MATEMATIKA 10

ALGEBRA WE ANALIZIŇ ESASLARY
GEOMETRIÝA
I BÖLÜM

Orta bilim berýän mekdepleriň 10-njy synp okuwçylary üçin derslik

1-nji neşir

Özbegistan Respublikasynyň Halk bilimi
ministrligi tarapyndan tassyklanan

DAŞKENT
2017

UO‘K 51(075.3)
KBK 22.1
M 51

Algebra we analiziň esaslary bölüminiň awtorlary:

M.A. Mirzaahmedow, Ş.N. Ismailow, A.K. Amanow.

Geometriýa bölüminiň awtory:

B.K. Haýdarow

Syn ýazanlar:

R.B. Beşimow– Mürze Ulugbek adyndaky Özbegistan Milli Uniwersitetiniň "Geometriýa we topologiýa" kafedrasynyň müdiri, fizika-matematika ylymlarynyň doktory.

M.D. Pardaýewa – Respublikan Tälim merkeziniň direktorynyň orunbasary.

D.E. Dawletow – Nyzamy adyndaky DDPU "Matematikany okatmagyň metodikasy" kafedrasynyň müdiri, fizika-matematika ylymlarynyň kandidaty

G.M. Rahimow – DIOHMII ýanyndaky akademik liseýiň mugallymy, fizika-matematika ylymlarynyň kandidaty, dosent.

A.A. Akmalow – Daşkent şäher HTIGTHKI prorektory, pedagogika ylymlarynyň kandidaty, dosent.

Dersligiň "Algebra we analiziň esaslary" bölüminde ulanylan belgiler we olaryň düşündirişi:

– meseläni çözmek (subut etmek) başlandy

– meseläni çözmek (subut etmek) gutardy

– barlag işleri we test (synag) gönükmeleri

– soraglar we ýumuşlar

– esasy maglumat

– çylşyrymlyrak gönükmeler

Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan çap edildi.

ISBN 978-9943-5056-2-9

I BAP

TOPLUMLAR. MANTYK

1-4 TOPLUM DÜŞÜNJESI, TOPLUMLAR ÜSTÜNDE AMALLAR. DOLDURYJY TOPLUM

Toplum matematikanyň başlangyç düşünjelerinden bolup, ony özünden ýönekeýrak düşünjeler arkaly häsiýetlendirip bolmaýar. Durmuşda mälim obýektler toplumyny bir bitewi zat diýip garamaly bolýar. Aýdaly, biolog haýsy-da bolsa ülkedäki ösümlikler we haýwanat dünýäsini öwrenmek bilen, ol jandarlary görnüşler boýunça, görnüşleri bolsa uruglar boýunça klaslara bölýärler. Her bir görnüş bir bitewilik diýlip garalýan jandarlar toplumydyr.

Toplum islendik tebigatly obýektlerden düzülen bolmagy mümkin. Meselem, Aziýa kontinentindäki ähli derýalar ýa-da sözlükdäki ähli sözler toplum bolup biler.

Toplumlaryň matematiki häsiýetnamasyny bermek üçin toplum düşünjesini görnükli nemes matematigi **G.Kantor** (1845–1918) aşakdaky ýaly girizipdir:

«Toplum pikirde bir bitewi diýlip garalýan köplükdir».

Toplumy düzýän obýektlere onuň *elementleri* diýilýär.

Toplum, adatda, amatlylyk üçin, latyn elipbiýiniň baş harplary, meselem, $A, B, C, \ldots$, onuň elementleri bolsa kiçi harplary, meselem, $a, b, c, \ldots$ bilen belgilenýär.

Elementleri $a, b, c, \ldots$ bolan A toplum ýaýlaryň kömeginde $A = \{a, b, c, \ldots\}$ ýaly ýazylýar.

$\{6, 11\}$, $\{11, 6\}$, $\{11, 6, 6, 11\}$ ýazuwlar bir toplumy aňladýar.

Meselem, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – onluk hasaplama ulgamyndaky sifrler toplumy, $V = \{$a, e, i, o, u$\}$ – iňlis dilindäki çekimli harplar toplumy. 10-njy a synpdaky okuwçylar toplumyny $\{a_1, a_2, \ldots, a_{30}\}$ bilen belgilesek, a_1 – žurnaldaky birinji nomerli okuwçyny, ..., a_{30} – žurnaldaky otuzynjy nomerli okuwçyny aňladýar.

x -iň A toplumyň elementidigi $x \in A$ ýaly, elementi däldigi bolsa $x \notin A$ ýaly ýazylýar we birinji ýagdaýda "*x element A-ga degişli*", ikinji ýagdaýda "*x element A-ga degişli däl*" diýlip okalýar.

Meselem, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ üçin $4 \in A$, emma $9 \notin A$.

Eger toplumy düzýän elementler çäkli sanda bolsa, beýle toplum **çäkli toplum,** tersine bolanda **çäksiz toplum** diýilýär.

Meselem, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ toplum çäkli, $\mathbb{N}=\{1, 2, ..., n, ...\}$ − ähli natural sanlar toplumy bolsa çäksiz toplumdyr.

$n(A)$ diýip çäkli A toplumyň ähli elementleriniň sanyny belgilesek, $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ toplumyň ähli elementleriniň sany 6=a deň bolany üçin, $n(A)=6$ bolýar.

Çäksiz topluma ýene bir mysal hökmünde 13-den kiçi bolmadyk ähli natural sanlar toplumyny getirmek bolýar.

Ýekeje-de elemente eýe bolmadyk topluma **boş toplum** diýilýär we $\emptyset$ ýaly belgilenýär.

$\emptyset$ toplum hem çäkli hasaplanýar we onuň üçin $n(\emptyset)= 0$.

Çäksiz A toplum üçin $n(A)= \infty$ belgilemek kabul edilen.

Eger A toplumyň hemme elementleri B topluma degişli bolsa, A toplum B toplumyň **bölek toplumy** diýilýär we $A \subseteq B$ ýaly ýazylýar.

Şeýle ýagdaýda "*A toplum B-da ýatýar*" ýa-da "*A toplum B-niň bölegi*" hem diýlip atlandyrylýar.

$\{a\}$ toplum $\emptyset$ we $\{a\}$, ýagny iki bölek topluma eýe.

$\{a, b\}$ toplum bolsa dört: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ we $\{a, b\}$ bölek toplumlara eýe.

Meselem, $\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, çünki birinji toplumyň hemme elementleri ikinji toplumyň hem elementleri bolýar.

A toplumyň B topluma degişli bolmadyk elementleri bar bolsa, A toplum B -niň bölek toplumy bolup bilmeýär we bu ýagdaý $A \not\subset B$ ýaly ýazylýar.

Meselem, $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$ bolsun. $1 \notin B$ bolany üçin $A \not\subset B$.

Görnüşi ýaly, $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$ gatnaşyklar ýerlikli.

$A \subseteq B$ we $B \subseteq A$ bolsa, bu toplumlar şol bir hili elementlerden ybarat bolup, olar **deň** (üstme-üst düşýän) **toplumlar** diýlip atlandyrylýar hem-de bu $A = B$ ýaly ýazylýar.

Meselem, dogry üçburçluklar toplumy ähli burçlary özara deň bolan üçburçluklar toplumy bilen üstme-üst düşýär. Munuň sebäbi islendik dogry üçburçlugyň ähli burçlary deň we tersine, eger üçburçlukda ähli burçlar deň bolsa, ol dogry bolýar.

Esasy sanly toplumlary ýatladyp geçýäris:

$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ – natural sanlar toplumy; $\mathbb{Z}=\{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ – bitin sanlar toplumy; $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ – rasional sanlar toplumy; $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ – hakyky sanlar toplumy.

Toplumlaryň birleşmesi we kesişmesi

1) A, B toplumlaryň **birleşmesi** diýip bu toplumlardan iň bolmanda biriniň elementi bolan elementlerden düzülen topluma aýdylýar.

A, B toplumlaryň birleşmesi $A \cup B$ ýaly belgilenýär.

Meselem, $P=\{1, 3, 4\}$ we $Q=\{2, 3, 5\}$ üçin $P \cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) A, B toplumlaryň **kesişmesi** diýip bu toplumlaryň umumy elementlerinden düzülen topluma aýdylýar.

A, B toplumlaryň kesişmesi $A \cap B$ ýaly belgilenýär.

Meselem, $P=\{1, 3, 4\}$ we $Q=\{2, 3, 5\}$ üçin $P \cap Q=\{3\}$.

Umumy elementlere eýe bolmadyk iki topluma **özara kesişmeýän** toplumlar diýilýär.

1-nji mysal. $M = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ we $N = \{3, 4, 6, 9, 10\}$ toplumlar üçin aşakdakylary anyklaň:

a) çyn ýa-da ýalandygyny:	**I** $4 \in M$;	**II** $6 \notin M$;
b) toplumlary tapyň:	**I** $M \cap N$;	**II** $M \cup N$;
c) çyn ýa-da ýalandygyny:	**I** $M \subseteq N$;	**II** $\{9, 6, 3\} \subseteq N$.

△ a) 4 sany M toplumyň elementi bolmadygy üçin $4 \in M$ gatnaşyk ýalan. 6 sany M toplumyň elementi bolmandygy üçin $6 \notin M$ gatnaşyk çyn.

b) $M \cap N = \{3, 9\}$, çünki diňe 3 we 9 sanlar iki toplumyň hem elementleridir. $M \cup N$ toplumy tapmak üçin ýa-da M-e, ýa-da N-e degişli bolan elementleri ýazýarys: $M \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $M \subseteq N$ gatnaşyk ýalan, çünki M toplumda N-e degişli bolmadyk elementleri bar. $\{9, 6, 3\} \subseteq N$ gatnaşyk çyn, çünki N-de $\{9, 6, 3\}$ toplumyň elementleri bar. ▲

Gönükmeler

1. $\in$, $\notin$, $\subseteq$ belgilerden peýdalanyp, ýazyň:
a) 5 sany D toplumyň elementi;
b) 6 sany D toplumyň elementi däl;
c) $\{2, 5\}$ toplum $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ toplumyň bölek toplumy;
d) $\{3, 8, 6\}$ toplum $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ toplumyň bölek toplumy däl;

2. a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{5, 8, 10, 13, 9\}$;
b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$;
c) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ toplumlar üçin $A \cup B$ we $A \cap B$-leri tapyň.

3. Toplumlaryň elementleri sanyny tapyň:
a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$;
b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
c) $A \cap B$;
d) $A \cup B$.

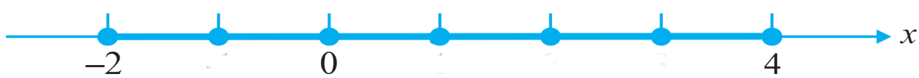
4. Toplumlaryň çäkli ýa-da çäksizdigini anyklaň:
a) 10-dan uly emma 20-den kiçi natural sanlar toplumy;
b) 5-den uly bolan natural sanlar toplumy.

5. Toplumlardan haýsylary özara kesişmeýär:
a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$;
b) $P = \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $Q = \{4, 9, 10\}$?

Käbir ýagdaýlarda toplumy bermek üçin onuň elementleri üçin ýerlikli, başga elementler üçin ýerlikli bolmadyk *harakteristik häsiýet* görkezilýär. Eger x element P *häsiýete* eýe diýen pikir gysgaça $P(x)$ diýlip ýazylan bolsa, P häsiýete eýe bolan ähli elementler toplumy $\{x|P(x)\}$ görnüşde belgilenýär.

Meselem, $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$ ýazuw aşakdaky ýaly okalýar: "-2-den uly ýa-da deň hem-de 4-den kiçi ýa-da deň bolan ähli bitin sanlar toplumy".

Bu toplum sanlar okunda aşakdaky ýaly şekillendirilýär:



Görnüşi ýaly, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ we ol çäkli, munda $n(A) = 7$.

Edil şeýle $B = \{x \mid -2 \leqslant x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ ýazuw aşakdaky ýaly okalýar: "-2-den uly ýa-da deň hem-de 4-den kiçi bolan ähli hakyky sanlar toplumy".

Bu toplum sanlar okunda aşakdaky ýaly şekillendirilýär:

Görnüşi ýaly, $B = [-2, 4)$ we ol çäksiz, munda $n(B) = \infty$.

2-nji mysal. $A = \{x \mid 3 < x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsun.
a) Bu ýazuw nähili okalýar?
b) Bu toplumyň elementlerini atma-at ýazyp çykyň;
c) $n(A)$-ni tapyň.

a) "3-den uly hem-de 10-dan kiçi ýa-da deň bolan ähli bitin sanlar toplumy";

b) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $n(A) = 7$.

Gönükmeler

6. Toplumlardan haýsylary çäkli, haýsylary çäksiz:

a) $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{x \mid x \geqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$?

7. Ýazuwlary okaň:

a) $A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{x \mid -2 < x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$;

c) $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$; d) $A = \{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 6, x \in \mathbb{Q}\}$.

Eger mümkin bolsa, şu toplumlaryň elementlerini atma-at ýazyp çykyň.

8. Aşakdaky toplumlary ýazyň:

a) "−100-den uly hem-de 100-den kiçi bolan ähli bitin sanlar toplumy";

b) "1000-den uly bolan ähli hakyky sanlar toplumy";

c) "2-den uly ýa-da deň hem-de 3-den kiçi ýa-da deň bolan ähli rasional sanlar toplumy".

9. Soraglara jogap beriň:

a) $\{a, b, c\}$ we $\{a, b, c, d\}$ toplumlaryň ähli bölek toplumlaryny ýazyň. Olar näçe?

b) Eger B toplum n sany elemente eýe bolsa, onda B toplum näçe bölek topluma eýe?

10. Haýsy ýagdaýlarda $A \subseteq B$ bolýar?

a) $A = \varnothing$ we $B = \{2, 5, 7, 9\}$; b) $A = \{2, 5, 8, 9\}$ we $B = \{8, 9\}$;

c) $A = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbb{R}\}$ we $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$;

d) $A = \{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Q}\}$ we $B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{R}\}$;

e) $A = \{x \mid -10 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ we $B = \{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 5, z \in \mathbb{Z}\}$;

f) $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$ we $B = \{y \mid 0 < y \leqslant 2, y \in \mathbb{Q}\}$.

Bizi 1-den uly ýa-da deň hem-de 8-den kiçi ýa-da deň bolan ähli natural sanlar toplumy gyzyklandyrýar we biz onuň bölek toplumlaryny garamakçy, diýip çak edeliň .

Adatda, munda $U = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$ toplum girizilýär we ol **uniwersal toplum** diýlip atlandyrylýar.

A toplumyň A' **dolduryjysy** diýip U uniwersal toplumyň A-ga degişli bolmadyk ähli elementleriniň toplumyna aýdylýar.

Meselem, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ uniwersal toplum bolsa, $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ toplumyň **dolduryjysy** $A' = \{2, 4, 6\}$ toplum bolýar.

Görnüşi ýaly,
- $A \cap A' = \emptyset$
- $A \cup A' = U$
- $n(A) + n(A') = n(U)$,

ýagny A we A' toplumlar umumy elementlere eýe däl hem-de olary düzýän ähli elementler U-ny emele getirýär.

3-nji mysal. Uniwersal toplum U = {*ähli natural sanlar*} bolsa, C'-ni tapyň.

a) C = {*ähli jübüt sanlar*};

b) $C = \{ x \mid x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}\}$, $U = \mathbb{Z}$.

a) C' = {*Ähli täk natural sanlar*};

b) $C' = \{ x \mid x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$.

4-nji mysal. $U = \{ x \mid -5 \leqslant x \leqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid -3 \leqslant x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, aşakdaky toplumyň elemetlerini ýazyň:

a) A; b) B; c) A'; d) B';

e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A' \cap B$; h) $A' \cup B'$.

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
c) $A' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 5\}$;
d) $B' = \{-5, -4, 2, 3, 4, 5\}$
e) $A \cap B = \{1\}$;
f) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
g) $A' \cap B = \{-3, -2, -1, 0\}$;
h) $A' \cup B' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$.

Gönükmeler

11. C'-ni tapyň.

a) U = {*iňlis dili harplary*}, C = {*çekimli harplar*};

b) U = {*bitin sanlar*}, C = {*otrisatel bitin sanlar*};

c) $U = \mathbb{Z}$, $C = \{ x \mid x \leqslant -5, x \in \mathbb{Z}\}$;

d) $U = \mathbb{Q}$, $C = \{ x \mid x \leqslant 2$ *ýa-da,* $x \geqslant 8, x \in \mathbb{Q}\}$.

12. $U = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, aşakdakylary tapyň:

a) A; b) A'; c) B; d) B;'

e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A \cap B'$.

13. $n(U) = 15$, $n(P) = 6$, $n(Q') = 4$ bolsa, aşakdakylary tapyň:

a) $n(P')$; b) $n(Q)$.

14. $U = \{ x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, aşakdakylary tapyň:

a) B'　　b) C'　　c) A'　　d) $A \cap B$

e) $(A \cap B)'$　　f) $A' \cap C$　　g) $B' \cup C$　　h) $(A \cup C) \cap B'$

5-nji mysal. $U = \mathbb{N}$, P = {*4 sanynyň 50-den kiçi bolan kratnylary*} we Q = {*6 sanynyň 50-den kiçi bolan kratnylary*} bolsun.

a) P, Q toplumlaryň elementlerini ýazyň;
b) $P \cap Q$-ny tapyň;
c) $P \cup Q$-ny tapyň;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

△ a) $P = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,
$Q = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$;
b) $P \cap Q = \{12, 24, 36, 48\}$;
c) $P \cup Q = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 48\}$;
d) $n(P \cup Q) = 16$ we $n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 12 + 8 - 4 = 16$.

Diýmek, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ deňlik ýerlikli eken. ▲

Gönükmeler

15. $U = N$, P = {*25-den kiçi bolan düýp sanlar*} we $Q = \{2, 4, 5, 11, 12, 15\}$ bolsun.

a) P toplumyň elementlerini ýazyň;
b) $P \cap Q$-ny tapyň;
c) $P \cup Q$-ny tapyň;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(\mathrm{Q}) - n(P \cap Q)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

16. $U = \mathbb{N}$, P = {*30-uň bölüjileri*} we Q = {*40-yň bölüjileri*} bolsun.

a) P, Q toplumlarynyň elementlerini ýazyň;
b) $P \cap Q$-ny tapyň;
c) $P \cup Q$-ny tapyň;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

17. $U = \mathbb{N}$, P = {*4 sanynyň 30 we 60 sanlarynyň arasyndaky kratnylary*} we Q = {*6 sanynyň 30 we 60 sanlarynyň arasyndaky kratnylary*} bolsun.

a) P, Q toplumlaryň elementlerini ýazyň;
b) $P \cap Q$-ny tapyň;
c) $P \cup Q$-ny tapyň;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

18. $U = \{ x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, aşakdakylary tapyň:

a) B'; b) C'; c) A';
d) $A \cap B$; e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$;
g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.

19. $U = \mathbb{Z}$, $C = \{ y \mid -4 \leqslant y \leqslant -1, y \in \mathbb{Z}\}$ we $D = \{ y \mid -7 \leqslant y < 0, y \in \mathbb{Z}\}$ bolsun.

a) C, D toplumlaryň elementlerini ýazyň;
b) $C \cap D$-ni tapyň;
c) $C \cup D$-ni tapyň;
d) $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

20. $U = \mathbb{N}$, P = {12-*niň bölüjileri*}, Q = {18-*iň bölüjileri*} we R = {27-*niň bölüjileri*} bolsun.

a) P, Q, R toplumlaryň elementlerini ýazyň;
b) **I** $P \cap Q$; **II** $P \cap R$;
III $Q \cap R$; **IV** $P \cup Q$;
V $P \cup R$; **VI** $Q \cup R$;
c) **I** $P \cap Q \cap R$; **II** $P \cup Q \cup$ R,
lary tapyň.

21. $U = \mathbb{N}$, A = {4 *sanynyň* 40-*dan kiçi bolan kratnylary*}, B = {6 *sanynyň* 40-*dan kiçi bolan kratnylary*} we C = {12 *sanynyň* 40-*dan kiçi bolan kratnylary*} bolsun.

a) A, B, C toplumlaryň elementlerini ýazyň;
b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
c) $A \cup B \cup C$-ni tapyň;
d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+$ $+n(A \cap B \cap C)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

22. $U = \mathbb{N}$, A = {6 *sanynyň* 31-*den kiçi bolan kratnylary*}, B = {30-*uň bölüjileri*} we C = {30-*dan kiçi bolan düýp sanlar*} bolsun.

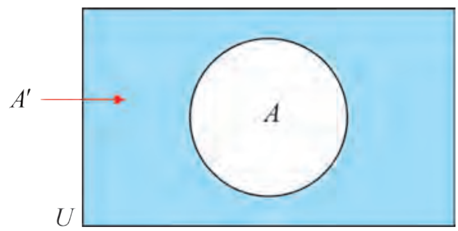
Toplumlaryň elementlerini ýazyň:
a) A, B, C;
b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
c) $A \cup B \cup C$-ni tapyň;

d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+$ $+n(A \cap B \cap C)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

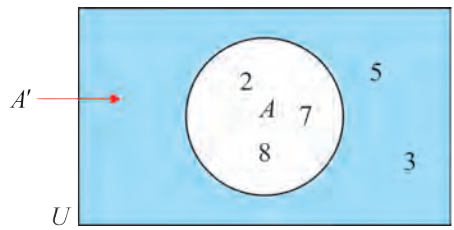
Wenn diagrammalary

Toplumlary *Wenn diagrammalarynyň* kömeginde şekillendirmek maksada laýyk. Wenn diagrammasynda U uniwersal toplum – gönüburçluk, toplum bolsa şu gönüburçlugyň içinde ýatýan tegelek ýaly şekillendirilýär.

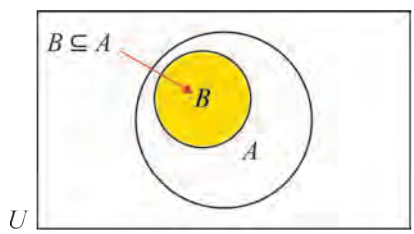
Meselem, suratda U uniwersal toplum içinde A toplum görkezilen. Töweregiň daşarsyndaky boýalan zolak A toplumyň A' dolduryjysyny aňladýar:



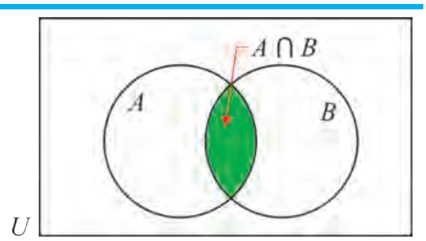
$U = \{2,3,5,7,8\}$, $A = \{2,7,8\}$ we $A' = \{3,5\}$ bolsa, şu toplumlar Wenn diagrammasynda aşakdaky ýaly şekillendirilýär:



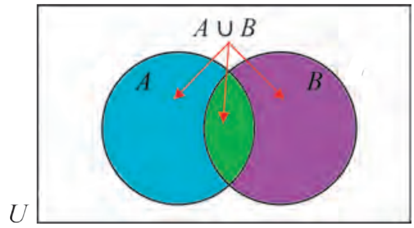
Eger $B \subseteq A$ bolsa, onda B toplumyň islendik elementi A topluma degişli. Diýmek, muňa laýyk Wenn diagrammasynda B toplumy aňladýan tegelek A toplumy aňladýan tegelegiň içinde ýatýar:



$A \cap B$ kesişme elementleri-de A-ga, hem B-ge degişli bolýar. Diýmek, muňa laýyk Wenn diagrammasynda $A \cap B$ toplumy aňladýan boýalan zolak şeýle şekillendirilýär:



$A \cup B$ birleşme elementleri ýa-da A -ga, ýa-da B-ge, ýa-da ikisine degişli bolýar. Diýmek, muňa laýyk Wenn diagrammasynda $A \cup B$ toplumy aňladýan zolak aşakdaky ýaly şekillendirilýär:

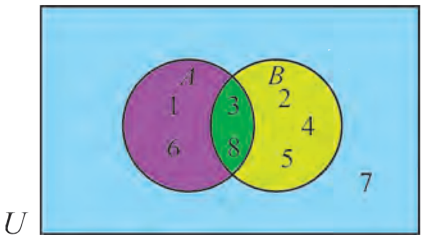


6-njy mysal. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bolsa, aşakdaky toplumlary Wenn diagrammasynda şekillendiriň:

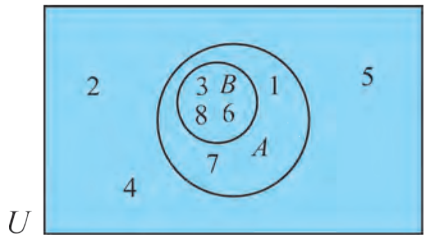
a) $A = \{1, 3, 6, 8\}$ we $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$;

b) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ we $B = \{3, 6, 8\}$.

a) $A \cap B = \{3, 8\}$



b) $A \cap B = \{3, 6, 8\}$, $B \subseteq A$



Gönükmeler

23. A, B toplumlary Wenn diagrammasynda şekillendiriň:

a) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ we $B = \{5, 7\}$;

b) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ we $B = \{3, 5, 7\}$;

c) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 6\}$ we $B = \{1, 4, 6, 7\}$;

d) $U = \{3, 4, 5, 7\}$, $A = \{3, 4, 5, 7\}$ we $B = \{3, 5\}$.

24. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{$10-*dan kiçi bolan täk sanlar*$\}$ we $B = \{$10-*dan kiçi bolan düýp sanlar*$\}$ bolsun.

a) A, B toplumlaryň elementlerini ýazyň;

b) A, B toplumlary Wenn diagrammasynda şekillendiriň;

c) $A \cap B$ we $A \cup B$ toplumlary tapyň.

25. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{$6-*nyň kratnylary*$\}$ we $B = \{$9-*uň kratnylary*$\}$ bolsun.

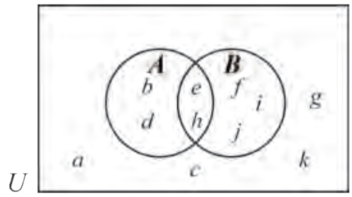
a) A, B toplumlaryň elementlerini ýazyň;

b) $A \cap B$ we $A \cup B$ toplumlary tapyň;

c) A, B toplumlary Wenn diagrammasynda şekillendiriň.

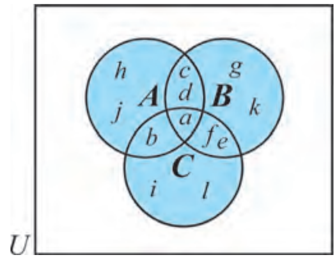
26. A, B toplumlary Wenn diagrammasynda görkezilen.

Aşakdaky toplumlaryň elementlerini ýazyň:



I A; **II** B; **III** A'; **IV** B';
V $A \cap B$; **VI** $A \cup B$; **VII** $(A \cup B)'$; **VIII** $A' \cup B'$.

27. A, B, C toplumlary Wenn diagrammasynda görkezilen.



a) Toplumlaryň elementlerini ýazyň:

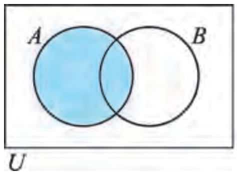
I A; **II** B;
III C; **IV** $A \cap B$;
V $A \cup B$; **VI** $B \cap C$;
VII $A \cap B \cap C$; **VIII** $A \cup B \cup C$.

b) Aşakdakylary tapyň:

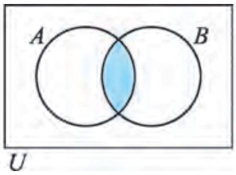
I $n(A \cup B \cup C)$;

II $n(A) + n(B) + n(C) -$
$- n(A \cap B) - n(A \cap C) -$
$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

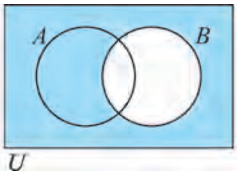
Wenn diagrammasynda toplumlary boýap şekillendirmek mümkin. Meselem, suratda, degişlilikde, A, $A \cap B$, B', $A \cap B'$ toplumlar boýalan:



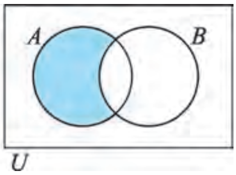
A



$A \cap B$



B'

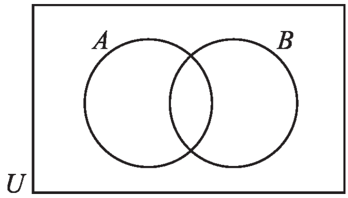


$A \cap B'$

Gönükmeler

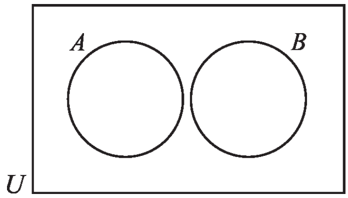
Diagrammalary depderiňize göçüriň we görkezilen toplumlary boýaň:

28.



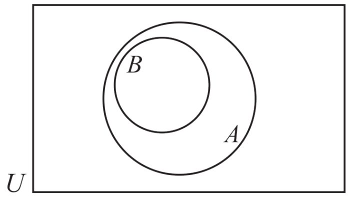
a) $A \cap B$; b) $A \cap B'$;
c) $A' \cup B$; d) $A \cup B'$;
e) $(A \cap B)'$; f) $(A \cup B)'$.

29.



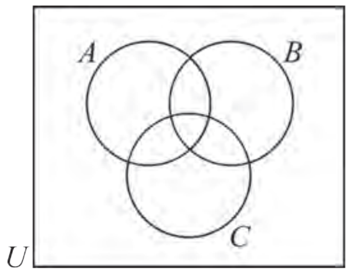
a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

30.



a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

31.



a) A; b) B';
c) $B \cap C$; d) $A \cup B$;
e) $A \cap B \cap C$; f) $A \cup B \cup C$;
g) $(A \cap B \cap C)'$; h) $(A \cup B) \cup C$;
i) $(B \cap C) \cap A$.

5-7 PIKIR ÝÖRETMELER. INKÄR, KONÝUNKSIÝA WE DIZÝUNKSIÝA

Çyn ýa-da ýalan bolan habar sözlemine ***pikir ýöretme*** diýilýär.

Sorag şeklindäki sözlemler, şahsyň gatnaşygyny aňladýan habar sözlemleri, meselem, "Ýaşyl reňk ýakymlydyr" pikir ýöretme bolup bilmeýär.

Käbir pikir ýöretmeleriň çyn-ýalanlygy bir bahaly anyklanmaýar.

Meselem, "Bu ýazyjy Daşkentde doglan" pikir ýöretme belli bir ýazyja görä çyn, başgasyna görä ýalan bolmagy mümkin.

1-nji mysal. Aşakdakylardan haýsysy pikir ýöretme bolýar? Eger ol pikir ýöretme bolsa, onuň çyn-ýalanlygy bir bahaly anyklanýarmy?

a) $20:4=80$; b) $25\cdot8=200$;
c) Meniň galamym nirede?
d) Seniň gözleriň mawy reňkde.

△ a) Bu pikir ýöretme we ol ýalan, çünki $20:4=5$ bolýar;
b) bu pikir ýöretme we ol çyn;
c) bu sorag sözlemi bolany üçin, ol pikir ýöretme bolmaýar;

d) bu pikir ýöretme, onuň çyn-ýalanlygy bir bahaly anyklanmaýar, çünki käbir adamlara görä ol ýalan, käbirlerine görä bolsa çyn.

Biz pikir ýöretmeleri *p, q, r* ... harplar bilen belgileýäris.

Meselem, *p:* Sişenbe güni ýagyş ýagdy;
q: 20:4=5;
r: *x* – jübüt san.

Çylşyrymlyrak pikir ýöretmeleri düzmek üçin $\wedge$ (konýunksiýa – "we", "emma"), $\vee$ (dizýunksiýa – "ýa-da"), $\neg$ (inkär – "... däl", "... nädogry") ***mantyky baglaýjylar*** diýilýän mahsus belgilerden peýdalanylýar. Olara garap çykalyň.

Inkär

p pikir ýöretme üçin "*p* däl" ýa-da "*p* ekendigi nädogry" görnüşdäki pikir ýöretme *p*-niň ***inkäri*** diýilýär we $\neg p$ ýaly belgilenýär.

Meselem, *p*: Sişenbe güni ýagyş ýagdy
pikir ýöretmäniň inkäri
$\neg p$: Sişenbe güni ýagyş ýagmady;

p: Medinäniň gözi mawy
pikir ýöretmäniň inkäri
$\neg p$: Medinäniň gözi mawy däl bolýar.

Görnüşi ýaly, *p* çyn bolsa, $\neg p$ ýalan, *p* ýalan bolsa $\neg p$ çyn pikir ýöretme bolýar. Bu maglumat ***çynlyk jedweliniň*** kömeginde düşündirilýär. Şeýle jedwel *p*-a garap täze $\neg p$ pikir ýöretmäniň çynlyk bahasy çyn T[1] ýa-da ýalan F[1]-digini anyklaýar:

p	$\neg p$
T	F
F	T

Gönükmeler

32. Aşakdakylardan haýsysy pikir ýöretme bolýar? Eger ol pikir ýöretme bolsa, onuň çyn-ýalanlygy bir bahaly anyklanýarmy?

a) 11−5=7; b) 12 – jübüt san; c) $2 \in Q$; d) $2 \notin Q$.
e) Parallelogram 4 sany tarapa eýe;
f) 37 – düýp san;
g) Seniň boýuň näçe santimetr?
h) Ähli kwadratlar dörtburçluk;
i) Gar ýagýarmy?
j) Dörtburçluk parallelogram däl;
k) Seniň doganyň 13 ýaşda;

[1] T we F harplary, degişlilikde, iňlisçe "true" (çyn), "false" (ýalan) sözleriniň baş harplarydyr.

l) Saňa taryhy kitaplar ýakýarmy?
m) Medine gowy aýdym aýdýar;
n) Sen Samarkantda doglansyň;
o) Garşylykly burçlar özara deň;
p) Parallel göni çyzyklar kesişýär.

33. Pikir ýöretmeleriň inkärini ýazyň. Bu pikir ýöretmäniň we onuň inkäriniň çyn-ýalanlygyny anyklaň.

a) *p:* ähli dörtburçluklar parallelogram bolýar;
b) *q:* $\sqrt{5}$ – irrasional san;
c) *r:* 7 – rasional san;
d) *s:* 23–14=12;
e) *t:* 52:4=13;
f) *u:* islendik iki jübüt sanlaryň tapawudy täk bolýar;
g) *p:* yzygider natural sanlaryň köpeltmek hasyly hemişe jübüt bolýar;
h) *q:* ähli kütek burçlar özara deň;
i) *r:* ähli trapesiýalar parallelogramlardyr;
j) *s:* eger üçburçlugyň iki burçy özara deň bolsa, ol deňýanly bolýar;

34. $x, y \in \mathbb{R}$ bolsun. Pikir ýöretmeleriň inkärini ýazyň:

a) $x > 5$;
b) $x \geqslant 3$;
c) $y < 8$;
d) $y \leqslant 10$.

35. Berlen *r, s* pikir ýöretmeler üçin *s* pikir ýöretme *r* pikir ýöretmäniň inkäri bolarmy?
Eger *s* pikir ýöretme *r* pikir ýöretmäniň inkäri bolmasa, *r* pikir ýöretmäniň dogry inkärini tapyň.

a) *r:* Medinäniň boýy 140 sm-dan beýik; *s:* Medinäniň boýy 140 sm -dan pes;
b) *r:* Akbar futbol bilen meşgullanýar; *s:* Akbar aýdym-saz bilen meşgullanýar;
c) *r:* Men bu gün gara çaý içdim; *s:* Men bu gün gök çaý içdim;
d) *r:* Men Samarkantda bolupdym; *s:* Men hiç haçan Samarkantda bolmadym.

2-nji mysal. Pikir ýöretmäniň inkärini düzüň:

a) x – gawun, $x \in \{gawunlar, garpyzlar\}$;
b) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{N}$;
c) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}$;

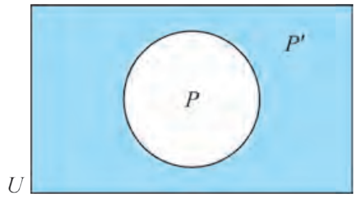
△ a) x – garpyz;
b) $x = 1$;
c) $x < 2$ we $x \in \mathbb{Z}$. ▲

Gönükme

36. Pikir ýöretmäniň inkärini düzüň.

a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$;
b) $x \in \{atlar,\ goýunlar\}$;
c) $x \geqslant 0,\ x \geqslant \mathbb{Z}$;
d) x – okuwçy bola, $x \in \{okuwçylar\}$;
e) x – okuwçy gyz, $x \in \{gyzlar\}$.

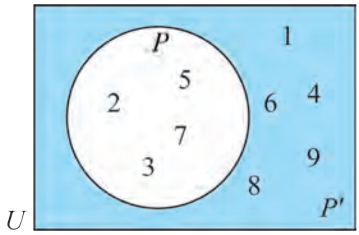
Pikir ýöretmäniň inkärini Wenn diagrammasyndan peýdalanyp hem düzmek mümkin.
Meselem, *p:* "*x* san 10-dan uly" diýen pikir ýöretmä garalyň.



Diagrammada U – ähli sanlar toplumy, P toplum p pikir ýöretmäniň **çynlyk toplumy**, ýagny ol çyn pikir ýöretme bolýan x -laryň toplumy, P' toplum diýip $\neg p$ inkäriň çynlyk toplumy görkezilen.

3-nji mysal. $U = \{\,x \mid 0 < x < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$ -da p: x – **düýp san** pikir ýöretmä garalyň. p we $\neg p$-niň çynlyk toplumlaryny tapyň.

△ P toplum p pikir ýöretmäniň **çynlyk toplumy**, P' toplum $\neg p$ inkärniň çynlyk toplumy bolsun. Onda $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $P' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$.
Bu toplumlar Wenn diagrammasynda aşakdaky ýaly şekillendirilýär:



▲

Gönükmeler

37. Pikir ýöretmeleriň inkärini düzüň, Wenn diagrammasynda şekillendiriň:

a) $U = \{\,x \mid 20 < x < 30\}$ -da p: x – düýp san;
b) $U = \{\,x \mid 1 < x < 10\}$ -da p: x – jübüt san.

38. U = {10-*njy synp okuwçylary*}, M = {*aýdym-saz gurnagynda meşgullanýan okuwçylar*}, O = {*orkestrde saz çalýan okuwçylar*} bolsa, aşakdaky pikir ýöretmeleri Wenn diagrammasynda şekillendiriň:

a) aýdym-saz gurnagynda meşgullanýan ähli okuwçylar orkestrde saz çalýarlar;
b) orkestrde saz çalýan okuwçylardan hiç biri aýdym-saz gurnagynda meşgullanmaýar;

c) orkestrde saz çalaýan okuwçylaryň hemmesi aýdym-saz gurnagynda meşgullanmaýar.

39. $U=\{x \mid 5<x<15, x\in\mathbb{N}\}$ da p: $x<9$ pikir ýöretmäni Wenn diagrammasynda şekillendiriň we $\neg p$ inkäriň çynlyk toplumynyň elementlerini ýazyň.

40. $U=\{x \mid x<10, x\in\mathbb{N}\}$ da p: $x-$ jübüt san pikir ýöretmäni Wenn diagrammasynda şekillendiriň we inkäriň çynlyk toplumynyň elementlerini ýazyň.

Konýunksiýa

Eger iki pikir ýöretme **"we"** sözi bilen baglansa, emele gelen täze pikir ýöretme berlen pikir ýöretmelere *konýunksiýasy* diýilýär.

p, q pikir ýöretmeleriň konýunksiýasy $p\wedge q$ ýaly belgilenýär.

Meselem,

p: Eldar günortan palaw iýdi;

q: Eldar günortan somsa iýdi.

Pikir ýöretmeleriň konýunksiýasy aşakdaky ýaly bolýar:

p∧q: Eldar günortan palaw we somsa iýdi.

Görnüşi ýaly, $p\wedge q$ pikir ýöretme Eldar günortanlyga hem palaw, hem somsa iýende, ýagny p, q pikir ýöretmeleriň ikisi-de çyn bolanda çyn bolýar.Eger p, q pikir ýöretmeleriň haýsy-da bolsa biri ýalan bolsa, onda $p\wedge q$ pikir ýöretme çyn bolmaýar.

p, q pikir ýöretmeleriň konýunksiýasy aşakdaky çynlyk jedweline eýe:

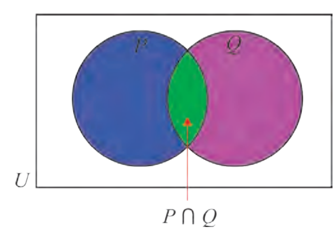
p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p, q pikir ýöretmeleriň ikisi-de çyn bolanda $p\wedge q$ çyn bolýar.

p, q pikir ýöretmeleriň haýsy-da bolsa biri ýalan bolanda $p\wedge q$ pikir ýöretme ýalan bolýar.

Birinji we ikinji sütünler p, q pikir ýöretmeleriň mümkin bolan çynlyk bahalaryndan düzülen.

Diagrammada P toplum p pikir ýöretmäniň, Q toplum bolsa q pikir ýöretmäniň çynlyk toplumlary bolsa, $p\wedge q$ pikir ýöretmäniň çynlyk toplumy iki pikir ýöretme-de çyn bolan $P\cap Q$ toplum bolýar:



Gönükmeler

41. Aşakdaky pikir ýöretmeleriň konýunksiýasyni ýazyň:

a) p: Medine – terapewt; q: Munisa – stomatolog;
b) p: x san 15-den uly; q: x san 30-dan kiçi;
c) p: howa bulutly; q: ýagyş ýagýar;
d) p: Alymyň saçlary gara; q: Alymyň gözleri mawy.

42. $p \wedge q$ pikir ýöretmäniň çyn-ýalan bolýandygyny anyklaň:

a) p: 5 – täk san; q: 5 – düýp san;
b) p: kwadrat dört tarapa eýe; q: üçburçluk bäş tarapa eýe;
c) p: $39 < 27$; q: $16 > 23$;
d) p: 12 sany 3-e bölünýär; q: 12 sany 4-e bölünýär;
e) p: $5+8 = 12$; q: $6+9 = 15$.

43. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$ üçin p: x –jübüt san, q: x sany 7 dan kiçi pikir ýöretmeler berlen.
a) Wenn diagrammasynda p, q pikir ýöretmeleriň çynlyk toplumlaryny;
b) $p \wedge q$ pikir ýöretmäniň çynlyk toplumyny şekillendiriň.

Dizýunksiýa

Eger iki pikir ýöretme **"ýa-da"** sözi bilen baglansa, emele gelen täze pikir ýöretme berlen pikir ýöretmeleriň *dizýunksiýasy* diýilýär.
p, q pikir ýöretmeleriň dizýunksiýasy $p \vee q$ ýaly belgilenýär.

Meselem,

p: Eldar bu gün kitaphana bardy; *q: Eldar bu gün teatra bardy.*

Pikir ýöretmeleriň dizýunksiýasy aşakdaky ýaly aňladylýar:

p∨q: Eldar bu gün ýa-da kitaphana ýa-da teatra bardy.

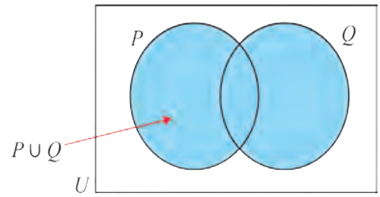
Görnüşi ýaly, $p \vee q$ pikir ýöretme Eldar bu gün kitaphanadan ýa-da teatrdan birine ýa-da ikisine baranda çyn bolýar.

Eger p, q pikir ýöretmeleriň ikisi ýalan bolsa, onda $p \vee q$ pikir ýöretme çyn bolmaýar.

p, q pikir ýöretmeleriň dizýunksiýasy aşakdaky çynlyk jedweline eýe:

p	q	$p \vee q$	
T T F	T F T	T T T	p, q pikir ýöretmeleriň haýsy-da bolsa biri çyn bolanda $p \vee q$ çyn bolýar.
F	F	F	p, q pikir ýöretmeleriň ikkalasi ýalan bolanda $p \vee q$ pikir ýöretme ýalan bolýar.

Diagrammada P toplum p pikir ýöretmäniň, Q toplum bolsa q pikir ýöretmäniň çynlyk toplumlary bolsa, $p \vee q$ pikir ýöretmäniň çynlyk toplumy iki pikir ýöretmde çyn bolan $P \cup Q$ toplum bolýar:



Gönükmeler

44. $p \vee q$ pikir ýöretmäniň çyn-ýalan bolýandygyny anyklaň:

a) *p:* 24 sany 4-e bölünýär, *q:* 24 sany 6-a bölünýär;

b) *p:* $-8>-5$, *q:* $5<0$.

45. $p \vee q$ pikir ýöretmäniň çyn-ýalan bolýandygyny anyklaň:

a) *p:* 5 we 9 sanlarynyň orta arifmetigi 7-ä deň, *q:* 8 we 14 sanlaryň orta arifmetigi 10-a deň;

b) *p:* $5+8 = 12$, *q:* $6+9 = 15$.

46. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 20, x \in \mathbb{Z}\}$ üçin:

p: x san 3-e kratny, *q:* x – düýp san pikir ýöretmelere garalyň.

a) Wenn diagrammasynda *p, q* pikir ýöretmeleriň çynlyk toplumlaryny şekillendiriň;

b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ pikir ýöretmäniň çynlyk toplumlaryny şekillendiriň.

47. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$ üçin:

p: x – düýp san, *q:* x san 12-niň bölüjisi pikir ýöretmelere garalyň.

a) Berlen Wenn diagrammasynda *p, q* pikir ýöretmeleriň çynlyk toplumlaryny şekillendiriň;

b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ pikir ýöretmäniň çynlyk toplumlaryny şekillendiriň.

48. *x:* Serdar ertir ýüzmäge barýar;

y: Serdar ertir futbola barýar.

Aşakdakylary *x, y* we $\neg$, $\vee$, $\wedge$ mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň:

a) Serdar ertir ýüzmäge barmaýar;

b) Serdar ertir ýüzmäge we futbola barýar;

c) Serdar ertir ýa-da ýüzmäge, ýa-da futbola barýar;

d) Serdar ertir ne ýüzmäge, ne futbola barýar;

e) Serdar ertir ýüzmäge barýar, emma futbola barmaýar.

49. Sözlemleri $\neg$, $\vee$, $\wedge$ mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň:

a) Serdara doňdurma we sowuk içgiler ýakýar;

b) Serdara doňdurma ýakýar, emma sowuk içgiler ýakmaýar;

c) x sany 10-dan uly bolan düýp sandyr;
d) kompýuter işlemeýär.

50. Pikir ýöretmeler Serdaryň takmyny gün tertibini kesgitleýär:
p: Serdar ir turdy;
q: Serdar ertirlik edindi;
r: Serdar günortanlyga çorba içdi;
s: Serdar agşamky nahara palaw iýdi;
u: Serdar sport bilen meşgullandy;
v: Serdar kitap okady.
Aşakdakylary tebigy dilde aňladyň (aýdyň):
a) q; b) s; c) $q \wedge u$; d) $r \wedge s$; e) $r \vee s$; f) $u \vee v$

8-9 MANTYKY DEŇGÜÝÇLÜLIK. MANTYKY KANUNLAR

Manysyna garap tebigy dildäki ýönekeý pikir ýöretmeleri harplar bilen erkin belgiläp inkär, konýunksiýa we dizýunksiýa ýaly mantyky baglaýjylaryň kömeginde çylşyrymlyrak pikir ýöretmeleriň çyn-ýalanlygyna üns bermezden simwolik görnüşlerini düzeliň.

Tebigy dildäki pikir ýöretme	Simwolik şekili
Inkär:	
1. Salim öýde **däl**.	$\neg S$
2. Pul aňsat tapylmaýar.	$\neg M$
3. Raşidiň kitap okaýandygy **nädogry**.	$\neg R$
4. Meryemiň Buharadandygy **ýalan**.	$\neg B$
Konýunksiýa:	
5. Akmal bilen Sunnat ikisi mugallym.	$A \wedge S$
6. Babur **hem-de** Ahmet sport bilen meşgullanýar.	$B \wedge A$
7. Babur güýçli, **emma** Ahmet ondan güýçlüräk.	$B \wedge A$
8. Ähli media (habar) serişdeleri garşy bolsa **hem**, "Barselona" futbol kluby iň gowy klub hasaplanýar.	$M \wedge B$
Dizýunksiýa:	
9. Maral ýa-da metroda ýa-da awtobusda geler.	$M \vee A$
10. Babur ýa-da Ahmet sportuň şu görnüşini saýlady.	$B \vee A$

Inkär, konýunksiýa we dizýunksiýa üçin çynlyk jedwellerini umumlaşdyryp, çylşyrymlyrak pikir ýöretmeler üçin çynlyk jedwellerini düzmek mümkin:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

1-nji mysal. $p \vee \neg q$ pikir ýöretmäniň çynlyk jedwelini düzüň.

1-nji ädim

Birinji we ikinji sütünler p we q-laryň mümkin bolan çynlyk bahalaryndan düzülen jedweli ýazýarys:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2-nji ädim

Üçünji sütündäki q-nyň çynlyk bahalaryna garap $\neg q$-nyň çynlyk bahalaryny ýazýarys:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	F	
F	F	T	

3-nji ädim

Dördünji sütündäki p we $\neg q$-nyň çynlyk bahalaryna garap $p \vee \neg q$-nyň çynlyk bahalaryny ýazýarys: ▲

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

Hemişe çyn bolan pikir ýöretmä ***mantyky kanun ýa-da tawtologiýa*** diýilýär. Pikir ýöretme mantyky kanun bolýandygyny çynlyk jedweliniň kömeginde subut etmek mümkin.

2-nji mysal. $p \vee \neg p$ pikir ýöretme tawtologiýa bolýandygyny subut ediň.

△ Çynlyk jedwelini düzýäris:
$p \vee \neg p$ pikir ýöretme hemişe çyn bahalary (üçünji sütüne garaň) kabul edendigi sebäpli ol tawtologiýa bolýar. ▲

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Iki pikir ýöretmäniň çynlyk jedwellerindäki degişli sütünler bir hili bolsa, bu pikir ýöretmeler mantyky **deňgüýçli** diýilýär.

3-nji mysal. $\neg(p \wedge q)$ we $\neg p \vee \neg q$ pikir ýöretmeleriň mantyky deňgüýçli bolýandygyny subut ediň.

$\neg(p \wedge q)$ we $\neg p \vee \neg q$ pikir ýöretmeler üçin çynlyk jedwelleri düzýäris:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T

$\neg(p \wedge q)$ we $\neg p \vee \neg q$ pikir ýöretmeleriň çynlyk jedwellerindäki degişli sütünler birmeňzeş, diýmek, bu pikir ýöretmeler mantyky deňgüýçli.
Bu gatnaşygy $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ ýaly ýazýarys.

Gönükmeler

51. Pikir ýöretmeler üçin çynlyk jedwellerini düzüň:
a) $\neg p \wedge q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p \vee \neg q$; d) $p \vee p$.

52. Pikir ýöretmeler tawtologiýa bolarmy:
a) $\neg p \wedge \neg q$; b) $(p \vee q) \vee \neg p$; c) $p \wedge \neg q$?

53. Mantyky deňgüýçlülikleri subut ediň:
a) $\neg(\neg p) = p$; b) $p \wedge q = p$; c) $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$;
d) $\neg(q \wedge \neg p) = \neg q \wedge (p \vee q)$.

54. Pikir ýöretmeler berlen bolsun:
p: Serdar almany gowy görýär;
q: Serdar üzümi gowy görýär.
Aşakdaky pikir ýöretmeleri tebigy dilde aňladyň:
a) $p \vee q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p$; d) $\neg p \wedge \neg q$.

55. Çynlyk jedwelini düzüp, $\neg(p \vee q)$ we $\neg p \wedge \neg q$ pikir ýöretmeler mantyky deňgüýçli bolýandygyny subut ediň.

10-11 IMPLIKASIÝA, KONWERSIÝA, INWERSIÝA WE KONTRAPOZISIÝA

Implikatsiya

Iki pikir ýöretme "eger ... bolsa, onda …" jümle bilen baglansa, onda pikir ýöretmeler ***implikasiýasyna*** eýe bolarys.

"Eger p bolsa, onda q" implikatiw pikir ýöretme $p \Rightarrow q$ ýaly belgilenýär we "p-den q gelip çykýar", "p pikir ýöretme q üçin ýeterli", "q pikir ýöretme p üçin zerur" manylary hem aňladýar.

Munda p pikir ýöretme q üçin ***ýeterli şert***, q pikir ýöretme p üçin ***zerur şert*** diýlip atlandyrylýar.

Meselem, p: *Serdaryň telewizory bar*; q: *Serdar kino görýär*
pikir ýöretmeler üçin

$p \Rightarrow q$: *Serdaryň telewizory bolsa, ol kino görýär*

pikir ýöretmäni aňladýar.
Edil şeýle $p \Rightarrow q$: *Serdar kino görmek üçin onda telewizor bolmagy ýeterli*
pikir ýöretmäni alýarys.

$p \Rightarrow q$ pikir ýöretme diňe p çyn bolup, q ýalan bolsa, p pikir ýöretme çyn bolany üçin aşakdaky çynlyk jedwelini alýarys:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ýönekeý pikir ýöretmeleriň hem-de mantyky baglaýjylaryň kömeginde çyn-ýalanlyga üns bermezden çylşyrymlyrak pikir ýöretmeleri düzmek mümkin.

1-nji mysal. p: *"Maral kinofilmleri köp görýär"*; q: *"Jeren kinofilmleri köp görýär"*; r: *"Jeren synagdan geçip bilmeýär"*; s: *"täsinlik bolup geçýär"* pikir ýöretmeler berlen bolsun.

Onda aşakdakylara eýe bolarys:

1. $p \wedge \neg q$: *"Maral kinofilmleri köp görýär, Jeren bolsa ýok"*.
2. $p \Rightarrow \neg q$: *"Maral kinofilmleri köp görse, Jeren kinofilmleri köp görmeýär"*.
3. $p \Rightarrow (r \vee s)$: *"Jeren kinofilmleri köp görse, ol ýa-da synagdan geçip bilmeýär ýa-da täsinlik bolup geçýär"*.
4. $(p \wedge \neg s) \Rightarrow r$: *"Jeren kinofilmleri köp görse we täsinlik bolup geçmese, onda Jeren synagdan geçip bilmeýär"*.
5. $(q \wedge s) \vee r$: *"Ýa-da Jeren kinofilmleri köp görýär we täsinlik bolup geçýär, ýa-da Jeren synagdan geçip bilmeýär"*.

Ekwiwalensiýa

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ görnüşdäki pikir ýöretme p we q pikir ýöretmeleriň ekwiwalensiýasy diýilýär we $p \Leftrightarrow q$ ýaly belgilenýär.

$p \Leftrightarrow q$ ýazuw "p pikir ýöretme q üçin zerur we ýeterli" ýa-da "p pikir ýöretme diňe q bolanda ýerlikli bolýar", diýlip okalýar.

2-nji mysal. p: x – jübüt san, q: *x sanyň ahyrky sifri jübüt* pikir ýöretmeler üçin $p \Leftrightarrow q$ pikir ýöretme nähili okalýar?

$p \Rightarrow q$: *x jübüt san bolsa, onuň ahyrky sifri jübüt bolýar*;

$q \Rightarrow p$: *x sanyň ahyrky sifri jübüt bolsa, ol jübüt bolýar.*

pikir ýöretmelere garasak, $p \Leftrightarrow q$ ýazuw "x san jübüt bolmagy üçin onuň ahyrky sifri jübüt bolmaly we ýeterli" ýa-da "x san diňe onuň ahyrky sifri jübüt bolanda jübüt bolýar" diýlip okalýar.

Indi islendik p we q pikir ýöretmeler berlen bolsa $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ pikir ýöretme üçin çynlyk jedwelini düzýäris:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Diýmek, $p \Leftrightarrow q$ pikir ýöretmäniň çynlyk jedweli aşakdaky ýaly bolýar. Görnüşi ýaly, $p \Leftrightarrow q$ pikir ýöretme p we q pikir ýöretmeleriň çynlyk bahalary diňe birmeňzeş (ýagny ýa-da ikisi-de çyn, ýa-da ikisi-de ýalan) bolanda çyn bolýar.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Gönükmeler

56. Aşakdaky implikatiw pikir ýöretmelerde zerur we ýeterli şertleri anyklaň we bu pikir ýöretmeleri "zerur", "ýeterli" sözlerini ulanyp başgaça aňladyň:
a) eger men ertirki awtobusa ýetişmesem, mekdebe gijä galaryn;
b) eger temperatura ýeterliň peselse, ýapdaky suw doňýar;
c) eger $x > 20$ bolsa, $x > 10$ bolýar;
d) eger men gol ursam, biziň komandamyz ýeňiş gazanmagy mümkin.

57. $p \Rightarrow q$ pikir ýöretmäni tebigy dilde aňladyň:
a) p: Gün ýalpyldaýar, q: men suwa düşmäge barjak;
b) p: x san 6-a bölünýär, q: x – jübüt san;
c) p: sowadyjyda ýumurtgalar bar, q: Medine tort bişirýär.

58. a) $p \Rightarrow \neg q$; b) $\neg q \Rightarrow \neg p$;
c) $(p \vee q) \Rightarrow p$; d) $q \wedge (p \Rightarrow q)$;
e) $p \Leftrightarrow \neg q$; f) $(p \Leftrightarrow q) \wedge \neg p$;
g) $p \Rightarrow (p \wedge \neg q)$; h) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$
pikir ýöretmeleriň çynlyk jedwellerini düzüň.

59. Pikir ýöretmeleri simwolik görnüşde aňladyň:
p: ýagyş ýagdy, q: lüýkler peýda boldy;
a) ýagyş ýagsa, lüýkler peýda bolýar;
b) lüýkler peýda boldy, diýmek, ýagyş ýagdy;
c) lüýkler ýok;
d) ýagyş ýagmady;
e) eger ýagyş ýagmasa, lüýkler peýda bolmaýar;
f) eger lüýkler peýda bolmasa, ýagyş ýagmandyr;

g) eger lüýkler peýda bolmasa, ýagyş ýagýar;
h) lüýkler peýda bolmagy üçin ýagyş ýagmaly we ýeterli.

60. Çynlyk jedwellerini düzüp,
$\neg p \Rightarrow q = p \vee q$;
$p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ bolýandygyny subut ediň.

61. $q \Rightarrow p$ pikir ýöretmäge mantyky deňgüýçli pikir ýöretmäni tapyň:
a) $p \Rightarrow q$; b) $\neg q \Rightarrow p$;
c) $q \Rightarrow \neg p$; d) $\neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$.

62. Pikir ýöretmelerden haýsylary hemişe çyn, hemişe ýalan bolýar?
a) $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$; b) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$;
c) $(p \Rightarrow \neg q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$.

Konwersiýa

$p \Rightarrow q$ pikir ýöretmäniň ***konwersiýasy*** diýip $q \Rightarrow p$ pikir ýöretmäge aýdylýar.
Konwersiýa aşakdaky çynlyk jedweline eýe:

p	q	$q \Rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

3-nji mysal.
p: üçburçlugyň deňýanly,
q: üçburçlugyň iki burçy deň pikir ýöretmelere garalyň.
$p \Rightarrow q$ pikir ýöretmäni we onuň konwersiýasyny tebigy dilde aňladyň.

$\triangle$ $p \Rightarrow q$: Eger üçburçluk deňýanly bolsa, onda onuň iki burçy deň.
$q \Rightarrow p$: Eger üçburçlugyň iki burçy deň bolsa, onda beýle üçburçluk deňýanly bolýar. $\blacktriangle$

Inwersiya

$p \Rightarrow q$ pikir ýöretmäniň ***inwersiýasy*** diýip $\neg p \Rightarrow \neg q$ pikir ýöretmäge aýdylýar.
Inwersiýa aşakdaky çynlyk jedweline eýe:
Bu jedwel $q \Rightarrow p$ pikir ýöretmäniň çynlyk jedweli bilen üstme-üst düşýär, diýmek, konwersiýa we inwersiýa mantyky deň güýçli eken.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Kontrapozisiýa

$p \Rightarrow q$ pikir ýöretmäniň kontrapozisiýasy diýip $\neg q \Rightarrow \neg p$ pikir ýöretmäge aýdylýar.
Kontrapozisiýa aşakdaky çynlyk jedweline eýe:
Bu jedwel $p \Rightarrow q$ pikir ýöretmäniň çynlyk jedweli bilen üstme-üst düşýär, diýmek, implikasiýa we kontrapozisiýa mantyky deň güýçli eken.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

4-nji mysal. "Hemme mugallymlar mekdebe golaý ýerde ýaşaýar" pikir ýöretmäniň kontrapozisiýasyny düzüň.

Bu pikir ýöretme aşakdaky ýaly aňladylmagy mümkin: "Eger bu adam mugallym bolsa, ol mekdebiň golaýynda ýaşaýar".
Bu habar sözlemi $p \Rightarrow q$ şekile eýe, bu ýerde:
p: Bu adam – mugallym, q: Bu adam mekdebiň golaýynda ýaşaýar.
$\neg q \Rightarrow \neg p$ kontrapozisiýa aşakdaky ýaly aňladylýar:
"Eger bu adam mekdebiň golaýynda ýaşamasa, onda ol mugallym däl".

5-nji mysal. *p: Samandar kitaphanada,*
q: Samandar kitap okaýar
pikir ýöretmelere garalyň. Onuň üçin imlikasiýa, konwersiýa, inwersiýa we kontrapozisiýany düzüň.

Implikasiýa $p \Rightarrow q$ — Samandar kitaphanada bolsa, ol kitap okaýar.

Konwersiýa $q \Rightarrow p$ — Samandar kitap okasa, ol kitaphanada bolýar.

Inwersiýa $\neg p \Rightarrow \neg q$ — Samandar kitaphanada bolmasa, ol kitap okamaýar.

Kontrapozisiýa $\neg q \Rightarrow \neg p$ — Samandar kitap okamaýan bolsa, ol kitaphanada bolmaýar.

Implikasiýa we konwersiýa mantyky deň güýçli bolmaýar, çünki, meselem, Samandar kitaby synpda okamagy-da mümkindigini aýtmak ýerliklidir.

Gönükmeler

63. Konwersiýa we inwersiýa düzüň:
a) eger Diýara kürtekçe geýse, ol ýylynýar;
b) eger iki üçburçluk meňzeş bolsa, olaryň degişli burçlary deň bolýar;

c) eger $2x^2 = 12$ bolsa, onda $x = \pm\sqrt{6}$ bolýar;
d) eger Alym oýun oýnasa, ol hoşal bolýar;
e) eger üçburçluk dogry bolsa, onda onuň taraplary deň bolýar.

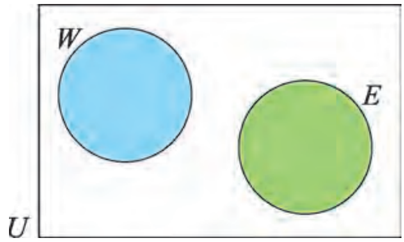
64. Aşakdaky pikirýöretmeleriň kontrapozisiýalaryny düzüň:
a) ähli bägüller tikenli;
b) ähli sudýalar (žýuriler) hemişe dogry karar çykarýarlar;
c) hemme gowy futbolçylar pökgini anyk nyşana depýärler;
d) suwuklyk gaba guýlanda gabyň şeklini kabul edýär;
e) eger adam halal we sowatly bolsa, ol üstünlik gazanýar.

65. a) "ähli 10-njy synp okuwçylary matematikany öwrenýärler" pikir ýöretmesiniň kontrapozisiýasyny düzüň;
b) "ähli 10-njy synp okuwçylary matematikany öwrenýärler" pikir ýöretmesi çyn bolsa, aşakdakylar barada nähili karara gelersiňiz:
"Şawkat – 10-njy synp okuwçysy";
"Myrat matematikany öwrenmeýär";
"Durdy hem matematikany, hem iňlis dilini öwrenýär"?

66. Pikir ýöretmeleriň kontrapozisiýalaryny düzüň:
a) x san 3-e bölünýär $\Rightarrow x^2$ sany 9-a bölünýär;
b) x sanyň ahyrky sifrii 2 bolsa $\Rightarrow x$ – jübüt san;
c) $ABCD$ – gönüburçluk $\Rightarrow AB \| CD$ we $AD \| BC$;
d) ABC – dogry üçburçluk $\Rightarrow \angle ABC = 60°$.

67. p: Öý iň köpi bilen 3 äişgeli bolýar,
q: Öý daşary tüsse çykarýan tüsseçykara eýe
pikir ýöretmelere garalyň.
Onda $p \Rightarrow q$: Eger öý iň köpi bilen 3 äpişgeli bolsa, ol daşary tüsse çykarýan tüsseçykara eýe;
a) konwersiýa, inwersiýa we kontrapozisiýa düzüň;
b) aşakdaky ýagdaýlarda implikasiýa, konwersiýa, inwersiýa we kontrapozisiýa üçin çyn-ýalanlygy anyklaň:

68. Diagrammada W – gowşak özleşdirýän okuwçylar, E bolsa 10-njy synp okuwçylary toplumyny şekillendirýär.
Aşakdaky pikir ýöretmeleri dolduryň:



a) .... gan gowşak özleşdirýän okuwçylar ýok;
b) .... gan 10-njy synp okuwçylary ýok;
c) eger $x \in W$ bolsa, onda ......;
d) eger $x \in E$ bolsa, onda ......;
e) c we d gatnaşyklaryň arasynda nähili baglanyşyk bar?

12-13 PREDIKATLAR WE KWANTORLAR

Predikatlar we kwantorlar

Käbir pikir ýöretmelerde üýtgeýjiler gatnaşyp, şu üýtgeýjileriň ýerine anyk bahalary goýsak, pikir ýöretme emele gelýär.
Şeýle pikir ýöretmä ***predikat*** diýilýär.

1-nji mysal. $P(x)$: "$x^2 > x$" predikat bolsa,
$P(2)$, $P(\frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{2})$ pikir ýöretmeleriň çyn-ýalanlygyny anyklaň.

△ $P(2)$: $2^2>2$ – çyn. $P(\frac{1}{2})$: $(\frac{1}{2})^2>\frac{1}{2}$ – ýalan. $P(-\frac{1}{2})$: $(-\frac{1}{2})^2>-\frac{1}{2}$ – çyn. ▲

Käbir predikatlarda üýtgeýjini onuň manysyna garap kesgitlemek mümkin.

Meselem, "Bu ýazyjy Daşkentde doglan" we "Ol Daşkentde doglan" habar sözlemlerde üýtgeýji "Bu ýazyjy" söz düzümi ýa-da "ol" çalyşmadyr. Olaryň ýerine "Abdulla Kadyry" bahasyny goýsak, "Abdulla Kadyry Daşkentde doglan" çyn pikir ýöretmäni, "Şekspir" bahany goýsak, "Şekspir Daşkentde doglan" ýalan pikir ýöretmäni alarys.

x arkaly üýtgeýjini belgilesek, ýokardaky habar sözlemleri "x Daşkentde doglan" şeklinde ýazmak mümkin.

Predikatda bir ýa-da birnäçe üýtgeýji gatnaşmagy mümkin, gatnaşan üýtgeýjilere garap predikat $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$, ... ýaly belgilenýär.

Predikatlar bilen birlikde $\forall$ (umumylyk kwantory, "hemme ... ler üçin") we $\exists$ (barlyk kwantory, "şeýle ... bar bolup") mahsus belgilerden peýdalanyp, täze pikir ýöretmeler alynýar. Meselem, $\forall xP(x)$ görnüşdäki täze pikir ýöretme x-iň ähli bahalary üçin $P(x)$ bolýandygyny, $\exists xP(x)$ görnüşdäki täze pikir ýöretme bolsa x-iň $P(x)$ bolýan bahasy bardygyny aňladýar.

Meselem, $P(x)$: "x Samarkantda doglan" predikata garaýarys.
Onda $\forall xP(x)$ görnüşdäki täze pikir ýöretme "hemme Samarkantda doglan" ýaly, $\exists xP(x)$ görnüşdäki täze pikir ýöretme bolsa "şeýle adamlar bar bolup, olar Samarkantda doglan" ýaly okalýar.

$\forall xP(x)$, $\exists xP(x)$ görnüşdäki pikir ýöretmeleriň çyn-ýalanlygyny kesgitlemek üçin mysallar getirýäris.

2-nji mysal.
$D = \{1,2,3,4,5\}$ bolsa, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ pikir ýöretme çyn bolýandygyny subut ediň.

Görnüşi ýaly,
$1^2 \geqslant 1,\quad 2^2 \geqslant 2,\quad 3^2 \geqslant 3,\quad 4^2 \geqslant 4,\quad 5^2 \geqslant 5.$
Diýmek, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ pikir ýöretme çyn eken.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$ pikir ýöretme ýalan bolýandygyny subut etmek üçin x-iň ol ýalan bolýan bir bahasyny tapmak ýeterli, diýmek ýerliklidir.

Çyndan hem, $x=\frac{1}{2}$ bolanda $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ bolýar.

x -iň $\forall xP(x)$ pikir ýöretmäniň ýalanlygyny görkezýän haýsy-da bolsa bir bahasyna ***kontrmysal*** diýilýär.

3-nji mysal. $\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ pikir ýöretme çyn bolýandygyny subut ediň.
$1^2=1$ bolany üçin, $\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ pikir ýöretme çyn eken.
Eger $E=\{5,6,7,8\}$ bolsa, $\exists m \in E,\ m^2 \geqslant m$ pikir ýöretme ýalan, çünki
$5^2 = 25 \neq 5;\quad 6^2 = 36 \neq 6;\quad 7^2 = 49 \neq 7;\quad 8^2 = 64 \neq 8.$

Inkär amaly bilen bagly iki möhüm mantyky kanuny getirýäris:
$$\neg(\exists xP(x)) = \forall x(\neg P(x)),\qquad \neg(\forall xP(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$
Şu kanunlaryň manysyny düşünmek üçin mysal getireliň.

$P(x)$: "x synpdaşym otliçnik" predikata garalyň.

$\neg(\exists xP(x))$ ýazuw "synpdaşlarym içinde otliçniklar bar däl" pikir ýöretmäni, $\forall x(\neg P(x))$ ýazuw bolsa oňa deňgüýçli pikir ýöretme bolan "Hemme synpdaşlarym otliçnik däl" pikir ýöretmäni aňladýar.

Edil şeýle, $\neg(\forall xP(x))$ formula "Hemme synpdaşlarym otliçnidigi nädogry" pikir ýöretmäni, $\exists x(\neg P(x))$ formula bolsa oňa deň güýçli pikir ýöretme bolan "Käbir synpdaşlarym otliçnik däl" pikir ýöretmäni aňladýar.

Görnüşi ýaly, $P(x,y)$ predikatdan kwantorlaryň kömeginde

$$\forall x P(x,y), \quad \forall y P(x,y), \quad \exists x P(x,y), \quad \exists y P(x,y)$$

görnüşdäki bir üýtgeýjili predikatlary, olardan bolsa, öz gezeginde.

$$\forall x \exists y P(x,y), \quad \exists y \forall x P(x,y), \quad \exists x \forall y P(x,y), \quad \forall y \exists x P(x,y),$$
$$\forall x \forall y P(x,y), \quad \forall y \forall x P(x,y), \quad \exists x \exists y P(x,y), \quad \exists y \exists x P(x,y)$$

görnüşdäki pikir ýöretmeleri gurmak mümkin.

$\forall x \forall y P(x,y)$, $\forall y \forall x P(x,y)$ hem-de $\exists x \exists y P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$ pikir ýöretmeleriň manylary bir hili bolsa-da, $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$ pikir ýöretmeler deňgüýçli däl eken.

Meselem, $P(x,y)$*: y adam x synpdaşymyň atasy* predikata garaýarys.

Munda $\forall x \exists y P(x,y)$ = "*islendik synpdaşymyň atasy bar*"; $\exists y \forall x P(x,y)$ "*şeýle adam bar bolup, ol ähli synpdaşlarymyň atasy bolýar*" pikir ýöretmeleri aňladýar.

Edil şeýle, $\exists x \forall y P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$ pikir ýöretmeler deňgüýçli däldigini görkezmek mümkin (özbaşdak ýagdaýda mysallar düzüň).

Predikatlaryň we kwantorlaryň kömeginde mantyky kanunlary almak mümkin.

Meselem, "Eger ähli gargalar gara bolsa, gara bolmadyk guşlaryň hiç biri garga däl" pikir ýöretme

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\, (\neg\, B(x) \Rightarrow \neg A(x))$$

mantyky kanuna mysal bolup biler.

Gönükmeler

69. Pikir ýöretmeleri predikatlar we kwantorlar kömeginde aňladyň:

a) käbir guşlar uçup bilmeýär;
b) käbir ýazyjylar şahyr däl;
c) käbir çybynlar çakmaýar;
d) hemme planetalar şar şeklinde;
e) ähli esgerler güýçli adamlar;
f) ähli hirurglar – lukmanlar;
g) hemme aýylar bal iýýärler;
h) islendik tegelek – ýasy şekil;
i) käbir towşanlar kelemi gowy görýärler;
j) käbir kitaplar gyzykly;
k) hemme eneler çagalaryny eý görýärler.

Şu pikir ýöretmeleriň inkärini düzüň hany?

70. Pikir ýöretmeleri, mümkin bolsa, dowam etdiriň:

a) hiç hili süýdemdiriji žabralardan dem alyp bilmeýär. Sazan žabralardan dem alýar. Diýmek, ...;

b) ähli adamlaryň kemçilikleri bar. Ähli korollar – adamlar. Diýmek, ...;

c) gyzyl reňkdäki gülleriň ysy ýok. Bu gülüň ysy ýok. Diýmek...;

d) möjekler guzulary iýýär. Bu haýwan guzyny iýýär. Diýmek...;

e) ähli planetalar – asman jisimleri. Aý – planeta däl. Diýmek...;

f) ähli metallar elektrik toguny gowy geçirýär. Altyn – metal. Diýmek.. ;

g) ähli guşlar ýumurtga guzlaýar. Ähli guşlar oňurgaly. Diýmek....;

h) eger adamyň temperaturasy ýokary bolsa, ol kesellän bolýar. Bu adamyň temperaturasy ýokary. Diýmek...;

i) eger adamyň temperaturasy ýokary bolsa, ol kesellänn bolýar. Bu adam kesel däl. Diýmek....

71. $P(x,y)$: y adam x -iň perzendi, predikatlar berlen bolsun. Pikir ýöretmeleri tebigy dilde aňladyň:

a) $\exists z P(x,z) \wedge P(z,y)$; b) $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$; c) $\forall x\ \exists y\ P(y,x)$.

72. $F(x,y)$: x adam y -i öz dosty diýip hasaplaýar predikat berlen bolsun. Pikir ýöretmeleri tebigy dilde aňladyň:

a) $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow F(x,y)$;
b) $\forall x \exists y F(x,y)$;
c) $\exists y \forall x F(x,y)$;
d) $\forall x \exists y F(y,x)$;
e) $\exists y \forall x F(y,x)$;
f) $\forall y \exists x F(x,y)$;
g) $\exists y \forall x F(y,x)$.

73. $D(m,n)$: n bitin san m bitin sana galyndysyz bölünýär predikat berlen bolsun. Pikir ýöretmelerden haýsysy çyn:

a) $\forall m \forall n D(m,n)$;
b) $\forall n \exists m D(m,n)$;
c) $\exists m \forall n D(n,m)$;
d) $\exists n \forall m D(n,m)$;
e) $\forall n \exists m D(n,m)$;
f) $\exists m \forall n D(n,m)$,

74. Pikir ýöretmelerden haýsylary dogry? Degişli mysallar getiriň.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y$;

b) ähli başga sanlardan kiçi bolan san bar;

c) eger $\forall x \exists y P(x,y)$ bolsa , onda $\exists y \forall x P(x,y)$ bolýar.

14-15 DOGRY PIKIR ÝÖRETMEK (ARGUMENTASIÝA) KANUNLARY. SOFIZMLER WE PARADOKSLAR

Pikiri dogry beýan etmegi diňe pikirlenme kanunlarynyň talaplaryna amal edilende gazanmak mümkin. ***Pikirlenme kanuny*** pikir ýöretmek prosesinde pikirler (pikirlenme elementleri) arasyndaky bar bolan zerur aragatnaşyklardan ybarat. Pikirlenme kanunlarynyň mazmunyndan gelip çykýan, pikir ýöretmäni dogry gurmak üçin zerur bolan talaplar pikiriň anyk, yzygider, ýeterli derejede esaslanan bolmagyndan ybarat.

Kararlarda predmet bilen onuň häsiýeti, predmetleriň arasyndaky gatnaşyklar, predmetiň bar bolmagy ýa-da bolmazlygy baradaky pikirler tassyklama ýa-da inkär görnüşde aňladylýar. Meselem, "Demir–metal" diýen hökümde predmet (demir) bilen onuň häsiýetiniň (metaldygy) arasyndaky gatnaşyk anyklanan. "Ahlak hukukdan öň peýda bolupdyr" diýen kararda bolsa iki predmetiň (ahlak we hukuk) arasyndaky gatnaşyk anyklanan. Mazmun taýdan dürli bolan bu kararlar gurluşyna görä birmeňzeşdir: olarda predmet baradaky düşünjeler toplumy (S) bilen predmet belgisi baradaky düşünjäniň (R) arasyndaky gatnaşyk anyklanan, ýagny R-iň S-e mahsuslygy tassyklanandyr.

Umumy ýagdaýda karar $S \Rightarrow R$ mantyky şeklinde aňladylýar.

Biz S pikir ýöretmeler toplumyny **esas**, R pikir ýöretmäni bolsa **netije** diýip atlandyrýarys. Kararda esas we netije "diýmek" baglaýjy söz bilen baglanýar.

Adatda $S \Rightarrow R$ kararda esas we netije gorizontal çyzyk bilen şeýle bölünýär: $\dfrac{S}{P}$. Ýönekeýje mysal getireliň.

Eger Sabyr sport bilen meşgullansa, ol sagdyn bolýar.
Sabyr sport bilen meşgullanýar.
Diýmek, Sabyr sagdyn bolýar.
Bu kararyň mantyky şekilini tapalyň.

p: Sabyr sport bilen meşgullanýar.
q: Sabyr sagdyn

pikir ýöretmelere garasak, karar aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{\left.\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ p \end{matrix}\right\} \textit{esas}}{q \quad \} \textit{ netije}}$$

$p \Rightarrow q$ we p pikir ýöretmelerden q pikir ýöretme gelip çykany üçin, karar $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ mantyky şekile eýe.

Kararyň çynlyk jedwelini düzýäris:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge p$	$(p\Rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Netijede tawtologiýany emele getirdik. Bu ýagdaý kararyň **dogrudygyny** görkezýär, ýagny berlen esaslardan dogry netije çykarylanlygyny aňladýar.

1-nji mysal. Aşakdaky kararyň nädogrudygyny subut ediň:
Eger üçburçluk üç tarapa eýe bolsa, onda 2+4=7.
Diýmek, üçburçluk üç tarapa eýe.

Bu kararyň mantyky şekilini tapalyň.
p: üçburçluk üç tarapa eýe.
q: 2+4=7

pikir ýöretmelere garasak, karar aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ p \end{array}\right\} \textit{esas} \\ \hline q \;\; \} \textit{ netije} \end{array}$$

$p\Rightarrow q$ we q pikir ýöretmelerden p pikir ýöretme gelip çykany üçin, karar $(p\Rightarrow q)\wedge q\Rightarrow p$ mantyky şekile eýe.

Çynlyk jedwelini düzýäris:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q\Rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Netijede tawtologiýa emele gelmedi. Bu ýagdaý kararyň **nädogrudygyny** görkezýär, ýagny berlen esaslardan dogry netije çykarylmandygyny aňladýar.

Aşakda biz dogry kararlary (**argumentasiýa** kanunlaryny) getirýäris:

T.n	Karar	Manysy	Mysal
1°.	$\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$	p dogry bolanda q dogry bolsun. Munda p dogry. Diýmek, q hem dogry.	Eger dersligi okasam, gowy baha alaryn. Dersligi okadym. Diýmek, gowy baha alaryn.

2°.	$\dfrac{p\Rightarrow q \quad \neg p}{\neg q}$	p dogry bolanda, q dogry bolsun. Emma q nädogry. Diýmek, p hem nädogry.	Eger kitap okasam, gowy baha alaryn. Gowy baha almadym. Diýmek, kitap okamadym.
3°.	$\dfrac{p\vee q \quad \neg p}{q}$	p ýa-da q dogry we p nädogry bolsun. Diýmek, q nädogry.	Men ýa-da kitap okajak, ýa-da kino görjek. Men kitap okamadym. Diýmek, men kino gördüm.
4°.	$\dfrac{p\Rightarrow q \quad q\Rightarrow r}{p\Rightarrow r}$	p -dan q hem-de q-dan r gelip çyksyn. Onda p-dan r gelip çykýar.	Eger howa açyk bolsa, men sport meýdançasyna bararyn. Eger men sport meýdançasyna barsam, futbol oýnaryn. Diýmek, howa açyk bolsa, men futbol oýnaryn.

Biz kararlaryň dogrudygyny subut etmegi gönükme hökmünde okuwça hödürleýäris.

Gönükmeler

75. Aşakdaky karara garalyň:

Alijanyň bedeniniň temperaturasy diňe ol syrkawlanda ýokary bolýar.
Alijanyň bedeniniň temperaturasy ýokary däl.

Diýmek, Alijan syrkawlamandyr.

a) kararyň mantyky şekilini ýazyň;
b) kararyň dogry bolýandygyny subut ediň.

76. Kararlaryň mantyky şekilini ýazyň:

a)

I $\dfrac{p\Rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$ **II** $\dfrac{p\vee q \quad \neg p}{q}$ **III** $\dfrac{p\vee q}{p}$ **IV** $\dfrac{p\Rightarrow q \quad \neg p}{\neg q}$ **V** $\dfrac{p\Rightarrow q \quad q\Rightarrow p}{p}$

b) her bir karar üçin çynlyk jedwelini ýazyp, olardan haýsylarynyň dogry bolýandygyny tapyň.
c) tebigy dilde aňladylmagyna mysallar getiriň.

77. Pikir ýöretmeleri karar şeklinde ýazyň:

a) $(p\wedge q)\Rightarrow p$;
b) $(p\Rightarrow q)\wedge\neg q\Rightarrow p$;
c) $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$;
d) $(p\wedge\neg q)\Rightarrow(\neg p\vee p)$.

Emele gelen kararlardan haýsylary dogry?

78. p: x – düýp san we q: x – täk san pikir ýöretmelere garalyň:
Aşakdaky kararlardan haýsylary dogry?

a) Eger x – düýp san bolsa, ol täk bolýar. x – täk ýa-da düýp san. Diýmek, x – täk san;

b) x – täk ýa-da düýp, emma bir wagtda däl. x – täk san. Diýmek, x – düýp san.

79. Karar berlen: Döwran ýaryşa gatnaşmagy üçin ol ýa Singapura, ýa-da Gongkonga barýar. Döwranyň Singapura barjagy mälim. Diýmek, Döwran Gongkonga barmaýar.

a) çynlyk jedweli kömeginde bu karar nädogry bolýandygyny subut ediň;

b) näme üçin bu karar nädogry bolýandygyny düşündiriň.

80. Aşakdaky kararlardan haýsylary dogry, haýsylary nädogry:

a) Talyp sagat 10.00-da ýa kino, ýa-da teatra barýar. Talyp sagat 10.00-da kino barmady. Diýmek, Talyp sagat 10.00-da teatra bardy;

b) x sany 4-e kratny bolsa, ol jübüt san bolýar. x – jübüt san, diýmek, ol 4-e kratny;

c) x sany ýa-da 30-uň ýa-da 50-niň bölüjisi. Diýmek, x sany 50-niň bölüjisi;

d) eger yzygiderlik arifmetik progressiýa bolmasa, ol geometrik progressiýa bolýar. Diýmek, yzygiderlik ýa arifmetik, ýa-da geometrik progressiýa bolýar;

e) ähli synpdaşlarym gowy okaýar. Mahsuma gowy okaýar. Diýmek, Mahsuma meniň synpdaşym.

81. Pikir ýöretmeleri dowam etdirip, dogry kararlary alyň:

a) Ikimizden birimiz häzir stomatologyň kabulyna girmeli.
Men girjek däl. Diýmek ....;

b) Men ýa mekdebe bararyn, ýa-da enem maňa gaty käýer. Bu gün men mekdebe anyk barmaryn. Diýmek ....;

c) Eger meseläni dogry çözsem, onuň jogaby kitapdaky jogap bilen birmeňzeş bolýar. Meniň netijäm kitapdaky jogapdan tapawutly. Diýmek..;

d) Eger Genri öýlenen bolsa, onuň mülküne aýaly eýe bolýar. Eger öýlenmedik bolsa, onuň mülküne agasy eýe bolýar. Diýmek, onuň mülküne .....;

e) Ýa-da otly gijä galmady, ýa-da ol ýatyrylan. Eger ony ýatyrylan bolsa, men bu gün hiç ýere gitmeýärin. Eger ol gijä galýan bolsa, men işe wagtynda baryp bilmerin. Diýmek men..........;

f) Eger 2 – düýp san bolsa, ol iň kiçi düýp san bolýar. 2 – düýp san. Diýmek ....

Sofizmler we paradokslar

Sofizm[2] –bilgeşleýin çykarylýan nädogry netije, haýsy-da bolsa bir tassyklamanyň nädogry subudy. Munda subutdaky ýalňyş ep-esli ussalyk bilen, bildirmezden gizlenýär.

2 Gad. grek. σόφισμα – hile.

Sofizme degişli meseleleri ilki, miladydan öňki V asyrda Gadymky Gresiýada ýaşan matematik Zenon düzüpdir.

Zenon, meşhur bedew Ahillesiň öňünde süýrenip barýan pyşbagaynyn hiç haçan kowup ýetip bilmejekdigini matematiki pikir ýöretmeleriň kömeginde aşakdaky ýaly "subut" edipdir. Ahilles pyşbaga garanda 10 esse çaltrak çapyp bilýär. Ilki, pyşbaga 100 metr öňde bolsun. Ahilles bu 100 metri çapyp geçýänçe, pyşbaga 10 metr öňe ýöreýär. Ahilles bu 10 metri çapyp geçýänçe pyşbaga ýene 1 metr süýşýär we ş.m. Olaryň arasyndaky aralyk hemişe gysgalyp barýar, ýöne hiç haçan nola öwrülmeýär.

Zenonyň meseleleri çäksizlik, hereket, älem düşünjeleri bilen bagly bolup, olar matematika we fizika ylymlarynyň ösmeginde uly ähmiýete eýe boldy.

Käbir sofizmler beýik eždatlarymyz Farabynyň eserlerinde, Biruny bilen Ibn Sinanyň ýazyşan hatlarynda ara alnyp maslahatlaşylypdyr.

Biz aşakda iň ýönekeý sofizmlere mysallar getirip, olary düşündirmäge çalşarys.

2-nji mysal. *1000 som nirä gitdi?* 3 dost naharhanada naharlayp bolanlaryndan soň hyzmatçy olara 25000 somluk hasaby berdi. 3 dostuň her biri 10000 somdan pul berip, 30000 somy hyzmatça berdiler. Hyzmatçy olara 5000 som gaýtargy berdi. Dostlar 1000 somdan bölüşip aldylar we 2000 somy taksi üçin berdiler. Gaýdyşyn dostlardan biri hasaplap başlady, "Her birimiz 9000 somdan harajat etdik, bu 27000 som bolýar, 2000 som taksä berdik, muny goşsak 29000 som bolýar. 1000 som nirä gitdi ?"

△ Bu ýerdäki esasy "ýalňyşlyk" hasaplamanyň nädogry edilýänlginde. 3 dost 9000 somdan 27000 som pul tölediler. Mundan 25000 somuny nahara töläp, 2000 somuny taksi üçin dostuna berdiler, diýmek, umumy hasap 27000 som bolýar. Ýokardaky hasaplamada 2000 som 27000 somuň içinde ýatyr. ▲

3-nji mysal. *"2·2=5" sofizmi:* 20−16−4=25−20−5 dogry deňligi ýönekeýleşdirýäris:

$$2(10-8-2)=25-20-5$$
$$2\cdot 2\cdot(5-4-1)=5\cdot(5-4-1)$$

Ahyrky deňligiň sag we çep böleklerini umumy (5−4−1) köpeldijä gysgaldyp, 2·2=5 deňligi alarys.

△ Bu ýerdäki goýberilýän esasy "ýalňyşlik" 2·2·(5−4−1)=5·(5−4−1) deňligiň iki bölegini nola deň bolan (5−4−1) köpeldijä gysgaltmakda. ▲

Paradoks[3] – köpçülik tarapyndan kabul edilen adaty pikire öz mazmuny ýa-da şekili bilen ýiti ters bolan, garaşylmadyk pikir ýöretme. Islendik paradoks "şubhesiz dogry" (esaslymy, esassyzmy – tapawudy ýok) hasaplanan ol ýa-da bu pikiri inkär etmek ýaly görünýär. "Paradoks" termininiň özi-de ilki antik filosofiýada islendik täsin, orginal pikiri aňlatmak üçin ulanylan.

Paradokslar, adatda, mantyky esaslary doly anyklanmadyk nazaryýetlerde duşýar.

4-nji mysal

Ýalançy paradoksy. "Men tassyklaýan hemme zat ýalan" pikir ýöretmä garalyň.

△ Eger bu pikir ýöretme çyn bolsa, bu pikir ýöretmäniň manysyna esasan aýdylan pikir ýöretmäniň ýalandygy hakykat. Eger bu pikir ýöretme ýalan bolsa, pikir ýöretmedäki tassyk – ýalan. Diýmek, bu pikir ýöretme ýalan diýen pikir ýöretme ýalan, şeýle bolýan bolsa, bu pikir ýöretme hakykat. Garşylyk. ▲

5-nji mysal

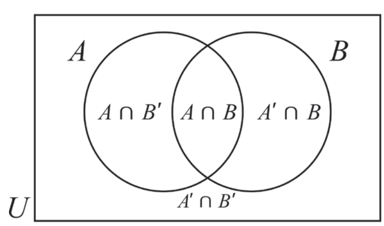
Refleksiwlik paradoksy. Özbek dilindäki sözüň manysy özünde aňladylsa, ony refleksiw diýip atlandyralyň.

Meselem, "özbekçe" sözi refleksiw, "iňlisçe" sözi bolsa refleksiw däl. Edil şeýle, "on harply" sözi ondaky harplaryň sany çyndan hem 10-a deň bolany üçin refleksiw, "alty harply" sözi bolsa refleksiw däl. Ähli refleksiw sözler toplumyna garalyň. "Refleksiw däl" sözüniň özi refleksiwmi?

△ Eger bu söz refleksiw bolsa, onda manysyna görä, ol refleksiw däl. Eger bu söz refleksiw bolsa, onda onuň manysy özünde aňladylany üçin, ol refleksiw bolýar. Gapma-garşylyk. ▲

16-18 MESELELER ÇÖZMEK

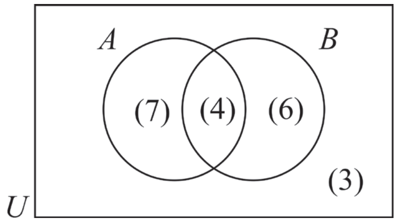
1-nji mesele. Kesişýän iki *A, B* toplumlar uniwersal toplumy dört bölege bölýär:



3 Gad. grek. παράδοξος – garaşylmadyk, täsin.

Diýmek, uniwersal toplumyň elementleriniň sany şu bölekleriň elementleriniň sanynyň jemi eken.

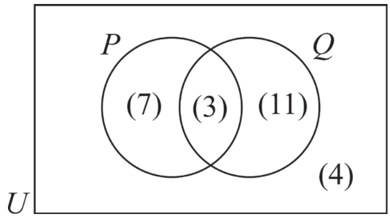
Aşakdaky diagrammada uniwersal toplumyň degişli bölekleriniň elementleriniň sany ýaýyň içine alnyp ýazylan:



Bu ýerde, meselem, A, B toplumlaryň ikisine 4 element degişli, 3 element bolsa hiç birine-de degişli däl.

U toplumyň islendik elementi 4 böleklerden hiç bolmasa birine degişli bolany sebäpli U toplumyň elementleriniň sany 7+4+6+3=20-ä deň.

2-nji mesele. Surata garap, aşakdaky toplumlaryň elementleriniň sanyny tapyň:



a) P; b) Q'; c) $P \cup Q$;

d) P-ge degişli, emma Q-ga degişli bolmadyk elementler toplumy;

e) Q-a degişli, emma P-ge degişli bolmadyk elementler toplumy;

f) ne P-ge, ne-de Q-a degişli bolmadyk elementler toplumy.

---

a) $n(P)=7+3=10$; b) $n(Q')=7+4=11$;

c) $n(P \cup Q)=7+3+11=21$; d) $n(P$, emma Q däl$)=7$;

e) $n(Q$, emma P däl$)=11$.

3-nji mesele. Eger $n(U)=30$, $n(A)=14$, $n(B)=17$ we $n(A \cap B)$ bolsa,

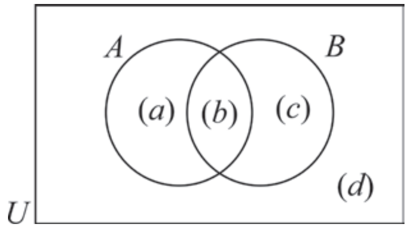
a) $n(A \cup B)$-ni tapyň.

b) A-ga degişli, emma B-ge degişli bolmadyk elementler toplumy näçe elementden düzülen?

Wenn diagrammasyny düzýäris:

$n(A \cap B)$ -den $b=6$; $n(A)$ -dan $a+b=14$; $n(B)$ -den $b+c=17$; $n(U)$ -dan $a+b+c+d=30$ deňlik gelip çykýar.

Diýmek, $b=6$, $a=8$, $c=11$, $d=5$.



Diagrammadan aşakdakylara eýe bolarys:

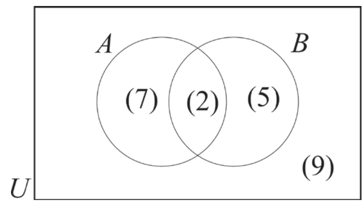
a) $n(A \cup B)=a+b+c=25$;

b) A-ga degişli, emma B-ge degişli bolmadyk elementler sany $a=8$-e deň.

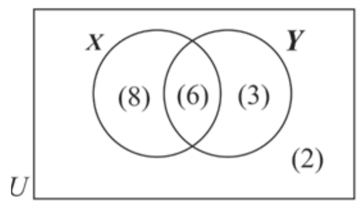
Gönükmeler

Diagrammadan peýdalanyp, aşakdaky toplumlaryň elementleriniň sanyny tapyň:

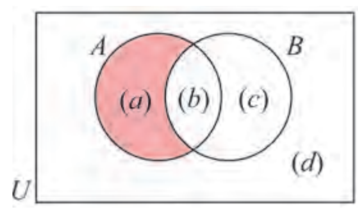
82. a) B; b) A'; c) $A \cup B$;
d) A-ga degişli, emma B-ge degişli bolmadyk elementler toplumy;
e) B-ge degişli, emma A-ga degişli bolmadyk elementler toplumy;
f) ne A-ga, ne-de B-ge degişli bolmadyk elementler toplumy.



83. a) X'; b) $X \cap Y$; c) $X \cup Y$;
d) X-a degişli, emma Y-ge degişli bolmadyk elementler toplumy;
e) Y-ge degişli, emma X-a degişli bolmadyk elementler toplumy;
f) ne X-a, ne-de Y-ge degişli bolmadyk elementler toplumy.



84. a) $n(B)$; b) $n(A')$;
c) $n(A \cap B)$; d) $n(A \cup B)$;
e) $n((A \cap B)')$; f) $n((A \cup B)')$.



85. $n(U)=26$, $n(A)=11$, $n(B)=12$ we $n(A \cap B)=8$ bolsa,
a) $n(A \cup B)$-ni tapyň;
b) B-ge degişli, emma A-ga degişli bolmadyk elementler toplumy näçe elementden düzülen?

86. $n(U)=32$, $n(M)=13$, $n(M \cup N)=26$ we $n(M \cap N)=5$ bolsa,
a) $n(N)$; b) $n((M \cup N)')$-i tapyň.

87. $n(U)=50$, $n(S)=30$, $n(R)=25$ we $n(R \cup S)=48$ bolsa,

a) $n(R \cap S)$;

b) S-e degişli, emma R-e degişli bolmadyk elementler toplumy näçe elementden düzülen?

4-nji mesele. Sport gurnagynda gatnaşan 27 sany okuwçydan 19 sanysy gara saçly, 14 sanysy gara gözli we 11 sanysy hem gara saçly, hem gara gözli.

a) Bu maglumaty Wenn diagrammasynda şekillendiriň we düşündiriň.

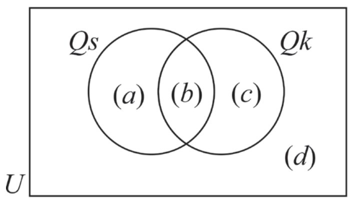
b) **I** Ýa gara saçly, ýa-da gara gözli; **II** gara saçly, emma gara gözli däl okuwçylar näçe?

△ a) Qs – gara saçly, Qk bolsa gara gözli okuwçylar toplumy bolsun. Aşakdaky diagramma eýe bolarys:

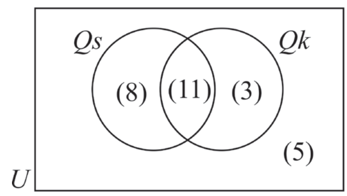
Munda

$a+b+c+d=27$; $a+b=19$; $b+c=14$;

$b=11$; $a=8$; $c=3$; $d=5$.



Ýagny



b) Diagramma garap, aşakdakylary anyklaýarys:

I Ýa gara saçly, ýa-da gara gözli okuwçylar sany

$n(Qs \cap Qk)=8+11+3=22$ sany;

II Gara saçly, emma gara gözli däl okuwçylar sany

$n(Qs \cap Qk')=8$ sany. ▲

Gönükmeler

88. Badminton klubunda 41 sany gatnaşyjydan 31 sanysy ýekebara we 16 sanysy jübütliklerde oýnadylar. Näçe gatnaşyjy hem ýekebara, hem jübütliklerde oýnapdyrlar?

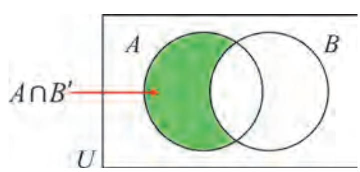
89. Kärhanada 56 sany işçi işleýär. 1 hepdäniň içinde şolardan 47 sanysy gündizki we 29 sanysy gijeki smenalarda işlediler. Näçe işçi hem gündizki, hem gijeki smenada işlediler?

90. Aşakdaky Wenn diagrammasyna garap

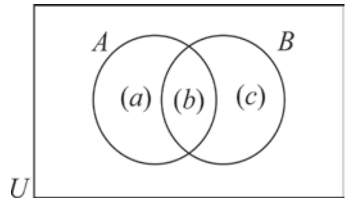
$n(A \cap B')= n(A)–n(A \cap B)$,

$n(A' \cap B)= n(B)–n(A \cap B)$

deňlikler ýerlikdigini görkeziň.



91. Wenn diagrammasyndan peýdalanyp $n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$ formulany getirip çykaryň.



92. 50 sany talypdan 40 sanysy iňlis dilini, 25 sanysy bolsa nemes dilini öwrenýär. Ik dili-de öwrenýän talyp näçe?

4-nji mesele. Futbol ýaryşynda şäherden 3 sany A, B we C komanda gatnaşýar. Şäher ilatynyň 20 göterimi A komanda, 24 göterimi B komanda we 28 göterimi C komanda janköýerlik edýärler. Şäher ilatynyň 4 göterimi hem A, hem B komanda, 5 göterimi hem A, hem C komanda, 6 göterimi bolsa hem B, hem C komanda janköýerlik edýär. Mundan daşary, şäher ilatynyň 1 göterimi ähli komandalara janköýerlik edendigi mälim.

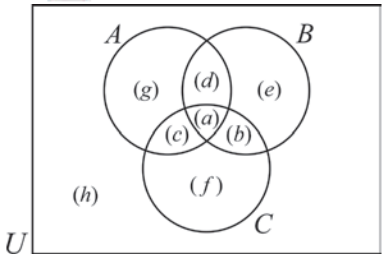
Şäher ilatynyň näçe göterimi:

a) diňe A komanda janköýerlik edýär;

b) hem A, hem B komanda janköýerlik edip, C komanda janköýerlik etmeýär;

c) hiç hili komanda janköýerlik etmeýär?

Wenn diagrammasyny maglumatlar bilen doldurýarys.



$a=1$, çünki şäher ilatynyň 1 göterimi ähli komandalara janköýerlik edýär.

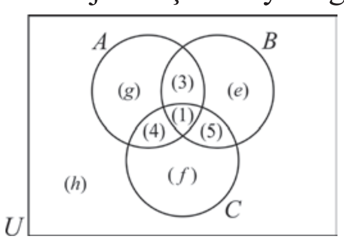
$a+d=4$, çünki şäher ilatynyň 4 göterimi hem A, hem B komanda janköýerlik edýär.

$a+b=6$, çünki şäher ilatynyň 6 göterimi hem B, hem C komanda janköýerlik edýär.

$a+c=5$, çünki şäher ilatynyň 5 göterimi hem B, hem C komanda janköýerlik edýär.

Diýmek, $d=3$, $b=5$, $c=4$.

Netijede aşakdaky diagramma emele gelýär:



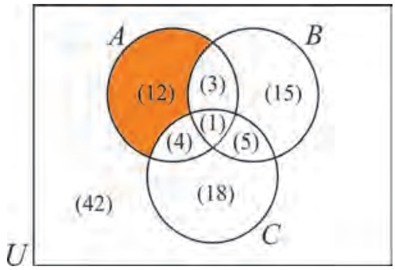
Mundan daşary, şäher ilatynyň 20 göterimi A komanda janköýerlik edeni üçin $g+1+4+3=20$, ýagny $g=12$.

Edil şeýle, şäher ilatynyň 24 göterimi B komanda janköýerlik edeni üçin $e+1+5+3=24$, ýagny $e=15$.

Ahyrynda, şäher ilatynyň 28 göterimi C komanda janköýerlik edeni üçin f+1+5+4=28, ýagny f=18.

Şäher ilaty 100 göterim bolany üçin, hiç haýsy komanda janköýerlik etmedikler göterimi h=42-ä deň.

a) diňe A komanda janköýerlik edýänleriň göterimini degişli bölegi boýap tapýarys: g=20 – 4 – 3 – 1=12.



b) hem A, hem B komanda janköýerlik edip, C komanda janköýerlik etmeýänler göterimi 12+3+15=30-a deň.

c) hiç hili komanda janköýerlik etmeýänler sany h=42-ä deň.

Gönükmeler

93. Halkara maslahatda 58 gatnaşyjylar dürli dillerde, şol sanda 28 sanysy arap, 27 sanysy hytaý, 39 sanysy bolsa iňlis dilinde gepleşip bilýärler.
a) diňe hytaý dilinde gepleşip bilýänler;
b) şu dillerden hiç birinde-de gepleşip bilmeýänler;
c) ne arap, ne hytaý dilinde gepleşip bilmeýänler näçe?

94. Aşakdaky pikir ýöretmeleriň inkärini düzüň:
a) Gün şöhle saçýar we howa yssy;
b) eger asman bulutsyz bolsa, men derýa bararyn;
c) ýagyş ýaganok;
d) men ýa barlag işine taýýarlanaryn, ýa barlag işini gowy ýazyp bilmeýärin;
e) käbir okuwçylar zehinli;
f) ähli okuwçylar zehinli;
g) zehinli okuwçylar ýok;
h) käbir okuwçylaryň gözleri mawy.

Pikir ýöretmeleri mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň (**95–104**):

95. Eger talyp matematikany özleşdirse, onuň pikirlenmesi giňelýär.

96. Eger men matematikany we daşary ýurt dilini özleşdirsem, men dynç almaga ýa-da öýe, ýa-da daga giderin.

97. Dynç alşyň başlanandygy ýalan.

98. Eger adam ýaşlygyndan özüne erk edip bilse, onda onuň töweregindäkiler ondan öýkelemeýärler we ony hormat edýärler.

99. Eger metaldan elektrik togy geçse, onuň temperaturasy artýar.

100. Ol öýe ýa takside, ýa otluda gidýär.

101. Bu önüm üçin gara ýa-da reňkli metal ulanylan.

102. Dynç alşyň başlanmagy üçin çärýek gutarmagy ýeterli.

103. Dynç alşyň başlanmagy üçin çärýek gutarmaly.

104. Dynç alşyň başlanmagy üçin çärýek gutarmagy zerur we ýeterli.

Pikir ýöretmeleri mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň we çyn-ýalanlygyny anyklaň (**105–117**):

105. Eger adam ruhy kesel bolsa, ol ýakynlaryny tanamaýar. Bu adam ruhy kesel. Diýmek, ol ýakynlaryny tanamaýar.

106. Eger men saňa ynansam, sen meni aldaýarsyň. Diýmek, men saňa ynanmasam, sen meni aldap bilmersiň.

107. Ertir biz teatra ýa-da muzeýe bararys. Eger teatra barsak, öýe giç gaýdýarys. Eger muzeýe barsak, öýe irräk ýetip geleris. Emma biz öýe giç gaýtmarys. Diýmek, biz teatra däl, muzeýe barýarys.

108. Eger ol Aşyryň atasy bolsa, ol Myradyň atasy bolup bilmeýär. Ol Aşyryň we Jemşidiň atasydygy nädogry eken. Ol ýa Jemşidiň ýa Myradyň atasydygy anyklandy. Diýmek, ol Aşyryň atasy däl.

109. Eger häzir gyş bolsa, temperatura pes bolýar. Häzir güýz bolmasa, gyş bolýar. Häzir güýz. Diýmek, temperatura pes däl.

110. Eger Polat bilesigeliji bolmasa, ol žurnalist bolmaýar. Eger Polat žurnalist bolsa, ol mugallym bolmaýar. Polat örän bilesigeliji, emma ol mugallym däl. Diýmek, Polat – žurnalist.

111. Eger ýagyş ýagsa, asman bulutly bolýar. Eger asman bulutly bolmasa, Gün bolýar. ýagyş ýagmaýar, emma Gün bar. Diýmek, Gün bolsa, asman bulutly bolmaýar.

112. Eger Myrat ýene tizligi artdyrsa, onuň sürüjilik güwänamasy alynýar. Eger Myrat pýan ýagdaýda rula geçse, ol tizligi artdyrmaýar. Bu gün Myrat pýan bolmaýar we tizligi artdyrmaýar. Diýmek, onuň sürüjilik güwänamasy alynmaýar.

113. Köpeltmek jedwelini bilmedikler sowatsyz hasaplanýar. Elipbiýi bilmedikler hem sowatsyz hasaplanýar. Ol ýa köpeltmek jedwelini, ýa elipbiýi bilmeýär. Diýmek, ol sowatsyz.

114. Eger ol hak bolsa, men ondan ötünç soramaly. Eger men hak bolsam, ol menden ötünç soramaly. Ikimizden birimiz elbetde ötünç soramaly. Netije: birimiz hak.

115. Men ýa mekdebe bararyn, ýa maňa enem käýer. Men mekdebe barmaýaryn. Diýmek, enem maňa hökman käýer.

116. Eger men meseläni ýalňyşsyz çözsem, alnan netije derslikdäki jogap bilen birmeňzeş bolýar. Meniň netijäm bilen derslikdäki jogap tapawutlanýar. Diýmek, men meseläni çözende ýalňyş goýberipdirin.

117. Ylym çylşyrymly däl ýa-da ol gowy okadylýar. Eger ylym çylşyrymly bolmasa, ony özleşdirerin. Eger ylym gowy okadylsa, ony özleşdirerin. Diýmek, ähli ýagdaýlarda ylmy özleşdirerin.

118. Çynlyk jedwelleriniň kömeginde aşakdaky pikir ýöretmeleriň görnüşini anyklaň we tebigy dildäki degişli habar sözlemine mysal getiriň.

a) $p \vee q \Rightarrow p \vee q$;
b) $p \Rightarrow \neg q \vee (p \Rightarrow q)$;
c) $\neg(q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q$;
d) $p \vee q \Rightarrow \neg q \wedge p$;
e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$;
f) $\neg(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$.

Aşakdaky pikir ýöretmeleri mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň we çyn-ýalanlygyny anyklaň (119-130):

119. Ähli delfinler – süýdemdirijiler. Ýekeje-de balyk süýdemdiriji däl. Diýmek, ýekeje-de balyk delfin däl.

120. Ähli sygyrlar – süýdemdirijiler. Ähli sygyrlar bedäni iýýärler. Diýmek, käbir süýdemdirijiler bedäni iýýärler.

121. Käbir talyplar işleýär we käbir talyplar gowy okaýarlar. Diýmek, käbir gowy okaýan talyplaryň içinde işleýänleri bar.

122. Ähli metallar gaty görnüşde. Simap – metal. Diýmek, simap gaty görnüşde.

123. Hiç hili metal gaz däl. Käbir maddalar metallar. Diýmek, käbir maddalar gaz däl.

124. Ähli metallar ýylylygy gowy geçirýärler. Ähli metallar elektrik toguny geçirýärler. Diýmek, käbir elektrik geçirijiler ýylylygy gowy geçirýärler.

125. Käbir erkekler matematiklerdir. Käbir matematikler – filosoflardyr. Diýmek, käbir filosoflar erkeklerdir.

126. Ähli alpinistler batyrgaý. Käbir alpinistler erkekler. Diýmek, käbir erkekler batyrgaý bolýar.

127. Ähli alymlar akylly. Käbir akylly adamlaryň dili ýiti. Diýmek, käbir dili ýitiler alymlardyr.

128. Ähli daşary ýurt dili mugallymlary daşary ýurt dilini gowy bilýärler. Daşary ýurt dilini gowy bilýänleriň käbirleri matematikany gowy görmeýärler. Diýmek, matematikany gowy görýänleriň käbirleri daşary ýurt dili mugallymlary däl.

129. Ähli kromanýonlar – agressiw (çozujy). Hiç bir neandertal kromanýon däl. Diýmek, hiç hili neandertal agressiw däl.

130. Käbir süýdemdirijiler – kitler. Ähli kitler – iri haýwanlar. Diýmek, käbir iri haýwanlar süýdemdirijilerdir.

Tekstleri okaň we ýagdaýy ara alyp maslahatlaşyň (**131–138**):

131. Krit filosofy Epimenid ähli kritliler ýalançy bolýandygyny tassyklady. Epimenid çyn gepläpmi?

132. Platon: Häzir Sokrat aýdan ähli zat ýalan.

Sokrat: Häzir Platon aýdan gep ýalan.

Kim çyn gepläpdir?

133. Kagyzyň bir tarapyna: "Kagyzyň başga tarapyna ýazylan sözlem ýalan", şu kagyzyň ikinji tarapyna: "Kagyzyň başga tarapyna ýazylan sözlem ýalan" diýip ýazylan. Kagyzyň haýsy tarapyna çyn sözlem ýazylypdyr?

134. Meşhur filosof Protagor Ewatly mugt hukuk öwretmek üçin şägirtlige aldy. Munda eger Ewatl özüniň birinji sud mejlisinde ýeňiji bolsa, muňa birneme pul töleýär manydaky şertnama düzüldi.

Okuwdan soň Ewatl işe hiç çykmady. Netijede onuň birinji sud mejlisinde gatnaşmak-gatnaşmazlygy hyýaly boldy. Protagor özüniň şägirdiniň üstünden suda şikaýat etdi. Sud prosesinden parça:

Protagor. Islendik ýagdaýda bu ýigit maňa tölemeli. Hakykatdan ham, eger ol bu sudda ýeňiji bolsa, şertnama görä ol maňa töleýär. Eger utmasa, suduň kararyna görä maňa töleýär.

Ewatl. Men Protagora hiç zat bermerin! Eger men sudda ýeňiji bolsam, ýeňiji bolan adam hökmünde hiç zat bermerin. Emma men utdurmaga-da taýýardyryn. Munda şertnama görä men hiç zat tölemeýärin.

135. Bu gyzykly sözlemde sözleriň sany ýedä deň.

136. Bu sözlemi okamak gadagan.

137. Bir adam totuguşy satjak mahalynda totuguş islendik dilde eşiden her bir sözüni gaýtalaýar, diýip ynandyrdy. Emma satyn alnan totuguş hiç zat geplemeýär. Eger satyjynyň aldamanlygy mälim bolsa, ýagdaýy düşündiriň.

138. Meretdäki kitaplar 1000 sanydan köp.

Ýok, ondaky kitaplar 1000 sanydan kem.

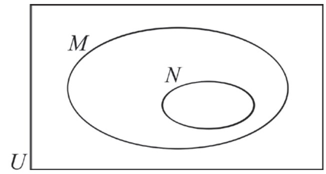
Onda iň bolmanda bir kitap bar.

Şu üç pikir ýöretmeden hiç bolmanda bir çyn. Meretde näçe kitap bar?

Barlag ýumuşlary
I wariant

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$,
$A = \{0$ *we* 9 *arasyndaky ähli jübüt sanlar*$\}$, $B = \{18$ *sanynyň natural bölüjileri*$\}$ bolsa, $A \cap B$ toplumyň elementlerini ýazyň .

2. Diagrammany depderiňize göçüriň we $M \cap N$ toplumy belgiläň.



3. *p: x* – jübüt san, *q: x* san 3-e bölünýär pikir ýöretmelere garalyň.
Pikir ýöretmeleri sözleriň kömeginde aňladyň.
Olar haýsy *x*-larda çyn? Ýalan? a) $\neg p$; b) $p \Rightarrow q$ c) $p \Rightarrow \neg q$.

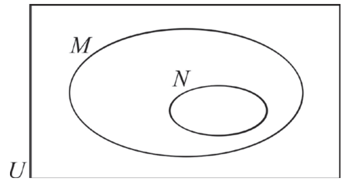
4. Aşakdakylardan haýsylary mantyky deňgüýçli?
a) $p \Rightarrow q$ we $p \Leftrightarrow \neg p$; b) $p \Leftrightarrow q$ we $(p \wedge q) \wedge \neg p$.

5. Kararlaryň mantyky şekillerini ýazyň. Bu kararlaryň dogrynädogrudygyny barlaň.
Eger asman bulutly bolsa, men telpegimi geýýärin. Asman bulutly. Diýmek, men telpegimi geýýärin.

II wariant

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{0$ *we* 9 *arasyndaky ähli jübüt sanlar*$\}$, $B = \{18$ *sanynyň natural bölüjileri*$\}$ bolsa, $(A \cap B)'$ toplum elementlerini ýazyň .

2. Diagrammany depderiňize göçüriň we $M \cap N'$ toplumy belgiläň.



3. *p: x* – jübüt san, *q: x* san 3-e bölünýär pikir ýöretmelere garalyň.
Pikir ýöretmeleri sözleriň kömeginde aňladyň. Olar haýsy *x*-larda çyn? Ýalan? a) $p \vee q$; b) $\neg p \wedge q$ c) $\neg p \Rightarrow \neg q$.

4. Aşakdakylardan haýsylary mantyky deňgüýçli?
a) $\neg(p \wedge q)$ we $\neg p \vee \neg q$; b) $\neg p \Rightarrow \neg q$ we $q \Rightarrow p$.

5. Kararlaryň mantyky şekillerini ýazyň. Bu kararlaryň dogrynädogrudygyny barlaň. Ähli mugallymlar ylma teşne. Muazzam Alymowa mugallym däl. Diýmek, Muazzam Alymowa ylma teşne däl.

II BAP

MALIÝE MATEMATIKASY ELEMENTLERI

19-21 ÝÖNEKEÝ WE ÇYLŞYRYMLY GÖTERIMLER

Mälim mukdardaky pul karzyna berlende karz alyjy bellenilen möhletde karz berijä (*kreditora*) alnan summany (karzy) gaýtarmagy barada ylalaşylýar.

Mundan daşary, her bir karz alyjy kreditora goşmaça serişde tölemegi öz üstüne alýar.

Görnüşi ýaly, karzdar tarapyndan tölenýän pul karzyň mukdaryna, töleg möhletine we kreditor tarapyndan girdeji almak maksadynda bellenilen göterim stawkasyna bagly.

Kreditoryň karzdara mälim mukdardaky puly bellenilen möhletde karza berenligi netijesinde alýan girdejiini hasaplamak üçin adatda iki usul: **ýönekeý (sada) göterimler we çylşyrymly göterimler** usullary ulanylýar.

Ýönekeý göterimler

Ýönekeý göterimler – kreditoryň karzdara mälim mukdardaky puly bellenilen möhletde karzyna berenligi netijesinde alýan girdejisini hasaplamagyň usulydyr.

Meselem, 2 000 000 som 3 ýyla karzyna alynýar. Munda kreditor tarapyndan her ýyl 17 göterim stawkasy kesgitlendi.

Munda 1 ýyldan soň $\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000$ som, 3 ýyldan soň bolsa goşmaça serişde $\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000 \cdot 3 = 1\,020\,000$ som tölenmelidir.

Bu mysaldan aşakdaky **ýönekeý göterimler formulasy** diýlip atlandyrylýan gatnaşyk gelip çykýar:

$$I=\frac{Crn}{100},$$

bu ýerde C – ilki alnan karzyň mukdary, I – C mukdardaky puly ulanandygy üçin karzdaryň kreditora töleýän göterim tölegi. Şu parametr *göterim* tölegi ýa-da, ýönekeýräk, göterim diýlip hem atlandyrylýar, r – her ýyla bellenilen göterim stawkasy, n – ýyllar sany.

1-nji mysal. 8 000 000 som ýylyna 7 göterim stawkasynda 18 aýa alnan bolsa, göterim tölegi hasaplaň.

△ $C = 8000000, \quad r=7\%, \quad n=\frac{18}{12} = 1{,}5$ ýyl.

Diýmek, $I=\frac{Crn}{100}=\frac{8000000\cdot 7\cdot 1{,}5}{100} = 840\ 000$ som. ▲

2-nji mysal. Kreditor tarapyndan göterim stawkasy her ýyla 8% diýlip bellenilen. Telekeçi 4 ýylyň içinde alnan karzyna we *göterim* tölegine goşmaça 1600 ABŞ dollaryny töledi we karzdan gutuldy. Telekeçi näçe mukdarda karz alypdy?

△ Ýönekeý göterimleriň formulasyna görä

$$I=\frac{Crn}{100}, \text{ bu ýerde } I=1600;\ r=8;\ n=4.$$

Diýmek, $1600 = \frac{C\cdot 8\cdot 4}{100}$.

Mundan, C=5000 (ABŞ dollary). ▲

3-nji mysal. Bank ilki 4000 ABŞ dollary mukdarynda karz berip 18 aýda 900 ABŞ dollary girdeji aldy. Eger töleg ýylma-ýyl amala aşyrylan bolsa ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?

△ Ýönekeý göterimler formulasyna görä

$I=\frac{Crn}{100}$, bu ýerde I=900; n=18 oy =1,5 ýyl, C=4000.

Diýmek, $900 = \frac{4000\cdot r\cdot 1{,}5}{100}$.

Mundan, r=15%. ▲

4-nji mysal. Kreditor ilki 2000 ABŞ dollary mukdarynda karz berip, birnäçe ýylyň dowamynda ýylma-ýyl tölenenden soň jemi 3000 ABŞ dollaryny aldy. Eger göterim stawkasy her ýyla 12,5% diýlip bellenilen bolsa, tölegler näçe ýylda amala aşyrylypdyr?

Kreditor 3000–2000=1000 (ABŞ dollary) mukdarynda girdeji alan.
Ýönekeý göterimler formulasyna görä

$I=\frac{Crn}{100}$, bu ýerde I=1000; C=2000; r=12,5%.

Diýmek, $1000=\frac{2000\cdot 12,5\cdot n}{100}$

Jogaby: 4 ýyl.

Çylşyrymly göterimler

Çylşyrymly göterim usulynyň mazmunyna düşünmek üçin aşakdaky meselä üns berýäris.

5-nji mysal.

Eger 6000 ABŞ dollary mukdarynda karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 8% bilen 3 ýylda tölemek şerti bilen alnan bolsa, kreditor tarapyndan alynýan girdeji näçe bolar?

Ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasyny hasaba alyp, her ýylky göterim töleg mukdaryny hasaplaýarys:

Ýyl	**Karz** (1)	**Göterim tölegi** $=\frac{Crn}{100}$ (2)	**Balans** (1) + (2)
1	\$6000,00	\$6000,00$\times\frac{8}{100}\times$1=\$480,00	\$6480,00
2	\$6480,00	\$6480,00$\times\frac{8}{100}\times$1=\$518,40	\$6998,00
3	\$6998,00	\$6998,00$\times\frac{8}{100}\times$1=\$559,87	\$7558,27

Diýmek, 6000 ABŞ dollary mukdardaky bergiden gutulmak üçin 3 ýylyň dowamynda 7558,27 ABŞ dollary mukdardaky tölegleri amala aşyrmaly.

Munda kreditor \$7558,27 – \$6000 = \$1558,27 mukdarda girdeji alýar. Bu girdeji umumy *çylşyrymly göterim tölegi (artdyrma göterim)* diýlip atlandyrylýar.

Görnüşi ýaly, kreditor girdeji ahyrky ýylda emele gelen balans we başlangyç karz mukdarynyň tapawudyna deň eken.

Çylşyrymly göterimler usuly ýyly ýarym ýyllyklara, çärýeklere, aýlara, günlere bölüp ulanylmagy-da mümkin.

6-njy mysal.

Eger 10000 ABŞ dollary mukdarynda karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 6% bilen 1 ýylda çärýeklere bölüp tölemek şerti bilen alnan bolsa, kreditor tarapyndan alynýan girdeji näçe bolar?

△

Çärýek	**Karz** (1)	**Göterim tölegi** $= \frac{Crn}{100}$ (2)	**Balans** (1) + (2)
1	\$10000,00	$\$10000{,}00\times\frac{6}{100\cdot4}\times\frac{1}{4}=\$150{,}00$	\$10150,00
2	\$10150,00	$\$10000{,}00\times\frac{6}{100\cdot4}\times\frac{1}{4}=\$152{,}25$	\$10302,25
3	\$10302,25	$\$10302{,}25\times\frac{6}{100\cdot4}\times\frac{1}{4}=\$154{,}53$	\$10456,78
4	\$10456,78	$\$10456{,}78\times\frac{6}{100\cdot4}\times\frac{1}{4}=\$156{,}85$	\$10613,63

Diýmek, 10000 ABŞ dollary mukdardaky karzdan gutulmak üçin 1 ýylyň dowamynda 10613.63 ABŞ dollary mukdardaky tölegleri amala aşyrmaly.

Munda kreditor 613.63 ABŞ dollary mukdarda girdeji alýar. ▲

Eger karz birnäçe ýyla berlen bolsa, jemleýji balans aşakdaky ýaly hasaplanýar:

$$A = C(1+\frac{r}{100})^n,$$

bu ýerde A – jemleýji balans, C – ilki alnan karzyň mukdary, r – her ýyla bellenilen göterim stawkasy, n – ýyllar sany.

Eger karz n ýyla berlen bolsa, tölegler bolsa her ýyly k sany bölege (ýarym ýyllyklar, çärýekler, aýlar we ş.m.) bölüp amala aşyrylsa, tölenýän umumy mukdar $A = C(1+\frac{r}{100k})^{kn}$ formula boýunça hasaplanýar.

Iki usulda-da umumy çylşyrymly göterim tölegi (artdyrma göterim) $I= A - C$ formula boýunça hasaplanýar.

6-njy mysaly şu formulalara daýanyp çözýäris.

C=10000, r=6, n=1, k=4.

$A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$; $A=10000\times(1+\frac{6}{100\cdot4})^4$; A=10613,64.

Diýmek, 10000 ABŞ dollary mukdardaky karzdan gutulmak üçin 1 ýyl dowamynda 10613.64 ABŞ dollary mukdardaky tölegleri amala aşyrmaly.

Munda kreditor 613.64 ABŞ dollary mukdarda girdeji alýar.

Eger banka ýönekeý göterim boýunça goýlan başlangyç serişde C som bolsa, n ýyldan soň bank müşderä $a_n=C(1+\frac{nr}{100})$ som mukdarda pul töleýär, bu ýerde r bankyň ýyllyk göterim stawkasy.

Eger, şu serişde çylşyrymly göterim boýunça banka goýulsa, n ýyldan soň bank müşderä $b_n=C(1+\frac{r}{100})^n$ som mukdarda pul töleýär.

a_n – yzygiderligiň arifmetik progressiýa,

b_n – yzygiderligiň bolsa geometrik progressiýa düzýändigi aýdyň.

Gönükmeler

1. a) 3 000 funt sterling ýyllyk göterim stawkasy 7% boýunça 3 ýyla karzyna alynsa;

b) 6100 ABŞ dollary ýyllyk göterim stawkasy 5,9% boýunça 15 aýa karzyna alynsa;

c) 800 000 Ýaponiýa iýenasy ýyllyk göterim stawkasy 6,5% boýunça 4 ýyl-u 7 aýa karzyna alynsa;

d) 250 000 ýewro ýyllyk göterim stawkasy 4,8% boýunça 134 güne karzyna alynsa;

kreditora tölenýän göterim tölegini tapyň.

2. 130000 ABŞ dollary karzyna berlen bolsa, kreditor haýsy ýagdaýlarda köpräk girdeji alýar:
ýyllyk göterim stawkasy 7% boýunça 5 ýyla,
ýa-da ýyllyk göterim stawkasy 7,7% boýunça 5,5 ýyla bellenilendemi?

3. Kreditor tarapyndan göterim stawkasy her ýyla 7% diýlip bellenilen. Telekeçi 5 ýylyň içinde alnan karzy we göterim tölegine goşmaça 910 ABŞ dollaryny töleýär we karzdan gutuldy. Telekeçi näçe mukdarda karz alan?

4. Ýyllyk göterim stawkasy 8% diýlip bellenilen. 3 ýylyň içinde göterim tölegine goşmaça 3456 funt sterling tölenen bolsa, näçe mukdarda karz alnan?

5. Inwestor 21 aýda 2300 ýewro girdeji almakçy. Her ýylky göterim stawkasy 6,5% diýlip bellenen bolsa, inwestor näçe mukdarda inwestisiýa girizmeli?

6. a) Kreditor 4500 ABŞ dollary mukdarynda karz berip, 3 ýylda 900 ABŞ dollaryna deň girdeji aldy. Ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?

b) Kreditor 170000 Ýapon iýenasy mukdarynda karz berip, 2 ýylda 170000 Ýapon iýenasyna deň girdeji aldy. Ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?

7. 8 aýyň dowamynda 9000 ABŞ dollary mukdarynda karz alnyp, karzdan daşary goşmaça 700 ABŞ dollary tölendi. Ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?

8. Raýat 26 million som banka goýup, onuň hasabynda 18 aýda 32 million som bolandygyny anyklady. Ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?

9. a) Kreditor 20000 ABŞ dollary karz berip, 5000 ABŞ dollaryna deň girdeji aldy. Ýyllyk göterim stawkasy 7% bolsa, karz näçe ýyla alnan?

b) Kreditor 1200 ýewro mukdarynda karz berip 487 ýewro girdeji aldy. Ýyllyk göterim stawkasy 6,75% bolsa, karz näçe ýyla alnan?

10. Müşderi banka 9400 funt sterlingi ýyllyk göterim stawkasy 6,75% bilen goýdy. 1800 funt sterling girdeji almak üçin näçe wagt gerek?

11. Eger:

a) 4500 ýewro karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 7% bilen 3 ýylda tölemek şerti bilen;

b) 6000 ABŞ dollary karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5% bilen 4 ýylda tölemek şerti bilen;

c) 7400 funt sterling mukdarynda karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 6,5% bilen 3 ýylda tölemek şerti bilen alnan bolsa, jemleýji balansy hasaplaň.

22-24 MESELELER ÇÖZMEK

1-nji mesele. Çak edeliň, telekeçi 23000 ABŞ dollary mukdarynda karzdan gutulmak üçin tölegleri ýylma-ýyl däl, meselem, aýma-aý deň böleklerde amala aşyrmagy karar etdi. Eger töleg döwri 6 ýyl, ýyllyk göterim stawkasy 8% bolsa, ol her aýda nähili mukdardaky tölegleri amala aşyrmaly?

1-nji ädim

Göterim töleg mukdaryny hasaplaýarys.

C=23 000, r=8%, n=6 bolany üçin

$$I=\frac{Crn}{100}=\frac{23000\cdot 8\cdot 6}{100}=\$11040.$$

2-nji ädim

Artan kapital serişde mukdaryny, ýagny umumy tölenýän summany hasaplaýarys:

$$C+I=\$23000+\$11040=\$34040.$$

3-nji ädim

Näçe aýyň dowamynda tölenmelidigini hasaplaýarys:

$$6\times12=72 \text{ aý}.$$

4-nji ädim

Diýmek, her aýynda tölenýän serişde

$$\frac{\$34040}{72}\approx \$472{,}78\text{-e deň.}$$

2-nji mesele.

Eger 8800 ýewro karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 4,5% bilen her ýylda tölemek şerti bilen alnan bolsa, kreditor tarapyndan 3,5 ýylda alnan girdeji näçe bolar?

$C=8800$, $r=4{,}5\%$, $n=3{,}5$, $k=12\times3\frac{1}{2}=42$

Diýmek, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$; $A=8800\times(1+\frac{4.5}{1200})^{42}$,

$A=10298{,}08$, ýagny $I=A-C=10298{,}08-8800=1498{,}08$

3,5 ýylda alnan girdeji €1498,08-e deň.

3-nji mesele.

Eger bankdan 50000 ABŞ dollary mukdarynda alnan kredit ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5,2% bilen her çärýekde tölemek şerti bilen alnan bolsa, banka 3 ýylda näçe ABŞ dollary tölenýär?

$A=50000$, $r=5{,}2\%$, $n=3$, $k{\cdot}n=4\times3=12$

Diýmek, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$ $50000=C\times(1+\frac{5{,}2}{400})^{12}$

$C=42820{,}99$. Banka 3 ýylda \$42821 tölenýär.

Binalar, desgalar we ymaratlar, tehniki serişdeler, esbap-enjam, inwentar we enjamlar, kompýuterler we ş.m. ler peýdaly hyzmat möhleti dowamynda könelýär. Könelme olardan peýdalanylan wagtynda şu serişdeleriň tehniki önümçilik häsiýetlerini ýuwaş-ýuwaşdan ýitirmek prosesini görkezýär.

Amortizasiýa sarp edilen serişdeleriň bahasyny olaryň könelmäge laýyk ýagdaýda önümiň özüne düşýän gymmaty, döwür harajatlaryna geçirmek, sarp edilen serişdeleriň öwezini dolmak maksadynda pul fonduny toplanyşyny görkezýär.

Amortizasiýanyň bahasyny hasaplamak üçin aşakdaky formuladan peýdalanylýar:

$$A=C\times(1-\frac{r}{100})^{n},$$

bu ýerde A – n sany döwür böleginden soň bolan amortizasiýa bahasy, C – başlangyç nyrh, r – her ýyla bellenilen amortizasiýa normasy, n – döwür bölekleri sany (meselem, ýyllar).

4–nji mesele.

Gurluşyk enjamy 2400 funt sterling nyrhda satyn alnan. Eger amortizasiýa normasy 15% diýlip bellenilen bolsa, onuň 6 ýyldan soňky bahasyny tapyň.

△ $A=C\times(1-\frac{r}{100})^n$, by ýerde $C=2400$, $r=15$, $n=6$.

Diýmek,

$A=2400\times(1-0,15)^6$,

$A=2400\times(0,85)^6$.

Amortizasiýa bahasy takmynan 905,16 funt sterling bolýandygyny tapýarys.

Diýmek, enjamyň 6 ýyldan soňky bahasy £2400 – £905,16 = £1494,84-e deň. ▲

Sarp edilýän (meselem mebel, elektron-durmuş tehnikasy, kompýuter, awtomaşyn we ş.m.) harytlary ýa-da ýaşaýyş jaýy (ipoteka) satyn almak üçin dürli kreditleri resmileşdirýärler. Adatda, beýle kreditler gysga möhletlere berilýär we hemişelik ýa-da üýtgeýän artdyrma göterim belnilleýär.

Aşakda biz fomulalardan peýdalanmazdan tiz hasap-hesipler üçin kredit tölegi jedwelini getirýäris (1000 pul birligine laýyk):

Aýlar	Ýyllyk artdyrma göterim						
	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%
12	86,0664	86,5267	86,9884	87,4515	87,9159	88,3817	88,8488
18	58,2317	58,6850	59,1403	59,5977	60,0571	60,5185	60,9820
24	44,3206	44,7726	45,2273	45,6847	46,1449	46,6078	47,0735
30	35,9789	36,4319	36,8883	37,3482	37,8114	38,2781	38,7481
36	30,4219	30,8771	31,3364	31,7997	32,2672	32,7387	33,2143
42	26,4562	26,9142	27,3770	27,8445	28,3168	28,7939	29,2756
48	23,4850	23,9462	24,4129	24,8850	25,3626	25,8455	26,3338
54	21,1769	21,6416	22,1124	22,5894	23,0724	23,5615	24,0566
60	19,3328	19,8012	20,2764	20,7584	20,2470	21,7424	22,2444

5-nji mysal.

Raýat 9200 ýewro kredit aldy. Oňa 12% ýyllyk göterim tölegi we 3,5 ýyllyk töleg möhleti bellenilen. Bir aýa näçe tölenmeli? Jemi näçe tölenmeli?

Töleg möhleti 42 aý bolany üçin jedwelden her bir 1000 ýewro €29,2756 ýewro tölenmelidigini anyklaýarys.

Diýmek, 9200 ýewro üçin her aýda €9200 = €29,2756×9,2

= €269,33552 ≈ €269,340 tölenmeli.

Jemi = €269,40×42 = €11314,80 tölenmeli.

Gönükmeler

12. 10000 ABŞ dollary mukdarynda karz 10 ýyla ýyllyk göterim stawkasy 5,75% boýunça alyndy. Karz töleglerini deň böleklerde her ýarym ýylda nähili mukdarda amala aşyrmaly?

13. 15000 ýewro mukdaryndaky karz 36 aýa ýyllyk göterim stawkasy 4,5% boýunça alyndy. Karz töleglerini deň böleklerde her çärýekde nähili mukdarda bermeli?

14. Bir adam bankdan 8000 funt sterlingi 3,5 ýyla her aýda 230 funt sterling tölemek şerti bilen kredite aldy. Oňa nähili ýyllyk göterim stawkasy bellenilipdi?

15. 6800 ABŞ dollary mukdaryndaky karz 2,5 ýyla ýyllyk göterim stawkasy 8% boýunça alyndy. Karz töleglerini deň böleklerde aýma-aý tölemek üçin her aýda nähili mukdarda bermeli?

16. Eger

a) 950 ýewro mukdaryndaky karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5,7% bilen 2 -nji ýylyň ahyrynda;

b) 4180 funt sterling mukdaryndaky karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5,75% bilen 3 -nji ýylyň ahyrynda;

c) 237000 Ýapon iýenasy mukdaryndaky karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 7,3% bilen 4 -nji ýylyň ahyrynda

hasaplansa, umumy çylşyrymly göterim tölegini tapyň.

17. Maks 8500 ABŞ dollary mukdaryndaky bank depozitine pul goýdy. Ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasyny 6% belgiläp, bank her çärýekde Maksyň hasabyna pul geçirýär. 1 ýyldan soň Maksyň hasabyndaky näçe pul bolar?

18. Mariýa 24000 funt sterlingi ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5% boýunça banka goýdy. Her aýda bank onuň hasabyna pul geçirýär. 3 aýdan soň Mariýanyň hasabynda näçe pul bolar?

19. Kreditor 45000 ABŞ dollary mukdarynda ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 8,5% boýunça karz berdi. Eger tölegler

a) ýönekeý göterimler;
b) her ýarym ýyla çylşyrymly göterimler;
ç) her çärýekde çylşyrymly göterimler
boýunça amala aşyrylsa, 3 ýyldan soň alnan girdejileri deňeşdiriň.

20. Ofis üçin mebel 2500 ýewro satyn alyndy. Şeýle serişdeleriň amortizasiýa normasy 15%-e deňdigi mälim. Aşakdaky jedweli depderiňize göçüriň we dolduryň.

Ýyllar	Amortizasiýa	Nyrhy
0		€2500
1	15%·€2500 = €375	
2		
3		

21. Raýat mebel satyn almak üçin 1200 ABŞ dollary mukdarynda kredit aldy. Ýyllyk göterim stawkasy 8%, töleg möhleti 5 ýyl bolsa, ol her aýda näçe tölemeli? Jemi näçe serişde tölenýär? Kredit tölegi jedwelinden peýdalanyň.

22. Raýat ýaşaýyş jaýyny abatlamak üçin 14000 ABŞ dollary mukdarynda kredit aldy. Ýyllyk göterim stawkasy 11%, töleg möhleti 4 ýyl bolsa, ol her aýda näçe tölemeli? Jemi näçe serişde tölenýär? Kredit tölegi jedwelinden peýdalanyň.

Barlag ýumuşlary

1. Bank tarapyndan her ýyla göterim stawkasy 14% diýlip bellenilen. Telekeçi bankdan alan karzyny we göterim tölegine goşmaça 16000000 somy 5 ýylyň içinde töleýär we karzdan gutulýar. Telekeçi näçe mukdarda karz alypdyr?
2. Raýat ilki banka 20000000 som amanata goýup, 15 aýda 900000 som girdeji aldy. Eger töleg ýylma-ýyl amala aşyrylan bolsa, ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?
3. Eger 20000000 som karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 6% bilen 1 ýylda çärýeklere bölüp tölemek şerti bilen alnan bolsa, kreditoryň alýan girdejisi näçe bolar?
4. Djon ýaşaýyş jaýyny satyn almak üçin 5 ýyla 25000 ABŞ dollary mukdarynda kredit alypdyr. Ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 8% bolsa we tölegler her aýda amala aşyrylýan bolsa ol her aýda näçe pul tölemeli? Kreditor näçe girdeji alar?
5. Enjam 45000 ABŞ dollaryna satyn alyndy we 2 ýyl 3 aýdan soň könelmegi netijesinde onuň bahasy 28500 ABŞ dollaryna deň. Enjamyň ýyllyk amortizasiýa normasyny tapyň.

III BAP

ELEMENTAR FUNKSIÝALAR WE DEŇLEMELER

25-28 ÝÖNEKEÝ RASIONAL DEŇLEMELER WE OLARYŇ ULGAMLARY

Eger bir deňlemäniň ähli çözüwleri ikinji deňlemäniň hem çözüwleri bolsa, onda ikinji deňleme birinjisiniň *netijesi* diýilýär.

Iki deňlemäniň çözüwleri toplumlary üstme-üst düşse, beýle deňlemelere *deňgüýçli* diýilýär.

1-nji mysal. Deňlemeler deňgüýçlümi?

1) $x + 2 = 3$ we $x + 5 = 6$; 2) $\frac{x^2 + x}{x-1} = 0$ we $\frac{x+1}{x-1} = 0$.

△ 1) Iki deňleme birmeňzeş köke eýe: x=1. Başga kökler ýok bolany üçin bu deňlemeler deňgüýçli.

2) Birinji deňleme 0 köküne eýe, ikinjisi bolsa beýle köke eýe däl. Diýmek, berlen deňlemeler deňgüýçli däl. ▲

x üýtgeýjili iki $P(x)$ we $Q(x)$ köpagza berlen bolsun.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ görnüşdäki aňlatma *rasional aňlatma* diýilýär.

Eger $A(x)$ we $B(x)$ – rasional aňlatmalar bolsa,

$$A(x)=B(x)$$

görnüşdäki deňleme *rasional deňleme* diýilýär.

Ilki iň ýönekeý görnüşdäki

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \qquad (1)$$

rasional deňlemä garalyň.

Mälim bolşy ýaly, $\frac{m}{n}$ drob nola deň bolmagy üçin onuň sanawjysy nola deň bolmaly, maýdalawjysy bolsa nola deň bolmaly däl (0-a bölmek mümkin däl!).

Diýmek, (1) deňlemäni çözmek üçin $Q(x)\neq 0$ we $P(x)=0$ şertleri bir wagtda kanagatlandyrýan x näbelliniň ähli bahalaryny tapmaly we ýeterli.

Bu ýagdaý gysga görnüşde aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

2-nji mysal. Deňlemäni çözüň:

1) $\frac{x^2-2x+1}{x-7}=0$; 2) $\frac{x^2-2x+3}{x-7}=0$;

3) $\frac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}=0$; 4) $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=0$.

△ 1) $x^2–2x+1=0$ deňleme ýeke-täk $x=1$ köke eýe. $x=1$ bolanda maýdalawjy noldan tapawutly. Diýmek, berlen deňleme ýeke-täk $x=1$ çözüwe eýe.

2) $x^2–2x+3=0$ kwadrat deňleme çözüwe eýe däl, çünki $D=1–3=–2<0$. Diýmek, berlen deňleme-de köklere eýe däl.

3) $2x^2–5x+3=0$ deňleme kwadrat deňlemedir.

$D=b^2–4ac=(–5)^2–4\cdot 2\cdot 3=25–24=1>0$, diýmek, bu deňleme iki köke eýe:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4}; \qquad x_1=\frac{5-1}{4}=1; \qquad x_2=\frac{5+1}{4}=1,5.$$

Emma 1,5 sany $\frac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}$ aňlatmanyň maýdalawjysyny nola öwürýär, 1 sany bolsa – ýok. Diýmek, berlen deňleme ýeke-täk $x=1$ köke eýe.

4) $(x–1)^2(x+2)=0$ deňleme 1 we –2 iki köke eýe. Emma 1 sany $(x–1)$ maýdalawjyny nola öwürýär, –2 sany bolsa – ýok. Diýmek, berlen deňleme ýeke-täk $x=–2$ köke eýe.▲

Eger $A(x)$ ýa-da $B(x)$ aňlatmalaryň iň bolmanda biri birnäçe rasional aňlatmalaryň jemi görnüşinde bolsa, $A(x)=B(x)$ rasional deňlemäni çözmek düzgüni şeýle bolmagy mümkin:

1-nji ädim. Deňlemä giren droblaryň umumy maýdalawjysy tapylýar;

2-nji ädim. Deňlemäniň iki bölegi umumy maýdalawja köpeldilýär;

3-nji ädim. Emele gelen deňlemäniň kökleri tapylýar;

4-nji ädim. Tapylan köklerden umumy maýdalawjyny nola öwürýänleri alyp taşlanýar.

3-nji mysal. $\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{x(2-x)}$ deňlemäni çözüň.

△ Deňlemäniň iki bölegini-de $2x(2–x)$ umumy maýdalawja köpeldýäris.

Emele gelen $4x+x(2–x) = 8$ deňlemede ýönekeýleşdirmeleri ýerine ýetirip, şu kwadrat deňlemä gelýäris: $x^2–6x+8=0;$

$$D=9–8=1>0,$$

Diýmek, bu deňleme iki köke eýe: $x_1=2;$ $x_2=4.$

Barlamak.

Eger $x=2$ bolsa, maýdalawjy $x(2–x) = 2(2–2) = 0$. Ýagny $x=2$ berlen deňlemäniň köki däl.

Eger $x=4$ bolsa, maýdalawjy $x(2–x) = 4(2–4) \neq 0$. Ýagny $x=4$ berlen deňlemäniň köki. *Jogaby:* 4 ▲

Eger $A(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $B(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ görnüşde bolsa, $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ görnüşdäki rasional deňlemäni çözmek üçin $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ proporsiýanyň esasy häsiýetinden peýdalanmak maksada laýyk:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc.$$

Munda aşakdaky algoritm boýunça çemeleşilýär:

1-nji ädim. $f(x)q(x)=p(x)g(x)$ deňleme kökleri tapylýar;

2-nji ädim. Tapylan köklerden $q(x), g(x)$ maýdalawjylary nola öwrülýänleri alyp taşlanýar.

4-nji mysal. $\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x+3}{x-4}$ deňlemäni çözüň.

△ $(x–2)(x–4) = (x+2)(x+3);$ $x^2–4x–2x+8 = x^2+3x+2x+6;$

$–6x+8–5x–6 = 0;$ $–11x = –2;$ $x=\dfrac{2}{11}.$

Eger $x=\dfrac{2}{11}$ bolsa, $x+2 = \dfrac{2}{11}+2 \neq 0;$ $x–4 = \dfrac{2}{11}–4 \neq 0.$

Jogaby: $\dfrac{2}{11}$. ▲

Käbir ýagdaýlarda berlen deňlemede amatly çalşyrma ýerine ýetirip, ýönekeýräk deňlemä gelmek mümkin.

5-nji mysal. Deňlemäni çözüň:

1) $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^4+5\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2-36=0;$ 2) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\frac{x}{x^2-2x+2}=1.$

△ 1) $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2=t$ çalşyrma ýerine ýetirýäris. Munda $t\geqslant 0$ we deňleme $t^2+5t-36=0$ görnüşi alýar. Ahyrky deňleme $t=-9$ we $t=4$ köklere eýe, şolardan ikinjisi položitel.

Diýmek, $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2=4$, ýagny $\frac{2x}{x+1}=2$ ýa-da $\frac{2x}{x+1}=-2$.

$\frac{2x}{x+1}=2$ deňleme çözüwe eýe däl, $\frac{2x}{x+1}=-2$ deňleme bolsa ýeke-täk $x=-0{,}5$ çözüwe eýe.

Jogaby: $x=-0{,}5$. ▲

2) Görnüşi ýaly, $x=0$ sany deňlemäni kanagatlandyrýar. $x\neq 0$ bolsun. Deňlemäniň sanawjysyny we maýdalawjysyny x -a bölsek:

$\frac{x+3+\frac{2}{x}}{x-1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{x-2+\frac{2}{x}}=1$ deňlemäni alarys.

$z=x+\frac{2}{x}-2$ çalşyrmagy ýerine ýetirsek, berlen deňleme

$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1$ görnüşi alýar.

Ahyrky deňlemäni çözýäris:

$$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \frac{(z+5)z}{(z+1)z}+\frac{z+1}{z(z+1)}-\frac{z(z+1)}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2+5z+z+1-z^2-z}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{5z+1}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}$$

Indi x-i tapýarys.

$$x+\frac{2}{x}-2=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow x+\frac{2}{x}-\frac{9}{5}=0 \Leftrightarrow 5x^2-3x+10=0.$$

$5x^2-9x+10=0$ kwadrat deňlemäniň diskriminanti otrisatel bolany sebäpli, ol hakyky çözüwe eýe däl.

Jogaby: $x=0$. ▲

Rasional deňlemeler ulgamlary

Rasional deňlemelerden düzülen ulgamlary çözmek bize mälim bolan goşmak, ornuna goýmak we ş.m. usullaryna daýanýar. Munda gatnaşan rasional aňlatmalaryň maýdalawjylary nola deň bolmaýandygyny bellik edýäris.

6-njy mysal. Ulgamy çözüň:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15. \end{cases}$

1) Birinji deňlemede $\dfrac{x}{y}=t$ çalşyrmagy ýerine ýetirsek, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{t}$ ($t\neq0$) bolýar.

$$t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow 6t^2-5t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2}, \\ t=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \text{ ýagny } \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{x}{y}=-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Mundan ýa-da $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ ýa-da $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y, \\ x^2-y^2=-5. \end{cases}$ ulgamlary alarys.

Bu ulgamlary çözýäris:

$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{9}{4}y^2-y^2=5 \end{cases}$ ýa-da $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{4}{9}y^2-y^2=5. \end{cases}$

Birinji ulgam (3, 2), (–3, –2) çözüwlere eýe, ikinji ulgam bolsa çözüwe eýe däl.
Jogaby: (3; 2), (–3; –2).

2) $a=xy,\ b=\dfrac{x}{y}$ belgileme girizeliň.

$$\begin{cases} 2a-3b=15, \\ a+b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12, \\ b=3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=12, \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y, \\ y\cdot3y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y, \\ y^2=4. \end{cases}$$

Jogaby: (6; 2), (–6; –2).

Soraglar we ýumuşlar

1. Rasional deňlemä kesgitleme beriň.
2. Deňgüýçli deňlemelere kesgitleme beriň.
3. Deňgüýçli deňlemeler ulgamyna mysal getiriň.

Gönükmeler

1. Deňlemeleri çözüň (**1–2**):

a) $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$; c) $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$;

d) $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$; e) $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$; f) $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$;

g) $\frac{7}{2x+9}-6=5x$; h) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$; i) $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$.

2. a) $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$; b) $\frac{8x-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$;

c) $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$; d) $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$;

e) $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$; f) $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$.

3. Deňgüýçli deňlemeleri görkeziň:

a) $\frac{(5x-4)}{x+1}=0$; b) $5x-4=0$; c) $(5x-4)(x+1)=0$;

d) $10x=8$; e) $\left(x-\frac{4}{5}\right)(x+1)=0$; f) $6x-4=x$;

g) $x^2+2x+18=0$; h) $2x^2+2x+11=0$.

Deňlemeler ulgamyny çözüň (4–7):

4. a) $\begin{cases}\frac{x}{2y+3}=3,\\ \frac{y}{2y+3}=-\frac{1}{9};\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=2,\\ \frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{12}{x}+\frac{25}{y}=7,\\ \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=2.\end{cases}$

5. a) $\begin{cases}\frac{5x}{8y}=\frac{8y}{5x},\\ 5x-8y=20;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+\frac{7}{y}=11,\\ 7x+\frac{2}{y}=16;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{(x-9)(x-6)}{y+8}=0,\\ \frac{(y+8)(y-8)}{x-6}=0.\end{cases}$

6. a) $\begin{cases} 4x=\dfrac{25}{y}+15, \\ 4y=\dfrac{25}{x}+15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4x-7}=-\dfrac{y}{4x-7}, \\ 4x^2-11y+7=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{5x-4y}=\dfrac{y}{5y-4x}, \\ xy=-16. \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} (x+1)(x-8)=0, \\ \dfrac{y-3}{x+y-2}=5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{y^2}, \\ xy=-8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^5}=5\dfrac{x^2}{y^4}, \\ x-5y=15. \end{cases}$.

8. Klubuň zalynda 320 orun bolup, hatarlar boýunça birmeňzeş paýlanan. Her bir hatardaky orunlar sanyny 4 sany artdyryp, ýene bir hatar goýlandan soň zalda 420 orun boldy. Zaldaky hatarlar sany näçe boldy?

9. 108 synag tabşyrýan okuwçylar düzme ýazýarlar. Olara 480 list kagyz paýlandy, şunuň bilen birlikde her bir gyz her bir oglana garanda bir list artyk kagyz aldy. Hemme gyzlar bolsa oglanlar näçe list kagyz alan bolsalar, şonça list kagyz aldylar. Näçe gyz we näçe oglan bolupdyr?

29-32 ÝÖNEKEÝ IRRASIONAL DEŇLEMELER WE OLARYŇ ULGAMLARY

Üýtgeýjisi kök astynda gatnaşan deňleme *irrasional deňleme* diýilýär.

Irrasional deňlemeleriň käbir görnüşlerini çözmegiň usullaryny getireliň.

I $$\sqrt{f(x)}=g(x) \qquad (1)$$

görnüşdäki ýönekeý irrasional deňlemä garalyň.

$f(x)$, $g(x)$ aňlatmalar otrisatel däl bolanda bu deňlemäniň iki bölegini kwadrata götersek, deňgüýçli deňlemä gelýäris.

$f(x)=g^2(x)\geqslant 0$ bolany üçin $f(x)$ aňlatma otrisatel däl bolýar.

Diýmek, (1) deňlemäni çözmek

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$$

düzgün boýunça amala aşyrylýar.

Edil şeýle $\sqrt[2n]{f(x)}=h(x)$ görnüşdäki deňleme $\begin{cases} f(x)=h^{2n}(x) \\ h(x)\ge 0 \end{cases}$ ulgam deňgüýçli.

1-nji mysal. $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$ deňlemäni çözüň.

Deňlemäni iki bölegini-de kwadrata göterýäris we netijede $2x-x^2=x^2-4x$ ýa-da $2x(x-3)=0$ deňlemä eýe bolarys. Mundan $x_1=0$, $x_2=3$ kökleri alýarys

$x>2$ bolany üçin $x=3$ berlen deňlemäniň çözüwi.

II $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ *görnüşdäki deňleme.*

Iki aňlatmanyň köpeltmek hasyly nola deň bolmagy üçin, olardan iň bolmanda biri nola deň bolmaly.

Diýmek, $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ bolmagy üçin ýa-da $g(x)=0$ deňlik ýa-da $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$ ulgam ýerlikli bolmaly.

Bu ýagdaý gysgaça $\left[\begin{array}{l} g(x)=0, \\ \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ ýaly ýazylýar.

2-nji mysal. $(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0$ deňlemäni çözüň.

$$(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ x+4\geq 0, \end{cases} \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x+4\geq 0, \end{cases} \\ x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Jogaby: -4 we 2.

3-nji mysal. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$ deňlemäni çözüň.

Berlen deňleme $(x-3)(\sqrt{x^2-5x+4}-2)=0$ şekile getirilýär.
$\begin{cases} x=3, \\ x^2-5x+4\geq 0 \end{cases}$ ulgam çözüwe eýe bolmanlygy üçin $\sqrt{x^2-5x+4}=2$ deňlemä garamak ýeterli. Bu deňlemäniň iki bölegini kwadrata götersek, oňa deň güýçli bolan $x^2-5x+4=4$ deňlemäni alarys.

Jogaby: 0 we 5.

III $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ *görnüşdäki deňleme.*

Şeýle deňlemeler çözülende kök derejesi n sanynyň jübüt-täkligine garalýar we berlen deňlemäni deňgüýçli deňlemä getirilýär.

Eger *n - täk bolsa:* $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Meselem, $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}$ deňleme $f(x)=g(x)$ deňlemä deňgüýçli.

4-nji mysal. $\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1}$ deňlemäni çözüň.

$$\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^2+8x-8=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-7. \end{array}\right.$$

Jogaby: 1 we -7.

Eger *n jübüt*, ýagny $n=2k$ bolsa, berlen deňleme şu ulgamlaryň her birine deňgüýçlüdir:

$$\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$$

Amalda şolardan aňsadrak bolanlary saýlanýar.

5-nji mysal. $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$ deňlemäni çözüň.

$$\triangle\ \sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=x, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Jogaby: $x=2$. ▲

IV *Üýtgeýjileri çalşyrmak.*

6-njy mysal. $\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=4$ deňlemäni çözüň.

△ $u=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ çalşyrma girizýäris. Onda

$$\begin{cases} u+\frac{3}{u}=4, \\ u\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=1, \\ u=3, \end{array}\right. \\ u\geq 0. \end{cases}$$

Indi berlen deňlemäniň köklerini tapýarys.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}=1, \\ \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1,2. \end{array}\right.$$

Jogaby: $x=2$ we $x=1,2$. ▲

7-nji mysal. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$ deňlemäni çözüň.

△ $z=\sqrt{x^2+3x}$ çalşyrma girizýäris:

$$\begin{cases} z^2+z=6, \\ z\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z=-3, \\ z=2, \end{array}\right. \\ z\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z=2.$$

Indi berlen deňlemäniň köklerini tapýarys.

$$\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Jogaby: $x=-4$ we $x=1$.

Irrasional deňlemeler ulgamy

Irrasional deňlemelerden düzülen ulgamlary çözmek bize mälim bolan goşmak, ornuna goýmak we ş.m. usullaryna daýanýar. Elbetde munda gatnaşýan irrasional aňlatmalaryň barlyk ýaýlalaryny hasaba almalydygyny nygtaýarys.

8-nji mysal. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}=25, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x(13-x)=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x^2-13x+36=0. \end{cases}$$

Bu ulgamdan (4; 9) we (9; 4) çözüwleri tapýarys.

9-njy mysal. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

$\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$ diýip belgileýäris, hem-de gysga köpeltmek formulasyndan peýdalansak:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^2-uv+v^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)^2-3uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ uv=2. \end{cases}$$

ulgama eýe bolarys. Bu ulgamyň çözüwi $u_1=1$, $v_1=2$, $u_2=2$, $v_2=1$ bolýar. Mundan (1; 8) we (8; 1) çözüwlerini tapýarys.

10-njy mesele

Tekizlikde $A(3; 4)$ we $B(-2; 5)$ nokatlardan deň uzaklykda ýerleşýän $C(x; 0)$ nokady tapyň.

$AC=BC$ bolýanlygyndan iki nokadyň arasyndaky aralygyň formulasyna görä

$\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(0-5)^2}$ irrasional deňlemäni alarys.

Bu deňlemäni deňgüýçli deňlemäniň häsiýetlerinden we gysga köpeltmek formulalaryndan peýdalanyp çözsek, $(x-3)^2+16=(x+2)^2+25$ ýa-da $-10x=4$ deňlemäni alarys. Ahyrky deňlemäniň köki $x=-0,4$ bolýar. Diýmek, gözlenýän nokat $C(-0,4;\ 0)$ eken. ▲

11-nji mesele

Tekizlikde $A(-1;\ 2)$ we $B(3;\ -4)$ nokatlardan deň uzaklykda ýerleşýän we $y=3x$ göni çyzykda ýatýan nokady tapyň.

△ Şerte görä gözlenýän nokadyň ordinatasy $y=3x$ bolýar. Diýmek, gözlenýän nokat $C(x;3x)$ koordinataly nokat eken. $AC=BC$ bolýanlygyndan iki nokadyň arasyndaky aralygyň formulasyna görä, $\sqrt{(x+1)^2+(3x-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(3x+4)^2}$ irrasional deňlemäni alarys. Bu deňlemäni çözsek, $(x+1)^2+(3x-2)^2=(x-3)^2+(3x+4)^2$, ýa-da $-28x=20$ deňlemä gelýäris. Ahyrky deňlemäniň köki $x=-\frac{5}{7}$ bolýar. Diýmek, gözlenen nokat $C(-5/7;\ -15/7)$ eken.

Jogaby: $C(-5/7;\ -15/7)$. ▲

Soraglar we ýumuşlar

1. Irrasional deňlemä kesgitleme beriň we mysal getiriň.
2. Deňgüýçli irrasional deňlemä kesgitleme beriň.
3. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=a, \\ \sqrt{xy}=b \end{cases}$ görnüşdäki deňlemeler ulgamy nähili çözülýär?
4. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=a, \\ x+y=b \end{cases}$ görnüşdäki deňlemeler ulgamy nähili çözülýär?

Gönükmeler

Deňlemäni çözüň (**10–19**):

10. a) $\sqrt{3x+5}=-8$; b) $\sqrt{4x-6}=9$; c) $\sqrt{5x+9}=17$; d) $\sqrt{13x+5}=-17$.

11. a) $\sqrt{12x-11}=15$; b) $\sqrt{23x+5}=-7$; c) $\sqrt{23x-7}=27$; d) $\sqrt{6x+13}=-2$.

12. a) $\sqrt{x^2-3x+1}=x+2$; b) $\sqrt{x^2+5x+2}=x+4$.

13. a) $\sqrt{x^2+7x+1}=x-1$; b) $\sqrt{x^2-6x+2}=x+5$.

14. a) $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{-2x-1}$; b) $\sqrt{-2x^2-3x-2}=\sqrt{x+1}$.

15. a) $\sqrt{x^2+8x-7}=\sqrt{-x-1}$; b) $\sqrt{-x^2+3x+5}=\sqrt{x+10}$.

16. a) $x^2+3x-1+\sqrt{x^2+3x-9}=0$; b) $x^2-x-7+\sqrt{x^2-x-9}=0$.

17. a) $x^2+2x-11+\sqrt{x^2+2x-1}=0$; b) $x^2-8x+3+\sqrt{x^2-8x-7}=0$.

18. a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3$; b) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$.

19. a) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+11}=5$; b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=3$.

Deňlemeler ulgamyny çözüň (**20–23**):

20. a) $\begin{cases} 2\sqrt{x}=3y, \\ y^2+2\sqrt{x}=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5\sqrt{x}=4y, \\ y^2+5\sqrt{x}=5. \end{cases}$

21. a) $\begin{cases} x-4\sqrt{y}=1, \\ x+2y=17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2\sqrt{y}=-2, \\ x+2y=2. \end{cases}$

22. a) $\begin{cases} (\sqrt{x}-5)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+5y=60; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+2y=15. \end{cases}$

23. a) $\begin{cases} 5x-3\sqrt{y}=-34, \\ 5x+3\sqrt{y}=-16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-5\sqrt{y}=-37, \\ 6x+5\sqrt{y}=13. \end{cases}$

24. Tekizlikde $A(5; 7)$ we $B(-3; 4)$ nokatlardan deň uzaklykda ýerleşýän $C(x; 0)$ nokady tapyň.

25. Tekizlikde $A(5; 9)$ we $B(-6; 7)$ nokatlardan deň uzaklykda ýerleşýän $C(x; 0)$ nokady tapyň.

33–36 ÝÖNEKEÝ GÖRKEZIJILI DEŇLEMELER WE OLARYŇ ULGAMLARY

Görkezijili deňlemeler

Üýtgeýjisi derejede gatnaşan deňleme *görkezijili deňleme* diýilýär.

Görkezijili deňlemeler çözülende aşakdaky deňliklerden peýdalanylýar: $(a>0, \quad a\neq 1, \quad b>0)$

1. $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$;
2. $a^x a^y=a^{x+y}$;
3. $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;
4. $a^x b^x=(ab)^x$;
5. $(a^x)^y=a^{xy}$;
6. $a^0=1$.

Görkezijili deňlemeleriň käbir görnüşlerini çözmegiň usullaryny getireliň.

I *Birmeňzeş esasa getirmek*

Bu usulda deňleme $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ görnüşdäki deňlemä getirilýär. Mundan $f(x)=g(x)$ bolýar.

1-nji mysal. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ deňlemäni çözüň.

△ $\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$ bolýandygyny hasaba alyp, berlen deňlemäni $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$ görnüşde ýazýarys.

1-nji deňlige görä $3x-7=-7x+3, \quad x=1$.

Jogaby: 1.▲

2-nji mysal. $0{,}125\cdot 4^{2x-8}=\left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ deňlemäni çözüň.

△ Deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazýarys:

$$\frac{1}{8}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x} \qquad 2^{-3}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(2^{-2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

2-nji deňlige görä $2^{-3+2(2x-8)}=\left(2^{-2-0,5}\right)^{-x}$ ýa-da $2^{4x-19}=2^{2,5x}$.

Ahyrky deňleme $4x-19=2,5x$

deňlemä deň güýçlüdir. Mundan $x=\frac{38}{3}$.

Jogaby: $x=\frac{38}{3}$.▲

II *Täze üýtgeýjini girizmek.*

3-nji mysal. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$ deňlemäni çözüň.

△ 2-deňligi ulanyp, deňlemäni $5^{2x}\cdot 5^{-1}+5^{x}\cdot 5-250=0$ ýaly ýazyp alarys.

$5^x=t>0$ deb, täze üýtgeýji girizýäris. Onda $\frac{1}{5}t^2+5t-250=0$ deňlemä gelýäris.

U $t_1=-50$, $t_2=25$ köklere eýe. Emma $t_1=-50$ kök $t>0$ şerti kanagatlandyrmaýar. Diýmek, $5^x=25$ we $x=2$.

Jogaby: $x=2$.▲

4-mysal. $9^x+6^x=2\cdot 4^x$ deňlemäni çözüň.

△ Deňlemäniň ik bölegini $4^x\neq 0$ -a bölýäris:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=2 \text{ ýa-da } \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$ diýip, ahyrky deňlemäni $t^2 + t - 2 = 0$ görnüşe getirýäris. Bu deňlemäniň çözüwlerini tapýarys: t_1=–2, t_2=1.

t_1 -iň bahasy üçin t>0 şert ýerine ýetirilmändi. Diýmek,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad \Rightarrow x = 0.$$

Jogaby: x=0.▲

5-nji mysal. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$ deňlemäni çözüň.

△ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = 1$ bolany sebäpli-de $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Deňlemäni $\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ görnüşde ýazýarys.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t > 0$ diýeliň. Mundan $\frac{1}{t} + t = 4$, ýagny $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Ahyrky deňleme $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ köklere eýe.

1-nji ýagdaý. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}, \quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}, \quad \frac{x}{2} = 1, \quad x = 2.$

2-nji ýagdaý. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}, \quad \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3}$,

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3}, \quad -\frac{x}{2} = 1, \quad x = -2.$

Jogaby: x=–2 we x=2. ▲

III *Umumy köpeldijini ýaýlardan daşary çykarmak.*

6-njy mysal. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ deňlemäni çözüň.

△ Çep tarapda 6^x -ny, sag tarapda bolsa 2^x -i ýaýdan daşary çykarýarys. Netijede $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$ ýa-da 6^x=2^x deňlemä gelýäris. Bu deňlemäniň iki tarapyny 2^x≠0-a bölsek, 3^x=1, ýagny x=0 -y alarys.

Jogaby: x=0.▲

Iň ýönekeý görkezijili deňlemeler ulgamy

7-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} 3^{x+y}=27, \\ 2^{5x-y}=8. \end{cases}$

△ Derejäniň häsiýetlerine görä deňlemeler ulgamy aşakdaky deňlemeler ulgamyna deňgüýçli: $\begin{cases} 3^{x+y}=3^3, \\ 2^{5x-y}=2^3. \end{cases}$ Mundan $\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-y=3 \end{cases}$ ulgama gelýäris. Onuň çözüwleri x=1, y=2 bolýandygy görnüp dur.

Jogaby: x=1, y=2. ▲

8-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} 3^{5x+6y}=9, \\ 2^{7x+3y}=8. \end{cases}$

△ Derejäniň häsiýetlerine görä deňlemeler ulgamy aşakdaky görnüşi alýar:

$$\begin{cases} 3^{5x+6y}=3^2, \\ 2^{7x+3y}=2^3. \end{cases}$$

Ahyrky deňlemeler ulgamy bolsa $\begin{cases} 5x+6y=2, \\ 7x+3y=3. \end{cases}$ çyzykly ulgama deňgüýçli.

Çyzykly deňlemeler ulgamynyň 2-deňlemesini (–2)_ä köpeldip 1-nji deňlemä goşsak, $-9x=-4$ deňlemäni alarys. Mundan $x=\frac{4}{9}$ bolýandygy tapylýar. Ony 2-nji deňlemä goýsak, $\frac{28}{9}+3y=3$ ýa-da $3y=3-\frac{28}{9}$, ýa-da $3y=-\frac{1}{9}$, ýa-da $y=-\frac{1}{27}$ -ni tapýarys. *Jogaby:* $x=\frac{4}{9}$, $y=-\frac{1}{27}$. ▲

9-njy mysal. Deňlemeler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} 4^x+5^y=9, \\ 4^x-5^y=-1. \end{cases}$

△ $4^x=u$, $5^x=v$ belgileme girizsek, berlen deňlemeler ulgamy şu görnüşi alýar: $\begin{cases} u+v=9, \\ u-v=-1. \end{cases}$ Görnüşi ýaly, bu deňlemeler ulgamynyň çözüwi u=4, v=5. Onda $4^x=4$ we $5^y=5$ deňlemeleri alarys. Bu ýerden x=1, y=1 çözüwleri tapýarys.

Jogaby: x=1, y=1. ▲

Gönükmeler

Deňlemäni çözüň (**26–35**):

26. a) $4^{3x+5}=4^{3-5x}$; b) $7^{4x+5}=7^{9-5x}$; c) $6^{x+5}=6^{3x}$;
d) $8^{x+5}=8^{2-5x}$; e) $11^{x}=11^{2+5x}$; f) $2^{x-5}=2^{25x}$.

27. a) $2\cdot2^{x+2}-3\cdot2^{x+1}-5\cdot2^{x}=-6$; b) $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$;
c) $2\cdot4^{x+2}+4^{x+1}-5\cdot4^{x}=31$; d) $2\cdot7^{x+2}-2\cdot7^{x+1}-14\cdot7^{x}=10$.

28. a) $11^{3x^2+46}=11^{x^2+25x}$; b) $3^{x^2-4x}=3^{2(x^2-15)}$;
c) $7^{2x^2-4}=7^{3(x^2-x)}$; d) $5^{5x^2+x}=5^{3(x^2-2x)}$.

29. a) $9^{x}+3^{x}-6=84$; b) $25^{x}+5^{x}-30=0$;
c) $5\cdot4^{x}+2^{x}-6=0$; d) $9^{x}+3^{x}-12=0$.

30. a) $9\cdot25^{x}-7\cdot15^{x}-16\cdot9^{x}=0$; b) $7\cdot16^{x}+9\cdot12^{x}-16\cdot9^{x}=0$.

31. a) $4^{x}+7\cdot6^{x}-8\cdot9^{x}=0$; b) $9\cdot16^{x}+7\cdot12^{x}-16\cdot9^{x}=0$.

32. a) $(0{,}125)^{x-1}=\sqrt{2^{5-4x}}$; b) $\frac{4}{5}\cdot(0{,}8)^{x-1}=(1{,}25)^{x+3}$.

33. a) $32^{x^2+x}=\frac{4}{16^{x}}$; b) $4^{x}-10\cdot2^{x-1}=24$.

34. a) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot2^{\sqrt{x-2}}$; b) $5\cdot2^{3(x-1)}-3\cdot2^{5-3x}+7=0$.

35. a) $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0$; b) $8^{x}+18^{x}=2\cdot27^{x}$.

36. Müşderi 100 000 000 somy banka ýyllyk 22% göterim stawkasy bilen mälim möhlete goýdy. Möhletiň ahyrynda ol 221 533 456 som aldy. Pul näçe ýyla goýlandygyny tapyň.

37. Telekeçi 10 000 000 somy banka ýyllyk 21% göterim stawkasy bilen mälim möhlete goýdy. Möhlet ahyrynda ol 17 715 610 som aldy. Pul näçe ýyla goýlandygyny tapyň.

38. Ilat sany ýylyna 4% artsa, näçe ýyldan soň ilat sany 3 esse artar?

39. Ilat sany ýylyna 2% kemelse, näçe ýyldan soň ol 10% kemeler?

Deňlemeler ulgamyny çözüň (**40–43**):

40. a) $\begin{cases}3^{5x-6y}=27,\\2^{7x+3y}=32;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+16y}=81,\\2^{3x-5y}=4;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3^{x+2y}=81,\\9^{3x}\cdot3^{y}=27.\end{cases}$

41. a) $\begin{cases}3^{5x-y}=243,\\2^{7x+11y}=16;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+8y}=9,\\2^{x-12y}=64;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2^{x}+2^{y}=6,\\2^{x}-2^{y}=2.\end{cases}$

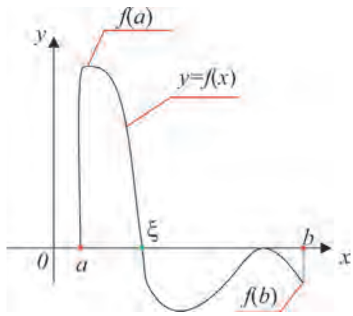
42. a) $\begin{cases} 5^{3x-y}=25, \\ 2^{x^2+xy+y^2}=8; \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5^{x+2y}=125, \\ 2^{x^2+3xy-y^2}=8; \end{cases}$; c) $\begin{cases} 11^x+7^y=18, \\ 11^x-7^y=4. \end{cases}$.

43. a) $\begin{cases} 5^{x+y}=25, \\ 2^{x^2-3xy+2y^2}=1; \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5^{3x-y}=25, \\ 2^{x^2+xy+y^2}=8; \end{cases}$; c) $\begin{cases} 6^x+3^y=39, \\ 6^x-3^y=108. \end{cases}$.

37-38 DEŇLEMELERI TAKMYNY ÇÖZMEK

Eger $f(x)$ köpagza $[a, b]$ kesimiň uçlarynda dürli alamatly bahalary kabul etse, ýagny $f(a)\cdot f(b)<0$ bolsa, bu kesimiň içinde $f(x)=0$ deňlemäniň iň bolmanda bir çözüwi bar. Ýagny, şeýle $\xi\in[a, b]$ ("ksi" diýlip okalýar) bar $f(\xi)=0$.

Bu tassyklama aşakdaky çyzgyda görkezilen.



Deňlemäniň hut bir köküni öz içine alan $[a, b]$ kesime garalyň.

Kesimi deň ýarpa bölmek usuly $[a, b]$ kesimi emele gelýän kesimiň uzynlygy berlen ε anyklykdan kiçi bolýança deň ýarpa bölmekden ybarat.

Munuň üçin:

1) $x=a$-da $f(x)$ aňlatmanyň $f_a=f(a)$ bahasy hasaplanýar.

2) kesim deň ýarpa bölünýär, ýagny $x=(b-a)/2$ hasaplanýar;

3) $f(x)$ aňlatmanyň $x=(b-a)/2$ bolandaky f_x bahasy hasaplanýar.

4) $f_a\cdot f_x>0$ şert barlanylýar;

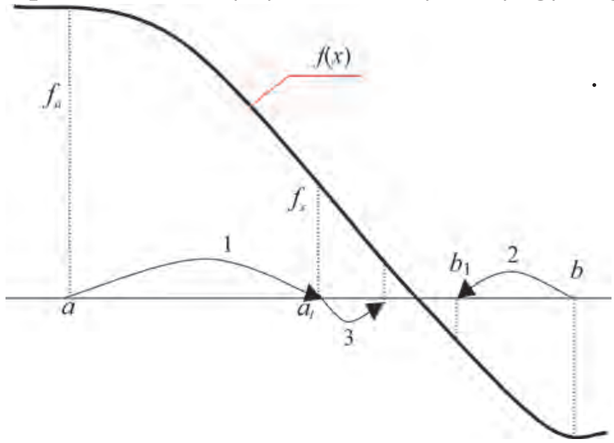
5) eger bu şert ýerine ýetirilse, täze kesimiň çep araçägi hökmünde öňki kesimiň ortasy alynýar, ýagny $a=x$, $f_a=f_x$ diýlip alynýar (kesimiň çep araçägi orta geçýär);

6) eger bu şert ýerine ýetirilmese, täze kesimiň sag araçägi orta geçýär, ýagny $b=x$ diýlip alynýar;

7) kesimi nobatdaky bölmekden soň $b-a<\varepsilon$ şertiň ýerine ýetirilendigi barlanylýar.

8) eger bu şert ýerine ýetirilse, hasaplamak bes edilýär. Munda takmyny çözüw hökmünde x-iň ahyrky hasaplanan bahasy alynýar. Eger bu şert ýerine ýetirilmese, bu algoritmiň 2-nji ädimine gaýdyp, hasaplama dowam etdirilýär.

Kesimi deň ýarpa bölmek usulynyň mazmuny şu çyzgyda görkezilen:



Hakyky kök ýatýan aralygy tapmak

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ deňleme köki ýatýan aralygy tapmak üçin $A=max\{a,b,c\}$ we $B=max\{\frac{1}{c};\ \frac{a}{c};\ \frac{b}{c}\}$ hasaplanýar.

Berlen deňlemäniň köki üçin $\frac{1}{1+B}<|x|<1+A$ deňsizlik ýerlikli bolýar. Diýmek, berlen deňlemäniň iň bolmanda 1 köki $(-1-A;\ 1+A)$ aralykda ýerleşýän eken. Bu köki takmynan tapmak üçin $-1-A<d_1<d_2<1+A$ we $f(d_1)\cdot f(d_2)=(d_1^3+ad_1^2+bd_1+c)(d_2^3+ad_2^2+bd_2+c)<0$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan d_1 we d_2 bitin sanlar tapylýar.

1-nji mysal. $2x^3+3x^2+5x+1=0$ deňleme köki ýatýan aralygy tapyň.

△ Deňlemäniň iki bölegini-de 2-ä bölsek, $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$ deňleme emele gelýär. $a=\frac{3}{2}$; $b=\frac{5}{2}$; $c=\frac{1}{2}$ bolany üçin, $A=max\{\frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{1}{2}\}=2,5$.

Diýmek, $x\in(-2,5;2,5)$ aralykda deňlemäniň iň bolmanda 1 sany köki bar. Deňleme (0;2,5) aralykda köke eýe däl, çünki $x_0\in(0;\ 2,5)$ bolsa, $2x_0^3+3x_0^2+5x_0+1>0$ bolýar. Diýmek, deňleme (–2,5; 0) aralykda köke eýe eken. Bu aralygy kiçeltmek üçin bitin sanlary alarys, ýagny $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$.

Indi $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$ sanlary deňlemä goýup we aşakdaky şertleri barlap

$$d_1^3+\frac{3}{2}d_1^2+\frac{5}{2}d_1+\frac{1}{2}=-8+6-5+0,5=-6,5<0;$$

$$d_2^3+\frac{3}{2}d_2^2+\frac{5}{2}d_2+\frac{1}{2}=-1+1,5-2,5+0,5=-1,5<0;$$

$d_3^3+\frac{3}{2}d_3^2+\frac{5}{2}d_3+\frac{1}{2}=0,5>0$ deňlemäniň köki $(-1;0)$ aralykda bolýandygyny tapýarys. ▲

Deňlemäniň köküni berlen ε takyklykda aralygy deň 2-ä bolup tapmagyň usuly

Ýokardan mälim bolşy ýaly, eger $(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ bolsa, deňlemäniň köki $(\alpha;\ \beta)$ aralykda bolýar. Indi $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$ bolsun. Eger $|\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c|<\varepsilon$ bolsa, $x=\gamma$ san – deňlemäniň ε takyklykdaky köki. Eger $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ bolsa, köki $(\gamma;\ \beta)$ aralykdan gözlenýär; eger $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)<0$ bolsa, köki $(\alpha;\ \gamma)$ aralykdan gözlenýär. Bu proses tä kök gerekli takyklykda tapylýança dowam ediberýär.

2-nji mysal.

$x^3+1,5x^2+2,5x+0,5=0$ deňlemäniň köküni $\varepsilon=0,1$ takyklykda tapyň.

△ Öňki mysaldan mälim bolşy ýaly, kök $(-1;\ 0)$ aralykda ýatýar. $\gamma=\frac{-1+0}{2}=-0,5$ we $(-0,5)^3+1,5(-0,5)^2+2,5(-0,5)+0,5=-0,5<0$ bolýanlygyndan deňlemäniň köki $(-0,5;\ 0)$ aralykda eken.

$\gamma=\frac{-0,5+0}{2}=-0,25$ we $|(-0,25)^3+1,5(-0,25)^2+2,5(-0,25)+0,5|=|-0,046|<0,1$ bolany üçin deňlemäniň 0,1 takyklykdaky çözüwi $x=-0,25$ bolýar. ▲

Soraglar we ýumuşlar

1. $x^3+ax^2+bx+c=0$ deňlemäniň köki ýatýan aralyk nähili tapylýar?
2. Deňlemäniň kökini berlen ε takyklykda aralygy deň 2-ä bölüp tapmak usulyny düşündiriň.

Gönükmeler

Deňlemäniň köki ýatýan aralygy tapyň (**44–47**):

44. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

45. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

46. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

47. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

Deňlemäniň köküni $\varepsilon=0{,}1$ takyklykda tapyň (**48−51**):

48. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

49. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

50. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

51. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

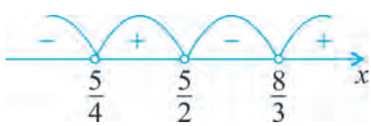
39-41 ÝÖNEKEÝ RASIONAL DEŇSIZLIKLER WE OLARYŇ ULGAMLARY

Bir üýtgeýjili rasional deňsizlikler we olary çözmegiň usullary

$A(x)$ we $B(x)$ rasional aňlatmalar üçin $A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geqslant B(x)$, $A(x)\leqslant B(x)$ gatnaşyklara x üýtgeýjili deňsizlikler diýilýär. x -iň deňsizligi dogry sanly deňsizlige öwürýän islendik bahasyna deňsizligiň çözüwi diýilýär.

1-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $2(2x-5)(3x-8)(5-4x)<0$.

△Deňsizligi aralyklar usulynyň kömeginde çözýäris. Bu usul bilen 9-njy sypda tanşypdyňyz. Ýaýlaryň içindäki aňlatmalary nola deňläp, $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=\frac{8}{3}$ sanlary tapýarys. Olar sanlar okuny $(-\infty;\ \frac{5}{4})$, $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2};\ \frac{8}{3})$, $(\frac{8}{3};\ +\infty)$ aralyklara bölýär. Deňsizlige $(\frac{8}{3};\ +\infty)$ aralyga degişli, meselem, $x=10$ sanyny goýsak, deňsizlik dogry deňsizlige öwrülýär. Diýmek, deňsizlik $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})\cup(\frac{8}{3};\ +\infty)$ aralyklarda ýerlikli.▲

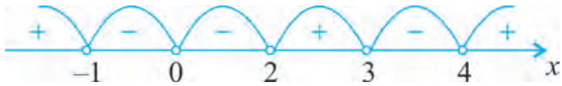


2-nji mysal.

Deňsizligi çözüň: $\dfrac{x^2(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$.

△$x=2$, $x=4$ sanlar deňsizligiň çözüwi däl. $x\neq2$, $x\neq4$ bolanda $(x-2)^2\cdot(x-4)^2>0$ bolýar. Şu sebäpli deňsizligiň iki bölegini-de $(x-2)^2\cdot(x-4)^2$ -a köpeltmek netijesinde berlen deňsizlige deňgüýçli aşakdaky deňsizlik emele gelýär: $(x+1)x^2(x-3)(x-2)(x-4)>0$.

Ýaýlary nola deňläp, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=2$, $x_5=3$, $x_6=4$ sanlary tapýarys. Netijede sanlar oky aşakdaky aralyklara bölünýär: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$, (4;+∞). Bu ýerde nol sany 2 gezek duşýar. Şonuň üçin deňsizlik nol sanynyň 2 ýanyndaky aralykda birmeňzeş alamatly. Ahyrky aralykdan araçäkde ýatmadyk x=10 sanyny alyp deňsizlige goýsak, dogry sanly deňsizlik emele gelýär. Diýmek, deňsizligiň çözüwi aşakdaky aralyklardyr: $(-\infty;-1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$.



3-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-3} \geq 0$.

Görnüşi ýaly, $x\neq3$ sanawjyny nola deňläp, $x^2-5x+4=0$, $x_1=1$, $x_2=4$ sanlary alarys. $x_1=1$ we $x_2=4$ sanlar deňsizligi kanagatlandyrýar. Diýmek, sanlar oky aşakdaky aralyklara bölünýär: $(-\infty;\ 1]$, $[1;\ 3)$, $(3;\ 4]$, $[4;\ +\infty)$.

Ahyrky aralykdan araçäkde bolmadyk x=5 sanyny alsak, dogry sanly deňsizlik emele gelýär. Şonuň üçin $[1;3)\cup[4;+\infty)$ aralyklar deňsizligiň çözüwi.

Ýönekeý rasional deňsizlikler ulgamy

4-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} 3x-8\leq1, \\ 4x+3>5. \end{cases}$

Ulgamyň her bir deňsizligini ýönekeýleşdirsek, $\begin{cases} 3x\leq1+8, \\ 4x>5-3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x\leq9, \\ 4x>2; \end{cases}$ ýagny, $\begin{cases} x\leq3, \\ x>0,5. \end{cases}$ deňsizlikleri alarys. Diýmek, ulgamyň çözüwi $(-\infty;3]$ we $(0,5;\ +\infty)$ aralyklaryň umumy bölegi, ýagny $(0,5;\ 3]$ aralykdan ybarat eken.

5-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} (3-x)(4+x)\geq0, \\ (2+x)(5-x)<0. \end{cases}$

Ulgamdaky her bir deňsizligi çözüp, 1-nji deňsizligiň çözüwi $[-4;\ 3]$ aralyk, 2-nji deňsizligiň çözüwi bolsa $(-\infty;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$ aralyklardygyny tapýarys. Diýmek, deňsizlikler ulgamynyň çözüwi bu çözüwleriň umumy bölegi, ýagny $[-4;\ 2)$ aralykdan ybarat bolýar.

Soraglar we ýumuşlar

1. Deňsizligiň çözüwi näme, mysallarda düşündiriň.
2. Deň güýçli deňsizliklere mysallar getiriň.
3. Iň ýönekeý rasional deňsizlikler ulgamyny çözmegi bir mysalda düşündiriň.

Gönükmeler

Deňsizligi çözüň (**52–53**):

52. 1) $(x-6)(3-17x)(2x+8)\le 0$; 2) $(x^2+5x-6)(7x-11)>0$;

3) $(3+5x)(2x^2-6x+4)<0$; 4) $\frac{2x-5}{2x+1}\ge 0$;

5) $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\ge 0$; 6) $\frac{3x+11}{2-x}<0$;

7) $\frac{x-1}{4x-1}<1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x}\ge 1$; 9) $\frac{x^2-5x+11}{x^2-7}\le 0$; 10) $\frac{x^3-1}{2x^2-3x+1}>1$.

53. 1) $(x-5)\,(3-7x)\,(2x+8)\le 0$; 2) $(x^2-5x-6)\,(7x+11)>0$;

3) $(3-5x)\,(2x^2-4x+4)<0$; 4) $\frac{x-5}{2x+1}\ge 0$;

5) $(x^2-6x-7)\,(x^2+x+1)\ge 0$; 6) $\frac{3x+1}{2-x}<0$;

7) $\frac{x+1}{4x-1}<1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x}\ge 3$; 9) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-7}\le 0$; 10) $\frac{x^3+1}{2x^2-3x+1}>1$.

54. Deňsizlikler ulgamyny çözüň (**54–55**):

1) $\begin{cases}3x-5\le 7x,\\ 2x+1>-2x+3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}<1,\\ -\frac{5x+1}{2}-\frac{7}{3}>\frac{x}{5};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x+5\le 7x,\\ 2x-1>-3x+3.\end{cases}$

55. 1) $\begin{cases}2(x-5)\le 4(x+3),\\ 2x-1>-5x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{5x}{3}-\frac{2x}{4}\ge 3\frac{1}{3},\\ 2-\frac{5-4x}{2}<\frac{6x}{5};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}6x+5\le 7x,\\ 6x-4>3x+3.\end{cases}$

42-43 ÝÖNEKEÝ IRRASIONAL DEŇSIZLIKLER

Irrasional deňsizlik diýlende näbelli kök belgisi astynda bolan deňsizlik düşünilýär.

Deňsizlikleriň çözüwleri toplumy, adatda, sanlaryň çäksiz toplumlaryndan ybarat bolýar, şu sebäpli bu sanlary başlangyç deňsizlige gönüden-göni goýmak ýoly bilen çözüwler toplumyny barlamak, umuman aýdanda mümkin däl. Jogabyň dogrudygyny üpjün edýän ýeke-täk ýol – başlangyç deňsizligi islendik çalşyrmakda bu deňsizlige deňgüýçli deňsizlik emele gelýändigine gözegçilik etmeli.

Irrasional deňsizlikleri çözen mahalyňyzda deňsizligiň ik bölegini-de täl derejä göterende hemişe başlangyç deňsizlige deňgüýçli deňsizlik emele gelýändigini ýatdan çykarmaň. Eger deňsizligiň ik bölegi jübüt derejä göterilýän bolsa, onda başlangyç deňsizlige deňgüýçli we şonuň ýaly deňsizlik alamatyna eýe bolan deňsizlik diňe başlangyç deňsizligiň iki bölegi otrisatel däl bolan ýagdaýda emele gelýär.

Irrasional deňsizligiň çözüwler toplumyny tapmak üçin, adatda, deňsizligiň iki bölegini natural derejä götermäge dogry gelýär. Irrasional deňsizligi çözmegiň esasy usullaryndan biri bu deňgüýçli rasional deňsizliklere getirmek usulydyr.

Iň ýönekeý irrasional deňsizlikler aşakdaky görnüşe eýe:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ $\qquad \sqrt{A(x)} \le B(x)$;

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ $\qquad \sqrt{A(x)} \ge B(x)$;

3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ $\qquad \sqrt{A(x)} \ge \sqrt{B(x)}$.

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ ýa-da $\sqrt{A(x)} \le B(x)$ irrasional deňsizlik aşakdaky deňsizlikler ulgamyna deňgüýçli

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} A(x) \le B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

(1) ulgamdaky birinji deňsizlik berlen deňsizligi kwadrata götermek netijesinde emele gelen deňsizlik, ikinji deňsizligiň kökünň barlyk şertini aňladýar, üçünji deňsizlik bolsa kwadrata götermek mümkindigini aňladýar.

$\sqrt{A(x)} > B(x)$ irrasional deňsizlik çözmek üçin aşakdaky ulgama garamak zerurdyr:

$$\begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} A(x) \ge 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \tag{2}$$

$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ irrasional deňsizlik aşakdaky deňsizlikler ulgamyna deňgüýçli:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

Berlen deňsizligiň iki bölegi ähli ýerlikli x -lar üçin otrisatel däl bolanlygy sebäpli ony kwadrata götermek mümkin. (3) ulgamdaky birinji deňsizlik berlen deňsizligi kwadrata götermek netijesinde emele gelen deňsizlikdir. Ikinji deňsizlik kökün barlyk şertini aňladýar. Görnüşi ýaly, $A(x) \geqslant 0$ şert hökman ýerine ýetirilýär.

(1)–(3) düzgünler irrasional deňsizligi çözmegiň esasy usuly hasaplanýar. Onuň mazmunyny birnäçe mysallarda görkezýäris.

1-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{10x+5} < -3$.

△Bu deňsizligiň sag bölegi otrisatel, şunuň bilen birlikde çep bölegi ýerlikli x lar üçin otrisatel däl. Şonuň üçin deňsizlik çözüwe eýe däl.

Jogaby: Çözüwi ýok. ▲

2-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{3x-9} > -5$.

△Deňsizligiň sag bölegi otrisatel, şunuň bilen birlikde çep bölegi ýerlikli x-lar üçin otrisatel däl. Diýmek, bu deňsizlik $x \geqslant 3$ şerti kanagatlandyrýan ähli x-lar üçin ýerine ýetirilýär.

Jogaby: $x \in [3;+\infty)$. ▲

3-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{2x-3} < 1$.

△(1) düzgüne görä $\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$ $B(x) = 1 \geq 0$ şert ähli x-lar üçin ýerine ýetirilenligi sebäpli, ony aýratyn ýazmak hökman däl.

Jogaby: $\left[\frac{3}{2};2\right)$. ▲

4-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{4x-3} > 1$.

△Bu deňsizlik (2) düzgün boýunça çözülýär. Munda $B(x) = 1 \geq 0$ şert ähli x- lar üçin ýerine ýetirilenligi sebäpli-de bu deňsizlige deň güýçli deňsizligi gönüden-göni ýazyp bileris: $4x-3 > 1^2$.

Jogaby: $x>1$. ▲

5-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{x+18} < 2-x$.

△ Bu deňsizlik (1) düzgün boýunça çözülýär:

$$\begin{cases} x+18 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x+18 < (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18 \\ x \leq 2 \\ x^2-5x-14 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2.$$

Jogaby: $x \in [-18;-2)$. ▲

6-njy mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

△Bu deňsizlik (2) düzgün boýunça çözülýär:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x^2+x-2 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2+x-2 > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ x \geq 1, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ x > 2. \end{array}\right.$$

Jogaby: $x \in (-\infty;-2] \cup (2;+\infty)$. ▲

7-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}$.

△Bu deňsizlik (3) düzgün boýunça çözülýär:

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x \\ 2-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ x \leq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}.$$

Jogaby: $\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$. ▲

8-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6} < 1$.

△Näbelli x-iň deňsizlik mana eýe bolýan toplumyny tapýarys:

$$\begin{cases} x^2-25 \geq 0, \\ x+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -5, \\ x \geq 5, \end{array}\right. \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -6, \\ -6 < x \leq -5. \\ x \geq 5. \end{array}\right.$$

Eger $x+6>0$ bolsa, şu deňsizligi kwadrata götermek mümkin:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \end{array}\right. \\ \sqrt{x^2-25} < x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \end{array}\right. \\ x^2-25 < x^2+12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \end{array}\right. \\ x > -\dfrac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{61}{12} < x \leq -5, \\ x \geq 5. \end{array}\right.$$

$x<-6$ bolsa, berlen deňsizlik hökman ýerine ýetirilýär.

Jogaby: $x \in (-\infty;-6) \cup \left(-\frac{61}{12};-5\right] \cup [5;+\infty)$. ▲

Täze üýtgeýjini girizmek

Irrasional deňlemeler çözülende ulanylan täze üýtgeýjini girizmek usulyny, irrasional deňsizliklere hem ulanmak mümkin.

9-njy mysal. Deňsizligi çözüň: $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$.

△Deňsizligi aşakdaky ýaly ýazyp alarys: $-9\sqrt[4]{x} + \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + 18 \geq 0$.

Täze üýtgeýjini girizýäris: $t = \sqrt[4]{x}$, $t \geq 0$. Munda

$$\begin{cases} -9t+t^2+18 \geq 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 6, \\ t \leq 3, \end{array}\right. \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6, \\ 0 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Şeýdip:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}\ge 6,\\ 0\le\sqrt[4]{x}\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 6^4,\\ 0\le x\le 3^4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1296,\\ 0\le x\le 81.\end{array}\right.$$

Jogaby: $x\in[0;81]\cup[1296;+\infty)$. ▲

10-njy mysal. Deňsizligi çözüň: $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

△ Täze üýtgeýjini girizýäris: $\sqrt{15-x}=t$, $t>0$.

Munda $x=15-t^2$ we t üýtgeýjä görä rasional deňsizligi alarys:

$$\begin{cases}\dfrac{3-(15-t^2)}{t}<1,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-t-12}{t}<0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(t-4)(t+3)}{t}<0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<4.$$

Mundan x-i tapýarys:

$$0<\sqrt{15-x}<4\Leftrightarrow 0<15-x<16\Leftrightarrow -1<x<15.$$

Jogaby: $x\in(-1;15)$. ▲

Soraglar we ýumuşlar

1. Irrasional deňsizlik diýip nämä aýdylýar?
2. Irrasional deňsizligi çözmek prosesinde deňgüýçli çalşyrma geçmäge degişli mysal getiriň.
3. Çözüwi bolmadyk irrasional deňsizlige mysal getiriň.

Gönükmeler

Näbellileriň haýsy bahalarynda deňsizlikler mana eýe? (**56–59**)

56. 1) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-6}>10$; 2) $\sqrt[4]{18-2x}<3$.

57. 1) $\sqrt{10-\sqrt{x-5}}<27$; 2) $\sqrt{(x+3)(x-8)}>x+2$.

58. 1) $\sqrt[3]{x^2-x}>-x\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$.

59. 1) $\sqrt{x^2+3x+1}<x+1$; 2) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}}\ge 2$.

Deňsizlikleri çözüň (**60-66**):

60. 1) $\sqrt{2x-1}<x+2$; 2) $\sqrt{x^2-1}>x-2$.

61. 1) $\sqrt[4]{2x^2-1}\le x$; 2) $\sqrt{x^2-x-2}\ge 2x+3$.

62. 1) $x-3<\sqrt{x^2+4x-5}$; 2) $\sqrt{x^2-55x+250}<x-14$.

63. 1) $\sqrt[3]{x^2+6x}>x$; 2) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}\geq 2$.

64. 1) $\sqrt{2x+1}>\sqrt{3-x}$; 2) $x>\sqrt{x(1+\sqrt{x(x-3)})}$.

65. 1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}\geq 4+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$; 2) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\geq 1$.

66. 1) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}>8$; 2) $\sqrt[3]{x+1}\leq\sqrt[3]{5x}$.

67. Tekizlikde $A(9; 4)$, $B(-4; 5)$, $C(x; y)$ nokatlar berlen. $AC>BC$ şerti kanagatlandyrýan ýaýlany tapyň.

68. Tekizlikde $A(2; 4)$, $B(-3; 5)$, $C(x; y)$ nokatlar berlen. $AC>BC$ şerti kanagatlandyrýan ýaýlany tapyň.

69. Tekizlikde $A(4; 4)$, $B(-5; 7)$, $C(x; y)$ nokatlar berlen. $AC>BC$ şerti kanagatlandyrýan ýaýlany tapyň.

70. Tekizlikde $A(2; 4)$, $B(+3; -5)$, $C(x; y)$ nokatlar berlen. $AC>BC$ şerti kanagatlandyrýan ýaýlany tapyň.

71. Tekizlikde $A(5; 4)$, $B(-6; 5)$, $C(x; y)$ nokatlar berlen. $AC>BC$ şerti kanagatlandyrýan ýaýlany tapyň.

72. Tekizlikde $A(8; 4)$, $B(-7; 5)$, $C(x; y)$ nokatlar berlen. $AC>BC$ şerti kanagatlandyrýan ýaýlany tapyň.

Barlag test ýumuşlary

Synag gönükmeleriniň her birine 4 sanydan "jogap" berlen. 4 "jogabyň" diňe biri dogry, galanlary bolsa nädogry. Okuwçylardan synag gönükmelerini ýerine ýetirip ýa-da başga pikir ýöretmeler kömeginde ine şu dogry jogaby tapmak (ony bellik etmek) talap edilýär.

1. Deňgüýçli deňlemeleri görkeziň:
1) $10x=8$; 2) $6x-4=x$; 3) $x^2+2x+18=0$.
A)1 we 3; B) 2 we 3; C) 1 we 2; D) hemmesi.

2. Deňlemäniň uly köküni tapyň: $(x-5)(x+4)(x-11)=0$.
A) −4; B) 5; C) 16; D)11.

3. Bikwadrat deňlemäniň kökleri jemini tapyň: $3x^4+8x^2-11=0$.
A) 1; B) −1; C) 0; D) 11/3.

4. Deňlemeler ulgamynyň näçe çözüwi bar? $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

5. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{5x+9}=7$.
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.

6. Deňlemeler ulgamynyň näçe çözüwi bar? $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=11, \\ \sqrt{xy}=30. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

7. Tekizlikde $A(3;\ 1)$ we $B(7;\ 3)$ nokatlardan deň uzaklykda ýerleşýän $C(5;\ x)$ nokady tapyň.
A) (5;2); B) (5;3); C) (4;2); D) (4;3).

8. Deňlemäni çözüň: $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$.
A) 1; B) 2; C) −1; D) 0.

9. Deňlemäniň bitin köklerini tapyň: $11^{3x^2+23}=11^{x^2+25x}$.
A) 1; B) −1; C) 2; D) 1 we −1.

10. Haýsydyr bir döwletiň ilaty sany ýylyna 3% kemelse, näçe ýyldan soň ilat sany 20% kemeler?
A) 6; B) 2; C) 8; D) 4.

11 Deňsizligi çözüň: $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\leqslant0$.
A) [−7; 1]; B) [−7; −1]; C) [7; −1]; D) [7; 1].

12. $|x-2|\leqslant5$ deňsizligiň näçe bitin çözüwi bar?
A) 10; B) 11; C) 8; D) 9.

13. Deňsizligi çözüň: $|4x-1|\leqslant-2$.
A) [−7;1]; B) [−7;−1]; C) [7;−1]; D) çözüwi ýok.

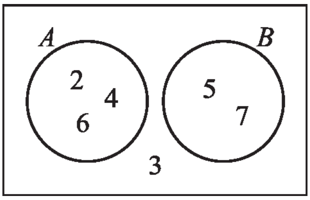
14. $\sqrt{x^2-13x+12}\leq5-x$ deňsizligiň näçe bitin çözüwi bar?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

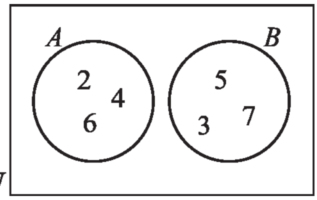
Jogaplar

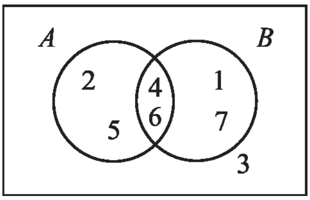
I BAP.

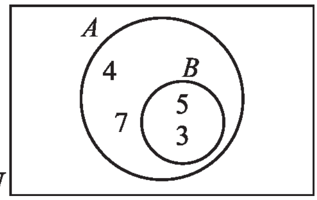
1. a) $5\in D$; b) $6\notin G$; c) $\{2, 5\}\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$; d) $\{3, 8, 6\}\subsetneq\{1,2,3,4,5,6\}$; **2.** a) **I)** {9} **II)** {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}. b) **I)** $\emptyset$ **II)** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. c) **I)** {1, 3, 5, 7} **II)** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **3.** a) 5; b) 6; c) 2; d) 9. **4.** a) çäkli; b) çäksiz. **5.** a) kesişmeýär; b) kesişýär. **6.** a) çäkli; b) çäksiz; c) çäksiz; d) çäksiz. **7.** a) **I)** *A* toplum -1 -den uly ýa-da deň we 7-den kiçi ýa-da deň bolan bitin sanlar toplumy; **II)** {–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} **III)** 9. b) **I)** *A* toplum –2-den uly we 8-den kiçi bolan natural sanlar toplumy; **II)** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} **III)** 8. c) **I)** *A* toplum 0-dan uly ýa-da deň we 1-den kiçi ýa-da deň bolan hakyky sanlar toplumy; **II)** mümkin däl; **III)** çäksiz. d) **I)** *A* toplum 5-den uly ýa-da deň we 6-dan kiçi ýa-da deň bolan hakyky sanlar toplumy; **II)** mümkin däl; **III)** çäksiz. **8.** a) $A=\{x|\ -100 < x < 100, x\in\mathbb{Z}\}$; b) $A=\{x|\ x > 1000, x\in\mathbb{R}\}$; c) $A=\{x|\ 2 \leqslant x \leqslant 3, x\in\mathbb{Q}\}$. **9.** a) **I)** 8 ta: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$; **II)** 16 ta: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$; b) 2^n. **10.** a) Hawa; b) Ýok; c) Hawa; d) Hawa; e) Ýok; f) Ýok. **11.** b) $C'=\mathbb{N}$; c) $C'=\{x|\ x \geqslant -4, x\in\mathbb{Z}\}$; d) $C'=\{x|\ 2 < x < 8, x\in\mathbb{Q}\}$. **12.** a) {2, 3, 4, 5, 6, 7}; b) {0, 1, 8}; c) {5, 6, 7, 8}; d) {0, 1, 2, 3, 4}; e) {5, 6, 7}; f) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}; g) {2, 3, 4}. **13.** a) 9; b) 11. **14.** a) {1, 2, 10, 11, 12}; b) {1, 2, 3, 4, 12}; c) {1, 8, 9, 10, 11, 12}; d) {3, 4, 5, 6, 7}; e) {1, 2, 8, 9, 10, 11, 12}; f) {8, 9, 10, 11}; g) {1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}; h) {2, 10, 11}; **15.** a) *P*={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}; b) {2, 5, 11}; c) {2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23}; d) 12=9+6–3 ✓. **16.** a) *P*={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, *Q*={1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 30}; b) {2, 5, 10}; c) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 40}; d) 12=8+8–4 ✓. **17.** a) *P*={32, 36, 40, 44, 48, 52, 56}, *Q*={36, 42, 48, 54}; b) {36, 48}; c) {32, 36, 40, 42, 44, 48, 52, 54, 56}; d) 9=7+4–2 ✓. **18.** a) *R*={–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4}, *S*={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; b) {0, 1, 2, 3, 4}; c) {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; d) 9=7+7–5 ✓. **19.** a) *C*={–4, –3, –2, –1}, *D*={–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1}; b) {–4, –3, –2, –1}; c) {–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1}; d) 7=4+7–4 ✓. **20.** a) *P*={1, 2, 3, 4, 6, 12}, *Q*={1, 2, 3, 5, 9, 18}, *R*={1, 3, 9, 27}. b) **I)** {1, 2, 3, 6}; **II)** {1, 3}; **III)** {1, 3, 9}; **IV)** {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18}; **V)** {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 27}; **VI)** {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27}. c) **I)** {1, 3}; **II)** {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27}. **21.** a) *A*={4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36}, *B*={6, 12, 18, 24, 30, 36}, *C*={12, 24, 36}. b) **I)** {12, 24, 36}; **II)** {12, 24, 36}; **III)** {12, 24, 36}; **IV)** {12, 24, 36}. c) {4, 6, 8, 12, 16, 18, 20 ,24, 28, 30, 32, 36}. d) 12=9+6+3–3–3–3+3 ✓. **22.** a) *A*={6, 12, 18, 24, 30}, *B*={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, *C*={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}. b) **I)** {6, 30}; **II)** {2, 3, 5}; **III)** $\emptyset$; **IV)** $\emptyset$. c) {1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30}. d) 18=5+8+10–2–3–0+0 ✓.

23.

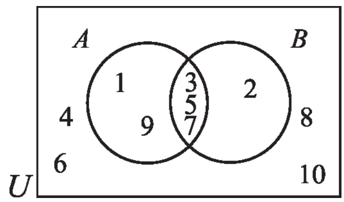
a) U 

b) U 

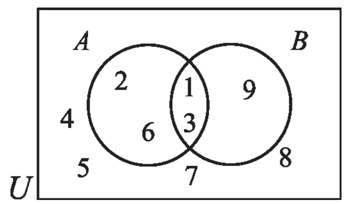
c) U 

d) U 

24.
a) $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B=\{2, 3, 5, 7\}$;
b) $A \cap B=\{3, 5, 7\}$
$A \cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$;

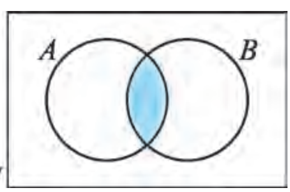


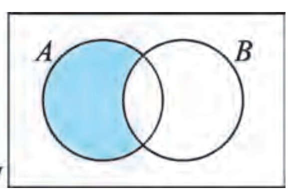
25. a) $A=\{1, 2, 3, 6\}$
$B=\{1, 3, 9\}$;
b) $A \cap B=\{1, 3\}$
$A \cup B=\{1, 2, 3, 6, 9\}$;

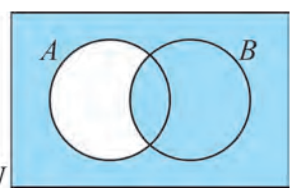


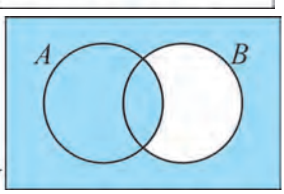
26. a) $\{b, d, e, h\}$; b) $\{e, f, h, i, j\}$; c) $\{a, c, f, g, i, j, k\}$; d) $\{a, b, c, d, g, k\}$; e) $\{e, h\}$; f) $\{b, d, e, f, h, i, j\}$; g) $\{a, c, g, k\}$; h) $\{a, b, c, d, f, g, i, j, k\}$. **27.** a) **I)** $\{a, b, c, d, h, j\}$; **II)** $\{a, c, d, e, f, g, k\}$; **III)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **IV)** $\{a, c, d\}$; **V)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **VI)** $\{a, e, f\}$; **VII)** $\{a\}$; **VIII)** $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

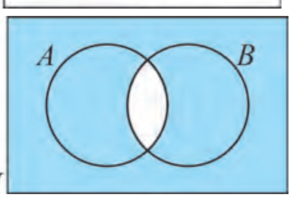
28.

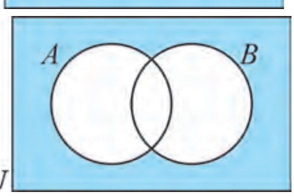
a) U 

b) U 

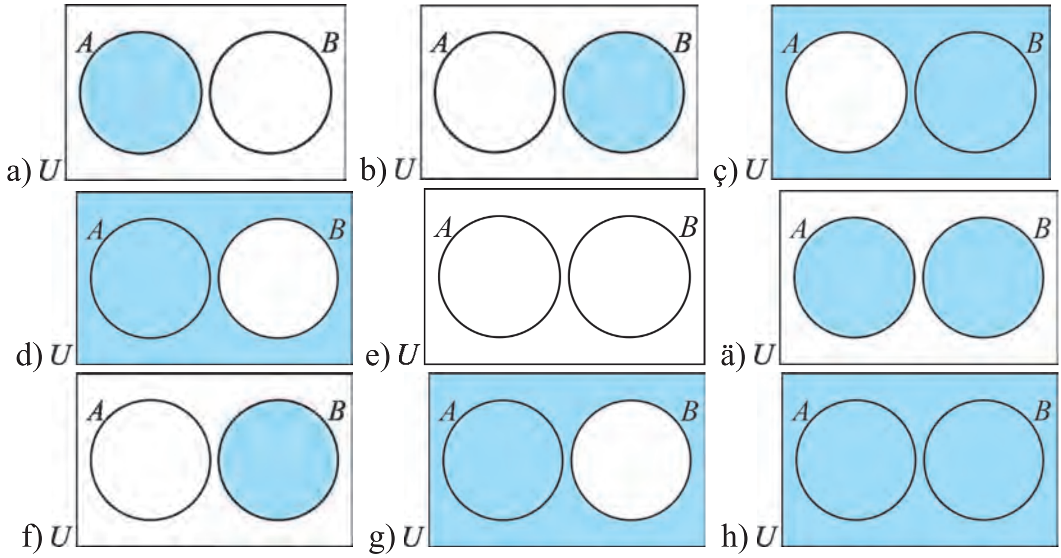
ç) U 

d) U 

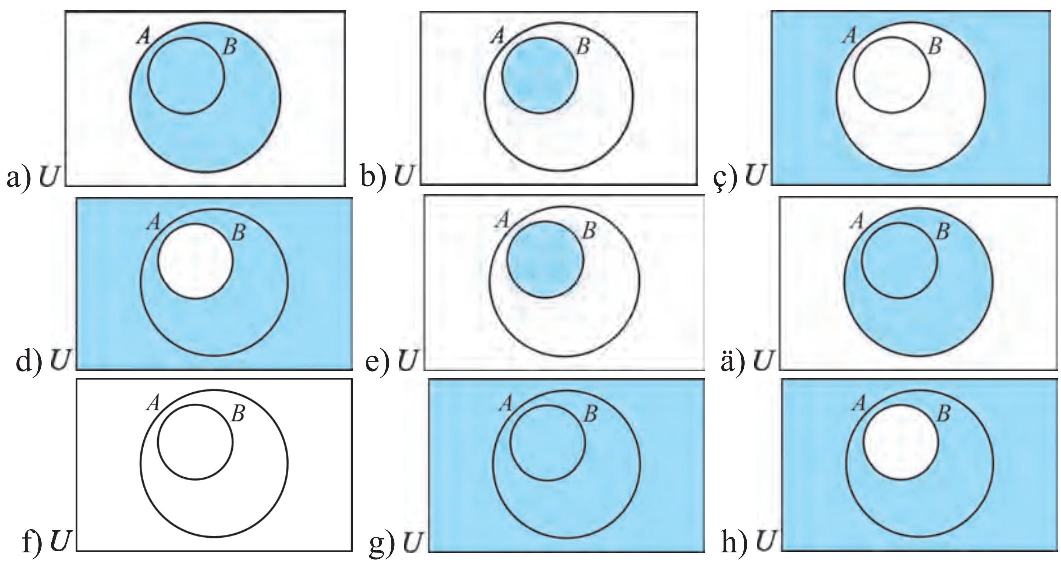
e) U 

ä) U 

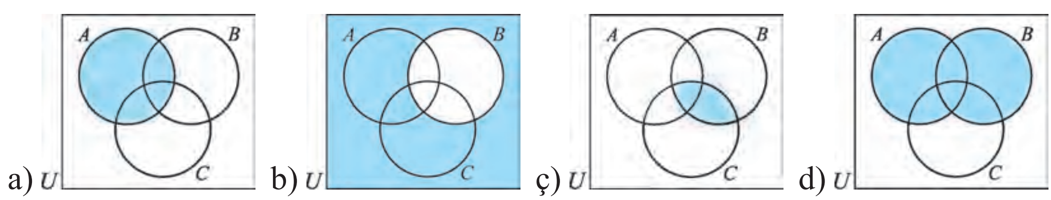
29.

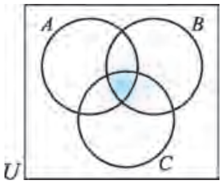

a) U
b) U
ç) U
d) U
e) U
ä) U
f) U
g) U
h) U
A
B

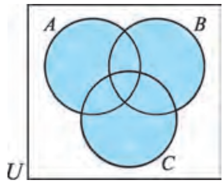
30.

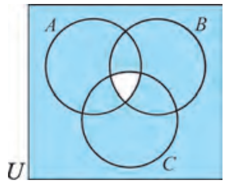

a) U
b) U
ç) U
d) U
e) U
ä) U
f) U
g) U
h) U
A
B

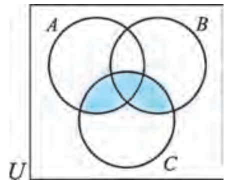
31.


a) U
b) U
ç) U
d) U
A
B
C

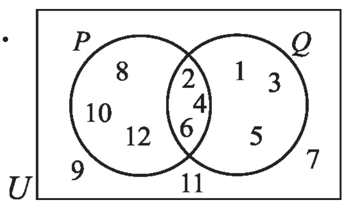
e) 

ä) 

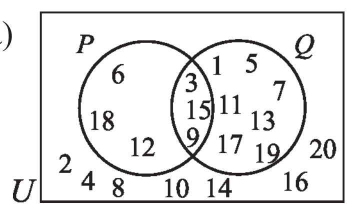
f) 

g) 

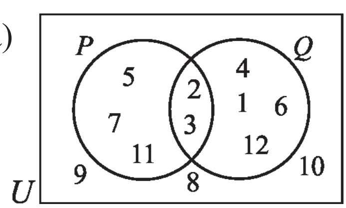
32. a) Hawa, ýalan; b) hawa, çyn; c) Hawa, çyn; d) Hawa, çyn; e) Hawa, çyn; f) Hawa, çyn; g) Ýok; h) Hawa, çyn; i) Ýok; j) Hawa, anyk däl; k) Hawa, anyk däl; l) Ýok; m) Hawa, anyk däl; n) Hawa, anyk däl; o) Hawa, anyk däl; p) Hawa, ýalan. **33.** k) $\neg p$: Käbir dörtburçluklar parallelogram däl; m) $\neg r$: 7 – rasional san däl; n) $\neg s$: $23-14\neq12$; o) $\neg t$: $52:4\neq13$; p) $\neg u$: Käbir iki jübüt sanlaryň tapawudy jübüt bolýar; q) $\neg p$: Yzygider natural sanlaryň köpeltmek hasyly hemişe jübüt bolmaýar; r) $\neg q$: Käbir kütek burçlar özara deň däl; s) $\neg r$: Käbir trapesiýalar parallelogram däldir;
t) $\neg s$: Üçburçlukda iki burçy özara deň, emma ol deňýanly däl.
34. a) $x\geqslant5$; b) $x<3$; c) $y\geqslant8$; d) $y>10$; **35.** e) Ýok, Medinäniň boýy 140 sm hem bolmagy mümkin; f) Ýok; g) Hawa. **36.** f) $x\geqslant5$, $x\in\mathbb{N}$; g) x – sygyr , $x\in\{$*atlar, goýunlar, sygyrlar*$\}$; h) $x<0$, $x\in\mathbb{Z}$; i) x – okuwçy gyz, $x\in\{$*okuwçylar*$\}$; j) x – okuwçy bolmadyk gyz, $x\in\{$*gyzlar*$\}$. **41.** e) $p \wedge q$: Medine – terapewt , Munisa bolsa stomatolog; f) $p \wedge q$: 15-den uly we 30-dan kiçi; g) $p \wedge q$: howa bulutly we ýagyş ýagýar; h) $p \wedge q$: Alymyň saçlary gara we gözleri mawy. **42.** a) çyn; b) ýalan; c) ýalan; d) çyn; e) ýalan.

43. 

44. a) çyn; b) ýalan.
45. a) çyn; b) çyn.

46. a) 

b) **I)** $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$;
II) $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19\}$;
III) $\{3, 9, 15\}$;
IV) $\{1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19\}$.

47. a) 

b) **I)** $\{2, 3\}$;
II) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12\}$;
III) $\{1, 4, 5, 6, 7, 11, 12\}$.

48. a) $\neg x$; b) $x \wedge y$; c) $x \vee y$; d) $\neg x \wedge \neg y$; e) $x \wedge \neg y$. **50.** a) Serdar ir turdy; b) Serdar agşamky nahara palaw iýdi; c) Serdar ertirlige gaýmak iýdi we sport bilen meşgullandy; d) Serdar günortanlyga çorba içdi we agşamky nahara palaw iýdi; e) Serdar ýa günortanlyga ýa agşamky nahara çorba içdi.

51. a)

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

d)

p	$p \vee q$
T	T
F	F

52. a) tawtologiýa däl; b) tawtologiýa; c) tawtologiýa däl.

55.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

57. d) Gün çyksa, men suwa düşmäge bararyn; e) x san 6-a bölünse, ol jübüt bolýar; f) sowadyjyda ýumurtgalar bolsa Medine tort bişirýär.

59. a) $p \Rightarrow q$; b) $q \Rightarrow p$; c) $\neg q$; d) $\neg p$; e) $\neg p \Rightarrow \neg q$; f) $p \Rightarrow \neg q$; g) $\neg q \Rightarrow p$; h) $p \Leftrightarrow q$; **63.** a) Konwersiýa: Eger Diýara ýylynsa, ol jemper geýýär; Inwersiya: Eger Diýara jemper geýmese, ol ýylynyp bilmeýär. b) Konwersiýa: Eger iki üçburçlugyň degişli burçlary deň bolsa, olar meňzeş bolýar; Inwersiya: Eger iki üçburçluk meňzeş bolmasa , olaryň degişli burçlary deň bolmaýar. c) Eger $2x^2=12$ bolsa, onda $x = \pm\sqrt{6}$ bolýar; Konwersiýa: Eger $x = \pm\sqrt{6}$ bolsa, onda $2x^2=12$ bolýar. Inwersiya: Eger $2x^2 \neq 12$ bolsa, onda $x \neq \pm\sqrt{6}$ bolýar. d) Konwersiýa: Eger Alym hoşal bolsa, ol oýun oýnaýar; Inwersiya: Alym oýun oýnamasa, ol hoşal bolmaýar. e) Eger üçburçluk dogry bolsa, onda onuň taraplary deň bolýar; Konwersiýa: Eger üçburçlugyň taraplary deň bolsa, ol dogry bolýar; Inwersiya: Eger üçburçluk dogry bolmasa, onda onuň taraplary deň bolmaýar. **64.** a) Eger gül tikenli bolmasa ol bägül bolmaýar; b) Dogry karar çykaryp bilmedik adam sudýa däl;
c) pökgini anyk nyşana depip bilmeýän adam gowy futbolçy bolup bilmeýär;
d) Eger madda guýlan gap şekilini kabul etmese ol suwuklyk däl;
e) Eger adam üstünlikli bolmasa, ol halal we sowatly däl; **65.** a) matematikany öwrenmeýän adam 10-njy synp okuwçysi däl; b) Şawkat matematikany öwrenýär; Myrat 10-njy synp okuwçysy däl; Anyk netije çykaryp bilmeýäris. **66.** a) x^2 sany 9-a bölünmese, x sany 3-e bölünmeýär; b) x –jübüt bolmasa, onuň ahyrky sifri 2 däl; c) $AB||CD$ we $AD||BC$ bolmasa, $ABCD$ – gönüburçluk däl; d) $\angle ACB \neq 60°$ bolsa, ACB – dogry üçburçluk däl. **67.** I) Eger öýüň daşary tüsse çykarýan turbasy

bolsa, iň köpi bilen 3 aýnaly bolýar; **II)** Eger öý 3 sanydan artyk aýnaly bolsa, ol daşary tüsse çykarýan turba eýe bolmaýar; **III)** Eger öý daşary tüsse çykarýan turba eýe bolmasa, iň köpi bilen 3 aýnaly bolmaýar; **69.** a) $\exists x\ P(x)$; b) $\exists x\ P(x)$; c) $\forall x\ P(x)$; d) $\forall x\ P(x)$; e) $\forall x\ P(x)$; f) $\forall x\ P(x)$; g) $\forall x\ P(x)$; h) $\forall x\ P(x)$; i) $\exists x\ P(x)$; j) $\exists x\ P(x)$; k) $\forall x\ P(x)$; **70.** a) Sazan süýdemdiriji däl; b) Ähli gurallarda kemçilikler bar; f) Altyn togy gowy geçirýär; g) Käbir oňurgalylar çaga digurýar; h) Bu adam kesellän. **71.** a) y x-iň agtygy; b) Islendik adamda perzent bar; c) Islendik adam kimiňdir perzendi. **72.** a) Ähli adamlar üçin eger biri başgasyny dost diýip hasaplasa, ol hem ony dost diýip hasaplaýar; b) Islendik adam üçin ol dost diýip hasaplaýan adam bar; c) Şeýle adam bar bolup, ony hemme dost diýip hasaplaýar; d) Islendik adam üçin ony dost diýip hasaplaýan adamlar bar; e) Şeýle adam bar bolup, ol hemmäni dost diýip hasaplaýar; f) Şeýle adam bar bolup, ol hemme dost diýip hasaplaýar. **73.** a) Islendik bitin san üçin oňa bölünýän bitin san bar; b) Şeýle bitin san bar bolup, ol ähli bitin sanlara bölünýär; c) Islendik bitin san üçin onuň bölüjisi bar; d) Şeýle bitin san bar bolup, oňa ähli bitin sanlar bölünýär; e) Islendik bitin san üçin onuň bölüjisi bar; f) Şeýle bitin san bar bolup, ol ähli bitin sanlara bölünýär. **82.** a) 7; b) 14; c) 14; d) 7; e) 5; f) 9. **83.** a) 5; b) 6; c) 17; d) 8; e) 3; f) 2. **84.** a) $b+c$; b) $c+d$; c) b; d) $a+b+c$; e) $a+c+d$; f) d. **85.** a) 15; b) 4. **86.** a) 18; b) 6. **87.** a) 7; b) 23.

II BAP.

1. a) £630; b) £630; c) ¥238333; d) €4402.46. **3.** \$2600. **4.** £14 400. **5.** €20219.78. **6.** a) $6\frac{2}{3}\%$; b) 9.41%. **7.** $11\frac{2}{3}\%$. **8.** 15.4%. **9.** a) 4; b)7; **11.** a) €5512.69; b) \$7293.04; c) £18938.83. **12.** 787.50. **13.** €1418.75. **14.** £1660. **15.** \$274.83. **16.** a) €111.39; b) £763.31; c) ¥77157. **17.** \$9021.58. **18.** €301.26. **19.** a) \$7650; b) \$8151.65; c) \$8243.81.

20.

Ýyllar	Amortizasiýa	Nyrhy
0		€2500
1	15% €2500 = €375	€2125
2	15% €2125 = €318.75	€1806.25
3	15% €1806.25 = €270.94	€1535.31

III BAP.

1. a) 5; b)–2;50; c)1;–9; d) ∅; e) –1; f)1;–0,5; g) –1; –4,7; i) –4;7;
2. a) 7; b) –0,25; c) kökleri ýok; e) –1;5; f) –1.
3. a) we b); a) we d); a) we f); b) we d); b) we f); d) we f); c) we e); g) we h).
4. a)(81/11;–3/11); b)(4;4); c)(9;8). **6.** b)(1;1). **7.** a) 8;–33/4.

9. 48 sany gyz we 60 sany oglan. **11.** a) $19\frac{2}{3}$; b) ∅; c) 32; d) ∅; **13.** a) ∅; b) $-\frac{23}{16}$.

15. a) $\frac{-9-\sqrt{105}}{2}$. **17.** b) ∅; **19.** a) 5. **21.** a) (9;4). **23.** a) (–5;9). **25.** $\frac{21}{22}$.

26. a) –0,25; b) –4/9; c) –2,5. **28.** c) ∅. d) {0;–3,5}. **29.** c) 0; d) 1. **31.** a) 0; b) 0.

37. 3 ýyl. **39.** 8 ýyl. **41.** a) $\left(\frac{69}{62};\frac{35}{62}\right)$; b) $\left(\frac{18}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **43.** a) (1;1); b) (4/3; 2/3);

53. 1) $\left[-4;\frac{3}{7}\right]\cup[5;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{11}{7};-1\right)\cup(6;+\infty)$; 3) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right)$;

4) $(-\infty;-0,5)\cup[5;+\infty)$; 5) $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$; 6) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$

7) (0,25;1); 8) $\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup\left[\frac{16}{23};+\infty\right)$; 9) $\left(-\sqrt{7};\frac{15-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{7};\frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$;

10) $(0;0,5)\cup(1;+\infty)$. **55.** 1) $\left(\frac{1}{7};+\infty\right)$; 2) ∅. **57.** (–∞;–3]; **59.** 1) ∅. 2) ∅.

61. 1) $[0;1)$. **63.** 1) $(-\infty;-2)\cup(0;3)$. **65.** 1) $[81;+\infty)$. **66.** 2) [0,25;+ ∞).

68. $y>5x+7$. **70.** $y<(x-2)/9$. **72.** $y>15x-3$.

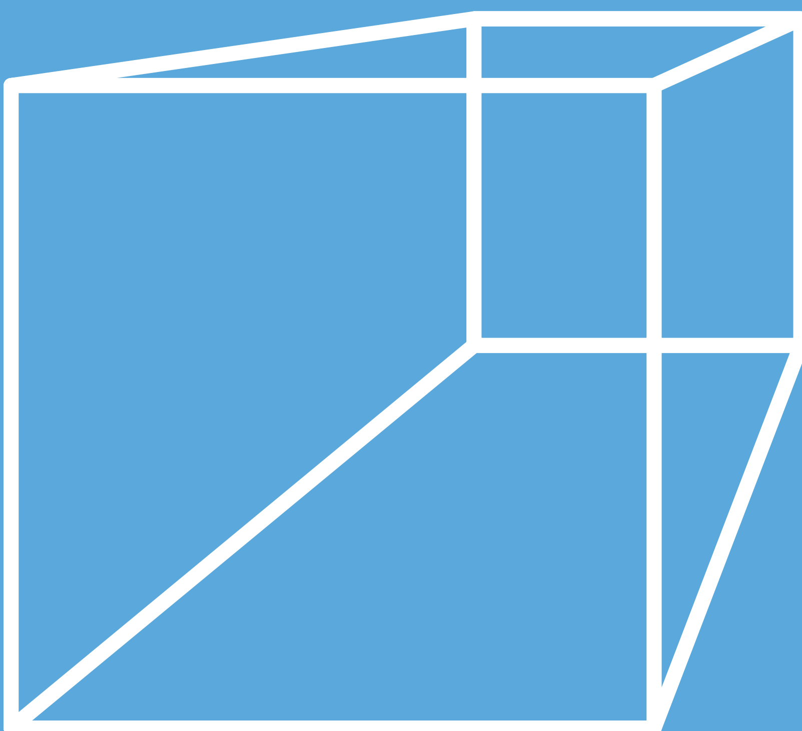
MAZMUNY

Peýdalanylan we hödürlenýän edebiýatlar

1. Sh.A. Alimov, O.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov Algebra va analiz asoslari. 10-sinf uchun darslik. Toshkent: "O'qituvchi", 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа. часть 1, Ташкент: "O'qituvchi", 2016.
4. A.U. Abduhamidov va boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari, 1-qism, Toshkent: "O'qituvchi", 2012.
5. Н.П. Филичева Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. "Рязань". 2009.
6. М.И. Исроилов Ҳисоблаш методлари. Тошкент: "Ўқитувчи" 1988.
7. Г.К. Муравин Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, "Дрофа", 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, "Просвещение", 2004.
9. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).
10. "Математика в школе" jurnali.
11. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001 - yildan boshlab chiqa boshlagan).
12. M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.
13. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, "O‘qituvchi", 1979.
14. M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, "O‘qituvchi", 1993.
15. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
16. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
17. http://www.problems.ru – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
18. http://matholymp.zn.uz – O‘zbekistonda va dunyoda matematik oimpiadalar.

MATEMATIKA

GEOMETRIÝA



10-njy synp

10-njy synpda geometriýanyň stereometriýa bölümini – giňişlikdäki geometrik şekilleriň häsiýetlerini düzümli öwrenmäge girişilýär. Derslikden esasy giňişlikdäki şekiller, köpgranlyklar we aýlanma jisimler we olaryň esasy häsiýetleri, giňişlikde parallel we perpendikulýar göni çyzyklar we tekizlikler hem-de olaryň häsiýetlerine degişli meseleler orun alan.

“Geometriýa-10” dersliginde nazary materiallar ýönekeý we rowan dilde beýan etmäge hereket edilen. Ähli temalar we düşünjeler durmuşdan dürli mysallar arkaly açyp berlen. Her bir temadan soň getirilen soraglar, subut etmäge, hasaplamaga we gurmaga degişli ençeme meseleler we mysallar okuwçyny döredijilikli pikirlenmäge ündeýär, özleşdirilen bilimleri çuňlaşdyrmaga we berkidip barmaga kömek edýär.

“Geometriýa-10” dersligi umumy bilim berýän mekdepleriň 10-njy synp okuwçylaryna niýetlenen, ondan geometriýany özbaşdak öwrenmekçi we gaýtalamakçy bolan kitapsöýüjiler hem peýdalanyp bilerler.

MAZMUNY

Dersligiň "Geometriýa" bölüminde ulanylan belgiler we olaryň düşündirişi:

– teoremanyň häsiýetnamasy

– aksiomanyň häsiýetnamasy

– tema boýunça soraglar

– ugrukdyryjy sapak

– teorema subudynyň ahyry

– amaly tatbiq

– Taryhy sahypalar

– geometrik tapmaçalar

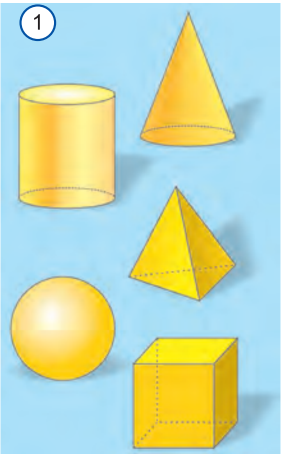
I BÖLÜM

PLANIMETRIÝANY DÜZÜMLI GAÝTALAMAK

1 PLANIMETRIÝANYŇ MANTYKY GURLUŞY

Geometriýa real durmuşdaky predmetleriň mukdar görkezijileri we giňişlikdäki şekilleri öwrenýän ylymdyr. Zatlaryň başga häsiýetlerini başga ylymlar öwrenýär. Eger haýsy-da bolsa zat öwrenilende, onuň diňe giňişlikdäki şekili we ölçegleri hasaba alynsa, onda *geometrik şekil* diýlip atlandyrylýan abstrakt obýekte eýe bolarys.

Geometriýa – grekçe söz bolup, "ýer ölçemek" diýen manyny aňladýar. Mekdepde öwrenilýän geometriýa gadymky grek alymy Ewklidiň ady bilen *Ewklidiň geometriýasy* diýlip atlandyrylýar. Geometriýa iki bölekden: planimetriýadan we stereometriýadan ybarat. *Planimetriýa* – tekizlikdäki, *stereometriýa* bolsa giňişlikdäki geometrik şekilleriň häsiýetlerini öwrenýär (1-nji surat).



Geometrik şekilleri bir-birinden tapawutlandyrmak üçin olaryň aýratynlyklary häsiýetlendirilýär, ýagny olara *kesgitleme* berilýär. Ýöne hemme şekillere-de kesgitleme berip bolmaýar. Olaryň deslapky birnäçesini kesgitlemesiz kabul etmäge mejburdyrys. Olary häsiýetlendirýän, *başlangyç (esasy) geometrik şekiller* diýip alarys.

Geometriýanyň mantyky gurluşy aşakdaky tertipde amala aşyrylýar:

1. Ilki esasy (başlangyç) geometrik şekiller kesgitlemesiz kabul edilýär;
2. Esasy geometrik şekilleriň esasy häsiýetleri subutsyz kabul edilýär;

3. Başga geometrik şekiller esasy şekiller we olaryň häsiýetlerine daýanyp kesgitlenýär hem-de olaryň häsiýetleri oňa çenli mälim häsiýetlere daýanyp subut edilýär.

Ylmyň şeýle gurluşy *aksiomatik gurluş* diýlip atlandyrylýar. *Aksioma* diýip dogrudygy subutsyz kabul edilýän häsiýete aýdylýar.

Şu wagta çenli biz öwrenen planimetriýanyň esasy şekilleri bu nokat we göni çyzykdy. Olary kesgitlemesiz kabul etdik. Kesim, şöhle, üçburçluk we başga geometrik şekillere bolsa kesgitleme berdik. Şonuň ýaly-da, aşakdaky häsiýetleri (tassyklamalary) subutsyz aksioma hökmünde kabul etdik:

I. Degişlilik aksiomalary topary

1.1. *Tekizlikde nähili göni çyzyk alynsa-da, onda bu göni çyzyga degişli bolan nokatlar hem, degişli bolmadyk nokatlar hem bar.*

1.2. *Islendik iki nokatdan diňe bir göni çyzyk geçýär.*

II. Tertip aksiomalary topary

2.1. *Bir göni çyzykda alnan islendik üç nokadyň diňe biri galan ikisiniň arasynda ýatýar.*

2.2. *Her bir göni çyzyk tekizligi iki bölege: iki ýarymtekizlige bölýär.*

III. Ölçeg aksiomalary topary

3.1. *Islendik kesim noldan tapawutly belli bir uzynlyga eýe bolup, ol položitel san bilen aňladylýar. Kesimiň uzynlygy onuň islendik nokady bölen bölekleriň uzynlyklarynyň jemine deň.*

3.2. *Islendik burç belli bir gradus ölçegine eýe bolup, onuň bahasy položitel san bilen aňladylýar. Ýazgyn burçuň gradus ölçegi* 180°*-a deň. Burçuň gradus ölçegi burçuň taraplarynyň arasyndan geçýän islendik şöhle bölen burçlaryň gradus ölçegleriniň jemine deň.*

IV. Deň şekili goýmak aksiomalary topary

4.1. *Islendik şöhlä onuň ujundan başlap, berlen kesime deň ýeke-täk kesimi goýmak mümkin.*

4.2. *Islendik şöhleden belli bir ýarymtekizlige berlen, ýazgyn bolmadyk burça deň ýeke-täk burçy goýmak mümkin.*

4.3. *Islendik üçburçluk üçin oňa deň üçburçluk bar we ony şöhleden belli bir ýarymtekizlige ýeke-täk ýagdaýda goýmak mümkin.*

V. Parallellik aksiomasy

4.1. *Tekizlikde göni çyzykdan daşarda alnan nokatdan bu göni çyzyga diňe bir parallel göni çyzyk geçirmek mümkin.*

Käbir tassyklamanyň dogrudygyny mantyky pikir ýöretmeleriň kömeginde getirip çykarmak *subut* diýlip atlandyrylýar. Dogrulygy subut etmek ýoly bilen esaslandyrylýan tassyklama bolsa *teorema* diýilýär. Teorema, adatda, şert we netije böleklerden ybarat bolýar. Teoremanyň birinji – şert böleginde nämeler berlendigi beýan edilýär. Ikinji – netije böleginde bolsa nämäni subut etmelidigi aňladylýar.


Ewklid (eramyzdan öňki 356–300-nji ýyllar)

Teoremany subut etmek – onuň şertinden peýdalanyp, şoň çenli subut edilen we kabul edilen häsiýetlere daýanyp, pikir ýöredip, netije böleginde aňladylan jümläniň dogrudygyny getirip çykarmakdyr. Teoremanyň şert we netije böleklerini kesgitläp almak – teoremany aýdyňlaşdyrýar, ony düşünmek we subut etmek prosesini ýeňilleşdirýär.

Grek alymy Platon geometriýada ajaýyp bir kanunalaýyklygy aňypdyr: öň öwrenilen, dogrudygy subut edilen häsiýetlerden mantyky pikirlenme, pikir ýöretmek arkaly täze häsiýetleri getirip çykarsa bolar eken. Şeýle ajaýyp mümkinçilikden peýdalanyp, galan häsiýetler teoremalar görnüşinde aňladylýar we aksiomalar hem-de şu wagta çenli dogrudygy subut edilen häsiýetlere esaslanyp, mantyky pikir ýöretmeler arkaly subut edilýär.

Pikir ýöretmek prosesinde subut edilen häsiýetlerden (olaryň dogrudygy aç-açan görnüp duran bolsa-da) peýdalanmak gadagan.

Şeýdip, geometriýany bir bina diýip garaýan bolsak, başlangyç düşünjeler we aksiomalar onuň esasyny düzýär. Bu esasyň üstüne örülen kerpiçler – häsiýetlendirilen täze düşünjeler we teoremalar görnüşinde subut edilen häsiýetlerden ybarat bolýar.

Geometriýany özbaşdak ylym hökmünde düýbi tutulmagynda gadymky grek alymlary uly goşant goşupdyrlar. Meselem, Gippokrat Hiosskiý geometriýanyň esaslary baradaky başlangyç düşünjeleri beýan edipdir. Bu ugur boýunça esasy işleri beýik grek alymy Ewklid (eramyza çenli 356 – 300-nji ýyllar) amala aşyrypdyr. Onuň esasy eseri "Esaslar" planimetriýa, stereometriýa we sanlar nazaryýetiniň käbir meselelerini, şonuň ýaly-da, algebra, gatnaşyklar umumy nazaryýeti, meýdanlary we göwrümleri hasaplamak usuly hem-de limitler nazaryýeti elementlerini öz içine alýar. "Esaslar"da Ewklid gadymky grek matematikasynyň ähli gazananlaryny jemleýär we onuň ösmegi üçin esas döredýär.

"Esaslar" 13 kitapdan ybarat bolup, bu eser eramyzdan öňki V – IV asyrlaryň grek matematikleriniň eserleri gaýtadan işlenmesinden ybarat. Eserde 23 sany kesgitleme, 5 postulat we 9 aksioma berlen. Eserde gönüburçluga, kwadrata,

Omar Heýýam
(1048-1131)

töwerege dogry kesgitlemeler berlen. Nokada we çyzyga aşakdaky kesgitlemeler berlen: "Nokat diýip şeýle zada aýdylýar, ýagny ol böleklere eýe däl", "Çyzyk diýip ini ýok uzynlyga aýdylýar".

"Esaslar"da 9 aksioma – subutsyz kabul edilýän pikir ýöretmeler beýan edilen. Geometrik gurmalary amala aşyrmak mümkinligini beýan ediji matematiki pikir ýöretmelerden (postulatdan) aşakdaky bäş sanysy beýan edilen:

I. Islendik iki nokatdan diňe bir göni çyzyk geçirmek mümkin.

II. Göni çyzyk kesimini çäksiz dowam etdirmek mümkin.

III. Islendik merkezden islendik aralykda töwerek gurmak mümkin.

IV. Hemme göni burçlar özara deň.

V. Bir tekizlikde ýatýan iki göni çyzygy üçünji göni çyzyk kesip, bir taraply içki burçlary emele getirse we burçlaryň jemi iki göni burçdan kiçi bolsa, şol göni çyzyklar dowam etdirilende olaryň jemi iki göni burçdan kiçi burçlaryň tarapynda kesişýär.

Bu eser uly we uzak şöhrata eýe boldy. Aýratynam, V postulat uly ylmy çekişmelere sebäp boldy. Eger V postulatdaky içki atanak burçlary α we β diýsek (1-nji surat), göni çyzyklar a we b bolsa, onda postulatyň mazmunyna görä $\alpha+\beta<180°$ bolsa, a we b göni çyzyklar kesişýär.

Postulaty subut etmek ugrunda oňa deň güýçli ençeme pikir ýöretmeler peýda boldy. Meselem, iňlis matematigi Ýan Pleýferiň (1748–1819) *parallellik aksiomasy* şolara degişlidir: tekizlikde göni çyzykdan daşarda alnan nokatdan şu göni çyzyga diňe bir parallel göni çyzyk geçirmek mümkin.

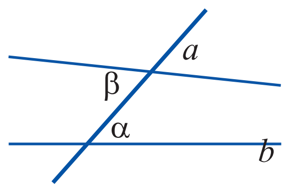
Matematik şahyr astronom we filosof Omar Giýasiddin Abul Faht ibn Ybrahym Heýýam hem bu mesele bilen meşgullanypdyr. Heýýam "Ewklidiň kitabynyň giriş bölümindäki kynçylyklara düşündirişler" atly eserinde V postulata durup geçipdir. Ol Ewklidiň postulaty teorema bolýandygyny subut etmek üçin aşaky esasyndaky iki burçy göni bolan gönüburçluga garapdyr (2-nji surat) we eger onuň aşaky iki burçy göni bolsa, ýokardaky iki burçy hem göni bolmaly diýen netijä gelipdir. Omar Heýýam "Bir göni çyzyga perpendikulýar bolan iki göni çyzyk göni çyzygyň iki tarapynda-da kesişip bilmeýär ahyryn", – diýýär. Omar Heýýamyň bu işlerinden bihabar italiýaly matematik J. Sakkeri (1667–1733) hem V postulat bilen meşgullanyp, gönüburçluga ýüzlenipdir. Geometriýanyň esaslaryna bu gönüburçluk "Heýýam – Sakkeri dörtburçlugy" ady bilen giripdir.

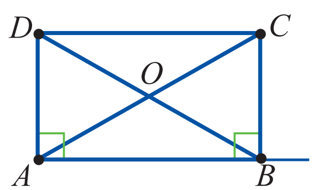
Bu meseläni beýik rus matematigi Nikolaý Iwanowiç Lobaçewskiý (1792–1856) çözdi we ewklid däl geometriýasyny döretdi. Lobaçewskiý birinji gezek Ewklidiň bäşinji postulaty geometriýanyň başga aksiomalaryna bagly däldigini subut etdi. Bu geometriýa Ewklidiň geometriýasyndan bütinleý tapawutlanýardy. Ýöne, ol mantyky gapma-garşylyga duçar bolmalydy, çünki – iki geometriýanyň bir wagtda bar bolmagy mümkin däldi. Şoňa seretmezden, Lobaçewskiý täze netijeler getirip çykaryberýär, olar mantyky gapma-garşylyklara duçar bolmady. Täze geometriýada we Ewklidiň geometriýasynda birinji dört topar aksiomalar üstme-üst düşýär. Bu aksiomalar toparlary we olaryň netijeleri absolýut geometriýa diýlip atlandyrylyp başlady.


N.I.Lobaçewskiý (1792–1856)

Ýöne, ewklid däl (Lobaçewskiý) geometriýa Ewklidiň geometriýasyndan gaty tapawutlanýar. Meselem, Lobaçewskiýniň geometriýasynda üçburçlugyň içki burçlarynyň jeminde π -den kiçi, onda meňzeş ýa-da deň bolmadyk üçburçluklar ýok, berlen göni çyzykdan birmeňzeş uzaklaşýan nokatlar toplumy göni çyzyk däl, eýsem egri çyzyk hasaplanýar we ş. m.

Ewklid däl geometriýany döretmäge wenger matematigi Ýanoş Bolýai (1802– 1860) we nemes matematigi Karl Fridrih Gausslar (1777–1855) uly goşant goşupdyrlar. Şonuň ýaly-da, italýan matematigi Eujenio Beltrami (1835–1900) we nemes matematigi Bernhard Riman (1826–1866) täze geometriýa häsiýetnamasy boýunça uly işler edipdirler.

1


2


Ewklid başlap beren aksiomatika mälim manyda nemes matematigi Dawid Gilbert (1862–1943) we rus matematigi Weniamin Fýodorowiç Kaganyň (1859–1953) işlerinde ahyryna ýetirilýär.

Tema degişli soraglar

1. *Geometriýany aksiomalar ulgamyny beýan eden Ewklid barada nämeleri bilýärsiňiz?*
2. *Ewklidiň "Esaslar" eseri barada aýdyp beriň.*
3. *Kesgitleme näme? Tekizlikde haýsy şekiller esasy (başlangyç) şekiller hökmünde kesgitlemesiz kabul edilen?*
4. *Teorema we aksioma bir-birinden näme bilen tapawutlanýar?*

5. Planimetriýa aksiomalaryny sanaň we düşündiriň.
6. Geometriýa ylmy nähili düzülen?
7. Ewklidiň V postulaty näme hakda we ony näme üçin subut etmäge synanyşypdyrlar?
8. Bu postulaty subut etmäge synanyşan alymlar we olaryň işleri barada aýdyp beriň.
9. Lobaçewskiý täze geometriýanyň döredilmegine nähili goşant goşupdyr?
10. Ewklid däl geometriýany döreden alymlar we olaryň işleri barada aýdyp beriň.

2 GEOMETRIK MESELELER WE OLARY ÇÖZMEGIŇ METODLARY

Ýokarda nygtaýşymyz ýaly, geometriýanyň iň ajaýyp aýratynlygy bu öň öwrenilen, dogrudygy subut edilen häsiýetlerden mantyky pikirlenme, pikir ýöretmek arkaly täze häsiýetleri getirip çykarmak mümkin. Şeýle ajaýyp mümkinçilikden peýdalanyp, galan häsiýetler teoremalar ýa-da meseleler görnüşinde aňladylan we aksiomalar hem-de şu wagta çenli dogrudygy subut edilen häsiýetlere esaslanyp, mantyky pikir ýöretmeler arkaly subut edilen. Şeýlelikde matematiki ýa-da geometrik meseleler emele gelipdir.

Matematiki meselede nämelerdir (şertler) berlen bolýar. Olardan peýdalanyp, nämänidir tapmak (hasaplamak) ýa-da subut etmek, ýa-da gurmak talap edilýär. Goýlan talaby ýerine ýetirmek meseläni çözmegi aňladýar.

Geometrik meseleler goýlan talaba görä hasaplamaga, subut etmäge, ulanmaga we gurmaga degişli meselelere bölünýär.

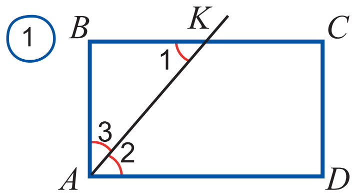
Matematiki meseläni çözmek üçin gury nazaryýeti bilmek ýeterli däl. Mesele çözmek endigine we tejribesine-de eýe bolmak talap edilýär. Şeýle endik öz gezeginde ýönekeý meselelerden başlap, gitdigiçe çylşyrymlyrak meseleleri çözmek arkaly gazanylýar. Şonuň ýaly-da, meseleleri çözmegiň dürli hili usullary hem bar bolup, olary diňe köp meseleler çözmek arkaly özleşdirmek mümkin. Her bir usul belli bir topara degişli meseleleri çözmek üçin ulanylýar. Näçe köp usullar özleşdirilse, şonça mesele çözmek endigi şekillenýär.

Aşakda geometrik meseleleri çözmegiň käbir möhüm usullarynyň üstünde durup geçýäris.

Mesele çözmegiň usullary gurluşyna görä, sintetik, analitik, tersini çak etmek we başga görnüşlere bölünýär. Matematiki apparatyň ulanylyşyna görä bolsa, algebraik, wektorly, koordinataly, meýdanlar usuly, meňzeşlik usuly, geometrik çalşyrmalar ýaly görnüşlere bölünýär.

Sintetik usul mazmun taýdan meseläniň şertinde berlenlerden peýdalanyp, pikir ýöretmek arkaly mantyky pikirler zynjyryny emele getirýär. Pikir ýöretmeler zynjyry iň ahyrky bölegi meseläniň talaby bilen üstme-üst düşýänçe dowam etdirilýär.

1-nji mysal. Gönüburçlugyň burçunyň bissektrisasy onuň tarapyny 7 we 9 uzynlykdaky kesimlere bölýär (1-nji surat). Gönüburçlugyň perimetrini tapyň.



Çözülişi. Aýdaly $ABCD$ – gönüburçluk, AK bissektrisa, $K \in BC$, $BK = 7$ sm, $KC = 9$ sm bolsun.

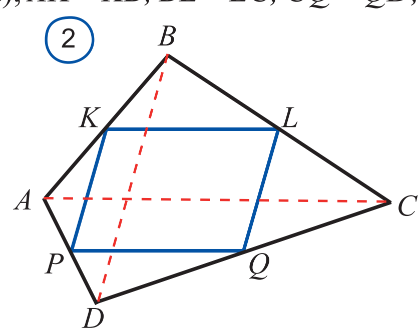
1. $BC \parallel AD$ we AK kesiji bolany üçin: $\angle 1 = \angle 2$. (1)
bolýar, çünki bu burçlar içki atanak burçlardyr.
2. AK – bissektrisa: $\angle 2 = \angle 3$. (2)
3. Onda (1) we (2)-ä görä $\angle 1 = \angle 3$.
4. Onda ABK deňýanly üçburçluk we $AB = BK$. (3)
5. Bu netijeden peýdalanyp, hasaplamalary amala aşyrýarys: $AB = BK = 7$ sm.
$P = 2(AB + BC) = 2\ (7+16) = 46\ (sm)$. ❑

Bu mesele daýanç meseleler hataryna girýär, çünki ençeme meseleler edil şu taglymyň töwereginde gurulýar. Parllelogramyň we trapesiýanyň burçunyň bissektrisasy bu şekilleriň tekizliginden deňýanly üçburçlugy kesip alýar. Şeýle daýanç faktlary hemişe ýatda saklamaly. Olar başga meseleleri çözende-de uly kömek edýär.

Analitik usul mazmun taýdan teoremanyň (meseläniň) netije böleginden gelip çykyp, öňünden mälim tassyklamalardan peýdalanyp, pikir ýöretmek arkaly mantyky pikirler zynjyry emele getirilýär. Pikir ýöretmeler zynjyrynyň iň ahyrky bölegi meseläniň şertiniň netijesi bolýandygyny anyklanýança dowam etdirilýär.

2-nji mysal. Islendik dörtburçlugyň taraplarynyň ortalary parallelogramyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

Subut. Aýdaly $ABCD$ – dörtburçluk (2-nji surat), $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bolsun.



Dörtburçlugyň AC we BD diagonallaryny geçirýäris.

1. $\triangle ABC$-da KL orta çyzyk: $KL \parallel AC$ (1);
2. $\triangle ADC$-da PQ orta çyzyk: $AC \parallel PQ$ (2);
3. (1) we (2) dan: $KL \parallel PQ$ (3);
4. Ýokardaka meňzeş: $KP \parallel LQ$ (4);
5. (3) we (4) dan: $KLQP$ – parallelogram. ❑

Ýokarda garalan sintetik we analitik usullar ***göni usullar*** diýip hem atlandyrylýar. Meseläni göni usullar bilen çözende, ilki bilen meseläniň mazmuny analiz edilýär. Analiz netijesine görä usuly saýlanýar. Şondan soň surat görnüşinde meseläni çözmek modeli (çyzgysy) düzülýär we çyzgynyň üstünde pikir ýöredilýär. Şeýdip pikir ýöretmeler ýöredilip, meseläniň şertinden onuň netije bölegine garap barylýar.

Mesele çözmegiň ters usuly hem bar. Oňa köp gezek duş gelendiris. Ol "***tersini çak edip subut etmek usuly***" diýlip atlandyrylýar. Bu usuly ulanmak algoritmini getirýäris.

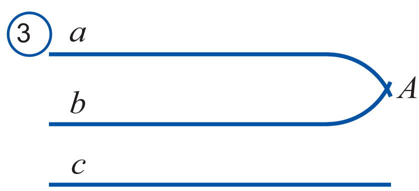
Tersini çak edip subut etmek usulyny ulanmagyň algoritmi

Teorema (göni tassyklama)	***Eger A ýerlikli bolsa, B ýerlikli bolýar.*** ***(A we B – nähilidir pikirler)***
Subudy:	
Tersini çak edýäris:	Teoremada getirilen tassyklamanyň tersini çak edýäris, ýagny teoremanyň şerti ýerine ýetirilse-de, ýöne netijesi ýerlikli bolmasyn: ***Eger A ýerlikli bolsa, B ýerlikli bolmaýar.***
Pikir ýöredýäris:	Dogrudygy öň subut edilen teorema ýa-da kabul edilen aksiomalara daýanyp mantyky pikir ýöredýäris.
Gapma garşylyga gelýäris:	Dogrudygy öň subut edilen teorema ýa-da kabul edilen aksiomalaryň birine ters bolan tassyklama duşýarys.
Netije çykarýarys:	Diýmek, çakymyz nädogry, ýagny berlen teorema göni eken.
Teorema subut edildi	

3-nji mysal. Eger iki göni çyzygyň her biri üçünji göni çyzyga parallel bolsa, olar özara parallel bolýar.

Aýdaly, a we b göni çyzyklar berlen bolup, olaryň her biri üçünji c göni çyzyga parallel bolsun. Teoremany tersini çak etmek usuly bilen subut edýäris.

Subut. Tersini çak edýäris: a we b göni çyzyklaryň her biri üçünji c göni çyzyga parallel bolsun, emma olar özara parllel bolmasyn, ýagny haýsy-da bolsa bir A nokatda kesişsin (3- surata garaň). Onda A nokatdan c göni çyzyga iki a we b parallel göni çyzyklar geçýär. Bu parallellik aksiomasyna ters. Gapma-garşylyk çakymyzyň nädogry bolýandygyny görkezýär. Ýagny a we b göni çyzyklaryň her biri üçünji c göni çyzyga parallel bolsa, olar özara parallel bolýar. ❑



Bu usul aşakdaky mantyk kanunyna esaslanandyr: bir-birine ters iki tassyklamanyň diňe biri çyn, ikinjisi bolsa ýalan bolýar, üçünji ýagdaýyň bolmagy mümkin däl.

Indi geometrik meseleleri çözmegiň başga usullaryna durup geçýäris.

Algebraik usul

Geometrik meseläni algebraik usul bilen çözen mahalyňyzda aşakdaky algoritm esasynda çemeleşmek maksada laýyk bolýar:

1) meseläniň mazmunyny derňemek we onuň çyzgy modelini gurmak;
2) näbellini harplar bilen belgilemek;
3) meseläniň şertini aňladýan deňleme ýa-da deňlemeler ulgamyny düzmek;
4) düzülen deňleme ýa-da deňlemeler ulgamyny çözmek;
5) tapylan çözüwi derňemek;
6) jogabyny ýazmak.

4-nji mysal. Gönüburçly üçburçlugyň perimetri 36 sm-e deň. Gipotenuzanyň katete gatnaşygy 5:3. Üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

Aýdaly, $\triangle ABC$ berlen bolup, onda $\angle C = 90°$, $P = 36$, $AB:AC = 5:3$ bolsun.

Çözmek. Proporsionallyk koeffisiýentini k bilen belgileýäris.

Onda $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Pifagoryň teoremasyna görä: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ýa-da $25k^2 = 9k^2+BC^2$.

Mundan, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$;

$P = AB + AC + BC$.

Şerte görä: $P = 36$, $5k + 3k + 4k = 36$, $k = 3$;

$AB = 5k = 15$ sm, $AC = 3k = 9$ sm, $BC = 4k = 12$ sm.

Jogaby: 15 sm, 9 sm, 12 sm. ❑

Meýdanlar usuly

Käbir geometrik meseleleri çözende meýdanlary hasaplamagyň formulalaryndan peýdalanmak garaşylan netijäni çalt berýär. Bu ýagdaýda tapmak talap edilen näbelli meseledäki kömekçi şekilleriň meýdanlaryny deňleşdirmek netijesinde alnan deňlemeden tapylýar. Muny aşakdaky mysalda görkezýäris.

5-nji mysal. Üçburçlugyň taraplary 13 sm, 14 sm we 15 sm. Uzynlygy 14-e deň tarapa geçirilen beýikligi tapyň.

Aýdaly, $\triangle ABC$ berlen bolup, onda $a = 13$ sm, $b = 14$ sm, $c = 15$ sm bolsun.

Çözmek. $a < b$ we $b < c$, h_c – beýiklik bolsun.

Geron formulasyna görä: $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$ (sm^2).

Başga formula boýunça: $S_\Delta = \frac{1}{2} b \cdot h_b$; $\frac{1}{2} b \cdot h_b = 84,$ $h_b = 12$ (sm).

Jogaby: 12 sm. ❑

Wektorlar usuly

Geometrik meseläni wektorlar usuly bilen çözmek üçin aşakdaky algoritm esasynda çemeleşmek maksada laýyk bolýar:

1) meseläni wektorlar diline öwürmek, ýagny meseledäki käbir ululyklary wektor hökmünde garap, olara degişli wektorly deňlemeler düzmek;

2) wektorlaryň mälim häsiýetlerinden peýdalanyp, wektorly deňlemeleriň şekilini çalşyrmak we näbellini tapmak;

3) wektorlar dilinden geometriýa diline dolanmak;

4) jogabyny ýazmak.

Wektor usuly bilen aşakdaky geometrik meseleleri çözmek maksada laýyk bolýar:

a) göni çyzyklaryň (kesimleriň) parallelligini kesgitlemek;

b) kesimleri berlen gatnaşykda bölmek;

c) üç nokadyň bir göni çyzykda ýatýandygyny görkezmek;

d) dörtburçlugyň parallelogram (romb, trapesiýa, kwadrat, gönüburçluk) bolýandygyny görkezmek.

6-njy mysal. Güberçek dörtburçlugyň taraplarynyň ortalary parallelogramyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

Aýdaly, $ABCD$ dörtburçluk berlen bolup, onda $AK = KB,\ BL = LC,\ CQ = QD,$ $AP = PD$ bolsun (4-nji surat).

Subut. 1. Berlen kesimleri laýyklykda $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{DC}, \overline{AD}, \overline{KL}, \overline{PQ}, \overline{BL}, \overline{KB}$ wektorlar bilen çalşyryp, meseläni wektor diline geçirýäris;

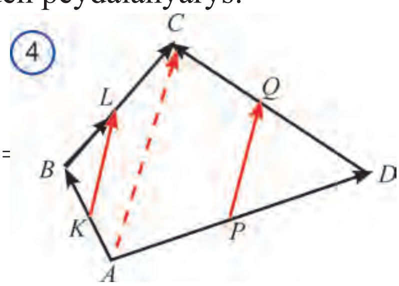
2. Wektorlary goşmagyň üçburçluk düzgüninden peýdalanýarys:

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$ $\overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL};$

$\overline{KB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ we $\overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ -den

peýdalanyp, $\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} =$
$= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$ -ni tapýarys.

Şoňa meňzeş, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ bolýar.



3. $\overline{KL} = \overline{PQ}$, ýagny bu wektorlar birmeňzeş ýönelen we uzynlyklary deň. Bu $KLQP$ dörtburçlugyň parllelogram bolýandygyny aňladýar. ❑

Koordinatalar usuly

Geometrik meseläni koordinatalar usuly bilen çözen mahalyňyzda aşakdaky algoritm esasynda çemeleşmek maksada laýyk bolýar:

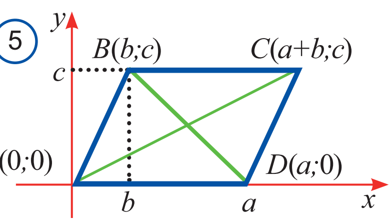
1) meseläniň mazmunyny derňemek we ony koordinatalar diline öwürmek;
2) aňlatmalaryň şekilini çalşyrmak we bahasyny hasaplamak;
3) netijäni geometriýa diline öwürmek;
4) jogabyny ýazmak.

Koordinatalar usuly bilen aşakdaky geometrik meseleleri çözmek maksada laýyk bolýar: a) nokatlaryň geometrik ýerleşişini tapmak; b) geometrik şekilleriň çyzykly elementleriniň arasyndaky baglanyşyklary subut etmek.

Meseläni koordinatalar usuly bilen çözen mahalyňyzda, koordinatalar başlangyjyny dogry saýlamak möhümdir. Berlen şekili koordinatalar tekizligine şeýle ýerleşdirmeli, ýagny mümkingadar nokatlaryň koordinatalary nola deň bolmaly.

7-nji mysal. Diagonallary deň parallelogramyň gönüburçluk bolýandygyny subut ediň.

5



Subut. Koordinatalar ulgamyny şeýle saýlaýarys, ýagny parallelogramyň depeleri aşakdaky koordinatalara eýe bolsun (5-nji surata garaň):

$A(0;\,0)$, $B(b;\,c)$, $C(a+b;\,c)$, $D(a;\,0)$,

bu ýerde $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$.

A, B, C, D nokatlaryň arasyndaky aralyklary olaryň koordinatalary arkaly aňladýarys:

$AC = \sqrt{(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2}$, $BD = \sqrt{(a - b)^2 + (0 - c)^2}$.

Onda $\sqrt{(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2} = \sqrt{(a - b)^2 + (0 - c)^2}$

ýa-da $(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2 = (a - b)^2 + (0 - c)^2$. Mundan, $4ab = 0$.

Ýöne $a > 0$, onda $b = 0$. Bu bolsa, öz gezeginde, $B\ (b;\ c)$ nokat Oy okunda ýatýandygyny aňladýar. Şonuň üçin BAD göni burç bolýar.

Mundan $ABCD$ parallelogramyň gönüburçludygy gelip çykýar. ❑

Geometrik çalşyrma usuly

Geometrik çalşyrmalar usulyna öwürmek, simmetrik şöhlelendirmeler, parallel orun üýtgetme we gomotetiýa ýaly çalşyrmalara esaslanan usullar girýär. Geometrik çalşyrmalaryň kömeginde meseleleri çözmek prosesinde berlen geometrik şekiller bilen bir hatarda täze, ulanylan geometrik çalşyrmanyň kömeginde alnan şekiller hem garalýar. Täze şekilleriň häsiýetleri anyklanýar we berlen şekile geçirilýär. Şondan soň meseläni çözmek ýoly tapylýar. Ýokarda getirilen ähli usullar bir umumy at bilen geometrik usullar diýlip atlandyrylýar.

Möhüm ýatlatma!

Bu bölümden orun alan materiallar planimetriýany gaýtalamak üçin getirilendir. Gaýtalamak üçin meseleler gereginden artyk getirilen. Olaryň ählisini synpda görmegiň mümkinçiligi bolmazlygy mümkin. Şuňa seretmezden, olary özbaşdak çözüp çykmagy maslahat berýäris. Bu size 10-njy synpda geometriýany öwrenmegi üstünlikli dowam etdirmegiňize esas döredýär.

? *Tema degişli soraglar*

1. *Matematik mesele diýende nämäni düşünýärsiňiz?*
2. *Geometrik meseläniň nähili görnüşlerini bilýärsiňiz?*
3. *Mesele çözmegiň nähili usullaryny bilýärsiňiz?*
4. *Geometrik meseläni çözmegiň sintetik, analitik usullary barada aýdyp beriň.*
5. *Mesele çözmegiň göni we ters usullary barada näme bilýärsiňiz?*
6. *Tersinden çak edip subut etmek usulynyň mazmuny nämede?*
7. *Geometrik meseläni algebraik usulda çözmegiň algoritmini düşündirip beriň.*
8. *Geometrik meseläni wektor usulynda çözmegiň algoritmini düşündirip beriň.*
9. *Wektor usuly bilen adatda nähili meseleler çözülýär?*
10. *Geometrik meseläni koordinatalar usuly bilen çözmegiň algoritmini düşündirip beriň.*
11. *Koordinatalar usuly bilen adatda nähili meseleler çözülýär?*
12. *Geometrik çalşyrmalar usulyny düşündirip beriň.*

3 AMALY GÖNÜKMELER WE OLARYŇ ULANYLYŞY

1.1. Iki göni çyzygyň kesişmeginden dörtburçluk emele geldi (1-nji surat). Aşakda getirilen jedwelde her bir şert (A – E) ga ondan kelib çykýan netije (1 – 5) -ni laýyklap goýuň:

A) $\angle 1 = \angle 3$;
B) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;
C) $\angle 1 = \angle 2 = 90°$;
D) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$;
E) $\angle 3 = 90°$.

1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
3) $\angle 1$ we $\angle 4$ – goňşy;
4) $\angle 1$ we $\angle 3$ – ýiti;
5) $\angle 2$ we $\angle 4$ – wertikal.

A	
B	
C	
D	
E	

1.2. Aşakda käbir burçlaryň gradus ölçegleri (1–7) berlen. Olardan haýsy jübütleriniň goňşy bolmagy mümkinligini anyklaň.

1) 18°; | 2) 72°; | 3) 128°; | 4) 62°; | 5) 28° ; | 6) 108°; | 7) 38°.

A) 1 we 2; | *B*) 2 we 6; | *C*) 3 we 4; | *D*) 1 we 7; | *E*) 2 we 5.

1.3. Eger 2-nji suratda $\angle 1 = \angle 7$ bolsa, dogry tassyklamany tapyň.

A) $a \parallel b$; | *B*) $a \perp b$; | *C*) *a* we *b* kesişmeýär;

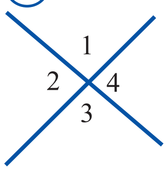
1.4. Eger 3-nji suratda $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ we $\angle 2 = 72^{\circ}$ bolsa, $\angle 3 = ?$

A) 72°; | *B*) 144°; | *C*) 108°; | *D*) 36°; | *E*) 124°.

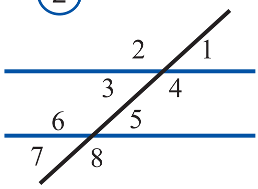
1.5. Eger deňýanly üçburçlugyň burçlary 3 : 4 : 3 gatnaşykda bolsa, onuň depesiniň bissektrisasy bilen gapdal tarapynyň arasyndaky burçy tapyň.

A) 18°; | *B*) 36°; | *C*) 72°; | *D*) 60°; | *E*) 30°.

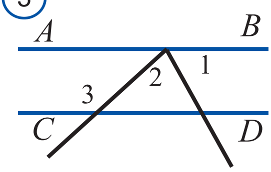
1



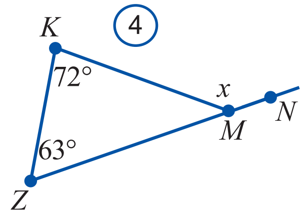
2



3



4



1.6. 4-nji suratda görkezilen *KMZ* üçburçlugyň burçuna daşky bolan *KMN* burçuň gradus ölçegini tapyň.

A) 135°; | *B*) 108°; | *C*) 45°; | *D*) 125°; | *E*) 117°.

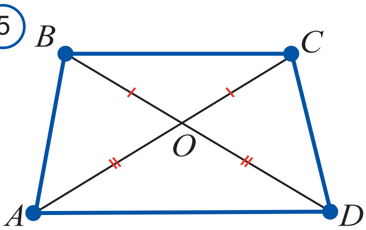
1.7. Dogry deňlikleri anyklaň (5-nji surat).

A) $\triangle ABO = \triangle OCD$; | *B*) $BA = CD$; | *C*) $\triangle ABO = \triangle COD$;

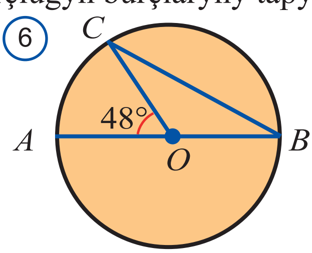
D) $\angle AOB = \angle DOC$; | *E*) $\angle BAO = \angle DCO$; | *F*) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.8. 6-njy suratdaky *BOC* üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

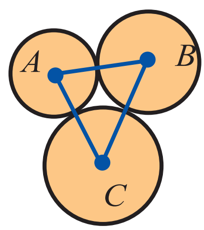
5



6



7



A) 48°, 48°; 84°; | *B*) 24°, 132°, 24°; | *C*)132°, 48°, 48°;

E)42°,90°,48°; | *D*)48°,32°, 20°.

1.9. Üçburçlugyň depeleriniň radiuslary 6 sm, 7 sm we 8 sm bolan we jübüt-jübüti bilen galtaşýan üç töweregiň merkezlerinde ýatyr (7-nji surat).

Şu üçburçlugyň perimetrini tapyň.

A) 28 sm; | *B*) 29 sm; | *C*) 27 sm; | *D*) 42 sm; | *E*) 21 sm.

1.10. Kwadratyň tarapy $20\sqrt{2}$ -*ä* deň. Bu kwadrata içinden çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

A) 20; *B*) $10\sqrt{2}$; *C*) 10; *D*) $5\sqrt{2}$; *E*) 5.

1.11. Trapesiýanyň bir esasy ikinjisinden 8 sm uzyn, orta çyzygy bolsa 10 sm-e deň. Trapesiýanyň kiçi esasyny tapyň.

A) 2 sm; *B*) 4 sm; *C*) 6 sm; *D*) 8 sm; *E*) 10 sm.

1.12. Diagonallary 10 m we 36 m bolan rombuň meýdanyny tapyň.

A) 90 m^2; *B*) 92 m^2; *C*) 180 m^2; *D*) 184 m^2; *E*) 36 m^2.

1.13. 8-nji suratdaky *m* we *n* göni çyzyklar özara parallel bolsa, *a* we *b* göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapyň.

A) 50°; *B*) 80°; *C*) 100°; *D*) 65°; *E*) 115°.

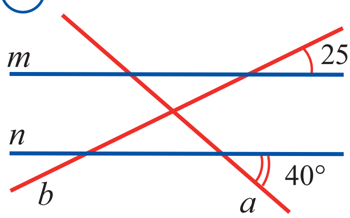
1.14. 9-njy suratdaky üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

A) 6; *B*) 9 ; *C*) 12; *D*) 24; *E*) 30.

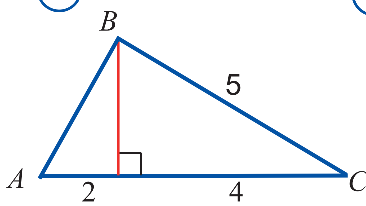
1.15. 10-njy suratdaky *R* radiusly töweregiň içinden çyzylan *ABC* üçburçlugyň *BC* tarapyny tapyň.

A) *R*; *B*) $R\sqrt{2}/2$; *C*) $R\sqrt{2}$; *D*) $R\sqrt{3}$; *E*) $R\sqrt{3}/2$.

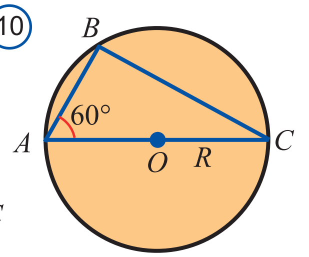
8



9



10



1.16. Meýdany 9π sm^2 bolan tegelegi gurşaýan töweregiň uzynlygyny tapyň.

A) 3π sm; | *B*) 9π sm; | *C*) 12π sm; | *D*) 18π sm; | *E*) 6π sm.

1.17. Tarapy 6 sm-e deň bolan kwadrata içinden çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň.

A) 9π sm^2; | *B*) 144π sm^2; | *C*) 36π sm^2; | *D*) 72π sm^2; | *E*) 18π sm^2.

1.18. Kwadrata içinden çyzylan töweregiň radiusy 5 sm. Kwadratyň diagonalyny tapyň.

A) $5\sqrt{2}/2$; | *B*) $5\sqrt{2}$; | *C*) $5\sqrt{2}/4$; | *D*) $10\sqrt{2}$; | *E*) $20\sqrt{3}$.

1.19. Içki burçlarynyň jemi 1600° bolan dogry köpburçlugyň taraplarynyň sanyny tapyň.

A) 12; | *B*) 14; | *C*) 16; | *D*) 18; | *E*) 20.

1.20. Diagonallary 24 sm we 18 sm bolan rombuň perimetrini tapyň.

A) 120 sm; | *B*) 60 sm; | *C*) 84 sm; | *D*) 108 sm; | *E*) 144 sm.

1.21. Parallelogramyň perimetri 48 dm bolup, bir tarapy ikinjisinden 8 dm-e uzyn.

Parallelogramyň kiçi tarapyny tapyň.

A) 8 dm; *B*) 16 dm; *C*) 6 dm; *D*) 12 dm; *E*) 10 dm.

1.22. 11-nji suratdaky *ABC* deňýanly üçburçlugyň daşarsynda iki deň *ABM* we *CBK* burçlar guruldy. Bu burçlaryň taraplary *AC* tarapy, degişlilikde, *M* we *K* nokatlarda kesip geçdi. *MBC* we *KBA* üçburçluklaryň deňligini subut ediň.

1.23. 12-nji suratda görkezilen *AB* we *CD* göni çyzyklaryň özara ýerleşişini anyklaň. Jogabyňyzy esaslandyryň.

1.24. 13-nji suratdaky *ABC* üçburçluga töweregiň içinden çyzylan. Töweregiň *N* we *Z* galtaşma nokatlary üçburçlugyň *AB* we *AC* taraplaryny tapawudyna degişlilikde 3 sm we 4 sm bolan kesimlere bölýär ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Eger üçburçlugyň perimetri 28 sm bolsa, onuň taraplaryny tapyň.

1.25. Deň taraply üçburçluk radiusy $3\sqrt{3}$ bolan töweregiň daşyndan çyzylan. Içinden çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

1.26. Esasyndaky burçy 30° bolan, deňýanly trapesiýa töweregiň daşyndan çyzylan. Trapesiýanyň beýikligi 7 sm-e deň bolsa, onuň orta çyzygyny tapyň.

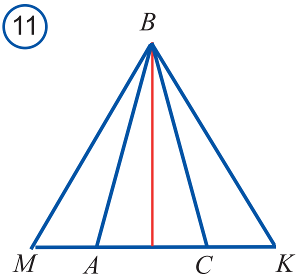
1.27. Esasyndaky burçy 150° bolan deňýanly trapesiýa töweregiň daşyndan çyzylan. Trapesiýanyň orta çyzygy $16\sqrt{3}$ -e deň bolsa, onuň beýikligini tapyň.

1.28. Esasy 16 sm we bu esasa geçirilen beýikligi 15 sm bolan deňýanly üçburçlugyň gapdal tarapyny tapyň.

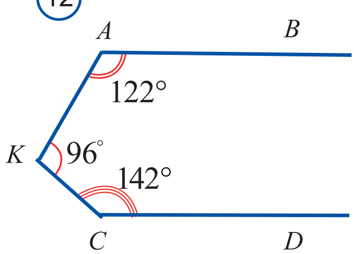
1.29. *ABC* üçburçlugyň *AO* beýikligi onuň *BC* tarapyny *BO* we *OC* kesimlere bölýär. Eger $AB = 10\sqrt{2}$ sm, $AC = 26$ sm we $B = 45°$ bolsa, *OC* kesim uzynlygyny tapyň.

1.30. Rombuň tarapy 10 sm, diagonallaryndan biri 12 sm. Rombuň içinden çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

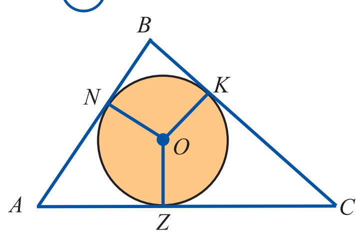
11



12



13



1.31. Radiusy 15 sm bolan töwerekde onuň merkezinden 12 sm uzaklykda bolan horda geçirilen. Hordanyň uzynlygyny tapyň.

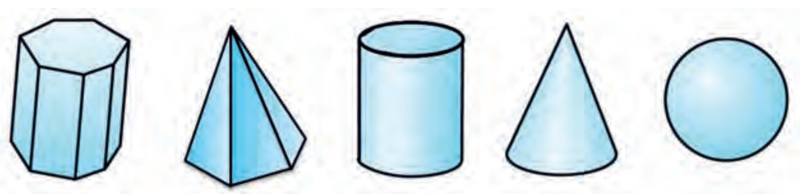
II Bölüm

STEREOMETRIÝA GIRIŞ

4 GIŇIŞLIKDÄKI GEOMETRIK ŞEKILLER. KÖPGRANLYKLAR

Mälim bolşy ýaly, geometrik şekiller tekizlikde doly ýatýan ýa-da ýatmaýandygyna garap, tekiz we giňişlikdäki şekillere bölünýär. Şu wagta çenli geometriýa derslerinde esasan tekiz geometrik şekilleriň häsiýetlerini öwrendik. 9-njy synpyň ahyrynda bolsa käbir giňişlikdäki şekiller: prizma, piramida, silindr, konus we şaryň (1-nji surat) häsiýetlerini garap çykypdyk. Geometriýanyň planimetriýa bölümi tekiz geometrik şekilleri, *stereometriýa* bölümi bolsa giňişlikdäki geometrik şekilleriň (ýa-da jisimleriň) häsiýetlerini öwrenýär. Stereometriýa sözi grekçeden alnan bolup, "stereos"- giňişlikdäki, "metreo" - ölçeýärin diýen manyny aňladýar.

1



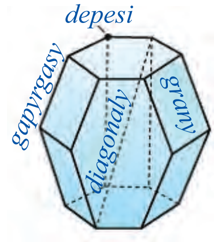
2

2-nji suratda daş-töwerekdäki käbir zatlar giňişlikdäki jisimleriň nusgasy hökmünde olar barada düşünje berýär. Daş-töweregimizdäki ähli predmetler üç ölçegli bolup, olaryň şekili haýsydyr giňişlikdäki geometrik jisime meňzäp gidýär.

9-njy synpyň ahyrynda şeýle giňişlikdäki jisimler bilen tanşypdyňyz. Stereometriýa kursuny düzümli ýagdaýda öwrenmäge başlaýarys. Ilki käbir giňişlikdäki jisimleriň elementleri baradaky maglumatlary gysgaça ýatladyp geçýäris.

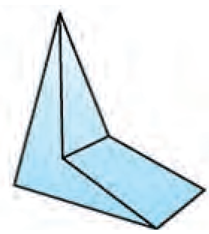
Köpgranlyk diýip tekiz köpburçluklar bilen çäklenen jisime aýdylýar. Tekiz köpburçluklar bu *köpgranlygyň granlary*, köpburçluklaryň depeleri *köpgranlygyň depeleri*, taraplarynyň gapyrgalaryna bolsa *köpgranlygyň gapyrgalary* diýilýär. Bir grana degişli bolmadyk depeleri birleşdirýän kesim *köpgranlygyň diagonaly* diýilýär (3-nji surat).

3



Köpgranlygyň araçägine onuň *üsti* diýilýär. Üsti giňişligi iki bölege bölýär. Olardan çäksiz bölegine *köpgranlygyň daşky ýaýlasy,* çäkli bölegine bolsa *köpgranlygyň içki ýaýlasy* diýiýär.

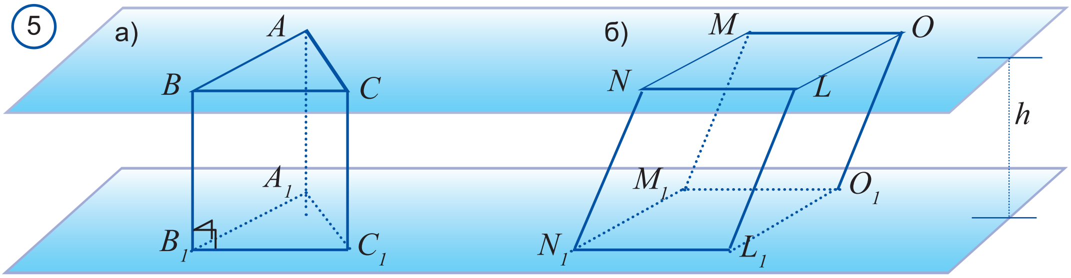
4



Köpgranlyk islendik grany ýatýan tekizligiň bir tarapynda ýatsa, şeýle köpgranlyga *güberçek köpgranlyk* diýilýär. Meselem, kub - güberçek köpgranlykdyr. 4-nji suratda bolsa güberçek bolmadyk köpgranlyk görkezilen. Indikide güberçek iň ýönekeý köpgranlyklar: prizmalary we piramidalary öwreneris.

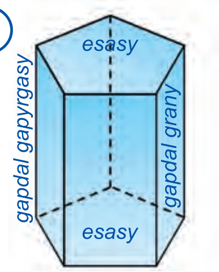
Prizma diýip iki grany deň köpburçlukdan, galan granlary bolsa parallelogramlardan ybarat köpgranlyga aýdylýar (5-nji surat). Deň taraplar prizmanyň *esaslary*, parallelogramlara bolsa onuň *gadal granlary* diýilýär (6-njy surat). Esasynyň taraplarynyň sanyna garap olara *üçburçly, dörtburçly we başga n-burçly prizmalar* diýilýär. 5-nji a suratda üçburçly $ABCA_1B_1C_1$ prizma, 5-nji b suratda bolsa dörtburçly $MNLOM_1N_1L_1O_1$ prizma şekillendirilen.

5

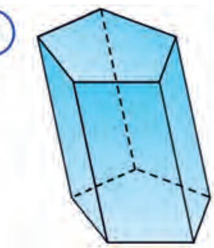


Prizma gapdal granlarynyň esasyna perpendikulýar ýa-da perpendikulýar

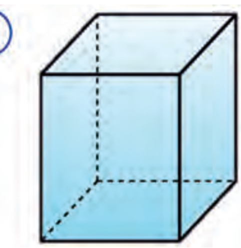
6



7



8



däldigine garap *göni prizma* (6-njy surat) ýa-da *ýapgyt prizma* (7-nji surat) diýilýär.

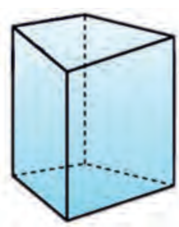
Esasy dogry köpburçlukdan ybarat prizma *göni prizma* diýilýär (8-nji surat).

Esasy parallelogramdan ybarat prizma *parallelepiped* diýilýär (9-njy surat). Parallepipedler hem prizma ýaly göni (10-njy surat) we ýapgyt (11-nji surat) bolmagy mümkin. Esasy gönüburçlukdan ybarat göni parallelepiped *gönüburçly parallelepiped* diýip atlandyrylýar (10-njy surat). Görnüşi ýaly, gönüburçly parallelepipediň ähli granlary gönüburçluklardan ybarat bolýar.

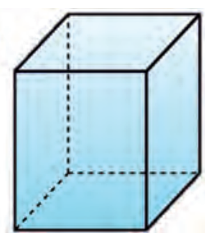
Gönüburçly parallelepipediň bir depesinden çykýan üç gapyrgasyne onuň ölçegleri diýip aýdylýar.

Ölçegleri deň bolan gönüburçly parallelepiped *kub* diýlip atlandyrylýar. Görnüşi ýaly kubuň ähli granlary deň kwadratlardan ybarat bolýar.

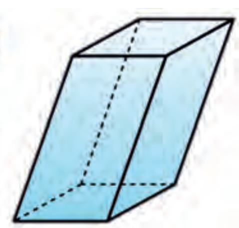
9



10

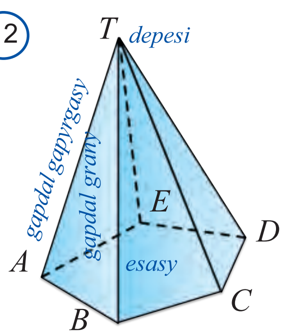


11

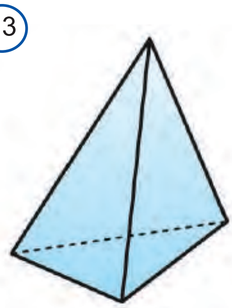


Piramida diýip bir grany köpburçlukdan, galan granlary bolsa bir depä eýe üçburçluklardan ybarat köpgranlyga aýdylýar. Köpburçluk piramidanyň *esasy*, üçburçluklara bolsa onuň *gapdal granlary* diýilýär. 12-nji suratda *TABCDE* bäşburçly piramida görkezilen. *ABCDE* bäşburçluk piramidanyň esasy, *ATB, BTC, CTD, DTE* we *ETA* üçburçluklar - onuň gapdal granlary, T - bolsa onuň depesi.

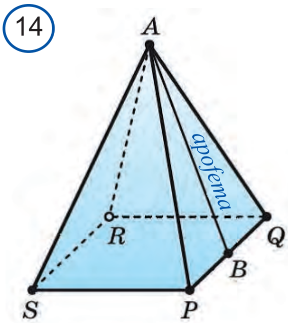
12



13



14



Esasynyň taraplarynyň sanyna garap piramidalara *üçburçly, dörtburçly we başga n-burçly piramidalar* diýlip aýdylýar.

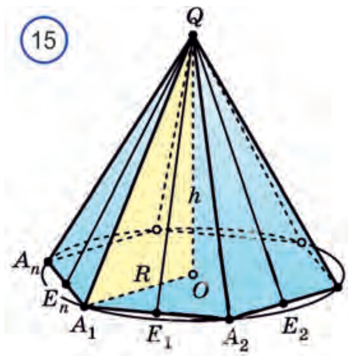
13-nji suratda üçburçly, 14-nji suratda bolsa dörtburçly piramida görkezilen.

Piramidanyň gapdal granlarynyň esasa perpendikulýar ýa-da perpendikulýar däldigine garap *dogry piramida* ýa-da *ýapgyt piramida* diýip atlandyrylýar.

Dogry piramida diýip esasy göni köpburçluk we depesinden esasyň merkezine geçirilen kesim şu merkezden geçýän we esasyň tekizliginde ýatýan göni çyzyga perpendikulýar bolan piramida aýdylýar.

Dogry piramida gapdal granynyň piramidanyň depesinden geçirilen beýiklige onuň *apofemasy* diýilýär. 14-nji suratda *APQRS* dörtburçly dogry piramida şekillendirilen. Ondaky AB kesim piramidanyň apofemalaryndan biridir.

Teorema 1.1. ***Dogry piramidanyň a) gapdal granlary; b) gapdal gapyrgalary; c) apofemalari özara deň.***



Subut. Aýdaly, $QA_1A_2... A_n$ dogry piramida, O bolsa piramidanyň esasynyň merkezi bolsun (15-nji surat).

a) OA_1, OA_2, ... OA_n kesimler dogry köpburçluga daşyndan çyzylan töweregiň radiusyndan ybarat bolany üçin özara deň bolýar. Gönüburçly QOA_1, QOA_2, ..., QOA_n üçburçluklarda iki katetler özara deň bolany üçin olar deň bolýar. Onda olaryň gipotenuzalary hem deň bolýar: $QA_1 = QA_2 = ... = QA_n$.

b) $QA_1A_2... A_n$ dogry piramidanyň gapdal gapyrgalary özara deň bolany üçin onuň gapdal granlary deňýanly üçburçluklardan ybarat bolýar. Bu üçburçluklaryň esaslary dogry köpburçlugyň tarapy bolany üçin özara deň bolýar.

Diýmek, dogry piramidanyň gapdal granlary üç taraplary boýunça özara deň.

c) dogry piramidanyň gapdal granlary deň bolany üçin, olaryň Q depesinden geçirilen beýiklikleri-de özara deň bolýar.

Diýmek, dogry piramidanyň apofemalary-da özara deň.❑

Teorema 1.2. ***Dogry piramidanyň gapdal üsti onuň esasynyň ýarym perimetrine we apofemasynyň köpeltmek hasylyna deň.***

Subut. Aýdaly, $QA_1A_2... A_n$ dogry piramida bolsun (15-nji surat). Piramidanyň gapdal üsti onuň gapdal granlarynyň meýdanlarynyň jemine deň. Onuň gapdal granlary bolsa özara deň bolan deňýanly üçburçluklardan ybarat. Öz gezeginde bu üçburçluklaryň beýiklikleri-de özara deň apofemalardan ybar at:

$$QE_1 = QE_2 = ... = QE_n.$$

Bulardan $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + ... + S_{A_nQA_1} =$

$$= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + ... + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n =$$

$= \frac{1}{2} QE_1 (A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1) = p \cdot a$, bu ýerde p - piramidanyň esasynyň ýarym perimetri, a - piramidanyň apofemasy. ❑

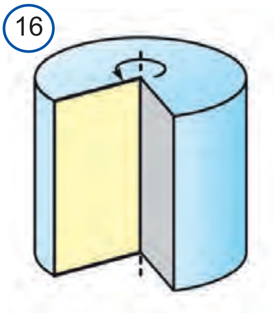
? *Tema boýunça soraglar*

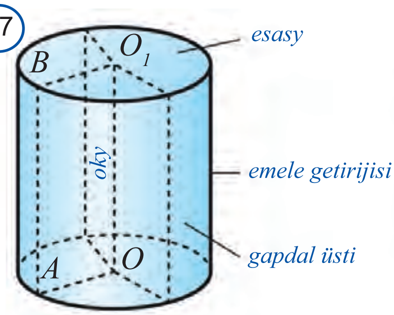
1. Nähili geometrik şekiller a) tekiz; b) giňişlikdäki diýip atlandyrylýar?
2. Nähili jisime köpgranlyk diýilýär? Onuň elementlerine kesgitleme beriň.
3. Nähili jism prizma diýip atlandyrylýar? Onuň elementlerine kesgitleme beriň.
4. Nähili prizma görnüşlerini bilýärsiňiz?
5. Gönüburçly parallelepipede kesgitleme beriň.
6. Nähili jisime piramida diýilýär? Onuň elementlerine kesgitleme beriň.
7. Piramidanyň nähili görnüşlerini bilýärsiňiz?
8. Dogry piramidanyň häsiýetlerini aýdyň.

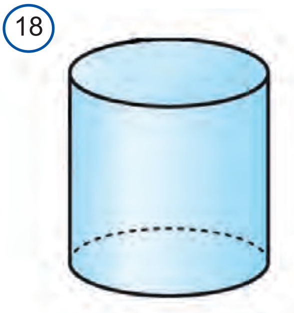
5 AÝLANMA JISIMLERI: SILINDR, KONUS WE ŞAR

Giňişlikdäki şekilleriň ýene möhüm klaslaryndan biri – bu aýlanma jisimleridir. Olara silindr, konus we şar girýär.

Gönüburçlugy bir tarapynyň daşynda aýlamakdan alnan jisime *silindr* diýlip aýdylýar (16-18-nji suratlar).

16


17


18


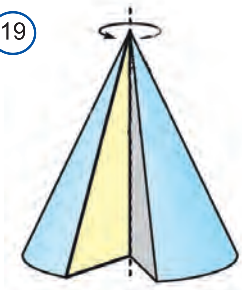
Şeýle aýlanda gönüburçlugyň bir tarapy gozganman galýar. Oňa *silindriň oky* diýýäris (17-nji surat).

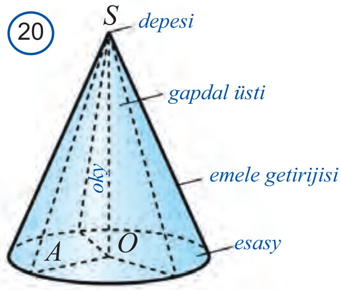
Oka garşylykly ýatýan tarap aýlanmadyndan alnan üst *silindriň gapdal üsti* diýip, tarapyň özi bolsa *silindriň emele getirijisi* diýip aýdylýar.

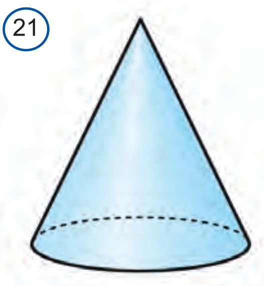
Gönüburçlugyň galan taraplarynyň her biri bu aýlanmada tegelek görnüşindäki üsti emele getirýär. Bu tegelekler *silindriň esaslary* diýip atlandyrylýar.

Gönüburçly üçburçlugy bir katetiniň daşynda aýlamakdan alnan jisime *konus* diýip aýdylýar (19-21-nji suratlar). Bu katetine bolsa *konusyň oky* diýýäris.

Bu aýlanda başga katet emele getiren tegelek konusyň *esasy,* gipotenuza emele getiren üst bolsa *konusyň gapdal üsti* diýip, gipotenuzanyň özi bolsa *konusyň* *emele getirijisi* diýip aýdylýar. Şonuň ýaly-da, bu aýlanmada gozganmazdan galan üçburçlugyň depesine *konusyň depesi* diýilýär (20-nji surat).

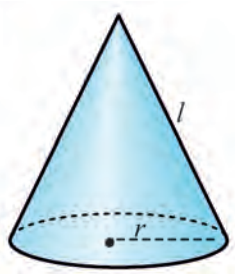
19


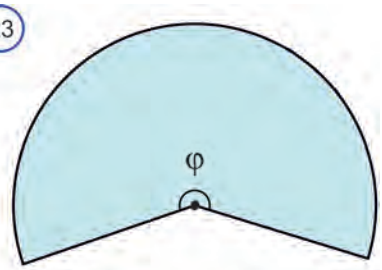
20


21


Teorema 1.3. *Konusyň gapdal üsti onuň esasynyň meýdanynyň ýarysyna we emele getirijisiniň köpeltmek hasylyna deň.*

Subut. Aýdaly, esasynyň radiusy r we emele getirijisi l bolan konus berlen bolsun (22-nji surat). Konus gapdal üstüni tekizlige ýaýarays. Netijede, radiusy l-e deň bolan tegelek sektora eýe bolýarys (23-nji surat).

22


23


Bu sektoryň merkezi burçy j-ni tapýarys (surat). Bu merkezi burç, konus esasy töweregiň uzynlygy - 2p*r ga* deň bolan sektoryň töweregiň dugasyna direlen.

Mälim bolşy ýaly, radiusy l bolan töweregiň uzynlygy 2p*l-e* deň bolup, ol 360° -ly merkezi burça direlen. Netijede proporsiýa eýe bolýarys:

j° -ly merkezi burç - 2p*r* -e deň duga;

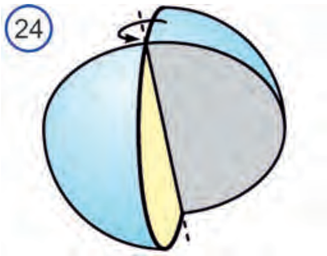
360° -ly merkezi burç - 2p*l-e* deň duga.

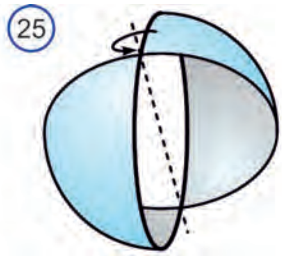
Ondan $\varphi = \dfrac{360^0}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \dfrac{360^0 \cdot r}{l}$.

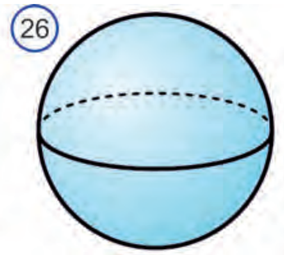
Indi radiusy *l-e* deň bolan, j burçly S sektoryň meýdanyny tapýarys:

$$S = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \varphi^\circ = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \frac{360^0 \cdot r}{l} = \pi r \cdot l. \ \square$$

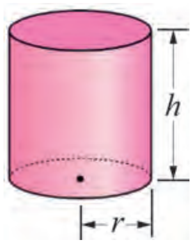
Tegelegiň öz diametriniň daşynda aýlanmasyndan emele gelen jisime *şar* diýip aýdylýar (24-nji surat). Bu aýlanda töwerek emele getiren üst *sfera* diýlip atlandyrylýar (25-nji surat). 26-njy suratda şar şekillendirilen. Görnüşi ýaly, şaryň üsti sferadan ybarat bolýar.

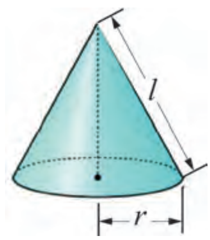


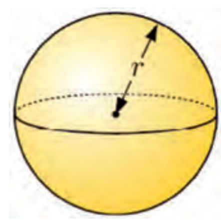




Aýlanma jisimleriň gapdal we doly üstüniň meýdanynyň formulalary:







Silindr

$S_{gapd.} = 2\pi r h$

$S_{doly} = 2S_{esas} + S_{gapd.}$
$= 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Konus

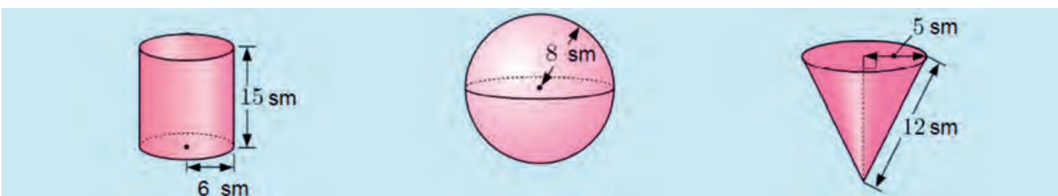
$S_{gapd.} = \pi r l$

$S_{doly} = S_{esas} + S_{gapd.}$
$= \pi r^2 + \pi r l$

Şar

$S = 4\pi r^2$

Mysal. Aşakdaky jisimleriň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.



$S_{gapd.} = 2\pi r h = 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 5 =$
$= 565,5\ sm^2$

$S = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 =$
$= 804,2\ sm^2$

$S_{doly} = 2\pi r l + \pi r^2 =$
$= 2 \cdot 3,14 \cdot 12 + 3,14 \cdot 5^2 =$
$= 267\ sm^2$.

? *Tema boýunça soraglar*

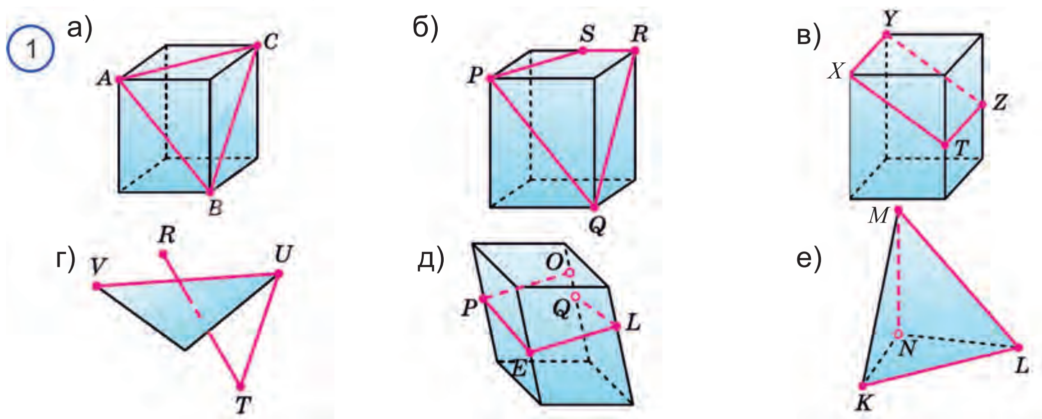
1. Aýlanma jisimlere mysal getiriň.
2. Nähili jisim silindr diýip atlandyrylýar? Onuň elementlerine kesgitleme beriň.
3. Nähili jisim konus diýip atlandyrylýar? Onuň elementlerine kesgitleme beriň.
4. Nähili jisim şar diýip atlandyrylýar? Onuň elementlerine kesgitleme beriň.

6 AMALY GÖNÜKMELER WE OLARYŇ ULANYLYŞY

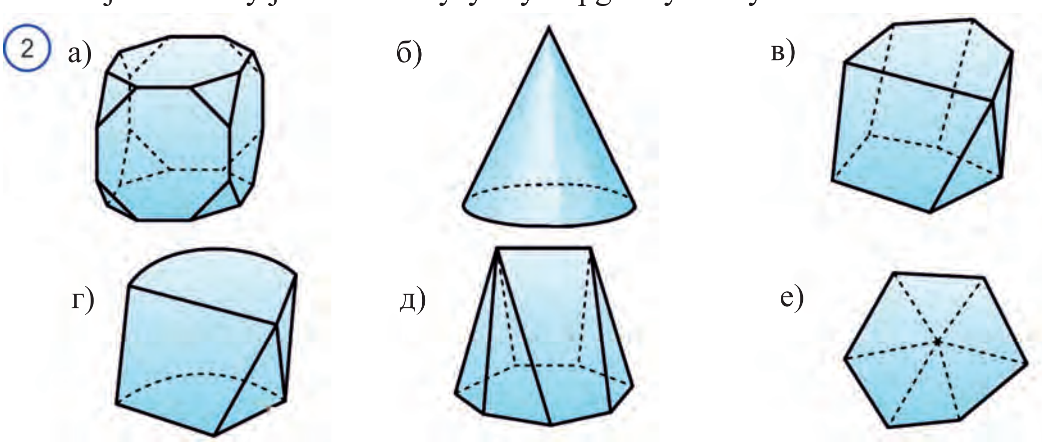
2.1. Dogry prizmanyň gapdal granlarynyň gönüburçlukdygyny subut ediň.

2.2. Dogry prizmanyň gapdal üstüniň esasynyň perimetrine we gapdal gapyrgasynyň köpeltmek hasylyna deňdigini subut ediň.

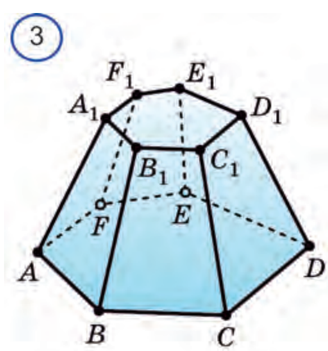
2.3. 1-nji suratda nähili giňişlikdäki döwük çyzyk şekillendirilen?



2.4. 2-nji suratdaky jisimleriň haýsylary köpgranlyk bolýar?



2.5. 3-njy suratda $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ köpgranlyk şekillendirilen. Ondaky
a) CD gapyrga umumy bolan granlary; b) DD_1 gapyrga umumy bolan granlary; c) E üç umumy bolan granlary; d) C_1 üç umumy bolan granlary; e) A üç umumy bolan gapyrgalary; e) c) F_1 üç umumy bolan gapyrgalary aýdyň.



2.6. Göni parallelepipediň esasy rombdan ybarat. Rombyň tarapy 8 m, diagonallary bolsa 10 m we 24 m-e deň. Parallelepipediň doly üstüni tapyň.

2.7. *AB* we *AK* göni çyzyklar näçe umumy nokada eýe bolmagy mümkin?

2.8. Dogry üçburçly prizmanyň esasynyň tarapy 6 sm, gapdal gapyrgasy bolsa 11 sm-e deň. Prizmanyň doly üstüni tapyň.

2.9. Dogry n-burçly prizma esasynyň tarapy a, gapdal gapyrgasy h -a deň. Eger a) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; b) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; c) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; d) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$ bolsa, prizmanyň gapdal üstüni we doly üstüni tapyň.

2.10. Dogry üçburçly piramidanyň apofemasy 15-e, piramidanyň depesini esasyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 12-ä deň. a) piramidanyň gapdal gapyrgasyny we esasynyň tarapyny; b) piramidanyň gapdal üstüni; c) piramidanyň doly üstüni tapyň.

2.11. Dogry dörtburçly piramidanyň esasy 12 sm-e, piramidanyň depesini esasynyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 16 sm-e deň. a) piramidanyň gapdal gapyrgasyny we apofemasyny b) piramidanyň gapdal üstüni; c) piramidanyň doly üstüni tapyň.

2.12*. *REFGH* piramidanyň esasynyň taraplary10 sm we 18 sm bolan we meýdany 90 sm^2 bolan *EFGH* parallelogramdan ybarat. Piramidanyň depesi *R* -i esasyň diagonallarynyň kesişme nokady *O* bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 6 sm-e deň. a) onuň gapdal gapyrgalaryny; b) gapdal we doly üstüni tapyň.

2.13*. Piramidanyň esasynyň taraplary 8 we 10 bolan we kiçi diagonaly 6-a deň bolan parallelogramdan ybarat. Piramidaýň depesini esasynyň diagonallarynyň kesişme nokady bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 4-e deň. a) piramidanyň gapdal gapyrgalaryny; b) gapdal üstüni; c) doly üstüni tapyň.

2.14*. Dogry altyburçly piramidanyň esasynyň tarapy 10 sm. Onuň depesini esasynyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy $\sqrt{69}$ -a deň. a) piramidanyň gapdal gapyrgasyny we apofemasyny; b) gapdal we doly üstüni tapyň.

2.15. Dogry altyburçly piramidanyň gapdal üstüniň meýdany 150 m^2 -a, gapdal gapyrgasy bolsa 10 m-e deň. Piramidanyň esasynyň meýdanyny tapyň.

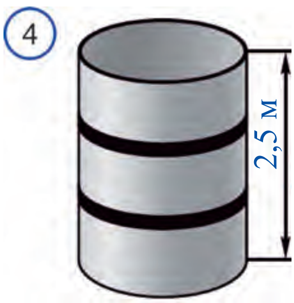
2.16. Silindr gapdal üsti esasynyň töwereginiň uzynlygynyň silindr emele getirijisine köpeltmek hasylyna deňdigini subut ediň.

2.17. Silindriň esasynyň radiusyna we emele getirijisine görä onuň gapdal üstüni tapyň. a) 7 sm we 12 sm; b) 12 cm we 7 sm; c) 1 m we 12 m.

2.18. Silindriň esasynyň meýdany 300p sm^2 -a, emele getirijisi 6 sm bolsa, silindriň esasynyň meýdanyny tapyň.

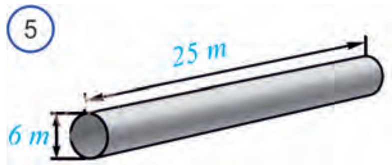
2.19. Silindriň gapdal üstüniň meýdany 90p sm^2, emele getirijisi 5 sm, doly üstüniň meýdanyny tapyň.

2.20. Silindriň esasynyň diametri 1 m, emele getirijisi bolsa esasynyň töwereginiň uzynlygyna deň. Silindriň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.



2.21. Silindriň emele getirijisi onuň esasynyň radiusyndan 12 sm-e uzyn. Silindriň doly üstüniň meýdany bolsa 128p sm^{2}. Silindriň esasynyň radiusyny we emele getirijisini tapyň.

2.22. 4-njy suratda görkezilen silindr şeklindäki bakyň iki tarapyny hem boýamaly. Eger bakyň beýikligi 2,5 m, esasynyň diametri 1,2 m we boýag gatlagynyň galyňlygy 0,1 mm bolsa, baky boýamak üçin näçe boýag gerek?



2.23. Uzynlygy 25 m we diametri 6 m bolan turbany taýýarlanda näçe bölek tünüke gerek bolar? (5-nji surat). Tünüke böleklerini bir-birine kebşirlände goşmaça 2,5% turbanyň gapdal üstüne deň tünüke ulanylýandygyny hasaba alyň.

2.24. Konusyň esasynyň radiusy 12 mm, konusyň depesini esasynyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 35 mm-e deň. Onuň gapdal üstüni tapyň.

2.25. Konusyň esasynyň diametri 32 sm, konusyň depesini esasynyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 63 sm-e deň. Onuň gapdal üstüni tapyň.

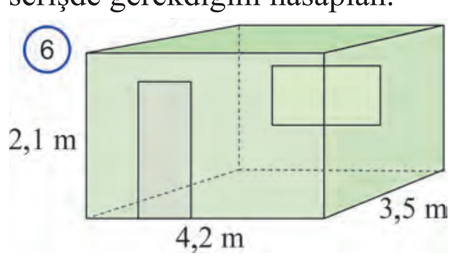
2.26*. Konusyň emele getirijisi l -e deň bolup, ol esasyň tekisligi bilen α burçy düzýär. Eger a) $l = 10$ sm, $\alpha = 30^{o}$; b) $l = 24$ dm, $\alpha = 45^{o}$;
c) $l = 5$ m, $\alpha = 60^{o}$ bolsa, konusyň esasynyň meýdanyny tapyň.

2.27*. Konusyň emele getirijisi l -e deň bolup, ol esas radiusy bilen α burçy düzýär. Eger
a) $l = 18$ sm, $\alpha = 30^{o}$; b) $l = 20$ dm, $\alpha = 45^{o}$;
c) $l = 2{,}4$ m, $\alpha = 60^{o}$ bolsa, konusyň doly üstüni tapyň.

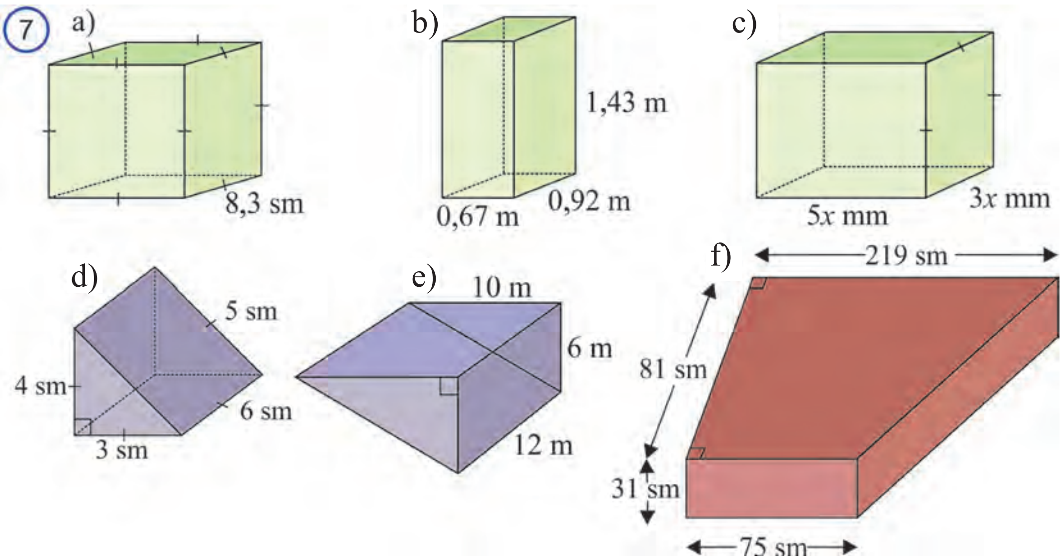
2.28*. Konusyň esasynyň radiusy we emele getirijisi degişlilikde a) 11 sm we 8 sm; b) 8 mm we 11 mm; c) 3 m we 18 m; d) 2,7 m we 1,2 m-e deň bolsa, konusyň gapdal üstüni tapyň.

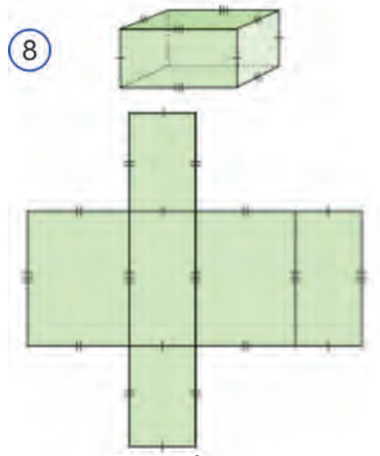
2.29. 6-njy suratda görkezilen otagy abatlamaly. Otagda ölçegleri 0,8 m we 2,2 m bolan gapy we ölçegleri 183 sm we 91 sm bolan äişge bor. Gapynyň iki tarapyda boýalmaly. Jedwelde iki hili boýagyň bahasy berlen. Bu maglumatlardan peýdalanyp, tygşytly abatlamak üçin näçe serişde gerekdigini hasaplaň.

Boýag görnüşi	Görümi	Boýamaly meýdan	Bahasy
Diwar üçin	4 l	16 m^2	32450 s.
	2 l	8 m^2	20800 s.
Gapy üçin	2 l	10 m^2	23600 s.
	1 l	5 m^2	15400 s.



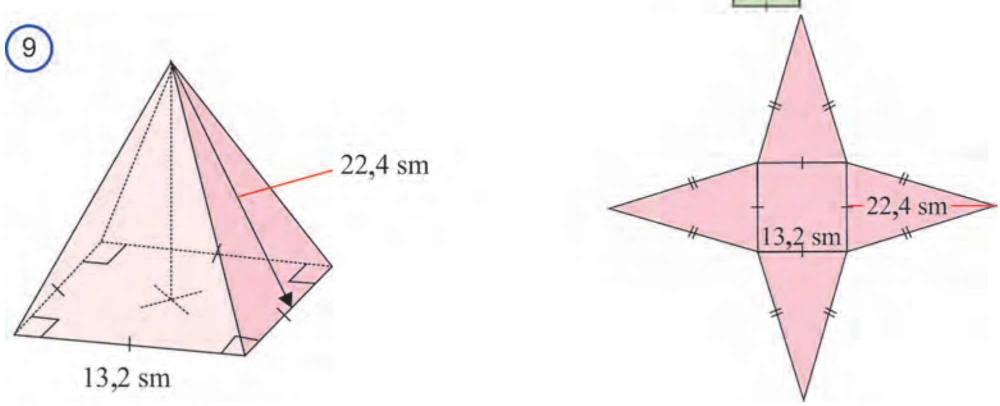
2.30. 7-nji suratda şekillendirilen gönüburçly parallelepipediň ýaýylmasyna görä onuň doly üstüniň formulasyny tapyň.



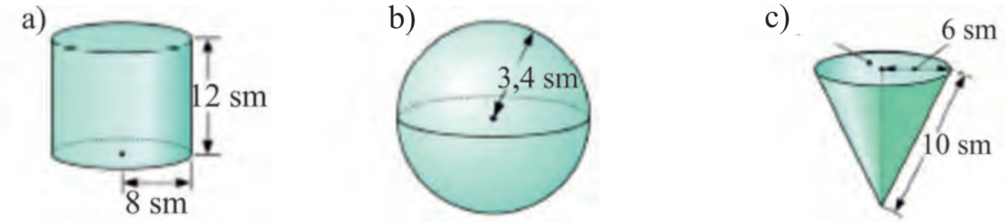


2.31. 8-nji suratda şekillendirilen gönüburçly parallelepipediň ýaýylmasyna görä onuň doly üstüniň formulasyny tapyň.

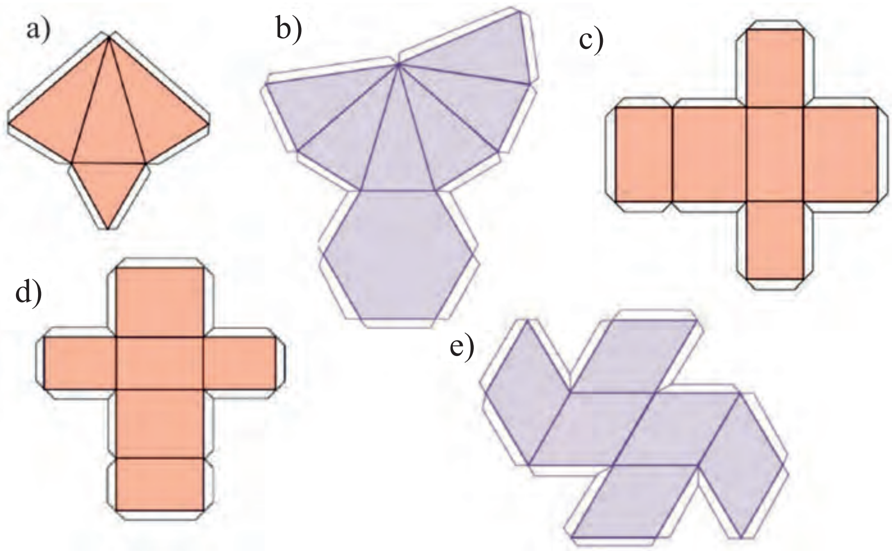
2.32. 9-njy suratda şekillendirilen dörtburçly dogry piramidanyň ýaýylmasyna görä onuň doly üstüniň formulasyny tapyň.



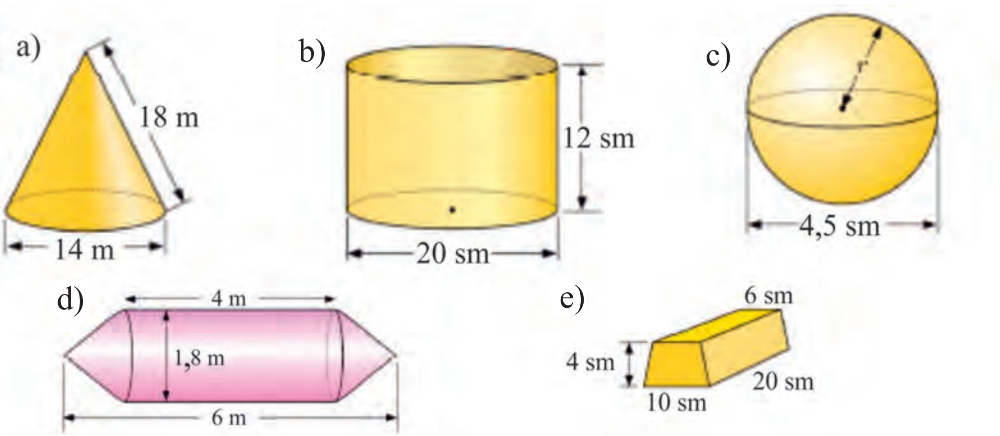
2.33. 10-njy suratda şekillendirilen aýlanma jisimleriň doly üstüni tapyň.

10


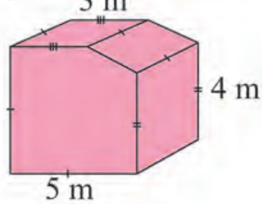
2.34. Giňişlikdäki jisimleri gowy göz öňüne getirmek üçin olaryň modelinden peýdalanan makul. Giňişlikdäki jisimleriň modelini olaryň ýaýylmasyndan peýdalanyp gurmak mümkin (11-nji surat). Görşümiz ýaly, giňişlikdäki jisimleriň ýaýylmasy tekiz geometrik şekillerden ybarat. Aşakdaky ýaýylmalardan peýdalanyp, gönüburçly parallelepipediň, kub we piramidalaryň modelini guruň.

11


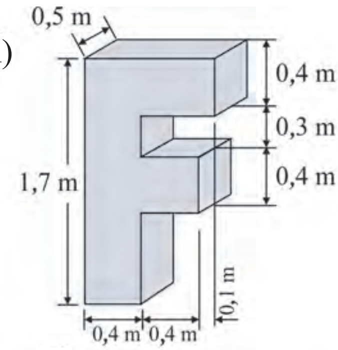
2.35. 12-nji suratda şekillendirilen jisimleriň doly üstüni tapyň.

12


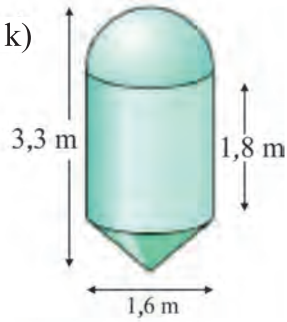
g)



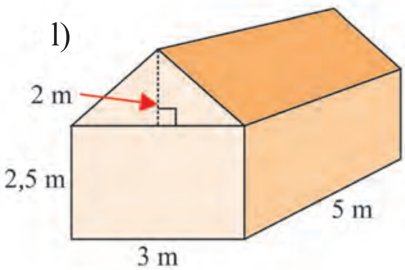
h)



k)



l)



m)

n)

Geometrik täzinlik

Geçmişde gurlan gadymy arhitektura ýadygärliklerini guranda ata-babalarymyz uly geometrik bilime we başarnyga eýe bolupdyrlar. Muny ýekeje Samarkant şäherindäki Registan meýdanynda gurlan taryhy ýadygärliklerden hem bilmek mümkin (1-nji surat).

Hywa şäherindäki Içangalanyň suratynda (2-nji surat) nähili geometrik şekilleri görýärsiňiz?

Täç-Mahal - dünýäniň ýedi täsinliginden biri (3-nji surat). Hindistanyň Agra şäherinde Babury Şah-Jahan tarapyndan gurlan gadymy ýadygärlik. Ony guran ussalar geometriýadan kämil bilime eýe bolandyklary mese-mälim.

3

4

Sidneý şäheriniň opera teatry (4-nji surat) – Awstraliýada gurlan döwrebap binagärçilik nusgasy. Özüniň täsin geometrik görnüşi bilen üns bererlikdir.

Gözel geometrik düşünjäniň eýesi, yrakly meşhur arhitektor aýal Zaha Hadidiň taslamasy esasynda Hytaýyň paýtagty Pekin şäherinde gurlan "Galaxy Soho" dynç alyş kompleksiniň ajaýyp görnüşinden lezzetlenmän alaç ýok (5-nji surat).

5

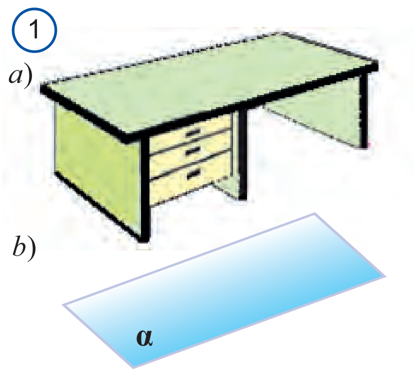
Ýurdumyzyň paýtagtynda gurulýan "Tashkent sity" toplumynyň taslamasyny görüp, haýran galaýmaly. Şeýle ajaýyp gözellikleri döretmekde inžener gurluşykçylara näçe-näçe geometrik bilimler gerek bolandygyny göz öňüne getirmek mümkin (6-njy surat).

6

III BÖLÜM

GIŇIŞLIKDE GÖNI ÇYZYKLAR WE TEKIZLIKLER

7 GIŇIŞLIKDE GÖNI ÇYZYKLAR WE TEKIZLIKLER

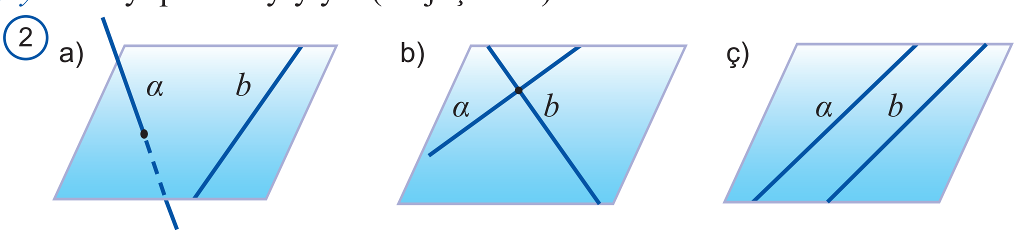


Giňişlikdäki esasy geometrik şekiller: nokat, göni çyzyk we tekizlikdir. Tekizligi stoluň usti ýaly tekiz üst diýip göz öňüne getirýäris (1-nji *a* surat). Tekizlik hem göni çyzyk ýaly çäksizdir. Suratda tekizligiň diňe bir bölegini (adatda parallelogram şeklinde) şekillendirýäris (1-nji *a* surat). Ýöne ony hemme tarapa çäksiz dowam eden diýip göz öňüne getirýäris we çyzgyda parallelogram şeklinde şekillendirýäris (1-nji *b* surat). Tekizlikleri α, β, γ,... grek harplary bilen belgileýäris.

Giňişlikde iki göni çyzyk bir tekizlikde ýatmagy ýa-da ýatmazlygy mümkin (2-nji surat). Giňişlikde bir tekizlikde ýatmaýan iki göni çyzyga *atanaklaýyn göni çyzyklar* diýilýär (2-nji *a* surat).

Bir tekizlikde ýatýan we diňe bir umumy nokada eýe bolan göni çyzyklar *kesişýän göni çyzyklar* diýlip atlandyrylýar (2-nji *b* surat).

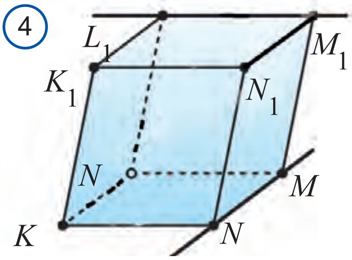
Bir tekizlikde ýatýan we özara kesişmeýän göni çyzyklar bolsa *parallel göni çyzyklar* diýlip atlandyrylýar (2-nji ç surat).



Atanaklaýyn göni çyzyklara biri köprüden, ikinjisi köpriniň astyndan geçýän ýollary mysal hökmünde getirmek mümkin (3-nji surat). Şonuň ýaly-da, 4-nji suratdaky parallelepipediň MN we L_1M_1 gyraňlary ýatýan göni çyzyklar hem atanaklaýyn bolýar.

3

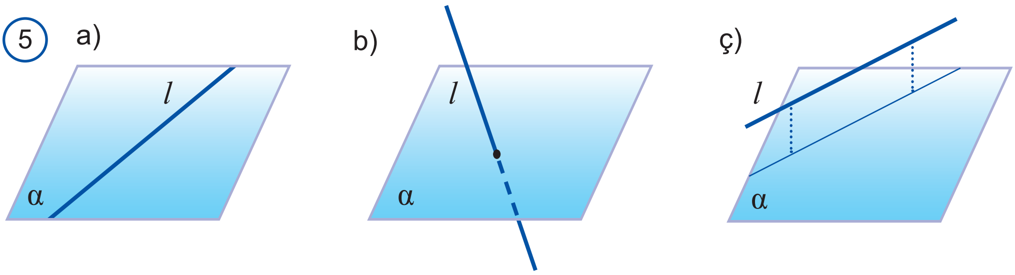
4



Giňişlikde göni çyzyk we tekizlik özara nähili ýerleşmegi mümkin?

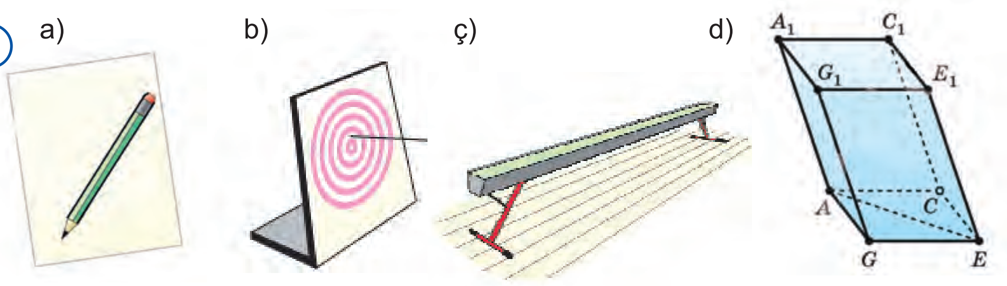
Göni çyzyk tekizlikde ýatmagy (5-nji *a* surat), ony kesip geçmegi (5-nji *b* surat) ýa-da kesip geçmezligi, ýagny umumy nokada eýe bolmazlygy (5-nji ç surat) mümkin. Ahyrky ýagdaýda *göni çyzyk tekizlige parallel* diýlip atlandyrylýar.

5

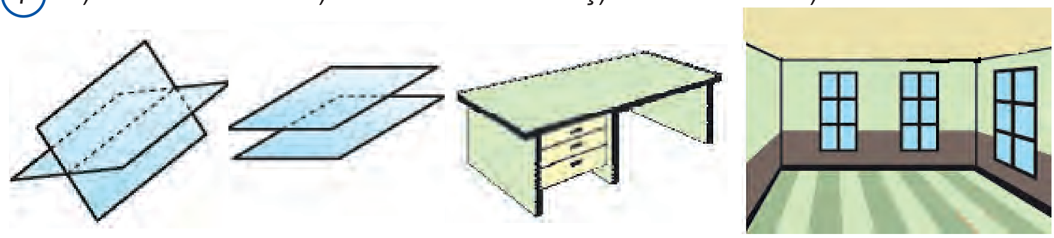


Stoluň üstünde ýatan galam – tekizlikde ýatýan göni çyzyk barada (6-njy *a* surat), nyşana sanjylan ok (6-njy *b* surat) – tekizligi kesip geçýän göni çyzyk barada hem-de polda duran gimnastik agaç – tekizlige parallel göni çyzyk barada (6-njy *c* surat) düşünje berýär.

6



7 a) b) ç) d)



Şonuň ýaly-da, 6-njy *d* suratda görkezilen parallelepipediň $AGEC$ esasynyň diagonaly AE ýatýan göni çyzyk esas tekizliginde ýatýar, AGA_1G_1 tarap ýatýan tekizligi kesip geçýär hem-de $A_1G_1E_1C_1$ ýokary esas tekizligine parallel bolýar.

Indi giňişlikde tekizlikleriň özara ýerleşişine aýdyňlyk girizeliň.

Giňişlikde tekizlikler haýsy-da bolsa bir göni çyzyk boýunça kesişmegi (7-nji *a* surat) ýa-da umumy nokada eýe bolmazlygy mümkin (7-nji *b* surat). Şondan gelip çykyp, bu tekizlikler, degişlilikde, *kesişýän* ýa-da *parallel* tekizlikler diýlip atlandyrylýar.

7-nji *ç* suratda görkezilen stoluň üstki bölegi we gapdal grany kesişýän tekizlikler barada, otagyň poly we petigi bolsa (7-nji *d* surat) parallel tekizlikler barada düşünje berýär.

Şonuň ýaly-da, 4-nji suratda görkezilen parallelepipediň garşylykly bolmadyk gapdal granlary – kesişýän tekizlikler barada, aşaky we üstki esaslary hem-de garşylykly gapyrgalary bolsa parallel tekizlikler barada düşünje berýär.

Parallellik belgisi – "//" diňe bir parallel göni çyzyklary däl, eýsem tekizlige parallel göni çyzygy we parallel tekizlikleri belgilemekde-de ulanylýar:

$a \, // \, b$, $a \, // \, \alpha$ we $\alpha \, // \, \beta$.

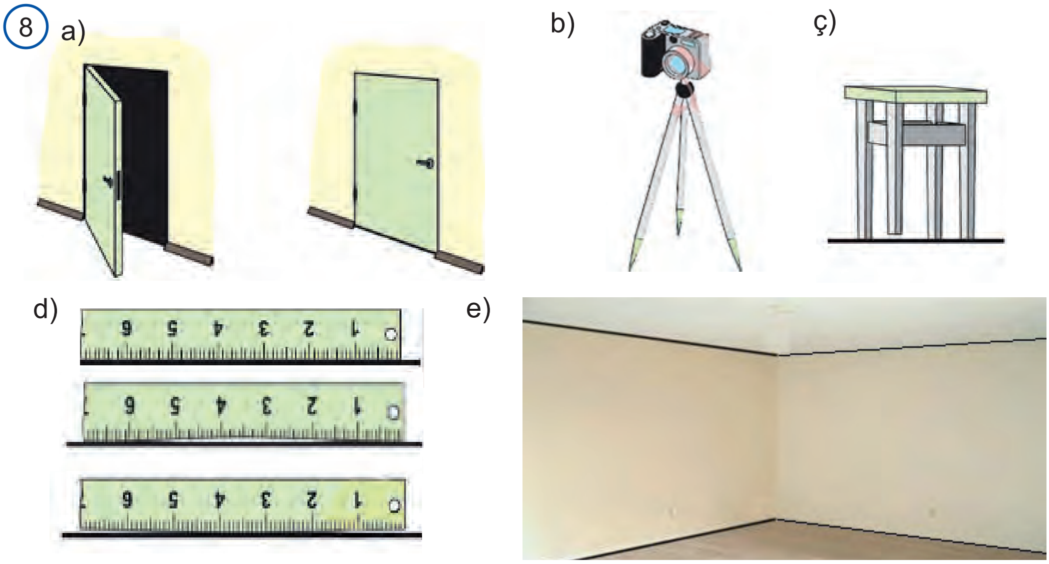
Planimetriýadaky ýaly, stereometriýada hem käbir geometrik şekilleriň häsiýetleri subutsyz kabul edilýär. Giňişlikde tekizlikleriň aşakdaky häsiýetlerini subutsyz, *S* topar aksiomalary hökmünde kabul edýäris:

S_1 *Eger üç nokat bir göni çyzykda ýatmasa, onda olar arkaly ýeke-täk tekizlik geçirmek mümkin.*

S_2 *Eger göni çyzygyň iki nokady bir tekizlikde ýatsa, onda onuň ähli nokatlary şu tekizlikde ýatýar.*

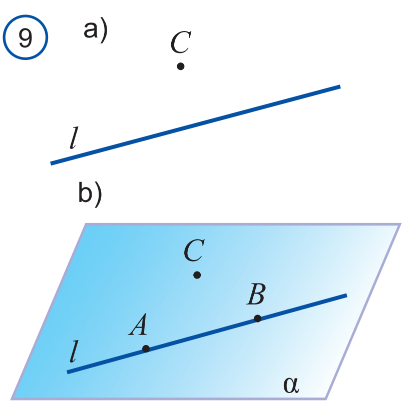
S_3 *Eger iki tekizlik umumy nokada eýe bolsa, onda bu tekizlikler şu nokatdan geçýän umumy göni çyzyga hem eýe bolýar.*

Ugrukdyryjy gönükme. Aşakdaky 8-nji suratlardaky ýagdaýlary düşündirende haýsy aksiomalara daýanmak mümkin?



Planimetriýada girizilen aksiomalar bilen birlikde bu üç aksiomalar stereometriýanyň esasyny düzýär. Planimetriýada biz garaýan ähli şekiller ýerleşýän bir tekizlige eýedigimizi ýatladyp geçýäris. Stereometriýada bolsa beýle tekizlikler çäksiz köp bolup, olaryň ählisinde planimetriýa aksiomalary we planimetriýada subut edilen ähli häsiýetler ýerlikli bolýar, diýip garalýar. Şonuň ýaly-da, stereometriýa kursunda planimetriýanyň aksiomalaryna stereometriýa nukdaý nazaryndan garamaga dogry gelýär.

***2.1-nji teorema* Göni çyzyk we onda ýatmaýan nokat arkaly bir we diňe bir tekizlik geçirmek mümkin.**



Subut. l – berlen göni çyzyk, C bolsa onda ýatmadyk nokat bolsun (9-njy *a* surat).

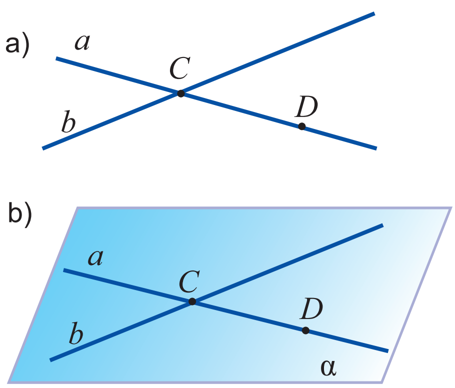
Ilki teoremanyň netije böleginde aýdylan tekizligiň bardygyny görkezýäris. l göni çyzykda A we B nokatlary alarys. Şerte görä, A, B we C nokatlar bir göni çyzykda ýatmaýar. Onda S_1 aksioma görä, A, B we C nokatlar arkaly α tekizligi geçirmek mümkin (9-njy *b* surat). S_2 aksioma görä bolsa, α tekizlik l göni çyzykdan geçýär.

Diýmek, α – gözlenýän tekizlik eken.

Indi bu tekizligiň ýeke-täkligini görkezýäris.

Tersini çak edýäris: l – berlen göni çyzyk we onda ýatmadyk C nokatdan ýene bir, β tekizlik geçirmek mümkin bolsun. Onda β tekizlik hem A, B we C nokatlardan geçýär. Ýöne, S_2 aksioma görä üç nokatdan diňe bir tekizlik geçirmek mümkin. Gapma-garşylyk. Diýmek, çakymyz nädogry. Göni çyzyk we onda ýatmaýan nokat arkaly bir we diňe bir tekizlik geçirmek mümkin. ❑

10



2.2-nji teorema: Berlen kesişýän iki göni çyzyk arkaly ýeke-täk tekizlik geçirmek mümkin.

Subut. Berlen a we b göni çyzyklar C nokatda kesişsin (10-njy a surat).

a göni çyzykda C nokatdan tapawutly ýene bir D nokady alarys. Onda, subut edilen 1-nji teorema görä, b göni çyzyk we onda ýatmadyk D nokat arkaly ýeke-täk α tekizlik geçýär (10-njy b surat). Bu tekizlik a göni çyzygyň C we D nokatlaryndan geçýär. Onda S_2 aksioma görä, α tekizlik a göni çyzykdan hem geçýär.

Diýmek, α tekizlik berlen kesişýän iki göni çyzyk arkaly geçýär.

Bu tekizligiň ýeke-täkligini özbaşdak esaslandyryň. ❑

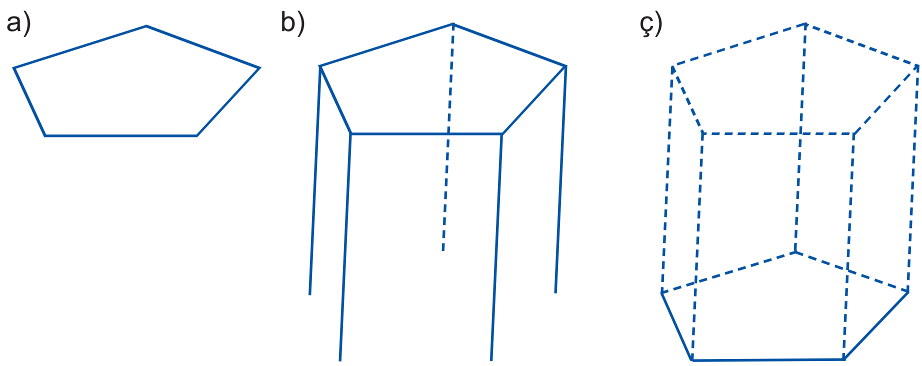
? *Tema degişli soraglar*

1. *Giňişlikdäki esasy geometrik şekilleri aýdyň.*
2. *S topar aksiomalaryny aýdyň.*
3. *Tekizlikde ýatýan nähili göni çyzyklar: a) kesişýän; b) parallel diýlip atlandyrylýar?*
4. *Nähili göni çyzyklar atanaklaýyn diýlip atlandyrylýar? Mysallar getiriň.*
5. *Giňişlikde iki göni çyzyk nähili ýerleşmegi mümkin?*
6. *Nähili göni çyzyklar: a) tekizlikde ýatýan; b) tekizlige parallel diýlip atlandyrylýar?*
7. *Giňişlikde göni çyzyk we tekizlik nähili ýerleşmegi mümkin?*
8. *Giňişlikde nähili tekizlikler: a) kesişýän; b) parallel diýlip atlandyrylýar?*
9. *Giňişlikde iki tekizlik nähili ýerleşmegi mümkin?*
10. *Giňişlikde göni çyzyklaryň we tekizlikleriň häsiýetlerini aňladýan aksiomalary aýdyň.*
11. *Üç nokatdan geçýän tekizligiň häsiýetini aýdyň.*

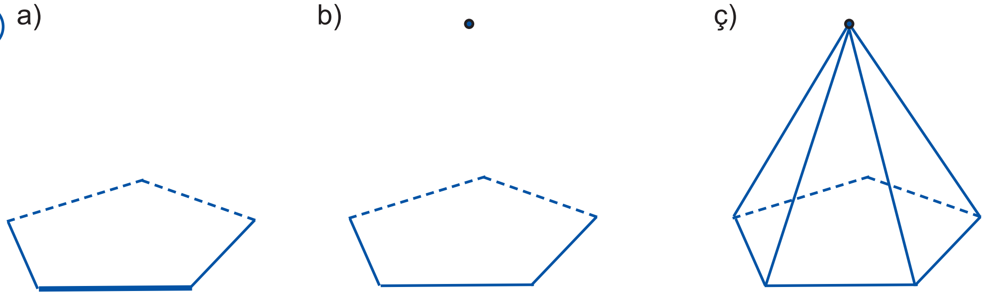
8 KÖPGRANLYKLAR WE OLARYŇ ÝÖNEKEÝ KESIMLERINI GURMAK

Geometrik meseleleri çözende meseläniň şertine laýyk çyzgyny çyzmak örän möhüm hasaplanýar. Käte dogry çyzylan çyzgy – meseläniň "ýarym çözüwi" bilen deňleşdirilýär. Stereometriýada meseläniň çyzgysyny dogry çyzmak iňňän möhüm, örän jogapkärli we käte bolsa çylşyrymly iş hasaplanýar. Çünki stereometrik şekiller üç ölçegli bolup, olary tekizlikde, depderiň sahypasynda şekillendirmek gerek bolýar. Nädogry çyzylan çyzgy nädogry çözüwe ýa-da öňi ýapyk köçä eltýär.

Prizmany şekillendirmek aşakdaky tertipde alnyp barylýar (11-nji surat). Ilki köpburçluk şeklindäki esaslaryndan biri çyzylýar. Soňra onuň her bir depesinden özara parallel we deň kesimler, ýagny prizmanyň ýasaýjylary çyzylýar. Kesimiň ahyrlary degişlilikde utgaşdyryp çykylýar. Munda ikinji esas peýda bolýar. Çyzgyda prizmanyň görünmeýän gapyrgalary ştrih-punktir çyzyklar bilen çyzylýar.

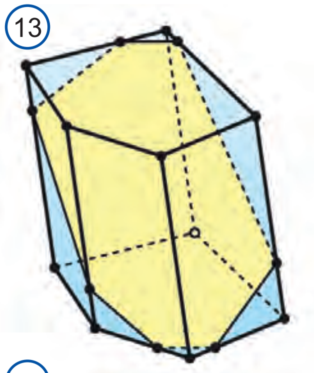
11


Piramidany şekillendirmek hem şoňa meňzeş tertipde alnyp barylýar (12 -nji surat). Ilki köpburçluk şeklindäki esasy çyzylýar. Soňra piramidanyň depesi belgilenip, bu nokat esasynyň her bir depesi bilen utgaşdyryp çykylýar. Çyzgyda piramidanyň görünmeýän granlary punktir çyzyklar bilen çyzylýar.

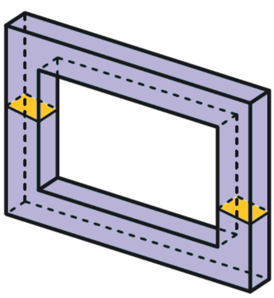
12


Giňişlikdäki geometrik şekilleriň özara ýerleşişini diňe dogry göz öňüne getirilende, onuň çyzgysyny dogry çyzmak mümkin bolýar. Giňişlikdäki şekilleriň biri köpgranlyk, ikinjisi bolsa tekizlik bolanda, dürli kesimleri şekillendirmäge dogry gelýär. Aşakda köpgranlyklaryň kesimlerini gurmak bilen meşgullanarys.

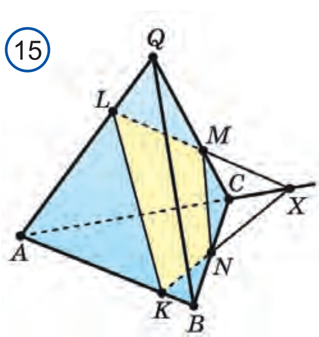
13



14



15



Aýdaly, köpgranlygy haýsy-da bolsa tekizlik kesip geçen bolsun. *Köpgranlygyň kesimi* diýip köpgranlygyň kesiji tekizlige degişli nokatlaryndan ybarat geometrik şekile aýdylýar.

Kesiji tekizlik köpgranlygyň üstüni kesimler boýunça kesip geçýär, köpgranlygyň kesimi bolsa bir ýa-da birnäçe köpburçluklardan ybarat bolýar. 13-nji suratda bäşburçly prizmanyň ýediburçlukdan ybarat kesimi görkezilen. 14-nji suratdaky ramy tekizlik bilen kesende emele gelen kesimi – iki dörtburçlukdan ybarat.

Köpgranlygyň kesimini şekillendirmek üçin onuň granlary kesiji tekizlik bilen umumy nokatlaryny kesgitlemek ýeterli.

1-nji mesele. *QABC* üçburçlukly piramidanyň *AB, AQ* we *CQ* gapyrgalary, degişlilikde, *K, L* we *M* nokatlarda kesip geçýän α tekizlik bilen kesende emele gelen kesimi gurýarys (15 -nji surat).

Gurmak. Kesiji α tekizlik piramidanyň *AQB* grany bilen iki: *K* we *L* umumy nokatlara eýe. Onda kesiji tekizlik bu grany *KL* kesim boýunça kesip geçýär.

Edil şoňa meňzeş, α tekizlik piramidanyň *AQC* grany bilen iki: *M* we *L* umumy nokatlara eýe bolany üçin, bu grany *ML* kesim boýunça kesip geçýär.

Kesiji α tekizlik piramidanyň *ABC* grany bilen bir *K* umumy nokada eýe. Bu tekizligiň *BC* gapyrgasy kesip geçýän nokadyny tapýarys.

Bu tekizlige degişli *LM* we *AC* göni çyzyklary dowam etdirip, olaryň kesişme nokady *X*-i tapýarys. *X* nokat *AQC* we *ABC* tekizliklerde hem ýatýar.

Kesiji α tekizlik piramidanyň *ABC* grany bilen iki: *K* we *X* umumy nokatlara eýe. Onda kesiji tekizlik bu grany *KX* kesim boýunça kesip geçýär.

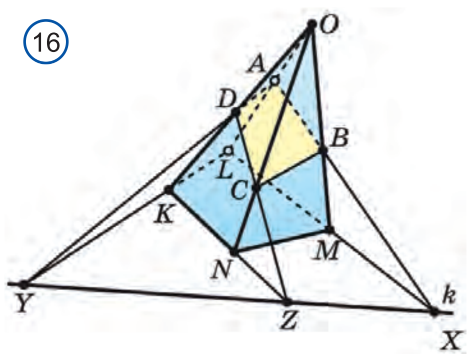
KX göni çyzyk we *BC* granyň kesişme nokady *N* hem α tekizlikde ýatýar.

Diýmek, α tekizlik *ABC* grany *KN* kesim boýunça, *BQC* grany bolsa *MN* kesim boýunça kesip geçýär.

KLMN dörtburçluk α tekizligiň piramida bilen kesiginden ybarat bolýar. *KL* we *KN* kesimler α tekizligiň *ABQ* we *ABC* granlardaky *yzlary* diýlip atlandyrylýar.

2-nji mesele. *OKLMN* piramidanyň *OL* gapyrgasynyň *A* nokady we piramidanyň *KLMN* esasynyň tekizliginda ýatýan *k* göni çyzykdan geçýän *b* tekizlik bilen kesende emele gelýän kesigi gurýarys (16-njy surat).

16

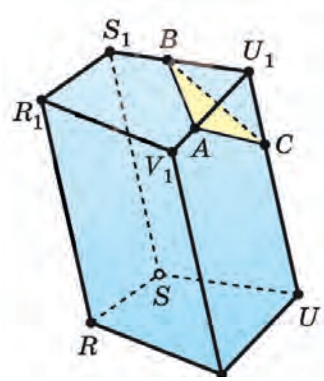


Gurmak. *LM* we *k* göni çyzyklar kesişýän nokady tapýarys. Bu nokat *k* göni çyzykda ýatýanlygy üçin *b* tekizlige degişli. Şonuň ýaly-da, bu nokat *LM* göni çyzykda ýatany üçin *LOM* grana hem degişli. *A* nokat bu iki tekizligiň ikisine-de degişli. Şonuň üçin, *b* tekizlik *LOM* tekizligi *AX* göni çyzyk boýunça, *LOM* grany bolsa *AB* kesim boýunça kesip geçýär. Bu ýerde *B* nokat *AX* we *OM* göni çyzyklaryň kesişme nokady.

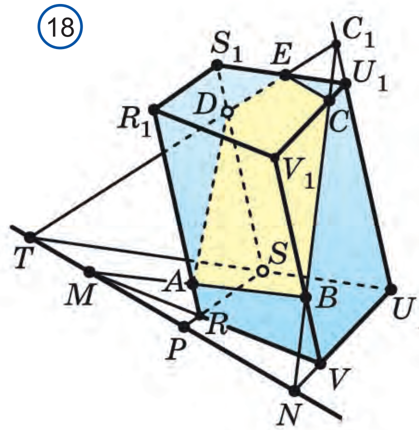
Edil şunuň ýaly, β tekizligiň *OLK* grany kesip geçýän *Y* we *D* nokatlary we *AD* kesigi anyklaýarys. Soňra *Z* we *C* nokatlary we *DC* we *BC* kesikleri anyklaýarys. Netijede, emele gelen *ABCD* dörtburçluk gözlenýän kesikden ybarat bolýar.

3-nji mesele. *A, B* we *C* dörtburçly prizmanyň dürli granlaryndaky nokatlary.

17



18

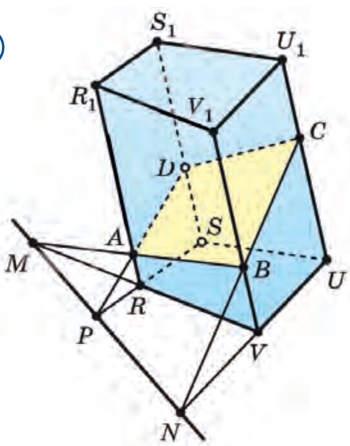


Prizmanyň ABC tekizlik bilen kesigini tapýarys (17-nji surat).

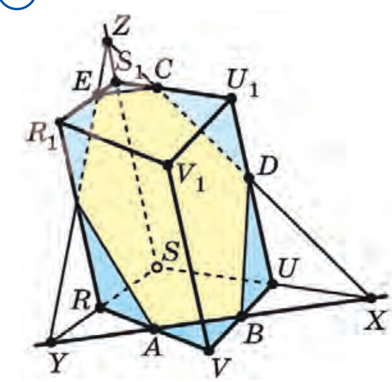
Gözlenýän kesik A, B we C nokatlaryň dörtburçly prizmanyň haýsy granlarynda we nähili ýatýanlygyna bagly bolýar. 17-nji suratda A, B we C nokatlaryň bir depesinden çykýan granlarda ýatýan iň ýönekeý ýagdaý görkezilen.

18-nji suratda görkezilen ýagdaýda kesigi gurmak çylşyrymlyrak iş hasaplanýar. Galan ýagdaýlardaky kesikler aşakdaky 19-njy we 20-nji suratlarda getirilen. Görşümiz ýaly, kesik üçburçluk, dörtburçluk, bäşburçluk we altyburçlukdan ybarat bolýar. Şu kesikleriň gurulyşyny özbaşdak derňäň.

19



20

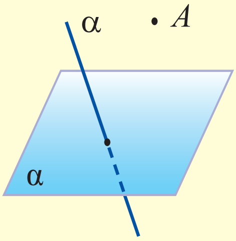
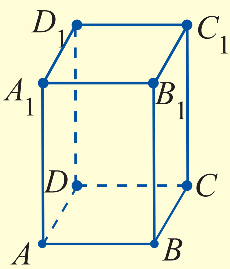
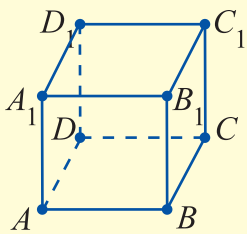
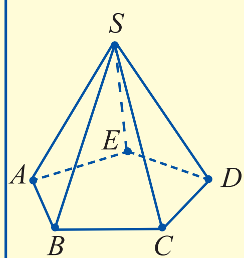


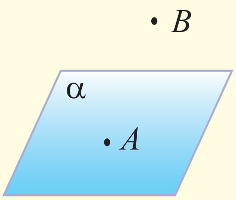
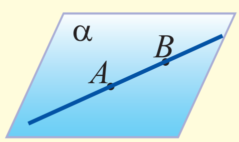
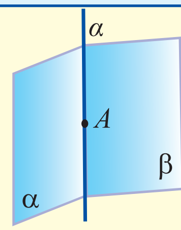
Tema degişli soraglar

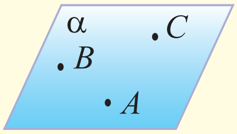
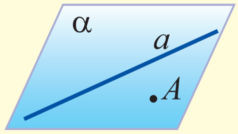
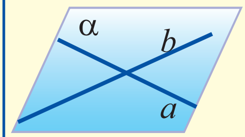
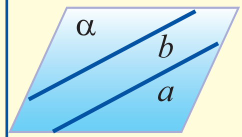
1. *Köpgranlygyň kesigi diýip nämä aýdylýar?*
2. *Köpgranlygyň kesigi nähili şekil bolmagy mümkin?*
3. *Bir tekizligiň ikinji tekizlikdäki yzy diýip nämä aýdylýar?*
4. *Dörtburçly köpgranlygyň kesigi nämeler bolmagy mümkin?*

9 AMALY GÖNÜKMELER WE OLARYŇ ULANYLYŞY

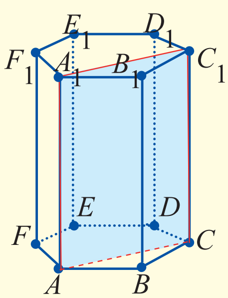
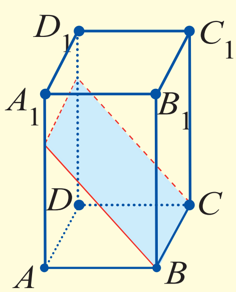
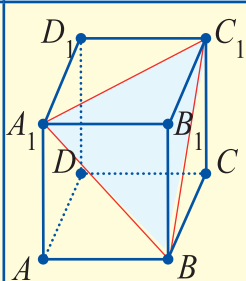
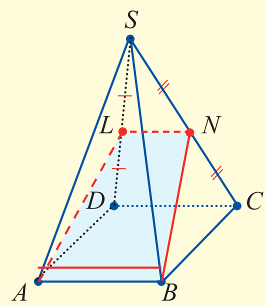
3.0. Aşakdaky 3-nji bölüm boýunça daýanç nazary maglumatlary gaýtalaň. Olar size geçilenleri umumylaşdyrmak we amaly gönükmeleri ýerine ýetirmäge kömek edýär.

Esasy şekiller	Köpgranlyklar		
	Gönüburçly parallelepiped	Kub	Piramida
			
A nokat, α göni çyzyk, *a* tekizlik	Esaslary – gönüburçluklar, granlary – gönüburçluklar	Esaslary – kwadratlar, granlary – kwadratlar	Esasy – köpburçluk, granlary – üçburçluk

Stereometriýanyň aksiomalary we olardan gelip çykýan netijeler		
		
Tekizlikde oňa degişli bolan we degişli bolmadyk nokatlar bar.	Eger göni çyzygyň iki nokady bir tekizlikde ýatsa, onda onuň ähli nokatlary şu tekizlikde ýatýar.	Eger iki tekizlik umumy nokada eýe bolsa, onda olar şu nokatdan geçýän umumy göni çyzyga-da eýe bolýar.

			
Bir göni çyzykda ýatmadyk üç nokat arkaly	Göni çyzyk we onda ýatmadyk nokat arkaly	Kesişýän iki göni çyzyk arkaly	Parallel iki göni çyzyk arkaly
... bir we diňe bir tekizlik geçirmek mümkin			

a) jedwelde käbir köpgranlyklaryň ýönekeý kesikleri berlen. Olara ünsli garap, bu kesikleriň nähili alynýandygyny düşündiriň.

Köpgranlyklaryň ýönekeý kesimleri			
Köpburçlukly prizma	**Gönüburçly parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
			
$ACC_1 – A, C, C_1$ nokatlardan geçýän, kesiji tekizlik. ACC_1CA_1 – kesik.	CBK – K nokat we CB göni çyzykdan geçýän, kesiji tekizlik, $CBKM$ – kesim.	A_1BC_1 – BC_1 we BA_1 göni çyzyklardan geçýän, kesiji tekizlik, ACC_1CA_1 – kesik.	ABN – AB we LN parallel göni çyzyklardan geçýän, kesiji tekizlik, $ABNL$ – kesik.

b) jedweliň çep sütüninde tekizlikdäki, sag sütüninde bolsa giňişlikdäki geometrik şekilleriň bir-birine meňzeş käbir häsiýetleri getirilen. Olary göz öňüňize getiriň we nähili meňzeşlige eýe bolýandygyny anyklaň. Ýene tekizlikdäki we giňişlikdäki nähili meňzeşlikleri getirmek mümkin?

Tekizlikde	**Giňişlikde**
Eger göni çyzyklar umumy nokada eýe bolsa, olar şu nokatda kesişýär.	Eger tekizlikler umumy göni çyzyga eýe bolsa, olar şu göni çyzyk boýunça kesişýär.
Tekizligiň haýsy-da bolsa bir nokadyndan çäksiz köp göni çyzyk geçirmek mümkin.	Giňişligiň haýsy-da bolsa bir göni çyzygyndan çäksiz köp tekizlik geçirmek mümkin.
Göni çyzykda ýatmaýan nokat arkaly berlen göni çyzyga parallel bir we diňe bir göni çyzyk geçirmek mümkin.	Tekizlikde ýatmadyk göni çyzyk arkaly berlen tekizlige parallel bir we diňe bir tekizlik geçirmek mümkin.
Bir göni çyzyga parallel göni çyzyklar özara paralleldir.	Bir tekizlige parallel tekizlikler özara paralleldir.

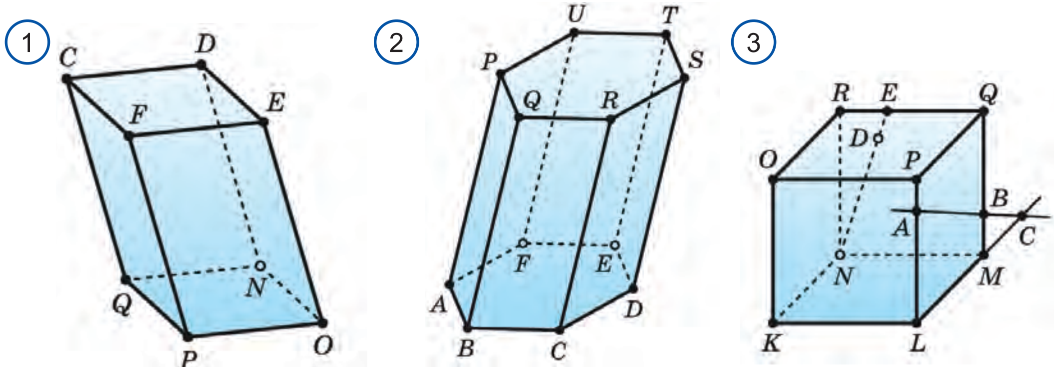
3.1. Giňişlikde a) iki göni çyzyk; b) göni çyzyk we tekizlik; ç) iki tekizlik näçe umumy nokada eýe bolmagy mümkin?

3.2. Giňişlikde a) iki göni çyzyk; b) göni çyzyk we tekizlik; ç) iki tekizlik; d) üç tekizlik ýeke-täk umumy nokada eýe bolmagy mümkinmi?

3.3. 1-nji suratda *NOPQDEFC* parallelepiped görkezilen. a) *CD* göni çyzyk bilen kesişýän göni çyzyklary; b) *FP* göni çyzyk bilen kesişýän göni çyzyklary; ç) *CD* göni çyzyga parallel göni çyzyklary; d) *FP* göni çyzyga parallel göni çyzyklary; e) *CD* göni çyzyk bilen atanaklaýyn göni çyzyklary; f) *FP* göni çyzyk bilen atanaklaýyn göni çyzyklary aýdyň.

3.4. 2-nji suratda esasy altyburçluk bolan *ABCDEFPQRSTU* parallelepiped görkezilen. a) *ABC* tekizlik bilen kesişýän göni çyzyklary; b) *UTF* tekizlik bilen kesişýän göni çyzyklary; ç) *PTR* tekizlikde ýatýan göni çyzyklary; d) *CDR* tekizlige degişli göni çyzyklary; e) *FEC* tekizlige parallel göni çyzyklary; f) *AQB* tekizlige papallel göni çyzyklary aýdyň.

3.5. 1-nji suratdaky *NOPQDEFC* parallelepipedde: a) *CQ* göni çyzyk bilen kesişýän tekizlikleri; b) *OP* göni çyzyk bilen kesişýän tekizlikleri; c) *NO* göni çyzyk ýatýan tekizlikleri; d) *DN* göni çyzyk degişli bolan tekizlikleri; e) *CF* göni çyzyga parallel tekizlikleri; f) *EO* göni çyzyga parallel tekizlikleri aýdyň.



3.6. 2-nji suratda esasy altyburçluk bolan *ABCDEFPQRSTU* parallelepiped görkezilen. a) *UQR* tekizlik bilen kesişýän tekizlikleri; b) *FT* göni çyzyk bilen kesişýän tekizlikleri; c) *ACE* tekizlige parallel tekizlikleri; d) *ETS* tekizlige parallel tekizlikleri aýdyň.

3.7. 3-nji suratdan peýdalanyp, a) *LMQ* we *NME* tekizliklerde ýatýan nokatlary; b) *NR* göni çyzyk ýatýan tekizlikleri; c) *BC* göni çyzygyň *KLN* tekizlik bilen kesişme nokatlaryny; d) *PL* we *ND* göni çyzyklaryň *OPR* tekizlik bilen kesişme nokatlaryny; e) *KON* we *KLM* tekizlikler kesişýän göni çyzygy; f) *PDQ* we *MNK* tekizlikler kesişýän göni çyzygy; g) *AB* we *LM* göni çyzyklaryň kesişme nokadyny; h) *BQ* we *MC* göni çyzyklaryň kesişme nokadyny aýdyň.

3.8. Bir göni çyzykda ýatýan üç nokatdan tekizlik geçirmek mümkinligini subut ediň. Şeýle tekizlikleriň sany näçe?

3.9. *A, B, C* we *D* nokatlar bir tekizlikde ýatmaýar. *AB* we *CD* göni çyzyklaryň kesişmeýändigini subut ediň.

3.10. Berlen iki göni çyzygyň kesişen nokadyndan bu göni çyzyklar bilen bir tekizlikde ýatmaýan göni çyzyk geçirmek mümkinmi? Jogabyňyzy esaslandyryň.

3.11. *A, B, C* nokatlar iki dürli tekizligiň her birinde ýatýar. Bu nokatlaryň bir göni çyzykda ýatýandygyny subut ediň.

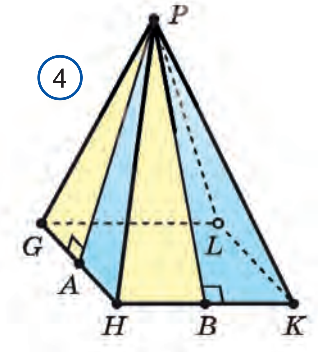
3.12. Göni çyzyk arkaly iki dürli tekizlik geçýändigini subut ediň.

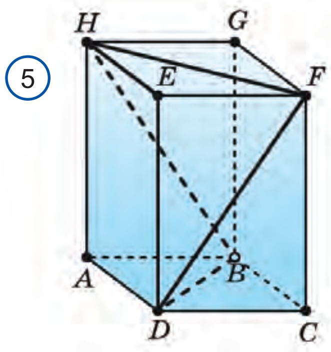
3.13. *a* we *b* göni çyzyklar bir tekizlikde ýatmaýar. *a* we *b* göni çyzyklara parallel *c* göni çyzyk geçirmek mümkinmi?

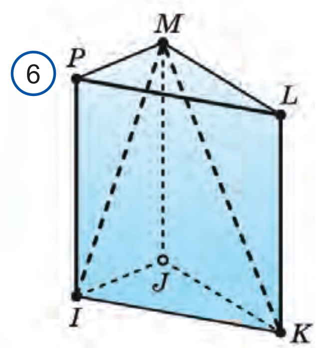
3.14. Eger tekizlik iki parallel göni çyzykdan birini kesip geçse, ol ikinjisini hem kesip geçýändigini subut ediň.

3.15. Iki atanaklaýyn göni çyzyklardan islendik biri arkaly ikinjisine parallel tekizlik geçirmek mümkinligini subut ediň.

3.16. ABC üçburçluk berlen. AB göni çyzyga parallel tekizlik bu üçburçlugyň AC tarapyny A_1 nokatda, BC tarapyny B_1 nokatda kesip geçýär. A_1B_1 kesimiň uzynlygyny tapyň. Munda: a) $AB = 15$ sm , $AA_1 : AC = = 2 : 3$; b) $AB = 8$ sm, $AA_1 : AC = 5:3$; c) $B_1C = 10$ sm, $AB : BC = 4:5$; d) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C_1 = c$.







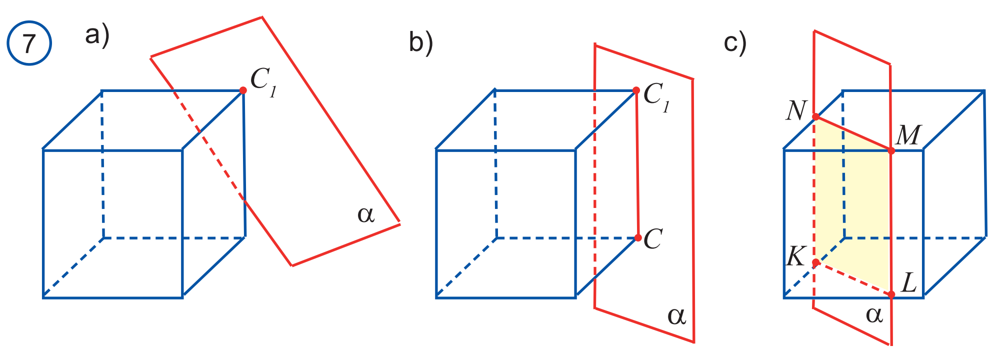
3.17. 4-nji suratda dörtburçly dogry piramida berlen. PA we PB – piramida PGH we PHK granlarynyň beýiklikleri bolsa, $\Delta PGA = \Delta PHB$ bolýandygyny subut ediň.

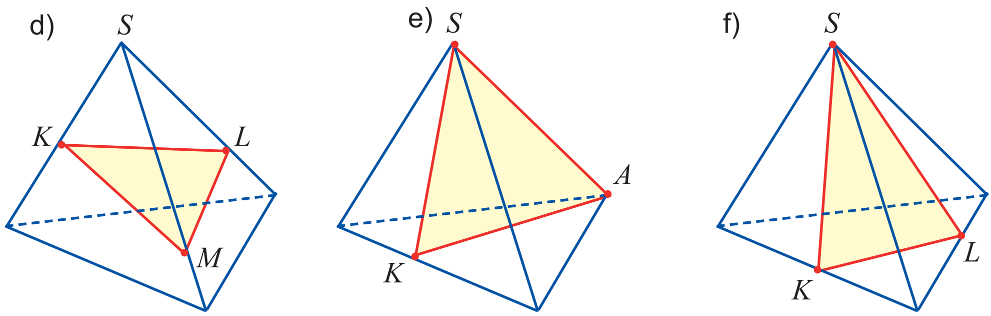
3.18. $ABCDHGFE$ gönüburçly parallelepipediň (5-nji surat) gapdal grany 8 sm -e, esasy tarapy 6 sm-e deň kwardatdan ybarat. Giňişlikdäki $HFDBH$ döwük çyzygyň uzynlygyny tapyň.

3.19. $IJKPML$ üçburçly dogry prizmanyň (6-njy surat) esasy grany we gapdal granynyň uzynlyklary 2:3 gatnaşykda. Eger $IPLKMI$ giňişlikdäki döwük çyzygyň uzynlygy $16+4\sqrt{13}$-e deň bolsa, prizmanyň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

3.20. Esasy kwadrat bolan gönüburçly parallelepipediň gapdal üsti 12 sm^2 -a deň. Esasynyň diagonaly $\sqrt{2}$ bolsa, gapdal granynyň diagonalyny tapyň.

3.21. 7-nji suratda getirilen ýagdaýlarda giňişlikdäki şekilleriň nähili kesimi görkezilenligini düşündiriň.





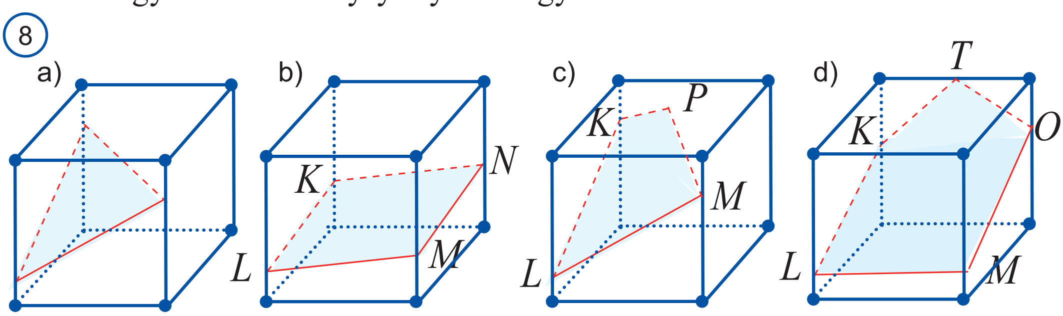
3.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubuň AD we CD granlarynda M we N nokatlar berlen. Kuby MNB_1 tekizlik bilen kesende emele gelýän kesigi guruň.

3.23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kuby çyzyň we AB, BC we BB_1 granlarynyň ortalary bolan M, N we L nokatlary belgiläň. a) kuby MNL tekizlik bilen kesende emele gelýän kesigi guruň; b) MNL üçburçlugyň dogry bolýandygyny subut ediň; c) kubuň grany 1 sm bolsa, MNL üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

3.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ gönüburçly parallelepipediň granlary AB = 6 sm, AD = 6 sm we AA_1 = 8 sm. Parallelepipediň BC_1D tekizlik bilen kesigi deňýanly üçburçluk bolýandygyny subut ediň we bu üçburçlugyň beýikligini tapyň.

3.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmany çyzyň . Prizmanyň AD, AA_1 we DD_1 granlarynyň ortalary bolan M, N we L nokatlardan geçýän tekizlik bilen kesigini guruň.

3.26. Kuby tekizlik bilen kesende kesimde 8-nji suratda görkezilen haýsy ýagdaýlar bolmagy mümkin? Haýsylary bolmagy mümkin däl?

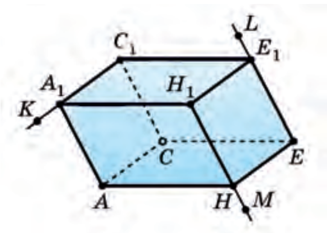


3.27. 9-njy suratda berlen maglumatlar esasynda a) K, L we M; b) A, B we C; c) A, B we C nokatlardan geçýän giňişlikdäki şekilleriň degişli kesiklerini guruň.

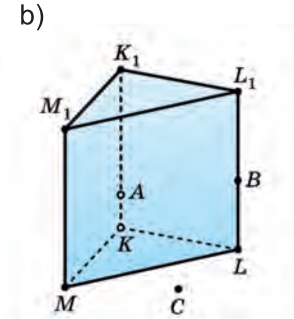
3.28. $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ prizmanyň MM_1, M_1P_1 we M_1T_1 granlarynda ýatýan A, B we C nokatlar alnan (10-njy surat). Prizmanyň ABC tekizlik bilen kesigini guruň.

3.29. Berlen maglumat esasynda 11-nji suratda U, V we W, 12-nji suratda A we B nokatlardan geçýän giňişlikdäki şekilleriň degişli kesiklerini guruň.

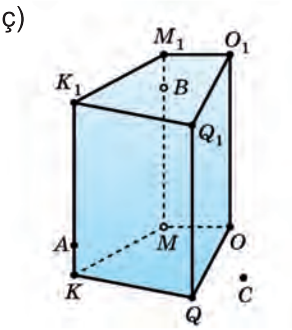
9 a)



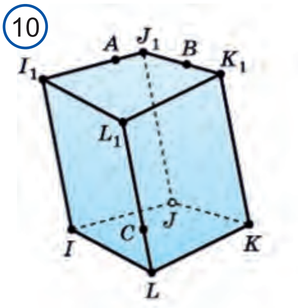
b)



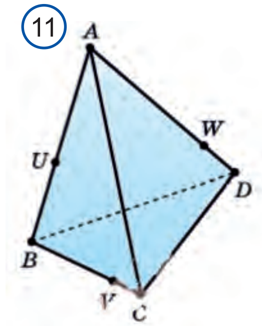
ç)



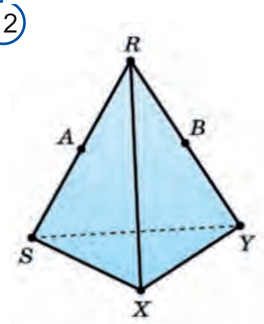
10



11



12



Ulanmalar we amaly kompetensiýalary şekillendirmek

1. Näme sebäpden haýsy-da bolsa bir ymarat üçin çukur gazmazdan öň belgileme işleri dartyp çekilen ýüpüň kömeginde ýerine ýetirilýär?

Jogaby: iki tekizligiň kesişmesi göni çyzykdan ybarat bolýar.

2. Kerpiç guýmak prosesinde galyba laý salnyp, tekis agaç bölegi galybyň üstünde ýöredilip, laýyň artykmaç bölegi süpürip alyp taşlanýar. Munda näme sebäpden kerpijiň üsti tekiz çykýar?

3. Ýasalan stuluň aýaklary bir tekizlikde ýatýandygyny barlamak üçin neçjarlar stuluň garşylykly aýaklaryna ýüp çekip barlaýar. Bu usuly ulanyp görüň we onuň nämä esaslanandygyny aýdyň.

Jogaby: iki kesişýän çyzyk ýeke-täk tekizligi anyklaýar.

4. Bir bölek agaç tagtany byçgylanda, neçjar byçgylanýan üstüň tekiz bolmagyny nähili gazanýar?

Jogaby: agaç tagtanyň iki goňşy granlaryna AB we AC kesimleri çyzýar we byçgynt mümkingadar şu kesimlerden geçýän edip byçgylamagy ýerine ýetirýär. Netijede, iki kesişýän göni çyzyklardan geçýän tekizlik ýeke-täk bolanlygy üçin byçgylanan üst tekiz çykýar.

5. Fotoapparaty ornaşdyrmak üçin niýetlenen gurluş näme sebäpden üç aýakly edip ýasalýar?

Jogaby: bir göni çyzykda ýatmadyk üç nokatdan diňe bir tekizlik geçýär.

6. Neçjar işläp taýýarlan tagtanyň üstüniň tekizligini nähili barlaýar. Bu usul nämä esaslanan?

Jogaby: eger göni çyzygyň iki nokady tekizlikde ýatsa, onuň özi-de bütinligine şu tekizlikde ýatýar.

7. Näme sebäpden üç aýakly motosikl iki aýaklysyna garanda ep-esli durnukly bolýar? *Jogaby: bir göni çyzykda ýatmadyk üç nokatdan diňe bir tekizlik geçýär.*

8. Näme üçin açyk gapylar şemal aralygynda öz ýagdaýyça herekete gelýär? Näme sebäpden bu ýapyk gapylar bilen şeýle bolmaýar?

Jogaby: göni çyzyk we onda ýatmadyk nokatdan diňe bir tekizlik geçirmek mümkin.

9. Kesigi – tarapy 7 dm bolan kwadratdan ybarat, beýikligi 4 m bolan 18 sany sütünleri gurmak üçin näçe kerpiç gerek bolar? (Kerpijiň ölçegleri: 1:1,5:3 dm. Gurmak prosesinde 5 % kerpiç çykynda gidýär). *Jogaby:* 8200 *sany.*

Jogaplar we görkezmeler

1.23. *AB//CD*. **1.24.** $7\frac{2}{3}$ sm, $8\frac{2}{3}$ sm. **1.25.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sm. **1.26.** 14 sm. **1.27.** $8\sqrt{3}$ sm. **1.28.** 17 sm. **1.29.** 24 sm. **1.30.** 4,8 sm. **1.31.** 18 sm.

2.6. 256 m^2. **2.8.** $(11+\sqrt{3})$ sm^2. **2.9.** a) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; b) 1200; 1400; c) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; d) 2000; 2000+640 tg 54°. **2.10.** a) $6\sqrt{13}$ sm; $18\sqrt{3}$ sm; b) $405\sqrt{3}$ sm^2; c) $648\sqrt{3}$ sm^2. **2.11.** a) $2\sqrt{82}$ sm; $2\sqrt{73}$ sm; b) $48\sqrt{73}$ sm^2; c) $144+48\sqrt{73}$ sm^2. **2.12.** a) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ m; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ m; b) 192 m^2; c) 282 m^2; **2.13.** a) 5 m; $\sqrt{89}$ m; b) $8(5+\sqrt{34})$ m^2; c) $8(11+\sqrt{34})$ m^2. **2.14.** a) 13 sm; 12 sm; b) 360 sm^2; c) $30(12+5\sqrt{3})$ sm^2. **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3)$ sm^2. **2.17.** a) 168π sm^2; b) 168π sm^2; c) $2{,}4\pi$ m^2; d) $1{,}68\pi$ m^2. **2.18.** 625π sm^2. **2.19.** 252π m^2. **2.20.** π^2 m^2. **2.21.** 4 sm; 16 sm. **2.22.** 2,11 l. **2.23.** 4,83 m^2. **2.24.** 37 mm. **2.25.** 1040π sm^2. **2.26.** a) 75π sm^2; b) 288π dm^2; c) $6{,}25\pi$ m^2. **2.28.** a) 88π sm^2; b) 88π sm^2; c) 540π dm^2; d) $3{,}24\pi$ m^2;

3.18. $\sqrt{10}$ sm. **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ sm. **3.20.** 72 dm^2. **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ m^2.

Dersligi düzmekde peýdalanylan we goşmaça öwrenmäge hödürlenýän okuw-usuly edebiýatlar we elektron resurslar

1. A. A’zamov, B. Haydarov. "Matematika sayyorasi". Toshkent. «O‘qituvchi», 1993.
2. Y. Saitov «Matematika va matematiklar haqida». Toshkent. «O‘qituvchi», 1992.
3. Yosh matematik qomusiy lug‘ati. Toshkent. «O‘zbekiston ensiklopediyasi», 1991.
4. S.I. Afonina Matematika va go‘zallik, Toshkent, «O‘qituvchi», 1986.
5. R.K. Otajonov Geometrik yasash metodlari, Toshkent, «O‘qituvchi», 1982.
6. X. Norjigitov, Ch. Mirzayev Stereometrik masalalarni yechish. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma.-Toshkent, 2004 y.
7. I. Israilov, Z. Pashayev Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism. Toshkent, «O‘qituvchi», 2005 y.
8. А.В. Погорелов "Геометрия 10–11", учебник, Москва. "Просвешение", 2009.
9. С. Атанасян "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва. "Просвешение", 2002.
10. Я.И. Перельман Қизиқарли геометрия, Тошкент. "Ўқитувчи", 1981.
11. Б. А. Кордемский Математическая смекалка. Москва. «Наука», 1991.
12. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
13. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
14. О.Я. Билянина и др. "Геометрия 10" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
15. А.Д. Александров "Геометрия – 10–11", учебник, Москва. "Просвещение", 2013.
16. C. Daniel Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
17. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
18. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
19. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
20. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
21. http://www.school.edu.ru – Umumta’lim portali (rus tilida).
22. http://mathc.chat.ru – Matematik kaleydoskop (rus tilida).
23. http://www.problems.ru Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida);
24. http://www.pdmi.ras.ru/~olymp – Matematikadan olimpiada masalalari (rus tilida).
25. http://www.ixl.com – Masofadan turib o‘qitish sayti (ingliz tilida).
26. http://www.mathkang.ru – "Kenguru" xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA 10
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI
GEOMETRIYA
I QISM

(Turkman tilida)
O‘rta ta‘lim muassasalarning 10-sinf o‘quvchilari uchun darslik
1- nashr

Terjime eden	K.Hallyýew
Redaktor	J.Metýakubow
	Ý. Inagomow
Tehredaktor	K. Madiarow
Kompýuterde sahaplaýjy:	S.Gofurow

Nashriyot litsenziyasi AI № 296. 22.05.2017
Çap etmäge 24.10.2017 da rugsat edildi. Möçberi 70×100 1/16
«TimesNewRoman» garniturasy. Göwrümi: 9,0 çap listi. Neşir listi. 9,0. 1018 nusgada çap edildi.

Original-maket «Extremum-press» JÇJ-de taýýarrlandy. 100053, Daşkent ş. Bagişemal köçesi, 3. Tel: 234-44-05

Özbegistanyň Metbugat we habar agentliginiň «O‘qituvchi» neşirýat-çaphana döredijilik öýüniň çaphanasynda çap edildi.
100206, Daşkent ş. Ýunusabat, Ýangişäher köçesi, 1.
Buýurma № 232-17.