М. АҲАДОВА

БЕРУНИЙ ВА УНИНГ МАТЕМАТИКАГА ОИД ИШЛАРИ

ЎЗБЕКИСТОН ССР „ФАН“ НАШРИЁТИ
ТОШКЕНТ—1976

001
А 97

Ушбу рисолада энциклопедист олим Абу Райҳон Беруний-нинг яшаган даври ва таржимаи ҳоли ҳақида қисқача маълумот берилади, шунингдек унинг рус ва ўзбек тилларида нашр этилган „Осори боқия“, „Ҳиндистон“, „Геодезия“, „Ҳинд рошикалари ҳақида“, „Қонуни Масъудий“ ва бошқа асарларидаги математик маълумотлардан қисқача намуналар келтирилади.

Рисола кенг китобхонлар оммасига мулжалланган.

Масъул муҳаррир:
А. Аҳмедов

А $\frac{20201-507}{355(06)-76}$ 136—76

БЕРУНИЙНИНГ ҲАЁТИ ВА ИЛМИЙ ФАОЛИЯТИ

Абу Райҳон Муҳаммад ибн Аҳмад Беруний, Хоразм областининг қадимий шаҳарларидан бири бўлган Кот (ҳозирги Беруний) шаҳрида 973 йил 4 сентябрда туғилган. Унинг болалик ва ёшлик даври Котда ўтди. Кот шаҳри Ўрта Осиёнинг феодализм давридаги энг маданий ва бой марказий шаҳарларидан бири эди.

X аср охирларида Хоразм икки қисмга бўлинган бўлиб, Жанубий Хоразм—маркази Кот, Шимолий Хоразм—маркази Урганч шаҳри эди. Бу даврда Хоразмнинг Шарқий Европа мамлакатлари билан савдо ва маданий алокалари тараққий этган, умуман, Хоразм давлатининг гуллаган даври эди. Кот ва Урганчда жуда кўп машҳур олимлар фаннинг турли соҳаларида чуқур ва кенг илмий иш олиб борганлар. 995 йилда Урганч амири Маъмун Хоразмнинг барча қисмларини ягона давлатга бирлаштирди.

Беруний Маъмун II ҳукмдорлиги даврида Котда ташкил этилган «Донишмандлар уйи» («Академия») да машҳур файласуф, табиийётшунос, табиб Ибн Сино, файласуф Абу Саҳл Масихий, олим ва табиб Абул-Хасан Ҳаммор ва бошқалар билан иш олиб борган.

Хоразмда фан ва маданиятнинг тараққиёти Берунийнинг ҳам фан асосларини эгаллашига катта таъсир этди.

Беруний математика, астрономия, география ва фалсафа фанларини чуқур ўрганди, фаннинг бу соҳалари бўйича кенг илмий текширишлар олиб борди. Бу даврда феодал Шарқ давлатларида аниқ фанлар, хусусан, астрономия фани бирмунча ривожланган эди. Кот, Урганч, Самарқанд ва бошқа шаҳарларда астрономия мактаблари ташкил қилиниб, расадхоналар қурилганди.

Берунийнинг математика ва астрономиядан биринчи устози Абу Наср ибн Ироқ ҳисобланади. У Беруний билан Евклид геометрияси ва Птолемей астрономиясидан машғулотлар ўтказар ва турли ҳисоблаш методларини ўргатар эди.

Беруний машҳур хоразмлик олим, математик ва астроном Муҳаммад Хоразмий асарларини мутолаа қилар эди. Хоразмий асарлари Берунийнинг математика ва астрономия фанларига бўлган қизиқишини янада оширган эди.

Беруний ёшликдан меҳнатсевар бўлиб, кўп вақтини турли кузатишлар билан ўтказар эди. У, ёшлик чоғида астрономик асбоб — девор квадрантини ясади, Хоразмнинг турли жойлари координатларини аниқлаш билан шуғулланди. 995—996 йилларда Кот шаҳрида диаметри 15 зироъ[1] бўлган доира ва бошқа асбоблар билан астрономик ўлчашлар олиб борди. 995 йилда Беруний Гургон шаҳрига кўчди. Бу жойда у ўзининг биринчи энг катта асари «Ал-осору-л-боқия, ани-л-қуруни-л-холия» («Қадимги халқлардан қолган ёдгорликлар») номли китобини 27 ёшида ёзиб тамомлади.

Беруний бу асарида Шарқ мамлакатлари халқларининг календарлари ва унга боғлиқ фан ва маданият ҳақида кўп фактларни баён этди. Тезда Берунийнинг шуҳрати бутун Шарққа ёйилди.

1010 йилда Хоразм шоҳи Берунийни Хоразмга чақирди ва уни ўзига фан соҳасидаги асосий маслаҳатчиси қилиб тайинлади.

Беруний Маъмун «Академия» сининг асосий аъзоси хисобланиб, унда 7 йил илмий иш олиб борди ва жуда кўп фан масалаларини ҳал қилди. Хоразм 1017 йилда золим шоҳ Султон Махмуд томонидан босиб олинди. Олимларнинг кўпи кувғинликка учради. Шу жумладан, Ибн Сино Гургонга яширинди, Беруний асирликка олиниб, Ғазна шаҳрига юборилди. У ерда Султон Маҳмуд олим Берунийни Маҳмуднинг хоҳишига қараб иш олиб боришига ва унга бўйсунишига мажбур қилган бўлса ҳам, Беруний машаққатларини енгиб, қийинчиликларга бардош берди ва илмий-ижодий ишларини давом эттирди. Бу йилларда у астрономия тўғрисида ва планеталар ҳаракати ҳақида китоблар ёзди.

Берунийнинг фан соҳасидаги шон-шухрати бугун Шарқ мамлакатларига ёйила бошлади.

---

[1] *Зироъ* — узунлик ўлчам бирлиги, 49 *см* чамасида.

Султон Маҳмуднинг пойтахти Ғазна бўлиб, у Ҳиндистоннинг шимолий ва ғарбий территориясини ҳам ўз мамлакатига қушган эди. Беруний 10 йил Ҳиндистонда яшади. У ҳинд халқларининг маданияти ва фани, турмуши ва адабиётига жуда қизиқди, уни ўргана бошлади, санскрит тилини ўрганди, бир қанча ҳинд олимларининг асарларини араб тилига таржима қилди. Грек математикларининг улмас асарлари ҳисобланган Евклиднинг «Негизлар» ва Птолемейнинг «Алмагест» номли асарини санскрит тилига таржима қилди. Тўплаган материалларига асосланиб 1031 йилда ўзининг машҳур «Ҳиндистон тарихи» номли китобини ёзиб тугатди.

Ҳиндистоннинг машҳур жамоат арбоби, собиқ бош министри Жавоҳарлаъл Неру ўзининг «Ҳиндистоннинг кашф этилиши» асарида ҳинд фани, маданияти, тарихи ҳақида қимматли фикрларини тарих саҳифаларига ёзиб қолдирган олим Берунийни ҳурмат ва эҳтиром билан тилга олади.

«Беруний,— деб ёзади Неру,— грек фалсафасини билиб олиб, ҳинд фалсафаси билан танишиш учун санскрит тилини ўрганди». Беруний ҳинд ва грек фалсафасини бир-бири билан солиштириб, улардаги умумийликни куриб ҳайратда қолди. Берунийнинг китоблари фақат фактик материалларнигина эмас, балки уруш, талон-торож, оммавий қирғинлар булишига қарамай, фан аҳллари ўз ишларини давом эттирганликларини кўрсатиб берди. Икки халқ орасини нафрат ва худбинлик кайфиятлари бузиб турган пайтларда ҳам Беруний бегона миллат одами бўла туриб, бу ўлка кишилари аҳволини тушунишга ҳаракат қилди.

Беруний Ғазна ва Ҳиндистонда яшаб турган вақтларида ҳам ўз она ватани билан алоқада бўлди. Буни шу билан исботлаш мумкинки, унинг 1029—1034 йиллар орасида ёзган «Китоб ат-тафҳим ла-аваил санъат ат-танжим» («Астрономиядан асосий бошланғич маълумотларни тушунтирувчи китоб») асари унинг хоразмлик дўсти Ҳасаннинг қизи Райҳонага бағишланган.

Беруний ўзининг ўлмас асари «Қонуни Масъудий» ни ёзиш билан астрономиянинг уз замонигача булган ютуқларини тўплаб фан тарихида ёзиб қолдирди. Беруний бу асарини ёзишда қадим замонлардан бошлаб, то у ни яшаган давргача бўлган математика ва астрономия фанларининг тараққиёти билан танишиб чиқди. Бу асарда, асосан астрономия ва математика, тригонометрия бўлими баён этилган.

Булардан ташқари, Беруний бир қанча бошқа асарлар ёздики, улар орасида астрономияга тегишли «Қуёш ҳаракатини текшириш», «Астролябия ҳақида рисола», «Ой ҳақида рисола», «Фарғонийнинг астрономик текширишлари», «Ҳинд астрономлари саволларига жавоблар», «Хоразмийнинг астрономик ишлари ҳақида», «Планисфера ҳақида рисола» ва бошқа асарлари, математика фанининг кўп бўлимларига тегишли «Тригонометрик функцияларни соддалаштириш», «Юлдузларни текисликда тасвирлаш», «Сфера нуқталарини текисликда тасвирлаш», «Сферик ёйни аниқлаш ҳақида», «Евклид ишларига изоҳлар» асарлари мавжуд.

Беруний томонидан ёзилган бу ажойиб асарлар ва унинг турли табиий фанлар соҳасидаги прогрессив ғоялари Шарқ мамлакатларидаги фан аҳлларига, Беруний замонидан кейинги даврларда яшаган машҳур фан арбобларига жуда катта таъсир курсатди, улар уз илмий ишларида Беруний ғояларидан кенг фойдаландилар; унинг метод ва ғояларини янада кенгайтирдилар.

Астроном, математик, файласуф, шоир Умар Хайём (1048—1131) ўзининг астрономик кузатишларида, озарбайжонлик астроном ва математик Насриддин Тусий (1201—1274) Берунийнинг астрономия ва бошқа соҳалардаги асарларидан кенг равишда фойдаландилар. Беруний ғоялари бу олимлар томонидан давом эттирилди.

Беруний машҳур олим — табиатшунос, табиб Ибн Сино билан бир даврда яшаган, у билан бир қанча вақт бирга ишлаган. Беруний билан Ибн Сино олам тузилиши ҳақида илмий мунозаралар олиб борганларки, булар астрономия ва физика фанлари тарихида катта аҳамиятга эга.

Беруний 1048 йилда Газна шаҳрида (Ҳозирги Афғонистон территориясида) вафот этди. Ўзбек халқининг ажойиб фарзанди, машҳур олим, энциклопедист Беруний ўрта асрларнинг мудҳиш азоб-уқубатлари ва турли қийинчиликларига қарамай, бутун умрини фан ва маданият тараққиёти йулида сарфлади. Беруний фан хазинасини шундай бебаҳо гавҳарлар билан тўлдирдики, бутун инсоният бу билан чексиз фахрланади.

Беруний томонидан астрономия, математика, геодезия, минералогия, геология, фармакология соҳаларида олиб борилган чуқур текширишлар ҳам бу фанлар тарихида жуда катта роль ўйнайди. Унинг асарларида Хоразм халқининг қадимий тарихига тегишли жуда кўп маълумотлар борки, булар Хоразм халқининг фан ва маданият тарихини ўрганишда катта аҳамиятга эга. Беруний Ўрта Осиё халқларининг Ҳиндистон халқлари билан маданий алоқа ўрнатишида ва бу алоқани мустаҳкамлашда катта хизмат қилди. У ўзининг «Ҳиндистон» асари орқали бу ажойиб мамлакатнинг фан ва маданият тарихи билан бутун дунё халқларини таништирди.

Беруний фаннинг турли соҳаларига тегишли 150 дан ортиқ асар қолдирди. Унинг астрономия соҳасида ёзган 70 дан ортиқ асари ўрта аср астрономиясининг энциклопедиясидир. Ажойиб талант эгаси бўлган Беруний ўз текширишларида тажриба ва кузатишларга катта аҳамият берди. Унинг фан соҳасидаги текшириш методлари ҳозир ҳам ўрганилмоқда ва турли табиий фанларга татбиқ этилмоқда.

БЕРУНИЙНИНГ АСОСИЙ АСАРЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ҚИСҚАЧА МАЗМУНИ

1. Беруний ўзининг биринчи катта асари ҳисобланган **«Ал-осорул-боқия ани-л-қуруни-л-холия» («Қадимги халқлардан қолган ёдгорликлар»...)** ни 27 ёшида ёзди. Беруний бу асарни ёзиш учун аввал ўзидан олдин ўтган жуда кўп олимларнинг астрономия, математика, география ва бошқа фанлар соҳаларида эришган ютуқларини қунт билан ўрганди, шунингдек, қадимий халқларнинг ва ўша даврда яшовчи халқларнинг турли астрономик маълумотларини, календарлари, ой, йил ҳисоблаш методларини ўрганди. Бу маълумотларга Беруний танқидий нуқтаи назардан қаради ва айримларини ўзининг кузатиш натижалари билан солиштирди.

Йигирма бир бобдан иборат бу асарнинг эраларнинг бирини бошқасидан келтириб чиқариш бобида турли эраларнинг, масалан, Миср, Бобил, юнон эралари, араб ҳижрий, форс йил санашлари ва бошқа эраларнинг бошланиш даври орасидаги фарқларни кўрсатувчи жадвал келтирилган. Бу жадвал олдида йил санашларнинг бошланишлари орасидаги фарқни кўрсатувчи сонлар ҳинд рақамлари орқали ёзилган. Бунда Беруний 18 446 744 073 709 551 615 сонини ёзадики, бу сон, биринчи ҳади бир ва маҳражи иккидан иборат геометрик прогрессиянинг 61 ҳади йиғиндисидан иборат. Иккинчи томондан, бу сон шахматни ихтиро этиш билан боғлиқ бўлган ҳинд афсонасидаги буғдойларнинг сонига тенгдир. Яъни шахмат тахтасидаги катакларнинг биринчисида битта, иккинчисида иккита, учинчисида тўртта, тўртинчисида саккизта ва ҳоказо буғдойлар қўйиб чиқилади, у вақтда шахмат тахтасидаги ҳамма буғдойлар сони юқоридаги сонга тенг бўлади.

Беруний геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндисини ҳисоблашда жуфт-жуфт сонлар назариясига асосланади. У қуйидаги икки тенгликдан фойдаланиб:

$$(2^n)^2 = 2^{2n}$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots . + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

геометрик прогрессия $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots .$

$+ 2^{63}[[(16)^2]^2]^2 - 1 \doteq 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ топади.

Араб тилида ёзилган бу асар Захау томонидан 1878 йилда арабчада, 1879 йили инглиз тилида Лондонда, форс тилида 1943 йили Теҳронда нашр қилинган.

Бу классик асарни биринчи марта рус тилида тўла равишда 1957 йили Ўзбекистон ССР Фанлар академияси нашр этди (таржимон филология фанлари кандидати М. Салье).

2. Беруний 1031 йилда 80 бобдан иборат **«Ҳиндистон»** номли машҳур асарини ёзиб тамомлади. Бу асарнинг анча қисми астрономия фанининг турли масалаларига бағишланган бўлиб, қолган бўлимларида ҳинд халқларининг география, тарих, филология, астрономия ва бошқа фанлар соҳасида қўлга киритган ютуқлари, диний қоидалари, урф-одатлари баён этилган.

Маълумки, грек олими Птолемей ўз асарларида оламнинг тузилиши ҳақида геоцентрик назарияни берган эди. Бу назарияга асосан оламнинг маркази Ер ҳисобланади, яъни Ер ҳаракатланмасдан туради ва унинг атрофида Ой, Қуёш, юлдузлар ва планеталар билан бирга осмон сфераси айланади, деб ҳисоблар эдилар. Ўрта асрларда ва кейинроқ Шарқ ва Ғарб мамлакатларида олам тузилиши ҳақида шу назария ҳукм сурар эди.

Аммо бу назария билан бирга, жуда қадимий даврлардаёқ унга қарама-қарши бўлган бошқа бир назария ҳам пайдо бўлган эди. Баъзи бир грек олимлари, шунингдек, ҳинд олимлари ҳам оламнинг марказида Қуёш туради, Ер шари эса Қуёш атрофида айланади, деб янги назарияни олга сурдилар. Бу гелиоцентрик назария бўлиб, у XVI асрда поляк астрономи Н. Коперник томонидан илмий равишда асосланди.

Ўрта асрларда дин геоцентрик назарияни эътироф этган эди. Чунки бу назария Ер ҳаракатланмайди деган догмани тасдиқлар, бу назариядан четга чиқиш дин билан низолашишга олиб келар эди.

Беруний олам тузилиши ҳақида кўп маълумотларни ўзининг астрономик асарларида баён этди. У шундай фикрни баён этдики, унга кўра, олам тузилиши ҳақидаги ҳам геоцентрик, ҳам гелиоцентрик назариялар астрономик ҳодисаларни тушунтиришда татбиқ этилиши мумкин. Беруний шу сўзи билан Ернинг ҳаракати борлигига ишонишини кўрсатган. Ер ҳаракатсиз туради, деган назариянинг тўғрилигига шубҳа туғдирди ва шундай қилиб, фанни динга очиқдан-очиқ қарши қўйди.

Беруний VI—VII аср машҳур ҳинд олимлари Ариабҳатта ва Браҳмагупталарнинг астрономик назарияларига алоҳида эътибор берди. Ариабҳатта Ер ҳаракатланади-ю, осмон тинч туради деб ҳисоблар эди. Аммо Ариабҳаттага қарши бу қоидани рад этган олимлар ҳам бор эди. Улар агар, шундай бўлса, Ердан тош ва дарахтлар отилиб кетади ва ўз уяларидан учиб кетаётган қушлар яна қайтиб кела олмайди дер эдилар. Браҳмагупта эса барча нарсалар Ер марказига тортилади, деган қоидани исботлаб, Ариабҳаттага қарши чиққанларнинг келтирган далилларини бекорга чиқарди. Беруний Ариабҳатта ва Браҳмагупталарнинг фикрларига тўла қўшилди. Аммо Беруний бу олимлар яшаган даврда ҳукм сурган геоцентрик назарияга қарши очиқдан-очиқ чиқа олмади. Шу сабабли Беруний, юқорида айтганимиздек, олам тузилиши ҳақида ҳам геоцентрик, ҳам гелиоцентрик назарияларнинг тенг ҳуқуқли эканликлари ҳақида фикр юритди.

Шундай қилиб, Берунийнинг диний фанатизм ҳукм сурган ўрта асрда, ўз кузатишларига асосланиб, гелиоцентрик назарияни ёқлаб чиқиши унинг ўткир ақл эгаси ва жасоратли олим эканлигини кўрсатади. Ўз замонасининг энг илғор кашфиётчиси Беруний Коперникдан беш аср илгариёқ Қуёш системаси тузилишида гелиоцентрик назарияга асосланиш мумкинлигини кўрсатди.

«Ҳиндистон» асарининг XIII ва XVI бобларида арифметикага доир, XV, XXIII в XXIV бобларида эса геометрияга доир масалалар баён этилган.

XIII бобда Беруний ҳиндларнинг шеър тўқишларини, математик масалаларини кўради. Ҳиндлар шеърнинг ҳар бир сатридаги сўз бўғинларининг сони, бу бўғинларнинг қандай бўлишидан қатъи назар бир хил бўлишини талаб қилишдан иборат қоидадан фойдаланганлар.

XVI бобда ҳинд халқлари қўллайдиган ўнлик саноқ системаси ва бу система бўйича сонларнинг 18 хоналик рақамлари учун номлар борлиги ҳақида ёзади. Баъзи ҳиндлар сонларнинг 18 хонасидан сўнг 19 нинг ҳам номи борлигини ва бу саноқнинг охирги чегараси эканлигини таъкидлайдилар. Ҳақиқатда саноқ чегарасига эга эмас. Саноқ фақат амалда чегарасига эга. Бу сон рақамларнинг энг охирги хонасидаги сон ҳисобланади.

XVIII боби айлана узунлигининг диаметрига бўлган нисбатини ҳисоблаш таърихига бағишланган.

Ҳиндларнинг қадимий асарларида «айлана — диаметрнинг учланмаси» деб ёзилади, яъни $\pi=3$ қиймати олинганлиги айтилади. Кейинги ҳинд олимлари эса, юқорида айтилган диаметрнинг учланмасидан кейин каср сон ҳам бўлиши ҳақида ёзадилар. Масалан, ҳинд математиги Браҳмагупта бу каср сон еттидан бирга $\left(\frac{1}{7}\right)$ тенглигини айтади. Бунда Ариабҳатта π учун $\sqrt{10}$ сонини олади ва бу сон иррационал бўлганлигидан айлана ҳам иррационал бўлишини ёзади. .

Ҳинд математиклари Ариабҳатта ва Паулиса π сонини ҳисоблашда уч бутундан сўнг еттидан бир сондан кичикроқ сон бўлишини ёзадилар.

Асарнинг XXIII ва XXIV бобларида ер сиртининг кўринишини аниқлаш соҳасида ҳиндларнинг берган методларини баён этади. Беруний афсонавий Меру тоғининг баландлигини аниқлашга бағишланган масала билан шуғулланади, бу тоғ орқали ҳинд астрономлари ўзларининг нолинчи меридианларини ўтказган эдилар. 66 градусли кенгликдан бу тоғни кўриб бўлмаслик ҳақидаги Ариабҳаттанинг фикрини Беруний исбот қилиб беради.

Беруний бунга боғлиқ бўлган масалаларни жуда аниқ ҳисоблаш йўли билан текшириб: «Синус, ҳатто агар у кичик бўлса ҳам, ёйга тенг бўлиши мумкин эмас», — деб қайд қилади. Бунга фақат ҳисоблаш қулай бўлиши учунгина йўл қўйилади. Синусларни уларнинг ватарига тенг деб, «айлана бўлакларининг бир кардалашган ҳам анча кичик бўлган бўлаклари учун олиш мумкин», деб ёзади.

Бу классик асарнинг Х. Б. Халидов ва Ю. Н. Завадовский бажарган рус тилидаги таржимаси 1963 йилда Тошкентда нашр этилди. Берунийнинг «Ҳиндистон тарихи» асари (араб тилида) Лондонда 1887 йилда нашр қилинган. Унинг инглизча таржимаси 1888 ва 1910 йилларда нашр қилинган.

3. Беруний 1029—34 йиллар орасида ёзган **«Китоб ат-тафхим»** асарига астрономия ва геодезия бўлимларидан ташқари, геометрия ва арифметикага доир бўлимларни киритади. Берунийнинг бу асари унинг бошқа асарларидан фарқ қилади; бошқа асарлари араб тилида ёзилгани ҳолда, олимнинг бу асари ҳам араб, ҳам форс-тожик тилида бизларга етиб келган.

Бу асар, инглизча таржимаси ва арабча қўлёзмасининг факсимилеси билан биргаликда, 1934 йилда Р. Райт томонидан Лондонда, форс-тожик тилидаги варианти 1939 йилда Теҳронда нашр этилди.

«Китоб ат-тафхим» асарининг арабча қўлёзмалари Оксфорд, Берлин ва Париж кутубхоналарида, форс ва тожик тилларидаги қўлёзмалари эса, Тошкентда Шарқшунослик институтида, Британия музейида, Теҳрон миллий кутубхонасида сақланмоқда.

Бу китоб савол-жавоб тариқасида баён этилган. Китобда 533 та савол ва унинг жавоби бўлиб, 119 таси математика фанига оиддир. 1—37-саволлар планиметрияга доир, 38—56-саволлар нисбатлар назариясига, 57—71-саволлар стереометрияга, 72—95-саволлар музика назариясига, 96—108-саволлар арифметикага, 109—115-саволлар алгебра ва ҳарфлар билан ҳисоблашга бағишланган. Қолган саволлар астрономиянинг турли масалаларига, астрология ва геодезияга бағишланган.

Арифметика, алгебра ва сонлар назариясига бағишланган бўлимларининг мундарижаси қисқача шундан иборат. Беруний энг аввал сон тушунчасига таъриф беради: «Сон — бирликлардан иборат тўпламдир». Бу таъриф Евклид томонидан сон учун берилган таърифга ўхшаш, лекин Беруний каср учун ҳам таъриф беради. Бир сонни шартли бўлиш мумкинлигини, масалан, оғирликни, ҳажм ва юзаларни ўлчаш вақтида ўлчов бирликларини бўлиш мумкинлигини ёзади. Беруний 60 лик касрларни ва пул бирликлари, юзаларнинг ўлчов бирликларини тақсимлашдан келиб чиқадиган касрларни таърифлайди.

Бундан кейин натурал сонлар, жуфт ва тоқ сонлар, 2^n шаклидаги жуфт-жуфт сонлар, $2(2m+1)$ шаклидаги жуфт-тоқ сонлар $2^n(2m+1)$ шаклидаги жуфт-жуфт тоқ сонлар таърифлари берилади. Туб ва тузма сонлар, квадрат ва куб сонлар, мукаммал сонлар ва бошқа сонлар кўрилади.

Беруний, „учбурчакли сонлар", яъни $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ шаклидаги сонлар учун ҳиндлар берган ном — „Санкалита" (қушиш), пирамидал сонлар, яъни

$$1+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\frac{4\cdot 5}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$$

шаклидаги сонлар учун „Санкалита-санкалита" (квадратларни қўшиш) номини келтиради. Шунингдек,

$$1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

шаклидаги сонлар учун „варти санкалита" (квадратларини қушиш),

$$1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left|\frac{n(n+1)}{2}\right|^2$$

шаклидаги сонлар учун „ткана санкалита" (кубларни қушиш) номини келтиради.

Баён этилган сонлар назариясига доир бу маълумотлардан сунг Беруний арифметика масалаларига ўтади. Сонлар устида амаллар: кўпайтириш, бўлиш, квадрат ва кубга кўтариш, квадрат ва кубга илдизлар чиқариш, касрларни умумий маҳражга келтириш ва бошқалар баён этилади.

Бундан сўнг алгебраик амаллар: алжабр ва алмуқобала таърифлари, квадрат тенгламаларнинг турлари, уларни ечиш усуллари баён этилади.

Геометрия, нисбатлар назарияси ва стереометрияга доир бўлимларда эса қуйидагилар баён этилган. Беруний энг аввал геометрия фанига таъриф беради: геометрия, миқдорлар ва уларнинг бир-бирига сонли муносабатлари ҳақидаги фан, уларнинг шаклларининг хоссалари ва типлари ҳақидаги таълимотдир. У сонлар ҳақидаги фанни хусусий ҳолдан умумий ҳолга айлантиради.

Сўнгра асосий геометрик тушунчаларга таъриф беради. Евклид аввал нуқта таърифини бериб, энг охирда жисм таърифини берган бўлса, Беруний аввал жисм таърифидан бошлайди. «Жисм, — деб ёзади Беруний,— шундан иборатки, у сезиш орқали аниқланади ва у ўз-ўзича мавжуддир. Жисмнинг чегараси — сирт, сиртнинг четлари — чизиқлар, чизиқнинг охири нуқтадир».

Беруний фазони ўлчаш ҳақида гапириб, олтита томонни — ўлчовнинг йўналишларини аниқлайди. Сўнгра текислик, тўғри чизиқ, бурчаклар, уларнинг турлари, доира ва ундаги чизиқлар, синус ва косинус, учбурчак, унинг турлари ва ундаги чизиқлар, тўртбурчакнинг турлари, параллел тўғри чизиқлар, уларни бир тўғри чизиқ кесганда ҳосил бўлган бурчаклар, уринма, ички ва ташқи чизилган шакллар баён этилади, шунингдек, тўғри чизиқли шаклларнинг юзаларини аниқлаш қоидалари, айлана узунлиги ва доира юзини ҳисоблаш қоидалари берилади.

Беруний параллел чизиқларни бир текисликда ётган эквидистант тўғри чизиқлар шаклида таърифлайдики, бу таъриф Евклиднинг бешинчи постулатига эквивалент ҳисобланади. Аммо Беруний ўз замонасининг бошқа жуда кўп олимлари сингари бешинчи постулатни исботлаш масалалари билан шуғулланмайди.

Стереометрияга доир бўлимида куб, призма, цилиндр, конус, шар, шар бўлаклари, сферик шакллар, уларнинг сиртлари ва ҳажмларини аниқлаш қоидалари берилган. Шунингдек, бу бобда конус кесимларидан иборат иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг ҳосил қилиниши, яъни конусни турли вазиятдаги текисликлар билан кесганда кесимда айлана, эллипс, гипербола, парабола ва тўғри чизиқ ҳосил бўлиши ҳақида маълумотлар бор.

Беруний шар ичида беш хил мунтазам кўпёқлилар ясаш мумкинлигини айтиб, бу кўпёқлиларга турли хил исмлар беради:

1) Ёқлари олтита квадратдан иборат кўпёқли жисм (куб)ни «арзий», яъни ерники деб,

2) ёқлари йигирмата тенг томонли учбурчаклардан иборат жисм (икосаэдр)ни «моий», яъни сувники,

3) ёқлари 8 та тенг томонли учбурчаклардан иборат жисм (октаэдр)ни «ҳавоий», яъни ҳавониики деб,

4) ёқлари тўртта тенг томонли учбурчакдан иборат жисм (тетраэдр)ни «норий», яъни оловники деб,

5) ёқлари 12 та тенг томонли бешбурчакдан иборат жисм (додекаэдр)ни «фалакий», яъни осмонники деб атайди.

Умуман, кўп ёқлиларга берилган бундай номлар грек файласуфи Платон таълимотидан келиб чиққандир. Платон ернинг атомлари куб шаклида, сув атомлари икосаэдр шаклида, ҳаво атомлари октаэдр шаклида, олов атомлари тетраэдр шаклида ва бутун фалак додекаэдр шаклида бўлади, деб ҳисоблаган.

Нисбатлар теорияси бобида, нисбат, пропорциялар ва улар устида амаллар иккиланма ва учланма нисбатлар, тузилган нисбатлар ва бошқалар баён этилган.

Беруний тузилган нисбатни шундай таърифлайди: «Агар икки миқдор орасида аниқ муносабат мавжуд бўлса ва улар орасида бошқа бир миқдор жойлашган бўлса, у вақтда биринчи икки миқдорнинг нисбатини улардан бирининг орасида жойлашган миқдорга нисбати ва орада жойлашган миқдорнинг иккинчисига нисбати орқали тузиш мумкинки, бу худди икки шаҳар орасидаги масофани йўлда учраган тўхташ жойлари орасидаги масофаларнинг йиғиндиларига тенглигига ўхшашдир».

Беруний томонидан баён этилган бу тузилган нисбат тушунчаси, кейинчалик сон тушунчасини кенгайтириш соҳасида катта роль ўйнади.

Шундай қилиб, бу асарни математикага бағишланган бобларида савол ва жавоблар ёрдамида арифметика, сонлар назарияси ва алгебрага оид маълумотлар берилган.

Геометрия бобида келтирилган савол-жавоблар ҳам зарурий геометрик маълумотлар ҳисобланади. Бу маълумотлар Евклиднинг «Негизлар» асари асосида ёзилган бўлса ҳам, улар орасида Беруний томонидан қўшилган бир қанча маълумотлар бор. Масалан, синус ва косинус тушунчаси, айлана узунлигини ҳисоблаш қоидаси, конус кесимларидан иборат иккинчи тартибли эгриликлар, сферик шакллар, тузилган нисбатлар, геометрия фанининг таърифи, кўп ёқлиларга номлар бериш каби масалалар бор. Берунийнинг математика фанига доир бундай маълумотларни муфассал равишда баён этиши, унинг ўз ўқувчиларини бундан кейин баён этилган астрономия ва математик геодезия бўлимларини онгли тушуниб олишлари учун тайёрлаш мақсадида эканлигини кўрсатади.

Беруний астрономия соҳасида олиб борган текширишларида, ўзидан аввал ўтган астрономларнинг маълумотларини ўз кузатишларининг натижалари билан тулдирди.

«Ат-тафхим» асарининг астрономия бўлимида асосан Птолемей назарияси баён этилган бўлса ҳам, Беруний гелиоцентрик система ҳақида ҳам маълумотлар беради. Умуман, Беруний, Қуёш системаси тузилиши масаласида ўз давридан анча юқори турган астроном олим ҳисобланади. Бу асарнинг геодезия бўлимида денгизларни тақсимлаган доира харита бўлиб, бу харита фан тарихида муҳим роль ўйнайди. Кейинги авлодлар бу харитани бир неча марта тиклаганлар.

Берунийнинг сохта фан — астрологияга муносабатига келганда, у ўша даврдаги бу ҳукмрон назарияга нисбатан мустақил фикрда бўлганини айтади. Маълумки, астрология ўрта асрларда Шарқда ҳам, Ғарбда ҳам донг чиқарган фан ҳисобланар эди. Астрологлар осмондаги юлдузлар ҳолатларига қараб кишиларнинг ҳаётида бўладиган ҳар хил воқеаларни, муваффақият ёки муваффақиятсизликларини олдиндан айтар эдилар. Хукмдорлар саройида астрологларнинг роли катта эди. Уларни феодал ҳокимлар ва руҳонийлар ҳар томонлама қўллаб-қувватлар эдилар. Бу даврда астрологияга қарши чиқиш мумкин эмас эди. Шунинг учун кўп олимлар ўз қараш ва истакларидан қатъи назар астрология билан шуғулланишга мажбур эдилар. Берунийдан олдин ўтган ва ундан кейин яшаган астрономлар ҳам қандайдир даражада астролог эдилар. Уларнинг баъзилари ростданми, ёлғонданми ҳукмдорларнинг истакларини бажарсалар, баъзилари астрологияни ҳақиқий фанлар билан шуғулланиш учун бир восита деб ҳисоблар эдилар. Беруний ҳам астрологияни бир восита деб ҳисоблаб, ўз асарларида ўзи тўғрисида ёзса ҳам, бунга ўзи ишонмас эди. Фақат атрофдаги муҳит билан муроса қилиш мақсадида астрология ҳақида ёзар эди. Беруний ердаги ҳодисаларни юлдузларнинг чиқиши ва ботиши билан тушунтириб бўлмайди, чунки юлдузлар доимий равишда бирдай чиқиб ва ботиб турадилар, дейди.

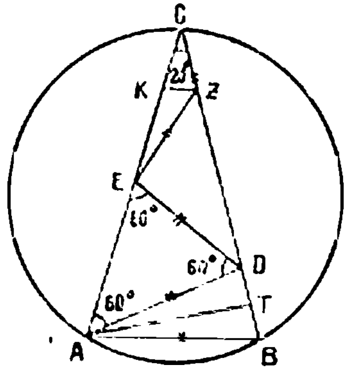
«Ат-тафхим» асарини Беруний астрономия ва математика соҳасида дарслик яратиш мақсадида ёзган. Мутахассис астрономлар тайёрлаш учун ёзилган бу махсус ўқиш китоби уч асрдан ортиқ давр орасида Шарқ мамлакатларида энг оммавий дарсликлардан бири бўлиб хизмат этди.

4. Беруний **«Қонуни Масъудий»** асарини 1037 йилда ёзди. Бу асарнинг қўлёзмалари Ҳиндистон, Берлин кутубхоналарида, Британия музейининг кутубхонасида сақланмоқда. Бу асар буюк астроном Абу Райҳон Берунийнинг энг муҳим классик асари ҳисобланади. Асарда Олам тузилиши ҳақида фикрлар, тригонометрияга, айниқса сферик тригонометрияга доир масалалар, тригонометрик жадваллар, осмон гумбази, кеча ва кундузнинг йиғиндиси, ер, сайёралар, Қуёш ва Ой ҳаракати, Ой тутилиши ва Қуёшнинг ёруглик тарқатиши, сайёраларнинг ердан узоқликлари ва бошқа масалалар ёритилган. Унинг айрим жойларининг немис тилига таржимаси Қ. Шой томонидан бажарилган ва 1927 йилда Ганноверда нашр этилган. Араб тилида 1954 йилда Ҳайдарободда нашр қилинди. Бу асар математика тарихи, айниқса тригонометрия тарихи учун катта аҳамиятга эгадир. Бунда Беруний ўзидан олдинги олимлар томонидан олиб борилган жуда кўп ҳисоблашларга якун ясайди, ўзи томонидан олиб борилган кузатиш ва ҳисоблашларни, ўтказилган тажрибаларни баён этади. Бу асар ўн бир мақоладан иборат. I—II мақолаларида хронология ва календарь масалалари баён этилади.

III мақолада тригонометрия баён этилиб, 10 бобдан иборат. 1-бобда мос равишда ватарлар ясаш орқали ички чизилган мунтазам учбурчак ва ўнбурчакнинг томонларини ҳисоблаш масалалари, 2-бобда икки бурчак йиғиндиси ва айирмасининг синуси, иккиланган ва яримбурчак синусини ифодаловчи теоремалар, 3-бобда мунтазам ички чизилган тўққиз бурчакнинг томонини ясаш масалалари қўйилган. 3-бобдаги масала учинчи даражали тенгламаларни ечиш орқали ва махсус ҳисоблаш процесси ёрдамида ҳал этилган.

Маълумки, ўрта асрларда учинчи даражали тенгламаларни ечиш, унинг умумий назариясини қуриш соҳасида кўп математиклар, айниқса Ўрта осиёлик математиклар иш олиб борганлар. Бир қанча амалий масалалар бундай тенгламаларнинг илдизларини топиш масаласига келтирилди. Беруний ҳам бу соҳада текширишлар олиб бориб мунтазам тўққиз бурчак томонини аниқлаш масаласини қуйидаги ясаш орқали учинчи даражали тенгламага келтирди. Бу ясашни шундай тушунтириш мумкин.

Масалан, AB — айланага ички чизилган мунтазам тўққизбурчакнинг томони бўлсин. Айлана ичига асоси AB бўлган учбурчак ABCни ясаймиз (1-шакл). Сўнгра $AD=AB$, $DE=EZ=AB$ кесмалар чизамиз ва BC, AC-ларга AT, KZ мос перпендикуляр ўтказамиз. Учбурчакнинг C учидаги бурчак $< ABC = \frac{360°}{9\cdot 2} = 20°$ бўлгани учун бундан $< BAC = \\ = < ABC = \frac{160°}{2} = 80°$ ва $< ADB = < DBA = 80°$. Демак, $< DAB\ 180° - 2.80° = \\ = 20°$ ва $< DAE = 80° - \\ - 20° = 60°$. Демак, $< AED = 60°$ ва $< ADE = 60°$. Демак, $EDZ = \\ 180° - 60°\ 80° = 40°$ ва $DEZ = 180° - 2\cdot 40° = 100°$ ва $ZEC = 180° - 100° - 60° = 20°$.



1-шакл

Шунинг учун учбурчак EZC тенг ёнли булади (яъни $EZ = CZ = AB$).

Шаклда $\Delta CZK \backsim \Delta CAT$ бўлганлигидан $\frac{CZ}{CK} = \frac{CA}{CT}$ ёки $\frac{CZ}{2CK} = \frac{CA}{2CT}$, ёки бундаги кесмалар алмаштирилса: $\frac{AB}{CE} = \\ = \frac{CA}{CD + CB}$ ёки пропорция хоссасига асосан: AB: $(AB + \\ + CE) = AC:(CA + CD + CB)$ ёки $AB:AC \backsim AC:(CD + \\ + 2AC)$. Бунда $AC = BC = 1$ деб фараз қиламиз. $AB = X$ бўлсин, у вақтда $X : 1 = 1 : (CD + 2)$ ёки $X \cdot \\ \cdot (CD + 2) = 1$; (1).

Шаклда $\Delta ABC \backsim \Delta BDA$ булганидан $AC : AB = AB : BD$, бунда $AC = 1$ ва $AB = X$ булганидан $BD = AB^2 = \\ = X^2$ булади. Лекин $CD = BC - BD$ ёки $CD = 1 - X^2$ қийматни (1) га қуйсак, $X(1 - X^2 + 2) = 1$ ёки $X^3 + \\ + 1 = 3X$.

Демак, бу масала учинчи даражали тенгламага олиб келади. Бу тенгламанинг тақрибий ечимини Беруний келтирган, аммо ечиш методини баён этмаган. 4-бобда бурчакни тенг учга бўлиш масалалари бўлиб, бу масалани ечиш учун Архимед замонидан бери баъзи математиклар томонидан берилган 12 хил метод баён этилади. 5-бобда ўтган боб натижаларига асосланиб, айлана узунлигининг диаметрига нисбати ҳисобланади. Бунда 2° ли ватарга асосланиб, ички ва ташқи чизилган 180° ли бурчакларнинг периметрлари ҳисобланиб, сўнгра уларнинг урта арифметик қиймати олинади. У вақтда π сони учун 3,1417... қиймат ҳосил бўлади. 6-бобда синуслар жадвали, 7-бобда эса шу синуслар жадвалидан фойдаланиш қоидалари берилади. Бу қоидалар орасида чизиқли ва квадратик интерполяциялаш қоидалари бор. Агар берилган ёй *«x»* ва жадвалдаги унга яқин, ҳам ундан кичик ёй қиймати *«x»* бўлса, бу ёй синусини топиш учун шундай чизиқли интерполяциялаш қоидаси бериладики, бу қоидани қуйидаги формула билан ифодалаш мумкин:

$$\sin x = \sin x_0 + (x - x_0)\frac{\sin(x_0 + 15') - \sin x_0}{15'}.$$

Беруний томонидан берилган квадратик интерполяциялаш қоидасини қуйидаги формулада ифодалаш мумкин:

$$\sin x = \sin x_0 + (x - x_0)\frac{\sin(x_0 + 15') - \sin x_0}{15'} +$$

$$+ (x - x_0)^2 \frac{\frac{\sin x_0 - \sin(x_0 - 15')}{15'} - \frac{\sin(x_0 + 15') - \sin x_0}{15'}}{15'}$$

8-бобда тангенслар жадвали ва ундан фойдаланиш, юқоридагига ўхшаш, чизиқли ва квадратик интерполяциялаш қоидалари берилади. Тангенслар жадвали учун чизиқли интерполяциялаш қоидасини қуйидагича ифодалаш мумкин:

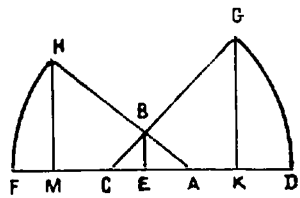
$$\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, x_0 + (x - x_0)\frac{\mathrm{tg}(x_0 + 1^\circ) - \mathrm{tg}\, x_0}{1^\circ}.$$

Квадратик интерполяциялаш қоидасини эса қуйидаги формула билан ифодалаш мумкин:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 + (x - x_0)\frac{\operatorname{tg}(x_0+1^0) - \operatorname{tg} x_0}{1^0} + (x-x_0)^2 \times$$

$$\times \frac{\dfrac{\operatorname{tg}(x_0+1^0) - \operatorname{tg} x_0}{1^0} - \dfrac{\operatorname{tg} x_0 - \operatorname{tg}(x_0-1^0)}{1^0}}{1^0}.$$

Булардан ташқари, бу бобда текислик тригонометриясидаги синуслар теоремаси ҳам исбот этилади. Фараз қилайлик, ABC—тўғри чизиқли учбурчак бўлсин (2-шакл). «Мен тасдиқлайманки, — деб ёзади Беруний, — AB томонининг BC томонига нисбати, ACB бурчаги синусининг BAC бурчаги синусига нисбатига тенг бўлади».



2-шакл.

Исботи: ABC учбурчагининг томонларини ўз йўналишида давом эттирамиз. A ни марказ қилиб, ярим диаметр узунлигини бирга тенг деб фараз этиб, HF ёйини чизамиз. Сўнгра C нуқтани марказ қилиб, радиус бирликка тенг фараз қилиб GD ёйини чизамиз.

$HM \perp AF$, $GK \perp CD$ ўтказамиз.

У вақтда $\sin A = HM$, $\sin C = GK$ бўлади.

$\triangle ABE$ ва $\triangle AHM$ ўхшашлигидан:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AH}{HM} = \frac{1}{\sin A} \tag{1}$$

$\triangle CBE$ ва CGK ўхшашлигидан:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{CG}{GK} = \frac{1}{\sin C}. \tag{2}$$

(1) нисбатни (2) нисбатга бўлсак,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin C}{\sin A} \tag{3}$$

теорема исбот қилинди.

Бу теоремани учбурчакнинг барча томонлари ва учбурчаклари учун татбиқ этганда (3) қуйидаги шаклда бўлади.

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$$

«Қонуни Масъудий» асарининг III мақоласининг 8-боби аниқроқ ҳисоблаш амалини ҳамма жадваллар учун умумлаштириш масаласи билан тугайди. Бунда, бу аниқликни ҳисоблаш ҳамма жадваллар учун умумий қоидага асосан татбиқ этилиши мумкинлиги ҳақида ёзилади. Юқорида, фақат $\sin x$ ва $\operatorname{tg} x$ функциялари учун келтирилган интерполяциялаш қоидалари «ҳамма жадваллар учун» қўлланилади, яъни астрономияда кўриладиган функционал боғланишларнинг ҳамма жадваллари учун ҳам қўлланилади. Беруний томонидан берилган бу қоидалар, унинг функцияларнинг умумий қонунияти ҳақида мулоҳазалар олиб борганлигини кўрсатади. Бу эса, математика тарихида, функциялар тушунчасининг пайдо бўлиши ва тараққий этишида катта роль ўйнайди.

Бундай мулоҳазаларни Беруний 6-мақолада ҳам олиб боради, бунда Қуёш ҳаракати, вақтнинг ёки эклиптика ёйининг функцияси сифатида математика нуқтаи назаридан қарайди ва Қуёш ҳаракатининг тезлиги апогейда минимумга ва перигейда максимумга етишини аниқлайди. 9—10-боблар сферик тригонометрияга бағишланган. Бу бобларда сферик учбурчак ABC учун синуслар теоремаси

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

ва тангенслар теоремаси $\operatorname{tg} b=\sin a\cdot\operatorname{tg}\beta$ (C бурчаги тўғри бўлган учбурчак ABC учун) исбот этилади.

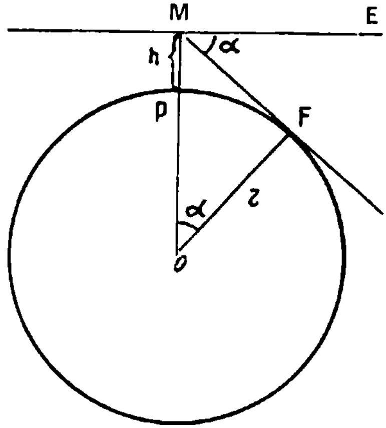
«Қонуни Масъудий» асарининг IV мақоласи сферик астрономия ва қисман гномоникага, V мақола математик география ва геодезияга, VI—XI мақолалар махсус астрономик масалаларга, Қуёш, Ой, планеталар ва уларнинг ҳаракатлари, юлдузлар каталоги ва бошқаларга бағишланади.

Беруний «Қонуни Масъудий» асарининг V мақоласида Ер шари меридианининг бир градусли ёйи узунлигини аниқлашни кўрсатади. Беруний энг аввал ўзидан олдин ўтган олимларнинг бу масала билан шуғуллангандикларини ва уларнинг методларини баён этади.

Грек олими Эратосфен, Асвон ва Искандария шаҳарлари орасидаги меридиан ёйи узунлигини, ҳинд олимлари, Ҳиндистон шаҳарлари орасидаги ва ўзбек олими Хоразмийнинг, Тадмур ва Ар-Ракқа шаҳарлари орасидаги меридиан ёйи узунликларини аниқлашдаги ҳисоблашларини келтиради.

Сўнгра Беруний бу масалани ҳал этиш учун ўзининг янги методини баён этади. У ўлчов ишларини ўтказади. Энг аввал Ер шари радиусини жуда оддий методдан фойдаланиб аниқлайди. У Ҳиндистон тоғларидан бирига чиқади. Тоғнинг баландлиги $h=62{,}05$ (зироъ).

Тогдан уфққа йўналган қараш чизиғи билан ўзи турган математик горизонт ME текислиги орасидаги бурчак α ни ўлчайди. h — тоғ баландлиги, α — ўлчанган бурчак, R — Ер радиуси.



3-шакл.

Тоғ баландлигини маълум ҳисоблаб, Беруний α бурчакни ўлчаб, Ер радиусини ҳисоблади. Ҳозирги белгилашлар бўйича бу ҳисоблашлар қуйидагича бўлади: учбурчак MOF дан 3-шакл

$$R=(R+h)\cos\alpha$$

бундан

$$R=\frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

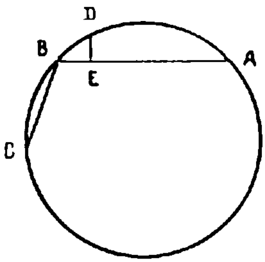
бундан фойдаланиб, Беруний Ер шари энг катта айланасининг узунлигини ҳам исботлайди.

Беруний ҳисоблашлар ўтказиб, қуйидаги натижаларни ҳосил қилган: Ер шари радиуси 1 081,66 фарсанг (1 фарсанг — 6 *км* га яқин), диаметри 2 163,33 фарсанг, катта айланаси узунлиги 6 800 фарсанг, Ер шари сирти 14 712 720 *кв* фарсанг, ҳажми 1 667 744 242 куб фарсанг. Фарсанг 3 *мил* га тенг булганидан Ер шари айланасининг узунлиги 20 400 араб *мил* га тенг бўлади ва унинг

1 ёйи узунлиги 56,6 *мил*га тенг бўлади. Беруний томонидан ҳисобланган бу қиймат, яъни меридианнинг 1° ли ёйи узунлиги 56,6 *мил*дан ўрта аср Шарқ астрономия фани асосий миқдор сифатида фойдаланади. Бу миқдор ҳозирги системага кўчирилганда 113 *км* бўлади. Маълумки, ҳозирги ўлчамларда меридианнинг 1° ли ёйи узунлиги 110,938 *км* ҳисобланади.

Ҳозирги замон олимлари, Ер катталигини аниқ ўлчаш соҳасида Беруний томонидан олинган натижалар, ўрта асрларда астрономия соҳасида эришилган катта ютуқлардан бири деб ҳисоблайдилар.

5. Беруний **«Доирада ватарларни, унинг ичида чизилган синиқ чизиқлар ёрдамида аниқлаш ҳақида рисола»**да геометрияга оид масалаларни баён этган. Олим бу асарни 1027 йилда ёзиб тугатган.



4-шакл.

Бу рисола араб тилида Ҳайдарободда 1948 йилда нашр этилган. Унинг тўла бўлмаган немисча таржимаси Г. Зутер томонидан бажарилиб 1910 йилда, С. А. Краснова ва А. А. Карповалар томонидан рус тилига таржима қилиниб, 1963 йили нашр этилган.

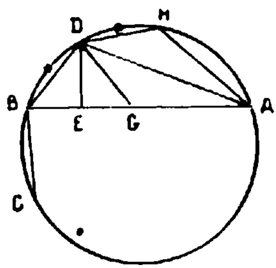
Архимед ўзининг «Уринувчи доиралар ҳақида» номли китобида (бу китоб бизга Собит ибн Қурра томонидан бажарилган арабча таржимасида етиб келган) шундай теорема берган эди: «Агар доирада икки бўлакдан иборат синиқ чизиқ чизилган бўлса ва бу синиқ чизиқни тортиб турувчи ёйнинг ўртасидан синиқ чизиқнинг катта бўлагига перпендикуляр туширилган бўлса, у вақтда бу перпендикуляр синиқ чизиқни тенг икки қисмга бўлади» (4-шакл).

ABC — синиқ чизиқ бўлсин, агар $AB>BC$, $\overset{\smile}{AD}=\overset{\smile}{DC}$, $DE\perp AB$ бўлса, у вақтда $AE-EBC=EB+BC$ бўлишини исботлаш керак.

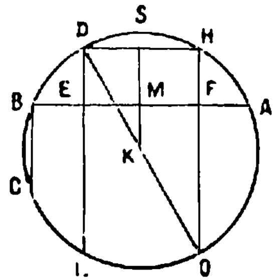
Шуни айтиш керакки, бу теорема Беруний томонидан унинг «Қонуни Масъудий» асарининг III мақоласида турли тригонометрик формулаларни исботлаш учун кенг равишда татбиқ этилади. Шу сабабли, Беруний «Доирада ватарларни аниқлаш» рисоласида бу теоремага катта аҳамият бериб, унинг Архимед томонидан берилган уч хил исботини ва бошқа математиклар берган 20 хил исботини келтиради. Булар орасида Ўрта осиёлик математик, Берунийнинг дўсти Абу-л-Ҳасан, IX асрда яшаган журжонлик математик Абу Саид ал-Журжоний, басралик машҳур астроном Абу Али ибн ал-Хайсам (965—1039), Берунийнинг 8 хил исботи ва ўқитувчиси Абу Наср ибн Ироқ бажарган исботлар бор.

Архимед теоремасининг турли хил исботлари:

1. Архимед исботи: DB ёйига тенг OH ёйини ажратамиз. DH ва DB ўтказамиз. $EG=EB$ ни ажратамиз. DG



5-шакл.



6-шакл.

ва DA ўтказамиз. У вақтда DE умумий перпендикуляр бўлганидан, $DB=DG$ бўлади (5-шакл). $\overset{\smile}{DC}=\overset{\smile}{DA}$ шарт бўйича тенг бўлгани ва уларга кўра $\overset{\smile}{DB}=\overset{\smile}{DH}$ бўлганидан $\overset{\smile}{AH}=\overset{\smile}{BC}$ бўлади.

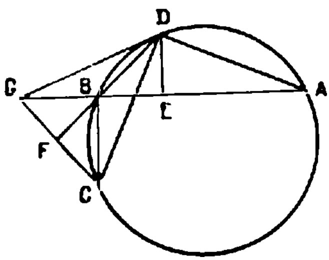
ADH ва HAD бурчакларнинг йиғиндиси DBA бурчагига ёки DGB га тенг. Лекин $D\breve{G}B=G\breve{A}D+G\breve{D}A$. Шу сабабли, $G\breve{D}A=H\breve{D}A$ бўлиб, $DG=DH$ ва DA умумий томон булганидан, бу учбурчакларда $AG=AH$ бўлади. Аммо $AH=BC$ бўлганидан $AG=BC$ бўлади. $GE=EB$ бўлганидан $AG+EG=EB+BC$ бўлади. Мана шуни исботлаш керак эди.

2. Беруний исботи: Диаметр DKO ўтказамиз. DE ни L гача давом эттирамиз. DL га параллел OH ўтказамиз. У вақтда $D\breve{C}L=O\breve{A}H$ ўтказамиз (6-шакл). У вақтда FHD тўғри бурчак диаметрга тиралган ва демак $DEFH$ тўғри бурчакли параллелограмм. Бунда $HD=FE$, $KS=ED$ ўтказамиз. KS, AB ва HO ватарларига тик булгани учун уларни тенг иккига бўлади. Яъни $KS=SD$ ва шунинг

учун $FM=ME$. Демак, қолдиқ кесмалар $AF=EB$ ва $HD=FE$; $HD=BC$. Бундан $FE=BC$ бўлиб, уларга AF ва EB ўзаро тенг кесмалар қўшилса, $AE=EB+BC$ бўлади.

3. Беруний исботи: Бошқа бир асарида Беруний Архимед теоремасининг қуйидаги исботини беради: AB ни давом эттириб, $BG=BC$ ажратамиз. CG, DG DB ўтказамиз. BF тик GC ўтказамиз. GC тенг иккига бўлинади. $\Delta FCB=\Delta GBF$ бўлади. Демак, уларнинг мос бурчаклари ҳам тенг (7-шакл) ΔFGB нинг ташқи бурчаги $\angle ABF=\angle BFG+\angle BGF$, ΔFBC нинг ташқи бурчаги $\angle DBC=\angle BCF+\angle CFB$.

Бунда $\angle BFG+\angle BGF=\angle BCF+\angle CFB$ бўлгани учун $\angle ABF=\angle DBC$. Демак, $\angle ABF+\angle FBG=\angle DBC+$ $+\angle CBE$. Аммо бунда $\angle ABF+\angle FBG=2d$ бўлганидан $\angle DBC+\angle CBF=$ $=2d$. Демак, DBF битта тўғри чизиқдан иборат бўлиб, учбурчак DGCнинг баландлиги бўлади ва асосини тенг иккига бўлганидан $DC=DG$ бўлади. $AD=DC$ (тенг ёйларга тиралган ватарлар).



7-шакл.

Демак, $AD=DC$. Бунда DE тик AG асосини тенг иккига бўлиши керак, яъни $AE=EG$. Аммо $EG=EB+$ $+BG$. Шарт бўйича $BG=BC$. Демак, $AE=EB+BC$ бўлади.

Архимед теоремасининг турли хил исботларини баён этгандан сўнг Беруний синиқ чизиқларнинг хоссаларини ифодаловчи яна қуйидаги теоремаларни (уларни биринчи теоремадан чиқариш мумкин) келтириб, уларнинг ҳам жуда кўп математиклар томонидан берилган турли хилдаги (18 хил) исботларини, шунингдек, ўзининг исботларини ҳам баён этади.

1. Синиқ чизиқ ҳақидаги 2-теорема. Берилган: ABC — синиқ чизиқ, $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DBC}$, $DE\perp AB$. У вақтда $AB\cdot BC+DB^2=AD^2$ (2) бўлади. Бунда шуни қайд қилиш мумкинки, бу (2) тенгликни биринчи теоремадан, яъни $AE=EB+BC$ (1) тенгликдан келтириб чиқариш мумкин. Ҳақиқатан ҳам (8-шакл).$AD^2=AE^2+DE^2=(BE+BC)^2+DE^2=BE^2+$

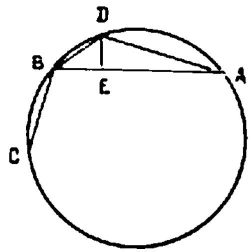
$+ 2BE \cdot BC + BC^2 + DE^2 = DB^2 + (2BE + BC)BC = DB^2 +$
$+ (AE + EB)BC = DB^2 + AB \cdot BC.$

Шунга ухшаш, (2) тенгликдан (1) тенгликни келтириб чиқариш мумкин. $AE^2 = AD^2 - DE^2 = AB \cdot BC +$
$+ DB^2 - DB^2 = AB \cdot BC + BE^2 = (AE + EB)BC + BE^2$

Бундан $AE^2 - BE^2 = (AE + EB)BC$ ва $AE - EB = BC$ ёки $AE = BE + BC$.

2. Синиқ чизиқ ҳақида учинчи теорема. Берилган ADC ёйи D нуқтада тенг иккига бўлинган ва унга AB ёйи қушилган. У вақтда $AB \cdot BC + CD^2 = DB^2$ (3) (9-шакл).

3. Синиқ чизиқ ҳақида тўртинчи теорема: Агар $\overset{\smile}{AD} = \overset{\smile}{DBC}$ ва $DE \perp AB$, ACD тенг ёнли учбурчак ва ABC ихтиёрий учбурчак бўлса (10-шакл), у вақтда ACD учбурчак$=$ $=ABC$ учбурчак$+DE \cdot EB$.



8-шакл.

Бундан кейин яна жуда куп теоремалар ва уларнинг исботлари келтирилади. Булар орасида учбурчак юзини топиш учун Герон теоремаси номи билан маълум бўлган (бу теорема Архимед номидан берилган бўлиб, искандариялик математик (I—II аср) Герон ўзининг «Метрика» асарида баён этгани ва шу орқали Европа халқлари бу теорема билан танишганликлари сабабли «Герон формуласи» номини олган) формула, доира ичига чизилган тўртбурчак юзини унинг томонлари орқали аниқлаш формуласи ва бошқалар бор.

Сўнгра Беруний бу асарда геометрик ясашга доир жуда кўп масалалар ечади. Булардан қуйидагини келтирамиз:

Масала: Берилган доира ичига чизилган ва томонларининг йиғиндиси берилган кесмага тенг бўлган учбурчак ясалсин (11-шакл).

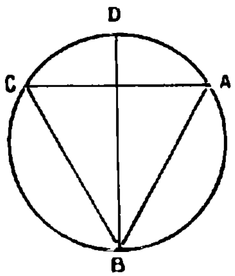
Фараз қилайлик, HF кесма берилган бўлсин ва унинг узунлиги берилган доира ичига чизилган тенг ёнли учбурчак томонлари йиғиндисидан катта бўлмасин. HF чизиғида ихтиёрий нуқта K белгилаймиз ва доирада $AC = HK$ ватар ясаймиз. AC ёйини D нуқтага тенг иккига бўлиб AD ўтказамиз. AD да ярим доира AED ясаймиз. Бунда KF кесма ярмига тенг қилиб AE ватар ясаймиз.

AE ни B нуқтагача давом эттириб BC ўтказамиз. У вақтда ΔABC изланган бўлиб, унинг томонларининг йиғиндиси HF кесмага тенгдир.

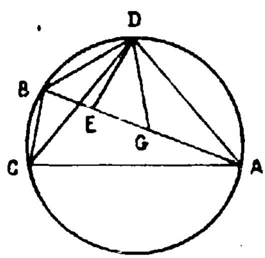
Чунки: $AC = HK$, $AB + BC = AE + EB + BC = AE +$ $AE = 2\,AE = 2\frac{KF}{2} = KF$.

Демак, $AC + AB + BC = HK + KF = HF$ бўлади.

2. Пальма ҳақидаги масала.



9-шакл.

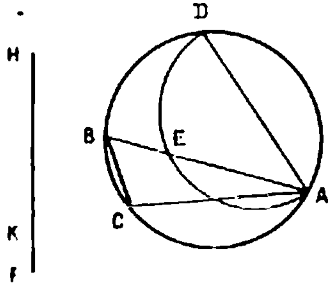


10-шакл.

Маълум узунликдаги ёғоч таёқ ер сиртига тик қилиб ўтказилган. У синдирилган ва шундай букилганки, учи ерга тегади. Унинг асосидан ерга теккан учигача масофа маълум. Таёқнинг синдирилган жойидан ергача масофа аниқлансин?

3. Икки қуш ва балиқ ҳақидаги масала

Иккита пальма дарахтларининг баландликлари маълум бўлиб, кенглиги маълум бўлган дарёнинг икки қирғоғида жойлашган. Сувнинг юзида балиқ кўринади. Бу балиққа ҳар икки пальманинг устидан иккита қуш учиб боради ва бир вақтнинг ўзида балиққа ёпишадилар. Балиқ пайдо бўлган жойдан дарёнинг қирғоқларигача бўлган масофалар ва ҳар икки қушнинг учган масофалари аниқлансин?



11-шакл.

Беруний ўзининг бу геометрик асарида, юқорида баён этилганлардан ташқари жуда кўп тригонометрияга доир формулаларни аниқлашдан иборат масалаларни ечади. Масалан: $\sin 2\alpha$ ва $\sin\frac{\alpha}{2}$ ифодаларини $\sin\alpha$ орқали, $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ ва $\sin(\alpha+\beta)$ ифодаларни $\sin\alpha$ ва $\sin\beta$ орқали аниқлайди.

6. **«Ҳинд рошикалари ҳақида китоб»**ни Беруний махсус арифметика масалаларига бағишлайди (Рошика — санскрит сўз бўлиб, «ўринларга эга» бўлган деган маънони билдиради). Бунда у ўрта асрларда кўп тарқалган учланма қоидани тузма нисбатлар орқали асослайди. Бу қоидаларни ихтиёрий сондаги миқдорлар учун татбиқ этади ва умумийлашган қоидалар беради. Қоидаларни мисоллар билан тушунтиради. Берунийнинг бу асари арифметиканинг тараққиётида катта роль ўйнайди. «Ҳинд рошикалари ҳақида китоб»нинг қўлёзмаси Лондонда сақланмоқда. Бу асарни шу қўлёзмадан рус тилига Б. А. Розенфельд таржима этди ва 1963 йилда нашр этилди.

7. **«Турар жойлар орасидаги масофаларни текшириш учун жойларнинг чегараларини аниқлаш»** трактати Беруний томонидан 1025 йилда ёзилган. Бу асар асосан астрономия, математика, география ва геодезияга бағишланган бўлиб, 1963 йилда Қоҳирада нашр этилган. Бу асар 1966 йилда Тошкентда рус тилида (П. Г. Бульгаков таржимаси) нашр этилди.

Беруний бу асарида ер юзининг кишилар яшайдиган қисмини иқлимларга бўлади. Географияни ўрганиш учун умумий тушунчалар беради. Бу соҳада Беруний эътиборини математик география деб ном олган фан ўзига жалб этади.

Беруний географик объектларнинг узоқлиги ва кенглигини аниқлаш методини ишлаб чиқди. Жойларнинг географик координатларини аниқлаш проблемаси соҳасида грек олимлари ва улардан кейинги олимлар томонидан ёзилган асарларни Беруний қунт билан ўрганди, бу асарларни бир-бири билан таққослади. Уларнинг келтирган маълумотларини ўзи томонидан олиб борилган кузатишлар ва олинган натижалар билан солиштирди. Бу соҳада аввалги олимлар томонидан қўйилган баъзи хатоларни танқид қилди.

Беруний илмий кузатишларга катта эътибор бериб, уларни сабот ва аниқлик билан ўтказар, ўзига ва бошқаларга нисбатан талабчан эди. Шунинг учун талантли олим жойларининг кенглик ва узоқликларини аниқлашда янги ва оригинал методлар ишлаб чиқди.

Беруний шахсан ўзи ўлчашлар ўтказиб, бир қанча шаҳарларининг кенгликларини ҳисоблади. Масалан: Ғазна 33°35′, Қобул 33°47′; Қанда 33°55′; Дунпур 34°20′. Унинг ҳисоблашларига кўра, Бухоро шаҳрининг кенглиги 39°20′. Ҳозирги вақтда эса бу қиймат 39°46′ ҳисобланади. Демак, бунда Беруний ҳисоблашлари фақат 0°26′ гина фарқ этади.

Беруний томонидан олиб борилган астрономия ва географик ҳисоблашларининг аниқлиги унинг бу соҳадаги текшириш методларининг жуда аниқ эканлигини кўрсатади. Бу эса ўрта асрларда фанлар соҳасида эришилган энг катта ютуқлардан ҳисобланади.

Олимлар томонидан олиб борилган кейинги текширишларда, Беруний асарларида Ўрта Осиёнинг бир неча шаҳарларининг географияси ва геологияси, масалан, қадимий Хоразм геологияси баён этилганлигини, Амударё оқимининг ўзгаришини тушунтириш, Хўжанд, Термиз ва бошқа шаҳарларининг географик шароитлари ҳақида ўрта асрлар фанига доир қимматли маълумотлар борлиги аниқланган.

8. **«Сферик сиртнинг текисликдаги проекцияси»** трактати олимнинг «Қадимги халқлардан қолган ёдгорликлар» асарининг бир бўлимида баён этилган. Бунда юлдузлар осмонини текисликда ва ер сиртини хариталарда тасвирлаш ва астролябия ясашда қўлланадиган сферани текисликка проекциялаш масалалари баён этилган. Беруний томонидан татбиқ этилган уч ҳолдан, биринчи ҳолдаги проекциялаш — стереографик проекциядан иборат бўлиб, бундай проекция грек олимлари Гиппарх (180—195 *б.* эргача) ва Птолемей (II аср) томонидан қўлланилган.

Иккинчи ҳолдаги проекциялаш методини Берунийнинг ўзи ишлаб чиқди. Учинчи ҳолдаги проекциялаш методи Беруний замондоши ас-Соғоний томонидан ишлаб чиқилган бўлиб, Беруний бу методни астролябия конструкциясини ясашда қўллади.

Булардан ташқари, бу асарда Беруний, проекциялашнинг янги бир турини ҳам баён этганки, бу бутун бир ярим сферани текисликдаги тасвирини ясашда жуда қулай метод ҳисобланади.

9. **«Қимматбаҳо тошлар ҳақидаги маълумотлар тўплами китоби»** минераллар ва металларни ўрганишга бағишланган. Бу асарни Беруний 1048 йилда ёзиб тамомлаган. Узоқ вақтларгача бу асар фақат бир неча қўлёзма шаклида маълум эди. Унинг арабча тексти 1937 йилда Ҳайдарободда, бу асарнинг А. М. Беленицкий ва Г. Г. Леммлейн томонидан бажарилган рус тилидаги таржимаси «Минералогия» номи билан 1963 йилда Москвада нашр этилган.

«Минералогия» асари икки қисм, 36 бобдан иборат. Биринчи қисмда минераллар, уларни таърифлаш усуллари, қимматли тошларнинг маълум тартибдаги классификациясини баён этади. 12 бобдан иборат иккинчи қисмида эса, темир, уни ишлаш усуллари, пўлатни ишлаб чиқариш технологияси ва бошқалар баён этилган.

Берунийнинг минералогия ва физика фанлари тарихида жуда катта хизмати шундан иборатки, у биринчи бўлиб минералларнинг солиштирма оғирликларини ҳисоблаган. Унинг ўзи ўлчашлар ўтказиб минералларнинг солиштирма оғирлик қийматларини шундай аниқ ҳисоблаганки, бу натижалар ҳозирги замон олимларини ҳайратда қолдирмоқда.

Беруний баён этган, темир ва пўлат ҳақидаги маълумотлар, металлургия ва кимё фанлари тарихида X—XI асрларда Ўрта Осиёда металл ишлаб чиқариши юқори даражада эканлиги ҳақидаги маълумотларни асослашда жуда катта роль ўйнайди.

10. **«Дорилар ҳақида» («Китоб ас-Сайдана»)** китобида ўша даврларда маълум бўлган доривор ўсимликларнинг луғатини альфавит тартибида тузади. Дори тайёрланадиган ҳар бир ўсимлик ҳақида, баъзиларининг ўсиш жойлари ҳақида маълумотлар берилади.

Бу асар яккаю ягона қўлёзма шаклда сақланган бўлиб, унинг баъзи парчалари Европа тилларига таржима қилинган. Бу асар биринчи марта рус тилида 1973 йилда Тошкентда нашр этилди (У. И. Каримов таржимаси).

* *
*

Жуда кўп фанлар соҳасида ажойиб сермазмун асарлар ёзиб қолдирган, бутун умрини фанга бағишлаган ва ўткир талантини табиёт сирларини очиш учун курашга сарфлаган, ўз замонасининг қарама-қаршиликларига, фан аҳллари учун тинч бўлмаган ҳаётга бардош берган Беруний, ҳақиқатдан ҳам прогрессив олим ҳисобланади. Ҳозирги вақтда Беруний номи бутун жаҳонга машҳурдир.

1973 йилда дунёдаги барча прогрессив жамоатчилик машҳур ўзбек олими Берунийнинг туғилганига 1000 йил тўлиши муносабати билан юбилей тантаналари ўтказдилар.

СССР Фанлар академияси Москвада Берунийга бағишланган махсус илмий сессия ўтказди. Ўзбекистон ССР Фанлар академияси қошида Беруний асарларини ўрганиш ва пропаганда этиш комитети тузилди. Совет халқи Беруний номини абадийлаштирмоқда. Ҳозирги вақтда ўнлаб колхозлар, мактаб, район ва муассасалар Беруний номига қўйилган. Ўзбекистон ССР Фанлар академияси Шарқшунослик институтига Беруний номи берилган. Берунийнинг танланган асарлари нашр этилди ва нашр этилмоқда, энг яхши илмий ишлар учун Беруний номидаги мукофот тасдиқ этилган. Тошкентда 1973 йили 4—7 сентябрда Бутуниттифоқ илмий конференция иш олиб борди. Бунда совет олимлари ва чет эллик меҳмонлар Беруний ижодини ўрганиш соҳасида докладлар қилдилар. Беруний асарларининг янги нашрлари тайёрланди ва тайёрланмоқда.

МУНДАРИЖА

Берунийнинг ҳаёти ва илмий фаолияти 3
Берунийнинг асосий асарлари ва уларнинг қисқача мазмуни. 7

На узбекском языке

Ахадова Мухабаг

БЕРУНИ И ЕГО ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКИ

Ўзбекистон ССР ФА илмий-оммабоп китоблар таҳрир ҳайъати томонидан нашрга тасдиқланган

Муҳаррир *М. Алиева*
Техмуҳаррир *Т. Шалюк*
Корректор *О. Абдуллаева*

Р08411. Теришга берилди 23/IX-76 й. Босишга рухсат этилди 3/XI-76 й. Формати $84\times108^1/_{32}$. Босмахона қоғози № 1. Босма л. 1,68. Қоғоз л. 0,5. Ҳисоб-нашриёт л. 1,3. Нашриёт № 1787. Тиражи 5000. Баҳоси 5 т.

ЎзССР „Фан“ нашриётининг босмахонаси, Тошкент, Горький проспекти, 79, Заказ 259.

Нашриёт адреси: Тошкент, Гоголь кўчаси, 70.