_n=a_1+d(n-1);\quad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$$

формулалар орыали боьланади. Шу туфайли, агар бу бешта миыдордан 3 таси берилган бщлса, ыолган иккита миыдорнинг буларга мос ыийматлари икки номаолумли иккита тенгламадан иборат системага бирлаштирилган шу формулалардан топилади.

8 - м и с о л. Арифметик прогрессия учинчи ва бешинчи ъадлари йиьиндиси 5 га, уларнинг кщпайтмаси эса 6 га тенг. Шу прогрессиянинг дастлабки 10 та ъади йиьиндисини топинг.

Е ч и л и ш и . $\{a_n\}$ — айирмаси d га тенг масала шартини ыаноатлантирувчи арифметик прогрессия бщлсин. Масала шартига кщра

$$\begin{cases} a_3+a_5=5, \\ a_3\cdot a_5=6 \end{cases}$$

системага эгамиз, бу системадан иккита ечимни топамиз:

$$(a_3^{(1)};\,a_5^{(1)})=(2;3),$$

$$(a_3^{(2)};\,a_5^{(2)})=(3;2).$$

$a_5=a_3+2d$ бщлгани сабабли прогрессия айирмаси d учун иккита имкониятга эга бщламиз: $d^{(1)}=\frac{1}{2}$ ва $d^{(2)}=\frac{1}{2}$. Шундай ыилиб, масала шартини ыаноатлантирувчи иккита прогрессия мавжуд:

$$a)\ a_1^{(1)} = 1, \quad d^{(1)} = \frac{1}{2};$$

$$б)\ a_1^{(2)} = 4, \quad d^{(2)} = -\frac{1}{2}.$$

Бундан ыуйидагига эгамиз:

$$a^{(1)}{}_{10} = 1 + \frac{1}{2} \cdot (10 - 1) = 5{,}5,$$

$$a^{(2)}{}_{10} = 4 - \frac{1}{2} \cdot (10 - 1) = -0{,}5.$$

Демак,

$$S^{(1)}{}_{10} = \frac{1 + 5{,}5}{2} \cdot 10 = 32{,}5,$$

$$S^{(2)}{}_{10} = \frac{4 - 0{,}5}{2} \cdot 10 = 17{,}5.$$

9 - м и с о л. Агар арифметик прогрессиянинг биринчи ъади a га тенг ва ъар бир натурал сон n учун дастлабки n та ъади йиьиндиси an^2 га тенг бщлса, шу прогрессиянинг айирмасини топинг.

Е ч и л и ш и .

$$S_n = an^2 \Rightarrow a_2 = S_2 - S_1 = a \cdot 2^2 - a_1 = 4a - a = 3a \Rightarrow d =$$

$$= a_2 - a_1 = 3a - a = 2a.$$

Жавоб: $2a$.

10 - м и с о л. 10, 25 ва 40 сонлари шу тартибда бирор арифметик прогрессиянинг ъадлари бщла оладими?

Е ч и л и ш и . a_1=10, a_m=25 ва a_n=40, бунда $1<m<n$ бщлган $\{a_n\}$ прогрессияни излаймиз. Бу прогрессияга оид ушбу тенгламалар системасига эгамиз:

$$25=10+d\,(m-1),$$

$$40=10+d\,(n-1).$$

Бунда d — шу прогрессиянинг айирмаси. Бу системадан d ни чиыариб, m ва n натурал сонларни боьловчи муносабатга эга бщламиз:

$$\frac{m-1}{n-1} = \frac{1}{2}.$$

Масалан, m =2 деб олиб, n =3, d =15 га тенглигини топамиз. m =3 да эса n =5, d =7,5 га эга бщламиз.

Умуман, ъар бир $m \geq 2$ учун $n = 2m - 1$, $d = \frac{15}{m-1}$ га эга бщламиз.

Шундай ыилиб, 10, 25, 40 сонлари чексиз сондаги арифметик прогрессияларнинг ъадлари бщла олади.

1- топшириқ

1. Биринчи ъади −2 га, айирмаси эса 3 га тенг бщлган арифметик прогрессиянинг дастлабки олтита ъадини топинг.

2. Олтинчи ъади −1 га, еттинчи ъади 1 га тенг бщлган арифметик прогрессиянинг дастлабки бешта ъадини топинг.

3. Арифметик прогрессиянинг дастлабки бешта ъади йиьиндиси нолга тенглиги маолум. Шу прогрессиянинг учинчи ъадини топинг.

4. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бҒлиб, унда $a_3=a$ ва $a_5=b$. Шу прогрессиянинг айирмасини топинг.

5. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бщлиб, унда $a_5=6$ ва $a_7=8$. a_4, a_6 ва a_{10} ларни топинг.

6. Агар учбурчак бурчаклари катталиклари арифметик прогрессия ташкил ыилиши маолум бщлса, унинг бурчакларидан бирининг катталиги 60° га тенг эканини исботланг.

2- топшириқ

1. Биринчи ъади −3 га, айирмаси эса 2 га тенг бҒлган арифметик прогрессиянинг дастлабки олтита ъадини топинг.

2. Еттинчи ъади 5 га, саккизинчи ъади 8 га тенг бҒлган арифметик прогрессиянинг дастлабки бешта ъадини топинг.

3. Арифметик прогрессиянинг дастлабки еттита ъадининг йиьиндиси нолга тенг экани маолум. Шу прогрессиянинг тщртинчи ъадини топинг.

4. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бҒлиб, унда $a_2=a$ ва $a_5=b$. Прогрессиянинг айирмасини топинг.

5. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бҒлиб, унда $a_4=6$, $a_6=8$. a_5, a_2 ва a_9 ларни топинг.

6. Томонларининг узунликлари арифметик прогрессия ташкил ыиладиган учбурчак берилган. Агар учбурчакнинг периметри 12 га тенг бщлса, унинг щрта чизиьи узунлигини топинг.

3- топшириқ

1. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бFлиб, унда $a_1=3$ ва $d=2$. a_5 ни топинг.

2. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия берилган. Унда a_2 ва айирма d маолум. a_5, a_{10} ва a_{100} ларни топинг.

3. Уч хонали нечта тоы сон мавжуд?

4. 1000 дан катта бщлмаган, 3 га бщлганда 2 ыолдиы ыоладиган нечта натурал сон бор?

5. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бFлиб, унда $a_{21}=31$ ва $d=0,1$. a_1 ва a_{17} ни топинг.

6. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бFлиб, унда $a_{13}=7$ ва $a_{24}=12,5$. a_1 ни ва прогрессиянинг айирмасини топинг.

4- топшириқ

1. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия берилган. Унда a_3 ва айирма d маолум. a_6 ва a_{200} ни топинг.

2. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бFлиб, унда $a_4=2$, $d=-3$. a_6 ни топинг.

3. Нечта икки хонали тоы сон бор?

4. 1000 дан катта бщлмаган, 5 га бщлганда 3 ыолдиы берадиган нечта сон бор?

5. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бFлиб, унда $a_{17}=2,7$ ва $d=0,1$. a_1 ва a_{27} ни топинг.

6. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бFлиб, унда $a_{11}=6$ ва $a_{16}=8,5$ бFлсин. a_1 ни ва прогрессиянинг айирмасини топинг.

5- топшириқ

1. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бFлиб, унда $a_1=3$ ва $a_8=5$. $\frac{1}{3}\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_6$ ни топинг.

2. Арифметик прогрессиянинг биринчи, иккинчи ва учинчи ъадлари йиьиндиси 3 га тенг. Иккинчи, учинчи ва бешинчи ъадларининг йиьиндиси 11 га тенг. Шу прогрессиянинг биринчи ъади ва айирмасини топинг.

3. Арифметик прогрессиянинг учинчи ъади билан биринчи ъади айирмаси 6 га, уларнинг кщпайтмаси эса 27 га тенг. Шу прогрессиянинг биринчи ъади ва айирмасини топинг.

4. 6,125 сони $a_1=2$ ва $d=0,28$ бщлган арифметик прогрессиянинг ъади бщла оладими?

5. 3 га бщлинадиган барча икки хонали натурал сонлар йиьиндисини топинг.

6- топшириқ

1. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бҒлиб, $a_1=1$ ва $a_6=2\frac{1}{4}$. a_3, a_4 ва a_5 ларни топинг.

2. Арифметик прогрессиянинг иккинчи, учинчи ва тҒртинчи ъадлари 12 га тенг, учинчи, тщртинчи ва бешинчи ъадлари йиьиндиси 21 га тенг. Шу прогрессиянинг биринчи ъади ва айирмасини топинг.

3. Арифметик прогрессиянинг биринчи ва тҒртинчи ъадлари йиьиндиси 1,5 га тенг, уларнинг кҒпайтмаси эса −4,5 га тенг. Шу прогрессиянинг биринчи ъади ва айирмасини топинг.

4. 5,124 сони $a_1=3$ ва $d=0,64$ бщлган арифметик прогрессиянинг ъади бщла оладими?

5. 9 га ыолдиысиз бщлинадиган ъамма уч хонали сонлар йиьиндисини топинг.

М а ш Ғ л а р

1. Агар

1) $a_1=5$, $a_2=-5$; 2) $a_1=-3$, $a_6=12$; 3) $a_1=6$, $a_{10}=33$ бщлса, арифметик прогрессиянинг умумий ъади формуласини топинг.

2. $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг айирмасини d билан, дастлабки n та ъади йиьиндисини S_n билан белгилаймиз. $\{a_n\}$ арифметик прогрессияда:

1) агар $a_7=-5$, $a_{32}=70$ бщлса, a_1 ва d ни;

2) агар $a_5=2$, $a_{40}=142$ бҒлса, a_{13} ни;

3) агар $a_{25}-a_{20}=10$, $a_{16}=13$ бщлса, a_{10} ни;

4) агар $a_{14}=5$, $a_{12}=1$ бщлса, a_{13} ни;

5) агар $a_3+a_{18}=50$ бщлса, a_1+a_{20} ни;

6) агар $a_{75}=190$, $S_{75}=750$ бщлса, a_1 ни;

7) агар $a_1=3$, $a_2=5$, $S_n=360$ бщлса, n ни;

8) агар $a_1=7$, $S_{10}=25$ бщлса, d ни;

9) агар $a_{17}+a_{20}=35$, $a_{16}\cdot a_{21}=150$ бщлса, a_1 ва d ни;

10) агар $a_2=7$, $a_3=11$ бщлса, S_{40} ни;

11) агар $a_n=2,5$, $n\in N$ бщлса, S_{20} ни;

12) агар $a_2+a_4=16$, $a_1a_5=28$ бщлса, a_1 ва d ни;

13) агар $a_1\cdot a_4=44$, $a_2+a_n=24$ бщлса, a_1 ва d ни;

14) агар $a_2+a_{2n}=42$, $a_2+a_4+\ldots+a_{2n}=126$ бщлса, n ни;

15) агар $a_m=n$, $a_n=m$ $(n\neq m)$ бщлса, a_k ни;

16) агар $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$ бщлса, S_{20} ни;

17) агар $a_4=-4$, $a_{11}=17$ бщлса, a_n ни;

18) агар $S_n=n^2$ бщлса, a_n ни;

19) агар $a_1=-3$, $a_3a_7=24$ бщлса, S_{12} ни;

20) агар $a_5=9$, $a_2+a_9=20$ бщлса, S_{10} ни;

21) агар $a_1+a_8=25$, $a_3+a_5=19$ бщлса, S_8 ни;

22) агар $S_n=-28$, $S_6=58$ бщлса, S_{16} ни;

23) агар $S_n=3n^2+n$ бщлса, a_1 ва d ни;

24) агар $S_n=2n^2-3n$ бщлса, a_1 ва d ни;

25) агар $S_n=3n^2-2n$ бщлса, a_{10} ни;

26) агар $4S_n=S_n^2$ бщлса, a_1 ва d ни;

27) агар $a_5=18$, $4S_n=S_{2n}$ бщлса, a_1 ва d ни;

28) агар $a_n=22$, $n=a_1\cdot a_2$, $a_2+a_n=20$ бщлса, a_7 ни топинг.

3. Йиьиндини топинг:

1) $1+2+3+\ldots+n$;

2) $2+4+6+\ldots+(2n+2)$;

3) $1+3+5+\ldots+(2n+1)$;

4) $3+8+13+\ldots+(5n+3)$;

5) барча уч хонали натурал сонлар йиьиндисини;

6) 3 га бщлинадиган барча уч хонали натурал сонлар йиьиндисини;

7) 3 га бщлинмайдиган барча уч хонали натурал сонлар йиьиндисини;

8) ъар бири 2 га ъам, 3 га ъам бщлинмайдиган барча икки хонали натурал сонлар йиьиндисини;

9) ъар бирини 5 га бщлганда 2 ыолдиы ыоладиган дастлабки 100 та натурал сонлар йиьиндисини;

10) $100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2$ ни.

4. Берилган сонлар айни бир арифметик прогрессиянинг ъадлари бщла оладими:

1) $\sqrt{3}$, 3; 2) $\sqrt{3}$, 3; $2\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$; 4) 2, 6, $\frac{9}{2}$?

5. Учта сон арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадларидир. Уларнинг йиьиндиси 33 га, кщпайтмаси эса 1287 га тенг. Шу сонларни топинг.

6. Тщртта мусбат сон айирмаси 2 га тенг бщлган арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадларидир. Бу сонларнинг кщпайтмаси 19305 га тенг. Шу сонларни топинг.

7. Биринчи учта ъадининг йиьиндиси 27 га, улар квадратларининг йиьиндиси эса 275 га тенг бщлган арифметик прогрессиянинг биринчи ъади ва айирмасини топинг.

8. Раыамлари бирор арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлган 45 га бщлинадиган уч хонали сон топинг.

9. $\{a_n\}$ арифметик прогрессияда $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=15$, $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=12{,}5$ бщлса, унинг биринчи ъади ва айирмасини топинг.

10. Арифметик прогрессиянинг биринчи ъади 2 га тенг, иккинчи ва учинчи ъадлари мос равишда иккита кетма-кет натурал сонлар квадратларига тенг. Шу прогрессиянинг айирмасини топинг.

11. Арифметик прогрессия тщртта кетма-кет ъади йиьиндиси 1 га, шу сонлар кубларининг йиьиндиси эса 0,1 га тенг. Шу сонларни топинг.

12. Йиьиндиси 68 га тенг бщлган бир нечта сон арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари эканлиги маолум. Агар улардан биринчи тщрттасининг йиьиндиси 68 га, охирги тщрттасининг йиьиндиси эса — 36 га тенг бщлса, шу сонларни топинг.

13. Агар n нинг ъар ыандай натурал ыийматида $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг биринчи n та ъади йиьиндиси $\frac{1}{2}(n^2-6n)$ га тенг бщлса, кетма-кетликнинг умумий ъади формуласини топинг.

14. Учта a, b ва c сонлар бирор арифметик прогрессиянинг ъадлари бщладиган шартни топинг.

15. 1) уч хонали; 2) тщрт хонали туб сонларнинг раыамлари бирор мусбат айирмали арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщла оладими?

16. Тенгламани ечинг:

1) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^8 \ldots 5^{2x}=0{,}04^{-28}$;

2) $1+7+13+\ \ldots\ +x=280$;

3) $(x+1)+(x+4)+\ldots+(x+28)=155$.

17. Иккита арифметик прогрессия берилган:

$$\div 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots \quad \text{ва} \div 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots\ .$$

Биринчи кетма-кетликнинг 100 та ъади билан иккинчи кетма-кетликнинг 98 та ъади орасида нечта тенг ъадлар мавжуд бщлади?

18. Ушбу

$$x^3 + x^2 = a$$

тенгламанинг илдизлари арифметик прогрессиянинг учта кетма-кет ъадлари бщлишини билган ъолда шу тенгламани ечинг.

19. $x^4+px^2+q=0$ тенглама бирор арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщладиган тщртта илдизга эга бщлиши учун p ва q орасида ыандай муносабат (боьланиш) мавжуд бщлиши керак?

20. Тщьри бурчакли учбурчак томонларининг узунликлари бирор арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщла оладими?

21. Учбурчак бурчакларидан бирининг катталиги 120^0 га тенглигини ва томонлари узунликлари бирор арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари эканини билган ъолда учбурчак томонлари нисбатларини топинг.

22. Томонларининг узунликлари айирмаси 2 см га тенг бщлган учбурчак томонлари узунликлари арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадларидир. Учбурчакнинг юзи 6 см^2. Учбурчак томонлари узунликларини топинг.

23. Периметри 15 га тенг бщлган учбурчакнинг томонлари бутун сонларда ифодаланиб, бирор арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлса, шу учбурчак томонлари узунликларини топинг.

24. Дастлабки n та ъадининг щрта арифметиги n га тенг бщладиган барча арифметик прогрессияларни топинг.

25. x нинг ыуйидаги сонлар айни бир арифметик прогрессиянинг кетма-кет (берилган тартибда) ъадлари бщладиган барча ыийматларини топинг:

1) $\sqrt{x},\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[4]{x};$

2) $1+\sin x, \sin^2 x, 1+\sin 3x;$

3) $\lg 2^x, \lg(2^x+3),\ \lg(2^x+3);$

4) $\cos^4\frac{x}{4}, \frac{1}{2}\sin 2x, -\sin^4\frac{x}{2};$

5) $\sqrt{x-1},\ \sqrt{5x-1},\ \sqrt{12x+1}.$

26. Агар $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ кетма-кетликлар арифметик прогрессия бщлса:

1) $\{a_n+b_n\}$; 2) $\{a_n-b_n\}$; 3) $\{a_nb_n\}$;
4) $\{a_n/b_n\}$, $b_n\neq 0$; 5) $\{|a_n|\}$

кетма-кетлик арифметик прогрессия бщла оладими?

27. Шундай арифметик прогрессия топингки, унда нечта ъад олинмасин, уларнинг йиьиндиси ъар доим шу ъадлар сонининг учланган квадратига тенг бҒлсин.

28. Ушбу

$$1,\ 18,\ 35,\ \ldots$$

арифметик прогрессия берилган. Шу прогрессиянинг фаыат 3 раыамлари рдамида зиш мумкин бҒлган барча ъадларини кҒрсатинг.

29. Айни бир арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщладиган шундай тщртта бутун сон топингки, уларнинг энг каттаси ыолган учтаси квадратларининг йиьиндисига тенг бщлсин.

30. Шундай шарт топингки, бу шартда *a, b* ва *c* учта сон бирор арифметик прогрессиянинг *k, p, q* ъадлари бщлсин.

31. Энг каттаси ыолган учтаси квадратлари йиьиндисига тенг бщлган шундай тщртта бутун мусбат сон топингки, бу сонлар бирор арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлсин.

32. Ушбу

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}$$

арифметик пргрессия *n* та ъади йиьиндисини топинг.

33. Шундай арифметик прогрессия топингки, унда дастлабки *n* та ъади йиьиндиси билан кейинги *k* та ъадлари йиьиндиси орасида *n* га боьлиы бщлмаган щзгармас муносабат (боьланиш) мавжуд бщлсин.

34. Арифметик прогрессияда исталган иккита кетма-кет ъадлар орасига шундай *k* сон ыщйиш мумкинки, ъосил бщлган янги кетма-кетлик яна арифметик прогрессия ташкил ыилади. Шуни исботланг.

35. Агар a, b ва c мусбат сонлар $(a \le b \le c)$ арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлса, у ъолда

$$\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{c}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c+\sqrt{a}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{b}}}$$

сонлар ъам бирор арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлишини исботланг.

36. Агар

$$\frac{1}{a^2+b^2}, \quad \frac{1}{c^2+a^2}, \quad \frac{1}{b^2+c^2}$$

сонлар арифметик прогрессиянинг мос равишда биринчи, иккинчи ва учинчи ъадлари бщлса, у ъолда a^2, b^2, c^2 сонлар ъам бирор арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлишини исботланг.

37. Иккита $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ арифметик прогрессиялар берилган. $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$ ва $b_1=\frac{1}{a}$, $b_2=\frac{1}{b}$, $b_3=\frac{1}{c}$ экани маолум. $a=b=c$ эканини исботланг.

38. Агар a, b ва c $(a \le b \le c)$ мусбат сонлар арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлса, у ъолда

$$3(a^2+b^2-c^2)=6(a-b)^2-(a+b+c)^2$$

бщлишини исботланг.

39. $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ъади йиьиндиси S_n бщлса, ыуйидагиларни исботланг:

1) $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$;

2) $S_{n+3}-3S_{n+1}-S_n=0$;

3) $\frac{S_n}{n}(m-p)+\frac{S_m}{m}(p-n)+\frac{S_p}{p}(n-m)=0$;

4) $\frac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\frac{m-n}{m+n}$;

5) $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

40. Агар арифметик прогрессиянинг иккинчи ъади унинг биринчи ва тщртинчи ъадлари орасидаги щрта пропорционал бщлса, у ъолда унинг олтинчи ъади тщртинчи ва тщыыизинчи ъадлари орасида щрта пропорционал бщлишини исботланг.

41. a^2, b^2 ва c^2 сонлар бирор арифметик прогрессия таркибида бщлгандагина ва фаыат шу ъолдагина $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+q}$, $\frac{1}{a-b}$ сонлар арифметик прогрессиянинг ъадлари бщлишини исботланг.

42. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бFлиб, $S_m=m^2p$, $S_k=k^2p$ тенгликларни ыаноатлантирувчи m ва k сонлар мавжуд бщлсин, бу ерда m, k, p — баози натурал сонлар. $S_p=p^3$ эканини исботланг.

43. Агар $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бщлса, у ъолда исботланг:

1) $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+.....+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$;

2) $i=1,2,\ldots$ да $a_i>0$ бFлса,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

44. Исботланг:

$$\frac{n+1}{a_1a_{2n+2}}<\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{2n}a_{2n+1}}<\frac{n+1}{a_1a_{2n}+1},$$

бунда $\{a_n\}$ мусбат ъадли Fсувчи арифметик прогрессия.

45. Ъар ыандай

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$$

арифметик прогрессия учун

$$a_1-2a_2+a_3=0,$$
$$a_1-3\cdot a_2+3\cdot a_3-a_4=0,$$
$$a_1-4\cdot a_2+6\cdot a_3-4\cdot a_4+a_5=0$$

ва умуман ъар ыандай $n>2$ да

$$a_1-c^1_n\ a_2+c^2_n\ a_3-\ldots\ +(-1)^{n-1}\ c^n_n\ a_n+(-1)^n c^n_n\ a_{n+1}=0$$

бщлишини исботланг.

46. Агар $\{a_i\}$ сонлар арифметик прогрессия ъосил ыилувчи ва 3 га бщлинмайдиган тоы бутун сонлар бщлса, $a^2_1-a^2_2+a_3^2-a_4^2+\ldots+a_{31}^2-a_{32}^2$ сон 384 га бщлинишини исботланг.

47. Агар арифметик прогрессиянинг биринчи ъади ва айирмаси бутун сонлар бщлиб, прогрессия кетма-кет тщртта ъадининг кщпайтмасини унинг айирмаси тщртинчи даражаси ыадар орттирилган бутун соннинг квадрати бщлишини исботланг.

48. $\{a_n\}$ айирмаси d га тенг ва $0<d<2a_1$ бFлган арифметик прогрессия бFлсин, бунда $k>1$ − бутун сон.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^k}<\frac{1}{(k-1)d\left(a_1-\frac{d}{2}\right)^{k-1}}$$

тенгсизликни исботланг.

49. a_1, a_2, ..., a_{n+1} сонлар арифметик прогрессиянинг ъадларидир. Бу сонлардан сонларнинг янги $\{b_i\}$ тFплами шундай тузилганки, бунда $b_i=a_i+a_{i+1}$ $(i=1, 2, ..., n)$. Кейинги сонлардан яна янги $\{c_i\}$ тщплам тузилган, бунда $c_i=b_i+b_{i-1}$ $(i=1,2,..., n-1)$ ва ъ.к. Битта сондан иборат тщплам ъосил бщлмагунча шундай давом эттирилаверади. Шу сонни топинг.

50. Биномиал коэффициентлардан тузилган Паскалр учбурчагида чексиз кщп сатрлар бщлиб, бу сатрларда бирор арифметик прогрессиянинг нма- н турувчи 3 та ъади мавжуд. Шуни исботланг.

2- §. Геометрик прогрессия

Биринчи ъади нолдан фарыли, ыолган ъадлари эса щзидан олдинги ъадни айни бир хил $q\neq 0$ щзгармас сонга кщпайтиришдан ъосил бщлган кетма-кетлик *геометрик прогрессия* дейилади.

Агар $\{b_n\}$ кетма-кетлик геометрик прогрессия бщлса, таорифга биноан

$$b_{n+1}=b_n\, q \quad (n\in N)$$

тенглик бажарилади.

q сон $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг *махражи*, b_1 сон унинг *биринчи ҳади*, b_n сон эса унинг *умумий ҳади* дейилади.

Масалан,

$$1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 256,\ .\ .\ .$$

кетма-кетликни ыарайлик, унинг биринчи ъади нолдан фарыли ва ъар бир навбатдаги ъади иккинчи ъадидан бошлаб, олдинги ъадини 4 га кщпайтиришдан ъосил бщлади, шу сабабли бу кетма-кетлик махражи $q=4$, биринчи ъади $b_1=1$ бщлган геометрик прогрессиядир.

Махражи q бщлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессия учун $n\geq 2$ да

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{b_{n+1}}{b_n}=q,$$

яони

$$b_n^{\,2}=b_{n-1}\, b_{n+1}\quad .$$

Масалан,

$$1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 256,\ \ldots,\ 4^{n-1}\ \ldots$$

геометрик прогрессия учун ыуйидаги тенгликлар щринли:

$$4^{\,2}=1\cdot 16;\ \ 16^{\,2}=4\cdot 64;\ \ 256^{\,2}=64\cdot 1024;\ \ldots;\ 4^{2n}=4^{n-1}\cdot 4^{n+1}.$$

Шуни таокидлаймизки, *a, b, c учта сондан бирининг квадрати бошқа иккитасининг кўпайтмасига тенг бўлса ва фақат шу ҳолдагина бу сонлар бирор геометрик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари бўлади.*

1 - м и с о л. Умумий ъади b_n=(−3) · 2^n бщлган кетма-кетлик биринчи ъади −6 га, махражи эса 2 га тенг бщлган геометрик прогрессия эканини исботланг.

Е ч и л и ш и . $\{b_n\}$ кетма-кетлик геометрик прогрессия эканини исботлаш учун $b_n^2=b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (n ≥ 2) тенгликни текшириш етарли. Ъар бир n ≥ 2 да

$$b_n=(-3) \cdot 2^n, \quad b_{n-1}=(-3) \cdot 2^{n-1}, \quad b_{n+1}=(-3) \cdot 2^{n+1}$$

ва, демак, $b_n^2=(-3 \cdot 2^n)^2=(-3 \cdot 2^{n-1})(-3 \cdot 2^{n+1})=b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Шунга кщра $b_1=-3 \cdot 2=-6$ ва $b_2=-3 \cdot 2^2=(-3) \cdot 2^2=-6 \cdot 2=b_1 \cdot 2$ бщлгани учун зарур тасдиылар исботланди.

2 - м и с о л. *a, b, c* сонлар бирор геометрик прогрессиянинг берилган кетма-кетликдаги ъадлари бщлсин.

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$$

эканини исботланг.

Е ч и л и ш и . *a*, *b* ва *c* сонлар геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бFлгани учун $b^2=ac$. Шундай ыилиб,

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}=$$

$$=\frac{acc^2}{a}+\frac{b^4}{b}+\frac{a^2ac}{c}=c^3+b^3+a^3.$$

3 - м и с о л. Учта мусбат сон арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадларидир, шу сонлар квадратлари эса геометрик прогрессиянинг берилган кетма-кетликдаги ъадларидир. Геометрик прогрессиянинг махражини топинг.

Е ч и л и ш и . $a-d$, a, $a+d$ мусбат сонлар берилган арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлсин. Масала шартига кщра $(a-d)^2$, a^2, $(a+d)^2$ шундай сонларки, $a^4=(a-d)^2(a+d)^2$ бщлади. Бундан $d^2(d^2-2a^2)=0$, яони d^2 (d ё $2\sqrt{a}$)=0. Агар $d=a\sqrt{2}$ бщлса, у ъолда $a+d=a-a\sqrt{2}=a(1-\sqrt{2})<0$; агар $d=-\sqrt{2}\,a$ бщлса, у ъолда $a+d=a-\sqrt{2}\,a=$ $=a(1-\sqrt{2})<0$, бу эса $a-d$ ва $a+d$ сонларнинг мусбатлиги ъаыидаги фаразга зиддир. Демак, $d=0$. Шундай ыилиб, ыарала тган арифметик прогрессиянинг айирмаси 0 га тенг. Шунинг учун учта кетма-кет ъади a^2, a^2, a^2 бщлган геометрик прогрессиянинг махражи 1 га тенг.

4 - м и с о л. Учта бутун a, b, c сон геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадларидир. Агар a, $b+8$, c сонлар зилиши тартибида арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари, a, $b+8$, $c+64$ сонлар эса зилиши тартибида геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари эканлиги маолум бщлса, шу учта сонни топинг.

Е ч и л и ш и . a, $b+8$, c сонлар айирмаси d га тенг бщлган арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлсин. $x=b+8$ деб олсак, $a=x-d$, $c=x+d$ бщлади. У ъолда, масала шартига кщра $x-d$, $x-8$, $x+d$ сонлар учлиги ва $x-d$, x, $x+d+64$ сонлар учлиги

$$\begin{cases} (x-8)^2=(x-d)(x+d), \\ x^2=(x-d)(x+d+64) \end{cases}$$

тенгламалар системасини ыаноатлантиради. Алгебраик алмаштиришлар бажариб,

$$\begin{cases} 16x=63+d^2, \\ 3d^2-64d+256=0 \end{cases}$$

эканини топамиз. Бу система иккита ечимга эга: $x_1=20$, $d_1=16$ ва $x_2=6/3$, $d_2=16/3$.

Бу ечимларнинг фаыат биринчиси масала шартини ыаноатлантиради. Шунинг учун $a=4$, $b=12$, $c=36$.

$\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг умумий ъади b_n, биринчи ъади b_1 ва махражи q

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}, \quad (n\in N)$$

муносабат орыали боьланган. Масалан,

а) агар $b_{n+1}=10b_n$, $b_1=1$ бFлса, $b_n=10^{n-1}$;

б) агар $b_{n+1}=-3b_n$ ва $b_1=2$ бFлса, $b_n=2(-3)^{n-1}$.

$\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг b_n умумий ъади, унинг исталган ъади b_n ва прогрессиянинг махражи q орыали бундай ифодаланиши мумкин:

$$b_n=b_1\,q^{n-1}=b_2\,q^{n-2}=b_3\,q^{n-3}=\ \dots\ =b^{n-2}\,q^2=b_{n-1}\,q,$$

яони

$$b_n=b_2\,q^{n-2} \qquad \text{ки} \quad b_n=b_{n-k}\,q^k.$$

Ъар ыандай тайинланган натурал n ва k ларда

$$b_{n+k}=b_n\ q^{k}$$

тенглик щринли, шунинг учун

$$b_n^{\,2}=b_{n-k}\ b_{n+k},\ \ 1\le k\le n-1,$$

яони геометрик прогрессиянинг иккинчи ъадидан бошлаб исталган ъадининг квадрати прогрессиянинг ундан тенг узоыликда турган ъадлари кщпайтмасига тенг.

Бундан ташыари, $\{b_n\}$ геометрик прогрессия учун, агар $m+n=k+p$ бщлса,

$$b_m\,b_n=b_k\,b_p$$

тенглик щринли.

Масалан, умумий ъади $b_n=7\cdot(13)^{n-1}$ бщлган геометрик прогрессия учун ыуйидагиларга эгамиз:

а) $b_{10}^{\,2}=b_5\,b_{15}$, чунки $10-5=5$ ва $10+5=15$;

б) $b_7\,b_8=b_5\,b_{10}$, чунки $7+8=5+10$.

5 - м и с о л. $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг учинчи ъади 8, унинг бешинчи ъади эса 32 га тенг. b_{10} ни топинг.

Е ч и л и ш и . $b_5=b_3\cdot q^2$ дан $q^2=\dfrac{b_5}{b_3}=4$. Бундан $q=2$ ки $q=-2$.

Шундай ыилиб, масала шартини иккита прогрессия ыаноатлантиради: биринчи прогрессия учун

$$b_{10}\ =\ 8\cdot 2^7\ =\ 2^{10}\ =\ 1024,$$

иккинчи прогрессия учун

$$b_{10}\ =\ 8\cdot(-2)^7\ =-2^{10}\ =-1024$$

эканини топамиз.

6 - м и с о л . Ъамма ъадлари мусбат бҒлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессия берилган, унда $b_{10}=2$ ва $b_{18}=3$. b_{16} ва $b_3\,b_{27}$ ни топинг.

Е ч и л и ш и . 10+18=14+14 бщлгани учун $b_{14}^2=b_{10}\cdot b_{18}=6$; демак, $b_{14}=\sqrt{6}$, 14+18=16+16 бҒлгани учун $b_{16}^2=b_{14}b_{18}=3\sqrt{6}$, яони $b_{16}=\sqrt{3\sqrt{6}}$, ниъоят 14+16=30=3+27 эканидан ыуйидаги келиб чиыади:

$$b_3b_{27}=b_{14}b_{16}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3\sqrt{6}}=3\sqrt{2\sqrt{6}}.$$

7 - м и с о л. Геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлган ъамда $x + w = 27$ ва $y + z = 18$ шартларни ыаноатлантирувчи тщртта x, y, z, w $(x < y < z < w)$ сонни топинг.

Е ч и л и ш и . Изланаётган прогрессиянинг махражини q билан белгилаймиз. У ъолда $y = xq$, $z = xq^2$, $w = xq^3$ ва масала шартига кщра

$$\begin{cases} x + xq^3 = 27, \\ xq + xq^2 = 18 \end{cases}$$

тенгламалар системасига эга бщламиз. Биринчи тенгламани 2 га, иккинчи тенгламани 3 га кщпайтирамиз, сЃнгра иккинчи тенгламани биринчи тенгламадан айириб, ушбуга эга бщламиз:

$$2x + 2xq^3 - 3xq - 3xq^2 = 0.$$

$x \neq 0$ (чунки, x — геометрик прогрессиянинг ъади) бщлгани учун

$$2(q^3+1) - 3q(q+1) = 0$$

ки

$$(q+1)(2q^2 - 5q + 2) = 0.$$

Шундай ыилиб, учта имконият мавжуд: $q = -1$; $q = \frac{1}{2}$, $q = 2$. $q = -1$ ыиймат системанинг биринчи тенгламасини ыаноатлантирмайди. $q = \frac{1}{2}$ ва $q = 2$ да мос равишда x нинг мумкин бщлган ыийматлари $x = 24$ ва $x = 3$ га эга бщламиз. $q = \frac{1}{2}$ ва $x = 24$ камаювчи кетма-кетликни, $q = 2$ ва $x = 3$ эса щсувчи кетма-кетликни аниылаганлиги сабабли масала шартини сонларнинг $x = 3$, $y = 6$, $z = 12$, $w = 24$ тщртлиги ыаноатлантиради.

8 - м и с о л. $\{b_n\}$ кетма-кетлик $b_k = a$, $b_1 = b$ бщлган геометрик прогрессия бщлсин, бунда $0 \leq k < n$ ва $a > 0$, $b > 0$. Прогрессия махражини топинг.

Е ч и л и ш и . $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг махражи q бщлсин. У ъолда

$$b_1 = b_k\, q^{1-k}.$$

Демак, $q^{1-k} = \frac{b_1}{b_k} = \frac{b}{a}$.

Агар $1-k$ жуфт сон бщлса, у ъолда масала шартини ыаноатлантирувчи иккита прогрессия мавжуд бщлиб, бу прогрессиялар учун мос равишда:

$$q = \sqrt[1-k]{\frac{b}{a}} \quad \text{ва} \quad q = -\sqrt[1-k]{\frac{b}{a}}.$$

Агар $1-k$ тоы сон бщлса, у ъолда прогрессия махражи $\sqrt[1-k]{\frac{b}{a}}$ га тенг бщлади.

9-мисол. 12, 20 ва 35 сонлари бирор геометрик прогрессиянинг ъадлари бщла оладими?

Ечилиши. Берилган сонларнинг

12, 35, 20; 20, 35, 12; 20, 12, 35; 35, 12, 20

жойлашувлари геометрик прогрессиянинг таорифига зид, чунки прогрессиянинг махражи бир ваытнинг щзида бирдан катта ва бирдан кичик бщла олмайди.

Агар берилган сонларнинг геометрик прогрессиядаги тартиби 12, 20, 35 бщлса, у ъолда $20=12q^k$ ва $35=12q^{k+m}$ бщлади, бунда q — геометрик прогрессиянинг махражи, k ва m бирор натурал сонлар. У ъолда $q^m=7/4$ ва шу билан

$$5 = 3(q^m)^{k/m} = 3\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{k}{m}}.$$

Бундан

$$5^m \cdot 2^{2k} = 3^m \cdot 7^k$$

эканини топамиз, бу эса сонларни туб кщпайтувчиларга ажратишнинг ягоналигига зид. Шундай ыилиб, берилган сонлар юыорида кщрсатилган тартибда бирорта ъам геометрик прогрессиянинг ъадлари бщла олмайди.

Махражи $q\neq 1$ бЃлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъадининг $S_n = b_1 + b_2+\ldots+b_n$ йиьиндиси

$$S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

формула бщйича, $q=1$ бщлганда эса

$$S_n = nb$$

формула бЃйича ъисобланади.

Шуни таокидлаймизки, агар $1\leq k<n$, $q<1$ бщлса, у ъолда

$$S_n - S_k = b_{k+1} + b_{k+2}+\ldots+b_n = b_{k+1}\frac{1-q^{n-k}}{1-q}$$

бщлади.

Масалан,

а) $1+2+4+8+...+2^{n-1}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1.$

б) $\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+...+\frac{1}{5^{n-1}}=\frac{1}{5^3}\frac{1-(\frac{1}{5})^{n-3}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{5^2\cdot 4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-3}\right]=$

$=\frac{1}{100}\left(1-\frac{1}{5^{n-3}}\right).$

10 - м и с о л. Агар $b_n=3\cdot 2^n$ бщлса, $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг дастлабки 8 та ъади йиьиндисини топинг.

Е ч и л и ш и . $b_1=3\cdot 2=6$, $b_2=3\cdot 2^2=12$ бщлгани учун берилган прогрессия махражини $q=b_2 : b_1$ тенгликдан топамиз, бунда $q=2$. У ъолда:

$$S_8=b_1\frac{1-q^8}{1-q}=6\cdot\frac{1-2^8}{1-2}=6(2^8-1)=1530.$$

11 - м и с о л. Бирор геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъади йиьиндиси ихти рий натурал n да $S_n=3(2^n-1)$ формула бщйича ъисобланади. Шу прогрессиянинг бешинчи ъади ва махражини топинг.

Е ч и л и ш и . Махражи q га тенг бщлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессия учун $S_n=3\,(2^n-1)$ (бу ерда $n=1, 2, 3,\dots$) бўлсин. У ҳолда, $b_1=S_1=3$, $b_n=S_n-S_{n-1}=(3\cdot 2^n-3)-(3\cdot 2^{n-1}-3)= =1{,}5\cdot 2^n$ ($n=2,3,\dots$) тенгликлар щринли бщлади. Шунга кщра, $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{S_2-S_1}{S_1}=\frac{9-3}{3}=2$ ва $b_5=S_5-S_4=3(2^5-1)-3(2^4-1)=48$ тенгликларга эга бщламиз.

12 - м и с о л. Топинг:

$$S_n=1+2a+3a^2+4a^3+\ \dots\ +\ na^{n-1},\ \ a\neq 0.$$

Е ч и л и ш и . $aS_n=a+2a^2+3a^3+\ \dots\ +\ na^n$ бщлгани учун

$$aS_n-S_n=S_n(a-1)=n\,a^n-\frac{a^n-1}{a-1}.$$

Шундай ыилиб,

$$S_n=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}.$$

13-мисол. Йиьиндини топинг:

$$S=1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots111}_{1000 \text{ та раыам}}.$$

Ечилиши. $\underbrace{111\ldots111}_{n \text{ та рақам}}$ сонини ъар ыандай натурал n да

$$\underbrace{111...111}_{n \text{ та рақам}}=\frac{\overbrace{999...99}^{n \text{ та рақам}}}{9}=\frac{10^n-1}{9}$$

кщринишда зиш мумкин бщлганлиги учун

$$S=\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+...+\frac{10^{1000}-1}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}(10+10^2+10^3+...+10^{1000}-1000)=\frac{1}{9}\left[\frac{10(10^{1000}-1)}{10-1}-1000\right]=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\underbrace{111...110}_{1000 \text{ та раыам}}-1000\right)=\frac{1}{9}\left(\underbrace{111...10110}_{997 \text{ та раыам}}\right).$$

14 - мисол. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $b_1=3$ ва $b_9-b_5=36$ бщлса, унинг дастлабки 10 та ъади йиьиндисини топинг.

Ечилиши. $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг махражи q га тенг бщлсин. $b_1=3$ бщлгани учун $b_9=3\cdot q^8$, $b_5=3\cdot q^4$ тенгликларга эгамиз. У ъолда масала шартига кщра ыуйидаги тенгламага эга бщламиз:

$$b_9-b_5=3q^8-3q^4=36.$$

Бу тенглама $q=\pm\sqrt{2}$ сонларидан иборат иккита ъаыиыий илдизга эга бщлгани учун масала шартини ыаноатлантирувчи иккита геометрик прогрессия мавжуд. Уларнинг бирида $q=\sqrt{2}$ ва $b_1=3$ бщлади. Бу геометрик прогрессия учун ушбу тенгликка эга бщламиз:

$$S_{10}=\frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{3(1-32)}{1-\sqrt{2}}=93(1+\sqrt{2}).$$

Иккинчи геометрик прогрессияда $b_1=3$, $q=-\sqrt{2}$ ва

$$S_{10}=\frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{3(1-32)}{1+\sqrt{2}}=93(1+\sqrt{2}).$$

бщлади.

$\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг махражи q га тенг бщлсин. У ъолда:

1) $b_1>0$, $q>1$ ки $b_1<0$, $0<q<1$ бщлса, геометрик прогрессия щсувчи бщлади;

2) $b_1>0$, $0<q<1$ ва $b_1<0$, $q>1$ бщлса, геометрик прогрессия камаювчи бщлади.

Махражи манфий сон бщлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда тоы номерли ъадлар биринчи ъад билан бир хил ишорали, жуфт номерли ъадлар эса биринчи ъад билан ыарама-ыарши ишорали бFлади. Шу сабабли, $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг махражи $q<0$ бFлса, бу геометрик прогрессия *ишораси алмашиниб келадиган геометрик прогрессия* дейилади. Ишораси алмашиниб келадиган геометрик прогрессия монотон кетма-кетлик бщла олмайди.

15 - мисол. Агар Fсувчи $\{b_n\}$ геометрик прогрессия ва $\{a_n\}$ арифметик прогрессияда

$$b_3-b_1=9, \quad b_5-b_3=36, \quad b_1=a_1, \ b_2=a_3$$

бFлса, арифметик прогрессиянинг дастлабки 12 та ъади йиьиндиси S_{12} билан геометрик прогрессиянинг дастлабки 6 та ъади йиьиндиси $\overline{S_6}$ нинг йиьиндисини топинг.

Ечилиши. Агар q геометрик прогрессиянинг махражи бщлса, ушбу системага эга бщламиз:

$$\begin{cases} b_1q^2-b_1=9, \\ b_1q^4-b_1q^2=36, \end{cases} \quad \text{яони} \quad \begin{cases} b_1q^2-b_1=9, \\ q^2(b_1q^2-b_1)=36. \end{cases}$$

Системанинг иккинчи тенгламасида $b_1q^2-b_1$ нинг щрнига 9 ни ыщйсак, $q^2=4$ бщлади, бундан $q=2$ ки $q=-2$. Геометрик прогрессия Fсувчи бFлганлиги учун $q=-2$ ыиймат масала шартларини ыаноатлантирмайди.

Агар $q=2$ бщлса, у ъолда $b_1=3$ бFлади. Шу сабабли геометрик прогрессиянинг дастлабки 6 та ъади йиьиндиси ыуйидагига тенг:

$$\overline{S_6}=\frac{b_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{3(1-64)}{1-2}=189.$$

Агар d арифметик прогрессиянинг айирмаси бщлса, у ъолда шартларга кщра

$$\begin{cases} a_1=3, \\ a_1+2d=6 \end{cases}$$

тенгламалар системасига эга бщламиз, бундан $d=\frac{3}{2}$. Демак, $a_{12}= a_1+11d=39/2$. Шу билан арифметик прогрессия дастлабки 12 та ъади йиьиндиси ушбуга тенг:

$$S_{12}=\frac{(a_1+a_{12})\cdot 12}{2}=\left(3+\frac{39}{2}\right)\cdot 6=135.$$

Шундай ыилиб, излана тган йиьинди $S_{12}+\overline{S_6}=189+135=324.$

16 - м и с о л. $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ мос равишда арифметик ва геометрик прогрессиялар бщлиб, $a_2> a_1>0$, $a_1=b_1$ ва $a_2=b_2$ бщлсин. Ъар ыандай $k\geq 3$ да $a_k<b_k$ бщлишини исботланг.

Е ч и л и ш и . Агар q геометрик прогрессиянинг махражи бщлса, у ъолда $q=b_2/b_1=a_2/a_1>1$ ва шу билан бирга $\{b_n\}$ Fсувчи геометрик прогрессия: $0<b_1<b_2<b_3< \ldots <b_n<b_{n+1}$.

$$b_1/b_2=b_n/b_{n+1}$$

бщлгани учун

$$\frac{b_1-b_2}{b_n-b_{n+1}}=\frac{b_1}{b_4}$$

ъосилавий пропорция ва $b_1/b_n<1$ ва $b_n-b_{n+1}<0$ эканидан ъар ыандай $n\geq 2$ да

$$b_{n+1}>b_n+b_2-b_1$$

га эгамиз. Шундай ыилиб,

$$b_3>b_2+(b_2-b_1),$$
$$b_4>b_3+(b_2-b_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n>b_{n-1}+(b_2-b_1),$$
$$b_{n+1}>b_n+(b_2-b_1).$$

Бу тенгликларни ыщшиб, ыуйидагига эга бщламиз.

$$b_{n+1}>b_2+(n-1)(b_2-b_1).$$

Бундан ташыари, $b_2-b_1=a_2-a_1$ бщлганлигидан:

$$b_2+(n-1)(b_2-b_1)=a_2+(n-1)(a_2-a_1)=a_{n+1}.$$

Шундай ыилиб,

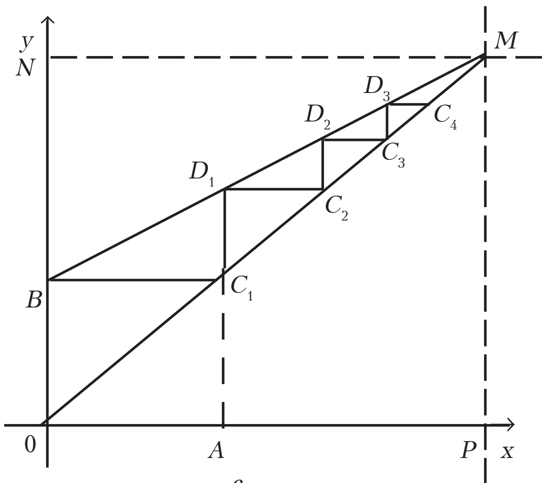
$$b_{n+1}>a_{n+1},\ n\geq 2.$$

Шуни исботлаш талаб ыилинган эди.

b_1=1 ва $q < 1$ да $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъади йиьиндиси ушбу кщринишга эга:

$$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Бу формула содда геометрик талыинга эга. $0<q<1$ бщлсин. 6- чизмада OAC_1B ва $OPMN$ томонларининг узунликлари мос равишда 1 ва $1 \,/\, (1-q)$ бщлган квадратлар.



6- чизма.

$$OB \| C_1D_1 \| C_2D_2 \| C_3D_3 \| ..., BC_1 \| D_1C_2 \| D_2C_3 ... .$$

MOB ва MC_1D_1 учбурчаклар щхшаш, шу сабабли уларнинг OB ва C_1D_1 томонлари узунликларининг нисбати бу учбурчакларнинг уларга мос баландликлари нисбатига тенг, яони

$$\frac{OB}{C_1D_1} = \frac{OP}{AP};$$

бундан $C_1D_1 = q$ экани келиб чиыади.

BC_1D_1, $D_1C_2D_2$, $D_2C_3D_3$, ... учбурчаклар щхшаш, чунки

$$\frac{D_1C_1}{BC_1} = \frac{D_2C_2}{D_1C_2} = \frac{D_3C_3}{D_2C_3} = ... = q.$$

Шунинг учун

$$OB=1,\quad C_1D_1=q,\quad C_2D_2=q^2,\quad C_3D_3=q^3,\ \dots .$$

Шундай ыилиб,

$$S_n= OB + C_1D_1 + C_2D_2+\dots+C_nD_n,$$

яони умумий ъади $b_n=q^n$ га тенг бщлган геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъади йиьиндиси D_n нуыта ординатасига тенг.

Энди $-1< q <0$ бщлган ъолни ыараймиз. 7- чизмада OAC_1B – томонининг узунлиги 1 га тенг квадрат,

$$C_1D_1 = |q| = -q > 0;$$

$$OB\|C_1D_2\|C_2D_3\|C_3D_4\|\dots;\quad OB\|C_2D_2\|C_3D_3\|C_4D_4\|\dots$$

M нуыта (OC ва BD нинг кесишиш нуытаси) $\left(\frac{1}{1-q};\frac{1}{1-q}\right)$ координаталарга эга эканини кщрамиз. OBM, C_1D_1M, C_2D_2M, C_3D_3M, C_4D_4M, C_5D_5M, C_6D_6M, ... учбурчакларнинг щхшашлигидан:

$$C_1D_1 = |q|,\ C_2D_2 = |q|^2,\ C_3D_3 = |q|^3,\ C_4D_4 = |q|^4,\dots$$

эканлиги келиб чиыади.

Шундай ыилиб, ($|q| = -q$ бFлганидан),

$$S_n=OB- C_1D_1+ C_2D_2- C_3D_3+ \dots +(-1)^nC_nD_n,$$

демак, бу ъолда ъам умумий ъади $b_n=q^m$ бщлган геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъади йиьиндиси D_n нуыта ординатасига тенг.

Иккала ъолда ъам D_n нуыта n катталашганда M нуытага яыинлашади, шу сабабли барча етарлича катта n ларда ыуйидаги таырибий формула щринли бщлади:

$$S_n \approx \frac{1}{1-q},\ 0<|q|<1.$$

Махражи q га тенг бщлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъади кщпайтмаси $\Pi_n=b_1b_2\cdot \dots \cdot b_n$ ушбу

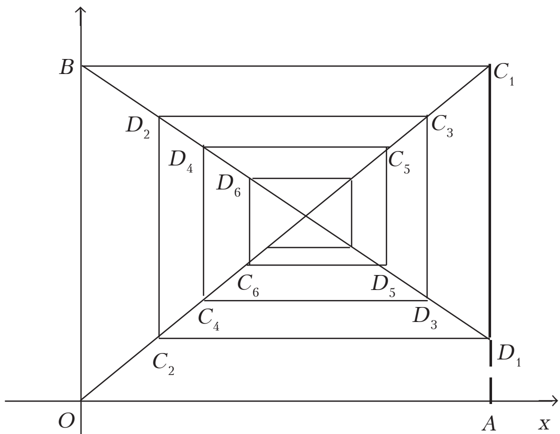
$$\Pi_n = b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

формула бFйича ъисобланади.

Махражи q бщлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг истал-ган k та кетма-кет ъадининг кщпайтмаси $b_{m+1}b_{m+2}\ \dots\ b_{m+k}$

$$\frac{П_{m+k}}{П_m}=b_1^k\cdot q^{\frac{k(2m+k-1)}{2}}$$

формула бщйича ъисобланади.



7- чизма

17 - м и с о л. $\{b_n\}$ махражи q бщлган геометрик прогрес-сия бщлсин. Ыуйидагиларни топинг:

а) агар $b_1=\sqrt[5]{6}, q=\sqrt[15]{3}$ бFлса, $П_{10}$ ни;

а) агар b_3=8, $b_1\ b_2\ b_3$=64 бщлса, $b_4\ b_5\ \dots\ b_{10}$ ни.

Е ч и л и ш и . а) Ыуйидагиларга эгамиз:

$$\text{а)}П_{10}=b_1^{10}q^{45}=\left(\sqrt[5]{6}\right)^{10}\cdot\left(\sqrt[15]{3}\right)^{45}=3^2\cdot2^2\cdot3^5=3^5\cdot4=972;$$

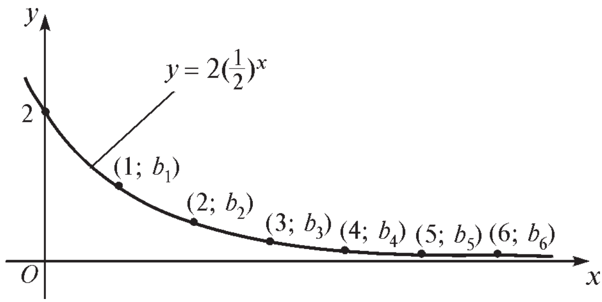
б) Масала шартига кщра: b_1q^2=8 ва $b_1^3\ q^3$=64. Бундан b_1q=4, ва, демак, q=2, b_1=2. Шунинг учун

$$b_4\dots b_{10}=\frac{П_{10}}{П_3}=\frac{2^{10}\cdot2^{45}}{2^6}=2^{49}.$$

$\{b_n\}$ махражи q бщлган геометрик прогрессия ва q>0, $q\neq1$ бщлсин. У ъолда $(1;\ b_1)$, $(2;\ b_2)$, ... ,$(n;\ b_n)$,... нуыталарнинг ъаммаси, яони координата текислигидаги

$$(1;\ b_1),\ (2;\ b_1q),\ \dots,\ (n;\ b_1q^{n-1}),\dots$$

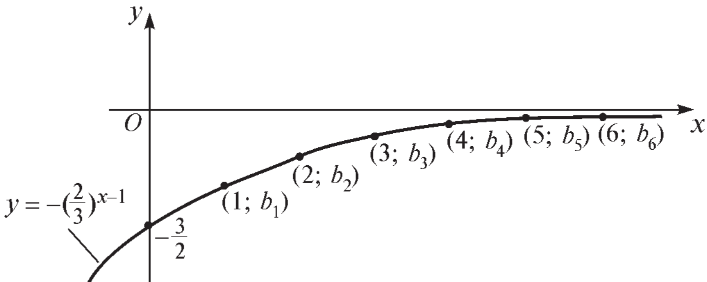
нуыталарнинг ъаммаси $y=\frac{b_1}{q}q^k$ функция графигига тегишли бщлади. Масалан, ординаталари умумий ъади $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ бщлган геометрик прогрессиянинг ъадлари бщлган $\left(n;\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$, $n\in N$ кщринишдаги ъамма нуыталар $y=2\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функция графигида тади (1.8- чизма).



8- чизма.

Даражали функциянинг хоссаларидан тескари тасдиы ъам тщьри эканлиги келиб чиыади: ъар ыандай $y=bq^x-1$ *кўрсаткичли функциянинг қийматлари* $b\neq0$ ва $q\neq0$, $q\neq1$ *бўлиб, x барча натурал сонлар тўпламидан қийматлар қабул қилганида биринчи ҳади* b_n *ва махражи q бўлган геометрик прогрессия b, bq,* bq^2*, … ни ташкил қилади.*

Масалан, $y=-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$ функцияга умумий ъади $b_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ бщлган геометрик прогрессия мос келади (9- чизма).



9- чизма.

Арифметик ва геометрик прогрессиялар щзаро узвий боьланган.

Агар $\{a_n\}$ *айирмаси d бўлган арифметик прогрессия бўлса, у ҳолда*

$$b_n = b^{a_n}$$

(бунда, $n\in N$, $b>0$ ва $b\neq 1$) *кетма-кетлик геометрик прогрессия бўлади. Унинг биринчи ҳади* b^{a_1} *га, махражи* b^d *га ва умумий ҳади*

$$b_n = b^{a_1} \cdot (b^d)^{n-1}$$

га тенг.

Масалан, агар умумий ъади $a_n=7+4(n-1)$ га тенг арифметик прогрессия берилган бщлса, у ъолда умумий ъади $b_n=10^7 \cdot 10000^{n-1}$ бщлган кетма-кетлик биринчи ъади $b_1=10^7$ ва махражи $q=10^4$ бщлган геометрик прогрессия бщлади.

Агар ҳадлари мусбат бўлган $\{b_n\}$ *геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади* b_1 *ва махражи q бўлса, у ҳолда умумий ҳади*

$$a_n= \log_c b_n$$

(бунда $c>0$ ва $c\neq 1$) *бўлган кетма-кетлик биринчи ҳади* $\log_c b_n$ *га, айирмаси* $\log_c q$ *га тенг бўлган арифметик прогрессия бўлади. Унинг умумий ҳади*

$$a_n=\log_c b_1+(n-1)\log_c q$$

кщринишда бщлади.

Масалан, агар умумий ъади $b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ кщринишда бщлган геометрик прогрессия берилган бщлса, у ъолда умумий ъади

$$a_n = -\lg 2 + (n-1)\lg\frac{1}{2}$$

бщлган кетма-кетлик арифметик прогрессияни ташкил ыилиб, унда

$$a_1 = -\lg 2, \quad d = \lg\frac{1}{2}.$$

Агар $\{b_n\}$ *махражи q бўлган геометрик прогрессия ва* $\{n_k\}$, $k\in N$ *ўсувчи натурал сонлардан иборат, айирмаси d га тенг бўлган арифметик прогрессия бўлса, у ҳолда* b_{n_k} , $k\in N$ биринчи *ҳади* b_{n_1} га, махражи эса q^d га тенг геометрик прогрессия бщлади.

Масалан, $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ бFлиб, $\{n_k\}$ кетма-кетлик эса 5 га бщлинганда ыолдиыда 1 чиыадиган натурал сонлардан ташкил топган кетма-кетлик бщлсин. У ъолда $\{n_k\}$ кетма-кетлик биринчи ъади 1 га, ва айирмаси 5 га тенг бщлган арифметик прогрессия 1, 6, 11, 16, 21, ..., бошыача айтганда, умумий ъади

$$n_k = 5(k-1)+1,\ k\in N$$

бщлган арифметик прогрессия бщлиб, умумий ъади

$$b_{n_k} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{32}\right)^{k-1}, k \in N$$

бщлган кетма-кетлик биринчи ъади $-1/2$ ва махражи $-\frac{1}{32}$ бщлган геометрик прогрессиядир.

Агар $\{b_n\}$ махражи q *га,* $\left\{b_{n_k}\right\}$, $k\in N$ *кетма-кетлик махражи* q^d *га тенг геометрик прогрессия бўлиб, бунда* d *натурал сон*, у ҳолда $\{n_k\}$, $k\in N$ *кетма-кетлик биринчи ҳади* n_1 *ва айирмаси* d *га тенг арифметик прогрессиядир.*

Умумий ъади

$$x_{n+1} = qx_n + d, \quad x_1 = a$$

(бунда q ва d *лар* $q^2 + d^2 \neq 0$ шартни ыаноатлантирувчи берилган сонлар) рекуррент муносабат билан аниыланувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик арифметик ва геометрик прогрессияларнинг кFп хоссаларини Fзида мужассамлаштирган. Хусусан, $q = 1$ да $\{x_n\}$ кетма-кетлик айирмаси d га тенг бщлган арифметик прогрессия, $d=0$ да эса махражи q га тенг бщлган геометрик прогрессия бFлади.

Рекуррент муносабат билан аниыланувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг умумий ъади формуласи $q\neq 1$ бщлганда

$$b_{n+1} = x_{n+1} + \frac{d}{q-1},\ b_1 = a + \frac{d}{q-1}$$

тенгликлар щринли бщладиган $\{b_n\}$ кетма-кетлик учун махражи q бщлган геометрик прогрессия эканлиги маолум бщлса, у ъолда топиш мумкин:

$$b_{n+1} = \left(a + \frac{d}{q-1}\right)q^n,\ x_{n+1} = \left(a + \frac{d}{q-1}\right)q^n - \frac{d}{q-1},$$

бунда

$$x_n = \frac{d}{q-1} + \left(a + \frac{d}{q-1}\right) q^n, n \in N, \ n \geq 2.$$

Бундан $\{x_n\}$ учун q ва d сонлар ($q \neq 1$ да) бу кетма-кетликнинг ъадлари орыали ыуйидаги формулалар рдамида аныланади:

$$q = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}, d = \frac{x^2{}_n - x_{n-1}x_{n+1}}{x_n - x_{n-1}}, n \geq 2.$$

Биринчи формуладан $q \neq 1$ да

$$y_n = x_{n+1} - x_n \ , \ \ y_1 = x_2 - x_1$$

ыаноатлантирувчи $\{y_n\}$ кетма-кетлик махражи q бщлган геометрик прогрессия эканлиги келиб чиыади. Шу сабабли, хусусий ъолда, ыуйидаги тенглик щринли: $(x_{n+1} - x_n)^2 = (x_n - - x_{n-1})(x_{n+2} - x_{n+1})$, $n \geq 2$.

18 - м и с о л. Ъадлари $x_{n+1} = 3x_n + 2n - 3$, $x_1 = 2$ тенгликларни ыаноатлантирувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг умумий ъади формуласини топинг.

Е ч и л и ш и .

$$x_{n+1} + (n+1) = 3(x_n + n) - 2, \quad n \geq 1$$

бщлгани учун $\{y_n\}$ (бунда $y_n = x_n + n$) кетма-кетлик ыуйидаги рекуррент

$$y_{n+1} = 3y_n - 2, \ y_1 = 3$$

муносабатни ыаноатлантиради, бундан $n \geq 1$ да юыоридаги формулага кFра ыуйидагига эга бFламиз:

$$y_{n+1} = \frac{-2}{1-3} + \left(3 + \frac{-2}{3-1}\right) \cdot 3^n, \ n \geq 1,$$

яони

$$y_{n+1} = 1 + 2 \cdot 3^n, \quad n \geq 1.$$

Шунинг учун

$$x_n = 1 - n + \frac{2}{3} \cdot 3^n, \ n \geq 1.$$

1- топшириқ

1. Биринчи ъади 2 га, махражи эса $\frac{1}{2}$ га тенг геометрик прогрессиянинг дастлабки олтита ъадини топинг.

2. Иккинчи ъади 3 га, учинчи ъади 9 га тенг геометрик прогрессиянинг дастлабки тщртта ъадини топинг.

3. Геометрик прогрессиянинг учинчи ъади 4 га тенг. Шу прогрессиянинг дастлабки бешта ъади кщпайтмасини топинг.

4. $\{b_n\}$ геометрик прогрессия бщлиб, унда $b_5=3$, $b_7=\frac{3}{4}$. b_4, b_9 ни топинг.

5. $\{b_n\}$ геометрик прогрессия бщлиб, унда b_2 ва q берилган бщлсин. b_4, b_7, b_{25}, b_k ни топинг.

2- топшириқ

1. Биринчи ъади $1/2$ га, махражи эса 2 га тенг геометрик прогрессиянинг дастлабки тщртта ъадини топинг.

2. Учинчи ъади 4 га, тщртинчи ъади эса 8 га тенг геометрик прогрессиянинг дастлабки 5 та ъадини топинг.

3. Иккинчи ъади 2 га тенг геометрик прогрессиянинг дастлабки учта ъади кщпайтмасини топинг.

4. $\{b_n\}$ геометрик прогрессия бщлиб, унда $b_4=2$, $b_6=\frac{1}{2}$ бщлсин. b_3, b_5, b_8 ни топинг.

5. $\{b_n\}$ геометрик прогрессия бщлиб, унда b_3 ва q берилган бщлсин. b_5, b_{17}, b_{37}, b_k ни топинг.

3- топшириқ

1. Махражи q бщлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда:

1) $b_1=\frac{1}{3}, q=\frac{1}{2}$ бщлса, b_5 ни;

2) $b_9=-1$, $q=-1$ бщлса, b_1 ва b_{17} ни;

3) $b_4=9$, $b_8=729$ бўлса, b_1 ва q ни топинг.

2. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $b_1=1$, $b_4=\frac{1}{8}$ бщлса, b_2, b_3, b_5, b_6 ни топинг.

3. Геометрик прогрессиянинг биринчи ва учинчи ъадлари йиьиндиси 10 га, учинчи ва тщртинчи ъадлари йиьиндиси эса 20 га тенг. Шу прогрессиянинг биринчи ъади ва махражини топинг.

4. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $b_1=4$ ва $q=\frac{3}{2}$ бщлса, 75 сони унинг бирор ъади бщла оладими?

4- топшириқ

1. Махражи q бщлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда:

1) агар $b_1=\frac{1}{3}, q=\frac{1}{2}$ бщлса, b_5 ни;

2) агар $b_{12}=-2$ ва $q=-1$ бўлса, b_1 ва b_9 ни;

3) агар $b_3=9$ ва $b_7=729$ бщлса, b_1 ва q ни топинг.

2. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $b_1=1/27$ ва $b_7=27/64$ бщлса, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 ни топинг.

3. Геометрик прогрессиянинг биринчи ва учинчи ъадлари йиьиндиси 10, иккинчи ва тщртинчи ъадлари йиьиндиси 30 га тенг. Шу прогрессиянинг биринчи ъади ва махражини топинг.

4. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $b_1=3$ ва $q=\frac{4}{3}$ бщлса, 26 сони унинг бирор ъади бщла оладими?

5- топшириқ

1. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $b_1=3$ ва $q=2$ бщлса, унинг дастлабки бешта ъади йиьиндисини топинг.

2. Геометрик прогрессиянинг дастлабки иккита ъади йиьиндиси — 1 га, ундан кейинги иккита ъадининг йиьиндиси — 4 га тенг. Шу прогрессиянинг дастлабки олтита ъади йиьиндисини топинг.

3. Ъисобланг:

$$\frac{1+3+3^2+\ldots+3^9}{3^{10}-1}.$$

4. $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $q=1/3$, $b_4=1/54$ эканлиги маолум. Агар прогрессия бир неча ъадларининг йиьиндиси $121/162$ га тенг бщлса, шу прогрессиянинг ъадлари сонини топинг.

6- топшириқ

1. $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $b_1=2$ ва $q=1/2$ бщлса, унинг дастлабки еттита ъади йиьиндисини топинг.

2. Геометрик прогрессия дастлабки учта ъади йиьиндиси $3/8$ га, ундан кейинги учта ъадининг йиьиндиси 3 га тенг. Шу прогрессиянинг дастлабки 9 та ъади йиьиндисини топинг.

3. Ҳисобланг:

$$\frac{1+2+2^2+\ldots+2^{11}}{1+2+\ldots+2^5}.$$

4. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $b_1=5$, $b_5=405$ бўлиб, ҳамма ҳадларининг йиғиндиси 1720 га тенг бўлса, шу прогрессиянинг ҳадлари сонини топинг.

Машқлар

1. Махражи q ва дастлабки n та ҳади йиғиндиси S_n бўлган геометрик прогрессияда:

1) $b_1=18$, $q=1/9$ бўлса, b_2 ни;
2) $b_1=24$, $b_2=36$ бўлса, q ни;
3) $b_5=36$, $b_7=144$ бўлса, b_6 ни;
4) $b_6=1/486$, $b_8=1/4374$ бўлса, b_7 ни;
5) $b_1=5$, $q=3$ бўлса, b_5 ни;
6) $b_3=10$, $b_5=40$ бўлса, b_1 ни;
7) $b_1=0{,}01$, $b_2=0{,}03$ бўлса, b_8 ни;
8) $b_1=10$, $b_2+b_3=60$ бўлса, q ни;
9) $8(b_1+b_2+b_3)=b_4+b_5+b_6$ бўлса, q ни;
10) $b_3=4$, $b_7=0{,}25$ бўлса, b_5 ни;
11) $b_{11}=25$, $b_{15}=400$ бўлса, b_{13} ни;
12) $b_{13}=8$, $b_{51}=128$ бўлса, b_{32} ни;
13) $b_4=5$, $b_{16}=45$ бўлса, b_7 ни;
14) $b_5=\frac{1}{2}$, $b_{17}=\frac{1}{144}$ бўлса, b_{14} ни;
15) $b=3$, $q=5$ бўлса, S_4 ни;
16) $b_2=8$, $b_3=4$ бўлса, S_8 ни;
17) $q=5$, $S_5=781/75$ бўлса, b_1 ни;
18) $b_1=5$, $q=3$, $S_n=200$ бўлса, n ни;
19) $b_1=\sqrt[3]{2}-1$, $b_3=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\cdot\sqrt[3]{4}$ бўлса, S_{12} ни;
20) $b_1+b_2+b_3=62$, $b_1^2+b_2^2+b_3^2=2604$ бўлса, b_1 ва q ни;
21) $b_1=-2$, $b_6=-486$ бўлса, S_6 ни;
22) $b_1=\sqrt{2}$, $b_9=16\sqrt{2}$ бўлса, q ни;
23) $q=-1/2$, $S_8=85/64$ бўлса, b_1 ни;

24) $q=\sqrt{2}$, $S_7=15\sqrt{2}+14$ бщлса, b_7 ни;

25) $b_1=9$, $b_n=\frac{64}{81}, S_n=25\frac{34}{81}$ бўлса, n ни;

26) $b_1=\sqrt{3}$, $b_n=4\sqrt{3}$, $S_n=7\sqrt{3}+3\sqrt{6}$ бщлса, q ни;

27) $b_1=-2$, $q=\frac{-3}{2}$, $S_n=8\frac{5}{16}$ бщлса, n ни;

28) $b_1=\sqrt{3}$, $q=\sqrt{3}$, $S_n=4\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$ бщлса, b_n ни;

29) $q=\frac{1}{2}$, $b_n=2$, $S_n=254$ бщлса, b_1 ни;

30) $q=\frac{3}{2}$, $b_n=\frac{27}{8}$, $S_n=8\frac{19}{24}$ бщлса, n ни;

31) $b_1=15$, $S_3=21\frac{2}{3}$ бўлса, q ни;

32) $b_1=\sqrt{2}$, $S_3=4\sqrt{2}+\sqrt{6}$ бщлса, b_3 ни;

33) $b_3=18$, $S_3=26$ бўлса, b_1 ни;

34) $b_3=135$, $S_3=195$ бўлса, q ни;

35) $q=\frac{3}{2}$, $b_6=2\frac{17}{32}$ бщлса, b_1 ни;

36) $q=3$, $b_4=54$ бўлса, S_4 ни;

37) $S_n=3^n-1$ бўлса, b_1 ва q ни;

38) $b_1+b_2+b_3=70$, $b_1, b_2, b_3, b_4=800$ бўлса, b_1 ва q ни;

39) $b_1=a$, $b_n=b$ бўлса, S_n ни;

40) $b_1+b_2+b_3=31$, $b_1+b_3=26$ бўлса, b_1 ва q ни;

41) $b_1+b_2+b_3=14$, $b_1^3+b_2^3+b_3^3=584$ бўлса, b_1 ва q ни;

42) $b_1+b_2+b_3=13$, $3(b_1+b_2)=b_2+b_3$ бўлса, b_1 ва q ни;

43) $b_2+b_6=34$, $b_3+b_7=68$, $S_n=63$ бўлса, b_1, q ва n ни;

44) $b_1+b_2+b_3=26$, $b_1^2+b_2^2+b_3^2=364$ бўлса, b_2 ни;

45) $b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2=85$, $S_4=15$ бщлса, $b_2\cdot b_3$ ни;

46) $b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2=340$, $S_n=30$ бщлса, $\sqrt{b_2\cdot b_3}$ ни;

47) $q=2$, $S_7=635$ бўлса, b_1 ва b_8 ни;

48) $b_1+b_5=51$, $b_2+b_6=103$, $S_n=3069$ бўлса, n ни;

49) $b_2-b_1=18$, $b_4-b_3=162$ бўлса, b_5 ни;

50) $b_1+b_2+b_3=21$, $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}=\frac{7}{12}$ бўлса, b_1 ва q ни;

51) $b_1 + b_2 + b_3 = 195$, $b_3 - b_1 = 120$ бўлса, b_2 ни;

52) $b_m = \alpha$, $b_n = \beta$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ бўлса, b_p ни;

53) $b_1 + b_2 + b_3 = 21$, $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} = \frac{7}{12}$ бўлса, b_2^2 ни;

54) $b_1 + b_n = 66$, $b_n b_{n-1} = 128$, $S_n = 126$ бўлса, n ни;

55) $b_1 + b_4 = \frac{7}{16}$, $b_1 - b_3 + b_2 = 7/8$ бўлса, S_5 ни;

56) $S_2 = 4$, $S_3 = 13$ бўлса, S_5 ни топинг.

2. Биринчи ъади 6 га, махражи эса q $(q^2 \neq 1)$ га тенг геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъади квадратлари йиьиндисини топинг.

3. Ъадларининг сони жуфт сон бщлган геометрик прогрессия барча ъадларининг йиьиндиси тоы щринда турган ъадлар йиьиндисидан 3 марта катта. Шу прогрессиянинг махражини топинг.

4. Агар $\{a_n\}$ арифметик прогрессияда ва $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда барча ъадлар мусбат сонлар бщлиб, $a_1 = b_1$, $a_3 = b_3$, $a_2 \neq b_2$ бҒлса, a_2 ва b_2 сонлардан ыайси бири катта ва нега катта?

5. 3 ва 19683 сонлари орасига 7 та шундай сонни жойлаштирингки, бу 9 та соннинг ъаммаси $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг ъадлари бщлсин. Агар $b_1 = 3$ бщлса, b_5 ни топинг.

6. Айтишларига ыараганда, Ъинд подшоъи шахматни щйлаб топган одамга щз-щзига мукофот белгилашни таклиф ыилибди. У киши шахматнинг биринчи катаги учун бир дона, иккинчи катаги учун икки дона, учинчи катаги учун тщрт дона ва ъ.к. буьдой беришни, умуман, ъар бир навбатдаги катак учун олдинги катакка берилганидан 2 марта ортиы буьдой дони беришни сщрабди. Шахмат ихтирочисига бериладиган донлар сони нечта раыам билан тасвирланади? Ъосил бщлган сонни щыинг.

7. Агар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ геометрик прогрессиялар бщлса, у ъолда ыуйидаги кетма-кетликлар геометрик прогрессия бщладими:

1) $\{a_n + b_n\}$; 2) $\{a_n - b_n\}$; 3) $\{a_n b_n\}$;
4) Агар $b_n \neq 0$ бщлса, $\{a_n / b_n\}$; 5) $\{|a_n|\}$.

8. a_1, a_2, a_3 сонлар арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлиши учун бу учта сон ыандай шартларни ыаноатлантириши керак?

9. Ъар ыандай учта ъар хил сон бир ваытнинг щзида арифметик ва геометрик прогрессияларнинг кетма-кет ъадлари бщла олмаслигини исботланг.

10. Ыуйидаги сонлар учликлари битта геометрик прогрессиянинг ъадлари бщла оладими:

1) 10, 11, 12;

2) 18, 8, 64/27;

3) 2, $\sqrt{6}$, 4, 5;

4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$?

11. Тщьри тщртбурчак томонларининг узунликлари бирор геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщла оладими?

12. Агар α, β, γ щткир бурчаклар айирмаси $\frac{\pi}{12}$ га тенг арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\gamma$ лар эса геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлса, шу бурчакларни топинг.

13. Тенгламани ечинг:

1) $1 + x + x_2 +\ldots+ x^{109} = 0$;

2) $3^{1+\sin x^2} + \sin^2 x^2 +\ldots+ \sin^n x^2 = \sqrt[3]{9}$;

14. Йиьиндини топинг:

1) $(a + b) + (a^2 + ab + b^2) +\ldots+ (a^n + a^{n-1}b +\ldots+ ab^{n-1} + b^n)$;

2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) +\ldots+ \left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$.

15. Агар $2x^4 = y^4 + z^4$, $xyz = 8$ ва $\log_y x$, $\log_z y$ ва $\log_x z$ сонлар геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари эканлиги маолум бщлса, x, y, z сонларни топинг.

16. Берилган учта сон зилиш тартибида геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщладиган x нинг ъамма ыийматларини топинг:

1) $9, 3^{\frac{1}{2}\lg x}, \left(\frac{1}{9}\right)^{\cos 2x}$; 2) $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 1)$.

17. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{x_3}{x_4}, \\ x_1 = 8x_4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15. \end{cases}$$

18. Йиьиндини ъисобланг:

1) $2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{222 \ldots 2}_{n \text{ та рақам}}$;

2) $7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777 \ldots 7}_{n \text{ та рақам}}$;

19. Ъар бир натурал $n \geq 3$ да ъисобланг:

$$\sqrt{\underbrace{44 \ldots 4}_{2nm \text{ та рақам}} + \underbrace{11 \ldots 1}_{n+1 \text{ та рақам}} - \underbrace{66 \ldots 6}_{nm \text{ та рақам}}}.$$

20. Тенгликни исботланг:

$$\underbrace{(66 \ldots 6)^2}_{n \text{ та рақам.}} + \underbrace{88 \ldots 8}_{n \text{ та рақам.}} = \underbrace{44 \ldots 4}_{2n \text{ та рақам}}.$$

21. $\underbrace{(11 \ldots 1)}_{n \text{ та рақам}} \cdot \underbrace{(100 \ldots 05)}_{n+1 \text{ та рақам}} + 1$ сон натурал соннинг квадрати эканини исботланг.

22. $\underbrace{99 \ldots 97}_{n-1 \text{ та рақам}}\ \underbrace{00 \ldots 02}_{n-1 \text{ та рақам}}\ \underbrace{99 \ldots 9}_{n \text{ та рақам}}$ сон натурал соннинг куби эканини исботланг.

23. x_1 ва x_2 сонлар $x^2 - 3x + a = 0$ тенгламанинг илдизлари, x_3 ва x_4 сонлар $x^2 - 12x + b = 0$ тенгламанинг илдизлари бщлсин. Агар x_1, x_2, x_3, x_4 сонлар щсувчи геометрик прогрессиянинг ъадлари бщлса, a ва b ни топинг.

24. Ъар бир натурал n да

1) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{5n-1}$ нинг 31 га каррали;

2) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{6n-1}$ нинг 364 га каррали эканини исботланг.

25. Агар биринчи ъади a ва махражи q бщладиган геометрик прогрессиянинг дастлабки $2n$ та ъади йиьиндиси биринчи ъади b ва махражи q^n бщлган геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъади йиьиндисига тенг бщлса, $b = a + aq$ бщлишини исботланг.

26. $\{b_n\}$ геометрик прогрессия учун ъар ыандай натурал $n \geq 2$ да ушбу тенгликлар щринли эканини исботланг.

1) $b_2 + b_4 + b_6 + \ldots + b_{2n} = \dfrac{q}{1+q} S_{2n}$;

2) $\dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{S}{b_1 b_n}$.

27. Геометрик прогрессияда унинг дастлабки тоы сондаги ъадлари квадратлари йиьиндиси шу ъадлар йиьиндисига ыолдиысиз бщлинишини исботланг.

28. Умумий ъади $b_n = (-1)^n \cdot a^{4n}p$ (бу ерда $a \neq 0$, $p \in N$) бщлган $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъади йиьиндиси

$$\frac{a^4 \cdot p}{a^4+1}((-a^4)^n - 1$$

га тенглигини исботланг.

29. Агар S_n ифода $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ъади йиьиндиси бщлса, у ъолда

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$$

бщлишини исботланг.

30. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессия бщлса, у ъолда $\{b_{n-1} - b_n\}$ кетма-кетлик ъам геометрик прогрессия бщлишини исботланг.

31. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг барча ъадлари мусбат ва $b_{p+k} = b$ бщлса, у ъолда

$$b_k = a^2\sqrt[k]{\left(\frac{b}{a}\right)^p}$$

бщлишини исботланг.

32. xy, y^2, z^2 сонлар арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлса, у ъолда y, z, $2yz$ сонлар геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлишини исботланг.

33. Агар a, b, c, d геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлса, у ъолда

$$1)\ (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2;$$

$$(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 = (a - d)^2$$

бщлишини исботланг.

34. Агар учта x, y, z сон геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлса, у ъолда

$$(x + y + 2)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$$

бщлишини исботланг.

35. Ъар ыандай $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда

$$(b_4 + b_5 + b_6)^2 = (b_1 + b_2 + b_3)(b_7 + b_8 + b_9)$$

бщлишини исботланг.

36. Агар $\{b_n\}$ геометрик прогрессияда $b_n = a$, $b_p = b$, $b_k = c$ бщлса, у ъолда $a^{p-k}\ b^{\,k-n}\ c^{n-1} = 1$ бҒлишини исботланг.

37. $C_m^k, C_m^{k+1}, C_m^{k+2}$ биномиал коэффициентлар $m \geq 2$ ва $0 \leq k < k + c \leq n$ шартларни ыаноатлантирувчи ъар ыандай натурал m ва k ларда ягона ва бирор геометрик прогрессиянинг ъадлари бщла олмаслигини исботланг.

38. Агар уч хонали соннинг раыамлари геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлиб, ундан 400 бирлик кичик соннинг раыамлари арифметик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари бщлса, шу уч хонали сонни топинг.

39. b_1, b_2, b_3 сонлар берилган тартибда геометрик прогрессиянинг кетма-кет ъадлари эканлиги маолум. Агар b_1, b_2+2, b_3 учта сон ва b_1, b_2+2, b_3+9 учта сон зилиш тартибида мос равишда арифметик ва геометрик прогрессияларнинг ъадлари бщлса, шу учта сонни топинг.

40. Айирмаси d га тенг $\{a_n\}$ арифметик прогрессия ва махражи q га тенг $\{b_n\}$ геометрик прогрессия берилган бщлсин.

Ыуйидагиларни топинг:

1) агар $a_1 = b_1$, $a_1 + a_2 - 3a_3 = b_1 + b_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ бўлса, q ни;

2) агар $a_2 = a_1 a_4$, $b_1 = a_4$, $b_2 = a_6$, $b_3 = a_3$ бўлса, q ни;

3) агар $b_1 = a_1 + 5$, $b_2 = a_2 + 6$, $b_3 = a_3 + 9$, $b_4 = a_4 + 15$ бўлса, q ни;

4) агар $a_1 = b_1 = 24$, $a_5 = b_2$, $a_n = b_8$ бўлса, q ни;

5) агар $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 + 12 = b_3$ бўлса, q ни;

6) агар $a_1 = b_1$, $a_3 = b_3$, $a_2 = b_2 + 2$, $a_4 = b_4 - 14$ бўлса, a ва d ни;

7) агар $a_1 = b_2$, $a_2 = b_3$, $b_1 + a_3 = 14$, $b_3 + a_1 = 12$, $b_2 > b_1$ бўлса, $q + d$ ни;

8) агар $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, $b_2 = a_2 - 1$, $b_3 = a_3 + 1$ бўлса, b_4 ни;

9) агар $b_1 + b_2 + b_3 = 28$, $a_1 = b_1$, $a_3 = b_3 - 4$ бўлса, b ни;

10) агар $b_1 + b_2 + b_3 = 28$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3 - 4$, $a_1 > a_2$ бўлса, $b_1 + b_4$ ни;

11) агар $b_2 = 8$, $b_5 = 512$, $q = 2d$, $b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3$ бўлса, $a_1 + b_6$;

12) агар $b_1 + b_2 + b_3 = 19{,}5$, $a_2 = b_1$, $a_8 = b_2$, $a_3 = b_3$ бўлса, $b_4 + b_5$ ни;

13) агар $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - 0{,}25$, $b_3 = a_3$, $a_4 < 0$ бўлса, $b_2 + a_5$ ни;

14) $a_1 + a_2 + a_3 = 51$, $b_1 = a_1 - 1$, $b_2 = a_2 - 7$, $b_3 = a_3 - 8$, $b_1 < b_2$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 555$ бўлса, n ни;

15) агар $b_1 + b_2 + b_3 = 65$, $a_1 = b_1 - 1$, $a_2 = b_2 - 8$, $a_3 = b_3 - 35$, $b_1 < b_2$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 200$ бўлса, n ни;

16) агар $b_1 + b_2 + b_3 = 217$, $b_1 = a_2$, $b_2 = a_2$, $b_2 = a_9$, $b_3 = a_{44}$; $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 820$ бўлса, n ни;

17) агар $b_1 + b_2 + b_3 = 76$, $b_1 = a_2$, $b_2 = a_4$, $b_3 = a_6$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 176$ бўлса, n ни;

18) агар $b_2 - b_1 = 4$, $b_3 - b_2 = 12$, $b_1 = a_1$, $b_3 = a_5$ бўлса, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{12}$ ни;

19) агар $b_3 - b_1 = 9$, $b_5 - b_3 = 36$, $b_1 < b_n$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_3$ бўлса, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{12}$ ни;

20) агар $a_1 + a_2 + a_3 = 54$, $a_1 < a_2$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - 9$, $b_3 = a_3 - 6$ бўлса, b_4 ни;

21) агар $b_1 + 4 = a_1$, $b_2 + 21 = a_2$, $b_3 + 29 = a_3$, $b_4 + 1 = a_4$ бўлса, a_6 ва b_5 ни;

22) агар $b_1 = a_1 = 1$, $a_9 = b_9$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 369$ бўлса, b_7 ни;

23) агар $a_1 = b_1 = 24$, $a_5 = b_2$, $a_{11} = b_3$ бўлса, $b_4 d + a_3 q$ ни;

24) агар $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 155$, $b_1 + b_2 = 9$, $a_1 = q$, $b_1 = d$ бўлса, $a_3 + b_3$ ни.

41. Агар $\{a_n\}$ ыатор шундай бFлсаки, унда $a_n + 1 = q\, a_n + d$ $q \neq 1$ ва $d \neq 0$ бщлса, у ъолда ыуйидагиларни исботланг:

1) $a_{n+1} = (1 + q)\, a_n - q \cdot a_{n-1}$, $n \geq 2$;

2) $S_{n+1} = (q + 2)\, S_n - (2q + 1) S_{n-1} + q S_{n-2}$, бунда $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

42. $A_1B_1C_1$ учбурчакка $A_2B_2C_2$ учбурчак ички чизилган бFлиб, унинг учлари $A_1B_1C_1$ учбурчакка ички чизилган айлана марказининг шу учбурчак $(A_1B_1C_1)$ томонларидаги проекцияларидан иборат. $A_2B_2C_2$ учбурчакка шу тарзда $A_3B_3C_3$ учбурчак ички чизилган ва ъ.к. $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ учбурчак бурчаклари катталикларини топинг.

43. Асослари $AB = a$ ва $A_1B_1 = b$, $a < b$ бўлган AA_1B_1B трапецияда A_2B_2 кесма унинг диагоналлари щрталарини бирлаштиради. AA_2B_2B трапецияда яна унинг диагоналлари Fрталарини бирлаштирувчи A_3B_3 кесма щтказилган ва ъ.к. $A_{n+1}B_{n+1}$ кесманинг узунлигини топинг.

44. Кетма-кетлик ушбу

$$a_{n+1} = 2a_n - 1, \quad n \geq 1$$

рекуррент формула билан берилган, агар $a_1 = 4$ бщлса, шу кетма-кетликнинг умумий ъадини топинг.

3- §. Сонли кетма-кетликлар ва уларнинг хоссалари

Агар ъар бир n натурал сонга a_n сон мос келтирилган бщлса, у ъолда

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$$

сонли кетма-кетлик (ки ыисыача кетма-кетлик) берилган дейилади.

$a_1, a_2, \ldots$ сонлар кетма-кетликнинг ъадлари, a_n сон *кетма-кетликнинг умумий ҳади*, n сон эса a_n *ҳаднинг номери* дейилади. Кетма-кетликни кщпинча $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}$ ки оддийгина a_n, $n=1, 2, \ldots$ деб белгиланади.

Кетма-кетлик

$$a_n = f(n),\ n \in N$$

формула рдамида берилиши мумкин, бунда $y = f(x)$, $x \in X$, $N \in X$ (... - бетга ыаранг), f – бирор функция. Бу ъолда мазкур формула $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг *умумий ҳади формуласи* дейилади.

Масалан,

а) $a_n = \sqrt{n}, n \in N$;

б) $an = n!$, $n \in N$;

в) $a_n = \begin{cases} n = 2k \text{ да}, & n^2, \\ n = 2k-1 \text{ да}, & \frac{1}{n} \end{cases}^{k=1,2}$.

Кетма-кетлик бошыа усуллар билан ъам берилиши мумкин. Масалан, n натурал сон учун $d(n)$ орыали n соннинг ъар хил бщлувчилари сони белгиланса, шундай $\{a_n\}$ кетма-кетликка эга бщламизки, унда $a_n = d(n)$ бщлиб, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 2$, $a_6 = 4$, $a_7 = 2$, ...

Шунингдек, кетма-кетликларни бериш учун рекуррент муносабатлардан ъам фойдаланилади. Кетма-кетликларни бу усулда беришда одатда унинг дастлабки битта ки бир нечта ъади ва унинг олдинги ъадлари орыали n- ъадини топиш формуласи кщрсатилади, яони кичик номерли ъадлари берилади. Масалан, агар

а) $n \geq 1$ да $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+1$ бўлса;

б) $n \geq 3$ да $b_1=1$, $b_2=2$, $b_n=2 \cdot b_{n-1}+b_{n-2}$ бўлса,

у ъолда бу рекуррент муносабатлардан

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=5$, ... ;

$b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=5$, $b_4=12$, $b_5=29$, ...

эканини топамиз.

$$n>k \text{ да } a_n=a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\ldots+a_k a_{n-k}$$

кщринишдаги рекуррент формула билан берилган $\{a_n\}$ кетма-кетлик k - *тартибли қайтма кетма-кетлик* дейилади, бунда a_1, a_2, ... , a_k ва k берилган сонлар, $k \in N$.

1- м и с о л. $\{a_n\}$ кетма-кетлик $n \geq 1$ да $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=5 \cdot a_{n+1}-6 \cdot a_n$ рекуррент муносабатлар билан берилган. Шу кетма-кетликнинг умумий ъади формуласини топинг.

Е ч и л и ш и . $n \in N$ да $b_{n+2}=5 \cdot b_{n+2}$ муносабатларни ыаноатлантирувчи ъамма $\{q^n\}$ кщринишдаги кетма-кетликларни топамиз. Бу муносабатда $b_{n+2}=q^{n+2}$, $b_{n-1}=q^{n+1}$ щрнига ыщйишларни бажариб, $q^2-5q+6=0$ эканини топамиз, бундан q учун иккита ыийматга эгамиз: $q_1=2$, $q_2=3$. Шундай ыилиб, $\{2^n\}$ ва $\{3^n\}$ кетма-кетликлар рекуррент муносабатни ыаноатлантиради. У ъолда умумий ъади $b_n=c_1 \cdot 2^n+c_2 \cdot 3^n$ бщлган кетма-кетлик ъам худди шу рекуррент муносабатни ыаноатлантиргани сабабли масалани ечиш учун c_1 ва c_2 сонларни $b_1=1$, $b_2=1$ бщладиган ыилиб танлаш ыолади. Бунда c_1 ва c_2 бирор щзгармаслар.

c_1 ва c_2 ни топиш учун

$$\begin{cases} 2c_1+3c_2=1, \\ 4c_1+9c_2=1 \end{cases}$$

системага эгамиз, бундан $c_1=1$, $c_2=-1/3$ эканини топамиз.

Шундай ыилиб, масала шартини ыаноатлантирувчи кетма-кетликнинг умумий ъади формуласини топамиз:

$$a_n=\left(1-\frac{1}{3}n\right)3^n=(3-n)3^{n-1}.$$

Умумий ъолда изоъ берамиз. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик

$$a_1=a, \quad a_2=b, \quad a_{n+2}+p \cdot a_{n+1}+qa_n=0, \quad n \geq 1$$

рекуррент муносабат билан берилган, яони 2- тартибли ыайтма кетма-кетлик бщлса, у ъолда $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг умумий ъади формуласи ушбу тарзда топилади:

а) агар $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ тенглама иккита ъар хил λ_1 ва λ_2 илдизга эга бщлса, у ъолда

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \quad n \geq 1,$$

бунда c_1, c_2 — бирор щзгармаслар;

б) агар $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ тенглама иккита бир хил ъаыиыий $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ илдизга эга бщлса, у ъолда

$$a_n = (c_1 + c_2 n) \cdot \lambda^n,\ n \geq 1,$$

бунда c_1, c_2 — бирор щзгармаслар.

Иккала ъолда ъам c_1 ва c_2 щзгармаслар $a_1=a$, $a_2=b$ бошланьич шартлардан аниыланади.

Агар ъар ыандай натурал n учун $a_{n+1} > a_n$ бщлса, яони агар

$$a_{n+1} > a_n,\ \ n \in N$$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик *ўсувчи кетма-кетлик* дейилади.

2 - м и с о л. Умумий ъади $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ бщлган кетма-кетлик щсувчи кетма-кетлик бщлишини исботланг.

Е ч и л и ш и . $a_{n+1} - a_n$ айирмани ыараймиз. Ушбуга эгамиз:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0\,.$$

Шундай ыилиб, ъар ыандай натурал n да $a_{n+1} > a_n$ тенгсизлик щринли. Демак, берилган кетма-кетлик щсувчи.

Умумий ъадлари $a_n = \sqrt{n},\ b_n = 2^{n-1},\ c_n = \log_2 n$ бщлган кетма-кетликлар ъам щсувчи кетма-кетликларга мисол бщлади.

Агар ъар ыандай натурал n учун $a_{n+1} < a_n$ тенгсизлик бажарилса, яони $a_{n+1} < a_n$, $n \in N$ бFлса, у ъолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик *камаювчи кетма-кетлик* дейилади.

3-м и с о л. Умумий ъади $a_n = -(n+1)$ бщлган кетма-кетлик камаювчи кетма-кетлик эканини исботланг.

Е ч и л и ш и . $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ бщлинмани ыараймиз. Ыуйидаги муносабатга эгамиз:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-(1+(n+1))}{-(n+1)} = \frac{-n-2}{-n-1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1.$$

Кетма-кетликнинг ъамма ъадлари манфий бщлгани учун ъар ыандай натурал n да $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ дан $a_{n+1} < a_n$ экани келиб чиыади. Демак, берилган кетма-кетлик камаювчи кетма-кетликдир.

Умумий ъади

$$a_n = \frac{n+1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}, \quad c_n = -(n^2 + n + 1)$$

бщлган кетма-кетликлар ъам камаювчи кетма-кетликларга мисол бщлади.

Агар ъар ыандай натурал n учун $a_{n+1} \le a_n$ тенгсизлик щринли бщлса, яони $a_{n+1} \le a_n$, $n \in N$ тенгсизлик бажарилса, у ъолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик *ўсмайдиган кетма-кетлик* дейилади.

Масалан, $a_n = 1/\left[\sqrt{n}\right]$, бунда $\left[\sqrt{n}\right]$ – шу $\sqrt{n}$ соннинг бутун ыисми, яони

$$1,\ 1,\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$$

кетма-кетлик щсмайдиган кетма-кетликдир, чунки

$$\frac{1}{\left[\sqrt{n+1}\right]} \le \frac{1}{\left[\sqrt{n}\right]}.$$

Агар ъар ыандай $n \in N$ учун $a_{n+1} \ge a_n$ тенгсизлик бажарилса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик *камаймайдиган кетма-кетлик* дейилади.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, ... кетма-кетликнинг ъар ыандай ъади щзидан кейинги ъаддан катта эмас. Шу сабабли, бу кетма-кетлик камаймайдиган кетма-кетликдир.

Тушунарлики, $\{a_n\}$ кетма-кетлик бир ваытнинг щзида щсмайдиган ва камаймайдиган бщлса, у ъолда бундай кетма-кетлик щзгармас кетма-кетлик бщлади:

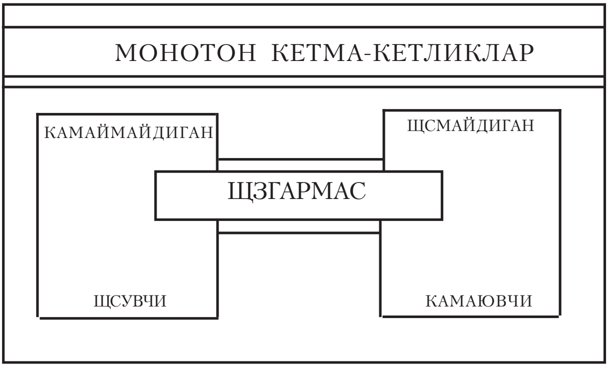
$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \ldots$$

Камаювчи, щсувчи, камаймайдиган ва щсмайдиган кетма-кетликлар *монотон*, камаювчи ва щсувчи кетма-кетликлар *қатъий монотон кетма-кетликлар* дейилади. Бу тушунчалар орасидаги боьланиш 10- чизмада кщрсатилган.

4 - м и с о л. Умумий ъади

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2}$$

бщлган кетма-кетликни монотонликка текширинг.



10- чизма.

Ечилиши. $a_{n+1} - a_n$ айирмани ыараймиз. Ыуйидагига эгамиз:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{(2n+3)(n+2)-(n+3)(2n+1)}{(n+3)(n+2)} =$$

$$= \frac{2n^2+4n+3n+6-2n^2-n-6n-3}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0;$$

ъар ыандай натурал n да $a_{n+1} - a_n > 0$, яони $a_{n+1} > a_n$ бщлгани учун берилган кетма-кетлик щсувчи.

5-мисол. Умумий ъади $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ бщлган кетма-кетликни монотонликка текширинг.

Ечилиши. $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ бщлинмани ыараймиз. Ыуйидагига эгамиз:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{(n+1)+1} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1.$$

Кетма-кетликнинг барча ъадлари мусбат бщлгани сабабли ъар ыандай натурал n да $a_{n+1} / a_n < 1$ тенгсизликдан $a_{n+1} < a_n$, $n \in N$ эканлиги келиб чиыади. Демак, берилган кетма-кетлик камаювчи кетма-кетликдир.

Агар ъар ыандай $n \geq n_0$ учун $a_{n+1} < a_n$ тенгсизлик щринли бFлса, у ъолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик $n_0(n_0 \geq 1)$ номердан бошлаб *камаювчи кетма-кетлик* дейилади.

n_0 номердан бошлаб камаймайдиган ва щсмайдиган ыаторлар ъам шунга щхшаш аниыланади.

6 - м и с о л. Умумий ъади

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

бщлган кетма-кетликни монотонликка текширинг.

Е ч и л и ш и . Кетма-кетликнинг ъамма ъадлари мусбат ва

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

бщлгани учун $n=1$ да $a_{n+1} = a_n$, яони $n \geq 2$ да $a_2 = a_1$ ва $a_{n+1} < a_n$,. Демак, $\{a_n\}$ кетма-кетлик $n_0 = 2$ номердан бошлаб камаювчи кетма-кетликдир. Шунингдек, у щсмайдиган (щсувчи) кетма-кетликдир, чунки

$$a_1 = a_2 > a_3 > a_4 \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

Агар ъар ыандай $n \in N$ учун $a_{n_0} \geq a_{n_0}$, $(a_{n_0} \leq a_n)$ бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг a_{n_0} ъади *энг катта (энг кичик)* ъад дейилади.

7 - м и с о л. Ушбу кетма-кетликнинг энг катта ва энг кичик ъадларини топинг:

$$a_n = \frac{3n-18}{3n-19}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Ечилиши.

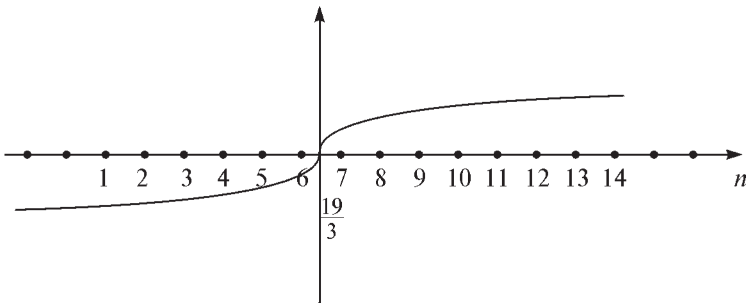
$$a_n = \frac{3n-18}{3n-19} = \frac{3n-19+1}{3n-19} = 1 + \frac{1}{3n-19}$$

бщлгани сабабли

$$a_{n-1} = \frac{1}{3n-19}.$$

n=1, 2, 3, 4, 5, 6 да $3n-19<0$ (11- чизма) ва $n \geq 7$ да $3n-19>0$, у ъолда $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг дастлабки олтита ъадининг ъар бири 1 дан кичик ва еттинчи ъадидан бошлаб ъар бир ъади 1 дан катта.

Демак, кетма-кетликнинг энг кичик ъади унинг дастлабки олтита ъади орасида, энг катта ъади эса ыолган ъадлари орасида тади.



11- чизма.

$a_{n+1} - a_n$ айирмани топамиз:

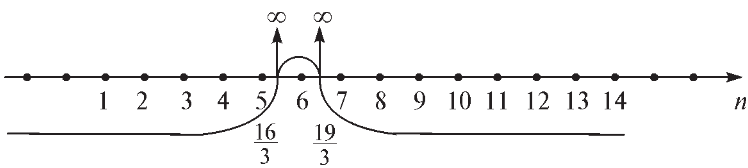
$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-18}{3(n+1)-19} - \frac{3n-18}{3n-19} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3n-16} - 1 - \frac{1}{3n-19} = \frac{-3}{(3n-16)(3n-19)}.$$

Бундан ыуйидаги хулосани чиыарамиз (12- чизма):

$$n = 1,2,3,4,5 \text{ да } a_{n+1} - a_n < 0;$$

$$n \geq 7 \text{ да } a_{n+1} - a_n > 0.$$



12- чизма.

Шундай ыилиб, a_6=0 ва $a_7 = 3/2$ мос равишда $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг энг кичик ва энг катта ъадларидир.

Шуни таокидлаймизки, *ҳар қандай кетма-кетлик ҳам энг катта (энг кичик) ҳадга эга бўлавермайди.* Масалан, $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in N$ камаювчи кетма-кетлик энг кичик ъадга эга эмас, $b_n = n^2$, $n \in N$ щсувчи кетма-кетлик энг катта ъадга эга эмас.

Агар шундай A сон мавжуд бщлиб, барча $n \in N$ учун $a_n \leq A$ тенгсизлик бажарилса, у ъолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик *юқоридан чегараланган кетма-кетлик* дейилади. A сон $\{a_n\}$ *кетма-кетликнинг юқори чегараси* дейилади.

Масалан, умумий ъади $a_n = -n^2$ бщлган кетма-кетлик юыоридан чегараланган кетма-кетлик, чунки $a_n < 0$, $n \in N$.

Умумий ъади $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{1}{2^n}$ ва $c_n = \sin^2 \frac{\pi n}{2}$ бщлган кетма-кетликлар ъам юыоридан чегараланган кетма-кетликларга мисол бщлади.

Агар шундай B сон мавжуд бщлиб, ъар ыандай натурал n учун

$$a_n \geq B, \ n \in N$$

тенгсизлик щринли бщлса, у ъолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик *қуйидан (пастдан) чегараланган кетма-кетлик* дейилади. B сон $\{a_n\}$ *кетма-кетликнинг ыуйи чегараси* дейилади.

Масалан, умумий ъади $a_n = n^3$ бщлган кетма-кетлик ыуйидан чегараланган кетма-кетликдир, чунки ъар ыандай натурал n да $a_n > 0$ тенгсизлик щринли. Умумий ъади

$$a_n = \frac{-(n+1)}{n}, b_n = (-1)^n, c_n = 3^n$$

бщлган кетма-кетликлар ъам ыуйидан чегараланган кетма-кетликларга мисол бщла олади.

Шуни таокидлаймизки, агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик юыоридан (ыуйидан) A сон (B сон) билан чегараланган бщлса, у ъолда A сондан катта (B сондан кичик) ъар ыандай сон $\{a_n\}$ кетма-кетлик учун юыори (ыуйи) чегара бщла олади.

Агар $\{a_n\}$ ыатор юыоридан ъам, ыуйидан ъам чегараланган бщлса, яони шундай A ва B сонлар мавжуд бщлиб, ъар ыандай натурал n учун $B \leq a_n \leq A$, яони

$$B \leq a_n \leq A, \quad n \in N$$

тенгсизликлар щрни бщлса, у ъолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик *чегараланган кетма-кетлик* дейилади

Масалан, умумий ъади $a_n = 1/3^{n+1}$ бщлган кетма-кетлик чегараланган кетма-кетликдир. Ъаыиыатан, ъар ыандай натурал n да ыуйидаги тенгсизликлар щринли:

$$0 < \frac{1}{3^{n+1}} < 1, \text{ яони } 0 < a_n < 1, \quad n \in N.$$

Умумий ъади

$$a_n = \cos^3 \frac{\pi \cdot n}{4}, \ b_n = \frac{n^2}{n^2+2}, \ c_n = (-1)^{n+1}$$

бщлган кетма-кетликлар чегараланган кетма-кетликларга мисол бщла олади.

Агар $\{a_n\}$ *кетма-кетлик учун шундай* $c > 0$ *сон мавжуд бўлиб, ҳар қандай натурал n да* $|a_n| \le c$ *тенгсизлик ўринли бўлса ва фақат шу ҳолда* $\{a_n\}$ *кетма-кетлик чегараланган бўлади.*

8 - м и с о л . Умумий ъади

$$a_n = \frac{n-2}{n+1}$$

бщлган кетма-кетлик чегараланган кетма-кетлик эканини исботланг.

Е ч и л и ш и . Ъар ыандай натурал n да

$$a_n = \frac{n-2}{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1} < 1,$$

яони $a_n<1$ бщлгани учун $\{a_n\}$ кетма-кетлик юыоридан чегараланган.

$a_n - a_{n+1}$ айирмани ыараймиз. Бунда ыуйидагига эгамиз:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n-2}{n+1} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{-3}{(n+1)(n+2)} < 0,$$

яони ъар ыандай натурал n да $a_n < a_{n+1}$ тенгсизлик щринли. Шу сабабли $a_1 = -1/2$ бу ыаторнинг энг кичик ъади. Шундай ыилиб, ъар ыандай натурал n учун $a_n \ge -1/2$ тенгсизлик щринли, яони $\{a_n\}$ кетма-кетлик ыуйидан чегараланган кетма-кетликдир. $\{a_n\}$ кетма-кетлик юыоридан чегараланган ва ыуйидан чегараланган бщлганлиги сабабли у чегараланган кетма-кетликдир.

10 - м и с о л. Умумий ъади $a_n = 1000^n / n!$ бщлган кетма-кетлик чегараланган кетма-кетлик эканини исботланг.

Е ч и л и ш и . Кетма-кетликнинг ъамма ъадлари мусбат, яони ъар ыандай натурал n да $a_n > 0$ бщлгани учун ыатор ыуйидан чегараланган.

a_{n+1} / a_n бщлинмани ыараймиз. Ыуйидагиларга эгамиз:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1000^n} = \frac{1000}{n+1}.$$

Бундан, $n + 1 \le 1000$ да, яони $k \le n = 999$ да $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ га эгамиз, шунинг учун $a_n \le a_{999}$, $1 \le n \le 999$. Бундан ташыари, $n \ge 999$ да $a_{n+1} / a_n \le 1$, яони $a_{n+1} \le a_n$ га эгамиз. Шундай ыилиб, ъар ыандай $n \ge 999$ да $a_n \le a_{999}$.

Шундай ыилиб, ъар ыандай натурал n учун

$$0 < a_n \le \frac{1000^{999}}{999}$$

тенгсизлик щринли. Демак, берилган кетма-кетлик чегараланган.

10-м и с о л. $a_n = n^2$ кетма-кетликнинг чегараланган эмаслигини исботланг.

Е ч и л и ш и . Берилган кетма-кетлик юыоридан чегараланган деб фараз ыилайлик. У ъолда шундай $A > 0$ мавжудки, ъар ыандай натурал n да $n^2 \le A$ тенгсизлик щринли бщлади. Бу тенгсизлик, хусусий ъолда, $n = \left[\sqrt{A}\right] + 1 \in N$ сон учун ъам тщьри бщлади, яони $\left(\left[\sqrt{A}\right] + 1\right)^2 \le A$ бщлади. Бироы $\left[\sqrt{A}\right] \le \sqrt{A} < \left[\sqrt{A}\right] + 1$ бщлгани учун, $\left(\left[A\right] + 1\right)^2 > \left(\sqrt{A}\right)^2 = A$ тенгсизлик щринлидир. Шундай ыилиб, $n = \left[\sqrt{A}\right] + 1$ сон учун $n^2 \le A$ ва $n^2 > A$ тенгсизликларнинг иккаласи ъам бажарилади. Бундай бщлиши эса мумкин эмас. Демак, фаразимиз нотщьри. Бу ердан $a_n = n^2$ кетма-кетликнинг чегараланмаган кетма-кетлик эканлиги келиб чиыади.

Агар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ иккита кетма-кетлик бщлса, у ъолда ыуйидаги кетма-кетликлар мос равишда уларнинг йиьиндиси, айирмаси, кщпайтмаси ва бщлинмаси бщлади:

$$\{a_n + b_n\},\ \{a_n - b_n\},\ \{a_n b_n\},\ \{a_n / b_n\};$$

бунда кетма-кетликлар бщлинмасини аниылашда ъар ыандай n да $b_n \ne 0$ деб фараз ыилинади. Масалан, $\left\{(-1)^n + n\right\}$, $\left\{(-1)^n - n\right\}$, $\left\{(-1)^n n\right\}$ ва $\left\{(-1)^n / n\right\}$ кетма-кетликлар мос равишда $\left\{(-1)^n\right\}$ ва $\{n\}$ кетма-кетликларнинг йиьиндиси, айирмаси, кщпайтмаси ва бщлинмасидир.

11 - м и с о л. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетликликда $a_1 < a_2$ ва унинг ъар бир ъади иккинчи ъадидан бошлаб иккита ыщшни ъади щрта арифметигидан катта бщлмаса, бу кетма-кетлик чегараланган кетма-кетлик бщладими?

Е ч и л и ш и . Масала шартидан $\{a_{n+1} - a_n\}$ кетма-кетлик камаювчи эмаслиги келиб чиыади. Шу сабабли барча n ларда

$$a_{n+1} - a_n \geq a_2 - a_1$$

тенгсизликка эга бщламиз. Бундан ыуйидагига эгамиз:

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots$$

$$+ (a_2 - a_1) + a_1 \geq (n-1)(a_2 - a_1) + a_1;$$

шунинг учун $\{a_n\}$ кетма-кетлик чегараланмаган кетма-кетликдир.

Монотон кетма-кетликлар ыуйидаги хоссаларга эга:

1°. c бирор сон бщлсин. У ъолда, агар $\{a_n\}$ щсувчи (камаювчи) кетма-кетлик бщлса, у ваытда:

а) $\{a_n + c\}$ — щсувчи (камаювчи) кетма-кетлик;

б) $\{ca_n\}$ кетма-кетлик $c > 0$ да щсувчи (камаювчи) кетма-кетлик;

в) $\{ca_n\}$ $c < 0$ да камаювчи (щсувчи) кетма-кетликдир.

Хусусан, агар $\{a_n\}$ щсувчи (камаювчи) кетма-кетлик бщлса, у ъолда $\{-a_n\}$ кетма-кетлик камаювчи (щсувчи) кетма-кетликдир.

2°. агар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлардан бири щсувчи, иккинчиси камаймайдиган кетма-кетлик бщлса, у ъолда $\{a_n + b_n\}$ кетма-кетлик щсувчи, агар кетма-кетликлардан бири камаювчи, иккинчиси щсмайдиган кетма-кетлик бщлса, у ъолда $\{a_n + b_n\}$ кетма-кетлик камаювчи кетма-кетликдир.

3°. а) агар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлардан бири щсувчи, иккинчиси эса камаймайдиган кетма-кетлик бщлиб, $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликларнинг барча ъадлари манфий бщлса, у ъолда $\{a_n b_n\}$ щсувчи кетма-кетликдир;

б) агар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлардан бири камаювчи иккинчиси эса щсмайдиган кетма-кетлик бщлиб, $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликларнинг барча ъадлари мусбат бщлса, у ъолда $\{a_n b_n\}$ кетма-кетлик камаювчи кетма-кетликдир;

агар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликларнинг барча ъадлари мусбат бщлса, у ъолда $\{a_n b_n\}$ щсувчи кетма-кетликдир;

агар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликларнинг барча ъадлари манфий бщлса, у ъолда $\{a_n b_n\}$ щсувчи кетма-кетликдир.

Хусусан, агар $\{a_n\}$ щсувчи(камаювчи) кетма-кетлик бщлса, у ъолда:

а) $a_n > 0,\ n \in N$ да $\{a_n^2\}$ щсувчи (камаювчи) кетма-кетлик;

б) $a_n<0$, $n\in N$ да $\left\{a_n^2\right\}$ камаювчи (щсувчи) кетма-кетликдир.

4°. Агар $\{a_n\}$ щсувчи (камаювчи) кетма-кетлик бщлса, у ъолда

а) $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ кетма-кетлик $a_n<0$, $n\in N$ да камаювчи (щсувчи) кетма-кетлик;

б) $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ кетма-кетлик $a_n<0$, $n\in N$ да щсувчи (камаювчи) кетма-кетлик бщлади.

12 - м и с о л. Мусбат ъадли иккита камаювчи кетма-кетликнинг кщпайтмаси камаювчи кетма-кетлик бщлишини исботланг.

Е ч и л и ш и . $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар камаювчи ва уларнинг ъадлари мусбат бщлганлиги сабабли ъар ыандай натурал n учун ушбуга эга бщламиз:

$$a_{n+1}b_{n+1}<a_nb_{n+1}<a_nb_n,\ n\in N,$$

яони $\{a_n\ b_n\}$ камаювчи кетма-кетликдир.

13 - м и с о л. Умумий ъади

$$a_n=\frac{-1}{1+n+n^2}$$

га тенг кетма-кетлик щсувчи кетма-кетлик эканини исботланг.

Е ч и л и ш и . $\{n^2\}$ кетма-кетлик мусбат ъадли $\{n\}$ кетма-кетликнинг квадрати сифатида щсувчи кетма-кетликдир. $\{n^2+n+1\}$ кетма-кетлик иккита $\{n^2\}$ ва $\{n+1\}$ щсувчи кетма-кетликларнинг йиьиндиси сифатида щсувчи кетма-кетликдир. $\{n^2+n+1\}$ кетма-кетликнинг барча ъадлари мусбат ва щзи щсувчи бщлгани учун

$$\left\{\frac{1}{n^2+n+1}\right\}$$

кетма-кетлик камаювчи кетма-кетликдир.

Ниъоят, $\left\{\frac{-1}{n^2+n+1}\right\}$ кетма-кетлик 1° хоссанинг в) бандига асосан щсувчи кетма-кетликдир.

14 - м и с о л. Умумий ъади

$$a_n=2n^2+20n+48-\frac{25}{(5n-31)^2+10}$$

бщлган кетма-кетликнинг энг кичик ъадини топинг.

Е ч и л и ш и . $\{b_n\}$ кетма-кетлик, бунда $b_n=2n^2-20n+$ $+48=2(n-5)^2-2$, $n=5$ ъадидан бошлаб щсувчи кетма-кетликдир:

$$b_1>b_2>b_3>b_4>b_5.$$

$\{c_n\}$ кетма-кетлик, бунда $c_n=(5n-31)^2+10$, фаыат мусбат ъадларга эга бщлиб, $n=7$ ъадидан бошлаб щсувчидир:

$$c_1>c_2>c_3>c_4>c_5>c_6.$$

Бундан ва $1^\circ - 4^\circ$ хоссалардан $d_n=-\dfrac{25}{c_n}$ кетма-кетлик еттинчи ъадидан бошлаб щсувчи кетма-кетликдир, деган хулоса чиыариш мумкин ва шу билан бирга

$$d_1>d_2>d_3>d_4>d_5>d_6.$$

Шундай ыилиб, берилган $\{a_n\}$ кетма-кетлик, бунда $a_n=b_n+d_n$, $n=7$ номердан бошлаб щсади, бундан ташыари

$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5.$$

Демак, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг энг кичик ъади a_5, a_6, a_7 ъадлар орасида тади. Бевосита ъисоблаш билан $a_5=-117/46$ берилган кетма-кетликнинг энг кичик ъади эканини топамиз.

Монотон кетма-кетликларнинг яна битта умумий хоссасини таокидлаб щтамиз. $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг барча ъадлари M тщпламга тегишли, M тщплам эса $y=f(x)$ функциянинг аниыланиш соъасида мавжуд бщлсин. У ъолда:

а) агар $\{a_n\}$ щсувчи (камаювчи) кетма-кетлик ва $y=f(x)$ функция M тщпламда щсувчи бщлса, у ъолда $\{f(a_n)\}$ щсувчи (камаювчи) кетма-кетликдир;

б) агар $\{a_n\}$ щсувчи (камаювчи) кетма-кетлик ва $y=f(x)$ функция M тщпламда камаювчи бщлса, у ъолда $\{f(a_n)\}$ камаювчи (щсувчи) кетма-кетликдир.

Масалан, $a_n=n$ щсувчи кетма-кетлик, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ эса щсувчи функция бщлгани учун $c_n=f(n)=\sqrt[3]{n}$ кетма-кетлик щсувчидир; $a_n=n$ щсувчи кетма-кетлик, $g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ эса камаювчи функция бщлгани учун $d_n=g(n)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}$ кетма-кетлик камаювчидир.

$\{a_n\}$ кетма-кетликнинг дастлабки N та ъади йиьиндисини

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_N, \quad N \geq 1$$

кщринишда белгилаймиз. Агар шундай $\{b_n\}$ кетма-кетлик мавжуд бщлиб, унда

$$a_n = b_{n+1} - b_n, \quad n \geq 1$$

бщлса, у ъолда

$S_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1} + a_N = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_N - b_{N-1}) + (b_{N+1} - b_N)$, яони

$$S_N = b_{N+1} - b_1, \quad N \geq 1.$$

Масалан, $$\frac{1}{k(k+1)} = \left(-\frac{1}{k+1}\right) - \left(-\frac{1}{k}\right), \ k \geq 1,$$

$$k = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}, \ k \geq 1$$

бщлгани учун $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{N(N+1)} = -\frac{1}{N+1} + 1 = \frac{N}{N+1}$,

$$1 + 2 + ... + N = \frac{N(N+1)}{2} - 0 = \frac{N(N+1)}{2}.$$

15 - м и с о л. Ъисобланг:

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}.$$

Е ч и л и ш и . $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ тенглама учта ъар хил илдизга эга: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$. Шу сабабли бщлинмас коэффициентлар методидан фойдаланиб, ыуйидагини топамиз:

$$\frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2}\right).$$

Шундай ыилиб,

$$S_n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{N(N+5)}{12(N+2)(N+3)}.$$

16 - м и с о л. Ҳисобланг:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} n(n+1)\dots(n+m),$$

бунда m — натурал сон.

Е ч и л и ш и . $b_n = \frac{1}{m+2}(n-1)n(n+1)\dots(n+m), \quad n \geq 1$ деб оламиз. У ъолда

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{m+2} n(n+1)\dots(n+m+1) - \frac{1}{m+2} \cdot$$

$$\cdot\ (n-1)n(n+1)\dots(n+m), \text{ бундан}$$

$$S_N = b_{n+1} - b_1 \frac{1}{m+2} N(N+1)\dots(N+m+1).$$

1- топшириқ

1. Умумий ъади ыуйидагилардан иборат $\{a_n\}$ кетма-кетликларнинг дастлабки олтита ъадини топинг:

1) $a_n = n^3$; 2) $a_n = \sin \pi n$; 3) $a_n = \left[\sqrt{n^2+n}\right]$;

4) $a_n = n^{(-1)n}$; 5) $a_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$; 6) $a_n = \sum_{k=1}^{n} k$.

2. Ыуйидаги рекуррент муносабатлар билан берилган $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг дастлабки бешта ъадини зинг:

1) $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2,\ a_1 = 1$;

2) $a_{n+2} = a_{n+1} : a_n,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.

3) $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad a_1 = 1$.

3. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг ыуйидаги дастлабки ъадлари маолум бщлса, унинг умумий ъади формуласини топинг:

1) $1, \frac{4}{2}, \frac{9}{6}, \frac{16}{24}, \frac{25}{120}, \frac{36}{720}, \dots$;

2) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \dots$;

3) $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \frac{37}{6}, \dots$;

4) $1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots$;

5) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \dots$.

2- топшириқ

1. Умумий ъадлари ыуйидагиларидан иборат $\{a_n\}$ кетма-кетликларнинг дастлабки бешта ъадини топинг:

1) $a_n = \frac{1}{n+2}$; 2) $a_n = (-1)^{n(n+1)/2}$; 3) $a_n = \frac{(-1)^n + (-1)^{n-1}}{2}$;

4) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)k}$; 5) $a_n = \frac{1}{n!}$; 6) $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

2. Ыуйидаги рекуррент муносабатлар билан берилган $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг дастлабки олтита ъадини топинг:

1) $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;

2) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$.

3. Агар $\{a_n\}$ ыаторнинг ыуйидаги дастлабки ъадлари маолум бщлса, унинг умумий ъади формуласини топинг:

1) 1, 7, 31, 127, 511, ...;

2) $1, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{1}{3}, \ldots$;

3) $1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \ldots$;

4) 3, −3, 3, −3, 3, −3, ...;

5) 1, −2, 1/3, −4, 1/5, −6, 1/7, ...

3- топшириқ

1. Агар:

1) $a_n = n^2 + 1$; 2) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 3) $a_n = 2^{n-1}$; 4) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$;

5) $a_n = n^3 - n^2$; 6) $a_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик щсувчи эканини исботланг.

2. Агар:

1) $a_n = \frac{2n+3}{3n-2}$; 2) $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n + 4}$; 3) $a_n = \frac{3n^2 + 2}{3n^2 + 1}$

бщлса, $\{a_n\}$ чегараланган кетма-кетлик эканини исботланг.

3. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ бщлса, $\{a_n\}$ камаювчи кетма-кетлик эканини исботланг.

4. Агар:

1) $a_n = (-1)^n$; 2) $a_n = 1+(-1)^n + n^2$; 3) $a_n = \sin n$;

4) $a_n = \frac{n-2}{2n+3}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликни монотонликка текширинг.

5. Щсувчи ва щсмайдиган кетма-кетликларнинг йиьиндиси щсувчи кетма-кетлик бщлишини исботланг.

4- топшириқ

1. Агар:

1) $a_n = n^2 + 4n+1$; 3) $a_n = \log_2 n$;

2) $aa_n = \sqrt{n+2}$; 4) $a_n = \mathrm{ctg}\frac{1}{n}$

бщлса, $\{a_n\}$ щсувчи кетма-кетлик эканини исботланг.

2. Агар:

1) $a_n = \log_{1/2} n$; 3) $a_n = 2^{-n}$;

2) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$; 4) $a_n = \frac{2n+1}{6n+2}$

бщлса, $\{a_n\}$ камаювчи кетма-кетлик эканини исботланг.

3. Агар:

1) $a_n = \cos n$; 2) $a_n = 2^n (1+(-1)^n)$; 3) $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2n^2}$

бщлса, $\{a_n\}$ камаймайдиган кетма-кетлик эканини исботланг.

4. Агар:

1) $a_n = |2-n|$; 2) $a_n = \frac{1}{\log_2(n+4)}$; 3) $a_n = (n^2)^{(-1)^n}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликни монотонликка текширинг.

5. Камаювчи ва щсмайдиган иккита кетма-кетликнинг йиьиндиси камаювчи кетма-кетлик бщлишини исботланг.

5- топшириқ

1. Агар:

1) $a_n = \frac{n^2+2}{n^2+1}$; 2) $a_n = 100 - \sqrt{n}$; 3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n+2}{n^2}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик юыоридан чегараланган кетма-кетлик эканини исботланг.

2. Агар:

1) $a_n = n^2 - n - 11$; 2) $a_n = \frac{1}{n} + \sin\sqrt{n}$; 3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n+2}{n^2}$

бщлса, $\{a_n\}$ ыуйидан чегараланган кетма-кетлик эканини исботланг.

3. Агар:

1) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 2) $a_n = \frac{1}{n^2} - \cos^3 \frac{1}{n+1}$; 3) $a_n = \frac{2n+3}{n^2 + 2n + 3}$

бщлса, $\{a_n\}$ чегараланган кетма-кетлик эканини исботланг.

4. Иккита чегараланган кетма-кетликнинг йиьиндиси чегараланган кетма-кетлик бщлишини исботланг.

5. 1) юыоридан чегараланган-у, аммо ыуйидан чегараланмаган кетма-кетликка мисол келтиринг;

2) ыуйидан чегараланган-у, аммо юыоридан чегараланмаган кетма-кетликка мисол келтиринг;

3) юыоридан ъам, ыуйидан ъам чегараланмаган кетма-кетликка мисол келтиринг.

6- топшириқ

1. Агар:

1) $a_n = 5 - 2^n$; 2) $a_n = \frac{n+4}{n+3}$; 3) $a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 3}$

бщлса, $\{a_n\}$ юыоридан чегараланган кетма-кетлик эканини исботланг.

2. Агар:

1) $a_n = n - \sqrt{n}$; 2) $a_n = \frac{2^n}{3^n + n^2}$;

3) $a_n = \frac{1}{n}\cos^2(n - n^3 + 2)$; 4) $a_n = n + 2 - \frac{n+1}{2n+3}$

бщлса, $\{a_n\}$ ыуйидан чегараланган кетма-кетлик эканини исботланг.

3. Агар:

1) $a_n = \frac{n + n^2 + 2}{n^2 + 4n}$; 2) $a_n = \frac{n+2}{2^n}$;

3) $a_n = \frac{2^n}{3^n + 1}$; 4) $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$

бщлса, $\{a_n\}$ чегараланган кетма-кетлик эканини исботланг.

4. Агар:

1) $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ та илдиз}}$; 2) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n+1}$;

3) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 2k \\ \dfrac{n^2}{n+2}, & n = 2k+1; \end{cases}$ 4) $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{100}$, $a_1 = -\dfrac{1}{100}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликлардан ыайси бири чегараланганлигини аниыланг.

5. Ыуйидан ва юыоридан чегараланган икки кетма-кетликнинг йиьиндиси чегараланган кетма-кетлик бщладими?

7- *топшириқ*

1. Ыуйидаги рекуррент муносабатлар билан берилган $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг умумий ъади формуласини топинг:

1) $a_1 = a$, $a_{n+1} = (n+1)(1+a_n)$, $n \geq 1$;

2) $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = 1/(2-a_n)$, $n \geq 1$;

3) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}(3a_{n+1} - a_n)$, $n \geq 1$.

2. Агар:

1) $a_n = 21/(3n^2 - 14n - 17)$; 2) $a_n = n/(n^2+9)$

бҒлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг энг катта ъадини топинг.

3. Агар:

1) $a_n = (2n-5)(2n-11)$; 2) $a_n = n + \dfrac{5}{n}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг энг кичик ъадини топинг.

4. Агар:

1) $a_n = \dfrac{(6n+1)^2}{6^2}$; 2) $a_n = \dfrac{n^3}{10^n}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик бирор ъадидан бошлаб камаювчи бщлишини исботланг.

5. Топинг: 1) $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(n+2)}$;

2) $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

8- топшириқ

1. Ыуйидаги рекуррент муносабатлар билан берилган $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг умумий ъади формуласини топинг:

1) $a_1 = a,\ a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta \cdot 2^n,\quad n \geq 1,\ a \neq 2;$

2) $a_n = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = 2/(3 - a_n),\quad n \geq 1;$

3) $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2 \cdot a_n,\quad n \geq 1$.

2. Агар:

1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n;$ 2) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг энг катта ъадини топинг.

3. Агар:

3) $a_n = \log_3^2 n - 3\log_3 n;$ 4) $a_n = 1{,}4^n / n$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг энг кичик ъадини топинг.

4. Агар:

1) $a_n = 2^n - 10n;$ 2) $a_n = 3^n - 2n$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик бирор ъадидан бошлаб щсувчи бщлишини исботланг.

5. Топинг:

1) $S_n = \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)};$

2) $S_n = \frac{1}{3\cdot 7\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 11\cdot 15} + \frac{1}{11\cdot 15\cdot 19} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}.$

Машқлар

1. Агар кетма-кетликнинг ыуйидаги дастлабки ъадлари маолум бщлса, унинг умумий ъади формуласини топинг:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \ldots;$ 2) 0, 3, 2, 5, 4, 7, …;

3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, -\frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \frac{7}{20}, -\frac{8}{20}, \ldots;$

4) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \ldots;$ 5) 2, 10, 26, 82, 242, 730, … ;

6) $-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \ldots.$

2. Ушбу рекуррент муносабатлар билан берилган $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг умумий ъадини топинг:

1) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$; 2) $a_1 = 7,\ a_{n+1} = 3a_n + 5 \cdot 2^n$;

3) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{4 + a_n}$; 4) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{5a_n}{3 - 7a_n}$;

5) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n}$; 6) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \frac{3a_{n+1} - a_n}{2}$;

7) $a_1 = 4,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$;

8) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} + 1$;

9) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2$.

3. Агар:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

бщлса $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг a_{37} ва a_{1967}-ъадини топинг.

4. Агар

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг a_{90} ва a_{885} ъадини топинг.

5. Агар:

1) $a_n = \begin{cases} 1, \ \text{àãàð}\ n = 3k - 2 \ \text{áùëñà}, \\ -2, \ \text{àãàð}\ n = 3k - 1 \ \text{áùëñà}, \\ \frac{1}{n}, \ n = 3k, \text{àãàð}\ k \in N \ \text{áùëñà}; \end{cases}$

2) $a_n = \begin{cases} 2n + 1, \ n = 2k, \\ 3n - 1, \ n = 2k - 1, \ k \in N \end{cases}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг 1224- ъадини топинг.

6. Дастлабки икки ъади 1 га тенг, учинчи ъадидан бошлаб ъар бир ъади щзидан олдинги иккита йиьиндисига тенг, яони

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

бщлган сонлар ыатори :

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 24,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Фибоначчи кетма-кетлиги дейилади. Ыуйидагиларни исботланг:

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ (Бинэ формуласи);

2) $a_1 + a_3 + ... + a_{2n+1} = a_{2n+2}$;

3) $1 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n} = a_{2n+1}$;

4) $a_n^2 - a_{n-1}\, a_{n+1} = (-1)^{n-1}$;

5) $a^2{}_{n+1} + a_n^2 = a_{2n-1}$;

6) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 = a_n a_{n+1}$;

7) $a_n a_{n+1} - a_{n-2} a_{n-1} = a_{2n-1}$;

8) $a_{n+1} a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n$;

9) $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \ldots + a_{2n-1} a_{2n} = a_{2n}{}^2$;

10) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_n = \pm a_{n-1} + 1$;

11) $a^3{}_n + a^3{}_{n+1} - a^3{}_{n-1} = a_{3n}$;

12) $a_n^4 - a_{n-2} a_{n-1} a_{n+1} a_{n+2} = 1$;

13) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$;

14) $\dfrac{1}{10}(a_{n+60} - a_n) -$ бутун сон;

15) a_{15k} (k — бутун) соннинг охирги раыами нолр;

16) a_n раыами $\dfrac{n-2}{5}$ дан катта бщлган сон.

7. Агар:

1) $a_n = \dfrac{n^2 + 1}{n}$; 2) $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 7}{n^2 + 2n + 8}$;

3) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n}$; 4) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$;

5) $a_n = \dfrac{1}{\left[\sqrt{2n}\right]}$; 6) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$;

7) $a_n = 1 + (-1)^n + n$; 8) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - 1}, & \text{агар } n = 2k - 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + 1}, & \text{агар } n = 2k \end{cases}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликни монотонликка текширинг.

8. Агар:

1) $a_n = (-1)^n$; 2) $a_n = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{\pi \cdot n}{2}$; 3) $a_n = 2n - (-1)^n$;

4) $a_n = \sin \dfrac{\pi \cdot n}{4}$; 5) $a_n = 2\cos \pi n$; 6) $a_n = n^{(-1)n}$;

7) $a_n = (-1)^n n;$ 8) $a_n = \operatorname{tg}\dfrac{\pi(2n+1)}{4};$

9) $a_n = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi(4m+3)}{4};$ 10) $a_n = (1+n)^{\sin\frac{\pi\cdot n}{2}};$

11) $a_n = n^{\cos\pi\cdot n};$ 12) $a_n = \dfrac{n-(-1)^n n}{2n+1};$

13) $a_n = 2^{\cos\left(\frac{\pi\cdot n}{4}\right)};$ 14) $a_n = n^2 \sin\dfrac{\pi\cdot n}{4}$

бщлса, $\{a_n\}$ монотон кетма-кетлик эмаслигини исботланг.

9. Агар:

1) $a_n = \dfrac{3n+4}{n+2};$ 2) $a_n = n^3 - 8n^2;$ 3) $a_n = \dfrac{125n}{n^2+20};$

4) $a_n = \dfrac{n^2+48}{n+4};$ 5) $a_n = \dfrac{n^3}{n^2-2n+3};$ 6) $a_n = \dfrac{n^2}{n^3-32};$

7) $a_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}};$ 8) $a_n = \dfrac{n-3}{\sqrt{n^2+1}};$ 9) $a_n = \sqrt{n+3}-\sqrt{n};$

10) $a_n = \sqrt{n^2+2n}-n;$ 11) $a_n = 2^n - 10n;$ 12) $a_n = 2^n / n;$

13) $a_n = \dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n};$ 14) $a_n = \dfrac{3^{n-1}+2^{n-1}}{3^n+2^n};$

15) $a_n = \lg(n+1) - \lg n;$ 16) $a_n = \lg(n^2+12n) - 21\mathrm{n}n$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик бирор номердан бошлаб монотон кетма-кетлик эканини исботланг.

10. Агар:

1) $a_n = (3n+1)^2 / 3^n;$ 2) $a_n = n^3 / 2^3;$ 3) $a_n = \sqrt[n]{n};$

4) $a_n = 2^{n+1} - 3^{n-1};$ 5) $a_n = \log_{1/2}(3n^2+18n+29);$

6) $a_n = -n^2 \cdot |n-4|$

бщлса, $\{a_n\}$ бирор номердан бошлаб камаювчи кетма-кетлик эканини исботланг.

11. Агар:

1) $a_n = 3^n - 10n;$ 2) $a_n = 4^{n-2} - 3^{n+1};$

3) $a_n = \ln(n^2-8n+17);$ 4) $a_n = n\cdot|n^2-9|;$

5) $a_n = \dfrac{n^2-4n+3}{2n-3};$ 6) $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$

бўлса, $\{a_n\}$ бирор номердан бошлаб ўсувчи кетма-кетлик эканлигини исботланг.

12. Агар:

1) $a_n = \frac{-2n-3}{n+1}$; 2) $a_n = \frac{-3}{n^2+10n+27}$;

3) $a_n = \operatorname{arctg}(3n^2+6n+5)$; 4) $a_n = \ln(n^2+2n+3)$;

5) $a_n = 3\cdot 2^n + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{n+1}$; 6) $a_n = \sqrt[3]{n^2+n^3} + 3^{n-1}$

бўлса, $\{a_n\}$ ўсувчи кетма-кетлик эканини исботланг.

13. Агар:

1) $a_n = \frac{6n+19}{2n+6}$; 2) $a_n = \frac{2}{n^2+6n+n}$;

3) $a_n = \operatorname{arctg}(n^2+2n+1)$; 4) $a_n = \log_{\frac{2}{3}}\frac{n^3+1}{n^2}$;

5) $a_n = 2^{1-n} + 3^{2-n}$; 6) $a_n = 2^{-n} + \frac{1}{n^2+1}$

бўлса, $\{a_n\}$ камаювчи кетма-кетлик эканини исботланг.

14. Агар:

1) $a_n = \frac{2n+3}{3n-4}$; 2) $a_n = -n^2+4n+11$; 3) $a_n = \frac{n^2+2n+5}{n^2+2n+7}$;

4) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n+100}}$; 5) $a_n = \frac{n}{n^2+100}$; 6) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$;

7) $a_n = -n^2+14n-45+\frac{4}{(2n-17)^2+2}$; 8) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

бўлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг энг катта ҳадини топинг.

15. Агар:

1) $a_n = n^2-5n+1$; 2) $a_n = n+\frac{100}{n}$; 3) $a_n = n+5\sin\frac{\pi\cdot n}{2}$;

4) $a_n = \sqrt{n^2-2n+9}$; 5) $a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n(n+1)}+\frac{1}{n}$;

6) $a_n = 2n^2-24n+69-\frac{9}{(3n-22)^2+3}$;

7) $a_n = n^2-8n+15-\frac{9}{(3n-16)^2+6}$; 8) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$

бўлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг энг кичик ҳадини топинг.

16. Иккита $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ монотон кетма-кетлик берилган. Ыуйидагилар монотон кетма-кетлик бщладими?

1) $\{a_n + b_n\}$; 2) $\{a_n - b_n\}$; 3) $\{a_n\ b_n\}$; 4) $\{a_n\ /\ b_n\}$.

17. Монотон $\{a_n\}$ ва монотон бщлмаган $\{b_n\}$ кетма-кетликлар берилган. Ыуйидаги кетма-кетликлар монотон бщладими?

1) $\{a_n + b_n\}$; 2) $\{a_n - b_n\}$; 3) $\{a_n\ b_n\}$; 4) $\{a_n\ /\ b_n\}$.

18. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик ъар ыандай $n \in N$да щсувчи ва $a_n > 0$ бщлса, у ъолда $\left\{\dfrac{1}{a_n + a_n^2}\right\}$ кетма-кетлик камаювчи кетма-кетлик бщлишини исботланг.

19. Агар:

1) $a_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$; 2) $a_n = \dfrac{2n^2-3}{n^2+3}$; 3) $a_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n^2+3}}$;

4) $a_n = \dfrac{13n+(-1)^n}{9n-1}$; 5) $a_n = \dfrac{n^2+6n+10}{(n+2)^2}$;

6) $a_n = \dfrac{(n+2)(n-2n^2)}{2n^3-1}$; 7) $a_n = \dfrac{(n^2-4)(n^2+1)}{n^4+2}$;

8) $a_n = \dfrac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-2)}$; 9) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)(\sqrt{n+3})}$;

10) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$; 11) $a_n = \sqrt{4n^2+2}-2n$;

12) $a_n = \sqrt{n-2}-\sqrt{n+2}$; 13) $a_n = n\left(\sqrt{n^4+4}-\sqrt{n^4-n}\right)$;

14) $a_n = \sqrt[3]{8n-n^3}+\sqrt[3]{8n+n^3}$; 15) $a_n = \sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt{n^2-2}$;

16) $a_n = \sqrt{\dfrac{n^4+n^3}{n^3+1}}-\sqrt{n^2-1}$; 17) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2-2}{2}$;

18) $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{a_n}$; 19) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$;

20) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \dfrac{-a_n}{2^n}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик чегараланган эканини исботланг.

20. Агар:

1) $a_n = (-1)^n n^2$; 2) $a_n = n^2 - 2n$; 3) $a_n = \frac{n - 3n^2}{n+1}$;

4) $a_n = \frac{n^3 + n}{n^2 + 3n + 2}$; 5) $a_n = \frac{2-n}{\sqrt{1+n}}$; 6) $a_n = n - (-1)^{n+1} \cdot n$;

7) $a_n = n^{(-1)n}$; 8) $a_n = \frac{n - 4n^n + n^2}{n^3 + 3n + 1}$; 9) $a_n = 2^n - 3$;

10) $a_n = 3^n + 2^{-n}$; 11) $a_n = \log_2(n^2 + n)$;

12) $a_n = \log_3(n^2 + 4n) - 3$; 13) $a_n = n\operatorname{tg}\frac{\pi(2n+1)}{4}$;

14) $a_n = \sqrt{n^4 + n^3 + 1} - \sqrt{n^4 - n^3 + 1}$; 15) $a_n = \frac{n+1}{\log_2(n+2)}$;

16) $a_n = \frac{3^n}{n^2}$; 17) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$;

18) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$;

19) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$;

20) $a_1 = -4,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n$

бщлса, $\{a_n\}$ чегараланмаган кетма-кетлик эканини исботланг.

21. Агар:

1) $a_n = 2^{n-3}$; 2) $a_n = \log_7 n$; 3) $a_n = \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}$;

4) $a_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 3n + 4}$; 5) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; 6) $a_n = \frac{n^k}{a^n},\ a > 1$;

7) $a_n = \frac{12^n}{n!}$; 8) $a_n = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n+1}$;

9) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$; 10) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

11) $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^2(n+2)}$; 12) $a_n = \lg(3n+2) - \lg(n+1)$;

13) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$; 14) $a_1 = 8,\ a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{8}{a_n^2}\right)$;

15) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{a_n(a_n + 2)}{2a_n^3 + 1}$;

16) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3$ бщлса, $\{a_n\}$ чегараланган кетма-кетлик бщладими?

22. Ъар ыандай щсувчи кетма-кетлик ыуйидан чегараланган бщлишини исботланг.

23. Ъар ыандай камаювчи кетма-кетлик юыоридан чегараланган бщлишини исботланг.

24. Шундай иккита кетма-кетликка мисол келтирингки, уларнинг ъар бири юыоридан чегараланмаган, лекин уларнинг айирмаси юыоридан чегараланган бщлсин.

25. Шундай иккита кетма-кетликка мисол келтирингки, уларнинг ъар бири чегараланмаган, лекин уларнинг йиьиндиси чегараланган бщлсин.

26. $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ шундай кетма-кетликларки, $\{a_n\}$ ва $\{a_n b_n\}$ кетма-кетликлар чегаралангандир. $\{b_n\}$ чегараланган кетма-кетлик бщладими?

27. Агар $\{b_n\}$ чегараланган кетма-кетлик, $b_n = a_{2n},\ n \in N$ бщлса, $\{a_n\}$ монотон кетма-кетлик чегараланган бщлишини исботланг.

28. Чегараланмаган $\{a_n\}$ кетма-кетликка шундай мисол келтирингки, $b_n = a_{2n-1},\ n \in N$ бщлганда $\{b_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бщлсин.

29. $\{a_n\}$ кетма-кетлик:

1) щсмайдиган (камаймайдиган) бщлишининг;
2) камаймайдиган (щсмайдиган) бщлишининг;
3) юыоридан (пастдан) чегараланмаганлигининг;
4) чегараланганлигининг;
5) монотон бщлмаслигининг таорифини айтинг.

30. Агар ыуйидагилар берилган бщлса, $b_n - b_{n-1} = a_n$ шартни ыаноатлантирувчи $\{b_n\}$ кетма-кетликни топинг:

1) $a_n = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$; 2) $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$; 3) $a_n = 2n - 1$;

4) $a_n = n(3n-1)$; 5) $a_n = 3n^2 - 3n + 1$;

6) $a_n = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$; 7) $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$;

8) $a_n = 2^{n-1}(n-1)$; 9) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; 10) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

11) $a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$; 12) $a_n = \frac{1}{(7n-3)(7n+4)}$;

13) $a_n=\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$; 14) $a_n=\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$;

15) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

16) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$; 17) $a_n=n\cdot n!$

31. Исботланг:

1) $S_n=1+3+6+10+15+\ldots+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$;

2) $S_n=1+4+10+20+...+\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$;

3) $S_n=1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$;

4) $S_n=1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$;

5) $S_n=1+7+19+37+\ldots+(3n^2-3n-1)=n^3$;

6) $S_n=1+15+65+175+..+(4n^3-6n^2+4n-1)=n^4$;

7) $S_n=1+5+15+35+\ldots+\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$;

8) $S_n=1+2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 5+2\cdot 4\cdot 6\cdot 7+\ldots+2\cdot 4\cdot 6\ldots$

$\ldots(2n-2)(2n-1)=2^n-n!-1$;

9) $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

10) $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

11) $S_n=\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$;

12) $S_n=\dfrac{1}{4\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 18}+\dfrac{1}{18\cdot 25}+\ldots+\dfrac{1}{(7n-3)(7n+4)}=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7n+4}\right)$;

13) $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$;

14) $S_n=\frac{1}{3\cdot7\cdot11}+\frac{1}{7\cdot11\cdot15}+...+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}=$
$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3\cdot7}-\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right);$

15) $S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right);$

16) $S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=$
$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right);$

17) $S_n=1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1.$

32. $S_n^{(p)}=1p+2p+3p+...+np,$ n ва p – ъар ыандай натурал сонлар бщлсин. Ыуйидагиларни исботланг:

1) $S_n^{(1)}=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2};$

2) $S_n^{(2)}=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2};$

3) $S_n^{(3)}=1^3+2^3+3^3+...+\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(S_n^{(1)}\right)^2$

4) $S_n^{(4)}=\frac{6S_n^{(2)}S_n^{(2)}}{5}=\frac{S_n^{(2)}\left(6S_n^{(1)}-1\right)}{5};$

5) $S_n^{(5)}=\frac{4\left(S_n^{(1)}\right)^3-S_n^{(3)}}{3}=\frac{\left(S_n^{(1)}\right)^2\left(4S_n^{(1)}-1\right)}{3};$

6) $S_n^{(6)}=\frac{12S_n^{(1)}\left(S_n^{(1)}\right)^2-5S^{(4)}}{7}=\frac{S_n^{(2)}\left(12\left(S_n^{(1)}\right)^2-6S_n^{(1)}+1\right)}{7};$

7) $S_n^{(7)}=\frac{8\left(S_n^{(1)}\right)^4-4S_n^{(5)}}{4}=\frac{\left(S^{(1)}\right)^2\left(6\left(S_n^{(1)}\right)^2-4S_n^{(1)}+1\right)}{3};$

8) $S_n^{(8)}=\frac{24S_n^{(2)}\left(S_n^{1}\right)^2-14S_n^{(4)}+S_n^{(4)}}{9}=$
$=\frac{S_n^{(2)}\left(40\left(S_n^{(1)}\right)^3-40\left(S_n^{(1)}\right)^2\right)+18\left(S_n^{(1)}\right)-3}{9};$

9) $S_n^{(2)} = C_n^1 + C_n^2;$

10) $S_n^{(3)} = C_n^1 + 3C_n^2 + 2C_n^2;$

11) $S_n^{(4)} = C_n^1 + 7C_n^2 + 12C_4^3 + 6C_n^4;$

12) $S_n^{(5)} = C_n^1 + 15C_n^2 + 50C_n^3 + 60C_n^4 + 24C_n^5;$

13) $S_n = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + ... + (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12} =$

$= S_n^{(3)} - S_n^{(2)};$

14) $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4_n^2-1)}{3} = S_{2n-1}^{(2)} - 4S_{n-1}^{(2)};$

15) $S_n = 2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 3^2 + ... + (n+1)n^2 =$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12} = S_n^{(3)} + S_n^{(2)}.$

4- §. Кетма-кетликнинг лимити

Агар ъар ыандай мусбат сон ε учун шундай N номер топилсаки, барча $n > N$ лар учун $|a_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, a сонни $\{a_n\}$ *кетма-кетликнинг лимити* дейилади.

a сон $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити эканлиги ыуйидаги кщринишда зилади: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ки $n \to \infty$ да $a_n \to a$.

Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бщлса, у *яқинлашувчи*, акс ъолда *узоқлашувчи кетма-кетлик* дейилади.

$|a_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ тенгсизликка тенг кучли ки $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ тенгсизликка тенг кучли бщлгани учун, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ эканлиги геометрик жиъатдан ыуйидагини англатади:

Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *бўлса, ҳар қандай* $\varepsilon > 0$ *сон учун, шундай номер топиладики,* $\{a_n\}$ *кетма-кетликнинг* N *дан катта номерга эга бўлган барча* a_{N+1}, $a_{N+2}, \ldots$ *ҳадлари* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ *интервалда тади.*

1-м и с о л. 1 сони $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ кетма-кетликнинг лимити, яони $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ эканини исботланг.

Е ч и л и ш и . Ъар бир ε мусбат сон учун шундай N топилишини ва ъар ыандай барча натурал $n > N$ учун тенгсизлик щринли бщлишини исботлаш керак.

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

шу сабабли
$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| > \varepsilon$$

тенгсизлик $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ тенгсизликкка тенг кучли. Агар $\dfrac{1}{\varepsilon}$ дан катта бирор N натурал сон, масалан, $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ сон олинса, у ъолда бу N сондан катта ъар бир n натурал сон учун

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\frac{1}{[1/\varepsilon]+1}<\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса ихти   рий ε > 0 сон учун шундай N топилганини ва ъар бир $n>N$ учун $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$ тенгсизлик щринли бщлишини билдиради. Демак, 1 сони $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ кетма-кетликнинг лимити, яони $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

Мазкур мисолда $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+k$ (бунда k – ихти   рий сон) тайинланган (фиксирланган) натурал сон. Сонлардан ихти   рий бири N сифатида олиниши мумкин. Ъаыиыатан ъам, $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+k$ бщлса, у ъолда ъар бир $n>N$ учун ушбуга эгамиз:

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+k}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

Шуни эслатиб щтамизки, кетма-кетликнинг лимити таорифидаги N номер, умуман айтганда, ε га боьлиы. Шундай ыилиб, масалан, 1- мисолда ε ≥ 1 бщлса, у ъолда иккинчи номердан бошлаб кетма-кетликнинг ъар бир ъади

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{2}<1\le\varepsilon$$

шартни ыаноатлантиради. Агар $\varepsilon=\frac{1}{10}$ бщлса, у ъолда 11- номердан бошлаб кетма-кетликнинг ихти   рий ъади

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{11}<\frac{1}{10}=\varepsilon,\ \text{яони } N=10$$

шартни ыаноатлантиради. Агар $\varepsilon=\frac{1}{50}$ бщлса, у ъолда 51- номердан бошлаб кетма-кетликнинг ъар бир ъади

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{51}<\frac{1}{50}=\varepsilon,\ \text{яони } N=50$$

шартни ыаноатлантиради.

Ъар ыандай $n>N$ учун $|a_n-a|<\varepsilon$ тенгсизлик щринли бщладиган N номерни топишда баозида $|a_n-a|$ айирмани ихти   рий n учун бирор номердан бошлаб $|a_n - a| < b_n$ ни ыаноатлантирадиган бирор щзгарувчи b_n миыдор билан баъолаш, сщнгра $b_n < \varepsilon$ (ы., 2- мисол) шартдан N ни топиш фойдалидир. Кщпчилик мисолларда b_n сифатида $b_n = \frac{c}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0, c > 0)$ ни   ки $b_n = c \cdot q^n (c > 0,\ 0 < q < 1)$ ни олиш мумкин.

2 - м и с о л. Исботланг:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 31n + 4}{2n^2 + 17n - 57} = \frac{1}{2}.$$

Е ч и л и ш и . Ъар ыандай мусбат ε сон учун шундай N топилишини ва ъар бир $n > N$ учун

$$\left| \frac{n^2 - 31n + 4}{2n^2 + 17n - 57} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик щринли бщлишини исботлаш керак.

Ъар ыандай натурал n учун ыуйидагига эгамиз:

$$\left| \frac{n^2 - 31n + 4}{2n^2 + 17n - 57} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2 - 62n + 8 - 2n^2 - 17n + 57}{2(2n^2 + 17n - 57)} \right| =$$

$$= \left| \frac{-79n + 65}{2(2n^2 + 17n - 57)} \right| = \frac{|-79n + 65|}{|2(2n^2 + 17n - 57)|} \le \frac{|-79n| + |65|}{|2(2n^2 + 17n - 57)|} \le$$

$$\le \frac{80n + 80}{2|2n^2 + 17n - 57|} = \frac{40(n+1)}{|2n^2 + 17n - 57|} \le \frac{40 \cdot 2n}{|2n^2 + 17n - 57|} =$$

$$= \frac{80n}{|2n^2 + 17n - 57|}.$$

$n \ge 4$ да $2n^2 + 17n - 57 = 2n^2 + (17n - 57) > 2n^2$ бщлгани сабабли $n \ge 4$ да

$$\frac{80n}{|2n^2 + 17n - 57|} < \frac{80n}{2n^2} = \frac{40}{n}.$$

Шундай ыилиб, барча натурал $n \ge 4$ учун ушбу баъо тщьри:

$$\left| \frac{n^2 - 31n + 4}{2n^2 + 17n - 57} - \frac{1}{2} \right| < \frac{40}{n}.$$

$N \ge 4$ ва $40/N < \varepsilon$ тенгсизликларни ыаноатлантирадиган N сонни танлаймиз (масалан, N деб $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 5$ ни олиш мумкин). У ъолда ъар бир $n > N$ учун ыуйидагига эга бщламиз:

$$\left|\frac{n^2-31n+4}{2n^2+17n-57}-\frac{1}{2}\right|<\frac{40}{n}<\frac{40}{N}=\frac{40}{[40/\varepsilon]+5}<\frac{40}{40/\varepsilon}<\varepsilon.$$

3 - м и с о л. Агар $|q|<1$ бщлса, у ъолда

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0$$

бщлишини исботланг.

Е ч и л и ш и . $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ эканини исботлаш учун ъар ыандай $\varepsilon>0$ учун шундай N натурал сон мавжудки, ъар бир натурал сон $n>N$ учун $|q^n-0|<\varepsilon$ тенгсизлик щринли бщлишини кщрсатиш керак. $q=0$ да исботлана тган тенгликнинг тщьрилиги равшан. $q\neq 0$ бщлсин. $0<|q|<1$ бщлгани сабабли $\frac{1}{|q|}>1$ бщлади. Демак, $\frac{1}{|q|}=1+\alpha$ тенглик щринли бщладиган $\alpha>0$ сон мавжуд. Бернулли тенгсизлигига кщра, ъар бир натурал n учун

$$\frac{1}{|q|^n}=\left(\frac{1}{|q|}\right)^n=(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha>n\alpha$$

баъолаш щринлидир. Бундан барча натурал n ларда $|q|^n<\frac{1}{n\alpha}$ эканлиги кщринади. Бирор $N>\frac{1}{\alpha\varepsilon}$ ни оламиз, бунда $\alpha=\frac{1}{|q|}-1.$ У ъолда, ъар бир $n>N$ да

$$n>\frac{1}{\alpha\varepsilon} \quad \text{ки} \quad \frac{1}{n\alpha}<\varepsilon$$

га эга бщламиз ва шу билан

$$|q^n-0|=|q^n|=|q|^n<\frac{1}{n\alpha}<\varepsilon.$$

Шундай ыилиб, ъар ыандай мусбат ε сон учун шундай N номер мавжудки, ъар бир $n>N$ учун $|q^n-0|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади, бу эса $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ эканини билдиради.

4 - м и с о л. $a_n=\frac{2n+3}{n+2},\ \ n\in N$ бщлсин. $a=1$ сони $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити эмаслигини исботланг.

Е ч и л и ш и . Исботни тескарисини фараз ыилиш билан щтказамиз, яони $a = 1$ сон кетма-кетликнинг лимити деб оламиз. У ъолда $\varepsilon = \frac{1}{3}$ учун шундай N топиладики, ъар бир $n>N$ учун

$$\left|\frac{2n+3}{n+2} - 1\right| < \frac{1}{3}$$

бщлади. $2N > N$ бщлгани учун $n = 2N$ да ыуйидагига эга бщламиз:

$$\left|\frac{4N+3}{2N+2} - 1\right| < \frac{1}{3}.$$

Иккинчи томондан,

$$\left|\frac{4N+3}{2N+2} - 1\right| = \frac{2N+1}{2N+2} = 1 - \frac{1}{2N+2} > 1 - \frac{1}{4} > \frac{1}{3}.$$

Ъосил бщлган зидлик 1 сони кетма-кетликнинг лимити эмаслигини исботлайди. (Таокидлаймизки, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+2} = 2.$)

5 - м и с о л. $a_n = (-1)^n$ кетма-кетлик лимитга эга эмаслигини исботланг.

Е ч и л и ш и . Тескарисини фараз ыилиш билан исботлаймиз. $\{a_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга ва у a га тенг бщлсин. У ъолда ъар ыандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $N = N(\varepsilon)$ номер мавжудки, ъар бир $n>N$ учун $|a_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик щринли. Хусусий ъолда $\varepsilon = \frac{1}{2}$ учун ъам шундай N_1 номер мавжудки, ъар бир $n>N_1$ учун $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ тенгсизлик щринли. $2N_1 > N_1$ ва $2N_1 + 1 > N_1$ бщлганлигидан кетма-кетликнинг a_{2N_1} ва a_{2N_1+1} ъадлари учун

$$|a_{2N_1} - a| < \frac{1}{2},\ |a_{2N_1} + 1| < \frac{1}{2}$$

тенгсизликлар щринли. Шу сабабли,

$$2 = |(1-a) - (-a-1)| = |(a_{2N_1} - a) - (-a + a_{2N_1} + 1)| \le$$

$$\le |a_{2N_1} - a| + |a_{2N_1} + 1 - a| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

тенгсизлик щринли бщлади.

Шундай ыилиб, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг яыинлашиши ъаыидаги фараздан $2 < 1$ нотщьри тенгсизликка эга бщламиз. Демак, $\{a_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Агар кетма-кетлик чегараланмаган бщлса, у ъолда у яыинлашувчи бщлмайди.

6-мисол. $a_n = 3n - 7$ яыинлашувчи кетма-кетлик эмаслигини исботланг.

Ечилиши. Кетма-кетлик чегараланмаганлигини исботлаймиз. C — ихти рий мусбат сон бщлсин. У ъолда
дан катта ъар ыандай натурал n да ушбуга эгамиз:

бу эса берилган кетма-кетлик юыоридан чегараланмаганлигини билдиради. Шундай ыилиб, кетма-кетлик яыинлашувчи эмас.

Яыинлашувчи кетма-кетликларнинг ыуйидаги хоссалари щринли:

1°. Яыинлашувчи $\{a_n\}$ кетма-кетлик фаыат битта лимитга эга.

2°. Яыинлашувчи кетма-кетлик чегараланган.

3°. $\{a_n\}$ кетма-кетлик a га тенг лимитга эга бщлса, $\{a_{n+k}\}$ кетма-кетлик ъам лимитга эга ва унинг лимити a га тенг, яони

бунда k — тайинланган натурал сон.

4°. $\{a_n\}$ кетма-кетлик шундайки,

бщлсин. У ъолда бщлади.

5°. Агар $a_n = c,\ n \in N$, бунда c — константа бщлса, у ъолда

бщлади.

6°. $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити a га, $\{b_n\}$ кетма-кетликнинг лимити эса b га тенг бщлсин. У ъолда:

а) $\{a_n + b_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва у $a + b$ га тенг, яони

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n;$$

б) $\{a_n - b_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва у $a - b$ га тенг, яони

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n;$$

в) $\{a_n \, b_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва у $a\,b$ га тенг, яони

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \, \lim_{n\to\infty} b_n;$$

хусусий холда, агар с бирор щзгармас бщлса, у ъолда $\{ca_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва у ca га тенг, яони

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n;$$

г) агар $b \neq 0$ ва $b_n \neq 0$ $(n \in N)$ бщлса, $\{a_n \,/\, b_n\}$ кетма-кетликликнинг лимити мавжуд ва у $\frac{a}{b}$ га тенг бщлади, яони

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Шуни таокидлаймизки, 6° а), г) хоссаларнинг ъар бирида тасдиы икки ыисмдан иборат. Биринчидан, $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n \, b_n\}$ ва $\{a_n \,/\, b_n\}$ кетма-кетликларнинг лимитлари мавжудлиги тасдиыланади, иккинчидан, бу лимитларни топиш ыоидалари келтирилади.

6° а), г) хоссалар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлардан ъар бирининг лимити мавжудлиги ъаыидаги фаразларсиз нотщьри бщлиши мумкин. Масалан, $a_n=(-1)^n$ ва $b_n=(-1)^{n+1}$, $n \in N$ кетма-кетликларнинг ъар бири (ы. 5- мисол) лимитга эга эмас, лекин

$$c_n = a_n + b_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n - (-1)^n = 0,$$
$$d_n = a_n \, b_n = (-1)^n \, (-1)^{n+1} = 1$$

кетма-кетликларнинг ъар бири мос равишда 0 ва 1 лимитларга эга.

Шу сабабли, масалан, ыщшилувчилардан ъар бирининг лимити, кщпайтувчилардан ъар бирининг лимити мавжудлиги ъаыида фараз ыилмай туриб, умуман айтганда, йиьиндининг лимити ыщшилувчилар лимитларининг йиьиндисига тенг, кщпайтманинг лимити кщпайтувчилар лимитларининг кщпайтмасига тенг, дейиш нотщьридир.

7°. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$ $b > 0$ ва $b_n > 0$ $(n \in N)$ бщлса, у ъолда: $\left\{b_n^{\,a_n}\right\}$ кетма-кетлик лимитга эга ва ыуйидаги тенглик щринли:

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = b^a.$$

8°. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ бўлиб, бирор n номердан бошлаб, ҳар бир натурал n да $a_n \geq b_n$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$$

тенгсизлик ўринли.

Хусусий ҳолда, бирор n номердан бошлаб $a_n > b_n$ тенгсизлик ўринли, аммо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ бўлиши мумкин. Масалан, $a_n = \dfrac{1}{n}$ ва $b_n = \dfrac{1}{2n}$ кетма-кетликлар учун $a_n > b_n$, лекин $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.$

9°. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик a лимитга эга ва p сон a сондан кичик бўлса, у ҳолда шундай N номер топиладики, ҳар бир $n>N$ учун $p<a_n$ тенгсизлик ўринли бўлади.

10°. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик a лимитга эга ва q сон a сондан катта бўлса, у ҳолда шундай N номер топиладики, ҳар бир $n>N$ учун $q > a_n$ тенгсизлик ўринли бўлади.

11°. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ бўлиб, $a_n \leq c_n \leq b_n$ тенгсизлик барча $n \geq N$ натурал сонлар учун бажарилса (бу ерда N – бирор натурал сон), у ҳолда $\{c_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва у a га тенг.

12°. $\{r_n\}$ кетма-кетликнинг r лимити мавжуд бўлсин. Агар $\{r_n\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадлари ва r сон $f(x)$ элементар функциянинг аниқланиш соҳасида ётса, $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(r)$ тенглик ўринли бўлади.

Бу ердан қуйидаги муносабатларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r, \quad \lim_{n\to\infty} (r_n)^\alpha = a^\alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty} \log_a r_n = \log_a r (r_n > 0,\ r > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin r_n = \sin r, \quad \lim_{n\to\infty} \cos r_n = \cos r,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{tg} r_n = \mathrm{tg} r, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{ctg} r_n = \mathrm{ctg} r,$$

$$\lim_{n\to\infty}\arcsin r_n = \arcsin r,\ \lim_{n\to\infty}\arccos r_n =$$
$$= \arccos r(|r_n| \le 1,\ |r| \le 1),$$
$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{arctg} r_n = \mathrm{arctg} r,\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{arcctg} r_n = \mathrm{arcctg} r.$$

Бу хосса *узлуксиз функциялар* деб аталувчи функцияларнинг ъаммаси учун щринлидир. Узлуксиз функциялар ъаыида ыуйироыда сщз юритилади.

7 - м и с о л. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик a сонга яыинлашса, у ъолда $\{\sin a_n\}$ кетма-кетлик $\sin a$ сонига яыинлашишини исботланг.

Е ч и л и ш и . $\varepsilon > 0$ сонни ыараймиз. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ бщлгани сабабли бу ε учун шундай N номер мавжудки, ъар бир $n>N$ учун $|a_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик щринли. У ъолда шу номернинг щзи учун ыуйидагига эгамиз:

$$|\sin a_n - \sin a| = 2\left|\sin\frac{a_n - a}{2}\cdot\cos\frac{a_n + a}{2}\right| \le$$
$$\le 2\left|\sin\frac{a_n - a}{2}\right| \le 2\left|\frac{a_n - a}{2}\right| \le |a_n - a| < \varepsilon.$$

Бу эса, ъар ыандай $\varepsilon > 0$ учун шундай N номер мавжудки, барча $n>N$ ларда $|\sin a_n - \sin a| < \varepsilon$, яони $\lim_{n\to\infty}\sin a_n = \sin a$ эканини билдиради.

8 - м и с о л. Ъар ыандай $n \in N$ учун $a_n \ge 0$ ва $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ бщлса, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ эканини исботланг.

Е ч и л и ш и . $a_n \ge 0$ ($n \in N$) ва $a \ge 0$ эканини таокидлаймиз. $a > 0$, ε эса ихти рий мусбат сон бщлсин. У ъолда, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ бщлгани сабабли $\varepsilon_1 = \varepsilon\sqrt{a}$ сон учун шундай N_1 номер мавжудки, ъар бир натурал $n>N_1$ учун $|a_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$ тенгсизлик щринли. Бу ердан кщринадики, барча $n>N_1$ натурал сонлар учун

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n + \sqrt{a}}} < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

тенгсизлик щринли бщлади.

Энди $a=0$ ва ε ихти рий мусбат сон бщлсин, у ъолда шундай N_2 номер мавжудки, ъар бир $n > N_2$ учун $|a_n| < \varepsilon^2$ тенгсизлик щринли, шундай ыилиб, ъар бир $n > N_2$ учун ыуйидагига эгамиз:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\sqrt{a_n} - 0\right| = \left|\sqrt{a_n}\right| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = |\varepsilon| = \varepsilon.$$

Шундай ыилиб, $a > 0$ ва $a = 0$ бщлган иккала ъолда ъам ъар ыандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N номер топилдики, унда ъар бир $n > N$ учун $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилди, бу эса

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

эканини билдиради.

9 - м и с о л. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-4}$ ни ъисобланг.

Е ч и л и ш и . $\{2n+3\}$ ва $\{3n-4\}$ кетма-кетликларнинг ъар бири яыинлашувчи эмас (ы. 6- мисол), шунинг учун бщлинманинг лимити ъаыидаги ыоидани ыщллаб бщлмайди. $\frac{2n+3}{3n-4}$ касрнинг сурат ва махражини n га бщлиб (бунда касрнинг ыиймати щзгармайди), ыуйидагини топамиз:

$$\frac{2n+3}{3n-4} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{4}{n}}.$$

Сщнгра

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,\quad \lim_{n\to\infty} 2 = 2,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n} = 4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

бщлгани сабабли 6° а) хоссасига биноан, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 2$, 6° б) хоссасига биноан эса $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n} = 3 \neq 0.$ 6° хоссани ыщллаб ыуйидагини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{4}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Одатда лимитларни ъисоблашда олдин тегишли теоремаларнинг шартлари бажарилган деб фараз ыилинади, шундан кейин тескари тартибда ифодалар орасига ыщйилган тенглик ишоралари ыонуний эканлиги асосланади.

10 - м и с о л. Топинг:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-3n}{4n+5}\right)^3 \frac{\sqrt{n}+2}{n^2+n+1}.$$

Е ч и л и ш и .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-3n}{4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-3}{4+\frac{5}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-3\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{5}{n}\right)}=\frac{0-3}{4+0}=-\frac{3}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

бщлгани сабабли 6° хоссага кщра ушбуга эгамиз:

$$\lim\left(\frac{1-3n}{4n+5}\right)^3 \frac{\sqrt{n}+2}{n^2+n+1}=\left(-\frac{3}{4}\right)^3\cdot 0=0.$$

11 - м и с о л. $\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}$ кетма-кетлик лимитга эга эканини исботланг ва шу лимитни топинг.

Е ч и л и ш и . $\left\{\sqrt{n^2+1}\right\}$ ва $\{n\}$ кетма-кетликларнинг ъар бири яыинлашувчи эмас, шу сабабли айирманинг лимити ъаыидаги 6° б) хоссани ыщллаб бщлмайди. Шу сабабли $\sqrt{n^2+1}-n$ ифодани унга ыщшма бщлган $\sqrt{n^2+1}+n$ ифодага бщламиз ва кщпайтирамиз. Натижада ыуйидагига эга бщламиз:

$$\sqrt{n^2+1}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

$0<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{n\left(\sqrt{n+\frac{1}{n^2}}+1\right)}<\frac{1}{2n}$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$. Шунга кщра

11° хоссага биноан $\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}$ кетма-кетлик лимитга эга

ва бу лимит нолга тенг, яони $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=0.$

Агар $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ бщлса, $\{a_n\}$ *чексиз кичик кетма-кетлик* дейилади.

а сон $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлиши учун $a_n=a+\alpha_n$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли, бунда $\{\alpha_n\}$ — чексиз кичик кетма-кетлик.

12 - м и с о л. Топинг:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1+\sin n}{n^2+n+1}.$$

Е ч и л и ш и . Бутун ысмни ажратиб, ушбуга эга бщламиз:

$$\frac{n^2+2n+1+\sin n}{n^2+n+1}=1+\frac{n+\sin n}{n^2+n+1}.$$

$$0<\frac{n+\sin n}{n^2+n+1}\le\frac{n+1}{n^2+n+1}\le\frac{2n}{n^2+n+1}<\frac{2}{n} \quad \text{ва} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$$

бщлгани сабабли 11° хоссага кщра $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sin n}{n^2+n+1}=0$. Демак, $\left\{\frac{n+\sin n}{n^2+n+1}\right\}$ кетма-кетлик чексиз кичик кетма-кетликдир ва шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1+\sin n}{n^2+n+1}=1.$$

Чексиз кичик кетма-кетликларнинг ыуйидаги хоссалари щринли.

1°. *Исталган чекли сондаги чексиз кичик кетма-кетликлар йиғиндиси чексиз кичик кетма-кетликдир.*

2°. *Иккита чексиз кичик кетма-кетликнинг айирмаси чексиз кичик кетма-кетликдир.*

3°. *Чексиз кичик кетма-кетликлар кўпайтмаси чексиз кичик кетма-кетликдир.*

4°. *Агар $\{a_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик, $\{b_n\}$ эса чегараланган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $\{a_nb_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликдир.*

13 - м и с о л. Исботланг:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi\sqrt{n+2}}{n^2+4n}=0.$$

Е ч и л и ш и . $b_n=\sin\frac{\pi\sqrt{n+2}}{n^2+4n}(n\in N)$ чегараланган кетма-кетлик $\left(\left|\sin\frac{\pi\sqrt{n+2}}{n^2+4n}\right|\le 1\right)$ ва $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ кетма-кетлик чексиз кичик кетма-кетликдир: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Демак, берилган кетма-кетлик $\left\{\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi\sqrt{n+2}}{n^2+4n}\right\}$ ъам чексиз кичик кетма-кетликдир, яони

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi\sqrt{n+2}}{n^2+4n}=0\ .$$

14 - м и с о л. Исботланг: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1.$

Е ч и л и ш и . Ъар ыандай $n\ge N$ учун $\sqrt[n]{5}>1$ тенгсизлик щринли. Шунинг учун $\alpha_n=\sqrt[n]{5}-1>0.$ Бундан ыуйидагига эгамиз: $5=(\alpha_n+1)^n\ge 1+n\alpha_n$ ва, демак, барча $n\ge 2$ лар учун $0<\alpha_n<5/n$ ва шу сабабли $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0.$ $\sqrt[n]{5}=1+\alpha_n$ ва α_n чексиз кичик миыдор. Шунга кщра $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1.$

15 - м и с о л. Исботланг: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

Е ч и л и ш и . Ъар ыандай $n\ge 2$ да $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n]{1}=1$ га эга бщлганимиз учун $\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n>0.$ Бундан:

$$n=(1+\alpha_n)^n\ge 1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2>\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2{}_n.$$

$n\ge 2$ да $n-1\ge\frac{n}{2}$, у ъолда $n>n^2,\frac{a_n^2}{4}$. Шундай ыилиб, $n\ge 2$ да $0\le\alpha_n\le\frac{2}{\sqrt{n}}$. Шундай ыилиб, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,$ демак,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)=1.$$

16 - м и с о л. Исботланг:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{10}}{3^n}=0.$$

Е ч и л и ш и . Ушбуга эгамиз:

$$\frac{n^{10}}{3^n}=\left(\frac{n}{\sqrt[10]{3n}}\right)^{10}=\left(\frac{n}{a^n}\right)^{10},$$

бунда $a=\sqrt[10]{3}>1.$

$$0<\frac{n}{a^n}=\frac{n}{\left[1+(a-1)\right]^n}=\frac{n}{1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\ldots+(a-1)^n}<$$

$$<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2}=\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}=\frac{\frac{2}{(a-1)^2}}{n-1}$$

ва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=0$ бщлгани учун $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0.$ Демак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a^n}\right)^{10}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{10}}{3^n}=0.$

17 - м и с о л. Исботланг: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n}{n!}=0.$

Е ч и л и ш и . $n>8$ да ыуйидагига эгамиз:

$$0<\frac{7^n}{n!}=\left(\frac{7}{1}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{7}{8}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{7}{n}\right)\le\frac{7^8}{8!}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n-8}=$$

$$=\frac{7}{8!}\cdot\left(\frac{9}{7}\right)^8\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^n.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n=0$ (ы. 3- мисол) бщлганидан 11° хоссага биноан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{n!}=0.$$

18 - м и с о л. Топинг:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^2}.$$

Е ч и л и ш и . Бирор номердан бошлаб $3^n>2^n>n^3>n^2$ бщлгани сабабли ъамда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0$ бщлгани учун:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{3^n}+\frac{n^2}{3^n}}{1+\frac{n^3}{3^n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{3^n}+\frac{n^2}{3^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)}=0.$$

Кетма-кетликларнинг яыинлашиши назариясида берилган кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги ъаыидаги масала марказий щринлардан бирини эгаллайди. Таокидлаймизки, ыуйидаги хосса кетма-кетлик яыинлашувчи бщлишининг етарли аломатларидан биридир:

агар $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$ *ва бирор номердан бошлаб ҳар бир натурал n да* $a_n\le c_n\le b_n$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда* $\{c_n\}$ *кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва у A га тенг.*

Вейерштрасснинг ыуйидаги теоремаси лимит мавжудлигининг бошыа бир муъим етарлилик аломатидир:

Юқоридан(пастдан) чегараланган камаймайдиган (ўсмайдиган) кетма-кетлик лимитга эга.

Баъзан бу теоремани бундай ифодалашади: агар кетма-кетлик монотон ва чегараланган бўлса, у ҳолда у лимитга эга.

Шундай ыилиб, кетма-кетликнинг монотонлиги, чегараланганлиги ва яыинлашувчанлиги тушунчалари щзаро боьлиы.

Шуни таокидлаймизки, Вейерштрасс теоремаси лимит мавжудлигини аниылайди, аммо уни топиш усулини бермайди. Шунга ыарамай, баози кетма-кетликлар учун лимитнинг мавжудлик омили уни топишга имкон беради.

19 - м и с о л. Исботланг:

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,$$

бунда $0<|q|<1.$

И с б о т и . $q>0$ бщлган ъол билан чегараланамиз. q_n кетма-кетлик чегараланган, чунки ъар ыандай $n\in N$ да $0<q^n<1$. Шунингдек, бу кетма-кетлик монотон камаяди. Ъаыиыатан,

$$q^{n+1}=q^nq<q^n.$$

Демак, $\{q^n\}$ кетма-кетлик Вейерштрасс теоремаси шартларини ыаноатлантиради, бинобарин у лимитга эга. Бу лимит миыдорини a билан белгилаймиз. 3°-хоссага кщра

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n,$$

шунга кщра $a=\lim\limits_{n\to\infty}q^{n+1}=q\cdot\lim\limits_{n\to\infty}q^{n}=qa$ тенгликдан $a(1-q)=0$ экани келиб чиыади. $q\neq 1$, шунга кщра $a=0$. Шуни исботлаш талаб ыилинган эди.

20 - м и с о л. Исботланг:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}=0,$$

бунда k — натурал сон.

Е ч и л и ш и . $a_n=\dfrac{n^k}{2^n}$ кетма-кетликни ыараймиз. Ушбуга эгамиз: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)^k2^n}{2^{n+1}\cdot n^k}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k$. N ни ъар бир $n>N$ учун $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k<\dfrac{3}{2}$ тенгсизлик бажариладиган ыилиб танлаймиз (бунинг учун $\dfrac{1}{\sqrt[k]{3/2}-1}$ дан катта сонлардан бирини N деб олиш етарли). У ъолда $n>N$ да

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{3}{4}<1$$

га эга бщламиз, яони $a_{n+1}<a_n$ бщлади. Шундай ыилиб, $\{a_n\}$ бирор N дан бошлаб камаювчи кетма-кетлик. Бу кетма-кетлик ыуйидан, масалан, 0 сони билан чегараланганлиги сабабли Вейерштрасс теоремасига биноан у лимитга эга. Бу лимитни A билан белгилаймиз. $A=0$ эканини исботлаймиз. $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k a_n$ тенгликдан $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=A$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k=1$ эканини ъисобга олган ъолда $A=\dfrac{1}{2}A$ га эга бщламиз, бундан $A=0$.

Шуни таокидлаймизки, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{2^n}=0$ эканини исботлаш учун Вейерштрасс теоремасидан фойдаланмай, балки ъар ыандай $n>N$ учун $\dfrac{a_{n+1}}{a}<\dfrac{3}{4}$ тенгсизликдан бевосита фойдаланиш мумкин. Ъаыиыатан, бу тенгсизликдан ушбу тенгсизлик осонгина келиб чиыади: $0<a_{n+1}<c\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, $n>N$, бунда с : $a_1a_2\dots a_N$. Бундан 11° хоссага кщра керакли тенгсизликка эга бщламиз.

21 - м и с о л. $x_1=\frac{a}{2},\ x_2=\frac{a}{2}-\frac{x_1^2}{2},\ x_3=\frac{a}{2}-\frac{x_2^2}{2},\ldots,\ x_n=\frac{a}{2}-\frac{x^2{}_{n-1}}{2}$, $0<a<1$ яыинлашувчи кетма-кетлик эканини аниылаб, унинг лимитини топинг.

Е ч и л и ш и . Ушбуларга эгамиз:

$$x_2-x_1=\left(\frac{a}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right)-\frac{a}{2}=-\frac{x_1^2}{2}=-\frac{a^2}{8}<0,$$

$$x_2=\frac{a}{2}-\frac{x_1^2}{2}=\frac{a}{2}-\frac{a^2}{8}=\frac{a(4-a)}{8}>0, \text{ яони } 0<x_2<x_1;$$

$$x_3-x_2=\frac{a}{2}-\frac{x_2^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{x_1^2}{2}=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)>0, \text{ яони } x_3>x_2;$$

$$x_3-x_1=\frac{a}{2}-\frac{x_2^2}{2}-\frac{a}{2}=-\frac{x_2^2}{2}<0, \text{ яони } x_3<x_1;$$

демак, $x_2<x_3<x_1$. Сщнгра,

$$x_4-x_3=\frac{x_2^2-x_3^2}{2}<0, \quad \text{яони } x_3>x_4;$$

$$x_4-x_2=\frac{x_1^2-x_2^2}{2}>0, \quad \text{яони } x_4>x_2;$$

демак, $x_2<x_4<x_3$ ва ъ.к.

Шунга щхшаш $x_4<x_3<x_2$ эканини топамиз. Математик индукция методини ыщллаб, $x_{2n}<x_{2n+1}<x_{2n-1}$ ва $x_{2n}<x_{2n+2}<x_{2n+1}$ эканини исботлаш мумкин. Бундан эса $x_1,\ x_3,\ x_5,\ldots,\ x_{2n+1}$ кетма-кетлик камаювчи, $x_2,\ x_4,\ x_8,\ldots,\ x_{2n},\ldots$ кетма-кетлик щсувчи эканлиги келиб чиыади.

Вейерштрасс теоремасига кщра бу кетма-кетликлар яыинлашувчидир, чунки ъар ыандай n учун $0<x_n<\frac{a}{2}$ тенгсизликларга эгамиз.

Уларнинг лимитларини мос равишда A ва B билан белгилаймиз.

$$x_{2n+1}=\frac{a}{2}-\frac{x_{2n}^2}{2}, \quad x_{2n}=\frac{a}{2}-\frac{x_{2n-1}^2}{2}$$

муносабатларда $n\to\infty$ да лимитга щтиб, $(A-B)\cdot\frac{A+B-2}{2}=0$ тенглик $A=B$ бщлгандагина щринли эканлигини кщриш мумкин. Ъаыиыатан ъам, агар $A\neq B$ бщлса, у ъолда, $A+B=2$ бщлади. $0<a<1$ бщлгани учун, $2=A+B=a-\frac{A^2+B^2}{2}<1-\frac{A^2+B^2}{2}$

га ки $\frac{A^2+B^2}{2}<1-2<0$ га эга бщламиз. Бундай бщлиши эса мумкин эмас. Демак, $A = B$.

Монотон ва чегараланган кетма-кетликнинг яыинлашиши ъаыидаги теорема таырибан квадрат илдиз чиыариш алгоритмини асослаш имконини беради.

22 - м и с о л. Агар $a > 0$ бщлса,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\ x_1=a$$

рекуррент муносабат билан берилган x_n кетма-кетлик лимитга эга ва бу лимит $\sqrt{a}$ га тенглигини исботланг.

Е ч и л и ш и . $a > 0$ ва $x_1 > 0$ бщлганидан ъар ыандай n да $x_n > 0$. Икки соннинг щрта арифметиги ва щрта геометриги орасидаги тенгсизликдан ушбуга эгамиз:

$$\frac{x_n+\frac{a}{x_n}}{2}\geq\sqrt{x_n\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}.$$

Демак, ъар ыандай натурал сон $n \geq 2$ учун $x_n\geq\sqrt{a}$, яони $\frac{a}{x_n}\leq\sqrt{a}$ тенгсизлик щринли. Шундай ыилиб, $x_{n+1}=\frac{x_n+\frac{a}{x_n}}{2}\leq\frac{x_n+\sqrt{a}}{2}\leq$ $\leq\frac{x_n+x_n}{2}=x_n$, ва демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ыуйидан, масалан, $\sqrt{a}$ сон билан чегараланган, у ъолда Вейерштрасс теоремасига кщра, у лимитга эга. Шу лимитни c билан белгилаймиз. 8°-хоссага кщра $c\geq\sqrt{a}$. Бошланьич рекуррент муносабатда лимитга щтиб ва ъар ыандай яыинлашувчи $\{a_n\}$ кетма-кетлик учун 3°-хоссага кщра

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$$

эканидан фойдаланиб, $c=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a}{c}\right)$, яони $2c^2= c^2+ a$ ки $c^2= a$ эканини топамиз. $c \geq 0$, шунинг учун $c=\sqrt{a}$.

Бу ъолда 2 сонининг квадрат илдизини ъисоблаш алгоритми ыуйидагиларни беради:

$$x_1 = 2;$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}+2\right)=\frac{3}{2}=1{,}5;$$

$$x_3=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3/2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{17}{12}=1{,}41(6);$$

$$x_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17/12}+\frac{17}{12}\right)=\frac{577}{408}=1{,}414(2156679),$$

шуни таокидлаймизки, $\sqrt{2}=1{,}4142135...$ ва шу билан x_4 $\sqrt{2}$ сонининг 10^{-5} гача аниыликдаги яыинлашишини беради.

Эслатма. $\alpha_n=x_n-\sqrt{a}$ айирма учун

$$\alpha_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(\sqrt{a}+x_n)}$$

рекуррент муносабат щринли эканини кщрсатиш мумкин, бу муносабатдан

$$\alpha_{n+1}<\frac{\alpha_n^2}{2\sqrt{a}},\ n\in N,$$

яони бу алгоритмда ъисоблаш хатоликлари $(n+1)$- ыадамда бирор щзгармас сонгача аниыликда n-ыадамдан олинган хатолик квадратидан ошиб кетмайди.

23 - мисол. $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n\in N$ кетма-кетлик яыинлашувчи эканини исботланг.

Ечилиши. Щрта арифметик ва щрта геометрик орасидаги тенгсизликни ыуйидаги $n+1$ та сонга ыщллаймиз:

$$1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},...,\ 1+\frac{1}{n},\ 1.$$

Ъар ыандай $n\geq 1$ да ыуйидагига эга бщламиз:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)n+1}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}\quad \text{ки}$$

$$\frac{n+2}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Охирги тенгсизликнинг иккала ыисмини $(n+1)$-даражага кщтариб,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

тенгсизликка эга бщламиз. Шундай ыилиб, ъар ыандай $n \geq 1$ да $a_n + 1 > a_n$. Демак, $\{a_n\}$ кетма-кетлик щсувчи.

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ чегараланган кетма-кетлик эканини исботлаймиз.

Бунинг учун яна бир $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$ кетма-кетликни ыараймиз. Юыоридагига щхшаш, бу кетма-кетлик ъам щсувчи, яони $n \geq 1$ да $b_{n+1} > b_n$. Сщнгра

$$a_n b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

бщлгани учун $n \geq 2$ ва $a_n < \frac{1}{n}$ ($n = 1$ да $b_1 = 0$ га эга бщламиз).

$\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик монотон щсувчи, шу сабабли унинг барча ъадлари учинчи ъадидан бошлаб иккинчи ъадидан катта, яони ъар ыандай $n \geq 3$ да

$$b_n > b_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Шундай ыилиб, ъар ыандай $n \geq 3$ да

$$a_n \cdot \frac{1}{b_n} < 4$$

тенгсизлик щринли. $a_1 = 2$ ва $a_2 = \frac{9}{4}$ бщлгани учун ъар бир натурал n учун $0 < a_n < 4$.

Шундай ыилиб, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик чегараланган ва монотон. Демак, Вейерштрасс теоремасига кщра у лимитга эга.

Бу лимитни e билан белгилаш ыабул ыилинган. Бу сон иррационал ва $e = 2{,}718291828\ldots$ экани исботланган.

24 - м и с о л. Топинг:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}.$$

Е ч и л и ш и . Ушбуга эгамиз:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} = \left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\}^{2n/(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1$$

ва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2,$ бундан (7°-хоссага асосан агар $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u,$ бунда $u_n>0,\ u>0$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=v$ бщлса, у ъолда $\lim\limits_{n\to\infty}u_n^{v_n}$ мавжуд ва у u^v га тенг)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}=e^2$$

тенгликка эга бщламиз.

Шуни таокидлаб щтамизки, Вейерштрасс теоремасининг ыщлланишига оид келтирилган мисоллардан ташыари бу теорема геометрияда(айлана узунлиги, доира юзи, айланиш жисмлари сиртлари юзларини, ъажмларини ъисоблаш методларини асослашда), шунингдек, ъаыиыий сонлар назариясида кенг ыщлланилади.

Махражи $q,\ 0<|q|<1$ бщлган камаювчи $\{a_n\}$ геометрик прогрессия берилган бщлсин. Бу прогрессиянинг дастлабки n та ъади йиьиндиси $S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ формула бщйича ъисобланади.

$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,$ шунга биноан, агар $|q|<1$ бщлса, у ъолда

$$\lim_{n\to\infty}S=\frac{a_1}{1-q}.$$

Бу бошыача кщринишда бундай   зилади:

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+\ldots=\frac{a_1}{1-q}.$$

$\frac{a_1}{1-q}$ камаювчи геометрик прогрессиянинг йиьиндиси дейилади.

Масалан,

а) $1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2};$

б) $1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+(-1)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3};$

в) $8-4+2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots+8(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots=\frac{8}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{16}{3};$

г) $1+0{,}1+0{,}01+\ldots+\underbrace{0{,}00000\ldots01}_{n-2\ \text{та ноль}}+\ldots=\dfrac{1}{1-0{,}1}=\dfrac{10}{9}.$

Агар α мусбат сон чексиз щнли даврий каср кщринишда, яони

$$\alpha = r_1\, r_2 \ldots r_l\,,\, q_1\, q_2 \ldots q_k\, (p_1\, p_2 \ldots p_m)$$

кщринишда берилган бщлса, у ъолда камаювчи геометрик прогрессиянинг йиьиндиси формуласи α рационал сон эканини ва унинг оддий каср кщринишдаги ифодасини топиш имконини беради. Ъаыиыатан,

$$\alpha=\overline{r_1r_2\ldots r_l}+\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_k}}{10^k}+\frac{\overline{p_1p_2\cdots p_m}}{10^{k+m}}+\frac{\overline{p_1p_2\cdots p_m}}{10^{k+2m}}+\ldots+\frac{\overline{p_1p_2\cdots p_m}}{10^{k+nm}}+$$

$$+\ldots=\overline{r_1r_2\ldots r_l}+\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_k}}{10^k}+\frac{\overline{p_1p_2\cdots p_m}}{10^{k+m}}\left(1+\frac{1}{10^m}+\ldots+\frac{1}{10^{(n-1)m}}\right)=$$

$$=\overline{r_1r_2\ldots r_l}+\ldots+\frac{\overline{q_1q_2\cdots q_k}}{10^k}+\frac{\overline{p_1p_2\cdots p_m}}{10^{k+m}}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^m}}=$$

$$=\overline{r_1r_2\ldots r_l}+\frac{\overline{q_1q_2\ldots q_k}}{10^k}+\frac{\overline{p_1p_2\ldots p_m}}{(10^m-1)\cdot 10^k}.$$

Ъосил бщлган тенглик α сонни иккита натурал соннинг нисбати сифатида зиш имконини беради:

$$\alpha=\frac{\overline{r_1r_2\ldots r_l}\cdot 10^{m+k}-\overline{r_1r_2\ldots r_l}\cdot 10^k+\overline{q_1q_2\ldots q_k}\cdot 10^m}{(10^m-1)\cdot 10^k}+$$

$$+\frac{\overline{q_1q_2\ldots q_k}+\overline{p_1p_2\ldots p_m}}{(10^m-1)\cdot 10^k}=\frac{\overline{r_1r_2\ldots r_l}\cdot 10^{m+k}+\overline{q_1q_2\ldots q_k}\cdot 10^m+\overline{p_1p_2\cdots p_m}}{(10^m-1)\cdot 10^k}-$$

$$-\frac{\overline{r_1r_2\ldots r_l}\cdot 10^k+\overline{q_1q_2\ldots q_k}}{(10^m-1)\cdot 10^k}=\frac{\overline{r_1r_2\ldots r_lq_1q_2\ldots q_k p_1p_2\ldots p_m}-\overline{r_1r_2\ldots q_lq_1q_2\ldots q_k}}{(10^m-1)\cdot 10^k}$$

эканини ъосил ыиламиз.

Чексиз щнли каср кщринишда берилган α сонни икки натурал соннинг юыорида олинган нисбати кщринишида тасвирлашни бундай бажариш ъам мумкин: агар $\alpha_1 = r_1\, r_2 \ldots r_l,$ $q_1\, q_2 \ldots q_k\, (p_1\, p_2 \ldots p_m)$ бщлса, у ъолда олдин бу тенгликни 10^{k+m} га кщпайтириб, $10^{k+m}\ \alpha = r_1\, r_2 \ldots r_l\, q_1\, q_2 \ldots q_k\, p_1\, p_2 \ldots p_m,\ (p_1p_2 \ldots p_m)$ тенгликка, 10^k га кщпайтириб эса

$$10^k\alpha = \overline{r_2 r_3 r_l q_1 q_2 ... q_k},\ (p_1 p_2 ... p_m)$$
тенгликка эга бщламиз.

Биринчи тенгликдан иккинчи тенгликни айириб, топамиз:

$$(10^m-1)\cdot 10^k\alpha = \overline{r_1 r_2 ... r_p q_1 q_2 ... q_k\, p_1 p_2 ... p_m} - \overline{r_1 r_2 ... r_l q_1 q_2 ... q_k};$$
демак,

$$\alpha = \frac{\overline{r_1 r_2 \dots r_l q_1 q_2 \dots q_k\, p_1 p_2 \dots p_m} - \overline{r_1 r_2 \dots r_l q_1 q_2 \dots q_k}}{10^k(10^m-1)}.$$

25 - м и с о л. Агар

а) $\alpha = 2,(3)$; б) $\alpha = 0,3(14)$

бщлса, α чексиз даврий щнли касрни оддий каср кщринишида тасвирланг.

Е ч и л и ш и . а) $\alpha = 2,(3)$, буни олдин 10 га кщпайтириб, ъосил бщлган тенгликдан $\alpha = 2,(3)$ тенгликни айириб топамиз:

$$10\alpha - \alpha = 23,(3) - 2,(3) \quad \text{ки } 9\alpha = 21,$$

бундан $\alpha = \frac{7}{3}$, Шундай ыилиб, $2,(3) = \frac{7}{3}$.

б) $\alpha = 0,3(14)$, буни олдин 1000 га кщпайтириб, ъосил бщлган тенгликдан 10 га кщпайтирилган $\alpha = 0,3(14)$ тенгликни айириб, топамиз:

$$1000\alpha - 10\alpha = 314,(14) - 3,(14) \quad \text{ки } 990\alpha = 311,\ \alpha = 311/990.$$

Шундай ыилиб, $0,3(14) = 311/990$.

Э с л а т м а. Махражи q, $0 < [q] < 1$ бщлган $\{a_n\}$ чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиьиндиси формуласи $S = \frac{a_1}{1-q}$ берилган рационал сон α ни махражлари ъар хил бщлган чексиз камаювчи геометрик прогрессияларнинг йиьиндиси шаклида ъар хил усуллар билан тасвирлаш (ифодалаш) имконини беради.

Масалан,

а) $\frac{7}{2} = \frac{7/3}{1-1/3} = \frac{7}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots\right)$;

б) $\frac{7}{2} = \frac{77/20}{1+1/10} = \frac{77}{20}\left(1-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{10^{n-1}}\right)$;

в) $\frac{7}{2} = \frac{5/2}{1-2/7} = \frac{5}{2}\left(1+\frac{2}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}+\ldots\right)$.

Агар ъар бир мусбат А сон учун шундай N мавжуд бщлсаки, ъар ыандай $n>N$ учун $\{a_n\}$ >А тенгсизлик щринли бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик *мусбат чексизликка узоқлашувчи кетма-кетлик* дейилади.

$\{a_n\}$ кетма-кетлик мусбат чексизликка узоылашувчи эканлигини ыуйидагича зиш ыабул ыилинган:

$$\lim_{n\to\infty} a_a = +\infty \quad \text{ки} \quad n \to \infty \ \text{да} \ a_n \to +\infty.$$

Таокидлаймизки, *агар* $\lim\limits_{n\to\infty} a_a = +\infty$ *бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = 0,$ ва аксинча, *агар* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = 0$ *бўлса ва шундай N номер мавжуд бўлиб, барча n>N учун* $a_n > 0$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *бўлади.*

26 - м и с о л. Исботланг:

$$\lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty.$$

Е ч и л и ш и . Ихти рий мусбат A сонни оламиз ва $N = \left[\sqrt[3]{A}\right] + 1$ деб белгилаймиз. Бу ъолда ъар ыандай $n>N$ учун

$$n^3 > N^3 = \left(\left[\sqrt[3]{A}\right] + 1\right)^3 > \left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = A$$

тенгсизлик щринли бщлади.

Шу билан ъар бир $A > 0$ учун шундай N номер кщрсатиладики, бу номердан бошлаб $n^3 > A$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса, таорифга биноан $\{n^3\}$ кетма-кетлик мусбат чексизликка узоылашишини билдиради.

$\{a_n\}$ кетма-кетлик плюс чексизликка узоылашишини бундай изоълаш (тушунтириш) мумкин. Ъар ыандай $A > 0$ учун шундай N номер топиладики, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг $(N+1)$ - ъадидан бошлаб барча ъадлари яони a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, ... ъадлари $(A_1; +\infty)$ интервалга тегишли бщлади, кетма-кетликнинг чекли сондаги, аммо N дан кщп бщлмаган ъадлари бу интервалда тмаслиги мумкин.

Агар

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$$

муносабат щринли бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик *манфий чексизликка узоқлашади* дейилади.

$\{a_n\}$ кетма-кетлик манфий чексизликка узоылашишини бундай зиш ыабул ыилинган:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{ки} \quad n \to \infty \text{ да } a_n \to -\infty.$$

Шуни таокидлаймизки, *агар* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0,$ *ва, аксинча, агар* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0,$ *ва шундай N номер мавжуд бўлиб, барча n > N лар учун* $a_n < 0$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty.$

27 - м и с о л. Исботланг:

$$\lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty.$$

Е ч и л и ш и . Таорифга кщра $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$ эканини исботлаш керак. Ъаыиыатан, ихти рий мусбат A сон ва $N = \left[\sqrt[3]{A}\right] + 1$ учун ъар ыандай $n > N$да $n^2 > A$ тенгсизлик щринли бщлишига эга бщламиз. Бундан таорифга кщра, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ экани келиб чиыади. Шундай ыилиб,

$$\lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty.$$

$\{a_n\}$ кетма-кетлик манфий чексизликка узоылашишини бундай тушунтириш мумкин. Ъар ыандай $A > 0$ учун шундай N номер топиладики, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг $(N+1)$- ъадидан бошлаб барча ъадлари, яони a_{N+1}, a_{N+2}, $a_{N+3}, \ldots$ ъадлари $(-\infty, -A)$ интервалга тегишли бщлади, кетма-кетликнинг чекли, аммо N тадан кщп бщлмаган ъадлари бу интервалда тмаслиги мумкин.

Агар

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

муносабат щринли бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик *чексиз катта* ки *чексизликка узоқлашувчи кетма-кетлик* дейилади. $\{a_n\}$ кетма-кетлик чексизликка узоылашишини бундай зиш ыабул ыилинган:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{ки} \quad n \to \infty \text{ да } a_n = \infty.$$

Шуни таокидлаймизки, *агар* $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$ *бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = 0,$ *ва аксинча, агар* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|a_n|} = +\infty,$ *ва шундай N номер мавжуд бўлиб, барча n>N лар учун* $a_n \neq 0$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$.

28 - м и с о л. $\{(-1)^n n\}$ чексиз катта кетма-кетлик эканини исботланг.

Е ч и л и ш и . Ихти рий мусбат A сонни оламиз ва $N = \left[\sqrt{A}\right] + 1$ деб фараз ыиламиз. У ъолда, ъар ыандай $n>N$ учун

$$|a_n| = |(-1)^n n| = |n| > \left[A\right] + 1 > A,$$

яони $|a_n| > A$ тенгсизлик щринли, бу эса $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$, яони $\{(-1)^n n\}$ кетма-кетлик чексиз катта эканини билдиради.

$\{a_n\}$ кетма-кетлик чексиз катта эканини бундай тушунтириш мумкин: ъар ыандай $A > 0$ сон учун шундай N номер топиладики, кетма-кетликнинг $(N+1)$ - ъаддан бошлаб барча ъадлари, яони a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3},... ъадлари $[-A,\ A]$ чекли кесмадан ташыарида тади, $[-A,\ A]$ кесма эса кетма-кетликнинг чекли сондаги ъадларинигина щз ичига олиши мумкин.

Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик учун $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ тенгликлар бажарилса, у ъолда бу кетма-кетлик чексиз катта бщлади. Тескариси умуман айтганда нотщьри, яони агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик чексиз катта бщлса, у ъолда бундан $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ эканлиги келиб чиымайди. Масалан, $\{(-1)^n \cdot n\}$ кетма-кетлик шундай кетма-кетлик, бунинг учун $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, аммо бу кетма-кетлик $-\infty$ га узоылашмайди, $+\infty$ га ъам узоылашмайди.

Чексиз катта кетма-кетлик чегараланган эмас. Аммо шу ваытнинг щзида чегараланмаган кетма-кетликлар ъам мавжуд бщлиб, улар чексиз катта эмас. Масалан, $\left\{n \cdot \cos\dfrac{\pi \cdot n}{2}\right\}$ кетма-кетлик шундай кетма-кетликдир. Бу кетма-кетлик чегараланган эмас, чунки ъар ыандай $A > 0$ сон олмайлик, n нинг

$n = N_0 = 4([A]+1)$ ыийматида $a_{N_0} = 4([A]+1)\cos(2\pi([A]+1)) =$
$= 4([A]+1) > 4A > A.$

Бу кетма-кетлик чексиз катта ъам эмас, чунки $n = 4k+1$ $(k \in N)$ да $a_n = 0$, демак, ъар ыандай $[-A,\ A]$, $A > 0$ кесма $\left\{n\cos\frac{\pi \cdot n}{2}\right\}$ кетма-кетликнинг чексиз кщп нолга тенг ъадларини щз ичига олади.

6°-хоссалар (73-бетга. ы.) лимитлар ъолида ъар доим ъам тщьри бщлавермайди: чексиз лимитлар ъолига улар ыисмангина кщчирилади.

Ыуйидаги тасдиылар щринли.

1°. *Агар* $a_n \to +\infty$ *ва* $\{b_n\}$ *кетма-кетлик қуйидан чегараланган бўлса, у ҳолда* $(a_n + b_n) \to +\infty$.

2°. *Агар* $a_n \to -\infty$ *ва* $\{b_n\}$ *кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлса, у ҳолда* $(a_n + b_n) \to -\infty$.

3°. *Агар* $a_n \to +\infty$ *ва ҳар қандай n да* $\{b_n\}$ *кетма-кетлик учун* $b_n > M > 0$ *бўлса, у ҳолда* $a_n b_n \to +\infty$.

4°. а) *агар* $a_n \to +\infty$ *ва ҳар қандай n да* $\{b_n\}$ *кетма-кетлик учун* $0 < b_n < M$ *бўлса, у ҳолда* $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$;

б) *агар* $a_n \to 0$ *ва* $\{b_n\}$ *кетма-кетлик учун ҳар қандай n да* $|b_n| > M > 0$ *бўлса, у ҳолда* $\frac{a_n}{b_n} \to 0$;

в) *агар* $|a_n| < M$ *ва ҳар қандай n да* $\{b_n\}$ *кетма-кетлик учун* $|b_n| > M > 0$ *бўлса, у ҳолда* $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$;

г) *агар* $|b_n| \to 0$ *ва ҳар қандай n да* $\{a_n\}$ *кетма-кетлик учун* $|a_n| > M > 0$ *бўлса, у ҳолда* $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$;

д) *агар* $a_n \to +\infty$ *ва ҳар қандай n да* $\{a_n\}$ *кетма-кетлик учун* $b_n \geq a_n$ *бўлса, у ҳолда* $b_n \to +\infty$

Масалан, агар $a_n = n^2$ ва $b_n = \sin^3(n^2 + n) + 2$, $(n \in N)$ бщлса, у ъолда $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ва ъар ыандай натурал n да $1 \leq b_n \leq 3$. Шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0.$$

29 - м и с о л. Исботланг: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-n^2\ln n\right)=+\infty.$

Е ч и л и ш и . $n\geq 3$да $n-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+n^2\ln n=n-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+$

$+n^2\ln n\geq n-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+n^2\ln n\geq n^2$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=+\infty$ бщлгани учун

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+n^2\ln n)=+\infty.$$

Шуни таокидлаймизки, умумий ъолда икки $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетлик учун ыуйидаги саволларга бир ыийматли жавоб берадиган аниы тасдиылар йщы:

а) агар $a_n\to+\infty$ ва $b_n\to+\infty$ бщлса, $\{a_n+b_n\}$ кетма-кетлик;

б) агар $a_n\to+\infty$ ва $b_n\to 0$ бщлса, $\{a_n-b_n\}$ кетма-кетлик;

в) агар $a_n\to+\infty$ ва $b_n\to+\infty$ бщлса, $\{a_n\ b_n\}$ кетма-кетлик;

г) агар $a_n\to 0$ ва $b_n\to 0$ бщлса, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ кетма-кетлик лимитга эга бщладими?

Шу билан бирга кетма-кетликларнинг ъар бири щзининг умумий ъади билан берилган аниы ъолларда баозан бу саволларга жавоб бериш мумкин. Масалан,

а) ыуйидаги

$$a_n=n+3,\ b_n=n-2, \qquad c_n=n,\ d_n=2n,\ f=n^2$$

кетма-кетликларнинг ъар бири $+\infty$ га узоылашади, аммо

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}((n+3)-(n-2))=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}((n+3)-n)=3;$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_c-c_n)=\lim_{n\to\infty}((n+2)-n)=2;$$

$$\lim_{n\to\infty}(c_n-f_n)=\lim_{n\to\infty}(n-n^2)=\lim_{n\to\infty}(n^2(\frac{1}{n}-1))=-\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{3}{n})}{n(1+\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{3}{n})}{n(1+\frac{2}{n})}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{f_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$

б) $a_n=-n,\ f_n=-n^2,\ d_n=-\sqrt{n}$ кетма-кетликлар $-\infty$ га узоылашади, $b_n=\frac{1}{n}$ ва $c_n=\frac{5}{n}$ кетма-кетликлар $n\to\infty$ да 0 га интилади, аммо

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}\left((-n)\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nc_n)=\lim_{n\to\infty}\left((-n)\frac{5}{n}\right)=-5;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\sqrt{n}\right)}{\left(-n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nd_n)=\lim_{n\to\infty}\left((-n)(-\sqrt{n})\right)=\lim_{n\to\infty}n\sqrt{n}=+\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}(f_nb_n)=\lim_{n\to\infty}\left((-n^2)\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}(d_nb_n)=\lim_{n\to\infty}\left((-\sqrt{n})\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}(f_nc_n)=\lim_{n\to\infty}\left((-n^2)\frac{5}{n}\right)=(-5)\lim_{n\to\infty}n=-\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}(c_nd_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}(-\sqrt{n})\right)=(-5)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

в) $a_n=\frac{1}{n},\ b_n=\frac{1}{n^2},\ c_n=\frac{3}{n}$ кетма-кетликлар $n\to\infty$ да нолга интилади, аммо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty;\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}3=3;\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}=0;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}3n=+\infty.$$

1- топшириқ

1. Лимити ыуйидаги сонга тенг бщлган иккита кетма-кетлик тузинг:

1) 5,1; 2) 1 ⁄ 10.

2. $x_n=\frac{n}{n+1}$, $n\in N$ бщлсин. Агар

1) $\varepsilon=0,1$; 2) $\varepsilon=0,04$; 3) $\varepsilon=0,001$ бщлса, шундай $N=N(\varepsilon)$ сонни кщрсатингки, ъар бир $n>N$ да $|x_n-1|<\varepsilon$ тенгсизлик щринли бщлсин.

3. Агар:

1) $x_n=\frac{1}{3n^2}$, $a=0$; 2) $x_n=\frac{1-n}{n+1}$, $a=-1$;

3) $x_n=\frac{2n^2+1}{n^2}$, $a=2$; 4) $x_n=\frac{n}{2^n}$, $a=0$;

5) $x_n=\frac{1}{1+2^n}$, $a=0$

бщлса, ъар бир $\varepsilon>0$ учун шундай $N=N(\varepsilon)$ номерни аниылангки, ъар бир $n\in N$ учун $|x_n-a|<\varepsilon$ бщлсин.

4. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $\frac{1}{10}$ га тенг бщлса, у ъолда, бу кетма-кетликнинг ъар бир ъади бирор номердан бошлаб $\frac{1}{20}$ дан катта бщлишини исботланг.

2- топшириқ

1. Ъар бири монотон бщлмаган ва лимити 1) $\frac{3}{7}$; 2) π га тенг бщлган иккита ъар хил кетма-кетликка мисол келтиринг.

2. $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n\in N$ бщлсин. Агар:

1) $\varepsilon=0,2$; 2) $\varepsilon=0,001$; 3) $\varepsilon=0,005$ бщлса, шундай сонни кщрсатингки, ъар бир $n>N$ да $|x_n|<\varepsilon$ бщлсин.

3. Агар:

1) $x_n = \frac{1}{n+2}, \quad a = 0;$ 2) $x_n = \frac{1}{n^2}, \quad a = 0;$

3) $x_n = \frac{n+2}{n+1}, \quad a = 1;$ 4) $x_n = \frac{3-n^2}{n^2+1}, \quad a = -1;$

5) $x_n = (-1)^n \frac{3^n}{5n+3^n}, \quad a = 1$,

$\varepsilon > 0$ бщлса, шундай $N = N(\varepsilon)$ номер аниылангки, ъар бир $n>N$ учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилсин.

4. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити a га тенг ва $a > 0$ бщлса, у ъолда бирор номердан бошлаб $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг ъар бир ъади ъам нолдан катта бщлишини исботланг.

3- топшириқ

1. Агар:

1) $x_n = \frac{3n+2}{n};$ 2) $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n;$

3) $x_n = 2^{-n+2};$ 4) $x_n = \cos^2 \pi n + \sin^2 \pi n;$

5) $x_n = (-1)^n \frac{1}{1+n^2};$ 6) $x_n = \frac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}$

бщлса, таорифдан фойдаланиб $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга тенг эканлигини исботланг.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ экани маолум. Лимитлар ъаыидаги теоремалардан фойдаланиб, ыуйидаги лимитларни ъисобланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n + 2b_n);$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n};$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2a_n + b_n} b_n;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} 2a_n(7 + \sqrt{b_{n+n}})b_n > 0.$

3. Лимитларни ъисобланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n-5};$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2+3n+1}{n^2+1};$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+2};$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-3};$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2+3}\right);$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}\right)$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin^2(n+2)}{n}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}+2n+1}{7n\sqrt{n}+4}$.

4. Агар яқинлашувчи кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади мусбат бўлса, унинг лимити 0 га тенг бўлиши мумкинми?

4- топшириқ

1. Агар:

1) $x_n=\frac{1-2n}{n}$; 2) $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 3) $x_n=-\left(\sqrt{2}\right)^{3-n}$;

4) $x_n=\frac{\sin\sqrt{n}}{n+2}$; 5) $x_n=\frac{(-1)^n}{n+2^n}$; 6) $x_n=\sin\frac{1}{n}$

бўлса, таорифдан фойдаланиб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эканини исботланг.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$ экани маолум. Лимитлар ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2a_nb_n-a_n\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3a_n^2-\sqrt{b_{n+1}}\right)$ $b_n\geq 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_{n+2}}+a_{n+3}b_{n+1}\right)$, $a_n>0$, $b_n>0$.

3. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{2n}}{\sqrt{3}+n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-3n^2+4n\sqrt{2n}}{2n^2-3n+7}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+n+1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}-\sqrt{n}}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(n^2+n)}{n+1}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}+3}{\sqrt{n+2}+2}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ ва ҳар қандай $n\in N$ учун $a_n<b_n$ экани маолум. Ҳар доим ҳам $a<b$ бўладими?

5- топшириқ

1. 0 сони $a_n = 1+(-1)^n$ кетма-кетликнинг лимити эмаслигини исботланг.

2. "A сони $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг лимити эмас" деган тасдиыни ифодаланг.

3. Агар:

а) $a_n = 1 + (-1)^n$;

б) $a_n = n^{(-1)n}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмаслигини исботланг.

4. Яыинлашувчи кетма-кетлик чегараланган бщлишини исботланг. Яыинлашувчи бщлмаган чегараланган кетма-кетликка мисол келтиринг.

5. $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар берилган бщлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ бщлсин. $\{a_n \cdot b_n\}$ кетма-кетлик ъар доим ъам

1) чегараланган;

2) лимитга эга бщладими?

6- топшириқ

1. -1 сони $\{\cos\pi \cdot n\}$, $n \in N$ кетма-кетликнинг лимити бщлмаслигини исботланг.

2. "Кетма-кетлик лимитга эга эмас" тасдиьини таорифлаб беринг.

Агар:

1) $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{4} + 1$;

2) $a_n = (-1)^{n(n+1)/2}\,\dfrac{n}{n+1}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бщлмаслигини исботланг.

3. Щзгарувчи ишорали $\{a_n\}$ кетма-кетликка шундай мисол келтирингки:

1) $\{a_n\}$ лимитга эга бщлсин;

2) $\{a_n\}$ лимитга эга бщлмасин.

4. Агар $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар учун $b_n > 0$, $n \in N$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ бщлса, $\{a_n / b_n\}$ кетма-кетлик ъар доим ъам

1) чегараланган;

2) лимитга эга бўладими?

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n!}$ ни топинг.

7- топшириқ

1. Агар $\{a_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик, $\{b_n\}$ чегараланган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $\{a_n \cdot b_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик бўлишини исботланг.

2. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+2}\cos(n+n^2)\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+n+2}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n^2+n+3}\sin\dfrac{1}{4}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\cos n\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^{n(n+1)/2}\dfrac{n+2}{n^2+1}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)n^{1\frac{1}{4}}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n+2}\right)$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sin n}{2n+\sin n}$.

3. Исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{4^n}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_3 n}{n^2}=0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2 n}{5^n}=0.$

4. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2^n}{2^n-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\ln n}{3n+2\ln n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+3\ln n}{5^{n+1}+2\ln n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+n^{1000}}{3^n+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{50^{30n}+2n}{n!+1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n^{100}+\sqrt{n}+n^{25}}{n^{26}+1}$.

8- топшириқ

1. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln 2+\sqrt{n}}{n+3}+\dfrac{\cos n}{n^2}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2}\right)\dfrac{n^2+3n+2}{5n^2+4n+7}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n\sin n+n^2}\frac{1}{n^{3+1}}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+(-1)^n\right)\cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n^2+1}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\cos\frac{\pi}{2}n\right)\frac{1}{n+2}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\sin n\right)$.

2. Исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n+1}=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}=0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log^{3^n}}{\sqrt{n}}=0$.

3. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5^n}{n+5^{n+1}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2(n+1)}{n+n^2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!+(n+3)!}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n^5+1)}{\sqrt{n}}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1000}+2}{1\cdot 2^n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+n!}{2(n!)+\sqrt[n]{n}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{3^n+7^n}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+2}$.

9- топшириқ

1. Агар:

1) $b_1=-3,\quad q=\frac{1}{2}$; 2) $b_1=7,\quad q=-\frac{4}{3}$

бщлса, махражи q га тенг чексиз камаювчи $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг йиьиндисини топинг.

2. Чексиз щнли касрни оддий касрга айлантиринг:

1) 0,4(4); 2) 1,23(3); 3) 0,423(7).

3. Ыуйидагиларни ыаноатлантирувчи $\{a_n\}$ кетма-кетликка мисол келтиринг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

4. Исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}=+\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=+\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_2 n=+\infty$.

5. Исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-n^2)=-\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-3^n)=-\infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[4]{n}-\sqrt{n})=-\infty$.

6. Ыуйидаги кетма-кетлик чексиз катта эканини исботланг:

1) $a_n = (-1)^n n$; 2) $a_n = n^3 + 1$; 3) $a_n = -n + 2^n$.

10- топшириқ

1. Агар:

1) $a_1 = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{4}$; 2) $a_1 = -2$, $q = -\frac{1}{2}$

бщлса, махражи q га тенг чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиьиндисини топинг.

2. Чексиз щнли даврий касрни оддий касрга айлантиринг:

1) 1,2(1); 2) –0,7(8); 3) 0,23(23).

3. Шундай $\{a_n\}$ кетма-кетликка мисол келтирингки, унинг учун ыуйидагилар щринли бщлсин:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

4. Исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n) = +\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n + n^2) = +\infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$.

5. Исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - 2n) = -\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n - n^2) = -\infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1-n} = -\infty$.

6. Тщьрими? $\left\{\frac{n^2}{1-n}\right\}$ кетма-кетлик:

1) чегараланган эмас; 2) монотон щсувчи.

11- топшириқ

1. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ва $a_n \neq 0$ бщлса, у ъолда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ бщлишини исботланг.

2. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ва $a_n \neq 0$ бщлса, у ъолда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ бщлишини исботланг.

3. Исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\dfrac{n+1}{n-2}\right)=+\infty;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{n+2}=+\infty;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^3=+\infty;$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-\ln n)=+\infty;$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-n)^n\right|=\infty;$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\ln n\right|=\infty;$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-n^{1000})=+\infty;$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^2+\sqrt{n^3}\right)=-\infty;$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n^2+1}\right)=-\infty.$

4. Ыуйида чегараланмаган кетма-кетлик берилган. Унинг $+\infty$ га ъам, шунингдек, $-\infty$ га ъам узоылашувчи эмаслигини исботланг:

1) $n\sin\dfrac{\pi\cdot n}{2};$ 2) $n^{(-1)^n};$ 3) $\dfrac{n}{1+n^2\cos\dfrac{\pi\cdot n}{2}}.$

12- топшириқ

1. Агар:

1) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n};$ 2) $a_n=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}$

берилган бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг монотон ва чегараланганлигини исботланг.

2. Агар рекуррент формула билан берилган

1) $a_1=2,\quad a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{2},\quad n\in N;$

2) $a_1=\sqrt{3},\quad a_{n+1}=\sqrt{3+a_n},\quad n\in N;$

3) $a_1=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n},\quad n\in N$

$\{a_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бщлса, шу лимитни топинг.

3. Кетма-кетлик рекуррент формула билан берилган:

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\quad a>0,\quad n\in N.$$

Унинг лимитини топинг ва олинган натижадан фойдаланиб, $\sqrt{3}$ ни 10^{-3} гача аниыликда ъисобланг.

4. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3+n}{1+n}\right)^{1-n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n}\right)^{2n-7}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)^{n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n)$.

13- топшириқ

1. Агар:

1) $a_n=\frac{n+1}{2n-1}$; 2) $a_n=0{,}2\underbrace{33.....3}_{n\text{ òà ðà³ àì}}$

бщлса, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг монотон ва чегараланганлигини исботланг.

2. Рекуррент формула билан берилган $\{a_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эканини исботланг ва шу лимитни топинг.

1) $a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{a_n+1}{3},\quad n\in N;$

2) $a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{2}{3-a_n},\quad n\in N;$

3) $a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{2an},\quad n\in N.$

3. Рекуррент кетма-кетлик берилган бщлсин:

$$a_1=M,\quad a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{M}{a_n^2}\right).$$

Унинг лимити $\sqrt[3]{M}$ га тенг эканини исботланг ва $\sqrt[3]{9}$ ни 10^{-3} гача аниыликда ъисобланг.

4. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n-3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1+n}{n^2+2}\right)^{2n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{3n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} 8n\left(\ln\left(n+3\right)-\ln(n+1)\right)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2}\right)^{2n}$.

М а ш қ л а р

1. Кетма-кетликнинг лимити таорифидан фойдаланиб, ыуйидагиларни исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}=0;$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}=0;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2}=1;$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n!}}=0;$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0;$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2+n+1}=0;$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-2}{n+\sqrt{n}+1}=0;$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-11n+3}{2n^2-4n+5}=\frac{1}{2};$ 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)=0;$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{1+3^n}=0;$ 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=0;$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)=3;$ 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^2}=0;$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{tg}\,\frac{3}{n}=0;$ 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin^3(n^2+\sqrt{n+1})}{n}=0;$

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0;$ 18) $\lim\limits_{n\to\infty}0{,}88^n=0;$

19) $\lim\limits_{n\to\infty}5^{1/n}=1;$ 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\lg\frac{2n+5}{n+1}=\lg 2.$

2. $\{a_n\}$ кетма-кетлик яыинлашувчи эканлигини исботланг, бунда:

1) $a_n=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3};$ 2) $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n;$

(К щ р с а т м а : $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ тенгсизликдан фойдаланинг.)

3) $a_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n};$ 4) $a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!};$

5) $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n};$ 6) $a_n=1+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\ldots+\frac{n}{4^{n-1}};$

7) $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{4n}$; 8) $a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

9) $a_n=\frac{1}{2n+1}+...+\frac{1}{3n}$; 10) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

3. 0 ва 1 сонлари ыуйидаги кетма-кетликларнинг лимити эмаслигини исботланг:

1) $a_n=\frac{(-1)^n+1}{2}$; 2) $a_n=\sin\frac{\pi\cdot n}{2}$; 3) $a_n=\cos\frac{\pi\cdot n}{6}$.

4. Агар:

1) $a_n=\cos\frac{\pi\cdot n}{2}$; 2) $a_n=5+\frac{(-1)^n n}{1+n}$; 3) $a_n=\mathrm{tg}\frac{\pi\cdot n}{3}$;

4) $a_n=\sin\pi\cdot n+\sin\frac{\pi\cdot n}{4}$; 5) $a_n=n+1$;

6) $a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$; 7) $a_n=1-n+n^2$; 8) $a_n=\left[(-1)^n n\right]$;

9) $a_n=\cos n$; 10) $a_n=\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

5. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ экани маолум бщлса, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ ни топинг:

1) $y_n=\frac{2a_n-1}{a_n+1}$; 2) $y_n=\frac{a_n^2+a_n-2}{a_n-1}$, $a_n\neq1$, $n\in N$;

3) $y_n=\frac{a_n^n-1}{a_n-1}$, $a_n\neq1$, $n\in N$; 4) $y_n=\frac{(2a_n+3)(2-a_n)}{1+a_n}$;

5) $y_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$; 6) $y_n=\frac{2a_na_{n+1}-a_n^2}{a_n+1}$;

7) $y_n=\left(1+a_n\right)^5$; 8) $y_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+3}}$, $a_n\neq0$, $n\in N$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ бщлсин. Ыуйидаги тенгликларни исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos a_n=\cos a$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$, $(a_n\neq0,\ a\neq0)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{a_n}=2^a$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{a_n}=\sqrt[p]{a}, \ (a_n\geq 0, \ p\in N, \ p\geq 2)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_2 a_n=\log_2 a, \ a_n>0, \ a>0.$

7. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{n^2+n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-5n}{2n^2+n+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+4}{2n^2+n+3}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+3}{4-3n-9n^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2-2n}\cdot\frac{n+3}{4n+5}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+2}}{0{,}1n-3}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^{n+1}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{n+5n^3+8}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n(1+3n)(n+4)}{(4+5n)(2n+1)(n+1)}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$; 13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2+n^2}}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2}}$; 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+2n-1}-\sqrt{3n^2-4n+8}\right)$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)$; 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)$; 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n^3}{n^3+1}\frac{n+1}{n+2}\right)$; 22) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+2}$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cos(n^2-5n+4)}{(4+5n)(2n+1)(n+1)}$; 24) $\lim\limits_{n\to\infty}5n\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)$; 26) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^2-1$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{3n^2+1}+\frac{\sqrt{n}-4}{n+5}\right)$; 28) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt{n^3}}$.

8. Исботланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(nq^n)=0,\ |q|<1;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0;$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{7^n}=0;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0;$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}=0;$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{n!}=0.$

9. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n+5};$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{n^2+2\cdot 3^n};$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n+1}{2-5\cdot 3^n};$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{7n+5}-\frac{5^n+1}{4-3\cdot 5^n}\right);$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+(-1)^n\right)^n}{3^n\ln(n+2)};$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg(n^2+n-1)}{\lg(n^{10}+5^5+1)};$ 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5^n+\lg(n+1)}{n^2-5^n+\lg(n+1)};$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{2^n+6^n};$ 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n\right);$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n+\lg(n+1)}{\lg(n+2)+\lg(n+3)};$ 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}+2^n}{\lg n+n!};$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n-3};$ 13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{1/n}+3^{1/n}+4^{1/n}\right);$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n+1}+\sqrt[n]{n+2}}{\sqrt[n]{n+2}};$ 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2 n+\log_3 n}{\log_3 n+\log_4 n};$

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2(n^{1000}+1)}{n+2}.$

10. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right);$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+1}\right);$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+n}\right);$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\ldots+\frac{n}{n^3}\right)\right);$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\ \sqrt[4]{2}\ \sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}\right);$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4}{n^5};$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}+n\right);$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+3+5+\ldots(2n-1)}}{2n^2+n+1}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\right]$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$;

Кщрсатма: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

11. Кетма-кетликнинг лимити 0 га тенг бщлсин. Шу кетма-кетликнинг:

1) ъадлари 10^{10} дан кщп бщлиши;

2) ъамма ъадлари манфий бщлиши;

3) ъамма ъадлари 10^{-10} дан кщп бщлиши мумкинми?

12. Яыинлашувчи кетма-кетликда чекли сондаги ъадларни ыщшиш, олиб ташлаш ки алмаштириш билан кетма-кетликнинг лимити щзгармайди. Шуни исботланг.

13. Агар кетма-кетликнинг лимити *a* га тенг бщлса, берилган кетма-кетлик ъадларининг щринларини ъар ыандай алмаштириш билан ъосил бщлган кетма-кетлик ъам шу *a* лимитга эга бщлади. Шуни исботланг.

14. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ бщлса, у ъолда $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ бщлишини исботланг.

15. $\{a_n\}$ кетма-кетлик берилган. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ экани маолум. Бундан $\{a_n\}$ нинг яыинлашувчилиги келиб чиыадими?

16. $\{a_n\}$ кетма-кетлик берилган. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ экани маолум. Бундан $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ экани келиб чиыадими?

17. Агар $\{a_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у ҳолда $a_k = \max\limits_{n\in N}\{a_n\}$ бўладиган k номер, ки $a_l = \min\limits_{n\in N}\{a_n\}$ бўладиган l номер мавжуд бўлишини исботланг.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ бўлсин. Унда $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$ бўлишини исботланг.

19. $\{a_n\}$ кетма-кетлик учун $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$ бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ эканини исботланг.

20. a нуқтанинг бирор атрофида $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кўп ҳадлари   тади. Бундан:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

2) $b \neq a$ сон бу кетма-кетликнинг лимити эмаслиги;

3) $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги келиб чиқадими?

21. $\{b_n\}$ бирор кетма-кетлик ва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ бўлсин. $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n b_n\} = 0$ деб тасдиқлаш мумкинми?

22. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$ бўлсин. Бундан $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлардан ақалли биттаси яқинлашувчи эканлиги келиб чиқадими?

23. Чегараланган $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликларга доир шундай мисол келтирингки,

1) уларнинг йиғиндиси;

2) уларнинг айирмаси;

3) уларнинг кўпайтмаси лимитга эга бўлсин, лекин уларнинг ҳар бири лимитга эга бўлмасин.

24. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$ бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ бўлишини исботланг.

25. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$ бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ бўлишини исботланг.

26. $\{a_n\}$ кетма-кетлик берилган, унда $a_{n+1} - a_n \to 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ бўлиши тўғрими? Мисоллар келтиринг.

27. Қуйидаги кетма-кетликларнинг ҳар бири лимитга эга эканини исбот қилинг ва шу лимитни топинг:

1) $a_1 = \sqrt{2}$; $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$;

2) $a_1 = \frac{a_0}{2+a_0}$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2+a_{n-1}}$, $a_0 > 0$;

3) $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$; 4) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{2+a_n^2}{2a_n}$;

5) $3,\ 3+\frac{1}{3},\ 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}},\ 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}},\ldots$.

28. a ва N ихти рий мусбат сонлар ва $m \geq 2$ (m — натурал сон) бщлсин. $x_1 = \frac{m-1}{m}a + \frac{N}{ma^{m-1}}, \ldots,\ x_n = \frac{m-1}{m}x_{n-1} + \frac{N}{m(x_{n-1})^{m-1}}$ кетма-кетлик $\sqrt[m]{N}$ сонга ыинлашишини исботланг.

Бу натижадан фойдаланиб, ыуйидаги сонларнинг таырибий ыийматларини берилган аниыликда топинг:

1) $\sqrt{5}$, 10^{-3} гача аниыликда;

2) $\sqrt[3]{4}$, 10^{-2} гача аниыликда;

3) $\sqrt[5]{30}$, 10^{-2} гача аниыликда.

29. Топинг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+2)-\ln(n+3))$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\ln(n^2+2)-\ln(n^2+5))$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-2n^2+4n}{4n-2n^2+1}\right)^{n^2+1}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+n+1}\right)^n$.

30. Агар

1) $a_1 = 2$, $q = 1/4$; 2) $a_1 = 3$, $q = -1/3$;
3) $a_1 = -2$, $q = 1/5$; 4) $a_1 = -3$, $q = 1/9$

бщлса, махражи q бщлган чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиьиндисини топинг.

31. Чексиз щнли касрни оддий касрга айлантиринг:

1) 1,17(2); 2) 0,4(3); 3) −0,27(7); 4) 21,1(5).

32. $\{a_n\}$ кетма-кетлик $+\infty$ ки $-\infty$ га узоылашишини ки чексиз катта эканини исботланг:

1) $a_n = n + 4$; 2) $a_n = \frac{n^2+1}{2-n}$; 3) $a_n = -2n^2$;

4) $a_n = \sqrt{n+3}$; 5) $a_n = (-1)^n 2^n$; 6) $a_n = -n\left[2+(-1)^n\right]$;

7) $a_n = (-1)^n \lg n$; 8) $a_n = n^2 \cos \pi n$;

9) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; 10) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

33. Агар кетма-кетлик $+\infty$ ки $-\infty$ га узоылашса, у ъолда унинг ъадлари орасида энг кичиги мавжуд эканини исботланг.

34. $\{a_n\}$ кетма-кетлик яыинлашувчи, $\{b_n\}$ кетма-кетлик эса чексиз катта бщлсин. $\{a_n b_n\}$ кетма-кетлик:

1) нолга яыинлашувчи;

2) лимитга эга эмас-у, аммо чегараланган;

3) чексиз катта;

4) нолдан фарыли бирор сонга яыинлашувчи бщла оладими?

35. $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кщп ъадлари 0 нуытанинг ъар ыандай атрофидан ташыарида тиши маолум. $\{a_n\}$ кетма-кетлик:

а) чексиз катта;

б) чегараланмаган бщла оладими?

36. Ъар ыандай n да $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ ва $b_n \neq 0$ бщлган $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликларга шундай мисол келтирингки:

1) $\{a_n / b_n\}$ чексиз катта;

2) $\{a_n / b_n\}$ нолга яыинлашувчи кетма-кетлик бщлсин.

37. Ъар ыандай n да $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ва $b_n \neq 0$ бщлган $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликларга шундай мисол келтирингки:

1) $\{a_n / b_n\}$ чексиз катта;

2) $\{a_n / b_n\}$ нолга яыинлашувчи кетма-кетлик бщлсин.

38. $\{a_n\}$ кетма-кетлик чегараланган эмас. Бундан кетма-кетлик:

1) $+\infty$ га узоылашади;

2) $-\infty$ га узоылашади;

3) чексиз катта кетма-кетлик деган хулоса чиыадими?

Жавоблар ва кўрсатмалар

I боб

1- §. Арифметик прогрессия

1- топшириқ. **1.** 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. **2.** −11, −9, −7, −5, −3. **3.** $a_3 = 0$. **4.** $d = \frac{b-a}{2}$. **5.** $a_4 = 5$, $a_6 = 7$, $a_{10} = 11$.

2- топшириқ. **1 .** −3, −1, 1, 3, 5, 7. **2.** 13, −10, −7, −4, −1. **3.** $a_4 = 0$. **4.** $d = \frac{b-a}{3}$. **5.** $a_5 = 7$, $a_2 = 4$; $a_9 = 11$. **6.** 4.

3- топшириқ. **1.** a_5=11. **2.** $a_5 = a_2 + 3d$, $a_{200} = a_3 + 197d$, $a_{10} = a_2 + 8d$, $a_{100} = a_2 + 98d$. **3.** 450. **4.** 332. **5.** $a_1 = 29$, $a_{17} = 30{,}6$. **6.** $a_1 = 1$, $d = 0{,}5$.

4- топшириқ. 1. $a_6 = a_3 + 3d$, $a_{200} = a_3 + 197d$. **2.** $a_6 = -4$. **3.** 45. **4.** 199. **5.** $a_1 = 1{,}1$, $a_{21} = 3{,}1$. **6.** $a_1 = 1$, $d = 0{,}5$.

5- топшириқ. 1. $a_2 = 3\frac{1}{3}$, $a_3 = 3\frac{2}{3}$, $a_6 = 4\frac{2}{3}$. a_5 **= 2. 2.** $a_1 = -1$, $d = 2$. **3.** $a_1 = 3$, $d = 3$ ки $a_1 = -9$, $d = 3$. **4.** Йўқ. **5.** 1665.

6- топшириқ. **1.** $a_3 = 1\frac{1}{2}$, $a_4 = 1\frac{3}{4}$. **2.** $a_1 = -2$, $d = 3$. **3.** $a_1 = 3$, $d = -1{,}5$ ки $a_1 = -1{,}5$, $d = 1{,}5$. **4.** Йўқ. **5.** 55350.

Машқлар

1. 1) $a_n = 5 - 10(n-1)$; 2) $a_n = -3 + 3(n-1)$; 3) $a_n = 6 + 3(n-1)$. **2.** 1) $a_1 = -23$, $d = 3$; 2) $a_{13} = 34$; 3) $a_{10} = 1$; 4) $a_{13} = 3$; 5) $a_1 + a_{20} = 50$; 6) $a_1 = 10$; 7) $n = 18$; 8) $d = -1$; 9) $a_1 = 70$, $d = 5$; 10) $S_{40} = 3240$; 11) $S_{20} = 320$; 12) $a_1 = 14$, $d = -3$ ки $a_1 = 2$, $d = 3$; 13) $a_1 = 2$, $d = 2$ ки $a_1 = 22$, $d = -2$; 14) $n = 6$; 15) $a_k = m + n - k$; 16) $S_{20} = 100$; 17) $a_n = 1 - (n-1)$; 18) $a_n = 1 + 2(n-1)$; 19) $S_{12} = 129$ ки $S_{12} = -69$; 20) $S_{10} = 100$; 21) $S_8 = 100$; 22) $S_{16} = 1488$; 23) $a_1 = 4$, $d = 6$; 24) $a_1 = -1$, $d = 4$; 25) $a_{10} = 55$; 26) $a_1 = 4$, $d = 8$; 27) $a_1 = 2$, $d = 4$; 28) $a_7 = 13$. **3.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) $n(n+1)$;

3) n^2; 4) $\frac{5n^2+11n+6}{2}$; 5) 494550; 6) 165150; 7) 329400; 8) 25100; 9) 5050. **4.** 1) Йўқ. 2) Йўқ. 3) Йўқ. 4) Ҳа. **5.** 9,11, 13. **6.** 9, 11, 13, 15. **7.** $a_1=5$, $d=4$. **8.** 135, 630, 765. **9.** $a_1=0,5$. **10.** $d=7$. **11.** 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 ки 0,4, 0,3, 0,2, 0,1. **12.** 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, −4, −6, −8, −10, −12. **13.** $a_n=-2,5+(n-1)$. **14.** $\frac{a-b}{b-c}$ рационал сон. **15.** 1) бўла олмайди; 2) 4567. **16.** 1) $x=7$; 2) $x=55$; 3) $x=1$. **17.** 25. **18.** $-\frac{1}{3}$, $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{3}$. **19.** $4p^2=25q$. **20.** Ҳа, бўлади: $3a$, $4a$, $5a$. **21.** 3: 5: 7. **22.** $2\left(\sqrt{6}-1\right)$см, $2\sqrt{6}$ см, $2\left(\sqrt{6}+1\right)$см. **23.** 3, 5, 7 ки 4, 5, 6 ки 5, 5, 5. **24.** $a_n=1+2(n-1)$. **25.** 1) 0,1, $161-72\sqrt{5}$; 2) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi\cdot k,\ k\in Z$; 3) $\log_2 5$; 4) $\pi/2+\pi k$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$, $k\in Z$; 5) 10, 2. **26.** 1) бўлади; 2) бўлади; 3) ҳар доим ҳам эмас, масалан: $a_n=-6+n-1$; 5) ҳар доим ҳам эмас, масалан: $a_n=n$, $b_n=n+1$. **27.** 3,9,15. **28.** $16k+4$ та учдан иборат сонлар, бунда $k=0,1,2,\ldots$. **29.** −1, 0, 1,2. **30.** $(p-q)a+(q-k)b+(k-p)c=0$. **31.** 6, 6, 6, 6 ки 10, 14, 18, 22 ки 14, 70, 126, 182 ки 144, 288, 432. **32.** $S_n=\frac{x-1}{2}$. **33.** $a_n=a_1(2n-1)$, бунда a_1−ихтиёрий сон. **49.** $2^{n-1}(a_1+a_{n+1})$. **50.** Кўрсатма: $2C_n^k=C_n^{k-1}+C_n^{k+1}$ формуладан фойдаланинг.

2- §. Геометрик прогрессия

1- топшириқ. **1**. 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16. **2.** 2, 3, 9, 27. **3.** 1024. **4.** $b_4=6$, $b_5=3$, $b_9=3/16$ ки $b_4=-6$, $b_5=3$, $b_9=3/16$. **5.** $b_4=b_2q^2$, $b_7=b_2q^5$, $b_{25}=b_2q^{23}$, $b_k=b_3\,q^{k-3.}$

2- топшириқ. 1. $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4. **2.** 1, 2, 4, 8, 16. **3.** 8. **4.** $b_3=4$, $b_5=4$, $b_5=1$, $b_8=1/8$ ки $b_3=-4$, $b_5=-1$, $b_8=1/8$. **5.** $b_5=b_3q^2$, $b_{17}=b_3q^{14}$, $b_{37}=b_3q^{34}$, $b_k=b_3q_{k-3}$.

3- топшириқ. **1.** 1) 1/128; 2) $b_1=b_{17}=-1$; 3) $b_1=1$, $q=2$ ки $b_1=-1$, $q=-2$. **2.** $b_2=1/18$, $b_3=1/12$, $b_4=1/8$, $b_5=1/16$, $b_6=1/32$. **3.** $b_1=2$, $q=2$. **4.** Йўқ.

4-топшириқ **1.** 1) $1/48$; 2) $b_1=2$, $b_9=2$; 3) $b_1=1$, $q=3$ ки $b_1=1$, $q=-3$. **2.** $b_2=1/18$; $b_3=1/12$; $b_4=1/8$, $b_5=3/16$, $b_6=9/32$ ки $b_2=-1/18$, $b=1/12$, $b=-1/18$, $b_5=3/16$, $b_6=-9/32$. **3.** $b_1=1$, $q=3$. **4.** Йўқ.

5-топшириқ. **1.** 93. **2.** −21. **3.** 1. **4.** 5.

6-топшириқ. **1.** $3\frac{31}{32}$; **2.** $21\frac{3}{8}$; **3.** 65; **4.** 6.

Машқлар

1. 1) $b_2=2$; 2) $q=3/2$; 3) $b_6=72$; 4) $b_7=1/1458$; 5) $b_5=405$; 6) $b_1=2{,}5$; 7) $b_8=21{,}87$; 8) $q=2$ ки $q=-3$; 9) $q=2$; 10) $b_5=1$; 11) $b_{13}=100$; 12) $b_{32}=32$; 13) $b_7=5\sqrt{3}$; 14) $b_{14}=\sqrt[4]{12}/144$; 15) $S_4=468$; 16) $S_6=315$; 17) $b_1=1/75$; 18) $n=4$; 19) $S_{12}=15$; 20) $b_1=2$, $q=5$ ки $b_1=50$, $q=1/5$; 21) $S_6=-728$; 22) $q=\sqrt{2}$; 23) $b_1=2$; 24) $b_7=8\sqrt{2}$; 25) $n=7$; 26) $q=\sqrt{2}$; 27) $n=6$; 28) $b_n=9$; 29) $b_1=128$; 30) $n=5$; 31) $q=1/3$ ки $q=-4/3$; 32) $b_3=3\sqrt{2}$ ки $b_3=4\sqrt{2}+2\sqrt{6}$; 33) $b_1=2$ ки $b_1=32$; 34) $q=3$ ки $q=3/4$; 35) $b_1=\frac{1}{3}$; 36) $S_4=80$; 37) $b_1=2$, $q=3$; 38) $b_1=10$, $q=2$ ки $b_1=40$, $q=1/2$; 39) $S_n=\frac{b^{n-1}\sqrt{b}-a^{n-1}\sqrt{a}}{\sqrt[n-1]{b}-\sqrt[n-1]{a}}$; 40) $b_1=1$, $q=5$ ки $b_1=25$, $q=\frac{1}{5}$; 41) $b_1=2$, $q=2$ ки $b_1=8$, $q=1/2$; 42) $b_1=1$, $q=3$; 43) $b_1=1$, $q=2$, $n=6$; 44) $b_2=6$; 5) $b_2b_3=8$; 46) $\sqrt{b_2b_3}=4\sqrt{2}$; 47) $b_1=5$, $b_8=640$; 48) $n=10$; 49) $b_5=729$; 50) $b_1=3$, $q=2$ ки $b_1=12$, $q=1/2$; 51) $b_2=45$ ки $b_2=-175$; 52) $b_p=\sqrt[m-n]{\frac{\alpha^{p-n}}{\beta^{p-m}}}$; 53) $b_2^2=36$; 54) $n=6$; 55) $S_5=31/96$; 56) $S_5=|2|$ ки $S_5=11\frac{5}{16}$.

2. $S_n=\frac{b_1^2\left(q^{2n}-1\right)}{q^2-1}$. **3.** $q=2$. **4.** К щ р с а т м а: $\frac{a_1+a_3}{2}>\sqrt{a_1a_3}$.
5. $b_5=243$ ки $b_5=-243$. **6.** 18446744073709551615 та дон, яъни 18 квинтиллион 446 квадриллион 744 триллион 73 миллиард 709 миллион 551 минг 615 та дон. **7.** 1) ҳар доим эмас, масалан

$\{2^n+2^n\}$ ва $\{2^n+3^n\}$: 2) ҳар доим эмас, масалан $\{2^n-2^{n-1}\}$ ва $\{3^n-2^n\}$; 3) ҳа; 4) ҳа; 5) ҳа. **8.** $a_1=a_2=a_3\geq 0$. **9.** 1) йўқ; 2) мумкин, масалан, $b_1=18$, $q=2/3$, $b_2=8$, $b_3=64/67$; 3) мумкин: $q=\sqrt[2n-2m]{\frac{6}{4{,}5^2}}$; 4) мумкин эмас. **10.** Мумкин: $q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

12. $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$. **13.** 1) $x=-1$; 2) $\left\{\pm\sqrt{(-1)^{m+1}\pi/6+\pi m},\ m\in N\right\}$.

14. 1) $\frac{a^2-a^{n+2}}{(a-b)(1-a)}-\frac{b^2-b^{n+2}}{(a-b)(1-b)}$; 2) $\frac{(x^{2n}+2+1)(x^{2n}-1)}{x^{2n}(x^2-1)}+2n$. **15.** $x=y=z=2$. **16.** 1) $\left\{\pi\cdot k;\ \pi/12+\pi\cdot k;\ 5\pi/12+\pi\cdot k,\ k\in z\right\}$; 2) $x=\log_2 5$. **17.** Номаълумлар $x_1=8$ ва $q=\frac{1}{2}$ бўлган геометрик прогрессиянинг ъадларидир. **18.** 1) $\frac{2(10^{n+1}-10)-9n}{81}$; 2) $\frac{7(10^{n+1}-10)-9n}{81}$. **19.** $\underbrace{66...67}_{n-1\ \text{òà ðà³ àì}}$. **23.** $a=2$, $b=32$. **38.** 931. **39.** $b_1=4$, $b=8$, $b_3=16$ ки $b_1=4/25$, $b_2=-16/25$, $b_3=64/25$. **40.** 1) $q=2/5$; 2) $q=3/2$; 3) $q=3/2$; 4) $q=3/2$; 5) $q=5$; 6) $q=3$, $d=4$; 7) $q+d=6$; 8) $b_4=3/2$ ки $b_4=24$; 9) $b_6=128$; 10) $b_1+b_4=130$; 11) $a_1+b_6=2060$; 12) $b_4+b_5=\log\frac{3}{8}$; 13) $b_2+b_5=0$; 14) $n=10$; 15) $n=4$; 16) $n=20$; 17) $n=8$ ки $n=11$; 18) $S_{10}=200$; 19) $S_{12}=135$; 20) $b_4=1$; 21) $a_6=105$, $b_5=256$; 22) $b_7=27$; 23) $b_4d+3fq=288$; 24) $a_3+b_3=118$. **43.** $A_{n+1}\ B_{n+1}=2^n(b+a)-a$; **44.** $a_n=1+3\cdot 2^{n-1}$.

3-§. Сонли кетма-кетликлар ва уларнинг хоссалари

1-топшириқ. **1.** 1) 1, 8, 27, 64, 125, 216; 2) 1, 0, −1, 0, 1, 0; 3) 1, 2, 3, 4, 5, 6; 4) 1, 2, 1/3, 4, 1/5, 6; 5) 1, 3/2, 16/9, 125/64, 1296/64, 16807/7776; 6) 1, 3, 6, 10, 15, 21. **2.** 1) 1, 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 2, 1, 1/2; 3) 1, 1, 2,4,8. **3.** 1) $n^2/n!$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$; 3) $\frac{n^2+1}{n}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(2\pi\cdot n/3-\pi/3\right)$; 5) $n^{(-1)n+1}$.

2-топшириқ. **1.** 1) 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7; 2) −1, −1, 1, 1, −1; 3) 0, 0, 0, 0, 0; 4) 1/2, 2/3, 3/4, 5/6; 5) 1, 1/2, 1/6, 1/24, 1/120; 6) 2/3, 8/15, 16/35, 128/315, 256/653. **2.** 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6; 2) 2, $\frac{5}{4}$, $\frac{41}{40}$, $\frac{3281}{3280}$, $\frac{21522261}{21523360}$, $\frac{926510094425921}{926510094425920}$.

3. 1) $2^{2n-1}-1$; 2) $\frac{3+(-1)^n}{n+1}$; 3) $(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 4) $3(-1)^{n+1}$; 5) $(-1)^{n+1}n^{(-1)}n$.

3-топшириқ. **4.** 1) Монотон эмас; 2) Щсувчи; 3) Монотон эмас; 4) Камаювчи.

4-топшириқ. **4.** 1) Монотон эмас; 2) Камаювчи; 3) Монотон эмас.

5-топшириқ. **5.** Масалан: 1) $a_n=3n-n^2$; 2) $a_n=\frac{n^2+2}{n}$; 3) $a_n=n\cos\frac{\pi\cdot n}{2}$.

6-топшириқ. **4.** 1) чегараланган; 2) чегараланган эмас (ыуйидан чегараланган); 3) чегараланган эмас (ыуйидан чегараланган); 4) чегараланган эмас (ыуйидан чегараланган); **5.** Ъар ыандай бщлиши мумкин. Масалан, $a_n=n$, $b_n=-2n$ бщлсин, у ъолда $a_n+b_n=-n$ чегараланган эмас; агар $a_n=n$, $b_n=2-n$ бщлса, у ъолда $a_n+b_n=2$ чегараланган.

7-топшириқ. 1. 1) $n!\left(a+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\right)$; 2) $\frac{n}{n+1}$; 3) $2-2^{2-n}$. **2.** 1) $a_6=3$; 2) $a_3=\frac{1}{6}$ **3.** 1) $a_4=-9$; 2) $a_2=4{,}5$. **5.** 1) $S_n=\frac{n}{2n+1}$; 2) $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

8- топшириқ. **1.** 1) $\alpha a^{n-1}+2\beta\frac{2^{n-1}-\alpha^{n-1}}{2-\alpha}$; 2) $\frac{3\cdot 2^{n-1}-2}{3\cdot 2^{n-1}-1}$; 3) $\frac{1}{2}\left((a+b)\cdot 2^{n-1}+(b-2a)(-1)^n\right)$. **2.** 1) $a_3=5/64$; 2) $a_3=9/8$. **3.** 1) $a_5=\log_2^2 5-3\cdot\log_3^5$; 2) $a_3=1{,}4^3/3$. **5.** 1) $S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$; 2) $S_n=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{37}-\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right)$.

Машқлар

1. 1) $\frac{1}{n}(-1)^{(n-1)(n-2)(n-3)/2}$; 2) $n+(-1)^n$; 3) $\frac{n}{3n-1}(-1)^{(n-1)(n-2)(n-3)/2}$; 4) $n^{(-1)^{n+1}}$; 5) $3^n+(-1)^n$; 6) $\frac{1}{n^2}(-1)^{n(n+1)/2}$. **2.** 1) $a_n=\frac{n}{n+1}$; 2) $a_n=17\cdot 3^{n-1}-10\cdot 2^{n-1}$; 3) $a_n=\frac{3}{2\cdot 4^{n-1}-1}$; 4) $a_n=\frac{2\cdot 5^{n-1}}{8\cdot 3^{n-1}-7\cdot 5^{n-1}}$; 5) $a_n=\frac{3\cdot 2^{n-1}-2}{3\cdot 2^{n-1}-1}$; 6) $a_n=2-2^{2-n}$; 7) $a_n=2^n-2\cdot(-1)^n$; 8) $a_n=\frac{6n-1+\left(-1/2\right)^{n-3}}{9}$; 9) $a_n=\frac{2^{n+1}-2\cdot(-1)^n-3}{3}$. **3.** $a_{37}=1$, $a_{1967}=1/2$. **4.** $a_{90}=-1$, $a_{885}=1$. **5.** 1) $1/1224$; 2) 1296. **7.** 1) Ўсувчи; 2) Ўсувчи; 3) Камаювчи; 4) Монотон эмас; 8) Монотон эмас. 5) Ўсувчи эмас; 6) Ўсувчи; 7) Монотон эмас. **14.** 1) $a_2=7/2$; 2) $a_2=15$; 3) $a_1=5/4$; 4) бундайи йўқ; 5) $a_{10}=\frac{1}{20}$; 6) $a_3=9/8$; 7) $a_7=48/11$; 8) $a_1=\sqrt{2}-1$. . **15.** 1) $a_2=a_3=-5$; 2) $a_{10}=20$; 3) $a_3=-2$; 4) $a_1=2\sqrt{2}$; 5) бундайи йўқ; 6) $a_6=-3\frac{9}{10}$; 7) $a_4=-1\frac{9}{22}$; 8) $a_3=\frac{8}{9}$. **16.** Кўрсатма: қуйидаги кетма-кетликни қаранг: 1) $a_n=n$ ва $b_n=n+2$, $a_n=n$ ва $b_n=2-n$; $a_n=n+\frac{1}{n}$ ва $b_n=-\frac{1}{n}$, $a_n=n$ ва $b_n=-2n-\frac{1}{n}$, $a_n=n+\frac{(-1)^n}{n}$ ва $b_n=-n$; 2) $a_n=2n$ ва $b_n=n$, $a_n=2n$ ва $b_n=3n$, $a_n=n^2+\frac{(-1)^n}{n}$ ва $b_n=n^2$; 3) $a_n=n$ ва $b_n=n$, $a_n=n$ ва $b_n=1/n^2$, $a_n=n-3$ ва $b_n=n-5$, $a_n=\begin{cases}2n, n=2k,\\ 2n-1, n=2k-1\end{cases}$ ва $b_n=\begin{cases}1/(2n-1), n=2k,\\ 1/(2n), n=2k-1;\end{cases}$ 4) $a_n=n$ ва $b_n=\frac{1}{n}$, $a_n=n$ ва $b_n=n$, $a_n=\frac{1}{n}$ ва $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_n=n$ ва $b_n=n^2$, $a_n=\begin{cases}2n, n=2k,\\ 2n-1, n=2k-1\end{cases}$ ва $b_n=\begin{cases}2n-1, n=2k,\\ 2n, n=2k-1.\end{cases}$

17. Кўрсатма. Ушбу кетма-кетликларни қаранг: 1) $a_n=n$

ва $b_n = (-1)^n$, $a_n = n$ ва $b_n = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}$, $a_n = n$ ва $b_n = -n + (-1)^{n+1}$;

2) $a_n = n$ ва $b_n = (-1)^{n+1}/n$, $a_n = n$ ва $b_n = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}$, $a_n = n$ ва

$b_n = n + (-1)^n$, $a_n = n$ ва $b_n = \begin{cases} -3n/2, & n = 2k \\ -3n/2 + 2, & n = 2k-1; \end{cases}$ 3) $a_n = n$ ва

$b_n = 1 + (-1)^n / n$, $a_n = (3 + (-1)^n)/2$ ва $b_n = \begin{cases} 2 + 4(2^{(n-1)}/2 - 1), & n = 2k \\ 1 + 4(2^{(n-2)/2} - 1), & n = 2k-1; \end{cases}$

4) $a_n = n$ ва $b_n = (3 + (-1)^n)/2$, $a_n = n$ ва $b_n = \begin{cases} 1, n = 2k-1 \\ 4/(n-1), n = 2k, \end{cases}$
$a_n = n$ ва $\{b_n\} = \{1, 3/2, 1, 5/4, 1, 8/7, 1, 12/11, 17/16, 1 \ldots\}$ **21.** 1) Йўқ (қуйидан чегараланган); 2) Йўқ; 3) Ҳа; 4) Ҳа; 5) Ҳа; 6) Ҳа; 8) Йўқ; 9) Ҳа; 10) Ҳа; 11) Йўқ; 12) Ҳа; 13) Йўқ; 14) Ҳа; 15) Ҳа; 16) Йўқ. **24.** Масалан, $a_n = n+1/n$. **25.** Масалан, $a_n = n+1/n$ ва $b_n = -n$. 26. Қуйидаги кетма-кетликларни қаранг: $a_n = \frac{1}{n}$ ва $b_n = n$; $a_n = 1/n^2$ ва $b_n = 1/n$. **28.** Масалан, $a_n = n^{(n-1)n}$.

30. 1) $b_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; 2) $b_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$; 3) $b_n = n^2$;

4) $b_n = n^2(n+1)$; 5) $b_n = n^3$; 6) $b_n = n^4$; 7) $b_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$;

8) $b_n = 2^n!$; 9) $b_n = \frac{n}{n+1}$; 10) $b_n = \frac{n}{2n+1}$; 11) $b_n = \frac{-1}{3(3n+2)}$;

12) $b_n = \frac{-1}{7(7n+4)}$; 13) $b_n = \frac{-1}{2(n+1)(n+2)}$; 14) $b_4 = \frac{-1}{8(4n+3)(4n+7)}$;

15) $b_n = \frac{-1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$; 16) $b_n = \frac{-1}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$;

17) $b_n = (n+1)!$ **32.** Кўрсатма. Ушбу $(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = C^1_{k+1} m^k + C^2_{k+1} m^{k-1} + C^3_{k+1} m^{k-2} + \ldots + 1$ айирмани қараб, $m = 0, 1, \ldots, n$ деб олиб, қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$1^{k+1} = 1,$$

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = C^1_{r+1} 1^k + C^2_{k+1} 1^{k-1} + \ldots + 1,$$

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = C^1_{k+1} 2^k + C^2_{k+1} 2^{k-1} + \ldots + 1,$$

. . . .

$$(n+1)^k - n^{k+1} = C^1_{k+1}\; n^k + C^2_{k+1}\; n^{k-1} + \ldots + 1.$$

Бу тенгликларни ъадлаб ыщшиб, ушбуга эга бщламиз:

$$(n+1)^{k+1} = C^1_{k+1}\; S^k_n + C^2_{k+1}\; S_n^{k-1} + \ldots + C^1_{k+1}\; S^1_n + n + 1.$$

Бу рекуррент формула, агар олдинги $S_n^1, \ldots, S_n^{k-1}$ йиғиндилар маълум бўлса, S^k_n йиғиндини ҳисоблаш имконини беради. Унда k=1 десак, $(n+1)^2 = 2S^1_n + n + 1$ тенгликка эга бўламиз, бундан:

$$S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

кетма-кетликда 2 деб олиб, S_n^2 ни топамиз ва ҳ.к.

4-§. Кетма-кетликнинг лимити

1- топшириқ. **1.** Масалан: 1) $a_n = 5{,}1 + 1/n$. $b_n = 5{,}1 + 1/n^2$; 2) $a_n = 0{,}1 + 0{,}1^n$, $b_n = \underbrace{0{,}099\ldots9}_{n\ ma}$. **2.** Масалан: 1) N=9; 2) N=24; 3) N=999. **3.** Масалан: 1) $N = \left[\frac{1}{32}\right] + 1$; 2) $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$; 3) $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$;

4) $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 5$; 5) $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

2- топшириқ. **1.** 1) Масалан, $a_n = \frac{3}{7} + \frac{(-1)^n}{n}$ ва $b_n = \frac{3}{7} + \frac{(-1)^n}{n^2}$;

2) Масалан, $a_n = \pi + \frac{(\pi - 3{,}14)(-1)n}{n}$ ва b_n тенгликларни қаноатлантирувчи кетма-кетлик: b_1=1, b_2=2, $b_{2k+1} = P_{2k+1}$, $b_{2k+2} = P_{2k+2}$, k=1,2, ... , бунда P_{2k+1} радиуси R=1 бўлган айланага ички чизилган мунтазам (2k+1) бурчак периметрининг ярмига тенг, P_{2k+2} эса радиуси R=1 бўлган айланага ташқи чизилган мунтазам (2k+2) бурчакнинг периметри ярмига тенг. **2.** Масалан: 1) N=5; 2) N=100; 3) N=200. **3.** Масалан:

1) $N = [1/\varepsilon] + 1$; 2) $N = [1/\varepsilon] + 1$; 3) $N = [1/\varepsilon] + 1$;

4) $N = [2/\varepsilon] + 1$; 5) $N = [5/\varepsilon] + 1$;

3- топшириқ. **2.** 1) $\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$; 3) $\frac{7}{4\left(\sqrt{3}+1\right)}$; 4) $\frac{1}{2}\left(7+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$. **3.** 1) 2; 2) −2; 3) 0; 4) 1/2 , 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) 1/7. **4.** Ҳа, масалан, $a_n=\frac{1}{n^2-1}$.

4- топшириқ. **2.** 1) 1/2; 2) 5/6; 3) −1/4; 4) $3\frac{1}{2}$. **3.** 1) $\sqrt{2}$; 2) −3/2; 3) 0; 4) 1/3; 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) 2. 4. Йщы, масалан, $a_n=-1/n$, $b_n=1/n$.

5-топшириқ.

2. Шундай $\varepsilon>0$ мавжудки, ҳар қандай N учун шундай $n>N$ топиладики, $\left|\varepsilon_{n_0}-A\right|\geq\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. **4.** Масалан, $a_n=(-1)^{n+1}$. **5.** 1) Йўқ, масалан, $a_n=1/n$, $b_n=n^2$; 2) Йўқ, масалан, $a_n=(-1)^n/n$, $b_n=n$. **6.** 0.

6- топшириқ. **2.** Ҳар қандай A сонни олмайлик, шундай $\varepsilon>0$ мавжудки, бунда ҳар қандай N учун шундай $n_0>N$ сон топиладики, $\left|a_n-A\right|\geq\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. **3.** Масалан, 1) $a_n=(-1)^n/n^2$; 2) $a_n=2\ (-1)^n$. **4.** 1) Йўқ, масалан, $a_n=1/n$, $b_n=1/2$; 2) Йўқ, масалан, $a_n=(-1)^n/n$. $b_n=1/n$. **5.** 0.

7- топшириқ. **2.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) $\frac{1}{2}$. **4.** 1) 1; 2) 1/3; 3) 1/5; 4) 0; 5) 0; 6) 0.

8- топшириқ. **1.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 0. **3.** 1) 1/5; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 1/2; 7) 0; 8) 1.

9- топшириқ. **1.** 1) −6; 2) 28. **2.** 1) 4/9; 2) 37/30; 3)1907/4500. **3.** Масалан: 1) $a_n=n^{3/2}$; 2) $a_n=-n^2-n$; 3) $a_n=n\cos\pi n$.

10- топшириқ. **1.** 1) 8/9; 2) −4/3. **2.** 1) 109/90; 2) −647/900; 3) 23/99. **3.** Масалан: 1) $a_n=\sqrt{n+2}$; 2) $a_n=-\log_2 n$; 3) $a_n=n\sin(\pi/2+\pi n)$. **6.** 1) Ҳа; 2) Йўқ, масалан, $a_n=n^2n^{(-1)^n}$.

12-топшириқ. **2.** 1) 1; 2) $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$; 3) $\sqrt{a}$, 1,732. **4.** 1) $e^{3/2}$; 2) e^{-2}; 3) e; 4) $e^{-2/5}$; 5) 0; 6) 1.

13- топшириқ. **2.** 1) 1/2; 2) 1; 3) 2. **3.** 2,080. 4. 1) e^2; 2) e^{-5}; 3) 1; 4) e^{-12}; 5) 16; 6) e^2.

М а ш қ л а р

5. 1) $1/2$; 2) 3; 3) n; 4) $5/2$; 5) 3; 6) $1/2$; 7) 32; 8) 3. **7.** 1) $2/3$; 2) 0; 3) 0; 4) $1/2$; 5) $-5/9$; 6) $-1/4$; 7) 0; 8) 1; 9) $1/5$; 10) 1; 11) $3/5$; 12) $1/2$; 13) 1; 14) -1; 15) $-1/2$; 16) $\sqrt{3}$; 17) 0; 18) $1/2$; 19) $2/3$; 20) -1; 21) 1; 22) 0; 23) 0; 24) 5; 25) $(2/3)^5$; 26) $-16/25$; 27) $1/3$; 28) 0. **9.** 1) 1; 2) $1/2$; 3) $-2/5$; 4) $16/21$; 5) 0; 6) $1/5$; 7) -1; 8) 0; 9) 0; 10) 1; 11) 0; 12) 1; 13) 3; 14) 1; 15) $\log_2 9/4 \,/\, \log_2 12$; 16) 0. **10.** 1) 0; 2) 9; 3) 1; 4) $1/2$; 5) 2; 6) $1/5$; 7) $3/4$; 8) 0; 9) $1/2$; 10) 1; 11) $2/3$; 12) $3/2$; 13) $1/4$. **11.** Ҳа; 2) Ҳа; 3) Йўқ. **15.** Йўқ, масалан; $a_n=(-1)^n$. **16.** Йўқ, масалан, $a_n=(-1)^n$. **20.** 1) Йўқ; 2) Йўқ. **21.** 1) Йўқ; 2) Ҳа; 3) Йўқ. **22.** Йўқ, масалан $a_n=1/n$; $b_n=n(-1)^n$. **23.** Йўқ, масалан, $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $b_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$.
24. Масалан: 1) $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $b_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$; 2) $a_n=\dfrac{-1+(-1)^n}{2}$, $b_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$; 3) $a_n=\dfrac{1+(-1)n}{2}$, $b_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$; **26.** Йўқ, масалан, $a_n=1+\dfrac{1}{n}$, $a_n=\sqrt{n}$. **27.** 1) 2; 2) 0; 3) 2; 4) 1; 5) $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.
28. 1) 2,236; 2) 1,59; 3) 1,97. **29.** 1) e^2; 2) $e^{-1/3}$; 3) 0; 4) e; 6); e^{-3}; 5) e^{-1}; 7) e^{-1}; 8) 0. **30.** 1) $8/3$; 2) $9/4$; 3) $-5/2$; 4)$-27/8$. **31.** 1) $1\dfrac{31}{180}$; 2) $\dfrac{13}{30}$; 3) $-\dfrac{5}{18}$; 4) $21\dfrac{7}{45}$. **34.** 1) Ҳа, масалан, $a_n=1/n^2$, $b_n=n$; 2) Ҳа, масалан, $a_n=(-1)^n/n$, $b_n=n$; 3) Ҳа, масалан, $a_n=1/n$, $b_n=n^2$; 4) Ҳа, масалан, $a_n=2/n$; $b_n=n$.
35. 1) Йўқ, масалан, $a_n=\dfrac{(-1)^n+1}{2}n$; 2) Йўқ, масалан, $a_n=\dfrac{(-1)^n+1}{2}n^2$. **36.** Масалан, 1) $a_n=n^2$; $b_n=n$; 2) $a_n=n^2$, $b_n=n^3$. **37.** Масалан, 1) $a_n=\dfrac{1}{n}$; $b_n=1/n^2$; 2) $a_n=1/n^2$, $b_n=1/n$.
38. 1) Йўқ; 2) Йўқ; 3) Йўқ.

АДАБИ   Т

1. Ш. А. Алимов ва бошқ. Алгебра, 9- с. учун дарслик. Т., «Ўқитувчи», 2001

2. Ш. А. Алимов ва бошқ. Алгебра, 10- с. учун дарслик Т., «Ўқитувчи», 2001.

3. А. А. Абдуҳамедов, Ҳ. А. Насимов, У. М. Носиров, Ж. Ҳ. Ҳусанов. Алгебра ва математик анализ асослари, I қ. Т., «Ўқитувчи», 2001.

4. Р. Ҳ. Вафоев, Ж. Ҳ. Ҳусанов, К. Ҳ. Файзиев, Ю. Й. Ҳамроев. Алгебра ва анализ асослари. Т., «Ўқитувчи», 2001.

5. Н. Антонов ва бошқ. Элементар математикадан масалалар тўплами. Т., «Ўқитувчи», 1974.

6. М. Сканави таҳр ост. Олий ўқув юртларига кирувчилар учун конкурс масалалари тўплами. Т., «Ўқитувчи», 1990.

7. М. К. Потапов. Алгебра и анализ элементарнёх функций М., «Наука», 1981.

8. В. Гусев, А. Марэкович. Математика. Справ. материалы, М., «Просвещение», 1988.

МУНДАРИЖА

1- §. Арифметик прогрессия 5
2- §. Геометрик прогрессия 28
3- §. Сонли кетма-кетликлар ва уларнинг хоссалари 55
4- §. Кетма-кетликнинг лимити 85
Фойдаланилган адаби тлар ....

ЖУМАНАЗАР ҲУСАНОВИЧ ҲУСАНОВ

ПРОГРЕССИЯ ВА ЛИМИТЛАР

Академик лицейлар ва касб-ҳунар коллежлари учун қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 2002

Таҳририят мудири *М.Пўлатов*
Муҳаррирлар: *Х. Алимов, Ў. Ҳусанов*
Бадиий муҳаррир *М. Калинин*
Тех. муҳаррир *С. Турсунова*
Мусаҳҳиҳа *М. Иброҳимова*
Компьютерда саҳифаловчи *Н. Аҳмедова*

Оргинал-макетдан босишга рухсат этилди 8.07.2002. Бичими 84S108/32. Кегли 10 шпонли. Офсет босма усулида босилди. Шартли б.т. 7,56. Шартли кр-отт. Нашр т. 7,40. 5000 нусхада босилди. Буюртма №

«Ўқитувчи» нашри ти, Тошкент. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09–79–2002.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Тошкент полиграфия комбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30, 2002.

X94

Ҳусанов Ж.Х.

Прогрессия ва лимитлар: (Методик қўлланма). –Т.: «Ўқитувчи», 2002.–144 б.

ББК 74.262.21