

Р. ИСМАТУЛЛАЕВ

# ЧИЗМА ГЕОМЕТРИЯ

I қисм

Олий ўқув юртлари учун

ТОШКЕНТ – 2003

## Чизма геометрия 1-қисм.

Ушбу ўқув қўлланма педагогика олий ўқув юртлари таълим йўналиши 5140700 – «Тасвирий санъат ва муҳандислик графикаси» ўқув режаси ва дастури асосида ёзилиб бакалаврият талабаларига мўлжалланган. Қўлланма чизма геометриянинг нуқта, тўғри чизиқ, текислик ва уларнинг ўзаро вазиятлари ва ортогонал проекцияларини қайта тузиш усулларини ўз ичига олади. Қўлланмада асосий эътибор олинган назарий билимларга асосан масала ечишга қаратилган.

Қўлланмадан чизма геометрия курсини ўқийдиган барча таълим йўналиши талабалари фойдаланишлари мумкин.

Тақризчилар: Профессор Ш.Муродов  
Доцент Т.Рихсибоев

Масъул муҳаррир: доц. Э.Рўзиев

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртлариаро илмий-услубий бирлашмалар фаолиятини мувофиқлаштирувчи кенгаш президиумининг 2003 йил 1 июлдаги 57-сонли мажлис баёни билан ўқув қўлланма сифатида нашрга тавсия этилган.

© НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТДПУ

## Сўзбоши

Ушбу қўлланма педагогика олий ўқув юртлари бадий графика факультети талабаларига мўлжаллаб, «Тасвирий санъат ва муҳандислик графикаси» бакалавриат йўналиши учун чизма геометрия бўйича тасдиқланган дастурга мувофиқ ёзилди.

Мазкур қўлланма чизма геометриянинг нуқта, тўғри чизиқ ва текисликларга оид бўлимларини ўз ичига олган бўлиб, бакалавриат талабаларидан келиб чиққан ҳолда назарий билимлар асосида кўпроқ амалий масалалар ечишга қаратилган.

Чизма геометрия математик фан – проектив геометрия фанининг ўзига хос бир шоҳобчаси бўлиб, узининг амалий моҳияти жиҳатидан муҳандислик фанлари қаторига киритилади. У нарсаларнинг геометрик хусусиятларига асосланган ҳолда тасвирлаш усуллари ёрдамида уларнинг шакллари, ўлчамлари ва ўзаро жойлашишларини, шунингдек, позицион, метрик ва конструктив масалаларни ечиш алгоритмларини ўрганади.

Чизма геометрия тасвирлаш усуллари ёрдамида ўқувчининг фазовий тасаввурини кенгайтиради, тасвирларни яшаш ва олдиндан ясалган тасвирларни ўқий билиш ҳамда муҳандислик масалаларини ечишга ёрдам беради.

Фаннинг моҳиятини асосан икки нарса ташкил қилади:

1. Фазодаги табиий буюм ва геометрик жисмларни бирор сирт ёки текислик устида тасвирлаш усуллари;

2. Жисмларнинг бажарилган тасвирлари бўйича улар орасидаги позицион (ўзаро тегишлилик) ва метрик муносабатларини текшириш;

Чизма геометрия усулларидадан фойдаланиб, маълум қонун ва қоидалари асосида, текисликда жисмларни тасвирлари ҳосил қилинади. Бу тасвирлар орқали буюмларнинг фазовий шаклини чизиш ва ўлчамларни аниқлаш мумкин.

Чизма геометрия курсида қуйидаги масалалар ўрганилади:

1) Фазодаги геометрик фигураларнинг текисликдаги тасвирларини яшаш;

2) Позицион ва метрик масалаларни график ечиш усуллари;

3) Фигураларнинг текис тасвирларига, проекцияларига, асосан уларнинг фазовий кўринишларини тасаввур қилиш, яъни чизмани ўқиш ва уларни яққол тасвирини чизиш.

4) Талабаларнинг бошқа муҳандислик фаолларини ўзлаштиришида ва амалий фаолиятида зарур бўлган мантиқий фикрлаш, ҳамда фазовий тасаввурлаш қобилиятини ўстириш ҳам ўрганилади.

Ушбу қўлланмалани ёзишда ўзларининг беғараз кўрсатган ёрдамлари ва маслаҳатлари учун профессор Ш.Муродов, доцентлар П.Одилов ва Т.Рихсибоевларга муаллиф ўз миннатдорчилигини билдиради.

### ҚўЛЛАНМАДА ФОЙДАЛАНИЛГАН ШАРТЛИ БЕЛГИЛАР

Шакл	Белги	Мисол	Белгининг маъноси мисолда
Нуқта	Лотин алифбосининг бош ҳарфлари	A, B, C, .. .. 1, 2, 3, ...	A нуқтаси, B нуқтаси, C нуқтаси, 1 нуқтаси, 2 нуқтаси, 3 нуқтаси
Нуқталарнинг кетма-кетлиги Нуқталарнинг проекциялари	Лотин алифбосининг бош ҳарфлари	$A^I, A^{II}, A^{III}, \dots$ $A_1, A_2, A_3, \dots$	$A_1$ —A нуқтанинг горизонтал проекцияси $A_2$ —A нуқтанинг фронтал проекцияси $A_3$ —A нуқтанинг профил проекцияси
Чизиқлар	Лотин алифбосининг ёзма ҳарфлари	a, b, c, d, ...	a тўғри чизиқ b тўғри чизиқ c тўғри чизиқ
Бурчаклар	Грек алифбосининг ёзма ҳарфлари	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	$\alpha$ бурчаги, $\beta$ бурчаги, $\gamma$ бурчаги
Текисликлар	Лотин алифбосининг бош ҳарфлари	M, N, K, ...	M текислиги, N текислиги, K текислиги
Проекциялар текисликлар	Лотин алифбосининг бош ҳарфлари	H, V, W	H — горизонтал проекциялар текислиги, V — фронтал проекциялар

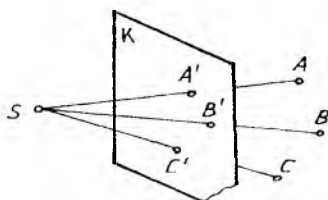
ри	ҳарфлари		текислиги, $W$ – профил проекциялар текислиги
Текислик излари		$P_H, P_V, P_W$	$P_H$ – текисликнинг горизонтал изи $P_V$ – текисликнинг фронтал изи $P_W$ – текисликининг профил изи
$\cap$	Кесишиш	$a \cap b$	$a$ тўғри чизиқнинг $b$ тўғри чизиқ билан кесишуви
$\subset$ ёки $\supset$	Ўзаро тегишлилик	$A \supset a$	$A$ нуқта $a$ тўғри чизиққа тегишли
$\parallel$	Параллеллик	$a \parallel N$	$a$ тўғри чизиқ $N$ текисликка параллел
$\perp$	Перпендикулярлик	$t \perp M$	$t$ тўғри чизиқ $M$ текисликка перпендикуляр
$=$	1) Натижа 2) Тенглик	$a \cap b = A$ $AB = CD$	$A$ нуқта $a$ ва $b$ тўғри чизиқларнинг кесишув натижаси
$\equiv$	Устма-уст тушган	$A \equiv A_1$	$A$ нуқта $u$ нинг горизонтал проекцияси $A_1$ билан устма-уст тушган
$/$	Инкор қилиш	$A \not\subset a$ $a \not\parallel b$	$A$ нуқта $a$ тўғри чизигига тегишли эмас. $a$ ва $b$ тўғри чизиқлар ўзаро параллел эмас

## 1 боб. КИРИШ

### 1.1 § Проекциялаш асослари, Евклид фазосини кенгайтириш

#### 1.1.1. Проекциялар ҳақида дастлабки тушунчалар.

Фазода  $K$  текислиги ва унда ётмайдиган  $S$  нуқта, ҳамда  $A, B, C$  нуқталар берилган бўлсин (1-шакл).  $S$  нуқта билан  $A$  нуқтани тўғри чизиқ орқали бирлаштирамиз.  $SA$  тўғри чизиқ  $K$  текислик билан  $A'$  нуқтада кесишди деб фараз қилайлик.



1 - шакл

Бу жараён проекциялаш дейилиб, лотинча "акс эттириш" ёки "тасвирлаш" деган маънони билдиради.  $S$  - проекциялаш маркази,  $SA$  - эса проекцияловчи нур деб аталади.  $A'$  нуқта фазодаги  $A$  нуқтанинг  $K$  текисликдаги марказий проекцияси ва  $K$  текислик эса, проекциялар текислиги дейилади.

Проекция сўзи лотинча "олға улоқтириш" деган маънони билдирсада, биз уни нарсанинг текисликдаги тасвири деб қабул қиламиз.  $A$  нуқтанинг  $K$  текисликдаги марказий проекциясини ҳосил қилиш жараёни рамзий белгилардан фойдаланиб қуйидагича ифодалаш мумкин;

$$SA \cap K \rightarrow A'$$

яъни,  $SA$  проекцияловчи нур  $K$  проекциялар текислиги билан кесишиб  $A$  нуқтанинг проекцияси  $A'$  нуқтани ҳосил қилади.

$B$  ва  $C$  нуқталарнинг марказий проекциялари ҳам шу

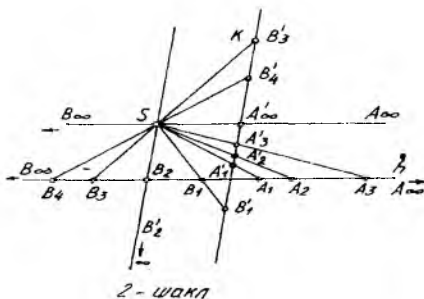
усулни қўллаш орқали ясалган, яъни

$$SB \cap K \rightarrow B'$$

$$SC \cap K \rightarrow C'$$

### 1.1.2. Евклид фазосини хосмас элементлар билан тўлдириш

Текисликда ўзаро кесишувчи  $h$ ,  $k$  чизиқлар ва уларда ётмаган  $S$  нуқта берилган бўлсин (2-шакл).



$S$  нуқтани проекциялаш маркази,  $k$  тўғри чизиқни – проекциялар тўғри чизиги ва  $h$  ни проекцияланувчи тўғри чизиқ деб қабул қилайлик.  $h$  тўғри чизиқда танлаб олинган  $A_1, A_2, A_3$  нуқталарни  $S$  проекциялаш маркази билан бирлаштирамиз.  $SA_1, SA_2, SA_3$  проекцияловчи нурлар проекциялар тўғри чизиги  $k$  билан кесишиб, унда бу нуқталарнинг марказий проекциялари  $A'_1, A'_2, A'_3$  ни ҳосил қилади.

Демак,  $k$  проекциялар тўғри чизигидаги ҳар бир нуқта проекциясига  $h$  тўғри чизиқдаги айнан бир нуқта мос келмоқда ва аксинча. Агар биз  $h$  тўғри чизиги бўйлаб  $A_1, A_2, A_3$  йўналишда  $A$  нуқтани чексиз узоқлаштириб, уни  $A_\infty$  билан белгиласак, унинг проекциясини қуйидагича яшаш мумкин.

$A_\infty$  нуқтани  $h$  тўғри чизиқнинг хосмас нуқтаси деб атаймиз ва унинг проекциясини ҳосил қилиш учун проекциялаш маркази  $S$  дан  $h$  га параллел ўтказамиз ва унинг  $k$  билан кесишган нуқтасини  $A'_\infty$  билан белгилаймиз. Шундай қилиб,  $A_\infty$  нуқта айни вақтда икки тўғри чизиққа, яъни  $h$  га ва  $S$  нуқтадан унга параллел ўтказилган  $SA_\infty$  га

тегишли бўлади.  $h$  тўғри чизиқдаги  $A_\infty$  дан бошқа ҳамма нуқталарни унинг оддий ёки хос нуқталари деб аталади.

Энди  $h$  тўғри чизиқда  $B_1$  нуқтани танаб унинг  $k$  даги марказий проекцияси  $B_1'$ ни ҳосил қиламиз. Кейинги танланган  $B_2$  нуқта орқали  $SB_2$  проекцияловчи нурни ўтказсак, у  $k$  га параллел бўлиб қолади, демак, у  $k$  тўғри чизиқ билан хосмас нуқтада кесишади, яъни  $SB_2 \cap k \rightarrow B_2'_{\infty}$ .

$h$  тўғри чизиқда танланган  $B_3, B_4, \dots$  нуқталарнинг  $k$  даги марказий проекциялари  $A_\infty'$  дан юқорида жойлашади ва нуқталар  $h$  бўйлаб  $B_1$  дан узоқлашган сари уларнинг проекциялари юқоридан настга, яъни  $A_\infty'$  га яқинлаша боради. Шу йўналишда  $B$  нуқтани чексиз узоқлаштириб, уни  $B_\infty$  деб олсак, унинг проекциясини яшаш учун  $S$  дан  $h$  га параллел ўтказишимиз керак бўлади.  $SB_\infty$  тўғри чизиқ  $SA_\infty$  билан устма-уст тушади. Демак,  $B_\infty$  нинг проекцияси  $B_\infty'$  ҳамда  $A_\infty'$  билан устма-уст тушади:  $B_\infty' \equiv A_\infty'$

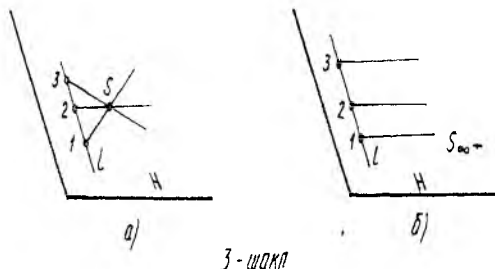
Демак,  $h$  тўғри чизиги ягона хосмас нуқтага эга, чунки у битта нур орқали проекцияланмоқда. Агар улар иккита бўлганда эди, уларни проекциялаш учун икки проекцияловчи нур ишлатилган бўлар эди.

Шундай қилиб, Евклид фазосидаги ҳар бир тўғри чизиққа биттадан хосмас (чексиз узоқлашган) нуқта мос келар экан.

Бундан ўзаро параллел тўғри чизиқлар битта умумий хосмас нуқтага эга деган хулосага келамиз. Эндиликда, текисликда ётган икки тўғри чизиқ ҳамма вақт ўзаро кесишади дея оламиз. Улар хос ёки хосмас нуқтада кесишиши мумкин.

Текисликдаги бир нуқтадан ўтувчи ва текисликка тегишли чизиқлар тўғри чизиқлар дастаси дейилади. Агар тўғри чизиқлар кесишган нуқта хос нуқтада жойлашган бўлса хос марказга эга тўғри чизиқлар дастаси дейилади (3-шакл, а).  $S$  марказга эга бўлган бу тўғри чизиқлар дастасини  $\ell$  тўғри чизиги билан кесайлик. У даста тўғри чизиқларни 1, 2, 3 нуқталарда кесган бўлсин.  $S$  дан чиққан бу тўғри чизиқларни узилмас чўзилувчан резинкалар деб фараз қилиб,

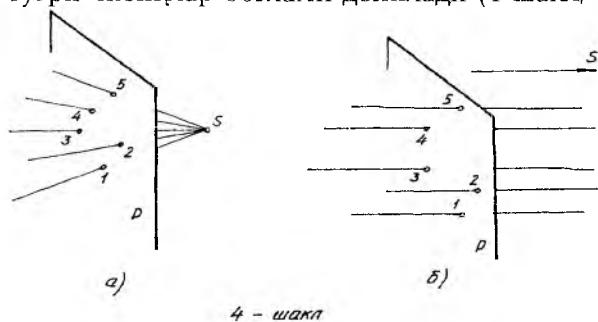




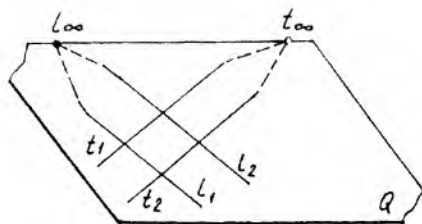
S марказни маълум йўналишда чексиз узоқлаштирайлик. Бу ҳолда  $S_1, S_2, S_3, \dots$  тўғри чизиқлар ўзаро параллел (3-шакл, б) бўлиб қолади. Натижада хосмас марказга эга тўғри чизиқлар дастасига эга бўламиз.

Фазода жойлашган бир нуқтадан ўтган тўғри чизиқлар тўпламини тўғри чизиқлар боғлами дейилади.

Боғлам маркази хос нуқтада жойлашган бўлса хос марказга эга, ёки кесишувчи тўғри чизиқлар боғлами, агар хосмас нуқтада жойлашган бўлса, хосмас марказга эга ёки параллел тўғри чизиқлар боғлами дейилади (4-шакл, а, б).



5-шаклда Q текислиги ва онда жойлашган икки йўналишда  $t_1, t_2$  ва  $\ell_1, \ell_2$  тўғри чизиқлар кўрсатилган.

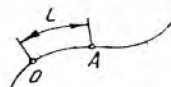


5-шакл

Текисликдаги ҳар бир тўғри чизиқ битта хосмас нуқтага эга эканлиги бизга маълум. Бу хосмас нуқталарнинг тўплами қандай чизиқни ташкил этади? Ҳар бир тўғри чизиқ бу тўплам ҳосил қилган тўғри чизиқни битта хосмас нуқтада кесиб ўтади. Текисликда ётган чексиз кўп тўғри чизиқларга тегишли хосмас нуқталар тўплами хосмас тўғри чизиқни ҳосил қилар экан, маълумки текисликдаги тўғри чизиқ фақат тўғри чизиқ билангина битта нуқтада кесишади. Демак, текислик битта хосмас тўғри чизиққа эга бўлади. Ўзаро параллел текисликлар битта хосмас тўғри чизиқ бўйича кесишиб текисликлар дастасини ҳосил қилади.

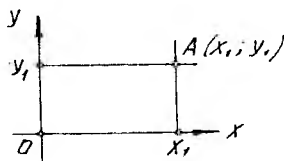
## 1.2 § Геометрик элементларни параметри

Эгри чизиқ ва сиртларни аввалдан қўйилган шартларга асосан лойиҳалашда геометрик элементлар тўпламларини параметрлаш, яъни уларни қувватини аниқлаш аҳамиятга эга. Шунинг учун биз параметрлаш бўйича бошлангич тушунчалар билан танишайлик. Текисликда бирор  $f$  чизиғи берилган бўлсин (6-шакл).



6-шакл

Унда ётган  $A$  нуқтанинг ҳолатини аниқлаш учун унинг бирор нуқтасини  $O$  билан белгилаб, уни бошлангич ҳолат сифатида қабул қиламиз. Энди  $O$  нуқтадан  $A$  нуқтагача бўлган масофани бирор ўлчов бирлиги билан, масалан  $L$  билан ёки маълум босиб ўтган йўлга сарфланган вақт бирлиги



7-шакл

билан аниқлашимиз мумкин. Ҳар қандай ҳолатда ҳам  $\Delta$  нуқтанинг ҳолати бир параметр билан аниқланмоқда. Демак, бошқа ҳар қандай нуқтанинг ҳолати ҳам бир параметр билан аниқланади. Шунинг учун ҳам чизиқда бир параметрли нуқталар тўплами мавжуд дейилади ва қуйидагича белгиланади -  $\infty^1$ .

Агар текисликка ХОУ координат тизимини киритсак ундан ҳар қандай ҳолатдаги нуқтанинг ўрнини икки сон билан аниқлаш мумкин (7-шакл).

Шунинг учун ҳам текисликда икки параметрли нуқталар тўплами мавжуд дейилади -  $\infty^2$ .

Текисликда тўғри чизиқнинг ҳолати унинг ОХ ва ОУ ўқларини кесиб ўтган нуқталар билан аниқланади (8-шакл).

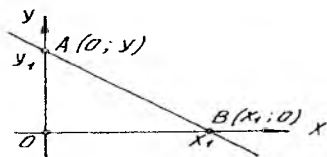
Ҳар бир ўқда бир параметрли ( $\infty^1$ ) нуқталар тўплами мавжуд бўлганлиги учун текисликда икки параметрли ( $\infty^2$ ) тўғри чизиқлар тўплами мавжуддир.

Текисликда уч параметрли  $\infty^3$  айланалар тўплами мавжуд, чунки унинг маркази -  $\infty^2$  ва радиуси  $\infty^1$  га тенг (9-шакл).

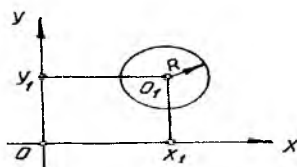
Бунда  $\infty^2$  - ҳолат параметри,  $\infty^1$  - шакл параметри дейилади.

Текисликда беш параметрли ( $\infty^5$ ) эллипслар тўплами мавжуд бўлиб, унинг  $\infty^3$  - ҳолат параметрини,  $\infty^2$  - шакл параметрини ташкил қилади (10 шакл).

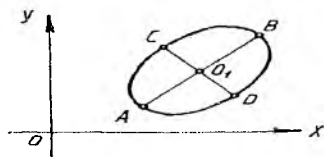
Эллипснинг катта диаметри жойлашган ўқ текисликда  $\infty^2$ , яъни икки параметрли тўғри чизитқлар тўпламини ташкил этади. Унда эллипснинг маркази жойлашади. Марказ бу тўғри чизиқда  $\infty^1$ , бир параметрли нуқталар тўпламига эга. Энди катта диаметри  $\infty^1$  ва кичик диаметри  $\infty^1$  бўлганлиги учун жаъми эллипслар



8 - шакл



9 - шакл



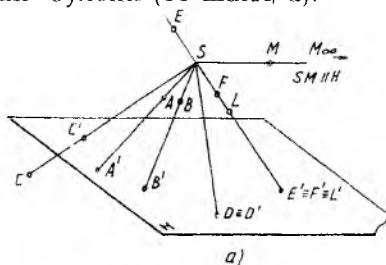
10 - шакл

текислигида  $\omega^S$ , яъни беш параметрли эллипслар тўпламини ташкил қилади.

### 1.3 § Марказий ва параллел проециялаш ва уларнинг хоссалари

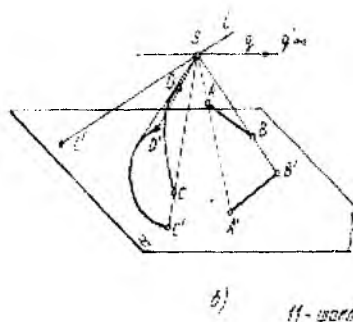
#### 1.3.1. Марказий проециялаш.

Фазода  $S$  проециялаш маркази ва  $H$  проециялар текислиги берилган бўлсин (11-шакл, а).



Фазода  $A, B$  ва  $C$  нуқталарни танлаймиз ва улар орқали  $S$  марказидан проецияловчи нурлар ўтказиб, бу нурларнинг  $H$  текислик билан кесишув нуқталарини белгилаймиз. Белгиланган  $A', B', C'$  кесишув нуқталар мос равишда  $A, B, C$  нуқталарнинг  $H$  текисликдаги марказий проециялари бўлади. Текисликда ётган  $D$  нуқтанинг марказий проецияси  $D'$  нуқтанинг ўзи билан устма-уст тушади. Битта проецияловчи нурда ётган  $L, F, E$  нуқталарнинг  $L', F', E'$  марказий проециялари битта нуқтада бўлади. Демак, нуқтанинг текисликдаги битта проецияси унинг фазодаги ҳолатини аниқлаб бера олмайди, чунки проецияловчи тўғри чизиқда бир параметрли чексиз кўп нуқталар тўплами мавжуддир.  $M$  нуқтани проецияловчи  $SM$  нур  $H$  проециялар текислигига параллел, шунинг учун ҳам  $M$  нуқтанинг марказий проецияси текисликнинг хосмас тўғри чизиғида бўлади.

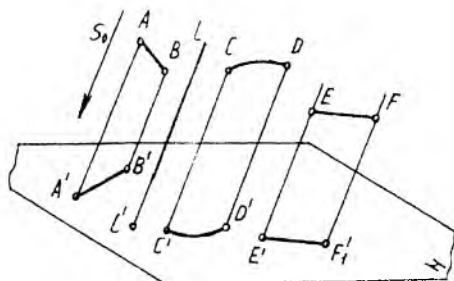
Энди фазода  $AB$  тўғри чизиқ кесмасининг  $H$  текисликдаги проециясини ясайлик (11-шакл, б).



$S$  нуқтадан  $AB$  кесманинг ҳамма нуқталари орқали проекцияловчи нурлар ўтказамиз. Бу нурлар тўплами  $S$  ва  $AB$  орқали ўтувчи  $SAB$  проекцияловчи текисликни ташкил қилади.  $SAB$  текислик проекциялар текислиги  $H$  билан тўғри чизиқ бўйича кесишади. Шунинг учун ҳам  $AB$  кесманинг проекцияси  $A'B'$  умумий ҳолатда тўғри чизиқ кесмаси кўринишда бўлади.  $CD$  эгри чизиқнинг проекцияси  $C'D'$  эгри чизиқ бўлади, чунки  $S$  ва  $CD$  орқали проекцияловчи конус сирти ўтади.  $U$  текислик билан эгри чизиқ бўйича кесишади.  $S$  орқали ўтган ҳар қандай чизиқнинг марказий проекцияси нуқта бўлади. Масалан:  $\ell$  тўғри чизиқнинг проекцияси  $\ell'$  нуқта,  $H$  проекциялар текислигига параллел  $q$  тўғри чизиқнинг проекцияси  $H$  га тегишли хосмас  $q_0$  нуқтада бўлади.

### 1.3.2. Параллел проекциялаш.

Параллел проекциялаш марказий проекциялашнинг хусусий ҳоли бўлиб, унда проекциялаш маркази проекциялаш йўналиши деб аталувчи бирор  $S_0$  йўналишда чексиз узоқлаштирилган деб фараз қилинади (12-шакл). Параллел проекциялашда тўғри чизиқнинг проекцияси умумий ҳолда тўғри чизиқ  $AB \rightarrow A'B'$ , эгри чизиқнинг проекцияси эса эгри чизиқ  $CB \rightarrow C'B'$  бўлади. Проекциялаш йўналишига параллел тўғри чизиқнинг проекцияси нуқта,



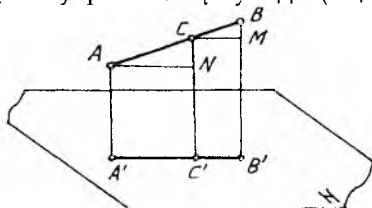
12-шакл

текисликка параллел тўғри чизиқ кесмасининг проекцияси ўзига тенг ва параллел бўлади. параллел проекциялаш нурлари йўналишининг проекциялар текислигига нисбатан ҳосил қилган  $\alpha$  бурчагига қараб қийшиқ бурчакли (агар  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ) ва тўғри бурчакли (агар  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) проекцияларга ажралади. Биз асосан тўғри бурчакли проекциялаш билан шугулланамиз.

### 1.3.3. Параллел проскцияларнинг хоссалари.

Геометрик образларни (фигураларни) параллел проекциялашда унинг қуйидаги асосий хоссаларидан фойдаланилади.

1. Нуқтанинг проекцияси нуқта бўлади.
2. Проекциялаш марказидан ўтмаган ёки проекциялаш йўналишига параллел бўлмаган тўғри чизиқнинг проекцияси ҳам тўғри чизиқ бўлади (11, 12-шакллар).



13-шакл

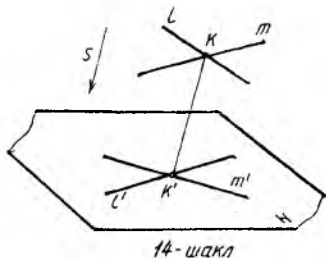
3. Агар нуқта бирор тўғри чизиққа тегишли бўлса, унинг проекцияси ҳам тўғри чизиқ проекциясига тегишли бўлади (13-шакл).

4. Бирор тўғри чизиқ кесмасини берилган нисбатда бўлувчи нуқтанинг проекцияси, кесма проекциясини ҳам шу нисбатда бўлади, яъни  $AC:CB = m:n$  бўлса,  $A'C':C'B' = m:n$  бўлади (13-шакл).

Фараз қилайлик  $C$  нуқта фазода  $AB$  тўғри чизиқ кесмасини  $AC:CB = m:n$  нисбатда бўлсин.  $A'C':C'B' = m:n$  эканлигини исботлашимиз зарур.

Бунинг учун проекцияланувчи кесманинг  $A$  ва  $C$  нуқталаридан  $A'B'$  проекцияга параллел қилиб тўғри чизиқлар ўтказамиз ва уларнинг проекцияловчи  $CC'$  ва  $BB'$  нурулар билан кесишган  $N$  ҳамда  $M$  нуқталарини белгилаймиз. Бундан  $AN = A'C'$  ва  $CM = C'B'$  эканлигини пайқаш қийин эмас. Унда ҳосил булган  $ACN$  ва  $CBM$  учбурчаклар ўхшаш бўлади. Бу учбурчакларнинг ўхшашлигидан  $AC:CB = AN:CM$  бўлади. Агар  $AN$  ни  $A'C'$  билан,  $CM$  ни  $C'B'$  билан алмаштирсак,  $AC:CB = A'C':C'B'$  эканлиги исботланади.

5. Ўзаро кесишувчи икки тўғри чизиқнинг проекциялари ҳам ўзаро кесишувчи бўлиб, уларнинг кесишув нуқталари битта проекцияловчи нуқта ётади (14-шакл).

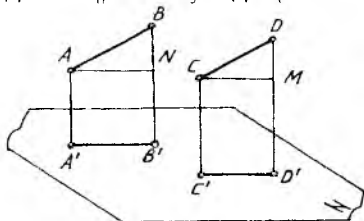


Шаклда  $K$  нуқтада кесишувчи  $l$  ва  $m$  тўғри чизиқлар берилган. Агар  $l \cap m = K$  бўлса,  $l' \cap m' = K'$  бўлади.

Фазодаги  $l$  ва  $m$  ўзаро кесишувчи тўғри чизиқларни  $H$  проекциялар текислигига проекцияловчи текисликлар  $s$  проекциялаш йўналишига параллел бўлаги учун уларнинг ўзаро кесишиш чизиғи ҳам проекциялаш йўналишига параллел бўлади. Проекциялашнинг 3-хоссасига асосан  $K \in l$  ва  $K \in m$  бўлгани учун  $K' \in l'$  ва  $K' \in m'$  бўлади. Демак,  $K'$  нуқта

$\ell'$  ва  $m'$  тўғри чизиқлар учун умумий нуқта бўлиб уларнинг, яъни проекцияларнинг ўзаро кесишиш нуқтасидир.

6. Ўзаро параллел тўғри чизиқларнинг текисликдаги проекциялари ҳам ўзаро параллел бўлади. Агар  $AB \parallel CD$  бўлса, у ҳолда  $A'B' \parallel C'D'$  бўлади (15-шакл).



15 - шакл

Фазодаги  $AB$  ва  $CD$  кесмалалар ўзаро параллел бўлса, уларни проекцияловчи текисликлар ҳам ўзаро параллел бўлади. Бу текисликлар проекциялар текислиги  $\Pi$  билан кесишиб ўзаро параллел тўғри чизиқларни ҳосил қилади ва шу тўғри чизиқларда берилган кесмаларнинг  $A'B'$  ва  $C'D'$  проекциялари ётади. Демак,  $A'B' \parallel C'D'$  ҳосил бўлади.

7. Ўзаро параллел тўғри чизиқ кесмаларининг бир-бирига нисбатан уларнинг проекцияларининг бир-бирига нисбатига тенг.  $AB$  ва  $CD$  тўғри чизиқ кесмалари ва уларнинг  $A'B' \parallel C'D'$  параллел проекциялари берилган (15-шакл).

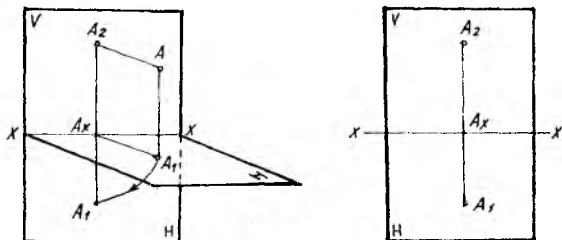
$AB:CD = A'B':C'D'$  эканлигини исботлашимиз керак. Кесмаларнинг  $A$  ва  $C$  учларидан  $A'B'$  ва  $C'D'$  проекцияларга параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз ва уларнинг  $BB'$  ҳамда  $DD'$  нурлар билан кесишган нуқталарини  $N$  ва  $M$  билан белгилаймиз.  $ANB$  ва  $CMD$  учбурчакларнинг ўхшашлигидан  $AB:CD = AN:CM$  эканлиги маълум. Аммо  $AN = A'B'$  ва  $CM = C'D'$  бўлганлигидан,  $AB:CD = A'B':C'D'$  эканлиги исботланади.



#### 1.4 § Нуқтанинг ўзаро перпендикуляр икки ва уч текисликдаги проекциялари

Ҳар бир геометрик жисми умуман нуқталар тўплами сифатида қараш мумкин. Шунинг учун ҳам проекцияларни ўрганишни нуқталар тасвиридан бошлаймиз. Лекин нуқтанинг битта текисликдаги проекцияси унинг фазовий ҳолатини аниқлай олмайди. Шунинг учун нуқтани ўзаро перпендикуляр икки текисликка проекциялашни куриб чиқайлик. Проекциялашнинг бундай тизимини чизма геометрия фанининг асосчиси, машҳур француз математиги ва давлат арбоби Госпар Монж (1746-1818) яратганлиги сабабли унинг номи билан Монж методи деб аталади.

Фазодаги горизонтал  $H$  ва унга перпендикуляр бўлган вертикал  $V$  текислик олайлик (16-шакл, а), вертикал  $V$  текисликни фронтал (бизга юзма-юз, рўпарамизда турганлиги учун) проекциялар текислиги деб атаймиз.



16-шакл

Горизонтал проекциялар текислиги  $H$  билан фронтал проекциялар текислиги  $V$  нинг кесишув чизиги  $XX$ -проекциялар ўқи дейилади. Фазонинг икки проекциялар текисликлари билан чегераланган ва бу текисликларда ётмаган  $A$  нуқтасини танлаймиз. Бу  $A$  нуқтани  $H$  ва  $V$  проекциялар текисликларига ортогонал проекциялаб, уларда  $A$  нуқтанинг мос равишда  $A_1$  ва  $A_2$  проекцияларини ҳосил қиламиз.

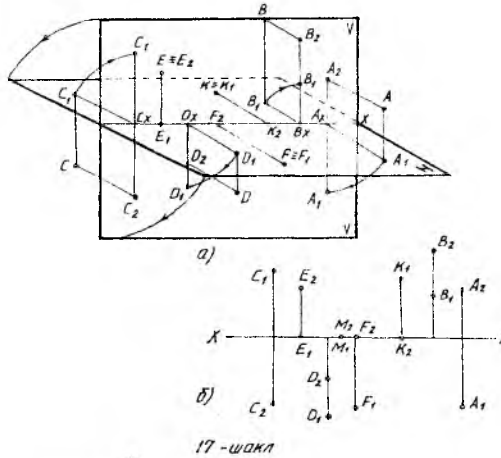
Горизонтал проекциялар текислигидаги  $A_1$  нуқта  $A$  нуқтанинг горизонтал проекцияси ва фронтал проекциялар текислигидаги  $A_2$  нуқта  $A$  нуқтанинг фронтал проекцияси дейилади.  $A$  нуқтани бу икки проекциялар текислигига проекцияловчи нурлар ( $AA_1$  ва  $AA_2$ ) биргаикда проекцияловчи текислик ( $A_1Ax_2A$ ) ни ҳосил қилади. Бу

( $\Lambda_1\Lambda_2$ ) текислик горизонтал проекциялар текислиги  $H$  билан  $\Lambda_1\Lambda_x$  тўғри чизиқ бўйича ва фронтал проекциялар текислиги  $V$  билан эса  $\Lambda_2\Lambda_x$  тўғри чизиқ бўйича кесишади. Бу  $\Lambda_1\Lambda_x$  ва  $\Lambda_2\Lambda_x$  тўғри чизиқлар проекциялар ўқи  $XX$  га перпендикуляр бўлиб, нуқтанинг горизонтал  $\Lambda_1$  ва фронтал  $\Lambda_2$  проекцияларини боғлаб туради ва улар проекцияларни боғловчи чизиқлар деб аталади. А нуқта горизонтал проекциялар текислиги  $H$  дан  $\Lambda\Lambda_1 = \Lambda_x\Lambda_2$  масофада, фронтал проекциялар текислиги  $V$  дан эса  $\Lambda\Lambda_2 = \Lambda_x\Lambda_1$  масофада жойлашган. Демак, фазодаги нуқтанинг ўрнини унинг проекцияларини  $XX$  проекциялар ўқидан узоқликларига қараб ҳам аниқлаш мумкин экан.

Энди горизонтал проекциялар текислиги  $H$  ни  $XX$  проекция ўқи атрофида соат мили ҳаракати йўналиши бўйича (агар чақдан қаралса)  $90^\circ$  нاستта буриб фронтал проекциялар текислиги  $V$  билан жипслаштирамиз. Натижада 16-шакл, б) даги текис шаклга эга бўламиз. Бу текис чизма – эпюр деб аталади. А нуқтанинг эпюрдаги горизонтал проекцияси  $\Lambda_1$  ва фронтал проекцияси  $\Lambda_2$  ларни боғловчи чизиқ  $\Lambda_1\Lambda_x\Lambda_2$  проекциялар ўқи  $XX$  га ҳамма вақт перпендикуляр бўлади, яъни  $\Lambda_1\Lambda_x \perp XX$  ва  $\Lambda_2\Lambda_x \perp XX$ .

Фазода ихтиёрий олинган горизонтал  $H$  текислик уни иккига: юқори ва пастки ярим фазога бўлади. Бу текисликка перпендикуляр қилиб олинган фронтал  $V$  текислик  $H$  билан бирга фазони тўрт қисмга, яъни чоракларга ажратади. Чораклар тартиби 17-шакл, а) да кўрсатилган бўлиб, горизонтал  $H$  текисликнинг юқори қисмида, яъни юқориги ярим фазода I ва II, пастки ярим фазода эса III ва IV чораклар жойлашади.

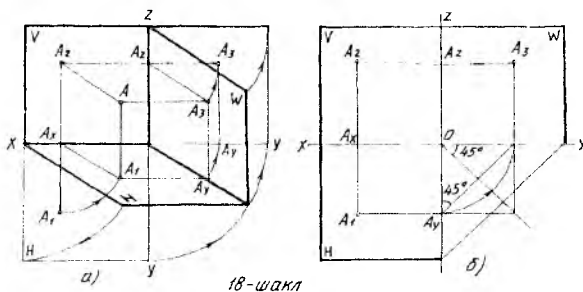
Бу чоракларда А, В, С ва D нуқталар танлаб, уларнинг горизонтал ва фронтал проекцияларини ҳосил қиламиз. Сўнгра горизонтал проекциялар текислиги  $H$  ни  $XX$  проекциялар ўқи атрофида  $90^\circ$  га буриб фронтал проекциялар текислиги  $V$  билан жипслаштириб эпюрда юқоридаги нуқталарнинг проекцияларини ясаймиз (17-шакл, б). 17-шакл а) ва б) да фазода турли чораклардаги, проекциялар текисликларидаги ва проекциялар ўқида жойлашган А, В, С, D, E, F, M ва N нуқталар кўрсатилган.



17-шакл

Техникада баъзи мураккаб деталларни фақат икки проекцияда тасвирлаш етарли бўлмайди. Уларни уч ва ундан кўп проекцияларда тасвирлашга тўғри келади.

Горизонтал  $H$  ва фронтал  $V$  проекциялар текисликларига перпендикуляр ҳолда учинчи текисликни ўтказамиз (18-шакл, а) ва уни профил ( $\epsilon n$ ) проекциялар текислиги деб  $W$  билан белгилаймиз. Бу проекциялар текисликларининг кесишув чизиқлари координата ўқлари дейилади.  $H$  ва  $V$  текисликларнинг кесишув чизигини  $OX$  билан белгилаб, уни абсцисса,  $H$  ва  $W$  текисликларнинг кесишув чизигини  $OY$  билан белгилаб, уни ордината ва  $V$  билан  $W$  текисликларнинг кесишув чизигини  $OZ$  билан белгилаб, уни ашликата ўқи дейилади. Бу координаталар ўқлари ўзаро координата боши дейилувчи  $O$  нуқтада кесишади. Ҳосил қилинган  $H$ ,  $V$  ва  $W$  проекциялар текисликлари системасида  $A$  нуқтанинг проекцияланишини ва эпюрини яшашни кўриб чиқайлик. Берилган  $A$  нуқтадан проекциялар текисликларига тик тўғри чизиқлар тушуриб нуқтанинг проекцияларини топамиз. Бу ҳолда  $A_1$ —фазодаги  $A$  нуқтанинг горизонтал проекцияси,  $A_2$ —нуқтанинг фронтал проекцияси,  $A_3$ —нуқтанинг профил проекцияси дейилади.



18-шакл

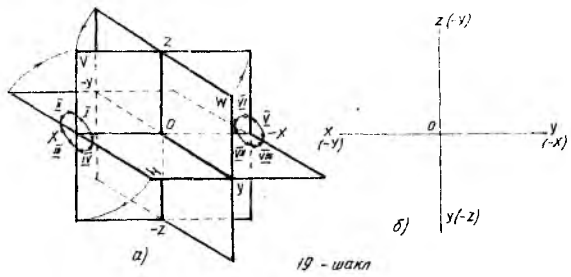
Демак, фазодаги А нуқтанинг ўрнини учта координата ўқлари бўйича аниқлаш мумкин, яъни  $A (X_1, Y_1, Z_1)$ , бу ерда  $X_1 = OA_x$ ;  $Y_1 = OA_y$ ;  $Z_1 = OA_z$  бўлади.

Бу системанинг эпюрини ҳосил қилиш учун Н текисликни соат мили ҳаракати йўналиши бўйича ОХ ўқи атрофида, W текисликни эса ОZ ўқи атрофида соат мили ҳаракати йўналишига тескари (юқоридан қараганда) йўналишда айлангириб V текислик билан жишлаштирамиз. Натижада 18-шакл, б) даги кўринишга эга бўламиз.

Шаклдан кўришиб турибдики, фазодаги А нуқтанинг профил проекцияси  $A_3$  унинг фронтал проекцияси  $A_2$  билан битта горизонтал боғловчи чизиқда ётар экан. Унинг, яъни  $A_3$  нинг, ОZ ўқидан узоқлиги  $OA_y$  масофага тенг бўлар экан.

Умуман олганда, ўзаро учта перпендикуляр текисликлар системаси фазони саккиз бўлакка бўлади, унинг ҳар бир 1/8 бўлаги октанг дейилади. 19-шакл, а) да октантларнинг жойлашиш тартиби келтирилган.

Бу системада координата ўқлари икки (мусбат ва манфий) йўналишларга эга бўлиб қолади. Абсцисса ўқи ОХ нинг кузатувчига нисбатан координата боши О дан чапга йўналиши, ордината ўқи ОУ нинг О нуқтадан кузатувчи томонга йўналиши ва апликаата ўқи ОZ нинг О нуқтадан юқорига йўналиши мусбат ва О нуқтага нисбатан уларга қарама-қарши томонга йўналиш, манфий йўналиш бўлиб ҳисобланади.

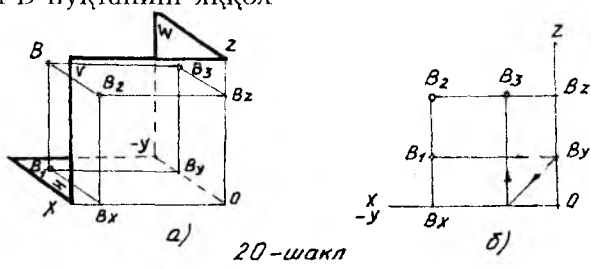


19 - шакл

Эпюрда координата ўқларининг йўналиши ва ишоралари 19-шакл, б) да келтирилган. Октантларда координата ўқларининг йўналиш ишоралари жадвалда келтирилган.

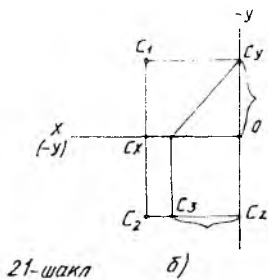
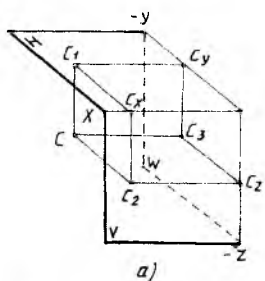
октант \ коор	1	2	3	4	5	6	7	8
X	+	+	+	+	-	-	-	-
Y	+	-	-	+	+	-	-	+
Z	+	+	-	-	+	+	-	-

Иккинчи октантдаги В нуқтанинг яққол тасвири ва эпюри 20-шакл а) ва б) да, учинчи октантдаги С нуқтанинг яққол тасвири ва эпюри 21-шакл а) ва б) да, тўртинчи октантдаги D нуқтанинг яққол

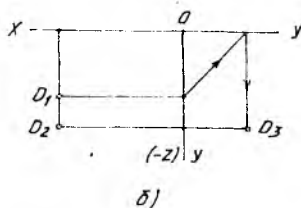
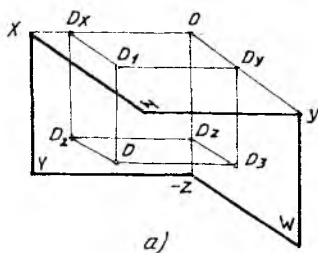


20 - шакл

тасвири ва эпюри 22-шакл а) ва б) да келтирилган.



21-шакл

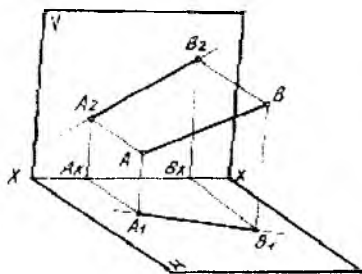


22-шакл

## II боб. Тўғри чизиқнинг ортогонал проекциялари

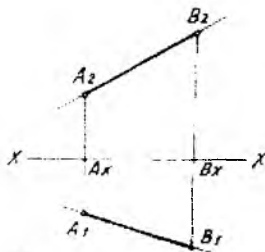
### 2.1 § Умумий вазиятдаги тўғри чизиқнинг проекциялари

Тўғри чизиқ энг оддий геометрик фигура ҳисобланади. Маълумки, икки нуқта орқали фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Фазодаги А ва В нуқталарни узаро туташтириб, уни икки томонга чексиз давом эттирсак, тўғри чизиқ тўғрисида тасаввур ҳосил қиламиз (23-шакл).



23-шакл

Тўғри чизиқнинг икки нуқта билан чегараланган қисми тўғри чизиқ кесмаси дейилади. Фазода берилган ихтиёрий тўғри чизиқ логин алифбосининг ёзма,  $a, b, c, \dots$ , каби ҳарфлар билан белгилаймиз. Берилган тўғри чизиққа тегишли бўлган ихтиёрий икки нуқтанинг проекцияларини ясаш билан берилган тўғри чизиқнинг проекцияси аниқланади (24-шакл).



24 - шакл

Фазодаги ихтиёрий тўғри чизиқ проекциялар текисликларига нисбатан умумий ва хусусий вазиятда жойлашган бўлиши мумкин. Проекциялар текисликларининг ҳеч қайси бирига параллел ҳам, перпендикуляр ҳам бўлмаган тўғри чизиқ умумий ҳолатда берилган тўғри чизиқ дейилади.

Умумий вазиятдаги тўғри чизиқ кесмасининг проекциялари аслига нисбатан кичрайиб проекцияланади.

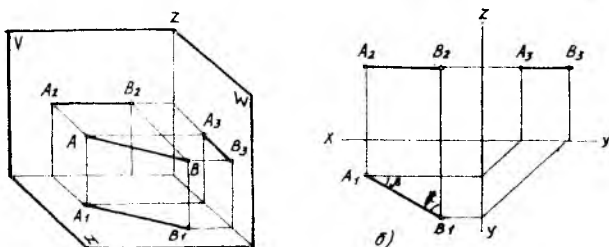
## 2.2 § Хусусий вазиятдаги тўғри чизикларнинг проекциялари

Агар тўғри чизиқ проекциялар текисликларининг ҳеч бўлмаганда биттасига параллел ёки перпендикуляр бўлса, ёки проекциялар текисликларидан бирортасига тегишли бўлса, бундай тўғри чизиқ хусусий вазиятдаги тўғри чизиқ дейилади.

### 2.2.1. Проекциялар текисликларининг биттасига параллел тўғри чизиклар

1. Горизонтал тўғри чизиқ. Горизонтал проекциялар текислиги  $H$  га параллел бўлган тўғри чизиқ горизонтал тўғри чизиқ деб аталади (25-шакл, а). Горизонтал чизиқнинг

барча нуқталари горизонтал проекциялар текислигидан бир хил узоқликда бўлади яъни  $Z_A = Z_B$ . Шунинг учун унинг фронтал  $A_2B_2$  проекцияси  $OX$  ўқига, профил  $A_3B_3$  проекцияси эса,  $OY$  ўқига параллел йўналади, горизонтал проекцияси эса,  $OX$  ўқига нисбатан ихтёрий йўналишда бўлиши мумкин (25-шакл, б).



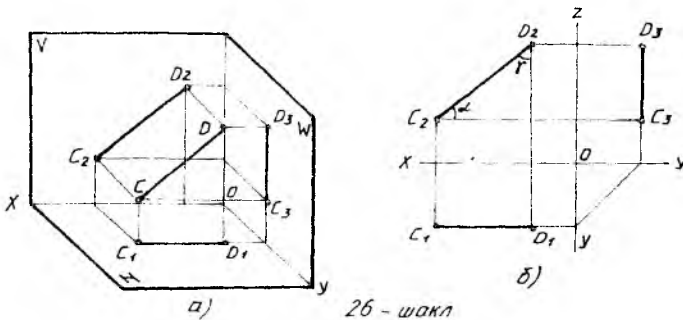
25-шакл

Бундай тўғри чизиқ кесмасининг горизонтал проекцияси унинг ҳақиқий узунлигига тенг бўлади. 25-шакл, а) ва б) да кўрсатилган  $\beta$  ва  $\gamma$  бурчаклар бу тўғри чизиқнинг фронтал проекциялар текислиги  $V$  билан ва профил проекциялар текислиги  $W$  билан ҳосил қилган бурчакларидир.

2. Фронтал тўғри чизиқ. Фронтал проекциялар текислиги  $V$  га параллел бўлган тўғри чизиқ фронтал тўғри чизиқ деб аталади (26-шакл, а). Бу тўғри чизиқнинг барча нуқталари  $V$  текислиқдан бир хил масофада бўлади, яъни  $Y_C = Y_D$ , унинг горизонтал  $C_1D_1$  проекцияси  $OX$  ўқига, профил  $C_3D_3$  проекцияси эса  $OZ$  ўқига параллел бўлади. Бу чизиқнинг фронтал проекцияси  $OX$  ўқига нисбатан ихтёрий йўналишда бўлиб, кесманинг ҳақиқий узунлигига тенг бўлади. Чизмадаги  $\alpha$  бурчак тўғри чизиқ билан  $H$  текислик орасидаги,  $\gamma$  бурчак эса, тўғри чизиқ билан  $W$  текислик орасидаги бурчакдир (26-шакл, б).

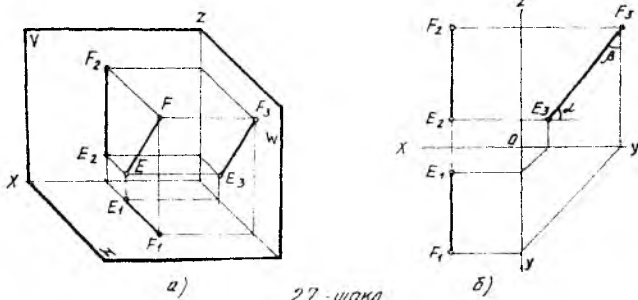
3. Профил тўғри чизиқ. Профил проекциялар текислиги  $W$  га параллел бўлган тўғри чизиқ профил тўғри чизиқ деб аталади (27-шакл, а). Унинг горизонтал  $E_1F_1$  проекцияси ҳам, фронтал  $E_2F_2$  проекцияси ҳам  $OX$  ўқига перпендикуляр бўлиб, профил  $E_3F_3$  проекцияси кесманинг ҳақиқий узунлигига тенг бўлади.





26 - шакл

Чизмадаги  $\alpha$  ва  $\beta$  бурчаклар мос равишда  $H$  ва  $V$  проекциялар текислиги билан ҳосил қилган бурчагидир (27-шакл, б).

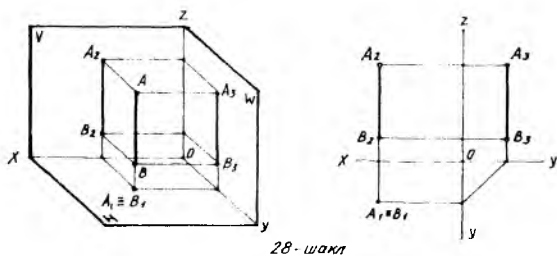


27 - шакл

### 2.2.2. Проекциялар текисликларининг биттасига перпендикуляр тўғри чизиқлар.

Проекциялар текисликларига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар проекцияловчи тўғри чизиқлар деб аталади.

1. Горизонтал проекцияловчи тўғри чизиқ. Горизонтал проекциялар текислиги  $H$  га перпендикуляр тўғри чизиқ проекциялаш йўналишига параллел бўлганлиги сабабли горизонтал проекцияловчи тўғри чизиқ деб аталади. 28-шакл, а) да тасвирланган  $AB$  тўғри чизиқ шундай тўғри чизиқлар тўпламига мансубдир. Бундай тўғри чизиқнинг горизонтал проекцияси  $A_1B_1$  нуқта куринишида бўлиб, фронтал  $A_2B_2$  ва профил  $A_3B_3$  проекциялари мос равишда  $OX$  ва  $OY$  ўқларига перпендикуляр

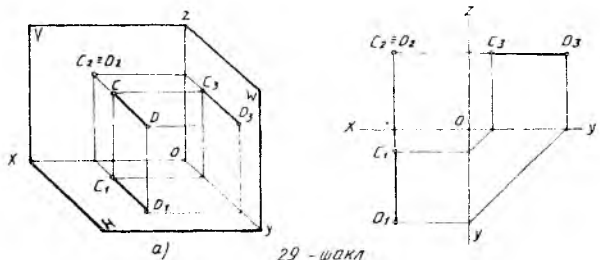


28-шакл

булиб, кесманинг ҳақиқий катталигига тенг бўлади (28-шакл, б).

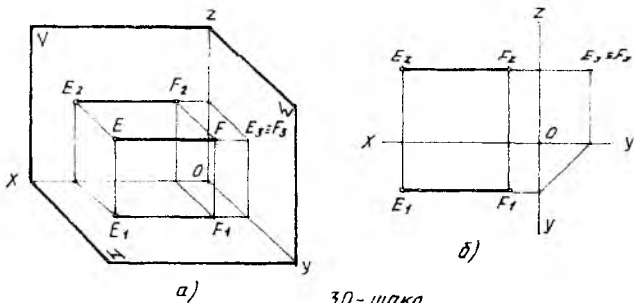
2. Фронтал проекцияловчи тўғри чизиқ. Фронтал проекциялар текислиги  $V$  га перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ фронтал проекцияловчи тўғри чизиқ дейилади. Унинг фронтал  $C_2D_2$  проекцияси нуқта кўринишида бўлиб, горизонтал  $C_1D_1$  ва профил  $C_3D_3$  проекциялари мос равишда  $OX$  ва  $OZ$  ўқларига перпендикуляр бўлади ва кесманинг ҳақиқий катталигига тенг бўлади (29-шакл, а, б).

3. Профил проекцияловчи тўғри чизиқ. Профил проекциялар текислиги  $W$  га перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар профил проекцияловчи тўғри чизиқлар дейилади.



29-шакл

Бундай тўғри чизиқнинг профил проекцияси  $E_3F_3$  нуқта кўринишида бўлиб, горизонтал  $E_1F_1$  ва фронтал  $E_2F_2$  проекциялари  $OX$  ўқига параллел бўлади ва кесманинг ҳақиқий катталигига тенг бўлади (30-шакл, а,б)



30-шакл

### 2.3 § Умумий вазиятдаги тўғри чизиқ кесмасини таҳлил қилиш.

Умумий вазиятда жойлашган тўғри чизиқ кесмасининг ҳақиқий катталигини ва проекциялар текисликлари билан ҳосил қилган бурчакларини аниқлаш масалалари амалда кўп учрайди.

Тўғри чизиқнинг фазовий ҳолатини унга тегишли бўлган икки нуқта орқали тўла аниқланади. 31-шакл, а) да умумий вазиятда берилган тўғри чизиқнинг АВ кесмаси тасвирланган. АВ тўғри чизиқ кесмаси Н, V ва W проекциялар текисликларига ўз ҳақиқий катталигидан кичик бўлиб проекцияланган, яъни  $A_1B_1 < AB$ ,  $A_2B_2 < AB$  ва  $A_3B_3 < AB$  бўлади. Горизонтал проекциялар текислиги Н ни ОХ ўқи атрофида, профил проекциялар текислиги W ни эса ОZ ўқи атрофида айлаштириб фронтал проекциялар текислиги V билан жиҳслаштирамиз (31-шакл, б), натижада АВ кесманинг эпюрига эга бўламиз. Тўғри чизиқ кесмасининг эпюри бўйича унинг ҳақиқий катталигини, шунингдек проекциялар текисликлари билан ҳосил қилган бурчакларини тўғри бурчакли учбурчак яшаш усулида аниқланади.

Кесманинг А учидан унинг горизонтал проекцияси  $A_1B_1$  га параллел тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг  $BB_1$  проекцияловчи чизиқ билан кесишган нуқтасини К билан белгилаймиз, яъни  $AK \parallel A_1B_1$  (31-шакл, а).  $AK \perp BB_1$  бўлганлиги учун  $\triangle АКВ$  тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Бу учбурчакнинг битта АК катети кесманинг горизонтал проекциясига ( $AK = A_1B_1$ ), иккинчи ВК катети эса кесма учлари А ва В ларнинг горизонтал проекциялар текислиги Н дан узоқликларнинг айирмасига тенг бўлади, яъни

$BK = BV_1 - AA_1$ , бу ерда  $AA_1 = KV_1$  бўлгани учун

$BK = BV_1 - KV_1 = \Delta z$  бўлади.

Тўғри бурчакли  $AKB$  учбурчакнинг гипотенузаси  $AB$  ва  $AK$  катети орасидаги  $\alpha$  бурчак, берилган кесманинг  $H$  текислик билан ҳосил қилган бурчаги бўлади. Бу кесманинг ҳақиқий катталигини топиш энюлда (31-шакл, б) қуйидагича бажарилган: кесма  $B$  учининг  $V_1$  горизонтал проекциясидан унга перпендикуляр тўғри чизиқ чизилади; бу тўғри чизиқ кесманинг фронтал проекциясидан  $B_2V_X - A_2A_X = \Delta z$  ни ўлчаб қўйиб  $V_0$  нуқта аниқланади. Ҳосил бўлган  $A_1V_1V_0$  тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг гипотенузаси  $A_1V_0$  кесманинг ҳақиқий катталиги ва гипотенуза  $A_1V_0$  билан катет  $A_1V_1$  орасидаги бурчак, кесмани  $H$  текислик билан ҳосил қилган  $\alpha$  бурчаги бўлади.

Тўғри чизиқ кесмасининг фронтал проекциялар текислиги  $V$  билан ҳосил қилган  $\beta$  бурчагини аниқлаш учун  $ABE$  тўғри бурчакли учбурчакдан фойдаланамиз (31-шакл, а). Бу учбурчакнинг  $BE$  катети  $AB$  кесманинг фронтал  $A_2B_2$  проекциясига тенг ва параллел, иккинчи  $AE$  катети эса унинг  $A$  ва  $B$  учларни  $V$  текисликдан узоқликлари айирмасига тенг, яъни

$AE = AA_2 - BV_2$ , бу ерда  $BV_2 = A_2E$  бўлгани учун

$AE = AA_2 - A_2E = \Delta y$  бўлади.

Тўғри бурчакли  $AEB$  учбурчакнинг  $AB$  гипотенузаси ва  $BE$  катети орасидаги бурчак, кесманинг  $V$  текислик билан ҳосил қилган  $\beta$  бурчаги бўлади. 31-шакл, б) да  $\beta$  бурчакни топиш кўрсатилган. Бунинг учун кесманинг фронтал  $A_2B_2$  проекциясининг  $A_2$  учи орқали унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилиб,  $A_1A_X - V_1V_X = \Delta y$  (горизонтал проекция бўйича) масофада  $A_0$  нуқта белгиланади. Ҳосил булган  $B_2A_2A_0$  тўғри бурчакли учбурчакнинг  $A_0B_2$  гипотенузаси кесманинг ҳақиқий катталиги, чизмада белгиланган  $\beta$  бурчак эса, кесмани  $V$  текислик билан ҳосил қилган бурчаги бўлади.

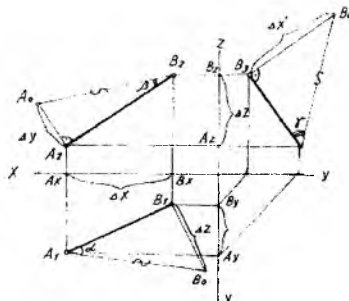
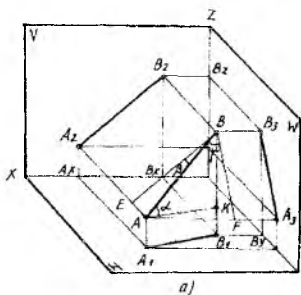
Тўғри чизиқ кесмасининг профил проекциялар текислиги  $W$  билан ҳосил қилган  $\gamma$  бурчагини аниқлаш учун  $ABF$  тўғри бурчакли учбурчакдан фойдаланамиз (31-шакл, а). Шаклдан кўриниб турибдики, бу учбурчакнинг бир катети  $AB$  кесманинг профил  $A_3B_3$  проекциясига, иккинчи катети

эса кесма А ва В учларининг W текисликдан узоқликларнинг айирмасига тенг, яъни

$$AF = AA_3 - BV_3, \text{ бу ерда } BV_3 = A_3F \text{ бўлгани учун}$$

$$AF = AA_3 - FA_3 = \Delta x \text{ бўлади.}$$

Тўғри бурчакли AFB учбурчакнинг AB гипотенузаси ва BF категи орасидаги бурчак, кесманинг W текислик билан ҳосил қилган  $\gamma$  бурчаги бўлади.



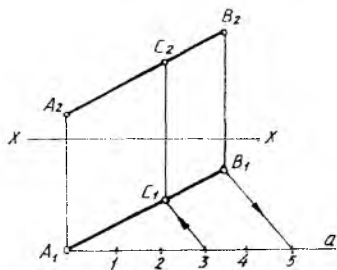
31 - шакл

31-шакл, б) да  $\gamma$  бурчакни эпюрда топиш кўрсатилган. Бунинг учун кесманинг профил  $A_3V_3$  проекциясининг  $V_3$  учи орқали унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилиб,  $OA_x - OB_x = \Delta x$  масофада  $B_0$  нуқта белгиланади. Ҳосил бўлган  $A_3V_3B_0$  тўғри бурчакли учбурчакнинг  $B_0A_3$  гипотенузаси кесманинг ҳақиқий катталиги, чизмада белгиланган  $\gamma$  бурчак эса, кесмани W текислик билан ҳосил қилган бурчаги бўлади.

## 2.4 § Тўғри чизиқ кесмасини берилган нисбатда бўлиш

Параллел проекциялашнинг хоссасига асосан тўғри чизиқ кесмасига тегишли нуқта кесмани қандай нисбатда бўлса, кесманинг проекцияларини ҳам шундай нисбатда бўлади.

Шу хоссадан фойдаланиб ҳар қандай тўғри чизиқ кесмасини ихтиёрий нисбатда пропорционал бўлақларга бўлиш мумкин. Масалан, 32-шаклда берилган  $AB(A_1V_1, A_2V_2)$  тўғри чизиқ кесмасини 3:2 нисбатда бўлувчи  $C(C_1, C_2)$  нуқтанинг проекцияларини топиш кўрсатилган.



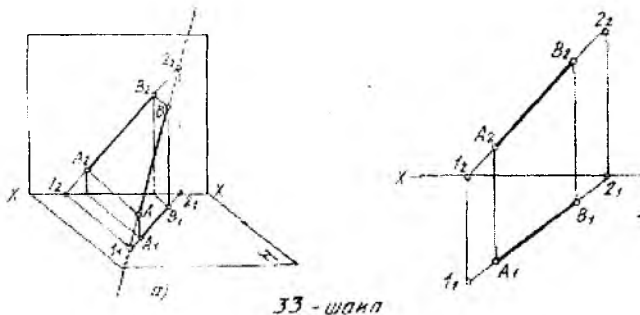
32-шакл

Бунинг учун кесманинг ихтиёрий, масалан, горизонтал проекциясининг  $A_1$  учидан ихтиёрий бурчак остида  $a$  тўғри чизиқ ўтказиб, унга  $A_1$  нуқтадан бошлаб ихтиёрий тенг кесма бирлигида беш булак, яъни  $(2+3)$  улчаб қўямиз. Сўнгра 5-нуқтани кесманинг  $B_1$  учи билан бирлаштириб, 3 нуқтадан  $B_15$  га параллел чизамиз ва  $A_1B_1$  проекция билан кесишган нуқтани  $C_1$  билан белгилаймиз. Вертикал боғловчи чизиқ ёрдамида унинг фронтал  $C_2$  проекцияси топилади. Ёрдамчи  $a$  тўғри чизиқни  $A_1$  ёки  $A_2$  ва  $B_2$  нуқталардан ҳам ўтказиб, кесмани пропорционал бўлакларга бўлиш мумкин.

### 2.5 § Тўғри чизиқ излари

Тўғри чизиқнинг проекциялар текисликлари билан кесишув нуқталари унинг излари деб аталади. Чунинчи, тўғри чизиқнинг горизонтал проекциялар текислиги  $H$  билан кесишув нуқтаси унинг горизонтал изи, фронтал проекциялар текислиги  $V$  билан кесишув нуқтаси унинг фронтал изи ва профил проекциялар текислиги  $W$  билан кесишув нуқтаси унинг профил изи дейилади.

33-шакл, а) да  $AB$  тўғри чизиги  $BA$  йўналишда давом эттирилганида, у  $H$  горизонтал проекциялар текислигини 1 нуқтада кесиб, ўзининг горизонтал изини ҳосил қилади. 1 нуқтанинг горизонтал  $1_1$  проекцияси из билан устма-уст тушган ҳолда, унинг  $1_2$  фронтал проекцияси  $B_2A_2$  фронтал проекциясининг  $XX$  ўқи билан



33 - шакл

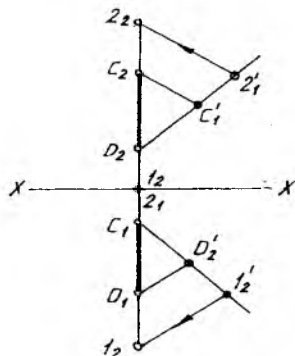
кесишув нуқтасида бўлади. Энди тўғри чизиқни АВ йўналишида давом этгирсак V проекциялар текислигини 2 нуқтада кесади. Бу 2 нуқта унинг фронтал изидир. Тўғри чизиқ фронтал изининг  $2_2$  фронтал проекцияси изнинг ўзи билан устма-уст тушади. Унинг  $2_1$  горизонтал проекцияси АВ тўғри чизиқ горизонтал проекцияси  $A_1B_1$  нинг XX ўқи билан кесишув нуқтасида бўлади. Бу боғлиқликдан фойдаланиб, тўғри чизиқ проекциялари орқали унинг изларини осонгина яшаш мумкин бўлади.

33-шакл, б) да шу АВ тўғри чизиқнинг  $A_1B_1$  горизонтал ва  $A_2B_2$  фронтал проекцияли берилган. АВ тўғри чизиқнинг горизонтал изини яшаш учун, унинг  $A_2B_2$  фронтал проекцияни XX ўқи билан кесишгунча давом эттирамиз. Горизонтал изнинг  $1_2$  фронтал проекциясини белгилаймиз.  $1_2$  нуқтадан XX проекциялар ўқига перпендикуляр боғловчи тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг  $B_1A_1$  горизонтал проекция билан кесишув  $1_1$  нуқтасини белгилаймиз.  $1_1$  горизонтал изнинг горизонтал проекцияси бўлиб, изнинг ўзи ҳам шу нуқтада бўлади. АВ тўғри чизиқнинг фронтал изини яшаш учун, унинг горизонтал проекциясининг XX ўқи билан кесиштириб, фронтал изнинг  $2_1$  горизонтал проекциясини ҳосил қиламиз.  $2_1$  нуқтадан ўтказилган боғловчи чизиқ билан  $A_2B_2$  фронтал проекциясини ўзаро кесиштириб тўғри чизиқни фронтал изининг  $2_2$  фронтал проекциясини ясаймиз. Фронтал изнинг ўзи ҳам  $2_2$  нуқта билан устма-уст тушади.

34-шаклда берилган CD профил тўғри чизиқнинг горизонтал ва фронтал изларини топишни кўриб чиқамиз. CD тўғри чизиқнинг горизонтал изини топиш учун  $C_2D_2$

фронтал проекциясини XX ўқи билан  $1_2$  нуқтада кесишгунча давом эттирамир. Тўғри чизиқнинг горизонтал ва фронтал проекциялари битта боғловчи чизиқда ётганлиги сабабли, горизонтал изнинг горизонтал проекциясини яшаш учун қўшимча геометрик яшашлардан фойдаланишга тўғри келади.

Бунинг учун кесмани берилган нисбатда бўлишда ишлатилган геометрик яшашлардан фойдаланамиз.  $C_1D_1$



34-шакл

горизонтал проекциянинг  $C_1$  нуқтасидан бошлаб,  $C_2D_2$ ,  $1_2$  кесмани ўлчаб қўямиз, уларни  $D_2^11_2^1$  деб белгилаймиз. Сўнгра  $D_2^1$  нуқтани  $D_1$  билан тўғри чизиқ ёрдамида бирлаштирамиз ва  $1_2^1$  нуқтадан  $D_2^1D_1$  тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу ўтказилган тўғри чизиқ  $C_1D_1$  тўғри чизиқни  $1_1$  нуқтада кесиб, CD тўғри чизиқнинг горизонтал изи ва шу билан биргаликда унинг горизонтал проекциясини аниқлайди. CD тўғри чизиқнинг фронтал изи ҳам шу усулдан фойдаланиб топилади.

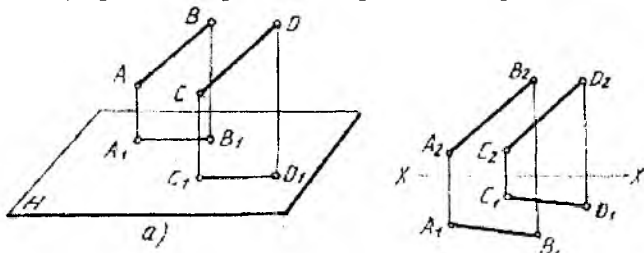


## II боб. ФАЗОДАГИ ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ЎЗАРО ВАЗИЯТИ

Фазода икки тўғри чизиқ ўзаро параллел, кесишувчи ва чалмашувчи (айқаш) вазиятларда бўлиши мумкин.

### 3.1 § Параллел тўғри чизиқлар

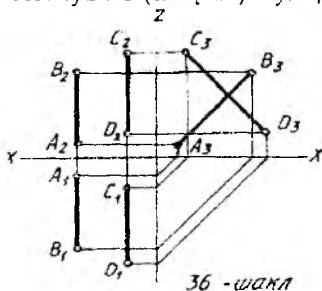
Параллел проекцияларнинг хоссасига асосан параллел тўғри чизиқларнинг бир номи проекциялари



35-шакл

ҳам ўзаро параллел бўлади, яъни агар  $AB \parallel CD$  бўлса, у ҳолда  $A_1B_1 \parallel C_1D_1$  ва  $A_2B_2 \parallel C_2D_2$  бўлади (35-шакл, а,б).

Агар фазодаги икки тўғри чизиқ профил проекциялар текислиги  $W$  га параллел бўлса, у ҳолда уларнинг горизонтал ва фронтал проекциялари ўзаро параллел бўлиб профил проекциялари параллел бўлмаслиги ҳам мумкин. Бундай тўғри чизиқлар чалмашувчи (айқаш) бўлади (36-шакл).

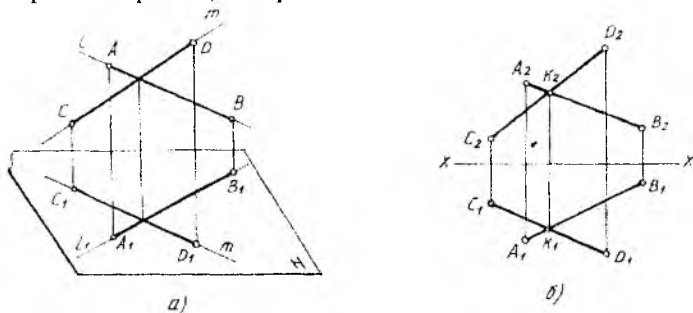


36-шакл

### 3.2 § Кесишувчи тўғри чизиқлар

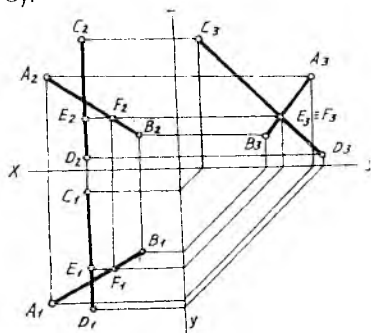
Агар фазодаги икки тўғри чизиқ умумий бир нуқта (хос нуқта) га эга бўлса, бундай тўғри чизиқлар ўзаро кесишувчи

тўғри чизиқлар дейилади. Кесишувчи тўғри чизиқларнинг бир номли проекциялари ҳам кесишувчи бўлиб, кесишув нуқталарининг проекциялари битта



37-шакл

боғловчи тўғри чизиққа тегишли бўлади, яъни агар  $AB \cap CD = K$  бўлса, у ҳолда  $A_1B_1 \cap C_1D_1 = K_1$  ва  $A_2B_2 \cap C_2D_2 = K_2$  бўлади (37-шакл, а, б).

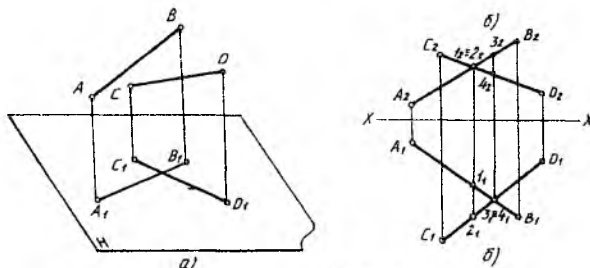


38-шакл

Агар тўғри чизиқларнинг бирортаси профил проекциялар текислигига параллел бўлса, у ҳолда уларнинг горизонтал ва фронтал проекцияларининг ўзаро кесишувчи бўлиши етарли эмас. Масалан 38-шаклда берилган  $AB(A_1B_1, A_2B_2)$  ва  $CD(C_1D_1, C_2D_2)$  кесмалардан бири  $CD$  профил проекциялар текислиги  $W$  га параллел. Шаклдан кўрииб турибдики бу тўғри чизиқлар чалмашувчидир.

### 3.3 § Чалмашувчи (айқаш) тўғри чизиқлар

Фазодаги тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлмаса ёки ўзаро кесишмаса, бундай тўғри чизиқлар чалмашувчи (айқаш) тўғри чизиқлар дейилади (39-шакл, а). Чалмашувчи икки тўғри чизиқнинг бир номли проекциялари ўзаро кесишиши мумкин, лекин горизонтал проекцияларнинг ўзаро кесишиш нуқтаси, фронтал проекцияларнинг ўзаро кесишиш нуқтаси билан битта боғловчи чизиқда ётмайди (39-шакл, б).



39 - шакл

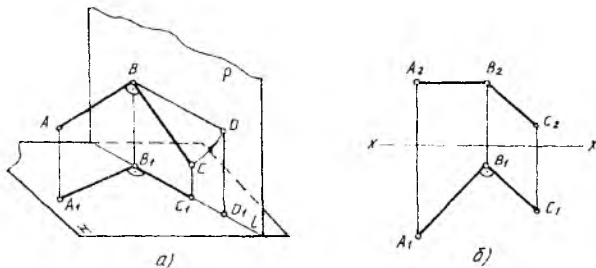
39-шакл, б) да  $AB$  ва  $CD$  айқаш тўғри чизиқларнинг  $A_2B_2$  ва  $C_2D_2$  фронтал проекциялари  $1_2 = 2_2$  нуқтада кесишган. Агар  $1 \in AB$ ,  $2 \in CD$  десак, устидан кўриниш, яъни горизонтал проекцияси  $A_1B_1$  тўғри чизиқда  $1_1$  ва  $C_1D_1$  тўғри чизиқда  $2_1$  нуқталарни алоҳида ажралган ҳолда кўрамиз.  $1_1$ ,  $2_1$  нуқталарнинг горизонтал проекцияларидан  $AB$  тўғри чизиққа тегишли  $1$  нуқтанинг кузатувчига  $CD$  тўғри чизиқдаги  $2$  нуқтадан кўра узоқроқ жойлашганини пайқаймиз. Демак,  $CD$  тўғри чизиқдаги  $2$  нуқта  $AB$  тўғри чизиқни тўсиб турган экан (39-шакл, б). Худди шундай мулоҳаза  $AB$  тўғри чизиққа тегишли  $3$  нуқтанинг  $CD$  тўғри чизиқига оид  $4$  нуқтадан баландроқ жойлашган ва шунинг учун ҳам горизонтал проекцияларда, яъни устидан кўринишда  $AB$  тўғри чизиқни  $CD$  тўғри чизиқ тўсиб туришини англаб оламиз. Бундай нуқталар конкурент ёки рақобатлашувчи нуқталар деб аталади.

### 3.4 § Тўғри бурчакнинг проекцияси

Параллел проекцияларнинг хоссасидан маълумки, агар бирорта текис шакл проекциялар текислигига параллел

бўлса, у ҳолда унинг шу текисликдаги проекцияси ўз ҳақиқий катталигида проекцияланади. Лекин тўғри бурчакнинг параллел проекциялашда ажойиб хусусияти борки, бу унинг (тўғри бурчакнинг) бир томони проекциялар текислигига параллел бўлса ҳам, шу текисликка ҳам тўғри бурчак бўлиб проекцияланади (40-шакл, а), яъни  $AB \perp BC = 90^\circ$  бўлиб  $AB \parallel H$  бўлса, у ҳолда  $A_1B_1 \perp B_1C = 90^\circ$  бўлади (40-шакл, б).

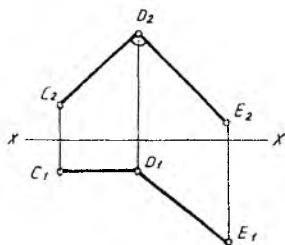
Фазода берилган икки чалмашувчи тўғри чизиқларнинг бири проекциялар текислигига параллел бўлиб иккинчиси биринчиси билан  $90^\circ$  ли бурчак ҳосил қилганда ҳам юқорида қайд қилинган хусусият ўринлидир. Бу хусусиятни исботлаш учун қуйидагича йўл тутамиз (40-шакл, а).



40-шакл

BC тўғри чизиқ орқали  $H$  га тик бўлган  $P$  проекцияловчи текислик ўтказамиз. Бунда  $AB$  тўғри чизиқ кесмаси  $P$  га перпендикуляр бўлади.  $B$  нуқтани марказ қилиб  $C$  нуқтани  $P$  текисликда  $D$  нуқта ҳолатигача айлантираемиз.  $BD$  кесма  $P$  текисликка тегишли бўлганлиги сабабли унинг  $H$  текисликдаги  $D_1$  проекцияси  $H$  ва  $P$  текисликларнинг кесишган чизиғи  $\ell$  да бўлади. 41-шаклда тўғри бурчакни фронтал проекциялар текислигига проекцияланиши кўрсатилган.

Тўғри бурчакнинг бу проекцияланиш хусусияти чизма геометрияда метрик ва позицион масалаларни ечишда кенг қўлланилади.

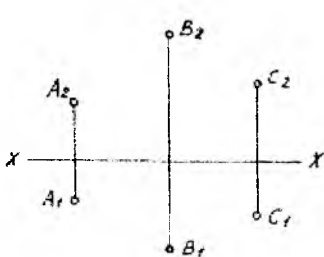


41-шакл

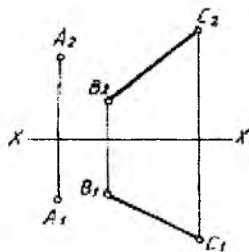
#### IV боб. ТЕКИСЛИКНИНГ ФАЗОДА БЕРИЛИШИ

Текислик икки параметрли нуқталар тўплами бўлиб, у фазода чексиз чегарасиздир. Унинг ҳамма нуқталарини тасвирлаш амалда мумкин эмас. Шунинг учун амалда фазодаги ҳолатини аниқлай оладиган текисликка оид элементлардан ёки текисликнинг бирор қисми олиниб улардан фойдаланилади.

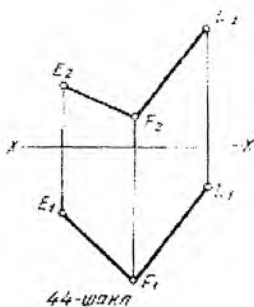
Текисликнинг фазовий ҳолатини бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта, тўғри чизиқ ва унда ётмаган битта нуқта, ўзаро параллел ёки кесишувчи икки тўғри чизиқ тўла аниқлайди. Ана шу элементлар орқали текисликда ҳоҳлаган бирор нуқтани аниқлаш мумкин. Чизмада эса текисликнинг ҳолати бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтанинг проекциялари (42-шакл), бир тўғри чизиқ унда ётмаган нуқтанинг проекцияси (43-шакл), ўзаро кесишувчи (44-шакл) ва параллел тўғри чизиқларнинг проекциялари билан берилади (45-шакл).



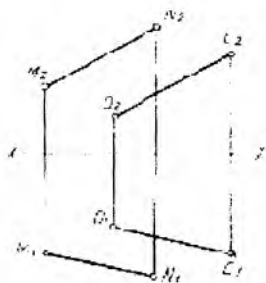
42-шакл



43-шакл

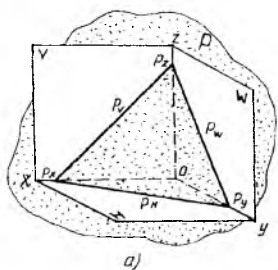


44-шакл

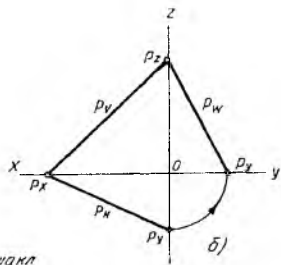


45-шакл

Агар текислик ҳар тарафга давом эттирилса проекциялар текисликлари билан кесишади. Бу кесишув чизиқлари, унинг излари деб аталади. Чунончи  $H$  билан кесишув чизиғи унинг горизонтал изи,  $V$  билан кесишув чизиғи унинг фронтал изи ва  $W$  билан кесишув чизиғи унинг профил изи дейилади. 46-шакл (а, б) ларда  $P$  текислигининг горизонтал изи  $P_H$ , фронтал изи  $P_V$  ва профил изи  $P_W$  кўрсатилган. Демак, текислик ўзининг излари билан ҳам берилади.



а)

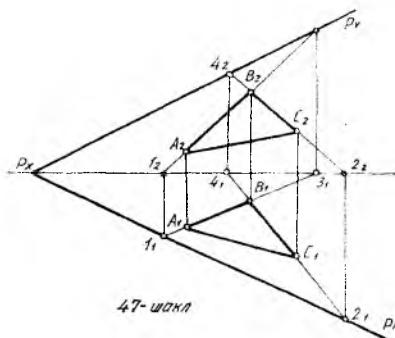


б)

46-шакл

#### 4.1 § Текислигининг изларини ясаш

Ҳар қандай кўринишда берилган текислигининг изларини аниқлаш мумкин. бунинг учун текисликда ётган икки тўғри чизиқнинг горизонтал ва фронтал изларини аниқлаш kifоядир. Чунки икки текислик ўзаро битги тўғри чизиқ бўйича кесишиб унинг ҳолатини икки нуқта аниқлай олади. 47-шаклда  $ABC$  учбурчак текислигининг изларини ясаш кўрсатилган.



Бунинг учун АВ ва ВС томонларининг горизонтал излари 1, 2 топилган. 1 ва 2 нуқталарнинг горизонтал проєкциялари  $H_1$  ва  $H_2$  ни бирлаштириб текисликнинг горизонтал изи РН аниқланади. Горизонтал из ХХ ўқи билан РХ нуқтада кесишади. Энди бирор тўғри чизиқнинг фронтал изи топилса кифоя-дир. Чунки текисликнинг фронтал РV изи РХ нуқта орқали ўтади. Лекин чизмада АВ ва ВС тўғри чизиқларнинг фронтал излари 3 ва 4 топилган. Текислик фазода проєкциялар текисликлари Н, V ва W га нисбатан асосан икки хил: умумий ва хусусий вазиятларда жойлашиши мумкин. Проєкциялар текисликларнинг ҳеч биттасига перпендикуляр ёки параллел жойлашмаган текислик умумий вазиятда берилган текислик дейилади. Бунга юқорида кўрсатилган текисликлар мисол бўла олади.

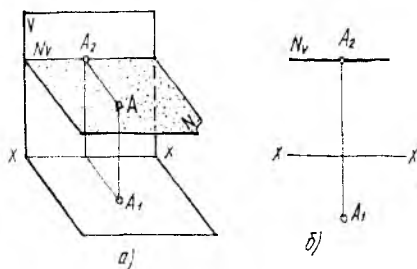
## 4.2 § Текисликнинг хусусий ҳолатлари

Агар текислик проєкциялар текисликларидан бирортасига параллел ёки перпендикуляр ҳолда жойлашган бўлса, у ҳолда у хусусий вазиятда берилган текислик деб аталади.

### 4.2.1 Проєкциялар текисликлардан биттасига параллел бўлган текисликлар

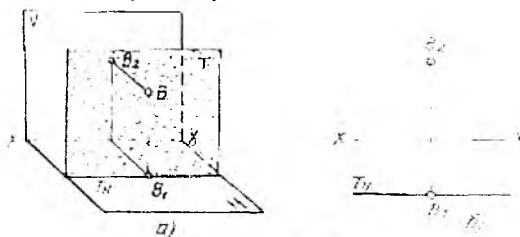
1. Горизонтал текислик. Горизонтал проєкциялар текислиги  $H$  га параллел текислик унинг номи билан горизонтал текислик деб аталади. 48-шакл (а, б) ларда горизонтал текислик N нинг яққол тасвири ва энори кўрсатилган. Горизонтал текисликнинг H ва V текисликлар системасида фақат битта фронтал изи  $N_V$  бўлиб, у ХХ ўқиға параллел

бўлади. Унда ётган ҳар қандай шаклнинг фронтал проекцияси текисликнинг фронтал изи билан устма-уст тушади, чунки текислик  $V$  га перпендикулярдир, горизонтал проекцияси эса ўзига тенг бўлиб проекцияланади. 48-шаклда  $A$  нуқтанинг проекциялари кўрсатилган.



48-шакл

2. Фронтал текислик. Фронтал проекциялар текислиги  $V$  га параллел текислик унинг номи билан фронтал текислик деб аталади (49-шакл, а,б). Фронтал текислик  $T$  нинг горизонтал изи  $T_H$  бўлиб, у

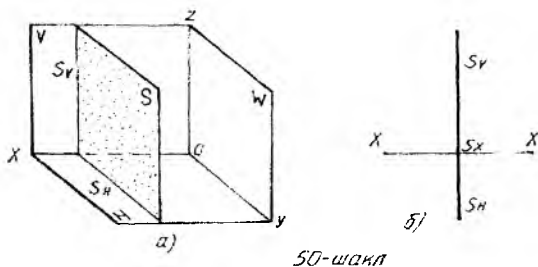


49-шакл

$XX$  ўқига параллел жойлашади. Фронтал текисликда ётган ҳар қандай текис шаклнинг горизонтал проекцияси унинг горизонтал изи билан устма-уст тушади, фронтал проекцияси эса ўзига тенг бўлиб проекцияланади.

3. Профил текислик. Профил проекциялар текислиги  $W$  га параллел текислик профил текислик дейилади (50-шакл). Профил текисликнинг горизонтал ва фронтал излари устма-уст тушиб,  $XX$  ўқига перпендикуляр жойлашади, профил проекцияси эса ўзига тенг бўлиб проекцияланади.



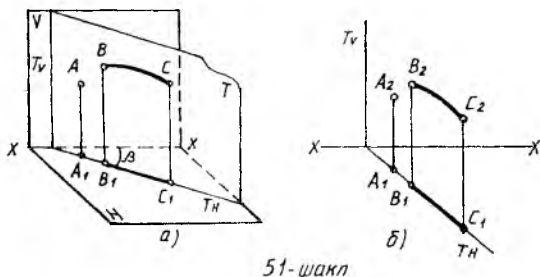


50-шакл

### 4.2.2 § Проекциялар текисликларидан биттасига перпендикуляр бўлган текисликлар

Проекциялар текислигига перпендикуляр бўлган текисликлар проекцияловчи текисликлар дейилади.

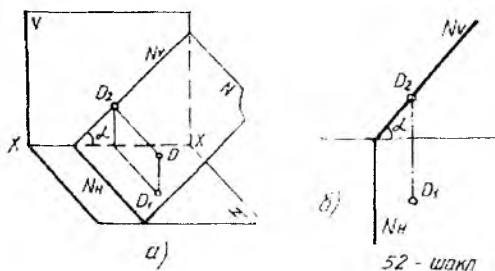
1. Горизонтал проекцияловчи текислик. Горизонтал проекциялар текислиги  $H$  га перпендикуляр бўлган текислик горизонтал проекцияловчи текислик дейилади. "Проекцияловчи" сўзи унинг  $H$  га проекцияловчи нуруларга параллелигидан келиб чиққандир. Горизонтал проекцияловчи текисликнинг фронтал изи  $XX$  ўқига перпендикуляр бўлиб горизонтал изи эса ихтиёрий вазиятда жойлашиши мумкин. Горизонтал проекцияловчи текисликда ётган ҳар қандай текис шаклнинг горизонтал проекцияси унинг горизонтал изи билан устма-уст тушади (51-шакл, а, б). Текисликнинг



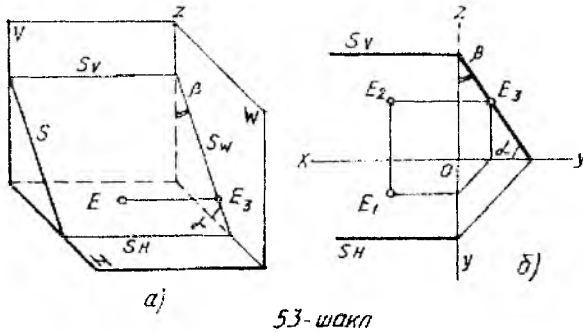
51-шакл

горизонтал  $T_H$  изининг  $XX$  ўқи билан ҳосил қилган  $\beta$  бурчаги  $T(T_H, T_V)$  текисликнинг фронтал проекциялар текислиги  $V$  билан ҳосил қилган бурчагининг ҳақиқий катталигига тенг.

2. Фронтал проекцияловчи текислик. Фронтал проекциялар текислиги  $V$  га перпендикуляр бўлган текислик фронтал проекцияловчи текислик дейилади. Фронтал проекцияловчи текисликнинг горизонтал  $N_H$  изи  $XX$  ўқига перпендикуляр бўлади (52-шакл, а,б). Унинг фронтал  $N_V$  изи эса ихтиёрий йўналишда бўлади. Текислик фронтал  $N_V$  изининг  $XX$  ўқи билан ҳосил қилган  $\alpha$  бурчаги  $N(N_H, N_V)$  текисликнинг горизонтал проекциялар текислиги  $H$  билан ҳосил қилган бурчаги бўлади. Фронтал проекцияловчи текисликда ётувчи ҳар қандай текис шаклнинг фронтал проекцияси текисликнинг  $N_V$  изи билан устма-уст тушади. 52-шакл, а), б) да текисликдаги  $D$  нуқтанинг  $D_2$  проекцияси  $N_V$  га тегишли.



Профил проекцияловчи текислик. Профил проекциялар текислиги  $W$  га перпендикуляр бўлган текислик профил проекцияловчи текислик дейилади. Бундай текисликнинг горизонтал  $SH$  ва фронтал  $SV$  излари  $XX$  ўқига параллел,  $SH \parallel XX$ ,  $SV \parallel XX$  бўлиб, унинг профил изи ихтиёрий йўналишда бўлиши мумкин (53-шакл, а, б). Текислик профил  $SW$  изининг  $OY$  ўқи билан ҳосил қилган  $\alpha$  бурчаги  $S$  текисликнинг  $H$  текислик билан,  $S_W$  нинг  $OZ$  ўқи билан ҳосил қилган  $\beta$  бурчаги эса, текисликнинг  $V$  билан ҳосил қилган бурчагига тенг. Бу текисликда ётувчи ҳар қандай текис шаклнинг профил проекцияси  $S_W$  билан қўшилиб қолади. 53-шакл а), б) да  $E$  нуқтанинг  $E_3$  проекцияси  $S_W$  га тегишли.

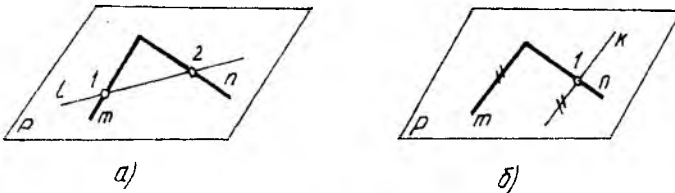


53-шакл

### 4.3 § Текисликда тўғри чизиқ танлаш

Элементар геометриядан маълумки, агар тўғри чизиқ бирор текисликка тегишли бўлган икки тўғри чизиқни кесиб ўтса ёки тўғри чизиқлардан бирини кесиб иккинчисига параллел бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ ҳам шу текисликка тегишли бўлади (54-шакл, а, б). Ихтиёрий  $P$  текислик ўзаро

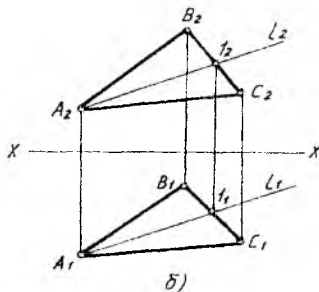
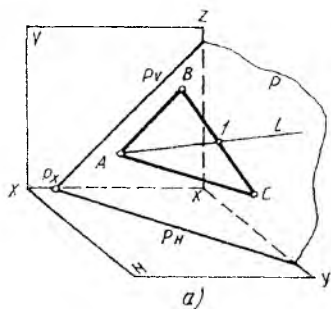
кесишувчи  $m$  ва  $n$  тўғри чизиқлар билан берилган (54шакл, а), яъни  $m \cap n = P$ . Фараз қилайлик ихтиёрий  $\ell$  тўғри чизиқ  $m$  ва  $n$  тўғри чизиқларни мос равишда 1 ва 2 нуқталарда кесиб ўтсин, яъни  $\ell \cap m = 1$ ,  $\ell \cap n = 2$ . Бу 1 ва 2 нуқталар  $P$  текисликка тегишли бўлгани учун улардан ўтувчи  $\ell$  тўғри чизиқ ҳам  $P$  текисликка тегишли бўлади. 54-шакл (б)да  $P$  текисликдаги  $n$  тўғри чизиқни 1 нуқтада кесиб  $m$



54-шакл

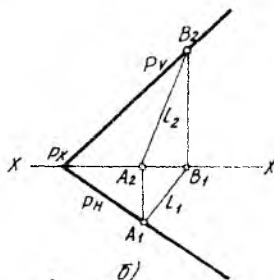
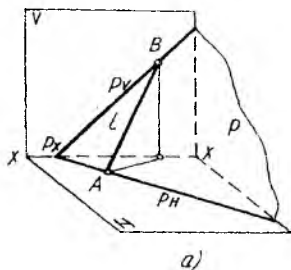
тўғри чизиққа параллел бўлган  $k$  тўғри чизиқ тасвирланган, яъни  $m \cap n = P$ ,  $k \cap n = 1$ ,  $k \parallel m$  ва  $1 \in P$  бўлгани учун  $k \in P$  бўлади.

55-шакл, а), б) да  $ABC$  учбурчак текислигининг яққол тасвири ва проекцияси берилган.  $ABC$  учбурчакнинг  $\Delta(A_1, A_2)$  учи орқали  $\ell(\ell_1, \ell_2)$



55-шакл

тўғри чизигини ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ  $BC(B_1C_1, B_2C_2)$  томонни  $1(1_1, 1_2)$  нуқтада кесиб ўтади. Демак,  $\ell$  тўғри чизиқ  $ABC$  учбурчак текислигига тегишлидир. 56-шакл, а), б) да  $P$  текислик ўзининг горизонтал  $P_H$  ва фронтал  $P_V$  изи орқали берилган. Бу текисликда тўғри чизиқ танлаш учун текисликнинг горизонтал изи  $P_H$  да  $A(A_1, A_2)$  ва фронтал изи  $P_V$  да  $B(B_1, B_2)$  нуқта танлаймиз ва уларнинг бир номи проекцияларини туташтирамиз. Натижада  $P$  текисликда ётувчи  $\ell(\ell_1, \ell_2)$  тўғри чизигига эга бўламиз.



56-шакл

#### 4.4 § Текисликнинг махсус чизиклари

Текислик устида икки параметрли ( $\omega^2$ ) тўғри чизиқлар тўплами мавжуд бўлиб, бу тўғри чизиқларнинг шундай ҳолатда жойлашганлари борки, улар ёрдамисиз метрик ва

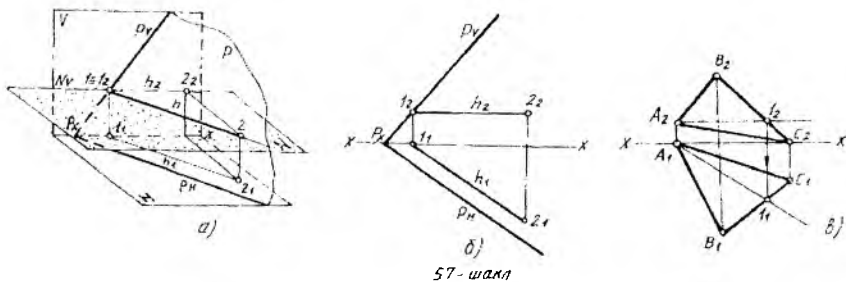
позицион масалаларни ечиб бўлмайди. Бу тўғри чизиқлар, яъни ихтиёрий текисликка тегишли бўлиб бирор проекциялар текислигига параллел бўлган тўғри чизиқ шу текисликнинг махсус чизиги дейилади.

1. Текисликнинг горизонтал чизиқлари. Текисликка тегишли бўлиб, горизонтал проекциялар текислиги  $H$  га параллел бўлган тўғри чизиқ, текисликнинг горизонтал чизиги, ёки қисқача горизонтали дейилади.

57-шакл, а), б) ларда умумий вазиятдаги  $P(P_{11}, P_V)$  текисликнинг горизонтали  $h(h_1, h_2)$  кўрсатилган. Текислик горизонталининг фронтал проекцияси ҳамма вақт  $XX$  ўқиға параллел ( $h_2 \parallel XX$ ), унинг горизонтал  $h_1$  проекцияси эса текисликнинг горизонтал изи  $P_H$  га ( $h_1 \parallel P_{11}$ ) параллел бўлади. Чунки, агар текислик устидаги ихтиёрий, масалан 57-шакл а)да 1 нуқтадан горизонтал проекциялар текислиги  $H$  га параллел қилиб  $N$  текислик ўтказсак, унинг фронтал изи  $XX$  ўқиға параллел бўлади. Бу текисликда ётувчи ҳар қандай шаклнинг фронтал проекцияси  $N_V$  из билан қўшилиб қолади, яъни  $h_2 \supset N_V$ . Ўзаро параллел  $H$  ва  $N_1$  текисликларни учинчи  $P$  текислик кесгани учун уларнинг ўзаро кесишиш чизиқлари  $P_V$  ва  $h$  лар ҳам параллел бўлади. Бундан  $h_1 \parallel P_H$  эканлиги келиб чиқади (57-шакл, б).

Демак, текислик устида бир параметрли ( $\omega^1$ ) горизонталлар тўплами мавжуддир. 57-шакл, в) да умумий вазиятдаги  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак текислигининг горизонталини ўтказиш келтирилган. Бунда учбурчакнинг ихтиёрий учи (масалан  $A(A_1; A_2)$ ) нинг фронтал проекцияси  $A_2$  дан  $XX$  ўқиға параллел, яъни горизонтал тўғри чизиқ ўтказиб,  $CB$  томоннинг фронтал проекцияси  $B_2C_2$  да  $1_2$  нуқта аниқланади ва боғловчи чизиқ орқали 1 нуқтанинг горизонтал проекцияси  $1_1$  аниқланиб,  $A_1$  билан туташтирилади. Натижада  $A1(A_11_1; A_21_2)$  текисликнинг горизонталига эга бўламиз.

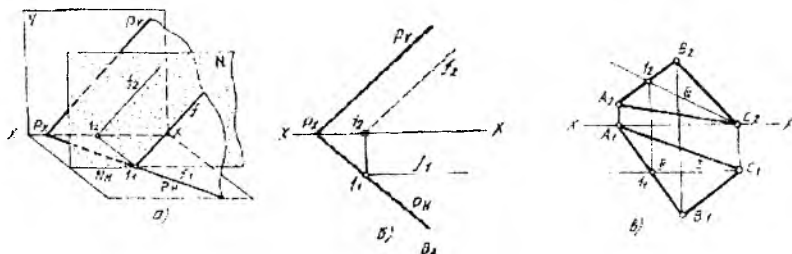
2. Текисликнинг фронтал чизиқлари. Текисликка тегишли бўлиб, фронтал проекциялар текислиги  $V$  га параллел бўлган тўғри чизиқ текисликнинг фронтал чизиги ёки қисқачи фронтали дейилади.



57-шакл

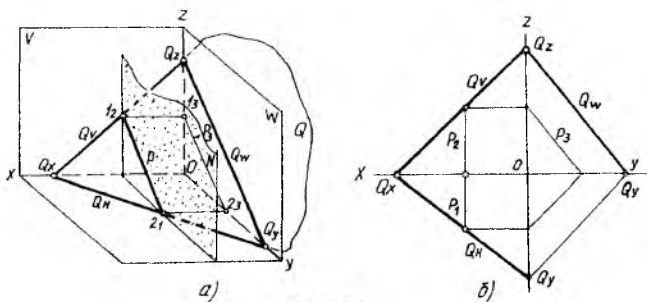
58-шакл, а), б)да умумий вазиятдаги  $P(P_{II};P_V)$  текисликнинг фронтали  $l(f_1;f_2)$  кўрсатилган. Текислик фронталининг горизонтал  $f_1$  проекцияси доимо  $XX$  ўқиға параллел ( $f_1 \parallel XX$ ) бўлиб, унинг фронтал проекцияси  $f_2$  эса, текисликнинг фронтал  $P_V$  изига параллел бўлади. 58-шакл, в) да умумий вазиятдаги  $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$  учбурчак текислигининг фронталини ўтказиш кўрсатилган. Демак, текислик устида бир параметрли ( $\omega^1$ ) фронталлар тўплами мавжуд бўлади.

3. Текисликнинг профил чизиқлари. Текисликка тегишли бўлиб, профил проекциялар текислиги  $W$  га параллел бўлган тўғри чизиқ, текисликнинг профил чизиғи ёки қисқача профили дейилади.



58-шакл

59-шакл, а), б)да умумий вазиятдаги  $Q(Q_{II};Q_V;Q_W)$  текисликнинг профили  $p(p_1;p_2;p_3)$  кўрсатилган. Текислик профилининг горизонтал проекцияси  $p_1$  ва фронтал проекцияси  $p_2$  битта  $OX$  ўқиға перпендикуляр бўлган тўғри чизиқда ётади.



59-шакл

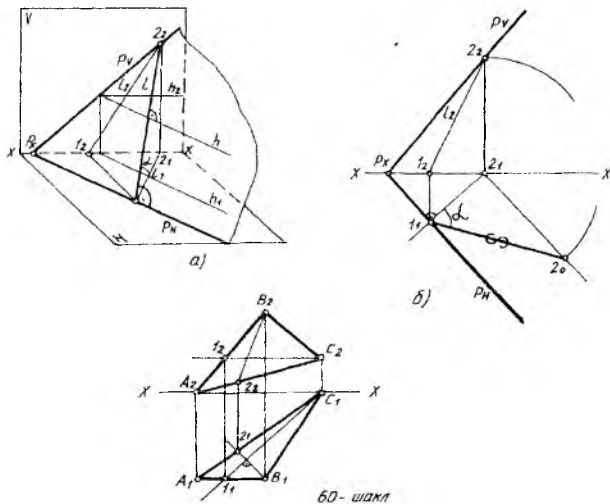
Текислик профилнинг профил проекцияси  $p_3$  эса, текисликнинг профил изи  $P_w$  га параллел бўлади. Текисликда бир параметрли ( $\infty^1$ ) профил чизиқлар тўнлами мавжуддир.

#### 4.5 § Текисликнинг энг катта оғма чизиқлари

Ихтиёрий  $P$  текисликка тегишли бўлиб, унинг махсус чизиқларига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ шу  $P$  текисликнинг энг катта оғма чизиги дейилади.

1. Умумий вазиятдаги  $P$  текисликка тегишли бўлиб, унинг горизонти  $h$  га перпендикуляр бўлган  $\ell$  тўғри чизиқ  $P$  текисликнинг горизонтал проекциялар текислиги  $H$  га нисбатан энг катта оғма чизиги бўлади. 60-шакл, а), б) да  $P(P_H; P_V)$  текисликнинг  $H$  текислик билан ҳосил қилган  $\alpha$  бурчакни топиш келтирилган.  $P$  текисликнинг ихтиёрий масалан, 2 нуқгасидан (шаклда 2 нуқта  $P_V$  да танланган) текисликнинг горизонти  $h$  га перпендикуляр  $\ell$  тўғри чизиқ ўтказилади. Бу тўғри чизиқ билан унинг горизонтал  $\ell_1$  проекцияси орасидаги  $\alpha$  бурчак  $P$  билан  $H$  орасидаги бурчак бўлади. 60-шакл б) да шу масаланинг эпюрда ечилиши кўрсатилган. Текисликнинг  $P_H$  изи горизонталнинг горизонтал проекцияси  $h_1$  га параллел бўлгани учун,  $z_1$  нуқтадан  $P_H$  га перпендикуляр ўтказиб  $1_1$  нуқта аниқланади. 12 кесма шу текисликнинг  $H$  га нисбатан энг катта оғма чизиги бўлади. Бу кесманинг ҳақиқий катталиги тўғри бурчакли учбурчак яшаш йўли билан топилиб,  $\alpha$  бурчак аниқланади. 60-шакл, в) да  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак

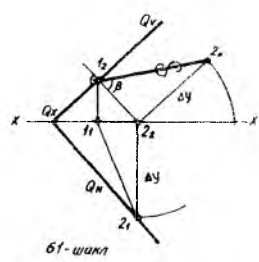
текислигининг  $H$  га нисбатан энг катта оғма чизиғи  $B_2$  нинг проекциялари  $B_12_1$  ва  $B_22_2$ ни топиш курсатилган.



2. Умумий вазиятдаги  $Q$  текисликка тегишли бўлиб, унинг фронтали  $l$  га перпендикуляр бўлган  $m$  тўғри чизиқ  $Q$  текислигининг  $V$  текисликка нисбатан энг катта оғма чизиғи бўлади. 61-шаклдаги эюрда  $Q(Q_{11}; Q_V)$  текислигининг  $V$  текислик билан ҳосил қилган  $\beta$  бурчагини яшаш учун  $Q$  текислигининг фронтал изи  $Q_V$  да ихтиёрий

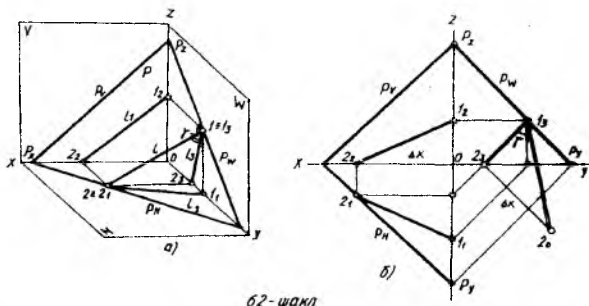
$1_2 \perp Q_V$  ва унга перпендикуляр қилиб текислигининг  $V$  текисликка нисбатан энг катта оғма чизиқнинг фронтал  $1_22_2 \perp Q_V$  проекцияси олинади ва унинг горизонтал проекцияси  $1_12_1$  топилади. Бу  $1_2(1_12_1; 1_22_2)$  чизиқнинг  $V$  билан ҳосил қилган  $\beta$  бурчағи  $Q$  билан  $V$  текисликлар орасидаги икки ёқли бурчакка тенг бўлади.

3. Умумий вазиятдаги  $P$  текисликка тегишли бўлиб, унинг профил чизиғига (профил изига) перпендикуляр бўлган  $e$  тўғри чизиқ  $P$  текислигининг  $W$  текисликка нисбатан энг катта оғма чизиғи бўлади.





62-шакл, а), б) да шундай тўғри чизиқнинг яққол тасвири ва эъюрда  $P$  текисликнинг  $W$  текисликка nisbatan o'gish бурчаги  $\gamma$  нинг ҳақиқий катталигини аниқлаш келтирилган.



62-шакл

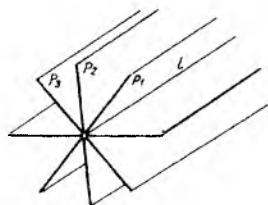
## V боб. ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИКНИНГ ЎЗАРО ВАЗИЯТИ

Фазодаги ихтиёрий  $\ell$  тўғри чизиқ умумий вазиятдаги  $P$  текислик билан ўзаро қуйидаги вазиятларда бўлиши мумкин:

1.  $\ell$  тўғри чизиқ  $P$  текисликка тегишли;
2.  $\ell$  тўғри чизиқ  $P$  текисликка параллел;
3.  $\ell$  тўғри чизиқ  $P$  текислик билан кесишади.

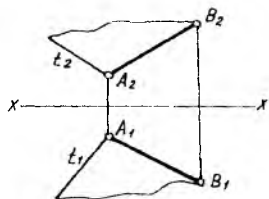
### 5.1 § Тўғри чизиқ орқали текислик ўтказиш

Позицион масалаларни ечишда кўп ҳолларда тўғри чизиқ орқали ўтказилган текисликлардан фойдаланилади. Тўғри чизиқ орқали бир параметрли ( $\infty^1$ ) текисликлар тўпламини ўтказиш мумкин (63-шакл). Умумий вазиятда берилган тўғри чизиқ орқали ўтказилган текисликлари тўпламида проекциялар текисликларига параллел текисликлар мавжуд бўлмайди. Лекин улар орасида проекциялар

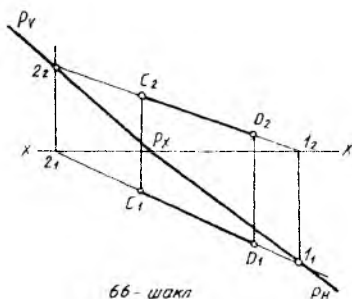


63-шакл

текисликларига перпендикуляр (яъни проекцияловчи) бўлган текисликлар мавжуд бўлади. 64-шаклда  $AB(A_1B_1;A_2B_2)$  тўғри чизиқ орқали горизонтал проекцияловчи  $N(N_{11};N_V)$ , фронтал проекцияловчи  $T(T_{11};T_V)$  ва профил проекцияловчи  $S(S_{11};S_V)$  текисликларни ўтказиш кўрсатилган. Проекцияловчи текисликларни хусусиятига кўра тўғри чизиқнинг битта проекцияси текисликнинг у перпендикуляр бўлган проекциялар текислигидаги изи билан устма-уст тушади. Тўғри чизиқ орқали профил проекцияловчи текислик  $S(S_{11};S_V)$  ни ўтказиш учун бу тўғри чизиқнинг горизонтал изи  $1(1_1;1_2)$  ва фронтал изи  $2(2_1;2_2)$  топилиб бу нуқталардан  $XX$  ўқига параллел ҳолда ва мос равишда  $S_H$  ва  $S_V$  текисликнинг излари ўтказилади. 65-шаклда берилган  $AB(A_1B_1;A_2B_2)$  тўғри чизиқ кесмаси орқали



65-шакл

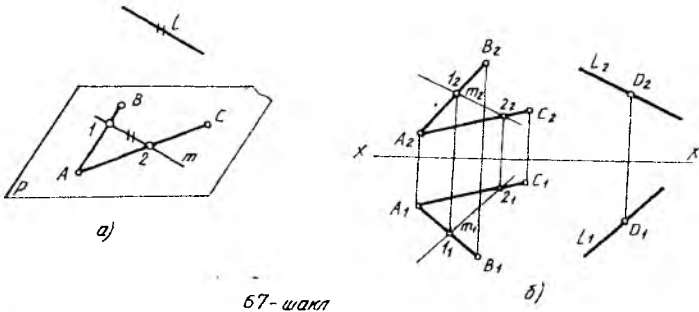


66-шакл

умумий вазиятдаги текислик ўтказилган. Бунинг учун кесманинг  $A(A_1;A_2)$  учи орқали ихтиёрый йўналишда  $1(t_1;t_2)$  тўғри чизиқ ўтказилган. Демак, текислик ўзаро кесишувчи тўғри чизиқлар орқали аниқланди. 66-шаклда  $CD(C_1D_1;C_2D_2)$  тўғри чизиқ кесмаси орқали умумий вазиятдаги  $P$  текислик излари орқали ўтказилган. Бунда тўғри чизиқ кесмасининг горизонтал изи  $1(1_1;1_2)$  ва фронтал изи  $2(2_1;2_2)$  топилади ва улар орқали мос равишда текисликнинг горизонтал изи  $P_H$  ва фронтал изи  $P_V$  ўтказилади. Лекин ўказилиши зарур бўлган текисликнинг ҳолатига бирор шарт қўйилмаганлиги учун  $XX$  ўқидаги изларнинг ўзаро кесишиш нуқтаси  $P_X$  ихтиёрый танланган.

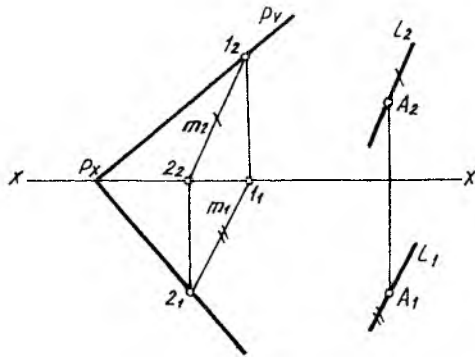
### 5.2 § Тўғри чизиқнинг текисликка параллеллиги

Агар фазордаги бирор  $\ell$  тўғри чизиқ ихтиёрий  $P$  текисликка тегишли бўлган  $m$  чизиққа параллел бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ текисликка ҳам параллел бўлади, яъни  $m \supset P$ ,  $\ell \parallel m$  бўлса, у ҳолда  $\ell \parallel P$



67-шакл

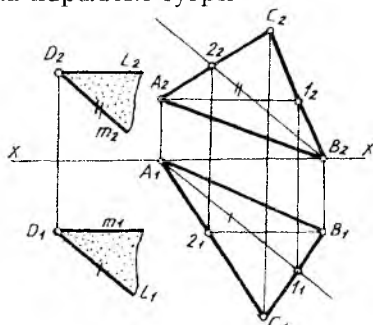
бўлади (67-шакл, а,б). Фазода берилган текисликка унинг ташқарисидаги нуқтадан шу текисликка параллел бўлган тўғри чизиқлар бир параметрли ( $\infty^1$ ) тўпламни ташкил қилади. Фазодаги  $A(A_1;A_2)$  нуқтадан умумий вазиятдаги  $P(P_H;P_V)$  текисликка параллел



68-шакл

тўғри чизиқ ўтказиш учун (68-шакл)  $P$  текисликда ихтиёрий  $m(m_1;m_2)$  тўғри чизиқ танлаймиз.  $A$  нуқтанинг  $A_1$  ва  $A_2$  проекцияларидан шу тўғри чизиқнинг бир номи

проекциялари  $m_1$  ва  $m_2$  га параллел ҳолда  $\ell_1$  ва  $\ell_2$  проекциялари ўтказилади, яъни  $\ell_1 \supset A_1$ ,  $\ell_1 \parallel m_1$  ва  $\ell_2 \supset A_2$ ,  $\ell_2 \parallel m_2$  демак,  $\ell \parallel P$  бўлади. Юқоридаги мисолда ўтказилувчи тўғри чизиққа қўшимча шартлар қўйилган эмас. 69-шаклда  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак текислигидан ташқаридаги  $D(D_1; D_2)$  нуқта орқали шу текисликка ва  $H$  текисликка, ҳамда  $V$  текисликка параллел тўғри



69 - шакл

чизиқ ўтказилиш кўрсатилган. Бунинг учун берилган текисликнинг горизонтали  $A1(A_11_1; A_21_2)$  ҳамда фронтали  $B2(B_12_2; B_22_2)$  ўтказилиб,  $A$  нуқтанинг  $A_1$  ва  $A_2$  проекцияларидан текисликнинг махсус чизиқларига параллел,  $\ell \parallel A1$  ва  $m \parallel B2$  тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу ерда  $\ell_1 \parallel A_11_1$ ,  $\ell_2 \parallel A_21_1$  ва  $m_1 \parallel B_12_1$ ,  $m_2 \parallel B_22_2$  бўлади.

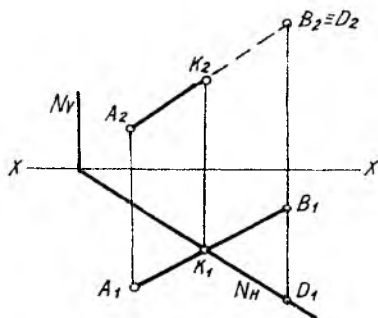
### 5.3 § Тўғри чизиқни текислик билан кесишиши

#### Тўғри чизиқнинг проекцияловчи текислик билан кесишиш нуқтасини яшаш

Проекцияловчи текисликнинг хусусиятига кўра тўғри чизиқ билан проекцияловчи текисликнинг кесишув нуқтасининг битга проекцияси текислик изида бўлади.

Шунингдек изланаётган нуқта  $A_1B_1$  ( $N \perp H$  бўлса)да ёки  $A_2B_2$  ( $N \perp V$  бўлса)да бўлади, шунга кўра изланаётган нуқтани горизонтал проекцияловчи текисликнинг горизонтал изи билан  $A_1B_1$  ни ёки фронтал проекцияловчи текисликнинг фронтал изи билан  $A_2B_2$  ни кесиштириб аниқланади. Шунинг

учун ҳам тўғри чизиқнинг бундай текислик билан кесишув нуқтасини топиш қийинчилик туғдирмайди. 70-шаклда  $AB(A_1B_1; A_2B_2)$  тўғри чизиқ билан горизонтал проекцияловчи  $N$  текисликнинг кесишув нуқтасини яшаш кўрсатилган.  $AB$  тўғри чизигининг горизонтал проекцияси  $A_1B_1$  текисликнинг горизонтал изи  $N_H$  ни  $K_1$  нуқтада кесган.  $K_1$  кесишув нуқтасининг горизонтал проекцияси бўлиб, унинг фронтал проекцияси  $K_2$  эса  $A_2B_2$  устида боғловчи чизиқ ёрдамида топилади.  $AB$  кесма текисликни  $K(K_1; K_2)$  нуқтада тешиб ўтган учун унинг бир қисми текисликнинг орқа томонида қолиб кўринмас бўлади. Бу мисолда кесманинг кўринар ва кўринмас қисмини горизонтал проекция орқали осонгина аниқласа бўлади. Чунки устидан кўринишда унинг  $KB$  қисми кўринмас бўлиши горизонтал проекциядан яққол кўриниб турибди. Лекин кейинги мисолларимизда конкурент нуқталардан фойдаланиш кўпроқ ишлатилиши туфайли бу мисолдаги

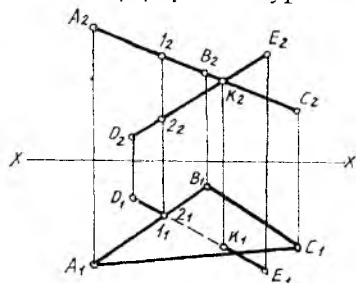


70-шакл

кўринар ва кўринмас қисмларни конкурент нуқталар ёрдамида тушунтирамиз. Кесманинг фронтал проекциясида  $B$  нуқтанинг фронтал проекцияси  $B_2$  билан текисликка тегишли  $D$  нуқтанинг фронтал проекцияси  $D_2$  устма-уст тушган бўлсин.  $D$  нинг горизонтал проекцияси  $D_1$  ни аниқлаймиз. У  $N$  текисликнинг горизонтал изи  $N_H$  да бўлади. Шундай қилиб, горизонтал проекциялар ёрдамида  $B$  нуқтанинг олдидан кўринишда  $D$  нуқтага нисбатан узоқроқ ётганлиги маълум бўлади. Шунинг учун ҳам фронтал проекцияда  $K_2B_2$  қисм кўринмас бўлади. 71-шаклда фронтал

проекцияловчи текисликда ётган ABC учбурчак ва DE тўғри чизиқ кесмаси берилган. ABC учбурчакнинг фронтал проекцияси тўғри чизиқ кўринишида бўлиб,  $D_2E_2$  билан  $K_2$  нуқтада кесишади.

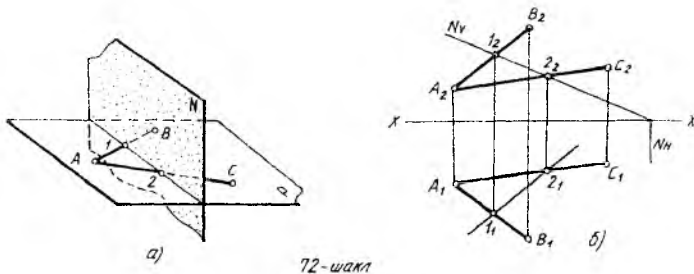
K нинг горизонтал проекцияси  $K_1$  эса,  $D_1E_1$  устида боғловчи чизиқ ёрдамида топилади. Демак, DE тўғри чизиқ ABC учбурчак билан  $K(K_1;K_2)$  нуқтада кесишади. DE нинг устидан кўринишида унинг кўринар-кўринмас қисмини аниқлаймиз. Бунинг учун DE га тегишли 2 ва AB томонга тегишли 1 нуқтанинг устма-уст тушган проекцияларидан фойдаланамиз. 1 ва 2 нуқталарнинг фронтал проекцияларини аниқлаймиз. Уларнинг фронтал проекцияларидан AB га тегишли 1 нуқтанинг 2 нуқтага nisbatan баландроқда жойлашганлигини кўраемиз. Шунинг учун ҳам DE кесманинг  $K_12_1$  қисми кўринмас бўлади.



71-шакл

#### 5.4 § Умумий вазиятдаги текисликнинг хусусий вазиятда берилган текислик билан кесишиш чизигини яшаш

Икки текислик ўзаро тўғри чизиқ бўйича кесишиб, унинг ҳолати бу текисликларга умумий бўлган икки нуқта тўла аниқлайди. 72-шакл, а) да икки текисликнинг ўзаро кесишиш чизигини топиш кўрсатилган. Бунда P текисликдаги AB ва AC тўғри чизиқларнинг N текислик билан кесишган нуқталари 1 ва 2 топилади. Топилган бу 1



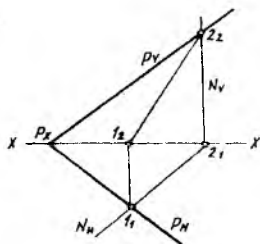
72-шакл

ва 2 нуқталар ҳар иккала текисликка тегишли бўлади. Демак, уларни бирлаштирувчи 12 тўғри чизиқ берилган икки текисликнинг ўзаро кесишган чизиғи булар экан. 72-шакл, б) да АВ ва АС ўзаро кесилувчи тўғри чизиқлар кўринишида берилган  $P$  текислик билан фронтал проекцияловчи  $N(N_{H1}; N_V)$  текисликнинг кесишиш чизиғини эпюрда топиш кўрсатилган. Бунда АВ ва АС кесмаларнинг фронтал проекциялари  $A_2B_2$  ва  $A_2C_2$  ларни  $N$  текисликнинг фронтал изи  $N_V$  билан кесишиш нуқталари  $1_2$  ва  $2_2$  топилиб уларнинг горизонтал  $1_1$  ва  $2_1$  проекциялари аниқланади.  $1_1$  ва  $2_1$  нуқталарни бирлаштириб текисликларнинг кесишиш чизиғининг горизонтал проекциясини топамиз. Кесишиш чизиғининг фронтал проекцияси  $1_22_2$  проекцияловчи текисликнинг хусусиятига асосан унинг фронтал изи  $N_V$  билан устма-уст ётади.

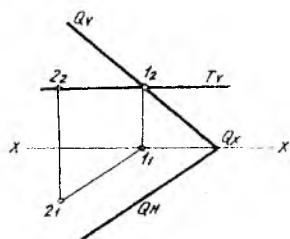
Агар кесилувчи  $P$  ва  $N$  текисликлар эпюрда  $P_{H1}$ ,  $P_V$  ва  $N_{H1}$ ,  $N_V$  излари билан берилса, уларнинг ўзаро кесишиш чизиғининг проекцияларини топиш учун, уларнинг бир номили изларининг кесишиш нуқталари  $1(1_1; 1_2)$  ва  $2(2_1; 2_2)$  топилади, яъни  $P_{H1} \cap N_{H1} = 1_1$  ва  $P_V \cap N_V = 2_2$  ва уларнинг бир номили проекциялари ўзаро бирлаштирилади (73-шакл). Топилган  $12(1_12_1; 1_22_2)$  тўғри чизиқ берилган икки текисликнинг кесишиш чизиғи бўлади. 74-шаклда умумий вазиятдаги  $P(P_{H1}, P_V)$  текисликни горизонтал  $T(T_V)$  текислик билан кесишиш чизиғининг проекцияларини топиш кўрсатилган.

Бунда  $T$  текислик  $P$  текисликни унинг  $1(1_1; 1_2)$  нуқтадан ўтувчи горизонтали орқали кесади.  $12(1_12_1; 1_22_2)$  текисликларнинг кесишиш чизиғи бўлади. 75-шаклда фронтал проекцияловчи  $DEF(D_1E_1F_1; D_2E_2F_2)$  учбурчак

текислиги билан умумий вазиятдаги  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак текислигининг кесишув чизиғини ясаш кўрсатилган. Учбурчак текислик  $ABC$  нинг  $AB$  томони  $DEF$  текислик билан  $1(1_1; 1_2)$  нуқтада,  $AC$  томони эса,  $2(2_1; 2_2)$  нуқтада кесишади. 1 ва 2 нуқталарни бирлаштириб икки текисликнинг кесишув чизиғи  $12(1_12_1; 1_22_2)$  га эга бўламиз. Лекин бу текисликнинг учбурчаклар билан чегараланган қисмлари  $1K(1_1K_1; 1_2K_2)$  тўғри чизиқ бўйича кесишади.

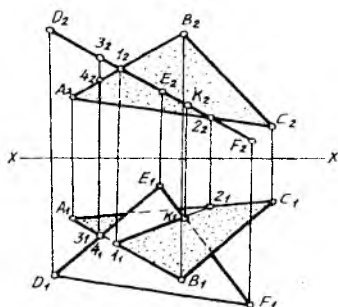


73-шакл



74-шакл

Бу учбурчакларнинг горизонтал проекцияларидаги кўринар ва кўринмас қисмлари конкурент нуқталар (3, 4) лар орқали аниқланган.



75-шакл

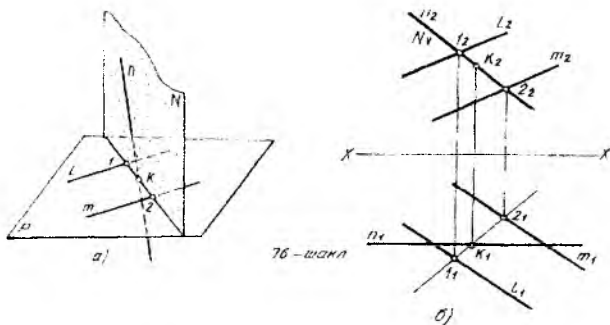
### 5.5 § Тўғри чизиқнинг умумий вазиятдаги текислик билан кесишиш нуқтасини топниш

Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро кесишиш нуқтаси бир вақтда ҳам текисликка, ҳам тўғри чизиққа тегишли бўлган умумий нуқтадир. Бу умумий нуқтани



берилган тўғри чизиқ орқали ёрдамчи текислик ўтказиш йули билан аниқланади. Берилган ва ўтказилган текисликларнинг ўзаро кесишиш чизигини топиб, ёрдамчи текисликда иккита ўзаро кесишувчи тўғри чизиқларга эга бўламиз, уларнинг кесишган нуқтаси ҳам тўғри чизиққа ҳам берилган текисликка тегишли бўлади, яъни тўғри чизиқни текислик билан ўзаро кесишиш нуқтаси бўлади.

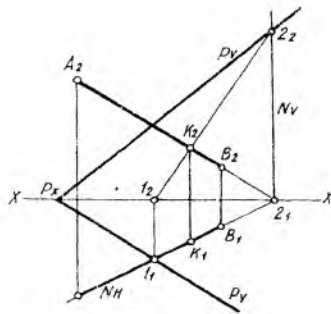
Фазода  $n$  тўғри чизиқ, ҳамда ўзаро параллел  $\ell$  ва  $m$  тўғри чизиқлар билан аниқланган  $P$  текислик берилган бўлсин (76-шакл, а,б). Уларнинг кесишиш нуқтасини топишни кўриб чиқамиз.



76-шакл

Берилган  $n$  тўғри чизиқ орқали ихтиёрий  $N$  текислик ўтказамиз (кўп ҳолларда проекцияловчи). 76-шакл, б)да унинг фронтал изи  $N_v$  ўтказилган. Бу текислик  $P$  текислик билан 12 тўғри чизиқ бўйича кесишади, яъни  $\ell \cap n = 1$ ,  $m \cap n = 2$ , эшурда  $\ell_2 \cap N_v = 1_2$ ,  $m_2 \cap N_v = 2_2$ . Бу тўғри чизиқ берилган  $n$  билан  $K$  нуқтада ( $n_1 \cap 1_1, 2_1 = K_1$ ) кесишади. Топилган,  $K(K_1; K_2)$  нуқта берилган тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро кесишиш нуқтаси бўлади.

77-шаклда умумий вазиятдаги  $P$  текислик  $P_{H1}$  ва  $P_v$  излари билан берилган. Бу текислик билан  $AB(A_1V_1; A_2V_2)$  тўғри чизиқ кесмасининг



77 -шакл

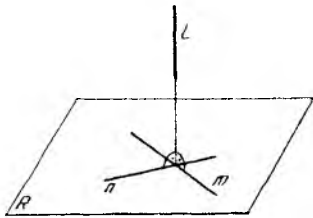
ўзаро кесишиш нуқтасини топиш кўрсатилган. Бунда АВ кесма орқали  $N(N_H; N_V)$  горизонтал проекцияловчи текислик ўтказилади,  $P(P_H; P_V)$  билан  $N(N_H; N_V)$  нинг кесишиш чизиги  $12(1_1 2_1; 1_2 2_2)$  ясалади ва бу чизиқ билан АВ нинг кесишиш нуқтаси  $K(K_1; K_2)$  аниқланади.

### 5.6 § Тўғри чизиқнинг текисликка перпендикулярлиги

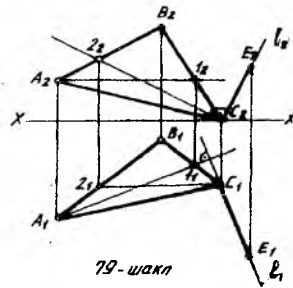
Агар  $\ell$  тўғри чизиқ  $P(m \cap n)$  текисликдаги ўзаро кесишувчи  $m$  ва  $n$  тўғри чизиқларнинг ҳар бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу  $\ell$  тўғри чизиқ  $P$  текисликка ҳам перпендикуляр бўлади (78-шакл).

$\ell$  тўғри чизиқ  $P$  текисликнинг барча тўғри чизиқларига ва шулар қатори унинг горизонтали ва фронтали чизиқларига ҳам перпендикуляр бўлади. Шунга асосан  $\ell_1 \perp h_1$  ва  $\ell_2 \perp f_2$  бўлади ва бундай тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлади.

Берилган  $ABC(A_1V_1C_1; A_2V_2C_2)$  учбурчак текислигининг  $S(S_1; S_2)$  учидан унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказишни кўриб чиқамиз (79-шакл). Бунинг учун текисликнинг махсус чизиқларини, яъни унинг  $A1(A_1 1_1; A_2 1_2)$  горизонталини ва  $S2(C_1 2_1; C_2 2_2)$  фронталини ўтказамиз. Тўғри бурчакнинг проекцияланиш хоссасига асосан  $S$  нуқтанинг горизонтал  $S_1$  ва фронтал  $S_2$  проекциясидан мос равишда

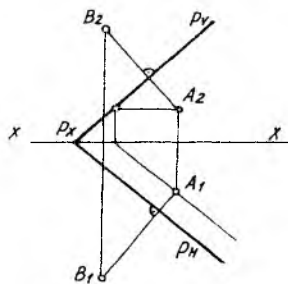


78-шакл



79-шакл

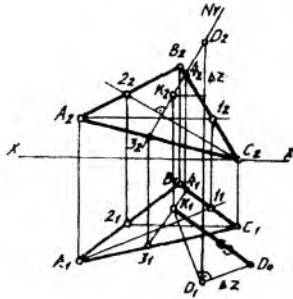
Берилган  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак текислигининг  $S(S_1; S_2)$   $A_{111}$  ва  $S_{222}$  ларга перпендикуляр  $l$  ( $l_1:l_2$ ) туғри чизиқ ўтказиб, унда ихтиёрий  $E(E_1; E_2)$  нуқтани белгилаймиз. Демак,  $SE$  кесма  $ABC$  учбурчак текислигига перпендикуляр бўлди. Агар  $P$  текислик  $PH, PV$  излари билан берилган бўлса (80-шакл), у ҳолда унга тегишли бўлган  $A(A_1; A_2)$  нуқтадан перпендикуляр ўтказиш учун нуқтанинг горизонтал  $A_1$  ва фронтал  $A_2$  проекцияларидан текисликнинг горизонтал  $PH$  ва фронтал  $PV$  изларига мос равишда перпендикуляр ўтказиб унда ихтиёрий  $B(B_1; B_2)$  нуқта белгиланади. Метрик масалаларни ечишда юқоридаги усулдан кўп фойдаланилади.



80-шакл

1-Мисол. Берилган  $D(D_1; D_2)$  нуқтадан  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак текислигигача бўлган энг қисқа масофанинг ҳақиқий катталиги аниқлансин (81-шакл).

Ечиш.  $ABC$  текисликнинг  $A$  учидан унинг  $A_1(A_{11}, A_{21})$  горизонталини ва  $C$  учидан эса унинг  $C_2(C_{21}, C_{22})$  фронтали

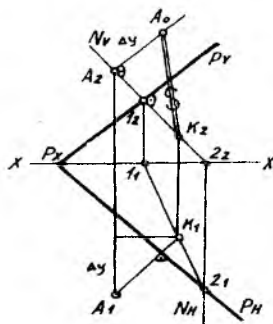


81 - шакл

ўтказилади. D нуқтанинг горизонтал  $D_1$  ва фронтал  $D_2$  проекцияларидан  $A_1B_1C_1$  ва  $A_2B_2C_2$  га перпендикуляр тўғри чиқиқ ўтказилади. Бу перпендикулярнинг фронтал проекцияси орқали фронтал проекцияловчи  $N(N_V)$  текислик ўтказиб, унинг  $A_2B_2C_2$  билан кесишиш чизиғи, яъни  $3_2$  ва  $4_2$  нуқталар топилади. Боғловчи чиқиқлар орқали бу нуқталарнинг горизонтал  $3_1$  ва  $4_1$  проекциялари топилиб бирлаштирилса  $D_1$  нуқтадан ўтказиладиган перпендикулярни кесиб ABC текислик билан кесишган нуқтаси K ( $K_1; K_2$ ) ни беради. Демак, DK ( $D_1K_1; D_2K_2$ ) кесма фазодаги D нуқтадан ABC текислиггача бўлган энг қисқа масофанинг проекциялари бўлади. Унинг ҳақиқий катталиги  $D_0K_1$  тўғри бурчакли  $D_1D_0K_1$  учбурчак ёрдамида топилган

2-Мисол. Берилган A ( $A_1; A_2$ ) нуқтадан умумий вазиятдаги P ( $P_1; P_V$ ) текислиггача бўлган энг қисқа масофанинг ҳақиқий катталиги аниқлансин (82-шакл).

Ечиш. Берилган A нуқтанинг горизонтал  $A_1$  ва фронтал  $A_2$  проекциялардан текисликнинг горизонтал  $P_H$  ва фронтал  $P_V$  изларига мос равишда перпендикуляр ўтказамиз.



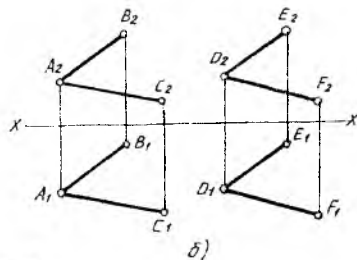
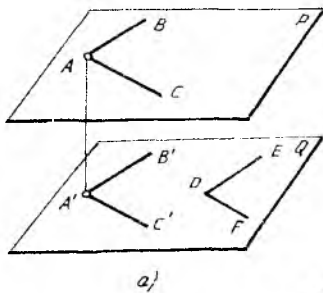
82 - шакл

Ўтказилган перпендакуляр орқали фронтал проекцияловчи  $N$  ( $N_H; N_V$ ) текислик утказамиз. Берилган  $P$  ва ўтказилган  $N$  текисликларнинг ўзаро кесишган чизиғи  $12$  ( $1_1 2_1; 1_2 2_2$ ) ни топамиз. Бу чизиқнинг горизонтал проекцияси  $A$  нуқтанинг горизонтал  $A_1$  проекциясидан ўтказилган перпендикулярни  $K_1$  нуқта кесиб, тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишган нуқтасининг горизонтал проекциясини беради, унинг  $K_2$  проекциясини топиб тўғри бурчакли  $K_2 A_2 A_0$  учбурчак ёрдамида энг қисқа масофанинг ҳақиқий катталиғи  $K_2 A_0$  топилади.

## VI боб. ФАЗОДАГИ ИККИ ТЕКИСЛИКНИНГ ЎЗARO ВАЗИЯТИ

### 6.1 § Ўзарo параллел текисликлар

Агар бир текисликдаги ўзарo кесишувчи тўғри чизиқлар иккинчи текисликдаги ўзарo кесишувчи тўғри чизиқларга мос равишда параллел бўлса, у ҳолда бу икки текислик ўзарo параллел бўлади, яъни  $AB \cap AC \supset P$ ,  $DE \cap DF \supset Q$  булиб,  $AB \parallel DE$  ва  $AC \parallel DF$  бўлса,  $Q \parallel P$  бўлади (83-шакл а,б). Ҳақиқатдан,  $A$  нуқтадан  $Q$  текисликка  $AA'$  перпендикуляр тушириб  $A'$  нуқтадан  $AB$  ва  $AC$  тўғри чизиқларга



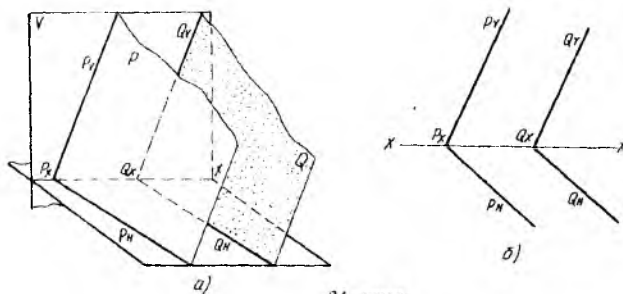
83-шакл

мос равишда параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бундан  $A'B' \parallel AB$  ва  $A'C' \parallel AC$  эканлиги ойдин.  $AA' \perp A'B'$  ва  $AB \parallel A'B'$  бўлганлиги учун  $AA' \perp AB$  бўлади. Худди шундай  $AA' \perp AC$ . Демак,  $AA' \perp P$  яъни  $P$  ва  $Q$  текисликлар  $AA'$  га перпендикуляр. Агар икки текислик бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда улар ўзаро параллелдир.

Бу текисликлардаги ўзаро кесишувчи тўғри чизиқларнинг бир номли проекциялари ҳам ўзаро параллел бўлади, яъни  $A_1B_1 \parallel D_1E_1$ ,  $A_1C_1 \parallel D_1F_1$  ва  $A_2B_2 \parallel D_2E_2$ ,  $A_2C_2 \parallel D_2F_2$  (83-шакл, б).

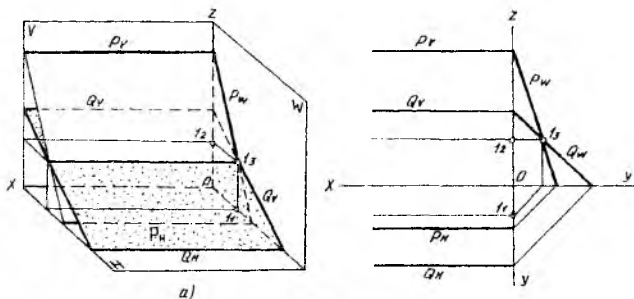
Агар икки ўзаро параллел текисликлар излари билан берилган бўлса, у ҳолда уларнинг бир номли излари ҳам ўзаро параллел бўлади (84-шакл). Ҳақиқатдан икки ўзаро параллел текисликларни учинчи текислик кесиб ўтса уларнинг ўзаро кесишган чизиқлари ҳам параллел бўлади.

84-шакл, а) да кесувчи текислик сифатида проекциялар текисликлари  $H$  ва  $V$  олинади ва улар  $P$  ва  $Q$  текисликларни мос равишда  $P_H$ ,  $Q_H$  ва  $P_V$ ,  $Q_V$  чизиқлар бўйича кесади. Демак,  $P_H \parallel Q_H$  ва  $P_V \parallel Q_V$  бўлади (84-шакл, б). Текисликларнинг бир номли излари ўзаро параллел бўлса, текисликлар фазода доимо параллел бўлавермайди.



84-шакл

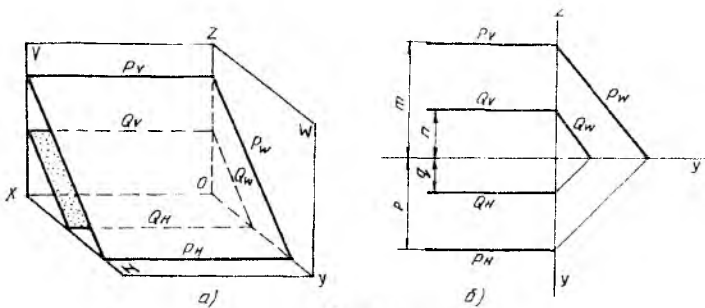
Масалан, профил проекцияловчи  $P$  ва  $Q$  текисликлар берилган (85-шакл, а, б). Уларнинг горизонтал  $P_H$  ва  $Q_H$  ҳамда фронтал  $P_V$  ва  $Q_V$  излари ўзаро параллел, яъни  $P_H \parallel Q_H$  ва  $P_V \parallel Q_V$ , лекин профил излари



85-шакл

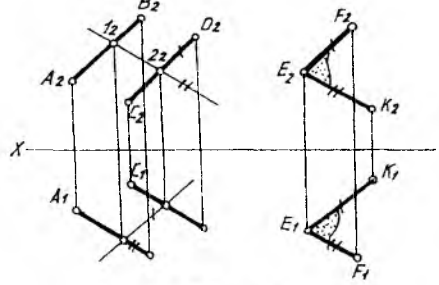
$P_W$  ва  $Q_W$  ўзаро кесишувчи, демак бу текисликлар ўзаро параллел эмас. Бундай текисликларнинг параллеллигини текшириш учун уларнинг профил изларини ясаш зарур ёки қуйидагича таҳлил қилиш керак, яъни текисликларнинг горизонтал  $Q_H \parallel P_H$  излари  $OX$  ўқига нисбатан қандай узоқликда жойлашса, фронтал излари ҳам шундай тартибда жойлашиши керак ва изларининг  $OX$  ўқгача бўлган нисбатлари тенг бўлиши керак, яъни  $m:p=r:q$  (86-шакл, б)

1-Мисол. Фазодаги  $E$  ( $E_1; E_2$ ) нуқтадан ўзаро параллел  $AB$  ( $A_1B_1; A_2B_2$ ) ва  $CD$  ( $C_1D_1; C_2D_2$ ) тўғри чизиқлар билан берилган текисликка параллел текислик ўтказилсин (87-шакл).



86-шакл

Бу масалани ечиш учун  $E$  нуқтадан берилган тўғри чизиқ кесмаларига параллел ўтказиш керак.  $E$  нуқтанинг фронтал проекцияси  $E_2$  дан  $CD$  нинг фронтал проекцияси  $C_2D_2$  га параллел ўтказиб ихтиёрий  $F_2$  нуқтани белгилаймиз.  $E$   $F$  кесманинг горизонтал проекцияси  $E_1 F_1$  эса  $C_1D_1$  га параллел бўлади, яъни  $E_2 F_2 \parallel C_2D_2$  ва  $E_1 F_1 \parallel C_1D_1$ .  $E$  нуқтадан ўтувчи текисликни ифодаловчи иккинчи тўғри чизиқни ўтказиш учун берилган  $AB \parallel CD$  текислиқда ихтиёрий  $1_2$  ( $1_1 2_2; 1_2 2_2$ ) тўғри чизиқни танлаб оламиз ва  $E$  нуқтанинг проекцияларидан  $1_2$  нинг проекцияларига мос равишда параллел тўғри чизиқлар ўтказилади, яъни  $E_1 K_1 \parallel 1_1 2_1$  ва  $E_2 K_2 \parallel 1_2 2_2$ . Ҳосил бўлган  $EFK$  ( $E_1 F_1 K_1; E_2 F_2 K_2$ ) текислик изланган текислик бўлади.



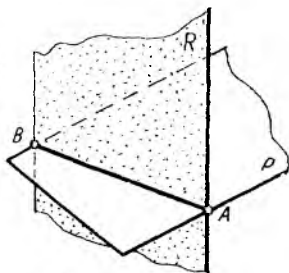
87-шакл

**6.2 § Ўзаро кесишувчи текисликлар**

Маълумки икки текислик ўзаро битта умумий тўғри чизиқ бўйича кесишади. Тўғри чизиқ эса икки параметрли



$\{\infty^2\}$  нуқталар тўлами бўлиб, ўзининг икки нуқтаси билан, ёки бир нуқта ва йўналиши билан аниқланади. Демак, икки текисликнинг кесишган чизигини ясаш учун ҳар иккала текисликка тегишли бўлган иккита ( $A$  ва  $B$ ) нуқтани топиб уларни бирлаштириш kifойадир (88-шакл).

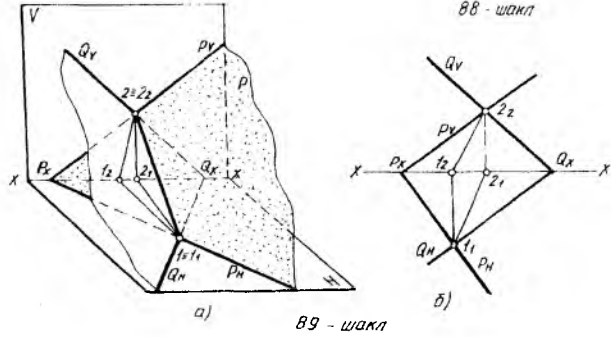


- 88 - шакл

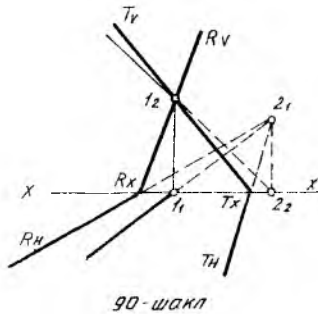
1-Мисол. 89-шакл, а) ва б) да умумий вазиятдаги ўзаро кесишувчи  $P (P_H; P_V)$  ва  $Q (Q_H; Q_V)$  текисликлар берилган. 89-шакл, а) дан кўриниб турибдики, бу текисликлар учун умумий бўлган 1 ва 2 нуқталар текисликларнинг бир номли изларининг кесишган нуқталари бўлади, яъни  $P_H \cap Q_H = 1$  ва  $P_V \cap Q_V = 2$ .

Эпюлда (89-шакл, б) бу текисликларнинг ўзаро кесишган чизигини проекцияларини ясаш учун уларнинг бир номли изларнинг кесишиш  $1(1_1; 1_2)$  ва  $2(2_1; 2_2)$  проекцияларни аниқлаймиз ва бир номли проекцияларни ўзаро бирлаштирамиз. Натижада ҳосил бўлган  $12(1_1 2_1; 1_2 2_2)$  кесма  $P$  ва  $Q$  текисликларнинг кесишиш чизигини, излари билан чегараланган қисмининг проекциялари бўлади.

Чизма геометриянинг аксарияти кўп масалаларини аксарияти фазонинг биринчи октантида ечилади. Лекин умумий вазиятда бўлган икки текисликнинг бир номли излари биринчи октант чегараси кесишмаслиги ҳам мумкин. У ҳолда бу изларни давом эттириб бошқа октантларда кесиштириб топиш билан кесишган чизигини проекциялари ясалади. Буни қуйидаги мисолда кўрамиз.

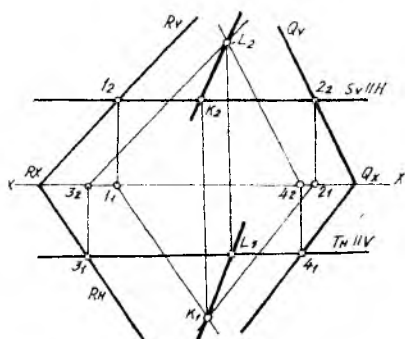


2-Мисол. 90-шаклда  $R(R_H; R_V)$  ва  $T(T_H; T_V)$  текисликларнинг горизонтал излари иккинчи октантга ўтиб кесишади.



Агар кесишувчи  $R$  ва  $Q$  текисликларнинг бир номли излари чизма чегарасида ўзаро кесишмаса, у ҳолда уларнинг кесишиш чизигини ёрдамчи кесувчи текисликлардан фойдаланиб топилади.

3-Мисол. 91-шакл  $R(R_H; R_V)$  ва  $Q(Q_H; Q_V)$  текисликлар излари билан берилган бўлиб, бир номли излари чизма чегарасида кесишмайди. Ёрдамчи кесувчи текисликлар сифатида  $S(S_V)$  горизонтал, яъни  $H$  га параллел, текислик ўтказамиз. Бу текислик  $R$  ва  $Q$  ларни мос равишда  $1(1_1; 1_2)$  ва  $2(2_1; 2_2)$  нуқталардан ўтувчи

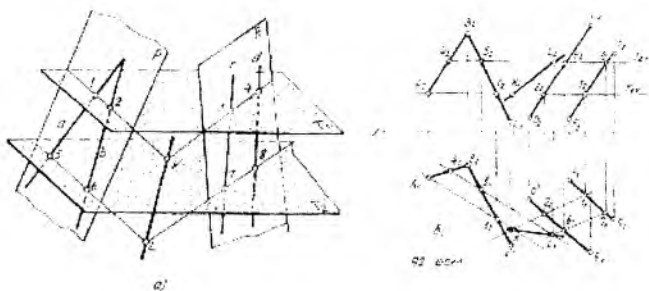


91-шакл

горизонталлари бўйича кесади. Текисликларнинг бу горизонталлари кесишиб изланаётган нуқталардан бири  $K(K_1;K_2)$  ни аниқлайди. Иккинчи ёрдамчи кесувчи текислик  $T(T_1)$  ни  $V$  га параллел, яъни фронтал, ҳолда утказамиз. Бу текислик эса  $R$  ва  $Q$  ни мос равишда  $3(3_1;3_2)$  ва  $4(4_1;4_2)$  нуқталардан утувчи фронталлар бўйича кесиб, изланаётган иккинчи  $L(L_1;L_2)$  нуқтани беради. Демак  $R$  ва  $Q$  текисликларнинг ўзаро кесишиш чизигининг проекциялари  $KL(K_1L_1;K_2L_2)$  бўлар экан.

Агар кесишувчи текисликлар эпюрда қандайдир текис шакллар билан берилган бўлса, уларнинг ўзаро кесишиш чизигини топиш учун албатта ёрдамчи кесувчи текисликлардан фойдаланилади.

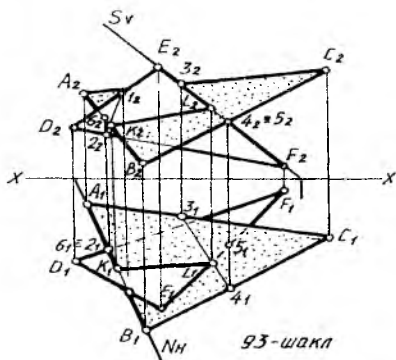
4-Мисол. 92-шакл, а)да  $P$  текислик ўзаро кесувчи  $a$  ва  $b(P=a \cap b)$ ,  $R$  текислик эса ўзаро параллел  $c$  ва  $d(R=c \parallel d)$  тўғри чизиқлар билан берилган. Бу текисликларни  $T_1$  текислик билан кесиб  $P$  текисликда  $1$  ва  $2$  нуқтани,  $R$  текисликда эса  $3$  ва  $4$  нуқталар топилиб,  $1$  ва  $2$  ҳамда  $3$  ва  $4$  нуқталар бирлаштирилса улар ўзаро  $K$  нуқтада кесишиб изланаётган нуқталардан бири беради.  $T_2$  текислик билан кесиб юқоридаги усул билан  $L$  нуқта топилади.  $KL$  тўғри чизиқ  $P$  ва  $R$  текисликларнинг ўзаро кесишиш чизиги бўлади. 92-шакл б) да шу масаланинг эпюрда ечилиши кўрсатилган. Бунда  $T_1$  ва  $T_2$  кесувчи текисликлар  $H$  текисликка параллел ҳолда олинган. Чунки бу текисликлар  $P$  ва  $R$  текисликларни уларнинг горизонталлари бўйича кесади.



$T_1$  текислик биринчи текисликни  $A1(A_11;A_21_2)$  ва иккинчи текисликни эса  $23(2_13_1;2_23_2)$  горизонталлар бўйича кесиб  $K(K_1;K_2)$  нуқтани аниқлайди.  $T_2$  текислик эса  $45(4_15_1;4_25_2)$  ва  $67(6_17_1;6_27_2)$  горизонталлар бўйича кесади ва  $L(L_1;L_2)$  нуқтани аниқлайди. Демак, ҳосил бўлган  $KL(K_1L_1;K_2L_2)$  тўғри чизиқ берилган икки текисликнинг ўзаро кесишиш чизигини проекциялари бўлади.

5-Мисол.  $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$  ва  $DEF(D_1E_1F_1;D_2E_2F_2)$  учбурчаклар билан берилган текисликларнинг кесишиш чизиги топилинсин (93-шакл).

Бу масалани ечишда ёрдамчи кесувчи текисликлар учбурчакларни бирор томонлари орқали проекцияловчи ҳолатда ўтказилади.  $ABC$  учбурчак  $AB$  томони орқали  $N$  горизонтал проекцияловчи текислик ўтказамиз.

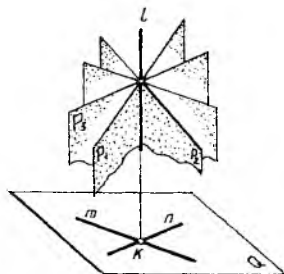


$(A_1B_1 \supset N_{11})$ . Бу текислик  $DEF$  учбурчакнинг  $DE(D_1E_1;D_2E_2)$  томонини  $1(1_1;1_2)$  ва  $DF(D_1F_1;D_2F_2)$  томонини эса  $2(2_1;2_2)$  нуқталарда кесади ва  $12(1_12_1;1_22_2)$  чизиқ  $AB$  нинг фронтал  $A_2B_2$  проекциясини  $K(K_1;K_2)$  нуқтада кесади.  $K$  нуқта

изланаётган нуқталардан биридир. Энди  $DEF(D_1E_1F_1; D_2E_2F_2)$  учбурчакнинг  $EF(E_1F_1; E_2F_2)$  томони орқали  $S(S_V)$  фронтал проекцияловчи текислик ўтказамиз ва юқоридаги усулдан фойдаланиб  $L(L_1; L_2)$  нуқтани топамиз, яъни  $E_2F_2 \supset S_V$ ,  $S_V \cap A_2C_2 = 3_2$  ( $3_1 \supset A_1C_1$ ),  $S_V \cap B_2C_2 = 4_2$  ( $4_2 \supset B_1C_1$ ),  $3_14_1 \cap E_1F_1 = L_1$ ,  $L_2 \supset E_2F_2$ . Тошилган  $KL(K_1L_1; K_2L_2)$  кесма берилган учбурчак текискаларнинг кесишган чизигидир. Текисликлар шаффоф эмас деб уларнинг кўринар-кўринмас қисмлари конкурент нуқталар 4 ( $4_1; 4_2$ ) ва 5 ( $5_1; 5_2$ ) ҳамда 2 ( $2_1; 2_2$ ) ва 6 ( $6_1; 6_2$ ) нуқталардан фойдаланиб аниқланади.

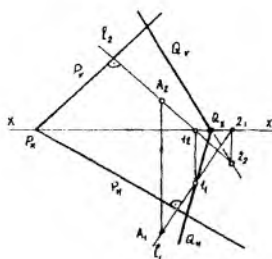
### 6.3 § Текисликларнинг ўзаро перпендикулярлиги

Агар бирор  $P$  текислик иккинчи бир  $Q$  текисликка перпендикуляр бўлган  $\ell$  тўғри чизиқ орқали ўтса, у ҳолда бу  $P$  текислик  $Q$  текисликка перпендикуляр бўлади. Яъни  $\ell \perp Q$  бўлиб,  $\ell \supset P$  бўлса, у ҳолда  $P \perp Q$ . Маълумки, тўғри чизиқ орқали бир параметрли ( $\infty'$ ) текисликлар тўплами ўтади. Демак, текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ орқали ўтган  $P_1$  текисликлар ҳам бир параметрли ( $\infty'$ ) перпендикуляр текисликлар тўпламини ташкил қилади. (94-шакл).



94-шакл

1-Мисол. Фазодаги  $A(A_1; A_2)$  нуқтадан излари билан берилган  $P(P_H; P_V)$  текисликка перпендикуляр бўлган  $Q(Q_H; Q_V)$  текислик ўтказилсин (95-шакл). Бунинг учун  $A(A_1; A_2)$  нуқтадан  $P(P_H; P_V)$  текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз. Эпюрга  $A$  нуқтанинг горизонтал  $A_1$  ва фронтал  $A_2$  проекцияларидан мос

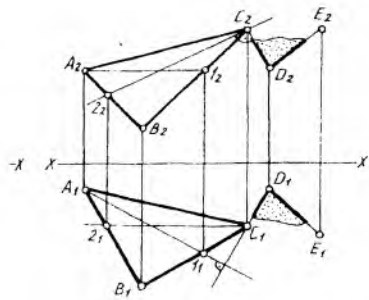


95-шакл

равишда  $P_H$  га  $P_V$  га перпендикуляр ҳолда  $\ell$  тўғри чизиқнинг горизонтал  $\ell_1$  ( $\ell_1 \perp P_H$ ) ва фронтал  $\ell_2$  ( $\ell_2 \perp P_H$ ) проекцияларини ўтказиб, унинг  $H$  ва  $V$  текисликлардаги  $1_1$  ва  $2_2$  излари топилади. Буни  $\ell$  тўғри чизиқ орқали ўтувчи ҳар қандай  $Q$  текислик берилган  $P$  текисликка перпендикуляр бўлади. 95-чизмада  $Q$  текислигининг горизонтал  $Q_H$  изи  $1_1$  нуқта орқали ихтиёрий йўналишда ўтказилиб  $O_x$  нуқта топилади, бу нуқта ва  $2_2$  нуқта орқали эса  $Q$  текислигининг фронтал  $Q_V$  изи ўтказилади. Агар ўтказилган  $Q$  текислигининг бирор изи берилган  $P$  текислигининг бирор изига мос равишда перпендикуляр бўлса, у ҳолда  $Q$  текислигининг иккинчи изи албатта  $XX$  ўқига перпендикуляр бўлиб, ўтказилган текислик проекцияловчи ҳолда бўлади.

2-Мисол.  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак текислигининг  $S(S_1; S_2)$  учидан унга перпендикуляр текислик ўтказилсин (96-шакл).

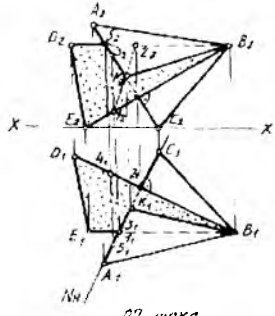
Бу масала қуйидагича ечилади:  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак текислигининг горизонтал  $A1$  ( $A_11_1; A_21_1$ ) ва фронтал  $S2$  ( $S_12_1; S_22_2$ ) чизиқлари ўтказилади;  $S$  ( $S_1; S_2$ ) нуқтадан юқоридаги махсус чизиқларга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказиб унда ихтиёрий  $D$  ( $D_1; D_2$ ) нуқта танланади. Яъни  $S_1D_1 \perp A_11_1$  ва  $S_2D_2 \perp S_22_2$  бўлади.



96-шакл

Демак, бу  $CD(C_1D_1;C_2D_2)$  тўғри чизиқ берилган  $ABC$  учбурчак текислигига перпендикуляр бўлади. Маълумки, текислик ўзаро кесишувчи тўғри чизиқлар билан ҳам берилади. Шунинг учун  $D(D_1;D_2)$  нуқтадан ихтиёрий йўналишда ( $CD$  дан фарқли) тўғри чизиқ ўтказиб, унда  $E(E_1;E_2)$  нуқтани белгилаймиз. Демак, ўзаро кесишувчи  $CD$  ва  $DE$  ( $CD \cap DE$ ) тўғри чизиқлар изланган текисликни ифодалайди.

3-Мисол. Умумий вазиятдаги  $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$  учбурчакнинг  $B(B_1;B_2)$  учидан  $AC(A_1C_1;A_2C_2)$  томонига перпендикуляр текислик ўтказилсин ва уларнинг ўзаро кесишиш чизиғи аниқлансин (97-шакл).



97-шакл

Учбурчакнинг  $B(B_1;B_2)$  учидан ўтказилиши керак бўлган текисликнинг махсус чизиқларини  $AC(A_1C_1;A_2C_2)$  га перпендикуляр ҳолда ўтказамиз, яъни  $B_1D_1 \perp A_1C_1$ ,  $B_2D_2 \parallel XX$  текисликнинг горизонтали ва  $B_2E_2 \perp A_2C_2$ ,  $B_1E_1 \parallel XX$  текисликнинг фронталини ўтказамиз. Ўтказилган

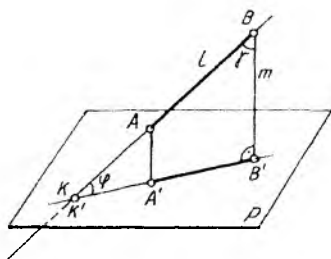
$BDE(B_1D_1E_1; B_2D_2E_2)$  текислик  $ABC$  га перпендикуляр бўлади. Энди  $AC$  тўғри чизик орқали  $N$  ( $N_H$ ) горизонтал проекцияловчи (фронтал проекцияловчи ҳам бўлиши мумкин) текислик ўтказамиз. Бу текисликнинг  $N_H$  изи  $B_1E_1$  ни  $1_1$  нуқтада,  $B_1D_1$  ни эса  $2_1$  нуқтадан кесиб ўтади, топилган нуқталарнинг фронтал  $1_2$  ва  $2_2$  проскцияларини бирлаштириб  $A_2C_2$  да  $K_2$  ни, ундан сўнг  $K_1$  ни топамиз. Топилган  $K$  ( $K_1; K_2$ ) нуқтани  $B$  ( $B_1; B_2$ ) билан ( $B$  нуқта ҳар икки текисликка умумийдир, чунки иккала учбурчакнинг умумий учидир) бирлаштириб учбурчак текисликларининг ўзаро кесишиш чизигига эга бўламиз, яъни  $ABC \cap BDE = BK$ . Бу учбурчакнинг кўринар-кўринмас қисmlарини конкурент  $1(1_1; 1_2)$  ва  $3(3_1; 3_2)$  ҳамда,  $4(4_1; 4_2)$  ва  $5(5_1; 5_2)$  нуқталар ёрдамида аниқланади.

#### 6.4 § Тўғри чизик билан текислик орасидаги бурчакни аниқлаш

Тўғри чизик билан текислик орасидаги бурчак, шу тўғри чизикнинг берилган текисликдаги тўғри бурчакли проекцияси билан ҳосил қилган бурчак орқали ўлчанади. (98-шакл).

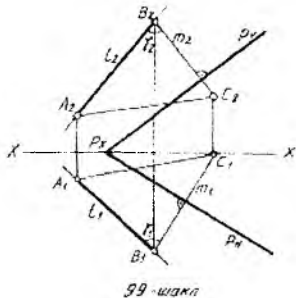
Бу бурчакни аниқлаш учун қуйидаги режа асосида иш олиб борилади: 1. Берилган  $\ell$  тўғри чизикнинг  $P$  текислик билан кесишиш нуқтаси  $K$  топилади, яъни  $K = \ell \cap P$ . 2. Тўғри чизикнинг ихтиёрий, масалан  $B$ , нуқтасидан  $P$  текисликка перпендикуляр ( $BB' \perp P$ ) тушириб, унинг берилган  $P$  текисликдаги  $B'$  проекцияси аниқланади. Ҳосил бўлган  $KB'V$  учбурчак текислиги  $P$  га перпендикуляр бўлиб,  $K'B'$  тўғри чизик эса бу текисликларнинг кесишиш чизигидир.  $BKB'$  учбурчакнинг  $K$  учидаги бурчак  $\ell$  тўғри чизик билан  $P$  текислик орасидаги бурчак бўлади. Бу масalani нисбатан содда йўл билан ҳал қилиш ҳам мумкин. Маълумки, учбурчак ички бурчакларнинг йигиндиси  $180^\circ$  га тенг, яъни  $\varphi + \gamma + 90^\circ = 180^\circ$ . 98-шаклдаги  $KB'V$  учбурчак тўғри бурчакли бўлганидан  $\varphi + \gamma = 90^\circ$  бўлиши керак.



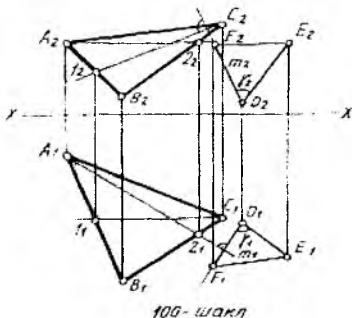


98 - шакл

Бу ердан  $\varphi=90^\circ$ -γ. Демак, φ бурчакни γ бурчак, яъни уни  $90^\circ$  га тўлдирувчи γ бурчак орқали топиш мумкин экан. Бунинг учун  $l$  тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан берилган текисликка перпендикуляр йўналишни топиш кифоя экан. 99-шаклда  $AB(A_1B_1; A_2B_2)$  тўғри чизиқ билан умумий вазиятдаги излари билан берилган  $P(P_H; P_V)$  текислик орасидаги бурчакни  $90^\circ$  га тўлдирувчи бурчакнинг проекциялари кўрсатилган. 100-шаклда эса,  $DE(D_1E_1; D_2E_2)$  тўғри чизиқ билан  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак текислиги орасидаги бурчакнинг проекцияларини топиш келтирилган.



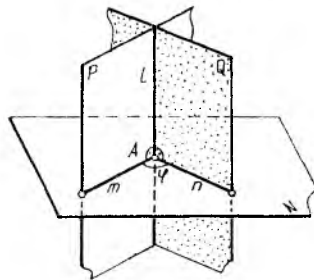
99 - шакл



100 - шакл

### 6.5 § Икки текислик орасидаги бурчакни аниқлаш

Икки текислик орасидаги бурчак, бу текисликларнинг узаро кесишиш чизиғига перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ орасидаги чизиқли бурчак билан улчанади. 101-шаклда P ва Q текисликлар орасидаги бурчакни топиш кўрсатилган. Бу чизиқли φ бурчакни топиш қуйидаги алгоритм бўйича бажарилади.



101 - шакл

1.  $P$  ва  $Q$  текисликларнинг ўзаро кесишиш чизиги  $l$  топилади, яъни  $P \cap Q = l$ ;

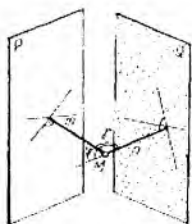
2. Текисликларнинг кесишиш чизиги  $l$  даги ихтиёрий  $A$  нуқтадан  $l$  га перпендикуляр  $N$  текислик ўтказилади.  $A \in l \perp N$ . Бу  $N$  текислик бир вақтда  $P$  ва  $Q$  текисликларга перпендикуляр бўлади, чунки  $l \perp P$  ва  $l \perp Q$ ,  $N \perp l$  демак  $N \perp P$  ва  $N \perp Q$ .

3. Ўтказилган  $N$  текислик билан берилган  $P$  ва  $Q$  текисликларнинг ўзаро кесишиш чизиқлари  $m$  ва  $n$  аниқланади, яъни  $N \cap P = m$ ,  $N \cap Q = n$ .

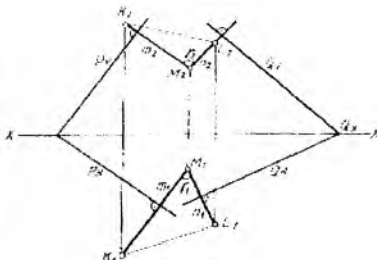
4. Текисликларни кесишиш чизиқлари  $m$  ва  $n$  орасидаги  $\varphi$  бурчак изланган бурчак бўлади. Бу масалани юқоридаги алгоритмда ечиш кўп геометрик (график) яшашларни талаб қилади. Икки текислик орасидаги бурчакни қўйидаги соддалаштирилган усул билан ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун фазода  $P$  ва  $Q$  текисликларга тегишли бўлмаган ихтиёрий  $M$  нуқта танлаб берилган текисликларга  $m$  ва  $n$  перпендикуляр туширамиз ва улар орасидаги бурчакни аниқлаймиз (102-расм).

Маълумки, икки текислик орасидаги бурчак ўткир бурчак билан ўлчанади. Демак  $\varphi = 180^\circ - \gamma$  бўлади.

1-Мисол . Эпюрда (103-шакл) излари билан берилган  $P(P_{II}; P_V)$   $Q(Q_{II}; Q_V)$  текисликлар орасидаги  $\varphi$  бурчак аниқлансин. Бунинг учун ихтиёрий  $M(M_I; M_2)$  нуқтани танлаб, унинг  $M_1$  ва  $M_2$  проекцияларида текисликларнинг горизонтал ва фронтал изларига мос равишда



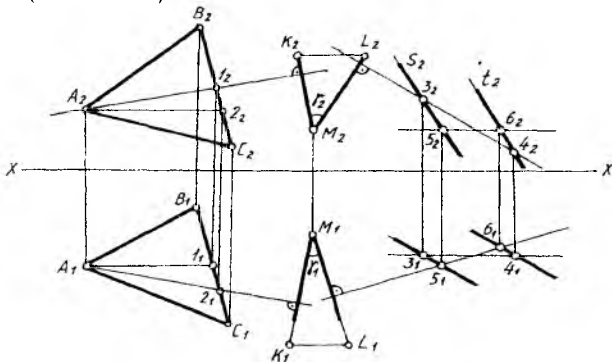
102 шакл



103 шакл

перпендикуляр ўтказамиз ва уларда ихтиёрий  $K(K_1;K_2)$  ва  $L(L_1;L_2)$  нуқталарни танлаймиз, яъни  $M_1K_1 \perp P_H$ ,  $M_2K_2 \perp P_V$  ва  $M_1K_1 \perp Q_H$ ,  $M_2K_2 \perp Q_V$ . Ҳосил бўлган  $KML(K_1M_1L_1;K_2M_2L_2)$  учбурчакнинг  $M(M_1;M_2)$  учидаги  $\gamma$  бурчак,  $\phi$  ни  $180^\circ$  га тўлдирувчи бурчак бўлади. Бу  $\gamma$  бурчакнинг ҳақиқий катталигини аниқлаб,  $\phi$  бурчакни, яъни  $\phi = 180^\circ - \gamma$  топамиз.

3-Мисол.  $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$  ва  $s(s_1;s_2) \parallel t(t_1;t_2)$  тўғри чизиқлар билан берилган текисликлар орасидаги бурчак топилсин (104-шакл).



104-шакл

Ихтиёрий танланган  $M(M_1;M_2)$  нуқтадан берилган текисликларга эпюрда махсус чизиқларига перпендикуляр ўтказамиз, яъни  $M_1K_1 \perp A_1A_2$ ,  $M_2K_2 \perp A_2A_1$  ва  $M_1L_1 \perp S_1S_2$ ,  $M_2L_2 \perp S_2S_1$ . Ҳосил бўлган  $KML(K_1M_1L_1;K_2M_2L_2)$  учбурчакнинг

$M(M_1; M_2)$  учидаги бурчак изланаётган  $\varphi$  бурчакни  $180^\circ$ га тўлдирувчиси бўлади, яъни  $\varphi=180^\circ-\gamma$ .

## **VII боб. ОРТОГОНАЛ ПРОЕКЦИЯЛАРНИ ҚАЙТА ТУЗИШ УСУЛЛАРИ**

Олдинги бобларда кўриб утилганидек геометрик шакллар фазода проекциялар текисликларига нисбатан хусусий ҳолда жойлашган бўлса, уларга тегишли позицион ва метрик муносабатларни текшириш гоаят осонлашади, яъни график операциялар сони камайиб, аниқлик даражаси ошади.

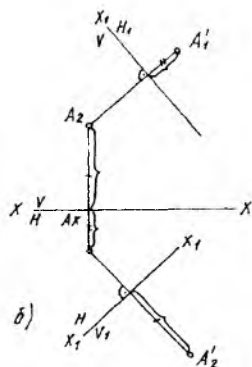
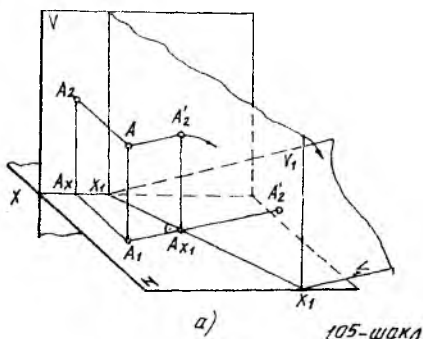
Агар масалаларда берилган геометрик фигуралар фазода проекциялар текисликларига нисбатан умумий ҳолда жойлашган бўлса, уларнинг ечимини аниқлаш анча мураккаблашиб, иш ҳажми ортади. Шунинг учун баъзи ҳолларда умумий ҳолда берилган геометрик шаклларни хусусий ҳолга келиштириш усуллари мавжуд. Булардан проекциялар текисликни алмаштириш ва айлантириш, ёрдамчи проекциялаш усулларида кўпроқ фойдаланилади. Бу усулларни кўриб чиқамиз.

Фазода берилган нуқта, тўғри чизиқ, текислик ёки сирт бирламчи проекциялар текисликларига нисбатан кўзгалмасдан бу геометрик фигураларга нисбатан қулай ҳолатда янги проекциялар текислиги олинади. Янги проекциялаш йўналиши текисликларга перпендикуляр бўлади. Бу усул проекциялар текисликларини алмаштириш усули дейилади. Агар бирламчи проекциялар текисликлари кўзгалмай, балки фазодаги геометрик фигуралар бирор ўқ атрофида ҳаракатланиб проекциялар текисликларидан бирортасига қулай вазиятга келтирилса, бу айлантириш усули дейилади. Ёрдамчи проекциялаш усулида эса, проекциялар текислиги ҳам, проекциялаш йўналиши ҳам ўзгаради.

### **7.1 § Проекциялар текисликларини алмаштириш усули Проекция текисликларидан биттасини алмаштириш**

Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, бунда геометрик фигура ўз ҳолатини ўзгартирмай қолиб, унга нисбатан проекциялар текисликларидан бири ўз ҳолатини мақсадга мувофиқ ўзгартиради. Биринчи чоракда  $H, V$  текисликлар

системасида жойлашган  $A(A_1; A_2)$  нуқта мисолида проекциялар текисликларини алмашгириш жараёнини кўриб чиқамиз (105-шакл, а).



Горизонтал проекциялар текислиги  $H$  га перпендикуляр қилиб, янги вертикал  $V_1$  проекциялар текислигини танлаймиз ва унга  $A$  нуқтани ортогонал проекциялаб,  $A'_2$  проекцияни ҳосил қиламиз.  $A$  нуқтанинг янги вертикал проекциялар текислиги  $V_1$  даги фронтал проекцияси  $A'_2$  бўлади. Горизонтал  $A_1$  проекцияси эса аслича қолади, чунки биз  $H, V$  текисликлар системасидан янги  $H, V_1$  системага ўтиб, янги проекциялар ўқи  $X_1X_1$  га эга бўламиз. Энди  $V_1$  текисликни  $X_1X_1$  проекция ўқи атрофида айлантириб  $H$  билан устма-уст қўямиз. Натижада  $A$  нуқтанинг янги эпюрига (105-шакл, б) эга бўламиз.

Эпюлда нуқтанинг горизонтал проекцияси  $A_1$  га нисбатан янги проекциялар ўқи  $X_1X_1$  ни танлаймиз ва  $A_1$  дан унга перпендикуляр боғловчи чизиқни ўтказамиз. 105-шакл, а) дан  $AA_1 = A_2A_X = A'_2A_{X_1}$  эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун 105-шакл, б) да боғловчи чизиққа  $A_{X_1}$  нуқтадан  $A_2A_X$  ни ўлчаб қўйиб эпюлда  $A'_2$  ни ҳосил қиламиз. Демак,  $A$  нуқтанинг янги фронтал проекциясини ҳосил қилиш учун қуйидаги босқичлар бажарилади.

1. Янги проекциялар ўқи  $X_1X_1$  танланади.
2. Нуқтанинг горизонтал проекцияси  $A_1$  дан  $X_1X_1$  га перпендикуляр боғловчи чизиқ ўтказилади ва унинг ўқ билан кесишган нуқтаси  $A_{X_1}$  белгиланади.
3. А нуқтанинг фронтал проекцияси  $A_2$  нинг  $XX$  ўқидан ( $H$  дан баландлиги) узоқлиги  $A_XA_2$  масофани ўлчаб олинади ва у  $A_1$  дан ўтган боғловчи чизиққа  $A_{X_1}$  нуқтадан бошлаб ўлчаб қўйилади.

Агар горизонтал проекциялар текислиги  $H$  нинг ҳолати ўзгартирилиб, у  $H_1$  га алмаштирилса, нуқтанинг янги горизонтал проекцияси қуйидагича ясалади (105-шакл, б)

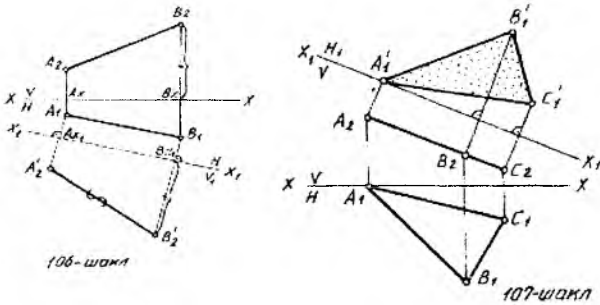
1. Нуқтанинг фронтал проекцияси  $A_2$  га нисбатан  $X_2X_2$  ўқи танланади.
2.  $A_2$  нуқтадан унга перпендикуляр боғловчи чизиқ ўтказиб  $A_{X_2}$  ни белгилаймиз.
3.  $A_XA_1$ ни ( $A$  нуқтанинг  $V$  текисликдан узоқлиги) ўлчаб олиб боғловчи чизиққа, унинг  $A_{X_2}$  нуқтадан бошлаб ўлчаб қўйиб янги горизонтал проекция  $A'_1$  ни ҳосил қиламиз. Демак, бирламчи  $H, V$  система янги  $H_1, V$  системага алмашади.

Қуйида проекциялар текисликларидан биттасини алмаштириш усулида ечиладиган баъзи позицион ва метрик мисолларни кўрамиз.

1-мисол. Умумий вазиятда берилган  $AB(A_1B_1; A_2B_2)$  тўғри чизиқ кесмасининг ҳақиқий катталиги аниқлансин. Бунинг учун янги прокциялар текислиги  $V_1$  ни  $AB$  кесмага параллел ҳолда танлаш кифоя. 106-шаклда  $V_1$  текисликнинг  $H$  билан кесишиш чизиги, яъни  $X_1X_1$  проекциялар ўқи,  $AB$  кесманинг горизонтал проекцияси  $A_1B_1$  га параллел ҳолда олинган ( $A_1B_1 \parallel X_1X_1$ ) ва шу текисликдаги  $A'_2$  ва  $B'_2$  прекциялар топилиб бирлаштирилган.  $AB$  кесма  $V_1$  га параллел бўлгани учун  $A'_2B'_2$  ҳақиқий катталиги бўлади.

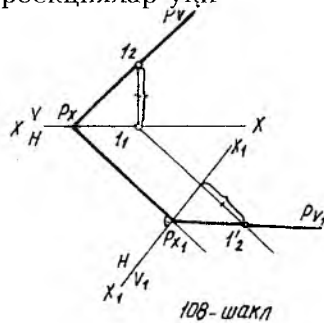
2-мисол. Фронтал проекциялар текслиги  $V$  га нисбатан перпендикуляр жойлашган  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак юзасининг ҳақиқий катталиги аниқлансин (107-шакл). Бунинг учун янги проекциялар текислигини  $ABC$  учбурчак текислигига параллел танлаш керак. Демак, горизонтал проекциялар текислигини алмаштириш керак. Бирламчи  $H, V$  системадан  $H_1V$  системага ўтамиз.  $H_1$  текислик  $ABC$  га

параллел ( $H_1 \parallel ABC$ ). Янги проекциялар  $X_1X_1$  ни  $A_2B_2C_2$  га нисбатан параллел ( $X_1X_1 \parallel A_2B_2C_2$ ) ҳолда танлаб,  $H_1$  текисликда  $ABC$  учбурчакнинг янги горизонтал  $A'_1B'_1C'_1$  проекциясини ҳосил қиламиз.  $ABC \parallel H_1$  бўлгани учун  $A'_1B'_1C'_1$  учбурчак берилган  $ABC$  учбурчак юзасининг ҳақиқий катталиги бўлади.



3-мисол. Умумий вазиятда излари билан берилган  $P$  ( $P_{H_1}$ ;  $P_{V_1}$ ) текислик  $V$  га нисбатан перпендикуляр ҳолатга келтирилсин (108-шакл).

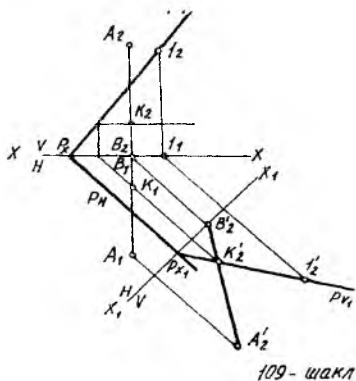
Масаланинг берилиш шартидан маълумки,  $P$  текисликнинг янги олатидаги горизонтал  $P_{H_1}$  изи янги проекциялар ўқи  $X_1X_1$ га перпендикуляр бўлиши керак. Шунинг учун янги проекциялар ўқи



$X_1X_1$  ни текисликнинг горизонтал  $P_{H_1}$  изига перпендикуляр ҳолда оламиз. Бирламчи  $H, V$  система янги  $H, V_1$  системага алмашади.  $P$  текисликнинг янги изини топиш учун унинг фронтал  $P_{V_1}$  изида  $1(1_1; 1_2)$  нуқта танлаб унинг

янги вертикал  $V_1$  текисликдаги  $1'_2$  фронтал проекциясини топамиз.  $P_{H1}$  билан  $x_1x_1$  ўқининг кесишиш нуқтаси  $P_{X1}$  бўлади. Топилган  $1'_2$  ни  $P_{X1}$  билан бирлаштириб текисликнинг  $P_{V1}$  изини ҳосил қиламиз.

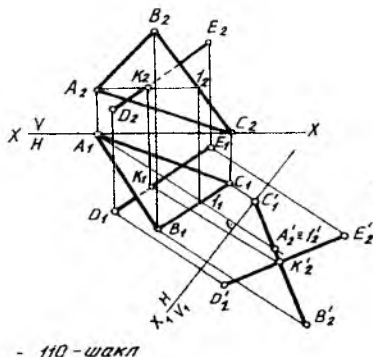
4-мисол. Умумий вазиятда излари билан берилган  $P(P_H;P_V)$  текислик билан профил тўғри чизиқ  $AB(A_1B_1;A_2B_2)$  нинг узаро кесишиш нуқтаси топилсин (109-шакл). 3-мисолдаги усулдан фойдаланиб  $P$  текисликни фронтал проекцияловчи ҳолатга келтириб, унинг янги  $V_1$  текисликдаги  $P_{V1}$  изини топамиз. Энди шу янги  $H, V_1$  системада  $AB$  тўғри чизиқ кесмасининг проекцияларини яшаш керак.



Кесманинг  $B(B_1;B_2)$  учи  $XX$  ўқида ётганлиги сабабли унинг янги  $B'_2$  проекцияси ҳам  $X_1X_1$  ўққа тегишли бўлади.  $A$  нуқтанинг  $A'_2$  проекциясини маълум усулдан фойдаланиб топилади.  $P$  текислик янги ҳолатда проекцияловчи бўлганлиги сабабли  $A'_2 B'_2$  кесманинг  $P_{V1}$  из билан кесишган  $K'_2$  нуқтаси изланган нуқтанинг  $H, V_1$  системадаги проекцияси бўлади. Топилган  $K'_2$  нуқтани тескари йўналишда проекциялаб бирламчи  $H, V$  системада унинг  $K_1$  ва  $K_2$  проекциялари аниқланади. Топилган  $K(K_1;K_2)$  нуқта изланган нуқтанинг проекциялари бўлади. Худди шу усул билан  $DE(D_1E_1;D_2E_2)$  тўғри чизиқнинг  $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$  учбурчак текислиги билан кесишиш нуқтасининг проекцияларини яшаш мумкин. Бунда берилган текисликни проекцияловчи текислик ҳолатига келтириш учун янги



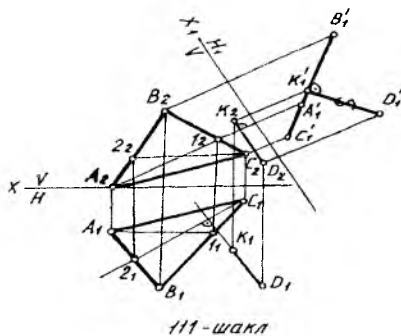
проекция текислиги  $V_1$  берилган текисликнинг горизонталига перпендикуляр ҳолда олинади (110-шакл).



Бунинг учун  $X_1X_1$  проекциялар ўқи текислик горизонталининг горизонтал проекцияси  $A_1I_1$  га перпендикуляр қилиб олинади. Берилган геометрик фигураларнинг янги проекциялар текислиги  $V_1$  даги проекциялари ясалади.  $ABC$  учбурчакнинг  $A'_2 B'_2 C'_2$  проекцияси тўғри чизиқ кўринишда бўлиб, тўғри чизиқ кесмасининг  $D'_2 E'_2$  проекцияси билан  $K'_2$  нуқтада (бу изланган нуқтанинг проекцияси) кесишиб изланган нуқтанинг  $H, V_1$  системасидаги проекциясини ҳосил қилади. Тескари проекциялаш йўналишидан фойдаланиб нуқтанинг бирламчи  $HV$  системадаги проекциялари  $K_1$  ва  $K_2$  топилади.  $ABC$  учбурчакни шаффоф эмас деб,  $DE$  кесманинг кўринар-кўринмас қисмлари аниқланади.

5-мисол. Фазодаги  $D(D_1; D_2)$  нуқтадан умумий вазиятда берилган  $ABC (A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак текислигигача бўлган энг қисқа масофанинг ҳақиқий катталиги топилсин (111-шакл). Бу масалани ечишда ҳам умумий вазиятдаги текисликларни проекцияловчи ҳолатга келтириш керак. Бунинг учун янги  $H_1$  проекциялар текислигини текисликнинг фронтали  $A1 (A_1I_1; A_2I_2)$  га перпендикуляр ҳолатда олинади. Шаклда янги проекциялар ўқи  $X_1X_1$  фронталининг фронтал проекцияси  $A_2I_2$  га перпендикуляр, яъни  $X_1X_1 \perp A_2I_2$  олинган. Янги  $H_1$  текисликка  $ABC$  учбурчак  $C'_1A'_1B'_1$  кўринишдаги кесма бўлиб,  $D$  нуқта эса  $D'_1$

проекцияга эга бўлади.  $D'_1$  дан  $C'_1A'_1B'_1$  га перпендикуляр ўтказиб кесишиш нуқтасини  $K'_1$  билан белгилаймиз.  $D'_1K'_1$  кесма энг қисқа масофанинг ҳақиқий катталиги бўлади. Шу сабабли унинг  $V$  текислиқдаги  $D_2K_2$  проекцияси  $X_1X_1$  ўқиға параллел бўлиб,  $A_2I_2$  га эса перпендикуляр ҳолда йўналади. Проекцион мослиқда  $K_1$  ни топилади.



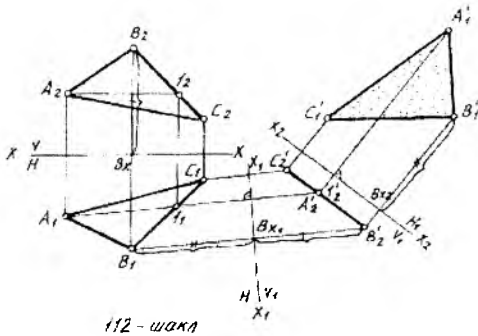
## 7.2 § Проекциялар текислиқларини икки марта алмаштириш

Баъзи масалаларни ечишда проекциялар текислиқларидан бирини алмаштириш билан керакли натижага эришиб бўлмайди. Бундай вазиятда проекциялар текислигини кетма-кет икки марта алмаштиришга тўғри келади.

1-мисол. Умумий вазиятда берилган  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  учбурчак юзасининг ҳақиқий катталиги топилин (112-шакл). Бу масалани ечиш икки босқичдан иборат бўлиб, улар қуйидагилардир:

1.  $ABC$  учбурчак текислиги янги системада проекцияловчи (яъни бирор текислиққа перпендикуляр) ҳолатга келтирилади;

2. Иккинчи алмаштиришда янги проекциялар текислиги учбурчак текислигига параллел ҳолда олинади. Шаклда янги  $V_1$  текислиқ махсус чизиқ  $A1(A_1I_1; A_2I_2)$  га перпендикуляр олинган бўлиб,  $X_1X_1$  ўқ бу махсус чизиққа перпендикулярдир.



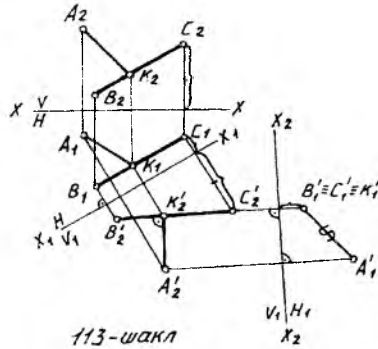
112-шакл

Танланган  $V_1$  текисликка  $ABC$  учбурчак  $A'_2B'_2C'_2$  тўғри чизиқ кесмаси кўринишда проекцияланади.

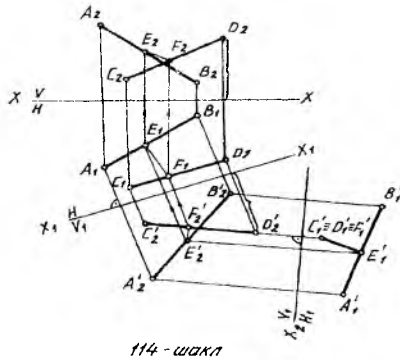
Энди  $H, V_1$  системадан  $V_1, H_1$  системага ўтамиз. Янги  $H_1$  проекциялар текислиги  $ABC$  га параллел олинади, у ҳолда  $X_2X_2$  проекциялар ўқи  $A'_2B'_2C'_2$  га параллел йўналади. Проекциялаш йўналиши  $H_1$  га нисбатан перпендикуляр бўлади. В нуқтани  $H_1$  текислигида топишни кўриб чиқамиз.  $B'_2$  нуқтадан  $X_2X_2$  га перпендикуляр боғловчи чизиқ ўтказиб, унга  $V_1B_{X_1}$  масофани  $B_{X_2}$  нуқтадан қўйиб,  $B'_1$  нуқтани белгилаймиз. Шу усул билан учбурчакнинг қолган нуқталари  $A'_1$  ва  $C'_1$  топилади. Ҳосил бўлган  $A'_1B'_1C'_1$  учбурчак берилган учбурчак юзасининг ҳақиқий катталиги бўлади.

2-мисол. Фазодаги  $A(A_1;A_2)$  нуқтадан  $BC(B_1C_1;B_2C_2)$  тўғри чизиқгача бўлган энг қисқа масофа аниқлансин (113-шакл). Янги проекциялар текислигига  $BC$  тўғри чизиқ кесмаси нуқта кўринишда проекцияланиши керак, демак янги проекциялар текислиги  $BC$  га перпендикуляр ҳолда бўлади. Бу масала ҳам  $H, V$  системадаги проекциялар текислигини икки марта алмаштиришни тақозо қилади. Биринчи алмаштиришда  $V_1$  текислик  $BC$  га параллел олинади, яъни  $V_1 \parallel B_1C_1$ , демак,  $X_1X_1 \parallel B_1C_1$  бўлади,  $V_1$  текисликда  $BC$  ни ҳақиқий катталиги  $B'_2C'_2$  га эга бўламиз. Иккинчи марта алмаштиришда  $H_1$  ни жумладан  $X_2X_2$  ни ҳам  $B'_2C'_2$  га перпендикуляр олиб унда  $B'_1=C'_1$  нуқтага эга бўламиз. Ҳар икки алмаштириш жараёнида  $A(A_1;A_2)$  нуқта ҳам алмаштириб борилади.  $H_1$  даги  $A'_1$  ни  $B'_1=C'_1$  билан бирлаштириб нуқтадан тўғри чизиқгача бўлган энг қисқа масофанинг ҳақиқий катталигига эга бўламиз.  $V_1$

текисликдаги  $A'_2$  нуқтадан  $X_2X_2$  га параллел ўтказиб  $B'_2C'_2$  да  $K'_2$  ни аниқлаймиз.  $K$  нуқтанинг бирламчи проекцияларини тескари проекциялаш йўли билан аниқланади.



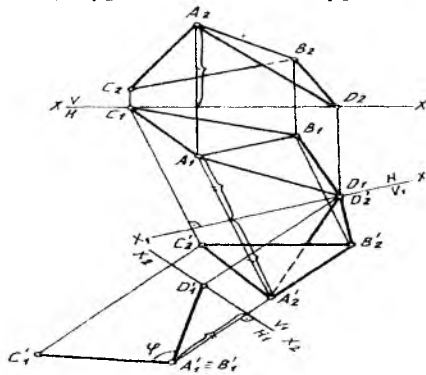
3-мисол.  $AB(A_1B_1; A_2B_2)$  ва  $CD(C_1D_1; C_2D_2)$  чалмашувчи икки тўғри чизиқ орасидаги энг қисқа масофа аниқлансин (114-шакл). Бунинг учун тўғри чизиқлардан бири (масалан  $CD$ ) ни бирор текисликка нисбатан перпендикуляр ҳолга келтирамиз. Янги  $V_1$  текислик  $CD$  га параллел олинади ( $X_1X_1 \parallel C_1D_1$ ), ва  $AB$  ҳамда  $CD$  кесмаларининг янги  $V_1$  текисликдаги  $A'_2B'_2$  ва  $C'_2D'_2$  проекциялари ҳосил қилинади.



Иккинчи алмаштиришдаги  $H_1$  текислик  $C'_2D'_2$  га перпендикуляр танланиб ( $X_2X_2 \perp C'_2D'_2$ ),  $H_1$  текисликдаги  $A'_1B'_1$  ва  $C'_1D'_1$  ни топилади.  $CD$  тўғри чизиқ кесмасининг  $H_1$  текисликдаги  $C'_1D'_1$  нуқта кўринишдаги проекцияси орқали

$A_1V_1$  га перпендикуляр ўтказиб изланган масофа топилади.  $A_1V_1$  даги  $E_1$  нуқта ва  $C_1D_1$  даги  $F_1$  нуқтанинг бирламчи проекциялари тескари йўналишда проекцияланиб топилади.

4-мисол.  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  ва  $ABD(A_1B_1D_1; A_2B_2D_2)$  учбурчак текисликлари орасидаги икки ёқли бурчакни ўлчовчи чизиқли бурчакнинг ҳақиқий катталиги аниқлансин (115-шакл). Бу масалани ечиш учун янги проекциялар текислиги хар иккала учбурчак текисликларига бир вақтда перпендикуляр бўлиши керак, демак уларнинг ўзаро кесишиш чизиғи (яъни  $AB$ ) га перпендикуляр бўлиши керак. Лекин, учбурчакларнинг умумий томони  $AB$  умумий вазиятда бўлгани учун  $H, V$  системани аввал  $H, V_1$  системага алмаштириб, яъни  $V_1 \parallel AB, X_1X_2 \parallel A_1B_1$ , сўнгра бу  $H, V_1$  системани  $H_1 \perp AB, X_2X_2 \perp A_2B_2$  қилиб кетма-кет алмаштирамиз. Натийжада  $ABC$  ва  $ABD$  учбурчаклар  $H_1$  проекциялар текислигига перпендикуляр бўлиб қолади ва кесишувчи кесмалар кўринишда проекцияланади. Бу кесмалар орасидаги  $\phi$  бурчак изланган бурчак бўлади.



115- шакл

### 7.3 § Айлантириш усули

Эпюрни қайта тузиш усулларидан бири айлантириш усулидир. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, бунда бирламчи  $H, V$  текисликлар системаси ўз ҳолатини ўзгартирмай, балки текширилайётган образ бирор ўқ агрофида қулай-махсус ҳолга келгунга қадар айлантирилади.

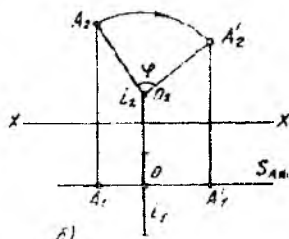
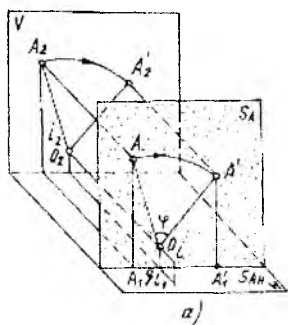
Бу ўқ проекциялар текисликларидан бирортасига перпендикуляр ёки параллел танлаб олинади.

## Проекциялар текислигига перпендикуляр ўқ атрофида айлантириш

### 7.3.1. Нуқтани айлантириш

Фараз қилайлик  $A(A_1;A_2)$  нуқтани (116-шакл, а) фронтал проекциялар текислиги  $V$  га перпендикуляр  $l(i_1;i_2)$  ўқ атрофида соат стрелкаси йўналишида  $\varphi$  бурчакка айлантириш талаб қилинсин. Айланма ҳаракат айланиш ўқи га нисбатан перпендикуляр текисликда содир бўлади.

Масалани ечиш учун айлантириш усулининг элементларидан фойдаланиб қуйидаги босқичларнинг бажарамиз:



116-шакл

1. Кузатиш нуқтаси  $A(A_1;A_2)$  танланади;
2. Масаланинг шартига қараб  $l(i_1;i_2)$  айлантириш ўқи ўтказилади, 116-шакл, б)да  $l \perp V$ ;
3. Кузатиш нуқтаси  $A(A_1;A_2)$ дан айлантириш ўқ  $l(i_1;i_2)$  га перпендикуляр қилиб ҳаракат текислиги  $S$  ( $S_A$ ) ўтказилади;
4. Ҳаракат текислиги  $S_A$  билан айлантириш ўқи  $l$ нинг кесишган  $O(O_1 ; O_2)$  , аниқланади. Бу нуқта айлантириш маркази бўлади;
5. Кузатиш нуқтаси  $A(A_1;A_2)$  дан айлантириш маркази  $O(O_1 ; O_2)$  гача бўлган  $AO$  масофа айлантириш радиуси дейилади;

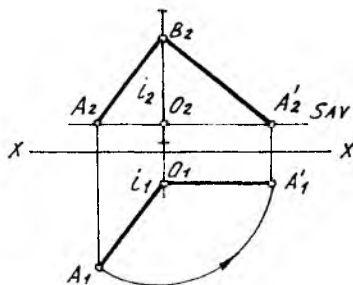
6. Айлангириш радиуси  $AO$  нинг ҳақиқий катталиги  $O_2A_2$  топилади. 116-шакл, б)да  $OA \parallel V$  бўлгани учун  $O_2A_2$  ҳақиқий катталигидир;

7. Айлангириш радиусининг ҳақиқий катталиги  $O_2A_2$  дан фойдаланиб  $A$  нуқтани  $O_2$  марказ, яъни  $i_2$  ўқ атрофида  $\phi$  бурчакка бурилади.

Демак,  $A'(A'_1; A'_2)$  нуқта  $A$  нуқтанинг янги ҳолатидир.

### 7.3.2. Тўғри чизиқни айлангириш

1-мисол. Умумий вазиятда берилган  $AB(A_1B_1; A_2B_2)$  тўғри чизиқ кесмасининг ҳақиқий катталиги топилсин (117-шакл). Бунинг учун кесманинг  $B(B_1; B_2)$  учидан  $H$  текисликка перпендикуляр қилиб  $I(i_1; i_2)$  айлангириш ўқи танланади. Кузатиш нуқтаси сифатида кесманинг  $A(A_1; A_2)$  учи олинади, чунки  $B(B_1; B_2)$  нуқта айлангириш ўқиға тегишли бўлгани учун у ҳаракат давомида ўз ўрнини ўзгартирмайди.  $A$  нуқтадан  $I$  айлангириш ўқиға перпендикуляр қилиб  $S$  ҳаракат текислиги ўтказилади (шаклда  $S_{AH} \perp i_2$ ). Айлангириш ўқи  $I(i_1; i_2)$  билан  $S_{AH}$  ҳаракат текислигининг кесишган  $O(O_1; O_2)$  нуқтаси айлангириш маркази бўлади. Ҳосил бўлган  $O(O_1; O_2)$  нуқтадан кузатиш нуқтаси  $A(A_1; A_2)$  гача билан масофа айлангириш радиуси бўлади. Ҳаракат текислиги  $H$  га параллел бўлгани учун  $A_1O_1$  айлангириш радиусининг

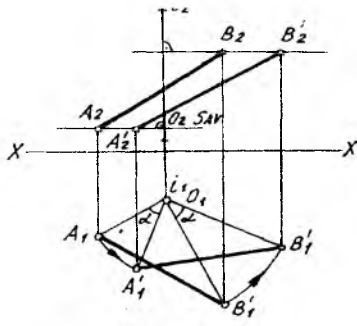


117-шакл

ҳақиқий катталиги бўлади. Агар  $AB$  кесмани  $I$  ўқ атрофида айлангириб  $V$  га параллел ҳолатга келтирсак, у бу текисликка ўзининг ҳақиқий катталигида проекцияланиб қолади. Демак,  $AB$  кесманинг янги ҳолатининг горизонтал

проекцияси  $XH$  ўқига параллел бўлиши керак. Айлангириш марказининг  $O_1$  горизонтал проекциясини марказ қилиб  $O_1A_1$  проекцияни  $O_1A'_1$  ҳолатгача бурамиз ва боғловчи чизиқ ёрдамида  $A'_2$  ни топамиз. Натижада  $AB$  нинг ҳақиқий катталиги,  $A'_2B'_2$  га эга бўламиз.

2-мисол. Умумий вазиятда берилган  $AB$  ( $A_1B_1$ ;  $A_2B_2$ ) тўғри чизиқ кесмаси берилган вертикал ўқ атрофида  $\alpha$  бурчакка бурилсин (118- шакл).



118 - шакл

Кузатиш нуқтаси  $A$  ва  $B$  нуқталар бўлса, ҳаракат текисликлари  $S_A$  ва  $S_B$  бўлсин, яъни  $S_{AV} \perp l_2$  ва  $S_{BV} \perp l_2$  бўлади.  $A$  нуқта учун  $O$  ( $O_1, O_2$ ) нуқта айлангириш маркази ва  $AO$  кесма эса, айлангириш радиуси бўлади. Унинг ҳақиқий катталиги-узунлиги  $A_1O_1$  кесмага тенг бўлади.  $A$  нуқта  $i$  ўқ атрофида  $\alpha$  бурчакка қуйидагича бурилади;  $A_1O_1$  дан бошлаб соат стрелкаси йўналишига тескари берилган бурчак ясалади;  $A_1O_1 \hat{=} \alpha$ ; Уни соат стрелкаси йўналиши бўйича ҳам яшаш мумкин.  $O_1$  марказдан  $A_1O_1$  радиусда айлана чизиб уни  $l_1$  билан кесишув нуқтаси аниқланади. Яъни  $A$  нуқтани берилган  $\alpha$  бурчакка бурилган янги вазияти аниқланади. Уни  $A'_1$  белгилаб,  $S_{AV}$  да унинг фронтал  $A'_2$  проекцияси аниқланади.

Айнан юқорида келтирилган график амалларни  $B$  нуқта учун ҳам такрорлаб унинг  $\alpha$  бурчакка берилган янги  $B'(B'_1, B'_2)$  вазияти топилади.  $A'$  ва  $B'$  нуқталарини



бирлаштириб, бурилган кесманинг янги,  $\alpha$  бурчакка бурилган вазияти ясалади.

Айлантириш ўқи  $I(i_1; i_2)$   $H$  текисликка перпендикуляр ҳолда берилган. Кузатиш нуқтаси  $A(A_1; A_2)$ , ҳаракат текислиги  $S_{\Delta} \perp I$ , чизмада

$S_{\Delta V} \perp i_2$  (бу текислик  $H$  га параллел). Айлантириш маркази  $O(O_1; O_2)$  нинг горизонтал проекцияси  $O_1$  дан, соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда  $\alpha$  бурчак остида тўғри чизиқ ўтказамиз ва айлантириш радиусининг ҳақиқий катталиги  $O_1 A_1$  да  $A_1 A'_1$  ёйни чизиб  $A'_1$  нуқтани, яъни  $A$  нуқтанинг янги ҳолатининг горизонтал проекциясини топамиз ва  $A'_2$  ни белгилаймиз. Шу усул билан  $B$  нуқтанинг янги ҳолати  $B'(B'_1; B'_2)$  ни топамиз. Натижада  $A'B'(A'_1; B'_1; A'_2; B'_2)$  берилган кесманинг янги,  $\alpha$  бурчакка бурилган ҳолати бўлади.

### 7.3.3. Текисликни айлантириш

Излари билан берилган умумий вазиятдаги  $P(P_{11}; P_V)$  текислик фронтал проекцияловчи ҳолатга келгунча айлантирилсин (119-шакл). Бунинг учун айлантириш ўқи  $I(i_1; i_2)$  ни фронтал проекциялар текислиги  $V$  да, горизонтал проекциялар текислиги  $H$  га перпендикуляр ҳолда танлаймиз ( $I \perp V, I \perp H$ ).

Маълумки, бу ҳолда айлантириш ўқининг горизонтал  $i_1$  проекцияси  $XX$  ўқида бўлади ва бу  $i_1$  нуқтадан берилган текисликнинг  $P_H$  горизонтал изига перпендикуляр ўтказиб уларнинг кесишиш нуқтаси  $E_1$  топилади, демак,  $i_1 E_1 \perp P_H$ .  $O_1 E_1$  кесма айлантириш радиусининг ҳақиқий катталиги бўлади.  $O_1 E_1$  кесмани айлантириб  $XX$  ўқига жойлаб  $E'_1$  нуқтани топамиз.  $O_1 E_1 \perp P_{11}$  бўлганлигидан текисликнинг янги ҳолатидаги горизонтал  $P'_{11}$  изи ҳам  $O_1 E'_1$  га перпендикуляр яъни  $O_1 E_1 \perp P'_{11}$ т бўлади.  $P'$  текисликнинг фронтал изини топиш учун  $P'_X$  нуқтани айлантириш ўқидаги  $1$  нуқтанинг фронтал  $I_2$  проекцияси билан бирлаштирамиз, бу  $P'$  нинг фронтал  $P'$  изи бўлади. Шундай қилиб  $P$  текислик проекцияловчи  $P'$  вазиятта келиб қолади.



ҳолатидаги  $V'(V'_1;V'_2)$  учидан  $V$  га перпендикуляр ўтказиб  $H$  га параллел келгунча ҳолга қадар айлантирилади, яъни  $V' \perp H$ ,  $i'_1 \perp XX$ ,  $(A''_2B''_2C''_2) \parallel XX$ . Ҳосил бўлган  $A''B''C''(A''_1B''_1C''_1;A''_2B''_2C''_2)$  учбурчакнинг горизонтал  $A''B''C''$  проекцияси берилган  $ABC$  учбурчак юзасининг ҳақиқий катталиги бўлади.

Юқоридаги масалани проекциялар текисликларидан биттасига параллел бўлган ўқ атрофида айлантириш йўли билан осонгина ечиш мумкин.

#### 7.4 § Проекциялар текисликларидан биттасига параллел бўлган ўқ атрофида айлантириш

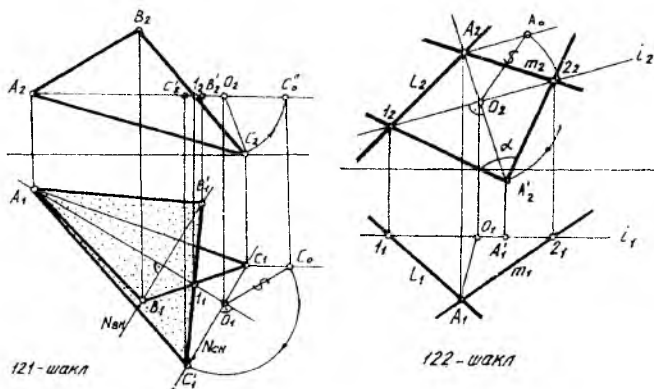
1- Мисол. Умумий вазиятдаги  $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$  учбурчак юзасининг ҳақиқий катталиги топилсин.

Бу масалани ечиш учун айлантириш ўқи  $ABC$  учбурчак текислигида  $H$  га параллел танглаб олинган (121-шакл). Берилган  $ABC$  учбурчакни танланган ўқ атрофида айлантириб  $H$  га параллел ҳолга келтиришимиз керак. Айлантириш ўқи сифатида  $ABC$  учбурчакнинг  $A$  ( $A_1;A_2$ ) учидан ўтувчи  $A1$  горизонтали танланган.

Кузатиш нуқта сифатида  $C$  ( $C_1; C_2$ ) ни танлаб ундан айлантириш ўқи  $A_1I_1$  га перпендикуляр бўлган  $N_C$  ҳаракат текислигининг горизонтал изи  $N_{CH}$  ни ўтказамиз. Бу текислик айлантириш ўқини  $O$  ( $0_1;0_2$ ) нуқтада кесиб айлантириш марказини беради.  $OC$  ( $0_1C_1; 0_2C_2$ ) масофа айлантириш радиуси бўлиб,  $O_1C_0$  кесма унинг ҳақиқий катталиги бўлади.  $O_1$  марказ орқали  $O_1C_0$  радиусли ёй чизиб,  $N_{CH}$  текислик изида  $C'_1$  нуқта топилади. Демак,  $C(C_1;C_2)$  нуқта берилган  $C(C'_1;C'_2)$  нуқтанинг янги ҳолатидир. Энди  $B$  ( $B_1;B_2$ ) нуқтадан  $N_B$  (чизмада  $N_{BH}$ ) ҳаракат текислигини ўтказамиз. Айлантириш ўқига тегишли  $1(1_1;1_2)$  нуқта ҳаракат давомида ўз ҳолатини ўзгартирмаслигини билган ҳолда топилган  $C'(C'_1;C'_2)$  нуқтани (чизмада  $C'_1$ )  $1_1$  нуқта билан бирлантириб,  $N_{BH}$  да  $B'_1$  нуқта топилади. Топилган  $C'(C'_1;C'_2)$  ва  $V'(V'_1;V'_2)$  нуқталарнинг фронтал проекциялари айлантириш ўқининг фронтал проекцияси билан қўшилиб

қолади. Демак,  $A_1B_1C_1$  учбурчак берилган учбурчакнинг ҳақиқий катталигидир бўлади.

2-Мисол. Ҳазор кесишувчи  $\ell(\ell_1; \ell_2)$  ва  $m(m_1; m_2)$  тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг ҳақиқий катталиги топилин. Бунинг учун фронтал проекциялар текислигига параллел бўлган  $l(l_1; l_2)$  тўғри чизиқ айлангириш ўқи сифатида қабул қилинган (122-шакл). Берилган  $\ell$  ва  $m$  тўғри чизиқлар айлангириш ўқи билан мос равишда  $1(1_1; 1_2)$  ва  $2(2_1; 2_2)$  нуқталарда кесишади. Бу нуқталар



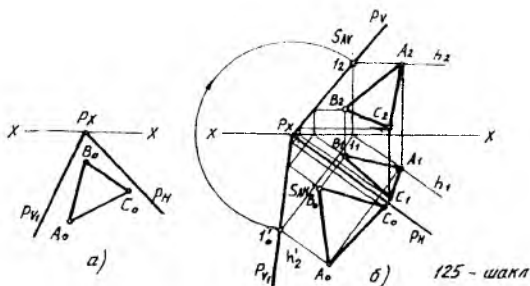
қўзғалмас нуқталардир.  $A(A_1; A_2)$  нуқтанинг янги ҳолати, унинг ҳаракат текислигида,  $O_1$  дан айлангириш радиусини ҳақиқий катталигини ўлчаб қўйиб,  $A'(A'_1; A'_2)$  ни толамиз.  $1A'2(1A'_1; 2_1; 1_2A'_2; 2_2)$  учбурчакнинг  $A'$  учидagi  $\alpha$  бурчак изланаётган бурчак бўлади.

### 7.5 § Текисликни унинг изларини бири атрофида айлангириш

Агар айлангириш ўқи сифатида текисликнинг бирор изи олинса у ҳолда айлангириш ўқи проекциялар текисликларига тегишли бўлади ва бу текислик қайси проекция текислигида айлангириш ўқи танланса шу текислик билан жипслаштирилади. Агар айлангириш ўқи текисликнинг горизонтал изи бўлса, у  $H$  текислик билан, агар фронтал изи олинса, у  $V$  текислик билан жипслаштирилади.



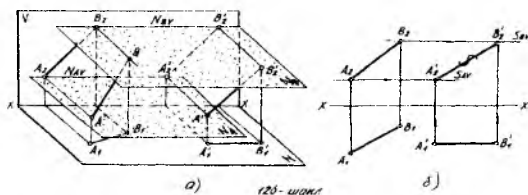




### 7.6 § Текис параллел кўчирниш усули

Бу усулда берилган геометрик образнинг (нуқта, тўғри чизиқ, текислик ва ҳ.к.) ҳарбир нуқтаси проекциялар текислигига нисбатан параллел бўлган горизонтал ёки фронтал текисликларда ҳаракатлантиради.

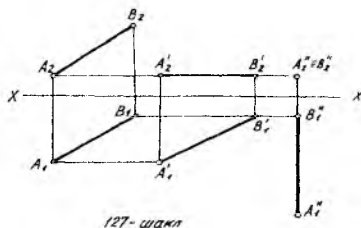
1-мисол. 126-шакл а) ва б) да берилган  $AB$  ( $A_1B_1; A_2B_2$ ) тўғри чизиқ кесмасининг ҳақиқий катталигини топилисин. Бунда кесманинг  $A$  ( $A_1; A_2$ ) учи  $H$  га параллел  $N_A$  текисликда,  $B$  ( $B_1; B_2$ ) учи эса  $N_B$  текисликда ҳаракатланади. Бу текисликлардаги ҳаракат натижасида  $AB$  кесма фронтал проекциялар текислиги  $V$  га параллел ҳолга келтирилади. 126-шакл, б) даги



эпюрда ихтиёрий  $A'_1$  нуқтани белгилаб, ундан горизонтал чизиқ ўтказиб  $A_1B_1$  проекцияни ўлчаб  $A'_1B'_1 = A_1B_1$  қўйилади ва  $B'_1$  нуқта ҳосил қилинади. яъни  $A'_1B'_1 = A_1B_1$ .  $A$  нуқтанинг фронтал проекцияси  $A_2$  орқалиқали  $S_A$  текисликнинг  $S_{AV}$  изи ўтади. Прекцион боғланишда  $B'$  нуқтанинг  $B'_2$  фронтал проекцияси топилади. Ҳосил бўлган  $A'_2B'_2$  кесма  $AB$  кесмани ҳақиқий катталиги бўлиб,  $\alpha$  бурчак эса бу кесманинг  $H$  текислик билан ҳосил қилган бурчаги бўлади.

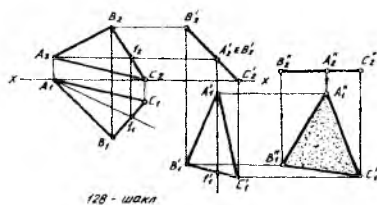
2-мисол. Умумий вазиятда берилган  $AB(A_1V_1; A_2V_2)$  тўғри чизиқ кесмаси фронтал проекциялар текислиги  $V$  га перпендикуляр ҳолатга келтирилсин (127-шакал).

Ихтиёрий танланган  $A'_2$  нуқтадан ўтказилган горизонтал чизиққа кесманинг фронтал проекцияси  $A_2V_2$  ни ўлчаб қўямиз: ( $A'_2V'_2 = A_2V_2$ ).



Кесманинг горизонтал проекцияси  $A'_1V'_1$  ҳолга келиб қолади.  $A'_1V'_1$  ни ихтиёрий  $V''_1$  нуқтадан вертикал тўғри чизиққа ўлчаб қўямиз, яъни ( $A''_1V''_1 = A'_1V'_1$ ). У ҳолда кесманинг фронтал проекцияси  $A''_2 \equiv V''_2$ , яъни нуқта бўлиб, у  $V$  га перпендикуляр бўлади.

3-мисол. Умумий вазиятда берилган  $ABC(A_1V_1C_1; A_2V_2C_2)$  учбурчак юзасининг ҳақиқий катталиги аниқлансин (128-шакал). Бу масалани ечиш учун учбурчакнинг  $A1(A_11; A_21_2)$  горизонталини ўтказиб, уни  $V$  текислигга перпендикуляр ҳолатга келтирамиз, бунинг учун унинг горизонтал чизигини фронтал проекцияловчи, яъни  $A'_11'1 \perp XX$  вазиятда ўтказиб олиш керак.



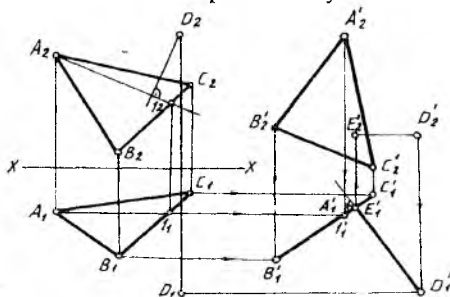
Горизонтал чизиқнинг янги  $A'_11'1$  вазиятидан фойдаланиб, учбурчакнинг янги вазиятдаги проекциялари ясалади. Шу ҳолда учбурчакнинг янги фронтал проекцияси  $C'_2A'_2V'_2$  тўғри чизиқ бўлиб проекцияланади, яъни текислик фронтал



проекцияловчи вазиятга келиб қолади. Энди учбурчакнинг  $A'_2B'_2C'_2$  проекцияни  $H$  га параллел ҳолга келтирамиз ва учбурчакнинг  $H$  текисликдаги  $A''_1B''_1C''_1$  проекциясини тонамиз. Ҳосил бўлган бу  $A''_1B''_1C''_1$  учбурчак, берилган  $ABC$  учбурчак юзасининг ҳақиқий катталиги бўлади.

4-мисол. Фазодаги  $D(D_1;D_2)$  нуқтадан  $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$  текисликгача бўлган энг қисқа масофанинг ҳақиқий катталиги тошилсин(129-шакл). Бу масала қуйдагича ечилади.

$ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$  учбурчакнинг учларини  $V$  га параллел текисликларда ҳаракатлантириб,  $H$  га перпендикуляр вазиятга келтирамиз. Бунинг



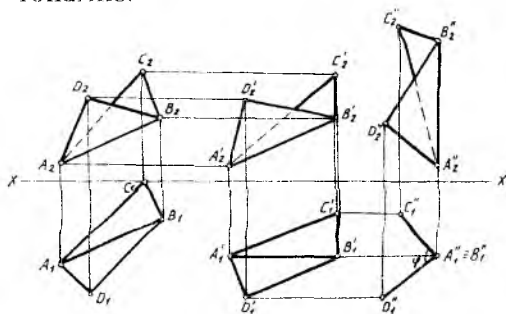
129-шакл

учун бу учбурчакнинг янги проекциясини унинг  $A1(A_11_1;A_21_2)$  фронтални  $H$  текисликга перпендикуляр бўлган ҳолатда ясаймиз. Бундай вазиятда берилган учбурчакнинг горизонтал проекцияси  $B'_1A'_1C'_1$  кесма кўринишида бўлади. Берилган  $D(D_1D_2)$  нуқтани ҳам берилган  $ABC$  учбурчакга боғланган ҳолда ҳаракатлантириб янги проекциялари  $D'_1$  ва  $D'_2$  ни аниқланади. Бунда  $1'_1D'_1 = 1_2D_2$  ва  $A'_2D'_2 = A_2D_2$  бўлади.  $D$  нинг  $D'_1$  проекциясидан  $A'_1B'_1C'_1$  га перпендикуляр тушириб  $E'_1$  нуқта топилади.  $D'_1E'_1$  кесманинг фронтал проекцияси  $A'_21'_2$  га перпендикуляр бўлади. Топилган  $D'_1E'_1$  масофа изланган масофа бўлади.

5-мисол. Умумий  $AB$  қиррага эга бўлган  $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$  ва  $ABD(A_1B_1D_1;A_2B_2D_2)$  учбурчак

гексисликлари орасидаги икки ёқли бурчакнинг ҳақиқий катталиги аниқлансин (130-шакл).

Бу масалани ечиш учун қуйидагича йўл тутамиз. Умумий қирра  $AB$  ни  $V$  га параллел ҳолда жойлаштирамиз. Бунинг учун ихтиёрий  $A'_1$  нуқтадан ( $A'_1B'_1 = A_1B_1$ ) кесма белгилаймиз.  $D'_1$  ва  $C'_1$  нуқталар берилган учта томонига асосан учбурчак яшаш усулидан фойдаланиб ясалади. Параллел кўчириш қоидасига биноан  $A_2, B_2, C_2, D_2$  нуқталардан горизонтал чизиқлар утказиб  $A'_2, B'_2, C'_2$  ва  $D'_2$  янги фронтал проекцияларни ясаймиз. Энди  $AB$  қиррани  $H$  га перпендикуляр (яъни вертикал) қилиб ихтиёрий  $A''_2$  нуқтадан жойлаштирамиз,  $A''_2B''_2 = A'_2B'_2$ . Бу қирра билан биргаликда  $C$  ва  $D$  нуқталар ҳам кўчирилади.  $A'_1, B'_1, C'_1$  ва  $D'_1$  нуқталарни горизонтал йўналишда кўчириб  $C''_1, A''_1 = B''_1$  ва  $D''_1$  нуқталарни топамиз.



130-шакл

Бунда берилган  $ABC$  ва  $ABD$  учбурчаклар  $H$  га нисбатан перпендикуляр ҳолатга келиб қолади. Улар орасидаги  $\phi$  бурчак изланган бурчак бўлади.

### 7.7 § Ёрдамчи проекциялаш усули

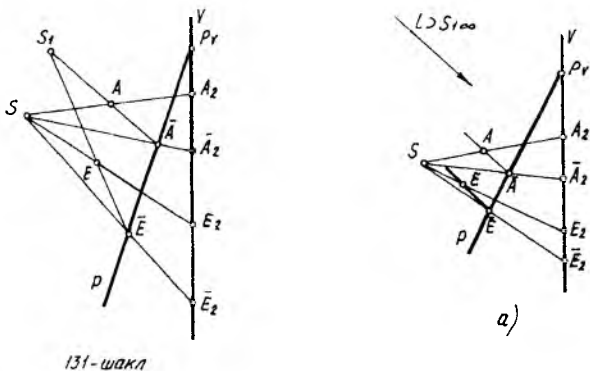
Ёрдамчи проекциялаш усулининг амалий аҳамияти шундан иборатки, уни қўллаш орқали ечилиши бир нечта амаллардан иборат бўлган масалаларнинг ечимига битта операция орқали эришилади. Бу усулни профессор С.М.Колотов (1880-1965) таклиф қилган.

Усулнинг моҳияти қуйидагилардан иборат. Нуқтанинг тасвири чизма текислигидаги асосий проекциялаш йўналиши

(марказий ёки параллел) бўйича ҳосил қилинган бўлсин. Қўшимча проекциялар текислиги ва қўшимча проекциялаш марказини ҳос ёки ҳосмас нуқтада танлаб оламиз. Берилган нуқтани бу марказдан қўшимча танланган текисликка проекциялаймиз ва ҳосил бўлган қўшимча проекцияни асосий проекциялаш йўналиши бўйича чизма текислигига проекциялаб, унда нуқтанинг такрорий проекциясини ясаймиз. Нуқтанинг ана шу икки марта проекциялаш натижасида, асосий чизма текислигида ҳосил қилинган такрорий проекцияси, унинг умумий ҳолдаги ёрдамчи проекцияси бўлади.

131-шаклда асосий проекциялар текислиги  $V$ , проекциялаш маркази  $S$  ва  $A$  ҳамда  $E$  нуқталар берилган.  $A$  ва  $E$  нуқталарни  $V$  текислигига  $S$  проекциялаш марказидан фойдаланиб, уларнинг марказий  $A_2$  ва  $E_2$  проекциялари ясалган.

Қўшимча проекциялаш маркази  $S_1$  нуқта ва қўшимча  $P$  текисликни танлаб оламиз.  $S_1$  марказдан  $A$  ва  $E$  нуқталарни  $P$  текисликка проекциялаб, унда қўшимча  $\bar{A}$  ва  $\bar{E}$  проекцияларни ҳосил қиламиз. Сўнгра  $\bar{A}$  ва  $\bar{E}$  проекцияларни асосий проекциялаш маркази  $S$  нуқтадан фойдаланиб  $V$  текисликка проекциялаб, унда  $\bar{A}_2$  ва  $\bar{E}_2$  проекцияларига эга бўламиз.



131-шакл

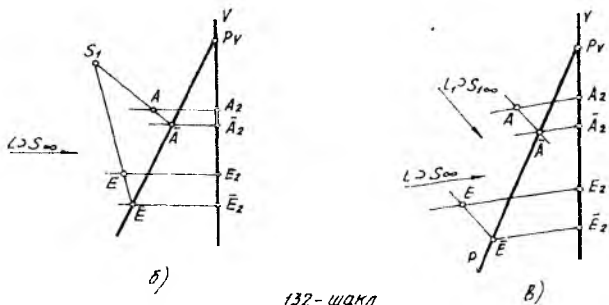
Ёрдамчи проекциялашнинг бу умумий ҳолига нисбатан амалда кенг қўлланиладиган қуйидаги хусусий ҳолларини кўриш мумкин:

1) асосий проекциялаш маркази ҳос нуқта ( $S_1$ ), қўшимча проекциялаш маркази ( $S_{1\infty}$ ) эса ҳосмас нуқта (132-шакл, а);

2) асосий проекциялаш маркази ҳосмас ( $S_\infty$ ) нуқтада, қўшимча проекциялаш маркази ( $S_1$ ) эса ҳос нуқтада (132-шакл, б);

3) ҳар иккала проекциялаш марказлари ( $S_\infty$ ;  $S_1$ ) ҳосмас нуқталарда (132-шакл, в).

Бу ҳоллардан биринчиси перспективада, иккинчи ва учинчи ҳоллар эса, параллел проекциялашда позицион ва метрик масалаларни ечишда қўлланилади.



132-шакл

133-шакл, а) да  $P$  текислик излари орқали ва унга перпендикуляр  $AB$  тўғри чизиқ кесмаси берилган.  $AB$  тўғри чизиқнинг  $P$  текислиги билан кесишиш нуқтасини топиш ва  $P$  текислигини унинг фронтал изи  $P_V$  атрфида айлантириб  $V$  проекциялар текислиги билан устма-уст қўйиш (жипслаштириш) талаб қилинсин. Бу масалани ечиш бир неча босқичда бажарилади.

1.  $AB$  тўғри чизиқ орқали  $R (R_{11}; R_V)$  текислигини ўтказамиз;

2. Ёрдамчи текислик  $R$  билан  $P$  текислиқнинг кесишиш чизиғи  $1(1_1; 1_2)$  ни топамиз;

3. Кесишган чизиғи билан  $AB$  нинг ўзаро кесишиш нуқтаси  $K$  ни аниқлаймиз (чизмада унинг фронтал проекцияси  $K_2$  курсатилган).

Энди  $P$  текислиқни  $P_V$  атрфида айлантириб, уни фронтал проекциялар текислиги  $V$  билан жипслаштири учун  $P_{11}$  да ётган  $1(1_1; 1_2)$  нуқтани танлаймиз. Танланган  $1(1_1; 1_2)$  нуқта орқали айлантириш ўқи  $P_V$  га перпендикуляр ҳаракат

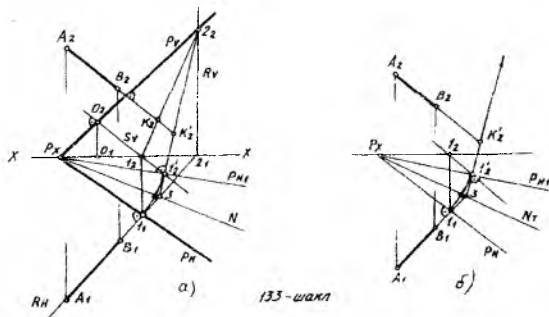
текислиги  $S (S_V)$  ни ўтказамиз, у  $P_V$  билан кесишиб, 1 нуқта учун айланиш маркази  $O(0_1;0_2)$  ни ҳосил қилади. Сўнгра  $P_X$  нуқтани марказ қилиб  $R=P_X \cdot 1_1$  радиус билан ёй чизамиз ва унинг  $O_2 1_2$  билан кесишиш нуқтаси  $1'_2$  ни белгилаймиз. Топилган  $1'_2$  нуқтани  $P_X$  билан бирлаштириб берилган  $P$  текисликнинг горизонтал изи  $P_{11}$  нинг  $V$  текислик билан устма-уст тугашган янги  $P_{11}$  изига эга бўламиз. Ўзаро перпендикуляр  $R$  ва  $P$  текисликларининг кесишиш чизиги 12, берилган  $P$  текислиги учун энг кагга оғма чизиқдир, чунки у  $P_{11}$  га перпендикуляр. Демак, у (яъни 12)  $P_{11}$  га ҳам перпендикуляр бўлиб қолади.  $A_2 B_2$  ни давом эттириб  $1_2 2_2$  билан кесишиш нуқтаси  $K_2$  ни белгилаймиз.  $A_2 B_2$  нинг  $1'_2 2_2$  билан кесишган  $K'_2$  нуқтаси  $K_2$  нуқтанинг  $V$  текислик билан устма-уст тушган ҳолати бўлади.

Агар  $2_2 1'_2$  тўғри чизиқни давом эттирилса у  $A_1 B_1$  билан 3 нуқтада кесишади. Ҳосил бўлган 3 нуқтани  $P_X$  билан бирлаштирсак бирламчи, яъни бошланғич, проекция билан берилган текисликнинг  $V$  билан устма-уст қўйилгандаги ҳолати орасида бир қийматли мослик ўрнатувчи  $N$  ўқиға эга бўламиз. Бу ўқ мослик ўқи деб аталиб, у асида  $P$  ва  $V$  текисликлар орасидаги биссектор текисликнинг горизонтал изи бўлади.

Энди  $P$  текисликдаги бирор нуқтанинг ортогонал проекциясини ва унинг  $P$  текислик билан биргаликда  $V$  билан жипслашган ҳолатини қуйидаги алгоритм асосида бажариш мумкин. Бунинг учун 1 нуқтанинг горизонтал проекциясидан  $A_1 B_1$  га параллел ўтказиб, унинг  $N$  билан кесишиш 3 нуқтаси орқали  $1'_2 2_2$  га параллел ўтказилади ва унинг фронтал проекцияси орқали  $A_2 B_2$  га параллел тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси, яъни талаб қилинган нуқтага эга бўлинади.  $1'_2 2_2$  тўғри чизиқ элитувчи тўғри чизиқ деб аталади. 133-шакл, а) даги  $P_V$  ва  $R_V$  текисликлар изларини олиб ташласак чизма 133-шакл, б) даги кўринишга келиб анча ихчамлашади. Бу чизма Колотов диаграммаси деб ном олган. Мослик ўқи  $N$  ни ўзига параллел ҳолда исталган жойга кўчириш мумкин.

1-мисол.  $ABC(A_1 B_1 C_1; A_2 B_2 C_2)$  ва  $ABD(A_1 B_1 D_1; A_2 B_2 D_2)$  учбурчак текисликлари орасидаги иккиёкли бурчакнинг ҳақиқий катталиги аниқлансин. Бу бурчакнинг ҳақиқий

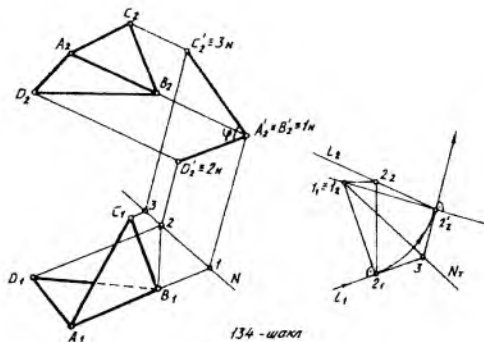
катталиги аниқлаш учун берилган учбурчакларни, уларнинг кесишиш чизиги АВ га перпендикуляр бўлган текисликка проекциялаймиз.



Учбурчаклар бу текисликка узаро кесишувчи икки кесма кўринишда проекцияланади ва улар орасидаги бурчак иккиёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади.

Бу масalani ечиш учун асосий чизмадан унг томондаги бўш жойда диаграмма ясаймиз (134-шакл). Ихтиёрий  $1_1 \equiv 1_2$  нуқтадан  $A_1B_1$  га перпендикуляр қилиб  $1_2(1_1 2_1; 1_2 2_2)$  горизонтални оламиз ( $A_1B_1 \perp 1_1 2_1$ ).  $2_2$  нуқтадан  $A_2B_2$  га параллел  $l_2$  йўналашни ўтказамиз ( $l_1 \parallel A_1B_1$ ;  $l_2 \parallel A_2B_2$ ), сўнгра  $1_1 \equiv 1_2$  нуқтани марказ қилиб  $R=1_1 2_1$  радиус билан ёй чизамиз ва унинг  $l_2$  билан кесишиш нуқтасини  $2'_2$  билан белгилаймиз. Ҳосил бўлган  $2'_2$  нуқтани  $1_2$  билан бирлаштириб,  $2'_2$  нуқтадан  $1_2 2'_2$  га перпендикуляр ўтказамиз ва бу чизиқ элитувчи бўлади.

Элитувчи чизиқ билан  $l_1$  нинг кесишиш нуқтаси 3 ни аниқлаб, уни  $1_1 \equiv 1_2$  билан туташтирсак, у мослик ўқи  $N_T$  ни ҳосил қилади. Мослик ўқи  $N$  ни унга параллел қилиб, чизмага яқин ва қулай жойга кўчирамиз ва  $A_1B_1$  йўналишида  $ABC$  ва  $ABD$  ларнинг горизонтал проекциясини унга проекциялаб 1, 2 ва 3 нуқталарни аниқлаймиз. Ҳосил бўлган 1, 2 ва 3 нуқталардан элитувчига параллел тўғри чизиқлар ўтказиб уларнинг  $A_2B_2$  йўналишида проекцияланган тўғри чизиқлар билан мос равишда кесишган нуқталарни белгилаймиз ва уларни бирлаштирамиз. Ҳосил бўлган  $\phi$  бурчак изланган бурчак бўлади.



134-шакл

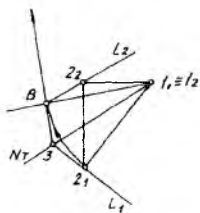
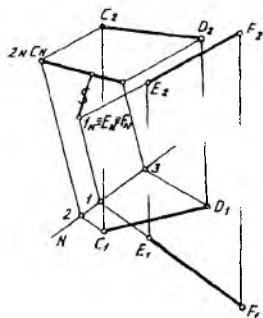
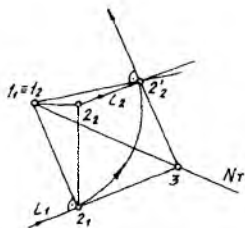
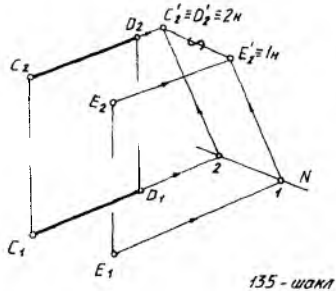
2-мисол. Берилган  $E(E_1; E_2)$  нуқтадан  $CD(C_1D_1; C_2D_2)$  тўғри чизиқ кесмасигача бўлган энг қисқа масофанинг ҳақиқий катталиги топилсин.

Бу сўралган масофанинг ҳақиқий катталигини топиш учун берилган тўғри чизиқ кесмасини ва  $E$  нуқтани  $CD$  га перпендикуляр бўлган текисликка  $CD$  йўналишда проекцияланади, натижада унинг нуқта кўринишдаги проекциясига эга бўламиз ва бу текисликдаги икки нуқта орасидаги масофа изланган масофа бўлади. Бу масalani ечиш учун асосий чизманинг ўнг тарафида бўш жойда ихтиёрий  $1_1 \equiv 1_2$  нуқтани танлаб (135-шакл) диаграмма ясаймиз. Бунинг учун  $CD$  кесмага перпендикуляр бўлган 12 горизонтал чизиқ ўтказамиз: 12 ( $1_1 2_1; 1_2 2_2$ ) бунда  $1_1 \equiv 1_2$  вазиятда олинади.  $\ell_1$  йўналиш  $C_1 D_1$  га параллел ( $\ell_1 \parallel C_1 D_1$ ) бўлиб, у  $2_1$  нуқтадан ўтади.

Энди асосий чизмага яқин ихтиёрий жойда мослик ўқини ўзига параллел кўчираемиз ( $N$ ). Бу ўқга  $C_1 D_1$  ни ва  $E_1$  нуқтани ( $\ell_2 \parallel C_1 D_1$ ) проекциялаб 1 ва 2 нуқта топилади. Бу нуқталардан ташувчига параллел тўғри чизиқлар чизиб  $E'_2$  ва  $C'_2 \equiv D'_2$  нуқталар топилади. Бу икки нуқта орасидаги масофа изланган масофа бўлади.

3-мисол. Ўзаро чалмашувчи  $CD(C_1 D_1; C_2 D_2)$  ва  $EF(E_1 F_1; E_2 F_2)$  тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофанинг ҳақиқий катталиги топилсин. Бу масalani ечишда ҳам

берилган тўғри чизиқлардан бирига перпендикуляр текисликка шу тўғри чизиқ йўналишида проекциялаб, уни нуқта кўришишга келтирамиз. Бу нуқтадан иккинчи тўғри чизиқгача бўлган масофа изланган масофа бўлади. 136-шаклда  $l_1 \parallel E_1 F_1$ ;  $l_2 \parallel E_2 F_2$  қилиб танлаб олинган.





## ЧИЗМА ГЕОМЕТРИЯДАГИ АТАМАЛАР ВА ТУШУНЧАЛАР БЎЙИЧА ЙИГМА ЛУГАТ.

### А

Алгоритм	- масалани ечиш режаси.
Айлантириш усули	- проекциялар текисликларини узгартирмай, берилган шаклни бирор уқ атрофида айлантириб, проекциялар текисликларига нисбатан қулай ҳолатга келтириш.
Айланиш ўқи	- нарсани бирор проекциялар текислигига қулай ҳолга келтиришда уни айлантириш учун танланган тўғри чизиқ.
Айлантириш текислиги	- бирор шаклнинг нуқтаси орқалиқали ўтувчи ва айланиш ўқиға перпендикуляр текислик.
Айлантириш маркази	- айланиш ўқи билан айлантириш текислигининг кесишув нуқтаси.
Айланиш радиуси	- айланиш марказидан ҳаракатланувчи нуқтагача бўлган масофа.

### В

Биссектор текислиги	- II ва IV текисликлар орасидаги биссектор текислик. Биссектор текислиги I, III чораклар ва II, IV чоракларни тенг иккига бўлади.
---------------------	---

### Г

Горизонтал проекциялар текислиги	- шаклнинг горизонтал проекциялари ётган горизонтал текислик (H).
Горизонтал тўғри чизиқ	- горизонтал (H) проекциялар текислигига параллел бўлган тўғри чизиқ.
Горизонтал проекцияловчи тўғри чизиқ	- горизонтал (H) проекциялар текислигига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ.
Горизонтал текислик	- горизонтал (H) проекциялар текислигига параллел бўлган текислик.
Горизонтал проекцияловчи текислик	- горизонтал (H) проекциялар текислигига перпендикуляр бўлган текислик.

### Ё

Ёрдамчи проекциялаш	- асосий проекциялаш йўналишига қўшимча равишда бажариладиган проекциялаш.
К	
Координата ўқлари	- проекциялар текисликларининг кесишган чизиқлари.
Конкурент нуқталар	- бир проекцияловчи нурда ётган нуқталар
М	
Марказий проекция	- бир нуқтадан проекциялаш маркази орқали текисликда ҳосил бўлган проекция.
О	
Октант	- фазонинг саккиздан бир қисми
Ортогонал проекциялаш	- тўғри бурчакли проекциялаш.
Ортогонал проекцияларни алмаштириш	- масала ечишда график амалларни соддалаштириш учун қўлланиладиган чизмани қайта тузиш усуллари
П	
Проекциялаш	- бу жараён бўлиб, унда проекцияланувчи объект нуқталари орқали нурлар ўтказиб уларнинг проекциялар текислиги билан кесишув нуқталари аниқланади.
Проекциялаш маркази	- проекцияловчи нурлар чиқадиган хос ёки хосмас нуқта
Проекция	- нарсани проекцияловчи нурларнинг проекциялар текислиги билан кесишувидан ҳосил бўлган тасвир.
Проекциялар текислиги	- проекциялар ётган текислик
Проекциялаш нури	- проекцияланувчи нуқта билан проекциялаш марказини боғловчи тўғри чизиқ.
Параметр	- нарсанинг ҳолати ва шаклини аниқлашда қатнашадиган кўрсаткичлар.
Параметрлаштириш	- нарсалар тўпламининг ҳолати ва шакл параметрларини аниқлаш.
Профил тўғри	- профил (W) проекциялар текислигига

чизиқ	параллел бўлган тўғри чизиқ.
Профил	- профил ( $W$ ) проекциялар текислигига
проекцияловчи	перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ.
тўғри чизиқ	
Профил текислик	- профил ( $W$ ) проекциялар текислигига
	параллел бўлган текислик.
Профил	- профил ( $W$ ) проекциялар текислигига
проекцияловчи	перпендикуляр бўлган текислик.
текислик	
Проекциялар	- нарсанинг ҳолатини ўзгартирмай,
текисликларини	балки унга нисбатан проекциялар
алмаштириш	текисликларининг ҳолатини ўзгартириш.
Позицион масала	- шаклларни ўзаро тегишлилигини, яъни
	ўзаро умумий элементларни
	аниқлайдиган масала
	Т
Тўғри бурчакли	- кесманинг проекциялари бўйича унинг
учбурчак усули	ҳақиқий узунлигини ва проекциялар
	текисликлари билан ҳосил қилган
	бурчакларни аниқлашда қўлланиладиган
	усул. Учбурчакнинг бир катети сифатида
	кесманинг проекцияси, иккинчи катети
	сифатида эса кесма учларининг шу
	текисликдан узоқликлар айирмаси
	олинади.
Тўғри чизиқнинг	- тўғри чизиқнинг проекциялар
излари	текисликлари билан кесишган нуқталари.
Текисликнинг	- текисликнинг проекциялар
излари	текисликлари билан кесишган чизиқлари.
Текисликнинг	- текисликда ётган ва $H$ га параллел
горизонтали	тўғри чизиқ.
Текисликнинг	- текисликда ётган ва $V$ га параллел тўғри
фронтали	чизиқ.
Текисликнинг	- текисликда ётган ва $W$ га параллел
профили	тўғри чизиқ.
Текисликнинг энг	- текисликка тегишли бўлиб, унинг
катга оғиш чизиги	горизонталлари ёки фронталарига ёки
	профилларига перпендикуляр тўғри
	чизиқ.
Тўғри чизиқнинг	- текисликда ётган бирор тўғри чизиққа

текисликка параллелиги	параллел бўлган тўғри чизиқ.
Тўғри бурчакнинг проекцияланиш хусусияти	- тўғри бурчакнинг бир томони текисликка параллел бўлиб, иккинчи томони унга перпендикуляр бўлмаса, унинг проекцияси ҳам тўғри бурчак бўлади.
Текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ	- текисликдаги ўзаро кесишувчи икки тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ.
Текис параллел кўчириш усули	- айлантириш усулининг хусусий ҳоли бўлиб, унда айланиш ўқи кўрсатилмайди.
У	
Умумий вазиятдаги тўғри чизиқ	- проекциялар текисликларининг бирортасига ҳам параллел ёки перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқ.
Умумий вазиятдаги текислик	- проекциялар текисликларининг бирортасига ҳам параллел ёки перпендикуляр бўлмаган текислик.
Жипслаштириш усули	- айлантириш усулининг хусусий ҳол бўлиб, бунда айлантириш ўқи сифатида текисликнинг бирор изи қабул қилинади ва унинг атрофида айлантириб текислик шу проекциялар текислигига жипслаштирилади.
Ф	
Фронтал тўғри чизиқ	- фронтал (V) проекциялар текислигига параллел бўлган тўғри чизиқ.
Фронтал проекцияловчи тўғри чизиқ.	- фронтал (V) проекциялар текислигига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ.
Фронтал текислик	- фронтал (V) проекциялар текислигига параллел бўлган текислик.
Фронтал проекцияловчи текислик	- фронтал (V) проекциялар текислигига перпендикуляр бўлган текислик.
Х	
Хосмас нуқта	- тўғри чизиқнинг чексиз узоқлашган нуқтаси.

Хосмас тўғри чизиқ	- текисликнинг чексиз узоқлашган чизиғи
Хосмас текислик	- уч ўлчамли фазонинг чексиз узоқлашган нуқталар тўплами.
Хусусий вазиятдаги тўғри чизиқ	- проекциялар текисликларининг энг камида бирига параллел ёки перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ.
Хусусий вазиятдаги текислик	- проекциялар текисликларининг бирига параллел ёки перпендикуляр бўлган текислик.
Ч	
Чорак	- фазонинг тўртдан бир қисми.
Э	
Эшор	- француз сўзи бўлиб, чизма деган маънони билдиради
Ў	
Ўзаро параллел текисликлар	- бир текисликда ётган ва ўзаро кесишган икки чизиқ иккинчи текисликда ётган ва ўзаро кесишувчи икки тўғри чизиққа мос равишда параллел бўлган текисликлар
Ўзаро перпендикуляр текисликлар	- бир текисликда ётган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик ёки текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқдан ўтувчи текислик.

## АДАБИЁТ

1. Ш.К.Муродов ва бошқалар. Чизма геометрия курси. Тошкент. «Ўқитувчи». 1988.
2. Ю.Қирғизбоев. Чизма геометрия. Тошкент. «Ўқитувчи» 1989.
3. Р.Х.Хорунов. Чизма геометрия курси. Тошкент. «Ўқитувчи». 1998.
4. Ю.Қирғизбоев. Чизма геометриядан масалалар тўплами. Тошкент. «Ўқитувчи». 1971.
5. И.И.Котов. Начертательная геометрия. Москва. «Высшая школа». 1970.

## Мундарижа

Сузбоши . . . . .	3
I боб. КИРИШ. . . . .	6
1.1-§ Проекциялаш асослари, Евклид фазосини кенгайтириш. . . . .	6
1.2-§ Геометрик элементларни параметри. . . . .	10
1.3-§ Марказий ва параллел проекциялаш ва уларнинг хоссалари. . . . .	11
1.4-§ Нуқтанинг ўзаро перпендикуляр икки ва уч текисликдаги проекциялари. . . . .	16
II боб. ТҮҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ОРТОГОНАЛ ПРОЕКЦИЯЛАРИ. . . . .	21
2.1-§ Умумий вазиятдаги тўғри чизиқнинг проекциялари .	21
2.2-§ Хусусий вазиятдаги тўғри чизиқларнинг проекциялари . . . . .	23
2.3-§ Умумий вазиятдаги тўғри чизиқ кесмасини таҳлил қилиш. . . . .	26
2.4-§ Тўғри чизиқ кесмасини берилган нисбатда бўлиш.	29
2.5-§ Тўғри чизиқ излари. . . . .	30
III боб. ФАЗОДАГИ ИККИ ТҮҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ЎЗАРО ВАЗИЯТИ . . . . .	32
3.1-§ Параллел тўғри чизиқлар. . . . .	32
3.2-§ Кесишувчи тўғри чизиқлар. . . . .	32
3.3-§ Чалмашувчи (айқаш) тўғри чизиқлар. . . . .	34
3.4-§ Тўғри бурчакнинг проекцияси. . . . .	34
IV боб. ТЕКИСЛИКНИНГ ФАЗОДА БЕРИЛИШИ . . . . .	36
4.1-§ Текисликнинг изларини яшаш. . . . .	37
4.2-§ Текисликнинг хусусий ҳолатлари. . . . .	38
4.3-§ Текисликда тўғри чизиқ танлаш. . . . .	42
4.4-§ Текисликнинг махсус чизиқлари. . . . .	43
4.5-§ Текисликнинг энг катта оғма чизиқлари. . . . .	46
V боб. ФАЗОДАГИ ТҮҒРИ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИКНИНГ ЎЗАРО ВАЗИЯТИ. . . . .	48
5.1-§ Тўғри чизиқ орқали текислик утказиш. . . . .	48
5.2-§ Тўғри чизиқнинг текисликка параллеллиги. . . . .	49
5.3-§ Тўғри чизиқни текислик билан кесишиши. Тўғри чизиқнинг проекцияловчи текислик билан кесишиш нуқтасини яшаш. . . . .	51

5.4-§ Умумий вазиятдаги текисликнинг хусусий вазиятда берилган текислик билан кесишиш чизигини яшаш. . . . .	53
5.5-§Тўғри чизиқнинг текисликка текислик билан кесишиш нуқтасини топиш. . . . .	55
5.6-§ Тўғри чизиқнинг текисликка перпендикуляр-лиги. . . . .	57
VI боб. ФАЗОДАГИ ИККИ ТЕКИСЛИКНИНГ ЎЗАРО ВАЗИЯТИ . . . . .	60
6.1-§ Ўзаро параллел текисликлар. . . . .	60
6.2-§ Ўзаро кесишувчи текисликлар. . . . .	63
6.3-§ Текисликларнинг ўзаро перпендикулярлиги. . . . .	67
6.4-§Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни аниқлаш. . . . .	70
6.5-§ Икки текислик орасидаги бурчакни аниқлаш. . . . .	71
VII боб. ОРТОГОНАЛ ПРОЕКЦИЯЛАРНИ ҚАЙТА ТУЗИШ УСУЛЛАРИ. . . . .	74
7.1-§ Проекциялар текисликларини алмаштириш усули. . . . .	74
Проекция текисликларидан биттасини алмаштириш. . . . .	74
7.2-§ Проекциялар текисликларини икки марта алмаштириш. . . . .	80
7.3-§ Айлантириш усули. Проекциялар текислигига перпендикуляр ўқ атрофида айлантириш. . . . .	83
7.4-§ Проекциялар текисликларидан биттасига параллел бўлган ўқ атрофида айлантириш . . . . .	89
7.5-§ Текисликни унинг изларини бири атрофида айлантириш. . . . .	90
7.6-§ Текис параллел кўчириш усули. . . . .	93
7.7-§ Ёрдамчи проекциялаш усули. . . . .	96
Чизма геометриядаги атамалар ва тушунчалар бўйича йиғма лугат. . . . .	105
Адабиётлар . . . . .	110

165 - буюртма 500 нусха. Ҳажми 76 б.т.  
2003 йил 14 ноябрда босишга рухсат этилди.  
Низомий номидаги ТДПУ Ризографика  
нашр қилинди.