Б. АБДАЛИМОВ, А. АБДУҒАППОРОВ,
М. МУСАМУҲАМЕДОВ, С. ТОШПЎЛАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКАДАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШ БЎЙИЧА ҚЎЛЛАНМА

Қишлоқ хўжалик олий ўқув юртларининг
студентлари учун ўқув қўлланма

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ" 1985

Тақризчилар: физика-математика фанлари кандидати,
доцент *Ж. Қулматов.*
физика-математика фанлари кандидати,
доцент *И. Ч. Чоршанбоев*

Махсус редактор: физика-математика фанлари кандидати,
доцент *С. Т. Тўлаганов*

Ушбу қўлланма ўн тўрт бобдан иборат бўлиб, олий математика, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика элементларини ўз ичига олган.

Ҳар бир параграф бошида қисқача назарий маълумот, сўнгра типик мисол ва масалалар батафсил ечиб кўрсатилган. Параграф ниҳоясида ўқувчи мустақил ечиши учун етарли миқдорда мисол ва масалалар жавоблари билан келтирилган.

Қўлланма қишлоқ хўжалик олий ўқув юртларининг студентларига мўлжалланган, шунингдек, ундан сиртдан ўқувчи студентлар, махсус ўрта ўқув юртларининг ўқувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

О—49

Олий математикадан масалалар ечиш бўйича қўлланма: Қ. х. олий ўқув юрт. студ. учун ўқув қўлл. / Б. Абдалимов, А. Абдуғаппоров, М. Мусамуҳамедов, С. Тошпўлатов; [Махсус ред. С. Т. Тулаганов].— Т.: Ўқитувчи, 1985.— 456 б.

I. Абдалимов Б. ва бошқ.

Руководство к решению задач по высшей математике. Учебное пособие для студентов сельскохозяйственных вузов.

ББК 22.11я73

А $\frac{1702000000-249}{353(04)-85}$ 161—85

СЎЗ БОШИ

Ушбу ўқув қўлланма қишлоқ хўжалик олий ўқув юртларининг экономика, бухгалтерия ҳисоби ва агрономия ихтисосликлари бўйича таълим олувчи студентларга мўлжалланган бўлиб, СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлигининг ўқув методик бошқармаси шу ихтисосликлар учун тасдиқлаган олий математика программаси асосида ёзилган.

Қўлланма ўн тўрт бобдан иборат бўлиб, олий математиканинг текислик ва фазодаги аналитик геометрия, векторлар алгебраси элементлари, математик анализга кириш, дифференциал ва интеграл ҳисоб, қаторлар назарияси, кўп аргументли функциянинг ҳосиласи ва дифференциали, оддий дифференциал тенглама ва чизиқли алгебра элементларига доир материални ўз ичига олади. Бундан ташқари қўлланмада эҳтимоллар назарияси ва математик статистика элементлари ҳам баён қилинган.

Эҳтимоллар назарияси, айниқса математик статистикага оид мисоллар қишлоқ хўжалигидаги тажрибалардан олинган.

Қўлланмани тузишда сиртдан ўқувчи студентларнинг билим, малака ҳамда имкониятлари ҳисобга олинди. Шунинг учун ундан сиртдан ўқиётган студентлар, шунингдек махсус ўрта ўқув юртларининг ўқувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Ҳар бир параграфда аввал қисқача назарий маълумотлар келтирилган, кейин типик мисол ва масалаларнинг батафсил ечими ва керакли методик кўрсатмалар берилган. Параграфнинг охирида эса мустақил ечиш учун етарли миқдорда мисол ва масалалар, уларнинг мумкин қадар тўла жавоблари келтирилган.

Қўлланманинг XI, XII, XIII, XIV бобларини Б. Абдалимов, IV, V, VI, VII бобларини А. Абдуғаппоров, III, VIII, IX, X бобларини М. Мусамухамедов, I, II бобларини С. Тошпўлатов ёзган.

Китоб ҳажмини ихчамлаштириш мақсадида унда қуйидаги белгилар киритилган:

△ — масала ва мисоллар ечилишининг бошланишини;

▲ — масала ва мисоллар ечилишининг тугалланишини;

□, ▨ — мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг мос равишда бошланиши ва тугалланишини билдиради.

Ушбу ўқув қўлланмани тайёрлашда ўзларининг ижодий ёрдамларини аямаганлари учун Самарқанд қишлоқ хўжалиги институти олий математика кафедрасининг мудири доцент Ж. Қулматовга, Самарқанд кооператив институти олий математика кафедрасининг мудири Э. Чоршанбоевга ва Тошкент қишлоқ хўжалиги институти экономика-кибернетика кафедрасининг мудири доцент А. Қўчқоровга, айниқса китобнинг махсус муҳаррири доцент С. Тўлагановга авторлар ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

Мазкур қўлланмани яратишда авторлар ўзларининг Халқлар Дўстлиги орденли Тошкент қишлоқ хўжалиги институтининг аудиторияларида кўп йиллар мобайнида ўқиган лекцияларини ва студентлар билан ўтказган машғулотларини асос қилиб олдилар, шунингдек мавжуд адабиётлардан ҳам фойдаланилди. Қўлланма камчиликлардан холи эмас, албатта. Қўлланмадаги камчиликларни бартараф этишга ва унинг сифатини яхшилашга қаратилган фикр ва мулоҳазаларини билдирган ўртоқларга авторлар аввалдан ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

I БОБ

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Чизиқли тенгламалар системаси

Чизиқли алгебра элементларига доир масалалар билан танишишни бир неча ўзгарувчили биринчи даражали тенгламалар системаларидан, яъни чизиқли тенгламалар системаларидан бошлаймиз.

Биз қўрадиган тенгламаларнинг коэффициентлари ва ечимларини ҳақиқий деб ҳисоблаймиз. n номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad (1)$$

берилган бўлсин. Бу системанинг номаълумлари олдидаги коэффициентларидан тузилган

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

жадвал (1) системанинг *асосий матрицаси* дейилади.

$m=n$ (яъни сатрлар сони устунлар сонига тенг) бўлган ҳолда *n-тартибли квадрат матрица* ҳосил бўлади.

(1) чизиқли тенгламалар системасини ечиш x_i номаълумларни мос k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ лар билан алмаштирганда (1) системанинг ҳар бир тенгламасини айниятга айлантирадиган k_1, $k_2, \ldots, k_n$ сонлар системаларининг барчасини топишдан иборат. Системада қатнашган барча тенгламаларни айниятларга айлантирувчи бу $k_1, k_2 \ldots, k_n$ сонлар системаси мавжуд бўлиши ҳам, мавжуд бўлмас-

лиги ҳам мумкин, ягона бўлиши ҳам, чексиз бўлиши ҳам мумкин.

Агар чизиқли тенгламалар системаси ечимга эга бўлса, система *биргаликда* дейилади.

Агар чизиқли тенгламалар системаси бирорта ҳам ечимга эга бўлмаса, у ҳолда система *биргаликда бўлмаган* система дейилади.

Ечимлар тўплами бир хил бўлган системалар *тенг кучли* ёки *эквивалент* системалар дейилади.

Тенгламалар системасини ечишда системани унга тенг кучли (соддароқ) системага алмаштириш мумкин.

Умумий кўринишда икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

берилган бўлсин. Бу системанинг биринчи тенгламасини a_{22} га ва иккинчисини a_{12} га кўпайтириб биринчисидан иккинчисини айирамиз:

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

ва биринчи тенгламани $-a_{21}$ га, иккинчисини a_{11} га кўпайтириб қўшсак:

$$x_2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

ҳосил бўлади. Агар $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ бўлса, булардан системанинг ягона

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \ (2), \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \ (3)$$

ечими топилади.

1-мисол. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7, \\ 5x + 2y = 26. \end{cases}$$

Δ. Системани ўрнига қўйиш усули билан ечамиз. Бунинг учун (2) ва (3) формулалардан фойдаланамиз:

$$x = \frac{-3\cdot 26 - 2\cdot 7}{5\cdot(-3) - 4\cdot 2} = \frac{-78 - 14}{-15 - 8} = \frac{-92}{-23} = 4;$$

$$y = \frac{5\cdot 7 - 4\cdot 26}{5\cdot(-3) - 4\cdot 2} = \frac{35 - 104}{-15 - 8} = \frac{-69}{-23} = 3.$$

Шундай қилиб системанинг ечимлари тўплами $\{(4;\ 3)\}$ дан иборат. ▲

2-мисол. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0, \\ 3x + 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

Δ. Берилган тенгламалар системасини унга тенг кучли бўлган тенгламалар системаси кўринишида ёзамиз:

$$\begin{cases} 2x - y = -4, \\ 3x + 2y = 8. \end{cases}$$

Энди 2) ва (3) формулалардан фойдаланиб, системанинг ечимини топамиз:

$$x = \frac{-1\cdot 8 - 2\cdot(-4)}{3\cdot(-1) - 2\cdot 2} = \frac{-8+8}{-3-4} = \frac{0}{-7} = 0;$$

$$y = \frac{3\,(-4) - 2\cdot 8}{3\cdot(-1) - 2\cdot 2} = \frac{-12\ -16}{-3\ -4} = \frac{-28}{-7} = 4.$$

Демак, системанинг ечимлари тўплами $\{(0;\ 4)\}$ дан иборат, яъни система ягона ечимга эга. ▲

3-мисол.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2 = 0, \\ x - \frac{2}{3}y - 1 = 0 \end{cases}$$ системани ечинг.

$$\triangle \cdot \begin{cases} 2x + 4y + 2 = 0 \\ x - \frac{2}{3}y - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = -2, \\ x - \frac{2}{3}y = 1. \end{cases}$$

Яна (2) ва (3) формулалардан фойдаланамиз:

$$x = \frac{4\cdot 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(2)}{1\cdot 4 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{4 - \frac{4}{3}}{4 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{12-4}{3}}{\frac{12+4}{3}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{1\cdot(-2) - 2\cdot 1}{1\cdot 4 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-2-2}{4+\frac{4}{3}} = \frac{4}{\frac{12+4}{3}} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}.$$

Жавоб. $\left\{\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{4}\right)\right\}$. ▲

Чизиқли тенгламалар системаларини ечишнинг махсус усулларидан бири *Гаусс усули* ёки номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули деб аталган усулдир. Бу усулда системанинг x_1 олдидаги коэффициентининг нолдан фарқли бўлган битта тенгламасини (масалан, $a_{11} \neq 0$ бўлса биринчисини) олиб, уни мос сонларга кўпайтириб бошқа тенгламаларга қўшиш йўли билан бошқа тенгламаларда x_1 олдидаги коэффициентлар нолга айлантирилади. Ҳосил бўлган система берилган системага тенг кучли бўлади. Янги системанинг x_1 иштирок этмаган (биринчи тенгламадан бошқа тенгламаларида) қисмида бу процесс такрорланади ва ҳоказо. Агар система ягона ечимга эга, яъни аниқ бўлса, бу процесс натижасида чекли қадамдан сўнг берилган системадан, тенгламаларида номаълумлар сони кетма-кет биттадан кам бўлган ва охиргисида битта номаълум бўлган системага келинади. Бу системанинг охирги тенгламасидан номаълумнинг қийматини топиб ундан олдингисига қўйилади ва ундан иккинчи номаълумни топиб ундан аввалгисига қўйилади ва ҳоказо.

Энди умумий кўринишдаги уч номаълумли учта чизиқли тенглама системасини ечиш билан танишамиз.

Бу усулни

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

кўринишдаги уч номаълумли учта тенглама системасини ечишда кўрсатамиз.

4-мисол. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

△. Бу системани ечиш учун унинг биринчи тенгламасини x нинг олдидаги коэффициентига бўламиз. У ҳолда аввалгига тенг кучли тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

Ҳосил бўлган системанинг биринчи тенгламасини 3 га кўпайтириб, унинг иккинчи тенгламасига ҳадлаб қўшиб ва — 4 га кўпайтириб унинг учинчи тенгламасига ҳадлаб қўшиб, яна аввалгига тенг кучли системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x-2y+2z=5, \\ \quad 2y-4z=-10, \\ \quad 5y-7z=-19. \end{cases}$$

Бу системанинг иккинчи ва учинчи тенгламалари фақат y ва z ўзгарувчиларни ўз ичига олади. Энди иккинчи тенгламада y ўзгарувчининг коэффициентини бирга тенглаштирамиз. Бунинг учун иккинчи тенгламанинг ҳамма ҳадларини 2 га бўламиз:

$$\begin{cases} x-2y+2z=5, \\ \quad y-2z=-5, \\ \quad 5y-7z=-19. \end{cases}$$

Бу системанинг иккинчи тенгламасини (-5) га кўпайтириб, учинчи тенгламасига ҳадлаб қўшамиз:

$$\begin{cases} x-2y+2z=5, \\ \quad y-2z=-5, \\ \qquad 3z=6. \end{cases}$$

Бу система ҳам аввалгига тенг кучли. Унинг учинчи тенгламасини ҳадлаб 3 га бўламиз ва $z=2$ ни топамиз. Шундай қилиб, 1- ва 2-тенгламалардан x ва y ўзгарувчиларни топиш имконига эга бўлдик:

$$\begin{array}{ll} y-2z=-5, & x-2y+2z=5, \\ y-2\cdot2=-5, & x-2\cdot(-1)+2\cdot2=5, \\ y=-5+4, & x=5-6, \\ y=-1. & x=-1. \end{array}$$

Жавоб. $\{(-1;\ -1;\ 2)\}$.▲

5-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 4x+8y-4z=28, \\ 2x-y+z=2, \\ 3x-5y+2z=-7. \end{cases}$$

△. Системани Гаусс усули билан ечамиз:

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x+8y-4z=28 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x-5y+2z=-7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=7 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x-5y+2z=-7 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=7 \\ -5y+3z=-12 \\ -11y+5z=-28 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=7 \\ \qquad y-\frac{3}{5}z=\frac{12}{5} \\ -11y+5z=-28 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ y - \frac{3}{5}z = \frac{12}{5} \\ -\left(\frac{33}{5} + 5\right)z = \frac{132}{5} - 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ y - \frac{3}{5}z = \frac{12}{5} \\ -\frac{8}{5}z = -\frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ y - \frac{3}{5}z = \frac{12}{5} \\ z = 1. \end{cases}$$

$z = 1$ ни иккинчи ва биринчи тенгламаларга қўйиб y ва x ўзгарувчиларни топамиз:

$$y - \frac{3}{5}z = \frac{12}{5}; \qquad x + 2y - z = 7;$$

$$y - \frac{3}{5}\cdot 1 = \frac{12}{5}; \qquad x + 2\cdot 3 - 1 = 7;$$

$$y = \frac{12}{5} + \frac{3}{5} = \frac{15}{5} = 3. \qquad x = 7 - 5 = 2.$$

Жавоб. $\{(2;\ 3;\ 1)\}$.▲

6-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3y - z = 3, \\ x + 2y + 3z = 12, \\ -3x + 5y - 2z = 7. \end{cases}$$

$$\triangle\cdot \left\{\begin{array}{r} 3y - z = 3 \\ x + 2y + 3z = 12 \\ -3x + 5y - 2z = 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - z = 3 \\ x + 2y + 3z = 12 \\ 11y + 7z = 43 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 12 \\ 3y - z = 3 \\ 11y + 7z = 43 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot(-11) \\ \cdot 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=12 \\ 3y - z = 3 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 12 - 3\cdot 3 \\ 3y = 3 + 3 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2\cdot 2 = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 2, \\ z = 3. \end{cases}$$

Жавоб. $\{(-1;\ 2;\ 3;)\}$.▲

7-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 12, \\ 3x \qquad - z = 3, \\ 5x - 3y - 2z = 7. \end{cases}$$

△. Системани Гаусс усули билан ечамиз:

$$\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=12\\3x-z=3\\5x-3y-2z=7\end{array}\right|\begin{array}{l}\cdot(-1,5)\\ \\ \\ \end{array}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=12\\1,5y-5,5z=-15\\5y-9,5z=-23\end{array}\right|\begin{array}{l} \\ \cdot 5,5\\ \cdot(1,5)\end{array}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=12\\8,25y+30,25z=82,5\\-8,25y-14,25z=-34,5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=12\\8,25y+30,25z=82,5\\16z=48\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=12\\8,25y+30,25z=92,5\\z=3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=12\\8,25y+30,25\cdot3=82,5\\z=3\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=12\\8,25y=-8,25\\z=3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=12\\y=-1\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x-1+3\cdot3=12\\y=-1\\z=3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2\\y=-1\\z=3.\end{array}\right.$$

Жавоб. $\{(2;\ -1;\ 3)\}$. ▲

□. 1. $\left\{\begin{array}{l}5x+2y=11,\\2x-3y=12.\end{array}\right.$ *Жавоб.* (3; —2).

2. $\left\{\begin{array}{l}4x+y+3=0,\\5x-2y+7=0.\end{array}\right.$ *Жавоб.* (—1; 1).

3. $\left\{\begin{array}{l}3x-7y+6=0,\\\frac{1}{2}x+5y+1=0.\end{array}\right.$ *Жавоб.* (—2; 0).

4. $\left\{\begin{array}{l}-2x+3y=4,\\4x-5y=-6.\end{array}\right.$ *Жавоб.* (1; 2).

5. $\left\{\begin{array}{l}7x-2y=-1,\\3x-5y=12.\end{array}\right.$ *Жавоб.* (—1; —3).

6. $\left\{\begin{array}{l}4x+y+5=0,\\3x+5y-9=0.\end{array}\right.$ *Жавоб.* (—2; 3).

7. $\left\{\begin{array}{l}2x+y-5z=3,\\3x-5y+2z=1,\\5x-6y+3z=6.\end{array}\right.$ *Жавоб.* (3; 2; 1).

8. $\left\{\begin{array}{l}4x+3y+2z+3=0,\\7x+9y-3z+8=0,\\2x-5y+6z+3=0.\end{array}\right.$ *Жавоб.* (—2; 1; 1)

9. $\begin{cases} 5x + 2y - 3z - 3 = 0, \\ 8x - 3y + 2z + 7 = 0, \\ 2x + 3y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$ *Жавоб.* (0; 3; 1).

10. $\begin{cases} 7x + 2y - 8z - 1 = 0, \\ 5x - 3y + 13z - 14 = 0, \\ x + 2y - 9z + 5 = 0. \end{cases}$ *Жавоб.* (1; −3; 0).

11. $\begin{cases} y + 2z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 19, \\ 2x + 5y + z = -5. \end{cases}$ *Жавоб.* (1; −2; 3).

12. $\begin{cases} 3x - 4y + z = 6, \\ 2x + 6y - 3z = -10, \\ 5x - 8y \qquad = 1. \end{cases}$ *Жавоб.* $\left(1; \frac{1}{2}; 5\right)$.

13. $\begin{cases} -2x + 5y + 3z = 2, \\ 3x \qquad + 6z = -4, \\ 4x + 3y + 9z = -2. \end{cases}$ *Жавоб.* $\left(-2; 1; \frac{1}{3}\right)$.

14. $\begin{cases} -8y + 3z - 4 = 0, \\ 5x + 4y - 2z + 3 = 0, \\ 7x + 12y \qquad - 3 = 0, \end{cases}$ *Жавоб.* $\left(0; \frac{1}{4}; 2\right)$.

15. $\begin{cases} 5x + 6y - 5 = 0, \\ 3x + 2\ \frac{1}{5}z + 1 = 0, \\ 4y - 5z - 7 = 0, \end{cases}$ *Жавоб.* (0, 4; 0,5; −1).■

2-§. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар

Бизга икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Бу системанинг асосий матрицаси иккинчи тартибли ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

квадрат матрицадан иборат. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ бўлганда (1) система ягона

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{3}$$

ечимга эга эканини олдинги параграфда эслатилган эди.

(3) формулалар махражидаги ифода (2) матрица бош диагонал элементлари кўпайтмасидан иккинчи диагонал элементлари кўпайтмасининг айирмасидан иборат. Бу сон (2) матрицанинг детерминанти (ёки аниқловчиси) ёки одатда *иккинчи тартибли детерминант* дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}. \tag{4}$$

Шунга эътибор бериш лозимки, матрица сонлардан ташкил топган жадвал бўлса, унинг детерминанти шу матрица элементлари билан маълум равишда боғлиқ бўлган сондир.

(4) формуланинг ўнг томонидаги кўпайтмаларнинг ишоралари қуйидаги 1-схемада кўрсатилганидек қўйилади.

(3) ифодаларнинг суратларини махражи каби детерминантлар кўринишида ифодалаш мумкин: x_1 ни топиш формуласининг сурати (4) детерминант биринчи устунини (1) системанинг озод ҳадлари билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминантдан иборат:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{4'}$$

Шунингдек, x_2 учун ифоданинг сурати (4) детерминант иккинчи устунини худди шундай алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминантдир, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \tag{4''}$$

Соддалик учун иккинчи тартибли детерминантдан фойдаланиб, учинчи тартибли детерминантга қуйидагича таъриф беришимиз мумкин.

Учинчи тартибли детерминант деб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

символ билан белгиланувчи ва сон қиймати иккинчи тартибли детерминант орқали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + $$
$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

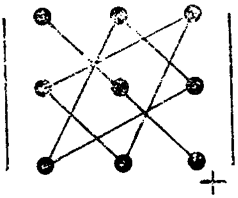
тенглик билан аниқланувчи ифодага айтилади.

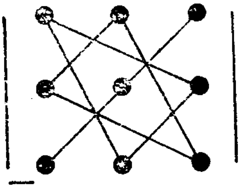
(5) формуладаги иккинчи тартибли детерминант қийматларини (4) формуладан олиб қўйсак, учинчи тартибли детерминант учун ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \qquad (6)$$

формулани ҳосил қиламиз:

(6) формуланинг ўнг томонидаги қўшилувчиларнинг ишораларини қуйидаги 2-схемадан фойдаланиб аниқлаш қулай:

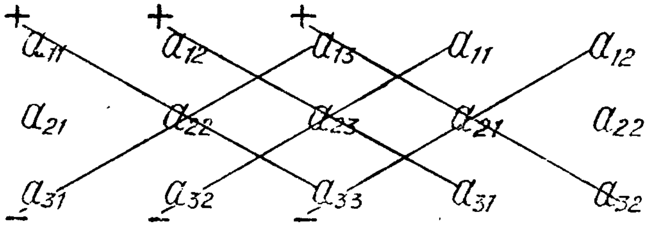




(6) формуладаги учта мусбат ҳадлардан бири учинчи тартибли детерминант асосий диагонали элементларининг кўпайтмасидан, қолган икки ҳади эса асосий диагоналга параллелларда жойлашган ва унга қарши бурчакдаги элементларнинг кўпайтмасидан иборат.

(6) формуладаги учта манфий ҳадлар иккинчи диагоналга нисбатан худди шу усулда топилади; детерминантни ҳисоблашнинг бу усули *учбурчак усули* дейилади.

Учинчи тартибли детерминантни қуйидаги Сарриус қоидаси билан ҳам ҳисоблаш мумкин. Жадвалнинг ўнг ёнига биринчи ва иккинчи устунни ёзамиз. Бош диагонал-



даги элементларнинг $a_{11}a_{22}a_{33}$ кўпайтмасини тузамиз (3-схема). Шунингдек, бунга „параллел диагоналлар“ да турган элементларнинг кўпайтмасини тузиб, уларни ўз ишоралари билан оламиз.

Энди бунга тескари бўлган „ёрдамчи диагонал“ даги элементларнинг $a_{31}a_{22}a_{13}$ кўпайтмасини ва шунингдек, бунга „параллел бўлган диагоналлардаги“ элементлар кўпайтмаларини оламиз. Бу кўпайтмаларнинг ишоралари тескари қилиб олинади. Бу кўпайтмаларнинг ҳаммасининг алгебраик йиғиндиси (6) формуланинг ўнг қисмидаги йиғиндининг ўзгинаси бўлади.

Учинчи тартибли детерминантнинг ёйиб ёзилган ифодасини текширсак, кўрамизки, алгебраик йиғиндининг ҳар бир ҳади ишорасигача аниқлик билан учта элемент кўпайтмасидан иборат бўлиб, булар ичида ҳеч қайси икки кўпайтувчи бир устун ё бир йўлдан олинмайди. Детерминант элементларидан бирини, масалан, a_{11} ни олайлик. Бу элемент детерминантнинг иккита $a_{11}a_{22}a_{33}$ ва $-a_{11}a_{32}a_{23}$ ҳадларига киради. a_{11} ни қавсдан ташқарига чиқарсак, $a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$ кўпайтувчи ҳосил бўлиб, у a_{11} билан бирга детерминант ифодасига киради. Мана шу кўпайтувчи a_{11} элементнинг *тўлдирувчи минори* деб аталиб, A_1 символ орқали белгиланади. A_1 минор иккинчи тартибли детерминант шаклида кўрсатилиши мумкин.

Масалан,

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

a_{11} ўрнига детерминантнинг исталган элементларини олиш мумкин. Масалан, a_{12} ни олайлик, a_{12} элемент ушбу

$$A_2 = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} = -\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$$

кўпайтувчи билан бирликда детерминант ифодасига киради.

Шундай қилиб, бирор элементнинг *минори* деб, шу элемент турган устун ва сатрни ўчиришдан ҳосил бўлган детерминантга айтилади.

Бирор элементнинг *алгебраик тўлдирувчиси* деб, мусбат ёки манфий ишора билан олинган тўлдирувчи минорига айтилади, бунда қуйидаги қоидадан фойдаланилади: агар элемент турган устун ва сатр номерларининг йиғиндиси жуфт сон бўлса, шу элемент минори ўз ишораси билан, агар тоқ сон бўлса, қарама-қарши ишора билан олинади ((5) формулага қаранг).

1-мисол. Қуйидаги детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix}2 & -5\\ 3 & 4\end{vmatrix}.$$

△. Бу детерминантни ҳисоблаш учун (4) формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{vmatrix}2 & -5\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot4-3\cdot(-5)=8+15=23. \ ▲$$

2-мисол. Қуйидаги учинчи тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 6\\ -3 & 2 & -5\\ 1 & -1 & 7\end{vmatrix}.$$

△. Бу детерминантни уч хил усул билан ҳисоблаш мумкин:

1-усул. Бу усулда (6) формула ёки 2-схемадан фойдаланиб детерминантни ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 6\\ -3 & 2 & -5\\ 1 & -1 & 7\end{vmatrix}=4\cdot2\cdot7+(-3)\cdot(-1)\cdot6+3\cdot(-5)\cdot1-$$
$$-6\cdot2\cdot1-3\cdot(-3)\cdot7-4\cdot(-5)\cdot(-1)=$$
$$=56+18-15-12+63-20=137-47=90.$$

2-усул. Бу усулда (5) формуладан фойдаланиб, детерминантни унинг биринчи сатри бўйича ёйиб чиқамиз. Сўнгра ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 6\\ -3 & 2 & -5\\ 1 & -1 & 7\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}2 & -5\\ -1 & 7\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 1 & 7\end{vmatrix}+$$
$$+6\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4\,(2\cdot7-(-1)\cdot(-5))-3\,((-3)\cdot7-$$
$$-1(-5))+6((-3)\cdot(-1)-2\cdot1)=$$

$$=4\,(14-5)-3(-21+5)+6(3-2)=4\cdot 9-3\cdot(-16)+$$
$$+6\cdot 1=36+48+6=42+48=90.$$

3-усул. Бу усулда Сарриус қоидаси бўйича 3-схемадан фойдаланиб қуйидаги схемани тузамиз ва ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 4 & 3\\ -3 & 2 & -5 & -3 & 2\\ 1 & -1 & 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot 2\cdot 7+3(-5)\cdot 1+6(-3)\cdot(-1)-1\cdot 2\cdot 6-(-1)\cdot(-5)\cdot 4-7\cdot(-3)\cdot 3=56-15+18-12-20+63=$$
$$=137-47=90.\blacktriangle$$

☐. Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг:

16. $\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 3 & 15 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* 18.

17. $\begin{vmatrix} 35 & -6\\ 4 & 0 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* 24.

18. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$. *Жавоб.* 1.

19. $\begin{vmatrix} 12 & -3 & -8\\ 0 & 1 & 4\\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* − 112.

20. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 5\\ -8 & 6 & -3 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* 0.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* 0.

22. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 7\\ -6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* 0.

23. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* −17.

24. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2\\ 3 & 6 & 9\\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* −51.

25. $\begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & -10 & 1 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* 34.

3-§. Чизиқли тенгламалар системасини детерминантлар ёрдамида ечиш. Крамер формулалари

1. Икки номаълумли чизиқли тенгламалар системасини кўрайлик:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Бу системадан фойдаланиб қуйидаги детерминантларни тузамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta$$

(Бу асосий детерминант x ва y ўзгарувчиларнинг коэффициентларидан тузилди.)

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta x$$

(Бу ёрдамчи детерминант x ўзгарувчининг коэффициентлари ўрнига озод ҳадларни алмаштириш билан ҳосил қилинади.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta y$$

(Бу детерминант асосий детерминант иккинчи устуни ўрнига озод ҳадлар устунини қўйиш натижасида ҳосил бўлади.)

1) Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, (1) система биргина ечимга эга. Бу ечим қуйидаги формулалардан фойдаланиб топилади:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}. \qquad (2)$$

2) Агар $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta_x \neq 0$ ёки $\Delta_y \neq 0$ бўлса, (1) системанинг ечими йўқ.

3) Агар $\Delta = 0$; $\Delta_x = 0$; $\Delta_y = 0$ бўлса, система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

2. Уч номаълумли учта тенгламалар системаси

$$(3) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}$$

берилган бўлсин. Бу системанинг ечимини топиш учун қуйидаги детерминантларни тузамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

(Бу асосий детерминант, x, y, z ўзгарувчиларнинг коэффициентларидан тузилди.)

$$\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_x$$

(Бу ёрдамчи детерминант, x ўзгарувчининг коэффициентлари ўрнига озод ҳадларни алмаштиришдан тузилади.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_y$$

(Бу ёрдамчи детерминант, y ўзгарувчининг коэффициентлари ўрнига озод ҳадларини алмаштиришдан тузилади.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix} = \Delta_z$$

(Бу ёрдамчи детерминант, z ўзгарувчининг коэффициентлари ўрнига озод ҳадларни алмаштиришдан тузилади.).

1) Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, (3) система биргина ечимга эга. Бу ечим қуйидаги формулалардан фойдаланиб топилади:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{4}$$

2) Агар $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta_x \neq 0$ ёки $\Delta_y \neq 0$; $\Delta_z \neq 0$ бўлса, (3) системанинг ечими мавжуд бўлмайди.

3) Агар $\Delta = 0$; $\Delta_x = 0$; $\Delta_y = 0$ ва $\Delta_z = 0$ бўлса, (3) система чексиз кўп ечимга эга. (2) ва (4) формулалар Крамер қоидасини ифода қилади.

Мисоллар кўрамиз.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 3x - 5 = 1, \\ 4x + 3 = 11 \end{cases}$$

системани ечинг.

△. Асосий ва ёрдамчи детерминантларни ҳисоблаймиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 20 = 29;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 55 = 58;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 33 - 4 = 29;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{29}{29} = 1.$$

Жавоб. (2; 1).▲

2-мисол. Қуйидаги уч номаълумли учта тенглама системасини ечиш талаб қилинган бўлсин.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -5; \\ x + 2y - 4z = -9, \\ 5x - 4y + 6z = 5. \end{cases}$$

△. Крамер формулаларидан фойдаланамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 + 60 - 10 - 32 + 18 = 102 - 46 = 56.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -9 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -60 + 36 + 60 - 10 - 162 + 80 = 1.6 - 172 = -56.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -108 + 100 + 5 + 45 + 30 + 40 = 220 - 108 = 112.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 20 + 135 + 50 + 15 - 72 = 240 - 72 = 168.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-56}{56} = -1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{112}{56} = 2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{168}{56} = 3.$$

Жавоб. (—1; 2; 3).▲

□. Қуйидаги тенгламалар системасини Крамер формуласидан фойдаланиб ечинг:

26. $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 5x + 4y - 1 = 0. \end{cases}$ *Жавоб.* (1; —1).

27. $\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0, \\ 4x - 5y - 7 = 0. \end{cases}$ *Жавоб.* (—2; —3).

28. $\begin{cases} 4x - 6y + 7 = 0, \\ x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$ *Жавоб.* $\left(\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{2}\right)$.

29. $\begin{cases} 2x - 3y = 22, \\ -3x - 4y = 1. \end{cases}$ *Жавоб.* (5; —4).

30. $\begin{cases} 5x - 4y - 3 = 0, \\ x - \frac{1}{2}y - 3 = 0. \end{cases}$ *Жавоб.* (7; 8).

31. $\begin{cases} -7x-2y-1=0, \\ 5x-4y-7=0. \end{cases}$ *Жавоб.* (—1; —3).

32. $\begin{cases} 2x-11y+3z=-2, \\ 3x+13y+5z=-4, \\ 4x-17y-2z=12. \end{cases}$ *Жавоб.* (2; 0; —2).

33. $\begin{cases} 3x-5y+7z-9=0, \\ 2x-4y-5z-6=0, \\ -5x+2y-3z+15=0. \end{cases}$ *Жавоб.* (3; 0; 0).

34. $\begin{cases} 3x+4y+7z+11=0, \\ -2x-5y-15z-4=0, \\ 4x-3y+5z-6=0. \end{cases}$ *Жавоб.* (—2; —3; 1).

35. $\begin{cases} -5x+7y-4z+5=0, \\ 3x-8y+3z+2=0, \\ 2x+5y+5z-3=0. \end{cases}$ *Жавоб.* (4; 1; —2). ■

4-§. *n*-тартибли детерминантлар ва уларни ҳисоблаш

n-тартибли квадрат матрица берилган бўлсин:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(1) матрицага мос келувчи n-тартибли детерминантни, иккинчи ва учинчи тартибли детерминантдаги бўлгани каби,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

кўринишда белгилаймиз.

n-тартибли детерминантлар $n=2$ ва $n=3$ бўлганда мос равишда илгари кўрилган иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларга айланади, $n=1$ да эса, яъни фақат битта элементдан иборат матрица учун унинг детерминанти шу элементнинг ўзига тенг.

Энди $n>3$ бўлганда n-тартибли детерминантларни, қулайлик учун, $(n-1)$-тартибли детерминантлар орқали аниқлаймиз. Дастлаб қуйидаги белгилашларни киритамиз:

n-тартибли (2) детерминантни d деб белгилаймиз. Агар a_{ij} d детерминантнинг i-сатр ва j-устунида жойлашган элементи бўлса, M_{ij} орқали бу элементнинг тўлдирувчи минорини, яъни детерминантда i-сатр ва j-устунни ўчиришдан ҳосил бўлган $(n-1)$-тартибли минорни белгилаймиз. Сўнгра A_{ij} орқали a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси деб аталган

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

ифодани белгилаймиз.

Энди d детерминантни ушбу

$$d=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+\dots+a_{1n}A_{1n} \qquad (3)$$

кўринишда аниқлаймиз.

Шундай қилиб, n-тартибли детерминант унинг биринчи сатри барча элементларини уларнинг мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг.

(3) ёйилмада алгебраик тўлдирувчиларни мусбат ёки манфий ишорали мос минорлар билан алмаштирилиб, n-тартибли детерминантни ҳисоблаш $(n-1)$-тартибли бир неча детерминантни ҳисоблашга келтирилади.

Детерминантнинг хоссалари

1-хосса. *Детерминантнинг барча сатрларини унинг мос устунлари билан алмаштиришдан унинг қиймати ўзгармайди*, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Бу хоссадан n-тартибли d детерминантни

$$d=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\dots+a_{n1}A_{n1} \qquad (3')$$

кўринишда ҳам аниқлаш мумкинлиги, яъни детерминантни унинг биринчи устуни бўйича ёйиш мумкинлиги келиб чиқади.

2-хосса. *Агар детерминантнинг бирор сатри (ёки устуни) элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда детерминант нолга тенг бўлади:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

3-хосса. *Детерминантнинг икки сатри (ёки устуни) ни ўзаро алмаштиришдан унинг абсолют қиймати ўзгармай, фақат ишораси тескари ишорага алмашади, яъни*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ёки

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4-хосса. *Иккита сатри ёки устуни бир хил бўлган детерминантнинг қиймати нолга тенг:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

5-хосса. *Бирор сатр (ёки устун) элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ёки

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6-хосса. *Иккита пропорционал сатрга (ёки устунга) эга бўлган детерминантнинг қиймати нолга тенг:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & ka_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & ka_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

7-хосса. *Агар n-тартибли детерминант i-сатрининг барча элементлари иккита қўшилувчининг йиғиндиси, яъни*

$$a_{ij} = b_j + c_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

кўринишда ифодаланган бўлса, у ҳолда детерминант шундай иккита детерминантнинг йиғиндисига тенг бўладики, бу детерминантларнинг i-сатридан ташқари барча сатрлари берилган детерминантникидай бўлади, уларнинг биридаги i-сатр b_j элементларидан, иккинчиси эса c_j элементларидан иборат бўлади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \dots & b_n+c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8-хосса. *Детерминантнинг бирор сатрининг (устунининг) элементларига бошқа сатр (устун) элементларини ихтиёрий бир хил сонга кўпайтириб қўшишдан детерминантнинг қиймати ўзгармайди:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \dots & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

бунда k — ихтиёрий сон.

Энди (2) детерминантни ҳисоблаш масаласига қайтамиз. Детерминантнинг таърифи сифатида қабул қилинаётган (3) формуладан ва 3-хоссадан фойдаланиб детерминантни ихтиёрий i-сатр элементлари бўйича ёйиш формуласи

$$d = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \qquad (4)$$

ни чиқариш мумкин, яъни детерминантнинг бирор сатр (устун) элементларини мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмаларининг йиғиндиси детерминантнинг қийматини беради.

Агар i-сатрдаги баъзи элементлар нолга тенг бўлса, у ҳолда (4) ёйилмада, уларга мос минорларни, табиийки, ҳисоблаб ўтириш керак эмас. Шунга мувофиқ дастлаб детерминантни 8-хоссани татбиқ қилиб, шундай ўзгартирамизки, унинг сатрларидан (устунларидан) бирида етарлича кўп элементлар ноллар билан алмашсин. Сўнгра бу сатрга (4) формулани қўллансак, ҳосил бўладиган ёйилмада кўп ҳадлар нолга айланади. Ҳатто n-тартибли детерминантни ҳисоблашни битта $(n-1)$-тартибли детерминантни ҳисоблашга келтириш мумкин. Ҳақиқатан, i-сатрда бирор a_{ij} элемент нолдан фарқли бўлса, j-устунни $-\frac{a_{ik}}{a_{ij}}$ га кўпайтириб, k-устунга $(k \neq j)$ қўшиш билан i-сатрдаги ихтиёрий k-ўринда турган элементни нолга айлантириш мумкин. Бу процессни чекли марта такрорлаб i-сатрда a_{ij} дан бошқа ҳамма элементларни нолга айлантирилади. Сўнгра (4) формулани қўллансак, n-тартибли детерминант битта $(n-1)$-тартибли детерминантни ҳисоблашга келади.

1-мисол. Қуйидаги тўртинчи тартибли детерминантни ҳисобланг.

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

$\triangle$. Юқори тартибли детерминант ҳисобининг таърифига асосан, берилган детерминантни 1-сатри бўйича ёйиб чиқамиз:

$$d=(-1)^{1+1}\cdot 2\begin{vmatrix} -9 & 13 & 7 \\ -1 & 5 & -5 \\ 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 13 & 7 \\ 3 & 5 & -5 \\ 2 & -7 & -10 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 3 & -1 & -5 \\ 2 & 18 & -10 \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 18 & -7 \end{vmatrix}=$$

$$= 2\cdot(450-1170+49-630-130+315)-5\cdot(-50-130-$$
$$-147-70+390-35)-(10+90+378+14-270+90)-$$
$$-3\cdot(7-90+702+26-189-90)=2\cdot(-1116)-5\cdot(-42)-$$
$$-312-3\cdot(366)=-2232+210-312-1098=-3432$$

Демак, $d=-3432$ экан. ▲

2-мисол. Ушбу тўртинчи тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$d=\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

△. Бу детерминантни унинг учинчи сатрида битта ноль борлигидан фойдаланиб, шу сатр бўйича ёямиз:

$$d=(-1)^{3+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

ҳосил қилинган учинчи тартибли детерминантларни ҳисоблаб, қуйидагини топамиз:

$$d=2\cdot 32+0+(-80)+96=64-80+96=80$$

$$d=80.\ \blacktriangle$$

3-мисол. Ушбу бешинчи тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$d=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни бевосита сатри ёки устуни бўйича ёйиб учинчи тартибли детерминантга келтириб ҳисобласак, 20 та учинчи тартибли детерминантни ҳисоблашга тўғри келади. Шунинг учун аввал уни бирор устуни ёки сатри элементларини ноларга айлантириш билан тартибини битта камайтирамиз, яъни битта тўртинчи тартибли детерминантни ҳисоблашга келтирамиз. Бунинг учун 5-сатрни 2 га кўпайтириб, иккинчи сатрга қўшамиз, сўнгра тўртинчи сатрдан 5-сатрни айириб, қуйидаги детерминантни ҳосил қиламиз:

$$d=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 10 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни нолга тенг бўлмаган фақат битта элементга эга бўлган учинчи устуни бўйича ёямиз (индекслар йиғиндиси 5 + 3, яъни жуфт):

$$d = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 10 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ҳосил бўлган детерминантнинг тартибини камайтириш мақсадида, 4-сатрни биринчи ва учинчи сатрга қўшамиз, 2-сатрга эса 4-сатр элементларини 10 га кўпайтириб қўшамиз ва

$$d = -\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ 21 & 32 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳосил қиламиз. Бу детерминантни учинчи устуни бўйича ёйиб (индекслар йиғиндиси 4 + 3, яъни тоқ) учинчи тартибли ушбу

$$d = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 21 & 32 & 8 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

детерминантга эга бўламиз, бу детерминантни эса биз ҳисоблашни биламиз:

$$d = -(-384 + 240 + 126 - 480 + 504 - 48) = 42,$$

$$d = 42. \ ▲$$

□. Ушбу детерминантларни ҳисобланг:

36. 1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* 120.

2) $\begin{vmatrix} -4 & 10 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. *Жавоб.* 2064.

37.
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -4 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Жавоб. 60.

38.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 8 & -2 & 16 & 6 \\ 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Жавоб. 0.

39.
$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Жавоб. 7.

40.
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Жавоб. —56.

41.
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Жавоб. —372.

42.
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & -2 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \\ 12 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Жавоб. 160.

43.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 11 \\ 3 & 2 & 5 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 19 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -7 \end{vmatrix}.$$

Жавоб. 6.

44.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}.$$

Жавоб. —426.

II БОБ

ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

1-§. Тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси. Икки нуқта орасидаги масофа

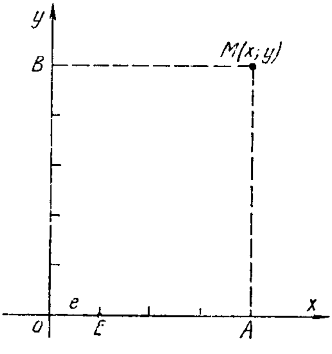
Текисликда нуқтанинг вазиятини аниқлаш учун тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси ясалади:

1) бир-бирига перпендикуляр бўлган иккита тўғри чизиқ *координата ўқлари* деб аталади: Ox ўқи — абсциссалар ўқи; Oy ўқи — ординаталар ўқи.

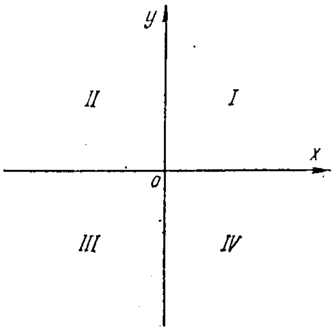
Ҳар бир ўқда мусбат йўналиш стрелка билан кўрсатилади;

2) координата ўқлари кесишган O нуқта *координаталар боши* деб аталади (2.1- чизма);

3) ҳар бир ўқ учун узунлик бирликлари танлаб олинади: $|OE| = e$ (одатда ҳар иккала ўқ учун бир хил узунлик бирлиги олинади). M нуқтадан абсцисса ўқига MA перпендикуляр туширилади ва у ажратган OA кесма узунлиги $|OA|$ нинг узунлик бирлигига нисбати $x = \frac{|OA|}{|OE|}$ M нуқтанинг *абсциссаси* дейилади. Бунда OA кесма координаталар бошидан абсцисса ўқининг мусбат йўналиши томонида ёки қарама-қарши томонида жойлашишига қараб x мусбат ёки манфий ишорада олинади. Худди шу усулда ҳосил қилинган $y = \frac{|OB|}{|OE|}$ M нуқтанинг *ординатаси* дейилади. M нуқтанинг абсциссаси ва ординатаси биргаликда M нуқтанинг *координаталари* дейилади. M нуқтанинг текисликдаги вазияти маълум бўлса, унинг координатала-



2.1- чизма



2.2- чизма

рини топиш мумкин эканлигини кўрдик. Аксинча, нуқтанинг (x; y) координаталари берилган бўлса, ўқларда $OA = x \cdot OE$ ва $OB = y \cdot OE$ кесмаларни ажратиб A ва B нуқталардан вертикаллар чиқарилиб, улар кесишган нуқта изланган M нуқта вазиятини аниқлайди. Яъни текисликдаги нуқта ўзининг координаталари билан тўлиқ аниқланади. Шунинг учун ҳам нуқтани ҳарф билан белгилаганда ёнида қавс ичида координаталари ҳам кўрсатилиб $M(x; y)$ шаклда ифодаланади.

Координата ўқлари бутун текисликни тўрт бўлакка (тўрт чоракка) бўлади (2.2- чизма). Бу чоракларда нуқталар координаталарининг ишоралари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Чораклар	Координаталарнинг ишоралари	
	x (абсцисса)	y (ордината)
I	$x > 0$	$y > 0$
II	$x < 0$	$y > 0$
III	$x < 0$	$y < 0$
IV	$x > 0$	$y < 0$

Абсциссалар ўқига жойлашган нуқталарнинг ординаталари нолга тенг, ординаталар ўқидаги нуқталарнинг эса абсциссалари нолга тенг. Масалан, 2.1- чизмада: A (x; 0) ва B (0; y), E (1; 0).

Агар нуқта координаталар бошида жойлашган бўлса, унинг ҳар иккала координатаси (x ва y) нолга тенг бўлади, яъни O (0; 0).

Агар икки (A ва B) нуқта ўзининг координаталари (x_1; y_1) ва (x_2; y_2) билан берилган бўлса, улар орасидаги масофа d ушбу

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

формула билан топилади, яъни кесманинг узунлиги кесма учларининг бир хил исмли координаталари айирмалари квадратларининг йиғиндисидан олинган квадрат илдизга тенг.

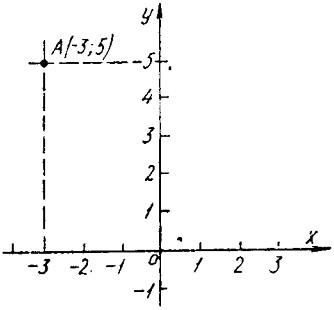
Хусусан, координаталар бошидан M (x; y) нуқтагача бўлган масофа

$$d=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (2)$$

формула билан аниқланади.

1-мисол. M (—3; 5) нуқтани ясанг.

△. Ox ўқидан узунлиги $|-3|$ га тенг бўлган $|OA|$ кесмани ажратамиз. Oy ўқидан узунлиги 5 га тенг бўлган $|OB|$ кесмани ажратамиз. A нуқтадан Oy ўқига параллел тўғри чизиқ, B нуқтадан эса Ox ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу икки тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси, бизни қизиқтирган M нуқта бўлади (2.3-чизма). ▲



2.3- чизма

2-мисол. A (2; —3) ва B (—1; 1) нуқталар орасидаги масофани топинг.

△. Масалани ечишда (1) формуладан фойдаланамиз.

$$x_1=2, \quad y_1=-3, \quad x_2=-1, \quad y_2=1$$

қийматларни (1) формулага қўйиб изланган масофани топамиз:

$$d=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(-1-2)^2+(1-(-3))^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Демак, берилган нуқталар орасидаги масофа, яъни AB кесманинг узунлиги 5 га тенг экан. ▲

Эслатма. Бу ерда $|BA|$ кесманинг узунлиги ҳам 5 га тенг, яъни $|AB|=|BA|=5$.

3-мисол. Ox ўқида жойлашган ва A (3; 2), B (1; —6) нуқталардан бир хил узоқликда ётган нуқтани топинг.

△. Масаланинг шартидан маълумки, изланаётган C нуқтанинг ординатаси нолга тенг, яъни C (x; 0). (1) формула ёрдамида AC ва BC кесмаларнинг узунликларини топамиз:

$$|AC|=\sqrt{(x-3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+4},$$
$$|BC|=\sqrt{(x-1)^2+(0-(-6))^2}=\sqrt{(x-1)^2+36}.$$

Масаланинг шартига кўра $|AC| = |BC|$. Қуйидагига эгамиз:

$$\sqrt{(x-3)^2+4} = \sqrt{(x-1)^2+36}.$$

Ҳосил бўлган тенгламани ечамиз:

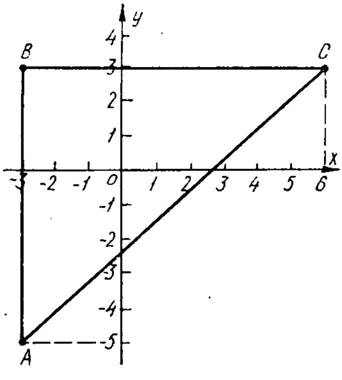
$$(\sqrt{(x-3)^2+4}\,)^2 = (\sqrt{(x-1)^2+36})^2 \Longleftrightarrow (x-3)^2+4 = $$
$$= (x-1)^2+36 \Rightarrow x^2-6x+9+4 = x^2-2x+1+36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9+4-x^2+2x-1-36=0 \Rightarrow -4x-24=0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow -4x=24 \Longleftrightarrow 4x=-24 \Longleftrightarrow x=-6.$$

Демак, изланаётган C нуқтанинг координаталари $x=-6$, $y=0$ экан, яъни $C\ (-6,\ 0)$. ▲

4-мисол. Учлари $A\ (-3;\ -5)$, $B\ (-3;\ 3)$ ва $C\ (6;3)$ нуқталарда бўлган ABC учбурчак берилган. Учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлигини исбот қилинг.

△. ABC учбурчакни ясаймиз ва $[AB]$, $[BC]$ ва $[AC]$ томонларнинг узунликларини топамиз (2.4-чизма):

$$|AB| = \sqrt{(-3-(-3))^2+(-3(-5))^2} = \sqrt{0^2+8^2} = 8,$$
$$|BC| = \sqrt{(6-(-3))^2+(3-3)^2} = \sqrt{9^2+0^2} = 9,$$
$$|AC| = \sqrt{(6-(-3))^2+(3-(-5))^2} = \sqrt{9^2+8^2} = \sqrt{145}.$$



2·4-чизма

Учбурчакнинг тўғри бурчакли учбурчак эканлигини кўрсатиш учун унинг томонларининг узунликлари Пифагор теоремасини қаноатлантиришини текширамиз. $[AB]$ — учбурчакнинг 1-катети, $[BC]$ — учбурчакнинг 2-катети, $[AC]$ — учбурчакнинг гипотенузаси бўлсин. У ҳолда Пифагор теоремасига асосан $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ бўлиши керак. Қийматларни ўрнига қўямиз:

$$(\sqrt{145})^2 = 8^2+9^2,\ 145=145.$$

Тўғри тенгликка эга бўлдик.

Шундай қилиб, берилган учбурчак тўғри бурчакли учбурчак экан. ▲

5-мисол. Координаталар бошидан $A\ (-3;\ -4)$ нуқтагача бўлган масофани топинг.

△. Бу масалани ечиш учун (2) формуладан фойдаланамиз. Берилишига кўра: $x = -3$ ва $y = -4$. Қуйидагига эгамиз:

$$|OA| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Демак, изланган масофа 5 га тенг экан. ▲

□. 1. Қуйидаги нуқталарни ясанг:

$A\ (2;\ 5)$, $B\ (4;\ 0)$, $C\ (3;\ -2)$, $D\ (0;\ 3)$, $E\ (-3;\ 1)$, $F\ (-1;\ 0)$, $G\ (-3;\ -5)$.

2. Абсциссалари: $x = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 3$ га тенг, ординаталари эса абсциссалари билан $y = 3x - 2$ муносабатда бўлган нуқталарни ясанг.

Жавоб. $(-2;\ -8)$; $(-1;\ -5)$; $(0;\ -2)$; $(1;\ 1)$; $(3;\ 7)$.

3. Берилган нуқталар орасидаги масофани топинг:

а) $A\ (4;\ 2)$ ва $B\ (0;\ -1)$; б) $C\ (7;\ 5)$ ва $D\ (3;\ 2)$;

в) $O\ (0;\ 0)$ ва $E\ (2;\ \sqrt{5})$; г) $F\ (-1;\ -1)$ ва $Q\ (3;\ -4)$.

Жавоб. $|AB| = 5$, $|CD| = 5$, $|OE| = 5$.

4. Учбурчакнинг учлари берилган: $A\ (4;\ 3)$, $B\ (0;\ 0)$ ва $C\ (10;\ -5)$. Учбурчак томонларининг узунликларини топинг.

Жавоб. $|AB| = 5$, $|BC| = 5\sqrt{5}$, $|CA| = 10$.

5. Учлари $A\ (4;\ 6)$, $B\ (0;\ 0)$ ва $C\ (-2;\ 0)$ нуқталарда ётган учбурчакнинг тенг ёнли эканлигини исбот қилинг.

Жавоб. $|AB| = 52$, $|BC| = 8$, $|AC| = 52$, $|AB| = |AC|$.

6. Ox ўқида координаталар бошидан ва $A\ (-4;\ 3)$ нуқтадан бир хил узоқликда ётган нуқтанинг координаталарини топинг.

Жавоб. $\left(-\frac{25}{8};\ 0\right)$.

7. Oy ўқида $A\ (4;\ -5)$ ва $B\ (-3;\ 2)$ нуқталардан тенг узоқликда ётган C нуқтанинг координаталарини топинг.

Жавоб. $(0;\ -2)$.

8. Ox ўқида $A\ (0;\ 5)$ ва $B\ (-3;\ -2)$ нуқталардан тенг узоқликда ётган нуқтанинг координаталарини топинг.

Жавоб. $(2;\ 0)$.

9. Учлари $A\ (2;\ -3)$; $B\ (-2;\ 1)$ ва $C\ (2;\ 5)$ нуқталарда ётган учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлигини исбот қилинг.

Жавоб. $|AB| = \sqrt{32}$, $|BC| = \sqrt{32}$, $|AC| = \sqrt{64}$; $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$.

10. Учлари $A\ (-5;\ -2)$; $B\ (1;\ 6)$ ва $C\ (7;\ -2)$ нуқталарда ётган учбурчакнинг периметрини топинг.

Жавоб. $p = 32$. ■

2-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

Агар икки $A\ (x_1;\ y_1)$ ва $B\ (x_2;\ y_2)$ нуқта берилган бўлса, улар билан бир тўғри чизиқда ётган ҳар қандай учинчи C нуқтанинг координаталари ушбу

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{ва} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (3)$$

формулалар билан аниқланади. Бу ерда λ AB кесманинг C нуқта билан қандай нисбатда бўлинганлигини билдиради, яъни

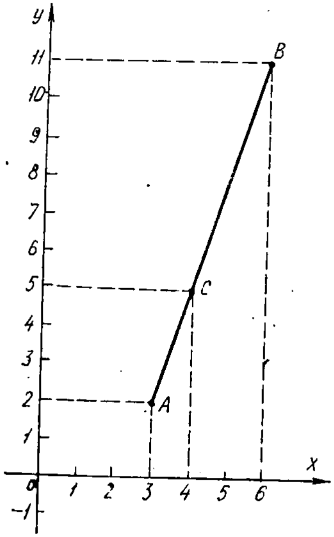
$$\lambda = \frac{|AC|}{|CB|}.$$

Агар $C\ (x;\ y)$ нуқта AB кесмани тенг иккига бўлса, у ҳолда $\lambda = 1$ бўлади ва $C\ (x;\ y)$ нуқтанинг координаталари ушбу

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{ва} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (4)$$

формулалар билан аниқланади.

1-мисол. $A\ (3;\ 2)$ ва $B\ (6;\ 11)$ нуқталар билан чегараланган AB кесмани $\lambda = \frac{1}{2}$ нисбатда бўлувчи C нуқтанинг координаталарини топинг.



2.5- чизма

$\triangle$. (3) формуладан фойдаланиб масалани ечамиз. C нуқта учун $\frac{|AC|}{|CB|} = \lambda = \frac{1}{2}$ (2.5- чизма). У ҳолда C нуқтанинг координаталари қуйидагича бўлади:

$$x = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3 + 3}{\frac{3}{2}} = \frac{12}{3} =$$

$$= 4;\ y = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 11}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{15}{3} = 5.$$

Демак, AB кесмани $\lambda=\frac{1}{2}$ нисбатда бўлувчи C нуқтанинг координаталари: $x=4$; $y=5$ экан, яъни $C(4; 5)$. ▲

2-мисол. Учлари $A(-6; 2)$ ва $B(-2; 8)$ нуқталарда ётган AB кесманинг ўртасидан $D(2; 5)$ нуқтагача бўлган масофани топинг.

△. Айтайлик, D нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ AB кесмани C нуқтада тенг иккига бўлсин, у ҳолда $\lambda=1$ бўлади. (4) формуладан фойдаланиб, AB кесмани тенг иккига бўлувчи нуқтанинг координаталарини топамиз:

$$x=\frac{-6+(-2)}{2}=\frac{-8}{2}=-4;\quad y=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5;$$
$$C(-4;\ 5).$$

Энди DC кесманинг узунлигини топамиз:

$$|DC|=\sqrt{(2-(-4))^2+(5-5)^2}=\sqrt{6^2+0^2}=6.$$

Демак, AB кесманинг ўртасидан D нуқтагача бўлган масофа 6 га тенг экан. ▲

3-мисол. $A(-4; 4)$ ва $B(2; -4)$ нуқталар билан чегараланган AB кесмани $\lambda=-2$ нисбатда бўлувчи C нуқтанинг координаталарини топинг.

△. Масаланинг шартига кўра $\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda=-2$ бўлганлигидан (3) формулани қўлланиб, C нуқтанинг координаталарини топамиз:

$$x=\frac{-4+(-2)\cdot 2}{1+(-2)}=\frac{-8}{-1}=8;\quad y=\frac{4+(-2)(-4)}{1+(-2)}=\frac{12}{-1}=-12.$$

Демак, изланаётган нуқта $C(8; -12)$ экан. ▲

4-мисол. AB кесма тенг уч бўлакка бўлинган. Бўлиниш нуқталари $C(-1; -2)$ ва $D(2; 0)$ бўлса, кесма учларининг координаталарини топинг.

△. AB кесма тенг уч бўлакка бўлинган. Шунинг учун

$$\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda=\frac{1}{2}\quad \text{ва}\quad \frac{|AD|}{|DB|}=\lambda=2\ \text{бўлади.}$$

Демак, C нуқта AB кесмани $\lambda=\frac{1}{2}$ нисбатда бўлади.

(3) формуладан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} -1=\dfrac{x_1+\dfrac{1}{2}x_2}{1+\dfrac{1}{2}} \Longleftrightarrow -3=2x_1+x_2, \\ -2=\dfrac{y_1+\dfrac{1}{2}y_2}{1+\dfrac{1}{2}} \Longleftrightarrow -6=2y_1+y_2. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

D нуқта AB кесмани $\lambda=2$ нисбатда бўлади. Шунинг учун қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} 2=\dfrac{x_1+2x_2}{1+2} \Longleftrightarrow 6=x_1+2x_2 \\ 0=\dfrac{y_1+2y_2}{1+2} \Longleftrightarrow 0=y_1+2y_2. \end{array}\right\} \qquad (**)$$

(*) ва (**) тенгламаларни биргаликда ечиб, номаълумларни топамиз:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+x_2=-3 \\ x_1+2x_2=6 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1+x_2=-3 \\ 2x_1+4x_2=12 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2-4x_2=-3-12 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -3x_2=-15 \Longleftrightarrow x_2=5;$$

$$2x_1+x_2=-3 \Rightarrow 2x_1+5=-3 \Rightarrow 2x_1=-8 \Longleftrightarrow x_1=-4;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2y_1+y_2=-6 \\ y_1+2y_2=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2y_1+y_2=-6 \\ 2y_1+4y_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_2-4y_2=-6 \Longleftrightarrow$$

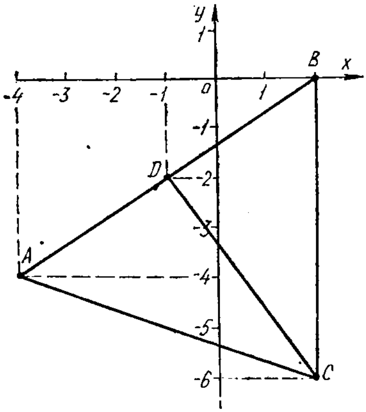
$$\Longleftrightarrow -3y_2=-6 \Longleftrightarrow y_2=2;$$

$$y_1+2y_2=0 \Rightarrow y_1+2\cdot 2=0 \Longleftrightarrow y_1=4.$$

Демак, A нуқтанинг координаталари (—4; —4), B нуқтанинг координаталари эса (5; 2) экан. ▲

5-мисол. Учбурчакнинг учлари: A (—4; —4), B (2; 0) ва C (2; —6) нуқталарда берилган. $[CD]$ медиананинг узунлигини топинг.

△. Берилган учбурчакни ясаймиз. $[CD]$ медиана $[AB]$ томонни тенг иккига бўлади (2.6-чизма). (4) формуладан фойдаланиб D нуқтанинг координаталарини топамиз:



2.6- чизма

$$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1; \quad y = \frac{-4+0}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

$$D\,(-1;\ -2).$$

Энди икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидан фойдаланиб $[CD]$ медиананинг узунлигини топамиз:

$$|CD| = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-(-6))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Демак, $[CD]$ медиананинг узунлиги 5 га тенг экан. ▲

□. **11.** A (1,7) ва B (4; −2) нуқталар билан чегараланган AB кесмани $\lambda = \frac{1}{2}$ нисбатда бўлувчи C нуқтанинг координаталарини топинг.

Жавоб. C (2; 4).

12. A (2; 8) ва B (6; −4) нуқталар билан чегараланган AB кесма 4 та тенг бўлакка бўлинган. C, D ва E нуқталарнинг координаталарини топинг.

Жавоб. C (3; 5), D (4; 2), E (5; −1).

13. A (−2; 1) ва B (10; 5) нуқталар орасидаги кесмани тенг иккига бўлувчи C нуқтанинг координаталарини топинг.

Жавоб. C (4; 3).

14. Учлари A (0; −2), B (4; −2) ва C (2; 4) нуқталардан иборат учбурчак берилган. Медианалари билан томонлари кесишиши натижасида ҳосил бўлган нуқталарнинг координаталарини топинг.

Жавоб. (2; −2); (3; 1); (1; 2).

15. Учлари A (−2; 1), B (4; 3) ва C (3; −3) нуқталардан иборат учбурчак берилган. (1; 2) нуқтадан ўтувчи CD тўғри чизиқ шу учбурчак C бурчагининг медианаси эканлигини исбот қилинг.

Кўрсатма. Бурчак медианаси қаршисидаги томонни тенг иккига бўлади. AB кесмани тенг иккига бўлувчи нуқтанинг координатаси (1; 2).

16. Учбурчак томонларининг ўрталари D (1; 0), E (4; 2) ва G (3; −3) нуқталарда бўлса, унинг учларининг координаталарини топинг.

Жавоб. A (2; 5), B (−5; 0); C (6; −1).

17. Тўғри бурчакли учбурчакнинг учлари берилган: A (−2; 2), B (3; 6) ва C (2; −3). AD медиананинг узунлиги BC кесманинг ярмига тенг эканлигини исбот қилинг.

Жавоб. $|AD| = \frac{|BC|}{2} = \sqrt{20{,}5}.$

18. AB кесма тенг уч бўлакка бўлинган. Бўлиниш қталари: C (1; 1) ва D (4; -2) бўлса, кесма учларининг координаталарини топинг.

Жавоб. A (-2; 4) B (7; -5).

19. Учлари A (2; -3) ва B (-2; 2) бўлган AB кесмани $\lambda = -3$ нисбатда бўлувчи C нуқтанинг координаталарини топинг.

Жавоб. C (-4; 3).

20. A (1; 4) ва B (5; 0) нуқталар орасидаги AB кесманинг ўртасидан D (3; -2) нуқтагача бўлган масофани топинг.

Жавоб. $d = 4$. ■

3-§. Учбурчак ва кўпбурчакнинг юзи

Агар учбурчакнинг учала учининг A (x_1; y_1), B (x_2; y_2) ва C (x_3; y_3) координаталари берилган бўлса, унинг юзини қуйидаги формула билан ҳисоблаш мумкин:

$$S = \frac{1}{2}\left[\,(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\right]. \quad (5)$$

Бу формулада S учун манфий қиймат ҳам ҳосил бўлиши мумкин. Агар учбурчак периметрини унинг A учидан B ва C учларига қараб айланиб чиқиш соат стрелкасига қарама-қарши йўналишда бўлса, S мусбат; соат стрелкасининг ҳаракати бўйича айланиб чиқилганда эса, S манфий бўлади. Иккинчи ҳолда учбурчак юзини топиш учун S ни (-1) га кўпайтириб олинади.

Умумий ҳолда $ABCA_1A_2 \ldots A_nF$ кўпбурчакнинг юзи

$$S = \frac{1}{2}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\ldots+(x_ny_1-x_1y_n)\right] \quad (5')$$

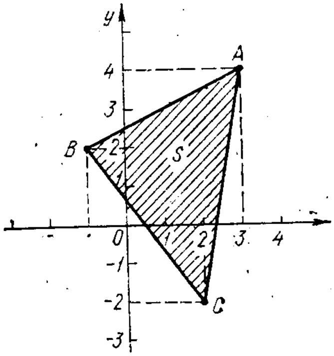
формула билан ҳисобланади, бу ерда (x_i; y_i) кўпбурчак A_i учининг координаталари.

1-мисол. Учлари A (3; 4), B (-1; 2) ва C (2; -2) нуқталарда бўлган учбурчак юзини ҳисобланг.

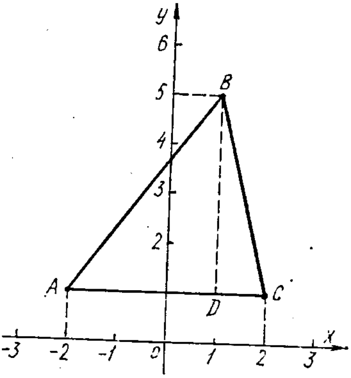
△. Берилган ABC учбурчакни ясаймиз (2.7-чизма). (5) формулани қўллаб учбурчак юзи S ни топамиз:

$$S = \frac{1}{2}\Big[(3\cdot 2 - (-1)\cdot 4) + ((-1)\cdot(-2) - 2\cdot 2) + (2\cdot 4 -$$
$$-3\cdot(-2))\Big] = \frac{1}{2}\Big[(6+4)+(2-4)+(8+6)\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}(10 + (-2) + 14) = \frac{1}{2}\cdot 22 = 11.$$

Демак, учбурчакнинг юзи 11 кв. бирликка тенг. ▲



2.7- чизма



2.8- чизма

2-мисол. Учлари $A\ (-2;\ 1)$, $B\ (1;\ 5)$ ва $C\ (2;\ 1)$ нуқталарда берилган учбурчакнинг юзини ва BD баландликнинг узунлигини топинг.

△. Учбурчакни ясаймиз. (5) формуладан фойдаланиб, учбурчакнинг юзини топамиз:

$$S = \frac{1}{2}\Big[(-2\cdot 1 - 2\cdot 1) + (2\cdot 5 - 1\cdot 1) + (1\cdot 1 - (-2)\cdot 5)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}(-2 - 2 + 10 - 1 + 1 + 10) = \frac{1}{2}\cdot 16 = 8 \text{ кв. бирлик.}$$

Энди BD баландликни топамиз. Бунинг учун:

$$S = \frac{|AC|\cdot|BD|}{2} \qquad (*)$$

формуладан фойдаланамиз (2.8- чизма). Бу ерда AC кесманинг узунлиги номаълум, уни икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$|AC| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} \Rightarrow 4.$$

$$(*) \text{ дан } 2S = |AC|\cdot|BD|.$$

Бундан $BD = \dfrac{2S}{|AC|} = \dfrac{2\cdot 8}{4} = \dfrac{16}{4} = 4$

келиб чиқади. Демак, BD баландликнинг узунлиги 4 га тенг экан. ▲

3-мисол. Учбурчакнинг иккита $A\ (2;\ 2)$ ва $B\ (1;\ -2)$ учи берилган. Ox ўқида шундай C нуқтани топиш керакки, ABC учбурчакнинг юзи 7 кв. бирликка тенг бўлсин.

△. (5) дан фойдаланиб қуйидагиларни ёзамиз:

$$7=\frac{1}{2}\Big[(2\cdot(-2)-2\cdot 1)+(1\cdot 0-x\cdot(-2))+(x\cdot 2-2\cdot 0)\Big]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7=\frac{1}{2}(-4-2+2x+2x)\Leftrightarrow 7=\frac{1}{2}(-6+4x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7=-3+2x\Leftrightarrow 2x=7+3\Leftrightarrow 2x=10\Leftrightarrow x=5.$$

Демак, C (5; 0) экан. ▲

4-мисол. Тўғри тўртбурчакнинг учлари A (—3; —3); B (5; —3) C (5; 4) ва D (—3; 4) берилган. Тўртбурчакнинг юзини топинг.

△. (5′) формуладан фойдаланиб қуйидагиларни ёзамиз:

$$S=\frac{1}{2}\Big[(-3)\cdot(-3)-5\cdot(-3))+(5\cdot 4-5\cdot(-3))+(5\cdot 4-$$

$$-(-3)\cdot 4)+(-3\cdot(-3)-(-3)\cdot 4)\Big]=\frac{1}{2}(9+15+20+$$

$$+15+20+12+9+12)=\frac{1}{2}\cdot 112=56 \text{ кв. бирлик.}$$

Демак, тўртбурчакнинг юзи 56 кв. бирликка тенг экан. ▲

5-мисол. Учлари A (—2; —3), B (3; —3), C (1; 4) ва D (—4; 2) нуқталарда ётган тўртбурчакнинг юзини ва AC ва BD диагоналларининг узунлигини топинг.

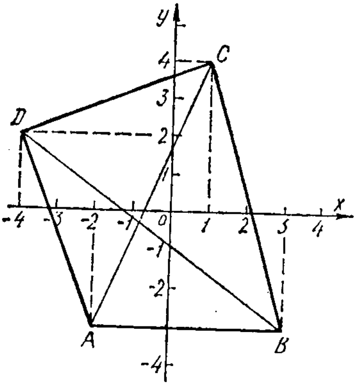
△. Тўртбурчакни ясаб, диагоналларини ўтказамиз (2.9-чизма). (5′) формулага асосан S юзни ҳисоблаймиз:

$$S=\frac{1}{2}\Big[(-2\cdot(-3)-(-3)\cdot 3)+(3\cdot 4-1\cdot(-3))+(1\cdot 2-$$

$$-(-4)\cdot 4)+((-4)\cdot(-3)-(-2)\cdot 2)\Big]=\frac{1}{2}(6+9+12+$$

$$+3+2+16+12+4)=\frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot 64=32 \text{ кв. бирлик.}$$



2.9- чизма

Энди AC ва BD диагоналларнинг узунлигини (1) формулани қўллаиб топамиз:

$$|AC|=\sqrt{(1-(-2))^2+(4-(-3))^2}=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58};$$

$$|BD|=\sqrt{(-4-3)^2+(2-(-3))^2}=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}.$$

Демак, тўртбурчакнинг юзи $S=32$ кв. бирлик, диагоналларнинг узунликлари:

$|AC|=\sqrt{58}$ ва $|BD|=\sqrt{74}$ экан. ▲

□. **21.** Учлари A (4; -2), B (6; 4) ва C (5; 6) нуқталарда ётган учбурчакнинг юзини топинг.

Жавоб. $S=5$ кв. бирлик.

22. Учлари A (3; 0), B (7; 8) ва C (0; 2) нуқталарда ётган учбурчак периметрини ва юзини топинг.

Жавоб. $p=\sqrt{5}\,(4+\sqrt{17})+\sqrt{13}$. $S=15$ кв. бирлик.

23. Учбурчакнинг A (4; 0) ва B (2; 0) учлари ётган Oy ўқда шундай C нуқтани топингки, ABC учбурчакнинг юзи 18 кв. бирликка тенг бўлсин.

Жавоб. C (0; 6).

24. Учлари A (0, -3), B (0; 8) ва C (-4; -6) нуқталарда ётган ABC учбурчакнинг юзини ва CD баландлигини топинг.

Жавоб. $S=22$ кв. бирлик. $|CD|=4$.

25. Учбурчакнинг иккита A (-5; -2) ва B (3; -2) учлари ётган Ox ўқда шундай C нуқтани топингки, ABC учбурчак юзи 8 кв. бирликка тенг бўлсин.

Жавоб. C (6; 0).

26. Учлари A (0; 5); B (0; -3); C (6; -3) ва D (6; 5) нуқталарда ётган тўртбурчакнинг юзини топинг.

Жавоб. $S=48$ кв. бирлик.

27. Учлари A (-3; 5), B (6; 6), C (5; 3) ва D (0; 0) нуқталарда ётган $ABCD$ тўртбурчак берилган. Тўртбурчакнинг юзини ва AC ва BD диагоналларининг узунлигини топинг.

Жавоб. $S=15$ кв. бирлик; $|AC|=2\sqrt{17}$; $|BD|=6\sqrt{2}$.

28. Учлари A (-4; 1), B (0; 5), C (3; 5) ва D (6; -2) нуқталарда ётган тўртбурчакнинг юзини ва периметрини топинг.

Жавоб. $S=34$ кв. бирлик. $p=4\sqrt{2}+3+\sqrt{58}+\sqrt{109}$.

29. Учлари A (-8; 5), B (-4; 11), C (3; 9), G (4; 2) ва E (-2; -3) нуқталарда ётган бешбурчакнинг юзини ҳисобланг.

Жавоб. $S=99$ кв. бирлик.

30. Учлари A (-6; -3), B (-5; 2), C (0; 5); D (5; 0) ва E (6; -5) нуқталарда ётган $ABCDE$ бешбурчак берилган. Бешбурчакнинг юзини топинг.

Жавоб. $S=66$ кв. бирлик.

4-§. Чизиқ тенгламаси. Тенгламаси бўйича чизиқни ясаш

Ҳар қандай чизиқни текисликда *нуқталарнинг геометрик ўрни* деб қараш мумкин. Масалан, *айлана* деб марказ деб аталувчи нуқтадан баравар узоқликда ётган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади; бурчак *биссектрисаси* деб бурчак томонларидан баравар узоқликда ётган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади. Кесманинг учларидан баравар узоқликда ётувчи нуқталарнинг геометрик ўрни, шу кесмага ўтказилган *ўрта перпендикуляр* бўлади ва ҳоказо.

Текисликда чизиқ тенгламаси деб x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган, шу чизиқда ётувчи ҳар бир нуқтанинг координаталари қаноатлантирадиган ва ундан ташқарида ётган нуқталарнинг координаталари қаноатлантирмайдиган тенгламага айтилади.

Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида чизиқнинг тенгламаси

$$y = f(x)$$

ёки

$$F(x;\ y) = 0$$

кўринишда бўлади. Бунда x ва y лар *ўзгарувчи координаталар* дейилади.

Аналитик геометрияда асосан иккита масала билан шуғулланилади. Бунда:

1) чизиқ нуқталарнинг геометрик ўрни сифатида берилган, унинг тенгламасини тузиш талаб қилинади;

2) тенглама берилган, унинг графигини ясаш талаб қилинади.

1-мисол. Берилган M_1 (—2; 4), M_2 (6; 8) нуқталардан баравар узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

△. M $(x;\ y)$ — M_1 ва M_2 нуқталардан баравар узоқликда жойлашган ихтиёрий нуқта бўлсин. Шартга кўра

$$|M_1M| = |M_2M| \qquad (*)$$

бўлади. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидан фойдаланиб,

$$|M_1M| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}$$
$$|M_2M| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}$$

ларни ҳосил қиламиз. Бу ифодаларни (*) га қўйиб, изланган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-8y+16=x^2-12x+36+y^2-16y+64\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-8y+16-x^2+12x-36-y^2+16y-64=$$
$$=0\Rightarrow 16x+8y-80=0\Rightarrow 2x+y-10=0. \qquad (**)$$

Шундай қилиб, M_1 ва M_2 нуқталардан баравар узоқликда жойлашган ихтиёрий нуқтанинг координаталари (**) тенгламани қаноатлантиради, ва аксинча, координаталари (**) муносабатни қаноатлантирган ҳар қандай нуқта M_1 ва M_2 нуқталардан бир хил узоқликда ётади. ▲

2-мисол. Маркази координаталар бошида ва радиуси $R=4$ бўлган айлананинг тенгламасини тузинг. A (4; 0); B (2; 3) ва C (3; 4) нуқталар шу айланада ётадими?

△. M (x; y) — айланада ётган ихтиёрий нуқта бўлсин. У вақтда айлана таърифидан $|OM|=4$ эканлиги равшан. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидан

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$$

эканлиги келиб чиқади. Бундан айлана тенгламаси:

$$4=\sqrt{x^2+y^2}$$

ёки

$$x^2+y^2=16$$

ҳосил бўлади (2. 10-чизма).

Энди A (4; 0) нуқтанинг шу айланада ётиш ёки ётмаслигини текшириб кўрамиз. Агар нуқта айланада ётса, унинг координаталари айлана тенгламасини қаноатлантиради, акс ҳолда нуқта айланада ётмайди.

$$4^2+0^2=16 \Leftrightarrow 16=16.$$

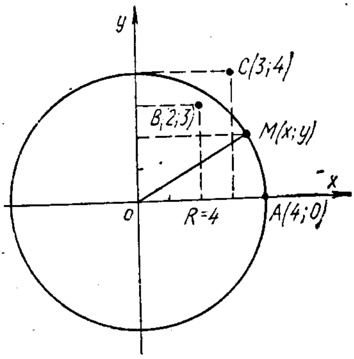
Демак, A нуқта айланада ётади. Энди B нуқтанинг координаталарини қўямиз:

$$2^2+3^2<16 \Rightarrow 13<16.$$

B нуқта айланада ётмайди. C нуқтанинг координаталари ҳам айлана тенгламасини қаноатлантирмайди, чунки

$$4^2+3^2>16 \Rightarrow 25>16.$$

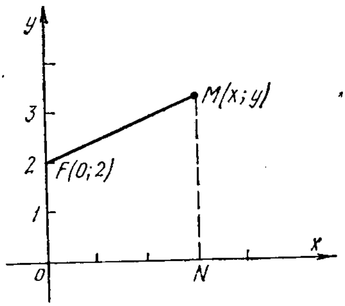
C нуқта ҳам айланада ётмайди. ▲



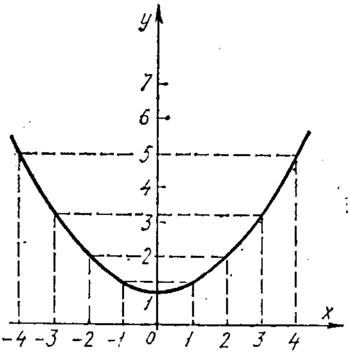
2.10- чизма

3-мисол. Ox ўқдан ва F (0; 2) нуқтадан баравар узоқликда ётган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг. Бу эгри чизиқнинг графигини чизинг.

△. M $(x;\ y)$ — эгри чизиқни ясовчи, қўзғалувчан нуқта бўлсин. У ҳолда шартга кўра M нуқтадан Ox ўқигача ва F нуқтагача бўлган масофалар бир хил (2. 11-чизма), яъни $|NM| = |FM|$ ёки $y = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$, бундан $y^2 = x^2 + (y-2)^2$. Ҳосил бўлган тенгламани $y = f(x)$ кўринишга келтирамиз, яъни y га нисбатан ечамиз. $y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Rightarrow 4y = x^2 + 4 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + 1$ бўлади. Бу параболанинг тенгламаси. Парабола графигини тасаввур қилиш учун унинг махсус нуқталарини аниқлаш керак x^2 нинг коэффициенти $\frac{1}{4} > 0$ бўлгани учун парабола юқорига қараган бўлади. Учининг координатаси (0; 1) нуқта, чунки унинг ординатаси координаталар бошидан ўтувчи $y = \frac{x^2}{4}$ параболанинг ординатасидан 1 га фарқ қилади (2.12-чизма). ▲



2.11- чизма



2.12- чизма

□. **31.** Маркази O (0; 0) нуқтада ва радиуси $R = 6$ бўлган айлана тенгламасини топинг. Бу айланада A (0; 6), B (−6; 0); C (4; 3); D (1; 6); E $(5;\ \sqrt{11})$ нуқталар ётадими?

Жавоб. $x^2 + y^2 = 36$. A, B, E нуқталар айланада ётади. C, D нуқталар айланада ётмайди.

32. Берилган A (0; −2) ва B (1; 3) нуқталардан баравар узоқликда жойлашган чизиқ бўйлаб M $(x;\ y)$ нуқта ҳаракат қилади. Шу чизиқ тенгламасини ёзинг.

Жавоб. $2x + 10y - 5 = 0$.

33. A (4; 0) ва B (1; 0) нуқталар берилган. M нуқта шундай ҳаракат қиладики, ундан A нуқтагача бўлган масофа B нуқтагача бўлган масофадан икки марта катта. M нуқтанинг ҳаракат траекториясининг тенгламасини топинг.

Жавоб. $x^2+y^2=4$.

34. $3x+4y-12=0$ чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топинг.

Жавоб. A (4; 0), B (0; 3).

35. Қуйидаги тенгламалар билан берилган чизиқларни ясанг.

1) $y=2x$; 2) $y=x$; 3) $y=-2x$;

4) $y=x^2$; 5) $y=\frac{1}{2}x^2+3$; 6) $y=x^3$.

36. Ox ўқидан Oy ўқига нисбатан 5 баравар узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг.

Жавоб. $y=\pm 5x$.

37. Oy ва Ox ўқига нисбатан 3 баравар узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг.

Жавоб. $y=\pm\frac{1}{3}x$.

5-§. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

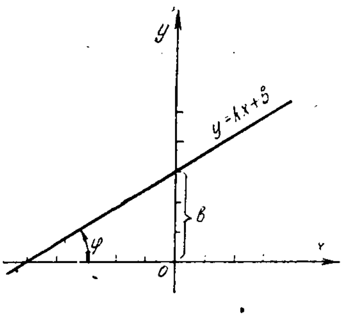
Ҳар қандай тўғри чизиқни Декарт координаталар системасида чизиқли тенглама билан тасвирлаш мумкин. Тўғри чизиқнинг тенгламаси ўзгарувчи координаталардан ташқари яна бир-бирига боғлиқ бўлмаган иккита параметрга эга. Бирор тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзиш учун унинг ўша параметрларининг сон қийматларини билиш кифоя.

y ординатага нисбатан ечилган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y=kx+b \tag{6}$$

шаклда бўлади. Параметр k тўғри чизиқнинг йўналишини характерлайди ва унинг *бурчак коэффициенти* деб аталади. Декарт координаталар системасида

$$k=\operatorname{tg}\varphi \tag{7}$$



2.13- чизма

бўлади, бунда φ — тўғри чизиқнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчаги (соат стрелкасига қарши йўналишда) (2.13- чизма).

(6) формуладаги иккинчи параметр b (бошланғич ордината) берилган тўғри чизиқнинг ординаталар ўқидан ажратган кесмасини, яъни координаталар бошидан тўғри чизиқнинг ординаталар ўқи билан кесишган нуқтасигача бўлган бирлик масофа.

1-мисол. Ox ўқи билан 120° бурчак ҳосил қилувчи ва Oy ўқини (0; 3) нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг ва унинг графигини ясанг.

△. Масаланинг шартидан бизга маълумки, тўғри чизиқ Oy ўқини (0; 3) нуқтада кесиб ўтади, яъни $b=3$. Бурчак коэффициенти $k=\operatorname{tg}120°=-\sqrt{3}$. (6) формулага асосан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$y=-\sqrt{3}x+3. \qquad (*)$$

Демак, Ox ўқи билан 120° бурчак ҳосил қилувчи ва Oy ўқини (0; 3) нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси $y=-\sqrt{3}x+3$ экан.

Энди шу тўғри чизиқ графигини ясаймиз. Бизга маълумки, тўғри чизиқ Oy ўқини $C(0;\ 3)$ нуқтада кесиб ўтади. Тўғри чизиқ графигини чизиш учун иккинчи нуқтани топиш кифоя. Бунинг учун $y=0$ деб (*) дан x ни топамиз:

$$-\sqrt{3}x+3=0 \Rightarrow x=\sqrt{3}.$$

Тўғри чизиқнинг иккинчи нуқтаси $D(\sqrt{3};\ 0)$. Шу икки $C(0;\ 3)$ ва $D(3;\ 0)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ изланган графикни (2. 14- чизма) беради.▲

2-мисол. Тенгламаси $3x+5y+15=0$ бўлган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ва бошланғич ординатасини топинг. Унинг Ox ўқи билан ҳосил қиладиган бурчагини аниқланг.

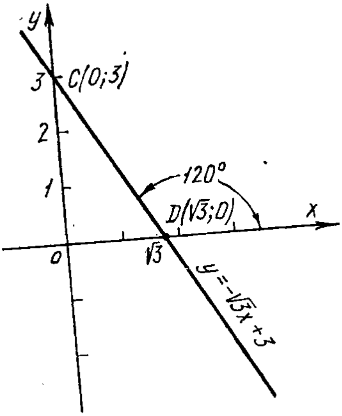
△. Масалани ечиш учун тўғри чизиқ тенгламасини y га нисбатан ечамиз:

$$3x + 5y + 15 = 0 \Rightarrow 5y = $$
$$= 3x - 15 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x - 3.$$

Бошланғич ордината $b = -3$, бурчак коэффициенти $k = -\frac{3}{5}$.

$$\operatorname{tg}\varphi = k; \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{5} \Rightarrow \varphi = $$
$$= \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right).$$

Демак, берилган тўғри чизиқ Oy ўқини (0; —3) нуқтада кесиб ўтиб, Ox ўқи билан 149° бурчак ҳосил қилади. ▲



2.14- чизма

3-мисол. $y = -x + 7$ тўғри чизиқ берилган. Тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқи билан ташкил қилган бурчагини топинг ва тўғри чизиқни ясанг.

△. $y = -x + 7$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k = -1$.

$$\operatorname{tg}\varphi = k; \qquad \operatorname{tg}\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = 135°.$$

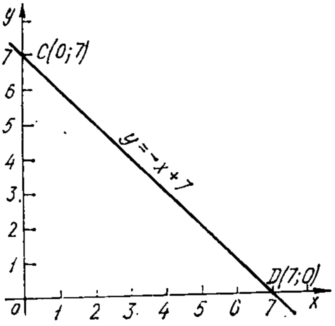
Тўғри чизиқ Ox ўқи билан 135° бурчак ҳосил қилади. Энди тўғри чизиқнинг графигини ясаймиз. Бунинг учун унинг иккита нуқтасини топиш кифоя. Тўғри чизиқнинг бошланғич ординатаси $b = 7$, демак, тўғри чизиқ Oy ўқини $C(0,7)$ нуқтада кесиб ўтади.

Иккинчи нуқтасини топиш учун тўғри чизиқ тенгламасидан $y = 0$ деб x ни топамиз, яъни $0 = -x + 7 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 7$. Демак, тўғри чизиқ Ox ўқини $D(7;\ 0)$ нуқтада кесиб ўтади. Бу икки $C(0;\ 7)$ ва $D(7;\ 0)$ нуқталарни бирлаштириб тўғри чизиқ чизсак, Ox ўқи билан 135° бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ графигини ҳосил қиламиз (2. 15- чизма).▲

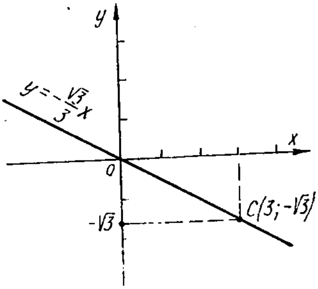
4-мисол. Координаталар бошидан ўтувчи ва Ox ўқи билан 150° бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг ва тўғри чизиқни ясанг.

△. Бизга маълумки, координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси $y = kx$ бўлади.

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}150° = \operatorname{tg}(180° - 30°) = -\operatorname{tg}30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



2.15- чизма



2.16- чизма

Демак, изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$. Энди тўғри чизиқнинг графигини ясаймиз. Тўғри чизиқ координаталар боши $O(0;\ 0)$ дан ўтганлиги учун, унинг битта нуқтасини топиш етарли бўлади. Бунинг учун $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ тенгламадаги x га қиймат бериб y ни топамиз. Қулайлик учун $x=3$ бўлсин.

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3=-\sqrt{3}.$$

Тўғри чизиқнинг иккинчи нуқтаси $C(3;\ -\sqrt{3})$. Бу икки $O(0;\ 0)$ ва $C(3;\ -\sqrt{3})$ нуқталарни бирлаштирсак, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ тўғри чизиқнинг графиги (2. 16- чизма) ҳосил бўлади.▲

5-мисол.

$$(3+p)x-(p-5)y+8=0$$

тўғри чизиқ тенгламаси берилган. p нинг қандай қийматларида тўғри чизиқ Ox ўқи билан 135° бурчак ҳосил қилади? Тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△. Берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз.

$$(3+p)x-(p-5)y+8=0\Rightarrow(p-5)y=(3+p)x+8\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\frac{3+p}{p-5}x+\frac{8}{p-5}.$$

Бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k=\frac{3+p}{p-5}$ га тенг. Маълумки, $\operatorname{tg}\varphi = k$. Масаланинг шартига кўра, $\operatorname{tg}135^\circ = -1$ бўлади. Бундан

$$-1=\frac{3+p}{p-5} \Rightarrow \begin{cases} -p+5=3+p \\ p\neq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+p=5-3 \\ p\neq 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p=2 \\ p\neq 5 \end{cases} \Rightarrow p=1$$

келиб чиқади.

p нинг қийматини ўрнига қўйиб, Ox ўқи билан 135° бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини топамиз:

$$y=\frac{3+1}{1-5}x+\frac{8}{1-5} \Rightarrow y=\frac{4}{-4}x+\frac{8}{-4} \Rightarrow y=-x-2.$$ ▲

☞ □. **38.** Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларни ясанг.

$y=2x+1$; $y=x+2$; $y=-3x+7$;
$y=-2$; $y=-x-3$; $y=3x$.

39. $y=2x-1$ ва $y=-\frac{1}{2}x+5$ тўғри чизиқлар берилган. Тўғри чизиқларнинг қайси бири Ox ўқ билан катта бурчак ҳосил қилади?

Жавоб. $y=-\frac{1}{2}x+5$.

40. $y=\frac{1}{2}x+6$ тўғри чизиқ берилган. Унинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.

Жавоб. (0; 6), (—12; 0).

41. $y=\frac{1}{3}x-2$, $y=\frac{x-1}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{4x-6}{3}$. $y=x+5$, $y=-3x+2$ тўғри чизиқлар берилган. Тўғри чизиқларнинг қайси бирлари ординаталар ўқини бир нуқтада кесиб ўтади? Шаклда кўрсатинг.

42. Тенгламаси $2x-4y+12=0$ бўлган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ва бошланғич ординатасини топинг.

Жавоб. $k=\frac{1}{2}$, $b=3$.

43. Координаталар бошидан ўтувчи ва Ox ўқи билан 30°; 45°; 60° ва 120° бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг ва бу тўғри чизиқлар графикларини тузинг.

Жавоб. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$; $y=x$; $y=\sqrt{3}x$; $y=-\sqrt{3}x$.

44. $M(0;\ 5)$ нуқтадан ўтувчи ва абсциссалар ўқи билан 135° бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг ва тўғри чизиқни ясанг.

Жавоб. $y=-x+5$.

45. Бошланғич ординатаси $b=-3$ бўлган ва $y=x$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқни ясанг.

Жавоб. $y=x-3$.

46. $y=\sqrt{3}x-3$ ва $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+2$ тўғри чизиқлар берилган. Уларнинг абсциссалар ўқи билан ташкил қиладиган бурчакларни топинг.

Жавоб. $\varphi=60°$, $\varphi=30°$.

47. $(5-p)x-(p+1)y+6=0$ тўғри чизиқ тенгламаси берилган. p нинг қандай қийматларида тўғри чизиқ Ox ўқи билан 45° бурчак ҳосил қилади? Бу тўғри чизиқни графигини чизинг.

Жавоб. $p=2$. ■

6-§. Берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтадиган тўғри чизиқ тенгламаси. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси.

Берилган $A(x_1;\ y_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (8)$$

кўринишда берилади.

Бу ерда $k=\operatorname{tg}\varphi$ (φ — тўғри чизиқнинг Ox ўқи билан ҳосил қилган бурчаги). Агар (8) формуладаги k ҳамма ҳақиқий сонларни қабул қиладиган бўлса, у ҳолда бу формула *тўғри чизиқлар дастасининг* формуласи дейилади, яъни берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўпламининг формуласи бўлади. Берилган иккита $A(x_1;\ y_1)$ ва $B(x_2;\ y_2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (9)$$

формула билан аниқланади. Бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (10)$$

формула билан ҳисобланади.

1-мисол. $A(3;\ -4)$ нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти -3 га тенг бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

△. Бизга $A(3; -4)$ нуқта ва $k=-3$ берилган. (8) формулага асосан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$y-(-4)=-3(x-3)\Rightarrow y+4=-3x+9\Rightarrow y= \\ =-3x+5.$$

Демак, $A(3; -4)$ нуқтадан ўтиб, $k=-3$ бўлган тўғри чизиқ тенгламаси $y=-3x+5$ экан.▲

2-мисол. Ox ўқи билан 150° бурчак ҳосил қилувчи ва $A(-3; 4)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

△. Масаланинг шартига кўра $\varphi=150°$.

$$k=\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}150°=\operatorname{tg}(180°-30°)=-\operatorname{tg}30°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(8) формулага асосан:

$$y-4=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-(-3))\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}+4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+(4-\sqrt{3}).$$

Демак, Ox ўқи билан 150° бурчак ҳосил қилиб $A(-3;4)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси:

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+(4-\sqrt{3}).\blacktriangle$$

3-мисол. $A(5; 4)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқи билан $\operatorname{arctg}\frac{8}{5}$ га тенг бўлган бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△. Масаланинг шартидан

$$\operatorname{arctg}\frac{8}{5}=\varphi\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\frac{8}{5};\quad k=\frac{8}{5}$$

келиб чиқади.

Энди (8) формуладан фойдаланиб қуйидагиларни ёзамиз:

$$y-4=\frac{8}{5}(x-5)\Rightarrow y=\frac{8}{5}x-\frac{8}{5}\cdot5+4\Rightarrow y=\frac{8}{5}x-4.$$

Бу тенглама, Ox ўқи билан $\operatorname{arctg}\frac{8}{5}$ га тенг бўлган бурчак ҳосил қилувчи ва $A(5; 4)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасидир.▲

4-мисол. $A(-3; 2)$ ва $B(5; 7)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини топинг.

△. (9) формуладан фойдаланиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

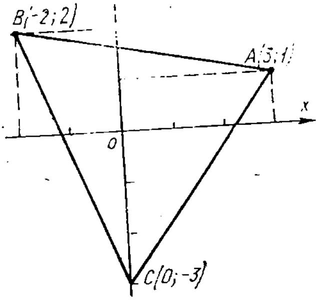
$$\frac{y-2}{7-2}=\frac{x-(-3)}{5-(-3)}\Rightarrow\frac{y-2}{5}=\frac{x+3}{8}\Rightarrow 8y-16=5x+15\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y=5x+15+16\Rightarrow 8y=5x+31\Rightarrow y=\frac{5}{8}x+\frac{31}{8}.$$

Демак, $A(-3;\ 2)$ ва $A(5;\ 7)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси:

$$y=\frac{5}{8}x+\frac{31}{8}.$$ ▲

5-мисол. Учлари $A(3;\ 1)$, $B(-2;\ 2)$ ва $C(0;\ -3)$ нуқталарда ётган ABC учбурчак берилган. Томонларининг тенгламаларини тузинг.



2.17- чизма

△. Берилган учбурчакни ясаймиз (2. 17- чизма). Энди AB томоннинг тенгламасини тузамиз. (9) формулага асосан:

$$\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-3}{-2-3}\Rightarrow y-1=\frac{x-3}{-5}$$

$$\Rightarrow -5y+5=x-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x=x-3-5\Rightarrow -5y=$$

$$=x-8\Rightarrow y=-\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}.$$

Бу AB томоннинг тенгламасидир. Худди шунга ўхшаб BC ва CA томонларнинг тенгламасини топамиз:

$$\frac{y-2}{-3-2}=\frac{x-(-2)}{0-(-2)}\Rightarrow\frac{y-2}{-5}=\frac{x+2}{2}\Rightarrow 2y-4=-5x-$$

$$-10\Rightarrow 2y=-5x-10+4\Rightarrow y=-\frac{5}{2}x-3. \qquad (BC)$$

$$\frac{y-(-3)}{1-(-3)}=\frac{x-0}{3-0}\Rightarrow\frac{y+3}{4}=\frac{x}{3}\Rightarrow 3y+9=4x\Rightarrow 3y=$$

$$=4x-9\Rightarrow y=\frac{4}{3}x-3. \qquad (CA)$$

Шундай қилиб учбурчакнинг учала томонининг тенгламалари топилди. ▲

□. 48. $M(2;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти 4 га тенг бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг ва тўғри чизиқни ясанг.

Жавоб. $y=4x-5$.

49. Ox ўқи билан 135° бурчак ҳосил қилувчи ва $N(-3;\ 5)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб. $y = -x + 2$.

50. Ox ўқи билан 30°, 45°, 60°, 120° ва 135° бурчак ҳосил қилувчи ва Oy ўқини (0; 7) нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

Жавоб. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 7$; $y = x + 7$; $y = \sqrt{3}x + 7$;
$y = -\sqrt{3}x + 7$; $y = -x + 7$.

51. Ox ўқи билан 45° бурчак ҳосил қилиб $M(2;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг k ва b параметрларини топинг. Ҳосил бўлган тенгламани ёзинг.

Жавоб. $k = 1$; $b = 1$; $y = k + 1$.

52. $N(2;\ -5)$ нуқтадан ўтувчи Ox ўқи билан $\operatorname{arctg} 3$ га тенг бўлган бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

Жавоб. $y = 3x - 11$.

53. Қуйидаги жуфт нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг:

а) (1; 2) ва (—2; 5); б) (—2; 6) ва (0; 4);
в) (5; 2) ва (—4; —7); г) (3; 0) ва (—3; 6).

Жавоб. а) $y = -x + 3$; б) $y = -x + 4$;
в) $y = x - 3$; г) $y = -x + 3$.

54. Координаталар бошидан ва $M(2;\ 7)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Жавоб. $y = \frac{7}{2}x$.

55. Берилган $N(-3;\ -7)$ ва $M(0;\ -4)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топинг.

Жавоб. $y = x - 4$; $k = 1$.

56. Учлари $A(5;\ 0)$, $B(-2;\ 1)$ ва $C(2;\ 3)$ нуқталарда ётган ABC учбурчак томонларининг тенгламаларини топинг.

Жавоб. $y_{AB} = -\frac{1}{7}x + \frac{5}{7}$; $y_{BC} = \frac{1}{2}x + 2$;
$y_{AC} = -x + 5$.

57. Учлари $A(-3;\ 5)$, $B(6;\ 6)$, $C(5;\ 3)$ ва $O(0;\ 0)$ нуқталарда ётган $ABCO$ тўртбурчак AC ва BO диагоналларининг тенгламаларини тузинг.

Жавоб. $y_{AC} = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$; $y_{BO} = x$. ■

7-§. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси ва уни текшириш

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

$$Ax + By + C = 0. \qquad (11)$$

Агар $C = 0$ бўлса, $Ax + By = 0$ тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади.

Агар $A = 0$ бўлса, $By + C = 0$ тўғри чизиқ абсциссалар ўқига параллел бўлади.

Агар $B = 0$ бўлса, $Ax + C = 0$ тўғри чизиқ ординаталар ўқига параллел бўлади.

Агар $A = C = 0$ бўлса, $By = 0$ тўғри чизиқ абсциссалар ўқи билан устма-уст тушади.

Агар $B = C = 0$ бўлса, $Ax = 0$ тўғри чизиқ ординаталар ўқи билан устма-уст тушади.

Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти унинг умумий (11) тенгламасидан

$$k = -\frac{A}{B} \; (B \neq O) \qquad (12)$$

формула билан аниқланади.

1-мисол. $6x - 4y + 5 = 0$ тўғри чизиқ тенгламасини бурчак коэффициентли ва бошланғич ординатали тенглама кўринишда ёзинг.

△. Масалани ечиш учун берилган тўғри чизиқ тенгламасини y га нисбатан ечамиз:

$$4y = 6x + 5 \Rightarrow y = \frac{6}{4}x + \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}. \blacktriangle$$

2-мисол. Берилган $3x - 6y = 0$ тўғри чизиқнинг координаталар ўқларига нисбатан қандай жойлашганлигини текширинг ва тўғри чизиқни ясанг.

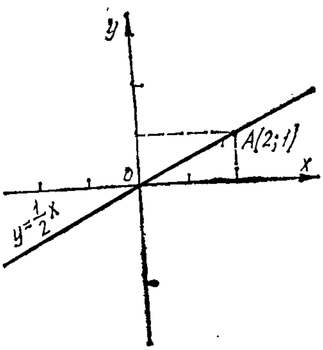
△. Берилган $3x - 6y = 0$ тенгламада $C = 0$, демак, тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади. Энди бу тўғри чизиқни ясаймиз. Бунинг учун берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$6y = 3x \Rightarrow y = \frac{3}{6}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтганлиги сабабли битта нуқтасини топиш кифоя. x га қиймат бериб y ни топамиз. Қулайлик учун $x = 2$ бўлсин.

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow y = 1.$$

Натижада $A(2;\ 1)$ нуқтани ҳосил қилдик. Бу икки $A(2;1)$ ва $O(0;\ 0)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси $3x-6y=0$ бўлади (2. 18- чизма).



2.18- чизма

3-мисол. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $7y+5x-3=0$ берилган. Унинг бурчак коэффициентини топинг.

△. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламасига солиштирсак,

$$A=5, \quad B=7$$

эканини топамиз. (12) формулага асосан берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти:

$$k=-\frac{A}{B}=-\frac{5}{7}.\ ▲$$

4-мисол. $5x+5y-7=0$ тўғри чизиқнинг Ox ўқи билан ташкил қилган бурчагини топинг.

△. Берилган тўғри чизиқ тенгламасини y га нисбатан ечамиз.

$$5x+5y-7=0 \Rightarrow 5y=-5x+7 \Rightarrow y=-\frac{5}{5}x+\frac{7}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=-x+\frac{7}{5}.$$

Ҳосил бўлган тўғри чизиқ тенгламасининг бурчак коэффициенти $k=-1$. (7) формулага асосан:

$$k=\operatorname{tg}\varphi, \text{ яъни } \operatorname{tg}\varphi=-1 \Rightarrow \varphi=135^\circ.$$

Демак, $5x+5y-7=0$ тўғри чизиқ Ox ўқи билан $\varphi=135^\circ$ бурчак ҳосил қилади. ▲

□. **58.** Қуйидаги

$2x-y=0, \quad 2x-y+1=0, \quad 3x-4=0, \quad 5y-7=0,$
$3x=0, \quad x+4y=0, \quad 3x-2y+8=0$

тўғри чизиқларнинг координаталар ўқларига нисбатан қандай жойлашганлигини текширинг.

59. Қуйидаги $3x-y+8=0, \quad x-2y+4=0,$

$2x+3y=6, \quad 4x-3y=1, \quad \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-4=0$

тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини аниқланг.

Жавоб. $k=3$, $k=\frac{1}{2}$, $k=-\frac{2}{3}$, $k=\frac{4}{3}$, $k=-\frac{3}{4}$.

60. Берилган $18x-6y+3=0$ тўғри чизиқ тенгламасини унинг *бурчак коэффициенти ва бошланғич ординатаси* ёрдамида ёзинг.

Жавоб. $y=3x+\frac{1}{2}$.

61. Қуйида берилган тенгламаларнинг бошланғич ординаталарини топинг:

а) $x+2y-4=0$; б) $2x-3y-9=0$;
в) $3x+4y-12=0$; г) $x-7y+28=0$.

Жавоб. а) $b=2$; б) $b=-3$;
в) $b=3$; г) $b=4$.

62. p нинг қандай қийматларида $2x+3y+p=0$ тўғри чизиқ Oy ўқини (0; 4) нуқтада кесиб ўтади?
Жавоб. $p=-12$.

63. p нинг қандай қийматларида $5x+py-31=0$ тўғри чизиқ Ox ўқи билан 45° бурчак ҳосил қилади?
Жавоб. $p=-5$.

64. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг Ox ўқи билан ҳосил қилган бурчакларини аниқланг:

а) $2x-2y+3=0$; в) $3x-2y+5=0$;
б) $7x+7y-10=0$; г) $2x-4y=6$.

Жавоб. а) $\varphi=45°$; в) $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$;
б) $\varphi=135°$; г) $\varphi=\operatorname{arctg}2$. ■

8-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари

Агар иккита $y=k_1x+b_1$ ва $y=k_2x+b_2$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентлари аниқ бўлса, улар орасидаги φ бурчак

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1} \tag{13}$$

формула билан аниқланади.

Агар тўғри чизиқлар тенгламаси

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ ва } A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{14}$$

кўринишда берилган бўлса, у ҳолда (13) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (15)$$

(14) тўғри чизиқларнинг параллеллик шарти қуйидагича:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (16)$$

Перпендикулярлик шарти эса

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (17)$$

кўринишда бўлади.

Агар тўғри чизиқлар

$$y = k_1x + b_1 \text{ ва } y = k_2x + b_2 \qquad (18)$$

кўринишда берилган бўлса, параллеллик шарти:

$$k_1 = k_2, \qquad (19)$$

перпендикулярлик шарти:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \qquad (20)$$

формулалар билан аниқланади.

1-мисол. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг:

$$4x + 7y = 28 \text{ ва } x - 3y - 3 = 0.$$

△. Берилган тенгламалардан тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини топамиз:

$$4x + 7y = 28 \Rightarrow 7y = -4x + 28 \Rightarrow y = -\frac{4}{7}x + 4.$$

$$k_1 = -\frac{4}{7}, \quad x - 3y - 3 = 0 \Rightarrow 3y = x - 3 \Rightarrow y =$$
$$= \frac{1}{3}x - 1. \; k_2 = \frac{1}{3}.$$

У ҳолда бу икки тўғри чизиқ орасидаги φ бурчак (13) формулага асосан

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{4}{7}\right)}{1 + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{7}}{1 - \frac{4}{21}} = \frac{\frac{7+12}{{}^{2}/_{1}}}{\frac{21-4}{{}^{2}/_{1}}} = \frac{19}{17}.$$

Демак, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{19}{17}$ га тенг. ▲

2-мисол. Учбурчак томонлари $2x - 3y + 25 = 0$; $3x + 2y - 8 = 0$ ва $y - 1 = 0$ тенгламалар билан берилган. Унинг ички бурчакларини топинг.

△. Учбурчакнинг $2x - 3y + 25 = 0$ ва $3x + 2y - 8 = 0$ томонлари орасидаги бурчак: φ_1, $3x + 2y - 8 = 0$ ва $y - 1 = 0$ томонлари орасидаги бурчак: φ_2, $y - 1 = 0$ ва $2x - 3y + 25 = 0$ томонлари орасидаги бурчак: φ_3 бўлсин. (15) формулага асосан:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2\cdot 2 - 3\cdot(-3)}{2\cdot 3 + (-3)\cdot 2} = \frac{4+9}{6-6} = \frac{13}{0} = \infty, \ \operatorname{tg}\varphi_1 = \infty \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{3\cdot 1 - 0\cdot 2}{3\cdot 0 + 2\cdot 1} = \frac{3-0}{0+2} = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{0\cdot(-3) - 2\cdot 1}{0\cdot 2 + 1\cdot(-3)} = \frac{0-2}{0-3} = \frac{2}{3}, \ \operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}. \blacktriangle$$

3-мисол. Берилган $5x + 4y - 12 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлган ва (0; −2) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг. Уни чизмада кўрсатинг.

△. Берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$4y = -5x + 12 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x + 3. \qquad (\ast)$$

Бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $-\frac{5}{4}$ га тенг.

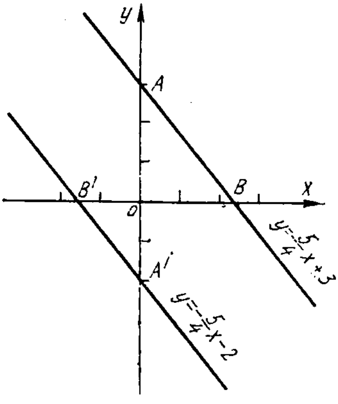
(19) формулага асосан, бу тўғри чизиққа параллел бўлган (0;—2) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y = -\frac{5}{4}x - 2 \qquad (\ast\ast)$$

кўринишда бўлади.

Энди бу тўғри чизиқларнинг графигини ясаймиз.

$(\ast)$ дан $x = 0$ бўлса, $y = 3$ келиб чиқади, яъни A_1 (0; 3). $y = 0$ бўлса, $x = 2{,}4$ бўлади, яъни B_1 (2,4; 0). $(\ast\ast)$ дан $x = 0$ бўлса, $y = -2$ келиб чиқади, яъни A_2 (0; −2). $y = 0$ бўлса, $x = -1{,}6$ бўлади, яъни B_2(−1,6; 0). A_1(0; 3) ва B_1 (2,4; 0), A_2 (0; −2) ва B_2 (—1,6; 0) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқлар бир-бирига параллел бўлиб мос равишда $y = -\frac{5}{4}x + 3$ ва $y = -\frac{5}{4}x - 2$ тўғри чизиқларнинг графигидир (2. 19- чизма). ▲



2.19- чизма

4-мисол. Берилган $3x-2y=6$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган ва (0; 5) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△. Берилган тенгламани (18) формулада кўрсатилган тенглама кўринишига келтириб ёзамиз:

$$2y=3x-6 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-3.$$

Бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $\frac{3}{2}$ га тенг. (20) формулага асосан. Бу тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган ва (0; 5) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси $y=-\frac{1}{\frac{3}{2}}x+5 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+5$ бўлади.▲

5-мисол. Берилган $A(-1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи ва $4y-3x+8=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

△. Берилган тенгламани

$$4y=3x-8 \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-2$$

кўринишда ёзамиз. Бу ерда $k=\frac{3}{4}$.

$A(-1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси $y-3=k(x+1)$ кўринишда бўлади. (18) формулага асосан $A(-1;\ 3)$ нуқтадан ўтиб, $y=\frac{3}{4}x-2$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси

$$y-3=\frac{3}{4}(x+1) \Rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$$

бўлади.▲

□. **65.** Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг.

а) $y+3x=0$ ва $y-2x-6=0$;
б) $3x-2y+7=0$ ва $4y-6x-3=0$;
в) $y=4x-8$ ва $x+4y-3=0$;
г) $2y-x+3=0$ ва $2x+4y-2=0$.

Жавоб. а) $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{5}{7}$; б) 0°; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{2}$.

66. Учбурчак томонлари $5x-3y+15=0$, $5x+3y-15=0$ ва $y+5=0$ тенгламалар билан берилган. Унинг ички бурчакларини топинг.

Жавоб. $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{15}{8}$; $\varphi_2 = \varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{5}{3}$.

67. Берилган $y - 4x = 0$ тўғри чизиқ билан $A(-3;\ 5)$ ва $B(5;\ 3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топинг.

Жавоб. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

68. $A(2;\ 5)$ ва $B(4;\ 1)$ нуқталар берилган. C нуқта AB кесмани тенг иккига бўлади. Координаталар бошидан OA, OC ва OB тўғри чизиқлар ўтказилган. Улар орасидаги бурчакни топинг.

Жавоб. $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{7}\right)$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right)$.

69. Учлари $A(-2;\ -1)$, $B(-2;\ 2)$ ва $C(4;\ -1)$ нуқталарда ётган ABC учбурчак берилган. BD медиана билан AC томони орасидаги бурчакни топинг.

Жавоб. $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

70. Берилган $M(-3;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи ва $2x - 3y + 5 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг. Уни чизмада кўрсатинг.

Жавоб. $y = \frac{2}{3}x + 4$.

71. Oy ўқини $(0;\ 7)$ нуқтада кесиб ўтувчи ва $y + 2x - 3 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Жавоб. $y = \frac{1}{2}x + 7$.

72. $5x - 4y + 20 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталаридан шу тўғри чизиққа перпендикуляр чиқарилган. Уларнинг тенгламаларини ёзинг.

Жавоб. $y = -\frac{4}{5}x + 5$; $y = -\frac{4}{5}x - \frac{16}{5}$.

73. Координаталар бошидан $4x - 6y + 9 = 0$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказинг ва унинг тенгламасини тузинг.

Жавоб. $y = \frac{2}{3}x$.

74. Берилган $M(-6;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи ва $2y - 5x - 10 = 0$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ тенгламасини топинг ва ясанг.

Жавоб. $y = \frac{5}{2}x + 18$. ■

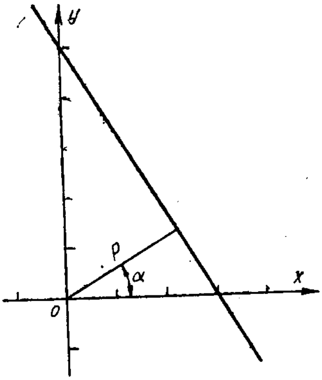
9-§. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси

Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси

$$x \cdot \cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (21)$$

кўринишга эга.

Бу ерда p — координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр (нормаль) узунлиги, α — бу перпендикуляр билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак (2.20-чизма).



2.20- чизма

Ҳар қандай биринчи даражали

$$Ax + By + C = 0 \qquad (22)$$

кўринишдаги тенглама нормал кўринишга келтирилиши мумкин. Бунинг учун уни

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (23)$$

нормалловчи кўпайтувчига кўпайтириш керак, яъни

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

бўлади.

Нормалловчи кўпайтувчининг ишораси, тенгламадаги озод ҳад C нинг ишорасига тескари бўлади. Тўғри чизиқнинг параметрлари

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \sin\alpha = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}; \ p = \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (24)$$

формулалар билан ҳисобланади.

$(x_0;\ y_0)$ нуқтадан (21) тўғри чизиққача бўлган масофа

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \qquad (25)$$

ва (22) тўғри чизиққача бўлган масофа

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \qquad (26)$$

формулалар билан аниқланади.

1-мисол. Ox ўқи билан 30° бурчак ҳосил қилувчи ва нормалининг узунлиги $p = 5$ бўлган тўғри чизиқнинг нормал тенгламасини ёзинг.

△. Масалани ечишда (21) формуладан фойдаланамиз. Масаланинг шартига кўра $p = 5$, $\alpha = 30°$, демак,

$$x \cos 30° + y \sin 30° - 5 = 0$$

ёки

$$\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y - 5 = 0. \ ▲$$

2-мисол. $5x + 12y - 26 = 0$ тўғри чизиқ тенгламасини нормал шаклга келтиринг.

△. (23) формуладан фойдаланиб нормалловчи кўпайтувчини топамиз:

$$M = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{1}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}.$$

Тенгламадаги озод ҳад C нинг ишораси „—“ (манфий) бўлгани учун нормалловчи кўпайтувчининг ишорасини „+“ (мусбат) қилиб олдик.

Энди берилган тенгламага M ни кўпайтириб тенгламани нормал шаклга келтирамиз:

$$\frac{1}{13}(5x + 12y - 26 = 0) \Rightarrow \frac{5}{13} x + \frac{12}{13} y - 2 = 0. ▲$$

3-мисол. $A(3; \sqrt{5})$ нуқтадан $2x + \sqrt{5}\, y - 2 = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

△. $A(3; \sqrt{5})$ нуқтадан $2x + \sqrt{5}\, y - 2 = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофани (26) формула орқали аниқлаймиз:

$$d = \frac{2 \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 2}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}} = \frac{6 + 5 - 2}{\sqrt{4 + 5}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Шундай қилиб, $d = 3.$▲

☐. **75.** Қуйида берилган тўғри чизиқларнинг қайси бири тўғри чизиқларнинг нормал тенгламаси ҳолида берилган?

а) $3x - 2y + 11 = 0;$ б) $\frac{2}{5} x - \frac{3}{4} y + 1 = 0;$

в) $\frac{\sqrt{5}}{5} x + \frac{2}{3} y - 4 = 0;$ г) $\frac{4}{5} x - \frac{3}{5} y - 1 = 0;$

д) $x - 3 = 0;$ е) $y - 5 = 0.$

Жавоб. в); г); д); е).

76. Қуйида берилган тенгламаларни тўғри чизиқларнинг нормал тенгламаси ҳолига келтиринг:

а) $2x - 3y - 5 = 0;$ б) $x + y + 1 = 0;$

в) $y = 2x + 5$;　　　　г) $y = -3x + 2$;
д) $3x - 4y - 15 = 0$.

Жавоб. а) $\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{13} = 0$;

б) $-\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$;　в) $-\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5} = 0$;

г) $-\frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{2}{\sqrt{10}} = 0$; д) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$.

77. Берилган $A(2;\ 3)$ нуқтадан $3x+4y+2=0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

Жавоб. $d = 4$.

78. $5x - 12y - 26 = 0$ ва $5x - 12y - 65 = 0$ параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

Жавоб. $d = 3$.

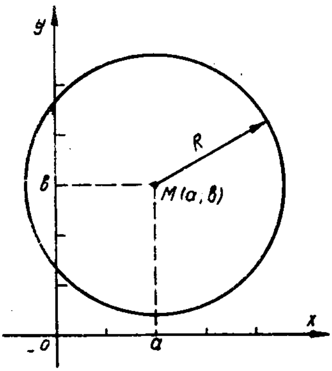
79. Учлари $A(0;\ 5)$, $B(-3;\ 1)$ ва $C(-1;\ -2)$ нуқталарда ётган ABC учбурчак берилган. C нуқтадан туширилган баландлик узунлигини топинг.

Жавоб. $d = 5$. ■

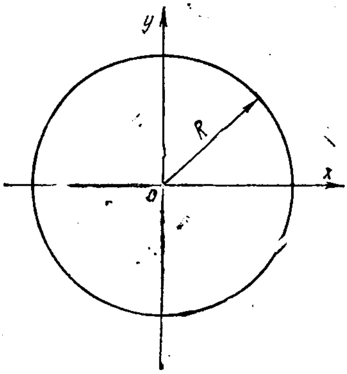
10-§. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар. Айлана, эллипс

Марказ деб аталувчи нуқтадан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни *айлана* деб аталади. Маркази $M(a;\ b)$ нуқтада ва радиуси R бўлган айлананинг (2.21-чизма) нормал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (27)$$



2.21- чизма



2.22- чизма

Агар айлананинг маркази координаталар бошида бўлса (2.22- чизма), у ҳолда унинг тенгламаси энг содда кўринишда бўлади:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{28}$$

Агар иккинчи даражали умумий

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \tag{29}$$

тенгламада координаталарнинг квадратлари олдидаги коэффициентлари ўзаро тенг бўлса ва ундан ташқари координаталарнинг кўпайтмасидан тузилган ҳад қатнашмаса, яъни

$$A = B \text{ ва } C = 0 \tag{30}$$

бўлса, (29) тенглама айланани тасвирлайди.

Агар x_1 ва y_1 айлананинг бирор нуқтасининг координаталари бўлса, у ҳолда бу нуқтадан айланага ўтказилган уринманинг тенгламаси:

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = R^2 \tag{31}$$

ёки

$$xx_1 + yy_1 = R^2 \tag{32}$$

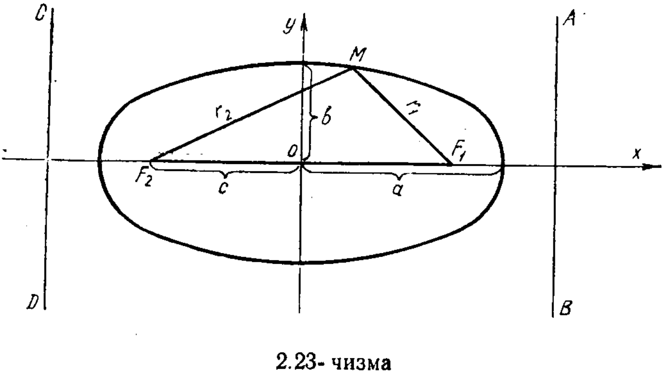
кўринишга эга бўлади.

Эллипс деб, шундай нуқталарнинг геометрик ўрнига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан иккита ўзгармас нуқтагача — эллипснинг фокусларигача бўлган масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас миқдор бўлиб, 2 a га тенгдир (2.23- чизма). Фокуслар орасидаги масофа

$$F_2F_1 = 2c. \tag{33}$$

Эллипснинг энг содда тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{34}$$



2.23- чизма

кўринишда бўлади. Бунда

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad (35)$$

Эллипснинг *эксцентриситети* ε деб, фокуслари орасидаги ($2\ c$) масофанинг эллипснинг катта ўқи ($2a$) нисбатига айтилади, яъни

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} \Rightarrow \varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad (36)$$

бундан $\varepsilon < 1$ эканлиги равшан.

Эллипсдаги нуқтадан фокусларгача бўлган масофалар унинг *фокал радиус-векторлари* (r_1 ва r_2) дейилади.

Эллипснинг ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтаси учун

$$r_1 = a - \varepsilon x,\ r_2 = a + \varepsilon x,\ r_1 + r_2 = 2a. \qquad (37)$$

Эллипснинг кичик ўқига параллел бўлган ва ундан $\frac{a}{\varepsilon}$ масофадан ўтган икки тўғри чизиқ эллипснинг директрисалари дейилади (2.23-чизмадаги AB ва CD тўғри чизиқлар). Директрисалар тенгламалари қуйидагича аниқланади:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ ва } x = -\frac{a}{\varepsilon}\cdot \qquad (38)$$

(34) эллипснинг $M(x;\ y)$ нуқтасида унга уринма бўлган чизиқнинг тенгламаси

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad (39)$$

кўринишда бўлади.

1-мисол. Маркази ($2;\ -5$) нуқтада ва радиуси 4 бирликка тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

△. Масала шартига кўра

$$a = 2,\quad b = -5 \text{ ва } R = 4.$$

(27) формулага асосан айлананинг тенгламаси

$$(x-2)^2 + (y-(-5))^2 = 4 \Rightarrow (x-2) + (y+5)^2 = 4^2$$

ёки

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 - 16 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$$

кўринишда бўлади.▲

2-мисол. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ айлананинг тенгламаси берилган. Айлана марказининг координаталарини ва радиусини топинг.

△. Берилган тенгламани ушбу $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ нормал кўринишга келтирамиз. Бунинг учун x ли ҳадлар (x^2+2x) ни ва y ли ҳадлар (y^2-4y) ни алоҳида-алоҳида йиғиб оламиз. Кейин биринчи группага 1 ни ва иккинчи группага 4 ни қўшиб уларни тўла квадратга тўлдирамиз, яъни

$$x^2+2x+1 \text{ ва } y^2-4y+4$$

ҳосил бўлади. Бу тенглама берилган тенглама билан тенг кучли бўлиши учун қўшган сонларни айириб ташлаймиз. Натижада

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4-1-4-20=0 \Rightarrow (x+1)^2+ \\ +(y-2)^3-25=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5^2.$$

Бундан

$$a=-1,\quad b=2 \text{ ва } R=5$$

эканлиги келиб чиқади.▲

3-мисол. $x^2+y^2=8$ айлананинг $(2;\ -2)$ нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламасини ёзинг.

△. Масаланинг шартига кўра $x_1=2$ ва $y_1=-2$. (32) формулага кўра

$$x\cdot 2+y(-2)=(\sqrt{8})^2 \Rightarrow 2x-2y=8 \Rightarrow x-y=4$$

ни ҳосил қилдик.

Демак, изланган уринма тенгламаси $x-y=4$ бўлади. ▲

4-мисол. Катта ўқи 10 га тенг ва эксцентриситети $\varepsilon=0{,}8$ га тенг бўлган эллипснинг энг содда тенгламасини тузинг.

△. Масалани шартига кўра $2a=10 \Rightarrow a=5$; (36) формуладан $c=a\cdot\varepsilon=5\cdot 0{,}8=4$ келиб чиқади.

(35) формуладан фойдаланиб b ни топамиз:

$$b^2=5^2-4^2 \Rightarrow b=\sqrt{5^2-4^2} \Rightarrow b=\sqrt{25-16}=b= \\ =\sqrt{9} \Rightarrow b=3.$$

(34) формулага асосан эллипснинг энг содда тенгламаси

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

кўринишда бўлади.▲

5-мисол. Берилган $4x^2+9y^2=16$ эллипснинг катта ав кичик ярим ўқларини фокусларини ҳамда эксцентриситетини топинг.

△. Берилган тенгламанинг ҳар икки томонини 16 га бўламиз.

Натижада эллипснинг энг содда тенгламаси ҳосил бўлди:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{16} = 1$$

ёки

$$\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1.$$

(34) формулага асосан

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2,$$
$$b^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

ларни топдик. (35) формуладан фойдаланиб c ни топамиз:

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{20}{9};$$

$$c = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

(36) формуладан фойдаланиб ε ни топамиз:

$$\varepsilon = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Шундай қилиб: $a = 2$, $b = \frac{4}{3}$, $F_1\left(\frac{2\sqrt{5}}{3},\ 0\right)$,

$$F_2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3},\ 0\right), \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ларни топдик.▲

□. **80.** Маркази $N(3;\ 4)$ ва радиуси $R = 4$ бўлган айлана тенгламасини ёзинг. $A(3;\ 0)$, $B(-1;\ 4)$ ва $C(2;\ 5)$ нуқталар бу айланада ётадими?

Жавоб. $M(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$; $A(3;\ 0)$, $B(-1;\ 4)$ нуқталар айланада ётади.

81. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ айлананинг тенгламаси берилган. Айлана марказининг координаталарини ва радиусини топинг.

Жавоб. $M(2;\ -4)$; $R = 6$.

82. Қуйида берилган тенгламаларни қайси бири айлананинг тенгламаси бўла олади?

а) $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 14 = 0$;
б) $2x^2 + 3y^2 - 6x + 9y - 25 = 0$;
в) $3x^2 + 3y^2 + 7xy + 6x - 9y - 15 = 0$;

г) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$.

Жавоб. а), г).

83. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ айлана берилган. Унинг (4; 2) нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламасини ёзинг.

Жавоб. $x + 4y = 18$.

84. $x^2 + y^2 = 10$ айлананинг $(-3; -1)$ нуқтасидан ўтувчи уринманинг тенгламасини ёзинг.

Жавоб. $y + 3x + 10 = 0$.

85. Фокуслари орасидаги масофа 6 га ва катта ярим ўқи 5 га тенг бўлган эллипснинг энг содда тенгламасини тузинг.

Жавоб. $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

86. Эллипс тенгламаси берилган:
$25x^2 + 125y^2 = 625$. Эллипс ўқларининг узунликларини, фокусларининг координаталарини ва эксцентриситетини топинг.

Жавоб. $a = 5$, $b = \sqrt{5}$, $\varepsilon = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $F_1(2\sqrt{5};\ 0)$,

$F_2(-2\sqrt{5};\ 0)$.

87. $x^2 + 3y^2 = 6$ эллипснинг эксцентриситетини ва директрисаларини ҳисобланг.

Жавоб. $\varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x = \pm 3$.

88. $\frac{x^2}{125} + \frac{y^2}{100} = 1$ эллипс директрисаларининг тенгламаларини тузинг.

Жавоб. $x = \pm 5$.

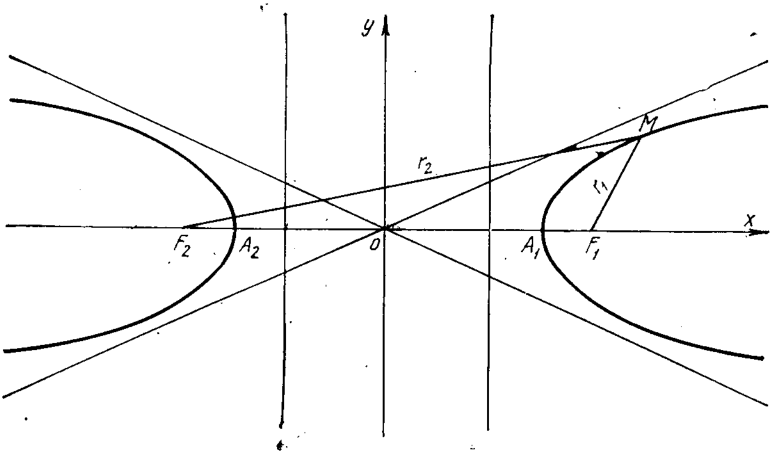
89. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ эллипснинг $M(0;\ 4)$ нуқтасидан ўтувчи уринманинг тенгламасини топинг.

Жавоб. $y = 4$. ■

11-§. Гипербола, парабола ва уларнинг тенгламалари

Гипербола деб, шундай нуқталарнинг геометрик ўрнига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан иккита ўзгармас нуқтага — гиперболанинг фокусларигача — бўлган масофалар айирмаси ўзгармас миқдор бўлиб, 2 *a* га тенгдир.

Фокуслар орасидаги масофа $F_2F_1 = 2c$ (2.24- чизма).



2.24- чизма

Гиперболанинг энг содда тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (40)$$

кўринишга эга, бунда

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (41)$$

Гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи a; $|a| = |OA_1| = |OA_2|$, мавҳум ярим ўқи b; гиперболанинг фокуслари: $F_1(c;\ 0)$, $F_2(-c;\ 0)$, бундан

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (42)$$

Гиперболанинг:
эксцентриситети

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon > 1, \text{ чунки } c > a); \qquad (43)$$

асимптоталари

$$y = \pm \frac{b}{a} x; \qquad (44)$$

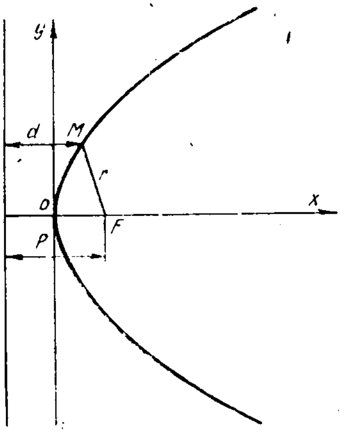
директрисалари

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \qquad (45)$$

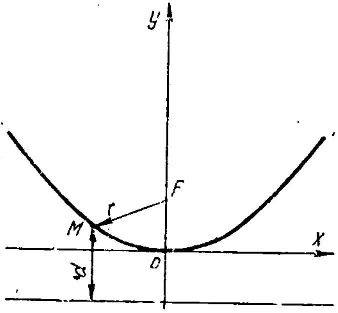
формулалар билан аниқланади. Гиперболанинг ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтасидан фокусларигача бўлган масофа

$$r_1 = |\varepsilon x + a|, \quad r_2 = |\varepsilon x - a| \qquad (46)$$

формулалар ёрдамида топилади.



2.25- чизма



2.26- чизма

Ярим ўқлари тенг ($a = b$) бўлган гипербола *тенг томонли гипербола* дейилади ва

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{47}$$

формула билан ифодаланади.

Гиперболанинг (x_1; y_1) нуқтасидан ўтказилган уринманинг тенгламаси:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1. \tag{48}$$

Парабола деб, шундай нуқталарнинг геометрик ўрнига айтиладики, уларнинг ҳар биридан ўзгармас бир нуқтагача — параболанинг фокусигача — ва ўзгармас тўғри чизиққача — параболанинг директрисасигача — бўлган масофалар ўзаро тенгдир. Координаталар бошидан ўтиб Ox ўқига симметрик бўлган парабола тенгламаси (2. 25- чизма):

$$y^2 = 2px. \tag{49}$$

Директриса тенгламаси:

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{50}$$

(49) формула билан кўрсатилган парабола фокуси: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Параболанинг $M(x; y)$ нуқтасининг фокал радиуси

$$r = x + \frac{p}{2} \qquad (51)$$

формула билан топилади.

Агар парабола координаталар бошидан ўтиб Oy ўқига нисбатан симметрик бўлса (2.26- чизма), у ҳолда парабола тенгламаси:

$$x^2 = 2py, \qquad (52)$$

директрисаси:

$$y = -\frac{p}{2}, \qquad (53)$$

фокуси $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ нуқтада, $M(x;\ y)$ нуқтасининг фокал радиуси

$$r = y + \frac{p}{2} \qquad (54)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(49) ва (52) параболалар учун уларнинг $(x_1,\ y_1)$ нуқтасида ўтказилган уринма тенгламаси мос равишда

$$yy_1 = p(x + x_1) \text{ ва } xx_1 = p(y + y_1) \qquad (55)$$

формулалар билан ифодаланади.

1-мисол. Берилган $4x^2 - 9y^2 = 36$ гиперболанинг ярим ўқлари, фокусларининг координаталарини ва эксцентриситетини топинг.

△. Берилган гипербола тенгламасини каноник кўринишга келтирамиз. Бунинг учун тенгламанинг ҳар икки томонини 36 га бўламиз:

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Ҳосил бўлган тенгламани (40) формула билан солиштирсак, $a = 3$, $b = 2$ эканлиги кўриниб турибди. Энди (42) формуладан фойдаланиб гипербола фокусларининг координаталарини топамиз:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$
$$F_1(\sqrt{13},\ 0), \quad F_2(-\sqrt{13},\ 0).$$

Гипербола эксцентриситетини топиш учун (43) формуладан фойдаланамиз: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Шундай қилиб:

$$a = 3,\ b = 2,\ F_1(\sqrt{13};\ 0),\ F_2(-\sqrt{13};\ 0) \text{ ва } \varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}.\ \blacktriangle$$

2-мисол. Фокуслари орасидаги масофа $2c = 8$, учағи орасидаги масофа $2a = 6$ бўлган гиперболанинг каноник тенгламасини тузинг.

△. Масаланинг шартига кўра:

$$2c = 8 \Rightarrow c = \frac{8}{2} \Rightarrow c = 4,$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{2} \Rightarrow a = 3.$$

Гиперболанинг тенгламасини тузиш учун мавҳум ярим қи b ни топиш керак. Бунинг учун (41) формуладан ойдаланамиз:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 5.$$

Энди (40) формулага асосан гиперболанинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{5} = 1$$

ёки

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$$

кўринишда бўлади.▲

3-мисол. $y = \frac{1}{4}x^2$ парабола фокусининг координаталарини топинг ва директрисасининг тенгламасини тузинг.

△. Берилган парабола тенгламасини каноник кўринишга келтириб ёзамиз:

$$y = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x^2 = 4y.$$

Бу тенгламани (52) формула билан солиштирсак:

$$2p = 4 \Rightarrow p = 2$$

эканлиги келиб чиқади. Парабола директрисасининг тенгламаси (53) формулага асосан

$$y = -\frac{p}{2} = -\frac{2}{2} = -1; \quad y = -1$$

бўлади. Парабола фокусининг координаталари

$$F\left(0;\ \frac{p}{2}\right) \text{ ёки } F(0;\ 1).\ \blacktriangle$$

4-мисол. Фокуси (6; 0) нуқтада бўлган параболанинг каноник тенгламасини тузинг.

△. (50) формулага асосан парабола фокуси $F(6;\ 0)$, яъни

$$\frac{p}{2}=6 \Rightarrow p=12.$$

Параболанинг топилган параметрини (49) формулага қўйсак:

$$y^2=2px=2\cdot 12x=24x. \quad y^2=24x$$

келиб чиқади. ▲

5-мисол. $y^2=8x$ парабола директрисасининг тенгламасини тузинг.

△. Берилган парабола тенгламасини (49) тенглама билан солиштирсак, $2p=8 \Rightarrow p=4$ эканлиги равшан.

(50) формулага асосан парабола директрисасининг тенгламаси $x=-\frac{p}{2}=-\frac{4}{2}=-2$; $x=-2$ бўлади. ▲

□. **90.** Берилган $9x^2-25y^2=225$ параболанинг ҳақиқий ва мавҳум ўқларининг узунликларини, фокусларининг координаталарини ва эксцентриситетини топинг.

Жавоб. $2a=10$, $2b=6$, $F_1(\sqrt{34},\ 0)$, $F_2(-\sqrt{34},\ 0)$ ва $\varepsilon=\frac{\sqrt{34}}{5}$.

91. Фокуслари орасидаги масофа $2\sqrt{41}$ га ва ҳақиқий ўқи 10 га тенг бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Жавоб. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

92. Гиперболанинг ҳақиқий ўқи $2a=10$, эксцентриситети $\varepsilon=1{,}4$ бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

Жавоб. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.

93. Берилган $x^2-4y^2=20$ гиперболанинг асимптоталарининг тенгламаларини топинг.

Жавоб. $y=\pm\frac{1}{2}x$.

94. Фокуслари (0; 3) ва (0; —3), асимптоталари $y=\pm 2x$ бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Жавоб. $5y^2-20x^2=36$.

95. Қуйидаги параболаларнинг фокусини ва директрисасини топинг.

а) $y^2+x=0$; б) $3x-y^2=0$

Жавоб. а) $\left(-\frac{1}{4};\ 0\right)$, $x=\frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{3}{4};\ 0\right)$, $x=-\frac{3}{4}$.

96. Учи координаталар бошида бўлган параболаларнинг қуйидаги директрисалари берилган:

а) $y = 3$; б) $y = -2$; в) $x = 4$.

Параболалар тенгламасини тузинг.

Жавоб. а) $x^2 = -12y$; б) $x^2 = 8y$; в) $y^2 = -16x$.

97. Фокуси (4; 0) ва директрисаси $x = -2$ бўлган парабола тенгламасини тузинг.

Жавоб. $y^2 = 12(x - 1)$.

98. $A(3; 1)$ нуқтадан ва $x - 1 = 0$ тўғри чизиқдан баравар узоқликда бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни ва тенгламасини топинг.

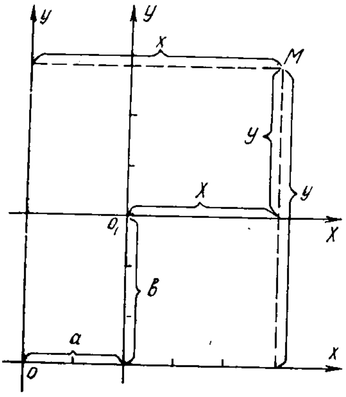
Жавоб. $(y - 1)^2 = 4(x - 2)$.

99. Учи координаталар бошида ётган, Oy ўққа нисбатан симметрик бўлиб, $A(4; 2)$ нуқтадан ўтувчи парабола тенгламасини тузинг.

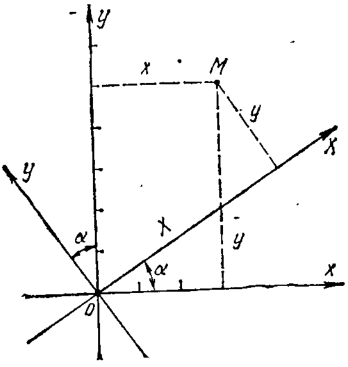
Жавоб. $x^2 - 8y = 0$.■

12-§. Координаталарни алмаштириш. Координаталар бошини параллел кўчириш ва буриш

xOy тўғри бурчакли декарт координаталар системасида координаталари $(x; y)$ бўлган M нуқта берилган бўлсин. Агар бу координаталар системасининг бошини $O_1(a; b)$ нуқтага, ўқларини эса xOy га мос равишда параллел бўлган XO_1Y системага кўчирсак, M нуқтанинг янги системадаги координаталари (2.27- чизма)



2.27- чизма



2.28- чизма

$$\begin{matrix} x = X + a, \\ y = Y + b \end{matrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{matrix} X = x - a, \\ Y = y - b \end{matrix} \qquad (56)$$

формулалар билан аниқланади. xOy координаталар системасида $M(x;\ y)$ нуқта берилган бўлса, бу системани O нуқта атрофида α бурчакка буриш натижасида ҳосил бўлган XOY системада M нуқтанинг координаталари (2.28-чизма)

$$\begin{matrix} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y = Y\cos\alpha + X\sin\alpha \end{matrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{matrix} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y = y\cos\alpha - x\sin\alpha \end{matrix} \qquad (57)$$

формула билан топилади.

1-мисол. Координаталари (3; 5) бўлган M нуқта берилган. Агар координаталар боши $O_1(-2;\ 3)$ нуқтага параллел кўчирилган бўлса, M нуқтанинг координаталарини топинг.

△. Масаланинг шартига кўра:

$$x = 3, \quad y = 5, \quad a = -2 \quad \text{ва} \quad b = 3.$$

(56) формулага асосан:

$$\begin{matrix} X = 3 - (-2) \Rightarrow X = 3 + 2 \Rightarrow X = 5; \\ Y = 5 - 3 \quad \Rightarrow Y = 2. \end{matrix}$$

Демак, координаталар боши $O_1(-2;\ 3)$ нуқтада бўлган янги системада M нуқтанинг координаталари (5; 2) экан. ▲

2-мисол. Координаталари (4; −6) бўлган M нуқтанинг координата ўқларини координаталар боши атрофида 90° буриш натижасида ҳосил бўлган янги системадаги координаталарини топинг.

△. Масаланинг шартига кўра:

$$x = 4, \quad y = -6 \quad \text{ва} \quad \alpha = 90^\circ.$$

(57) формулага асосан:

$$X = 4\cdot\cos 90^\circ + (-6)\sin 90^\circ \Rightarrow X = 4\cdot 0 - 6\cdot 1 \Rightarrow X = -6;$$
$$Y = -6\cdot\cos 90^\circ - 4\sin 90^\circ \Rightarrow Y = -6\cdot 0 - 4\cdot 1 \Rightarrow Y = -4.$$

Демак, M нуқтанинг янги системадаги координаталари (−6; −4) экан. ▲

3-мисол. Берилган $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 68 = 0$ айлана марказини янги координаталар системасининг боши деб қараб айлана тенгламасини содда кўринишга келтиринг.

△. Берилган айлана тенгламасини нормал кўринишда ёзамиз:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 81.$$

Бундан айлана марказининг координаталари, яъни янги системанинг координаталар боши (2; —3) эканлиги равшан. Демак, $a = 2$, $b = -3$.

(56) формуладан фойдаланиб

$$X = x - 2;$$
$$Y = y - (-3) \Rightarrow Y = y + 3$$

ларни ҳосил қилдик. Бу қийматларни айлана тенгламасига қўйсак, $X^2 + Y^2 = 81$ ҳосил бўлади.▲

4-мисол. Координаталари (—2; 4) бўлган M нуқтанинг координата ўқларини координаталар боши атрофида 45° буриш натижасида ҳосил бўлган янги системадаги координаталарини топинг.

△. Масаланинг шартига кўра:

$$x = -2, \quad y = 4 \quad \text{ва} \quad \alpha = 45°.$$

(57) формуладан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

$$X = -2\cos 45° + 4\sin 45° \Rightarrow X = -2\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \Rightarrow X = \sqrt{2}.$$
$$Y = 4\cdot\cos 45° - (-2)\sin 45° \Rightarrow Y = 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \Rightarrow Y = 3\sqrt{2}.$$

Демак, M нуқтанинг янги системадаги координаталари ($\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$) экан.▲

5-мисол. Берилган $y = x^2 + 6x + 7$ эгри чизиқ тенгламасини содда кўринишга келтиринг ва графигини ясанг.

△. Берилган эгри чизиқ тенгламасининг ўнг томонидаги квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратамиз:

$$y = x^2 + 6x + 7 \Rightarrow y = x^2 + 2\cdot 3x + 9 - 9 + 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = (x-3)^2 - 2 \Rightarrow y + 2 = (x+3)^2.$$
$$y + 2 = Y,$$
$$x + 3 = X$$

деб олсак, $Y = X^2$ ҳосил бўлади.

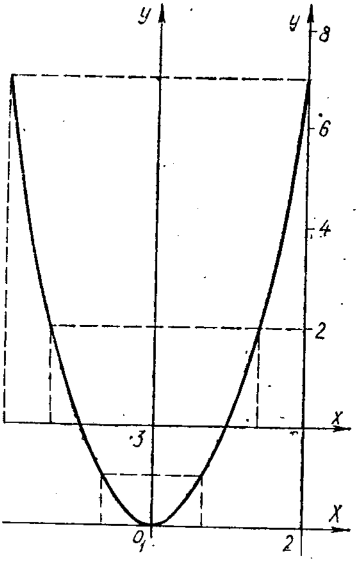
Бу тенглама, учи янги координаталар системаси бошидан ўтувчи ва OY ўққа нисбатан симметрик бўлган парабола тенгламасидир.

Энди янги системанинг координаталар бошини топамиз. Янги координаталар системасида координаталар боши $X = 0$, $Y = 0$.

Демак, (56) формулага асосан:

$X = x + 3$ ва $Y = y + 2$;
$0 = x + 3 \Rightarrow x = -3$;
$0 = y + 2 \Rightarrow y = -2$.

Шундай қилиб, янги координаталар системасининг координаталар боши $O_1(-3;\ -2)$ нуқтада экан (2.29- чизма).▲



2.29- чизма

□. **100.** Координаталари $(-4;\ -7)$ бўлган M нуқта берилган. Агар координаталар боши $O_1(3;\ -5)$ нуқтага параллел кўчирилган бўлса, M нуқтанинг координаталарини топинг.

Жавоб. $(-7;\ 12)$.

101. Координаталари $(4;\ 5)$ бўлган M нуқта берилган. Агар координаталар боши $O_1(1;\ 2)$ нуқтага параллел кўчирилган бўлса, M нуқтанинг координаталарини топинг ва ясанг.

Жавоб. $(3;\ 3)$.

102. Координаталар боши $O_1(3;\ 4)$ нуқтага параллел кўчирилганда M нуқтанинг координаталари $(-6;\ -11)$ бўлди. M нуқтанинг эски координаталарини топинг.

Жавоб. $(-3;\ -7)$.

103. Берилган $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ айлана марказини янги координаталар системасининг боши деб қараб, айлана тенгламасини содда кўринишга келтиринг.

Жавоб. $X^2 + Y^2 = 9^2$.

104. Берилган $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 36 = 0$ айлана марказини янги координаталар системасининг боши деб қараб, айлана тенгламасини содда кўринишга келтиринг ва янги система бошининг координаталарини аниқланг.

Жавоб. $(-3;\ 6)$, $X^2 + Y^2 = 3^2$.

105. Берилган $y = x^2 + 4x + 5$ эгри чизиқнинг тенгламасини содда кўринишга келтиринг ва графигини ясанг.

Жавоб. $x = -2$; $y = 1$, $Y = X^2$.

106. Берилган $2x - 4y + 3 = 0$ тўғри чизиқ тенгламаси координаталар боши (0; 1) нуқтага кўчганда қандай ўзгаради?

Жавоб. $2X - 4Y + 1 = 0$.

107. Координаталари (4; 6) бўлган M нуқтанинг координаталар ўқини координаталар боши атрофида 45° буриш натижасида ҳосил бўлган янги системадаги координаталарини топинг.

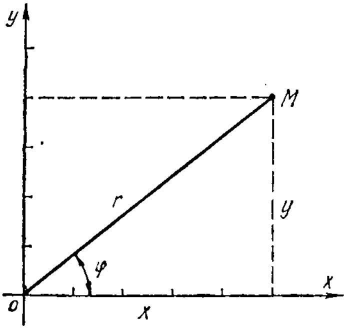
Жавоб. $(5\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

108. Координаталар ўқини координаталар боши атрофида 90° буриш натижасида ҳосил бўлган M нуқтанинг координаталари (5; 3) га тенг. M нуқтанинг эски системадаги координаталарини топинг.

Жавоб. (—3; 5). ■

13-§. Қутб координаталар системаси.

Тўғри бурчакли координаталар системаси ва қутб координаталар системаси орасидаги боғланиш



2.30- чизма

Қутб координаталар системасининг асосий элементлари нуқта ва ундан чиқувчи нур, яъни қутб O ва қутб ўқи Ox дан иборатдир.

M нуқтанинг текисликдаги ўрни бу нуқтанинг қутбдан бўлган масофаси — радиус-вектори r ва радиус-векторнинг қутб ўқи билан ташкил этган қутб бурчаги φ билан аниқланади.

Агар қутбни *координаталар боши* деб ва қутб ўқини эса *абсциссалар* ўқи деб қабул қилсак, M нуқтанинг қутб координаталари $(r,\ \varphi)$ ва ўша нуқтанинг тўғри бурчакли Декарт координаталари $(x;\ y)$ орасидаги боғланиш қуйидаги формулалар билан ифодаланади (2.30- чизма):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{58}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\,\cdot \tag{59}$$

Бу ерда (2.30- чизма) O — қутб. Ox — қутб ўқи, r — радиус-вектор, φ — M нуқтанинг қутб бурчаги.

1-мисол. Қутб координаталари билан берилган

$A\left(4;\ \frac{\pi}{6}\right)$ нуқтанинг тўғри бурчакли координаталарини топинг. Бунда әбсциссалар ўқини қутб ўқи, координаталар бошини қутб деб қаранг.

△. Масаланинг шартидан $r=4, \varphi=\frac{\pi}{6}$ эканлиги равшан. (58) формуладан фойдаланиб, нуқтанинг тўғри бурчакли координаталарини топамиз:

$$x = 4\cdot\cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 4\cdot\cos 30° \Rightarrow x = 4\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{3};$$

$$y = 4\cdot\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow y = 4\cdot\sin 30° \Rightarrow y = 4\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow y = 2.$$

Демак, A нуқтанинг тўғри бурчакли координаталари $(2\sqrt{3};\ 2)$ экан.▲

2-мисол. Тўғри бурчакли координаталар системасида (3; 4) координаталари билан берилган A нуқтанинг қутб координаталарини топинг.

△. Бизга $x = 3$ ва $y = 4$ берилган.

(59) формуладан фойдаланиб нуқтанинг қутб координаталарини топамиз:

$$r = \sqrt{3^2+4^2} \Rightarrow r = \sqrt{9+16} \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi \approx 52°.$$

Шундай қилиб, A нуқтанинг қутб координаталари (5; 52) экан.▲

□. **109.** Қутб координаталари билан берилган

$$A\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right),\quad B\left(2;\ \frac{\pi}{3}\right),\quad C\left(6;\ \frac{\pi}{4}\right),\quad D\left(2;\ -\frac{\pi}{6}\right),$$

$$E\left(4;\ \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ва } F\left(8;\ -\frac{\pi}{3}\right)$$

нуқталарнинг тўғри бурчакли координаталарини топинг. Бунда абсциссалар ўқини қутб ўқи, координаталар бошини қутб деб қаранг.

Жавоб. $A(0;\ 5)$, $B(1;\ \sqrt{3})$, $C(3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$, $D(\sqrt{3};\ -1)$, $E(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$, $F(4;\ -4\sqrt{3})$.

110. Тўғри бурчакли координаталари билан берилган $A(-4;\ 3)$, $B(-4;\ -3)$, $C(3;\ 0)$, $D(0;\ 5)$, $E(\sqrt{5};\ 2)$, $F(3;\ \sqrt{7})$ нуқталарнинг қутб координаталарини топинг.

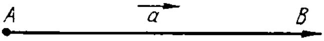
Жавоб. $A\left(5;\ -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$, $B\left(5;\ \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$, $C(3;\ 0)$, $D\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $E\left(3;\ \operatorname{arctg}\frac{2}{5}\right)$, $F\left(4;\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$. ■

III БОБ

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ ВА ФАЗОДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

1- §. Векторлар

1. Асосий тушунчалар. Скаляр миқдорлар билан бир қаторда шундай миқдорлар ҳам борки, улар ўзларининг сон қийматлари билан тўла аниқланмайди; уларнинг тўла аниқланиши учун сон қийматлари билан бир қаторда йўналишлари ҳам берилган бўлиши керак. Масалан, ҳаракат, куч, тезлик, тезланиш каби миқдорлар шулар жумласидандир. Тўғри чизиқда оддий кесма билан бир қаторда *йўналган* кесма, яъни бир учи унинг боши, иккинчи учи эса охири ҳисобланган кесма қаралади. Бундай кесма *вектор* дейилади. Векторни тартибланган икки нуқта аниқлайди. Оддий кесмада эса аниқловчи нуқталар тенг ҳуқуқли бўлиб тартибнинг аҳамияти йўқ.



3.1- чизма

Бошланғич нуқтаси A ва охирги нуқтаси B бўлган вектор $\overrightarrow{AB}$ ёки қисқача $\vec{a}$ шаклда ёзилади. Шундай қилиб, *вектор миқдор* геометрик усулда маълум узунликдаги ва аниқ йўналишдаги кесма ёрдамида тасвирланади (3. 1- чизма).

Векторнинг (берилган масштабдаги) узунлиги унинг *модули* деб аталади ва $|\overrightarrow{AB}|=|\vec{a}|=a$ кўринишда белгиланади. Модули нолга тенг вектор *ноль вектор*, модули бирга тенг бўлган вектор *бирлик вектор* дейилади. Ноль векторнинг йўналиши аниқланмаган бўлади. Векторлар ётган тўғри чизиқлар ўзаро *параллел* (ёки устма-уст тушган) бўлса, улар *коллинеар векторлар* дейилади.

Агар икки вектор қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1) узунликлари тенг бўлса;

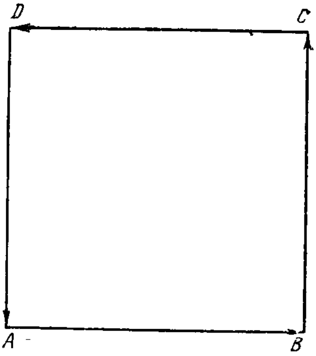
2) улар коллинеар бўлса;

3) йўналишлари бир хил бўлса, улар тенг деб ҳисобланади.

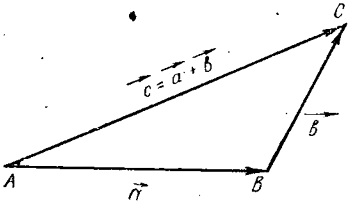
Масалан, $ABCD$ квадратнинг (3.2- чизма) томонлари билан устма-уст тушувчи тўртта $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{DA}$ вектор орасида иккита бир-бирига тенг вектор йўқ. Бир текисликда ётган ёки бир текисликка параллел бўлган векторлар *компланар векторлар* дейилади.

2. **Векторни қўшиш ва айириш.** Икки a ва b векторни қўшиш учун „учбурчак қоида" сидан (3.3- чизма) ёки „параллелограмм қоида" сидан (3. 4- чизма) фойдаланилади. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ векторнинг модули қуйидаги формула ёрдамида топилади:

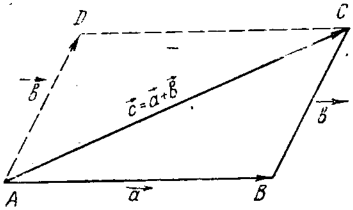
$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})}\,.$$



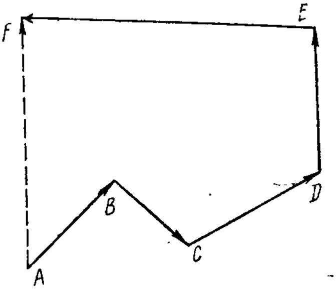
3.2- чизма



3.3 -чизма



3.4- чизма



3.5- чизма

Бир неча вектор йиғиндисини ясаш учун ихтиёрий нуқтадан биринчи қўшилувчига тенг вектор ясаймиз, биринчи қўшилувчининг охиридан иккинчи қўшилувчини ясаймиз, иккинчисининг охиридан учинчи қўшилувчини ясаймиз ва шунга ўхшаш. Биринчи қўшилувчи векторнинг бошини охирги векторнинг учи билан туташтирувчи вектор—берилган *векторлар йиғиндиси* бўлади. Бундан векторларни қўшиш коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларига эга экани келиб чиқади. Бир нечта вектор йиғиндисини ясаш учун учбурчак қоидаси умумлаштирилиб, „Кўпбурчак қоидаси“ ҳосил қилинади (3. 5- чизма): $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

Агар қўшилувчи векторлардан охиргисининг учи биринчисининг бошига тўғри келиб қолса, йиғинди векторнинг узунлиги нолга тенг бўлади. Узунлиги бир хил, лекин йўналишлари қарама-қарши бўлган икки векторнинг йиғиндиси ҳам нолга тенгдир (3. 6- чизма):

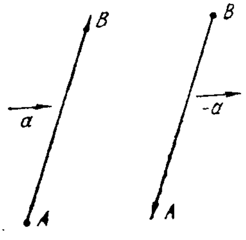
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{O}.$$

$\vec{a}+\vec{b}=0$ шартни қаноатлантирган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар **тенг қарама-қарши векторлар** дейилади ва $\vec{a}$ га тенг қарама-қарши вектор $-\vec{a}$ билан белгиланади.

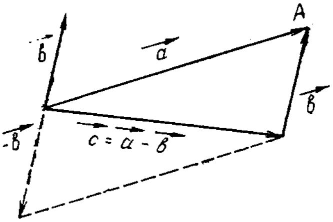
Бу таърифдан (3. 6- чизма) ушбу

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA},\quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Иккита ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг айирмаси деб шундай $\vec{c}$ векторга айтиладики, $\vec{c}$ вектор билан $\vec{b}$ векторнинг йиғиндиси $\vec{a}$ га тенг бўлади (3.7- чизма).



3.6- чизма



3.7- чизма

3. Векторни скалярга (сонга) кўпайтириш. $\vec{a}$ вектор ва $\lambda\neq 0$ скаляр (сон) берилган бўлсин. *$\vec{a}$ векторни λ скалярга кўпайтмаси* деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $\vec{b}$ векторга айтилади:

1) агар $\lambda>0$ бўлса, $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ вектор билан бир хил йўналишда (албатта $\vec{a}\neq\vec{0}$ да), агар $\lambda<0$ бўлса, қарама-қарши йўналишда бўлади;

2) $\vec{b}$ векторнинг модули $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ га тенг.

Бу кўпайтма одатда $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ кўринишда ёзилади. Векторни скалярга кўпайтириш таърифидан бевосита қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

1) ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $0\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

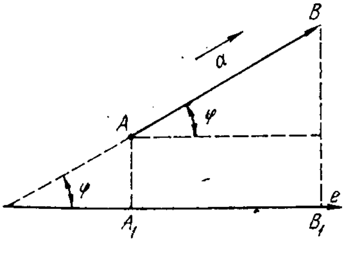
2) ихтиёрий λ сон учун $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$;

3) $\vec{a}$ ва $\lambda\vec{a}$ векторлар ($\lambda\neq 0$, $\vec{a}\neq\vec{0}$) коллинеар векторлардир;

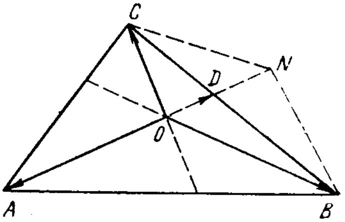
4) агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бир-бирига коллинеар ва $\vec{a}\neq\vec{0}$ бўлса, шундай λ сон мавжудки, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ бўлади ва бунда коллинеар бўлмаган векторларнинг нисбати ҳақида сўзлашнинг маъноси йўқ.

4) Векторларнинг проекциялари. Текисликда $\vec{a}$ вектор l ўқ билан φ бурчак ташкил этсин, у ҳолда $\vec{a}$ нинг бу ўқдаги ортогонал проекцияси $\text{Пр}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$ бўлади (3.8- чизма). Бир неча вектор йиғиндисининг бирор ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг:

$$\text{Пр}_l\,(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\text{Пр}_l\vec{a}+\text{Пр}_l\vec{b}+\text{Пр}_l\vec{c}.$$



3.8- чизма



3.9- чизма

1- мисол. ABC учбурчакда шундай O нуқта топингки, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$ бўлсин.

Δ. Δ ABC даги O нуқта масала шартини қаноатлантирсин (3. 9- чизма).

Бир учи O нуқтада, томонлари $\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OC}$ векторлардан иборат $OBNC$ параллелограммни ясаймиз. Бу параллелограммдан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{ON},$$

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{OD}, \text{ чунки } \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DN}.$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0 \text{ бўлиши учун}$$

$$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{ON}=-2\overrightarrow{OD} \text{ ёки } \overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD} \text{ бўлиши керак.}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD} \text{ бўлгани учун } \overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \text{ бўлади.}$$

Шундай қилиб, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$ бўлиши учун O нуқта ΔABC медианлари кесишган нуқта бўлиши керак экан. ▲

□. 1. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор орасидаги бурчак 30° бўлса, $\vec{a}+\vec{b}$ ва $\vec{a}-\vec{b}$ векторларни ясанг.

2. Қуйидаги векторларнинг узунликлари берилган:

$|\vec{a}|=13$; $|\vec{b}|=19$; $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. $|\vec{a}-\vec{b}|$ ни ҳисобланг.

Жавоб. $|\vec{a}-\vec{b}|=22$.

3. ABC учбурчакда $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$ эканлиги маълум бўлса, қуйидаги векторларни ясанг:

1) $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$; 2) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$; 3) $\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$; 4) $-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$.

4. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммдан фойдаланиб қуйидаги айниятларнинг тўғрилигини чизмада текширинг:

1) $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}$; 2) $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}$;

3) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}+\vec{b}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$;

5. Тенг ёнли $ABCD$ трапециянинг пастки асоси $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, ён томони $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ва улар орасидаги бурчаги $A=\frac{\pi}{3}$ берилган. Трапециянинг қолган томонлари ва диагоналларини ташкил этувчи векторларни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бўйича ёзинг.

Жавоб. $\overrightarrow{BC}=-\frac{b}{a}\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{CD}=\frac{b-a}{a}\vec{a}$;

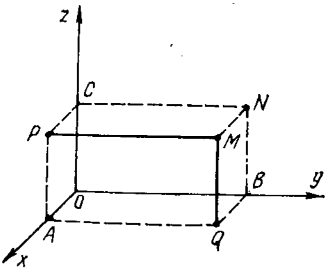
$$\overrightarrow{AC}=\frac{a-b}{a}\vec{a}+\vec{b};\ \overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b},$$

бу ерда a, b мос равишда $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг узунликларини билдиради. ■

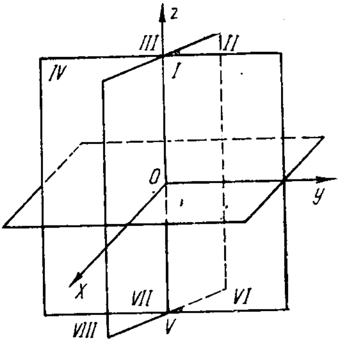
2- §. Фазодаги тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси

1. Асосий тушунчалар. Фазодаги тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси масштаб бирлиги ҳамда O нуқтада кесишувчи ўзаро перпендикуляр учта ўқнинг берилиши билан тўла аниқланади; ўқлардан биринчисини *абсциссалар* (Ox), иккинчисини *ординаталар* (Oy), учинчисини *аппликаталар* (Oz) ўқи, O нуқта эса *координаталар боши* дейилади. Ҳар бир ўқда мусбат йўналиш ва узунлик бирлиги (масштаб бирлиги) танлаб олинади. M нуқтанинг фазодаги вазияти (3.10- чизма) бу нуқтанинг *координаталари* деб аталувчи учта сон билан аниқланади:

абсцисса $x=\frac{NM}{l}=\frac{OA}{l}$,



3.10- чизма



3.11- чизма

ордината $y=\frac{PM}{l}=\frac{OB}{l}$,

аппликата $z=\frac{QM}{l}=\frac{OC}{l}$,

бу ерда l—масштаб бирлиги.

Бу сонларнинг ҳар бири M нуқтадан координаталар текисликларининг биригача бўлган масофани билдиради.

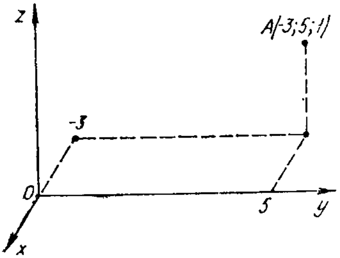
Учала координата текислиги (3.11- чизма) фазони саккиз қисмга (октантларга) бўлади. Турли октантларда жойлашган нуқталар координаталарининг ишоралари қуйидаги жадвалда келтирилган:

Координата	Октант							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Абсцисса	+	−	−	+	+	−	−	+
Ордината	+	+	−	−	+	+	−	−
Аппликата	+	+	+	+	−	−	−	−

Координата текисликларида ётган нуқталарнинг координаталаридан бири нолга тенг бўлади; координата ўқларида ётган нуқталарнинг координаталаридан иккитаси нолга тенг; координаталар бошининг учала координатаси нолга тенгдир.

Фазодаги тўғри бурчакли Декарт координаталари системаси ёрдамида учтадан қилиб тартибланган ҳақиқий сонлар тўплами билан фазодаги нуқталар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади.

1- мисол. A (−3; 5; 1) нуқтани ясанг.



3.12- чизма

Δ. Ox ўқнинг манфий йўналиши томонида уч масштаб бирлигига тенг бўлган кесма ажратамиз. Бу кесманинг учидан Oy ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказиб, бу тўғри чизиқда беш масштаб бирлигига тенг бўлган кесма оламиз. Бу кесмани охирги нуқтасидан Oz ўқнинг мусбат йўналиши томонига параллел тўғри чизиқ ўтказиб, бу тўғри чизиқда бир масштаб бирлигига тенг бўлган кесма ажратамиз (3.12- чизма). A нуқта II октантда жойлашган экан. ▲

□. **6.** Ушбу нуқталарни ясанг:

$$A\ (3;\ 2;\ 1),\ B\ (4;\ -1;\ -2),$$
$$C\ (-5;\ 3;\ 4),\ D\ (1;\ 4;\ -3),$$
$$E\ \left(-3;\ \frac{1}{2}\ -1\right);\ F\ (0;\ 5;\ -2),$$
$$Q\ (-1;\ -3;\ 0),\ H\ (2;\ 0;\ -1),\ K\ (0;\ 0;\ 5),$$
$$L\ (-2;\ -5;\ 3)$$ ■

2. Векторнинг координаталари. Координата ўқларининг ҳар бири учун бирлик вектор (орт) лар киритамиз. Ox, Oy ва Oz ўқлардаги бирлик векторларни мос равишда $\vec i$, $\vec j$ ва $\vec k$ лар билан белгилаш қабул қилинган. $\vec a$ векторнинг координаталари деб унинг Ox, Oy, Oz координата ўқларидаги проекциялари a_x, a_y, a_z га айтилади ва $\vec a\ \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ кўринишда ёзилади. $\vec a$ вектор ўз координаталари ва асосий ортлар ёрдамида қуйидагича ёзилади:

$$\vec a = a_x\cdot\vec i + a_y\cdot\vec j + a_z\vec k. \tag{1}$$

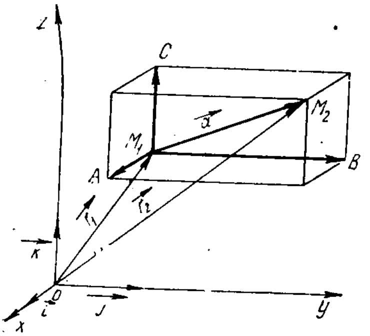
Бундаги $a_x\vec i$, $a_y\vec j$ ва $a_z\vec k$ векторлар $\vec a$ векторнинг координата ўқларидаги *компоненталари* дейилади; улар — тегишли координата ўқларига коллинеар векторлардир — диагонали $\vec a$ вектордан иборат бўлган параллелепипеднинг қирралари бўлиб хизмат қилади (3.13- чизма). (Чизмада $\overrightarrow{M_1A} = a_x\vec i$, $\overrightarrow{M_1B} = a_y\vec j$ ва $\overrightarrow{M_1C} = a_z\vec k$ дир.) Вектор ўз координаталари билан тўла аниқланади, яъни тенг векторларнинг мос координаталари ҳам ўзаро тенг ва аксинча.

Бошланғич нуқтаси координаталар бошида ва охирги нуқтаси $M\ (x;\ y;\ z)$ нуқтада бўлган $\vec r = \overrightarrow{OM}$ вектор M нуқтанинг радиус-вектори дейилади (3.14- чизма). Бу ҳолда (1) формула

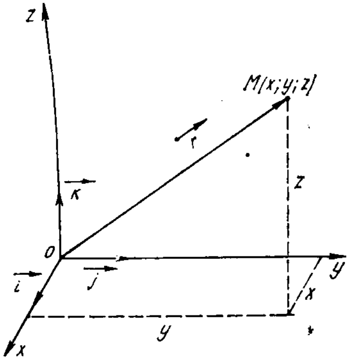
$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$$

кўринишга келади. Радиус-векторнинг узунлиги (модули ёки координаталар бошидан $M\ (x;\ y;\ z)$ нуқтагача бўлган масофа) қуйидаги формуладан топилади:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$



3.13- чизма



3.14- чизма

Бошланғич нуқтаси M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва охирги нуқтаси M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ бўлган $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ векторнинг (3.13- чизма) координаталари қуйидагича аниқланади:

$$\vec{a}\ \{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\} \qquad (3)$$

ва

$$\vec{a}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\ \vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}. \qquad (4)$$

Икки вектор йиғиндиси, айирмаси ва векторнинг сонга кўпайтмаси учун қуйидагилар ўринлидир:

$$(\vec{a}\pm\vec{b})\ \{a_x\pm b_x;\ a_y\pm b_y;\ a_z\pm b_z\},$$

λa $\{\lambda\vec{a}_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z\}$; (бу ерда λ—скаляр миқдор).

$\vec{a}$ $\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ ва $\vec{b}$ $\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ векторлар ўзаро коллинеар бўлишининг зарурий ва етарли шарти

$$\vec{a}=\lambda\vec{b} \qquad (5)$$

эди. У ҳолда $a_x=\lambda b_x$; $a_y=\lambda b_y$; $a_z=\lambda b_z$ бўлиб, икки векторнинг коллинеарлик шарти уларнинг координаталари орқали

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \qquad (5)$$

кўринишда ёзилади. $\vec{a}$ $\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ векторнинг узунлиги

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \qquad (6)$$

формула билан аниқланади.

$\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг узунлиги ёки барибир M_1 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орасидаги масофа

$$M_1M_2=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (7)$$

формула бўйича ҳисобланади.

2- мисол. Бошланғич нуқтаси M_1 (1; 2; 3) ва охирги нуқтаси M_2 (4; 2; -1) бўлган $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг ортлар бўйича ёйилмасини ёзинг ва узунлигини ҳисобланг.

△. (3) формулага кўра $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг координаталарини топамиз:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\ \{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}=\overrightarrow{M_1M_2}\ \{3;0;\ -4\}.$$

(4) формулага кўра $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг ортлар бўйича ёйилмаси $\overrightarrow{M_1M_2}=3i-4k$ бўлади.

Энди (6) ёки (7) формулага кўра $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$M_1M_2=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ узунлик бирлиги. ▲

3- мисол. A $(-3;\ -7;\ -5)$, B $(0;\ -1;\ -2)$ ва C $(2;\ 3;\ 0)$ нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини, шунингдек B нуқтанинг A ва C нуқталар орасида бўлишини исботланг.

△. A, B ва C нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини кўрсатиш учун $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{AB}$ векторларнинг бир тўғри чизиқда ётишини, B нуқта A ва C нуқталар орасида эканлигини кўрсатиш учун эса, $\overrightarrow{AB}$ вектордан $\overrightarrow{AC}$ векторнинг узун эканлигини кўрсатиш кифоя.

(4) формулага асосан $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{AB}$ векторларнинг ортлар бўйича ёйилмаларини ёзамиз: $\overrightarrow{AC}=(2+3)\vec{i}+(3+7)\vec{j}+(0+5)\vec{k}=5\vec{i}+10\vec{j}+5\vec{k}$;

$$\overrightarrow{AB}=(0+3)\vec{i}+(-1+7)\vec{j}+(-2+5)\vec{k}=3\vec{i}+6j+3k=\frac{3}{5}(5i+10j+5k).$$

Демак,
$$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC},$$

яъни (5) формулага кўра, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторлар коллинеар. Бу тенгликдан $\overrightarrow{AC}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ вектордан узун эканлиги ҳам келиб чиқади. Демак, B нуқта A ва C нуқталар орасида ётар экан. ▲

☐. **7.** Координаталар бошидан M (12; —3; 4) нуқтагача бўлган масофани ҳисобланг.

Жавоб. 13.

8. $\vec{r}$ (0; 2; —3) радиус векторнинг ортлар бўйича ёйилмасини ёзинг ва модулини ҳисобланг.

Жавоб. $\vec{r}=2\vec{j}-3\vec{k}$; $|\vec{r}|=\sqrt{13}$.

9. A $(-2;\ +1;\ +3)$ ва B $(0;\ -1;\ +2)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Жавоб. 3.

10. $\vec{a}$ {3; 2; 7} ва $\vec{b}$ {4; 1; —5} векторлар йиғиндисини ва айирмасини топинг.

Жавоб.
$$\vec{a}+\vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k},$$
$$\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}.$$

11. Учлари A (5; 2; 6), B (6; 4; 4), C (4; 3; 2) ва D (3; 1; 4) нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг квадрат эканлигини текширинг.

12. α ва β ларнинг қандай қийматларида $\vec{a}=2\vec{i}+\alpha\vec{j}+\vec{k}$ ва $\vec{b}=3\vec{i}-6\vec{j}+\beta\vec{k}$ векторлар коллинеар бўлади?

Жавоб. $\alpha=-4$; $\beta=\frac{3}{2}$.

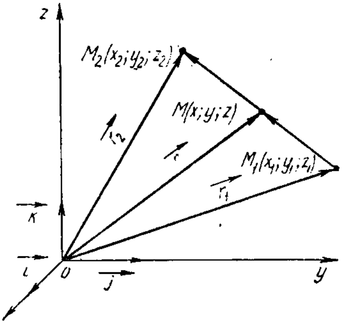
13. Учлари A (2; 1; —4), B (1; 3; 5), C (7; 2; 3) ва D (8; 0; —6) нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг параллелограмм эканлигини исботланг ва параллелограмм томонларининг узунликларини топинг.

Жавоб. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ бўлгани учун параллелограммдир.
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{86}\approx 9{,}3;\ |\overrightarrow{AD}|=\sqrt{41}\approx 6{,}4.$$

14. A (—1; 2; 3), B (2; —1; 1) C (1; —3; —1) ва D (—5; 3; 3) нуқталар трапециянинг учлари бўлишини текширинг.

Кўрсатма. $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ коллинеар. $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{BC}$ коллинеар эмаслигини текширинг. ■

3. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Учлари M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $M_2\,(x\ ;\ y_2;\ z_2)$ нуқталарда бўлган кесмани λ ($\lambda \neq 1$ нисбатда бўлувчи $M\,(x;\,y;\,z)$ нуқтанинг радиус-вектори $\vec{r}$, M_1 ва M_2 нуқталарнинг радиус векторлари $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ орқали қуйидагича ифодаланади (3.15- чизма):



3.15- чизма

$$\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}. \qquad (8)$$

Бу формула M_1; M_2 ва M нуқталарнинг координаталарига нисбатан

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{y_2+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (9)$$

кўринишда ёзилади. Агар M нуқта M_1M_2 кесмани тенг иккига бўлса, $\lambda=1$ бўлиб, (8) ва (9) формулалар мос ҳолда қуйидагича ёзилади:

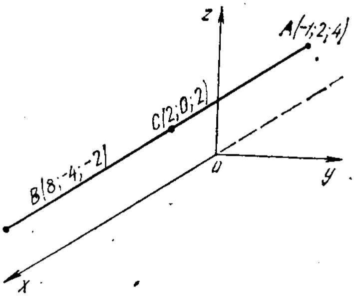
$$\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}.$$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

4- мисол. AB кесманинг бошланғич нуқтаси A $(-1;\ 2;\ 4)$ ва уни $\frac{1}{2}$ нисбатда бўлувчи C $(2;\ 0;\ 2)$ нуқта берилган. B учнинг координаталарини топинг.

$\triangle$. Масала шартига кўра C нуқта AB кесмани $\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}$ нисбатда бўлади (3.16- чизма).

(9) формуладан фойдаланамиз:



3.16- чизма

$$x_c=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad y_c=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda};$$

$$z_c = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Бу формулаларга A ва C нуқталарнинг координаталарини қўйсак:

$x_B=8$; $y_B=-4$; $z_B=-2$; B (8; −4; −2) ▲

□. **15.** Учлари A (1; 2; 3) ва B (4; 2; −1) бўлган AB кесмани тенг иккига бўлувчи M нуқтанинг координаталарини топинг.

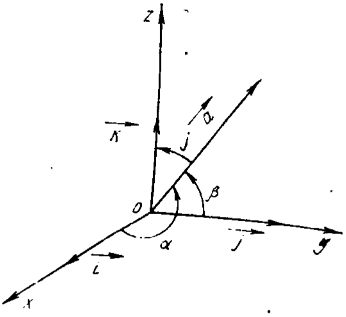
Жавоб. $M\left(\frac{5}{2};\ 3;\ \frac{7}{2}\right)$.

16. AB кесманинг бошланғич нуқтаси A (−1; 2; 4). Уни тенг иккига бўлувчи нуқта эса C (2; 0; 2) бўлсин. B учнинг координаталарини топинг.

Жавоб. B (5; −2; 0).

17. Учлари A (5; 3; −10), B (0; 1; 4) ва C (−1; 3; 2) нуқталарда бўлган учбурчак медианаларининг узунликларини топинг.

4. Векторнинг йўналтирувчи косинуслари. $\vec{a}$ $\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ вектор берилган бўлсин. $\vec{i}$, $\vec{j}$ ва $\vec{k}$ ортлар билан бу вектор орасидаги бурчакларни мос равишда α, β ва γ билан белгиласак (3.17- чизма) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар $\vec{a}$-векторнинг *йўналтирувчи косинуслари* дейилади.



3.17- чизма

Векторнинг йўналтирувчи косинуслари орасида

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (10)$$

боғланиш мавжуд. Бошланғич нуқтаси A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва охирги нуқтаси B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ бўлган $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$\text{Пр}_{Ox}AB = x_2 - x_1,\quad \text{Пр}_{Oy}AB = y_2 - y_1,\quad \text{Пр}_{Oz}AB = z_2 - z_1$$

бўлиб, унинг йўналтирувчи косинуслари эса,

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\beta &= \frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.\end{aligned} \qquad (11)$$

$\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ радиус-векторнинг йўналтирувчи косинуслари эса қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\beta &= \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{aligned} \qquad (12)$$

5-мисол. $\vec{a}$ вектор Ox ўқ билан $\alpha=60^\circ$; Oy ўқ билан $\beta=45^\circ$ бурчак ҳосил қилади. Агар $|\vec{a}|=3$ бўлса, унинг координаталарини аниқланг.

△. a векторнинг Oz ўқ билан ҳосил қилган бурчагини топиш учун (10) формуладан фойдаланамиз:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\cos^2\gamma=1.$$

Демак,

$$\cos\gamma=\frac{1}{2};\ \gamma=60^\circ.$$

$\vec{a}$ векторнинг координаталарини аниқлаш учун

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha;\ a_y=|\vec{a}|\cos\beta;\ a_z=|\vec{a}|\cos\gamma$$

формулалардан фойдаланамиз:

$$a_x=\frac{3}{2};\quad a_y=\frac{3}{\sqrt{2}};\quad a_z=\frac{3}{2}.$$

Демак, $\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k}$ ёки $\vec{a}\left\{\frac{3}{2};\ \frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{2}\right\}$. ▲

□. 18. Бошланғич нуқтаси A $(-1;\ 3;\ 2)$, охирги нуқтаси B $(0;\ 1;\ 4)$ бўлган AB векторнинг йўналтирувчи косинусларини топинг.

Жавоб. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; $\cos\beta=-\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=\frac{2}{3}$.

19. $\vec{a}$ вектор Ox ўқ билан $\alpha=45^\circ$, Oy ўқ билан $\beta=60^\circ$ бурчак ҳосил қилади. Агар $|\vec{a}|=5$ бўлса, унинг координаталарини аниқланг.

Жавоб. $\vec{a}\left\{\frac{5}{\sqrt{2}};\ \frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right\}$.

20. Учлари $A\,(5;\ 3;\ -10)$, $B\,(0;\ 1;\ 4)$ ва $C\,(-1;\ 3;\ 2)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. B ички бурчак биссектрисасининг йўналтирувчи косинусларини топинг.

Жавоб. $\cos\alpha=0$; $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

5. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси

Икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторнинг *скаляр кўпайтмаси* деб бу векторлар узунликлари билан улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига айтилади ва $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ёки $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ шаклда ёзилади. Демак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) \qquad (13)$$

ёки

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\ \text{Пр}_{a}\vec{b}=|\vec{b}|\ \text{Пр}_{b}\vec{a}. \qquad (13')$$

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги хоссаларга эга:

I. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

II. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

III. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

IV. a ва b векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганда уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг, яъни $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортларнинг скаляр кўпайтмалари:

$$\begin{aligned}
&\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0; &\quad& \vec{i}\cdot\vec{i}=1;\\
&\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0; && \vec{j}\cdot\vec{j}=1;\\
&\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0; && \vec{k}\cdot\vec{k}=1.
\end{aligned} \qquad (14)$$

Агар $\vec{a}\ \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b}\ \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ бўлса,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{15}$$

$$\cos\varphi=\cos\,(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \tag{16}$$

бўлади.

6. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси. $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ вектор билан *вектор кўпайтмаси* деб $\vec{a}\times\vec{b}$ ёки $[\vec{a}\ \vec{b}]$ шаклда белгиланадиган шундай $\vec{c}$ векторга айтиладики, бу векторнинг узунлиги ва йўналиши қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

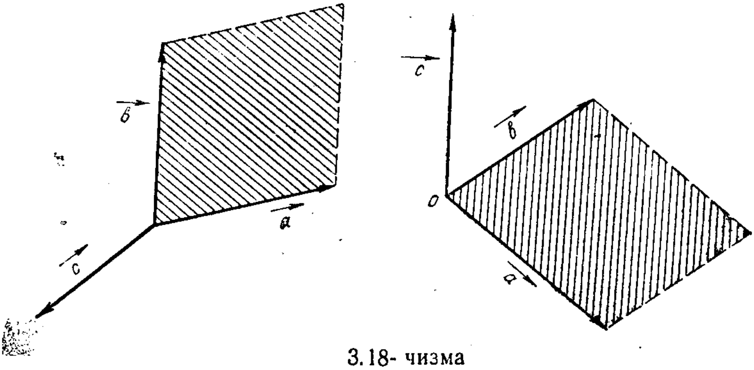
1) $\vec{c}$ векторнинг узунлиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг юзига тенг, яъни

$$|\vec{c}|=a\cdot b\ \sin\,(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}).$$

2) $\vec{c}$ вектор шу параллелограмм текислигига перпендикулярдир, яъни у ҳам $\vec{a}$ векторга, ҳам $\vec{b}$ векторга перпендикулярдир:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \text{ ва } \vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

3) $\vec{c}$ вектор шундай томонга йўналганки, унинг учидан қараганда $\vec{c}$ вектор атрофида $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга эга кичик бурчак билан айланиш соат стрелкаси айланишига қарама-қаршидир (3.18- чизма).



3.18- чизма

Вектор кўпайтманинг асосий хоссалари:

I. $[\vec{a}\ \vec{b}]=-[\vec{b}\ \vec{a}]$.

II. $[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}]=[\vec{a}\ \vec{c}]+[\vec{b}\ \vec{c}]$.

III. $[(\lambda\vec{a})\ \vec{b}]=\lambda[\vec{a}\ \vec{b}]$.

IV. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, $[\vec{a}\ \vec{b}]=0$, хусусий ҳолда $[\vec{a}\ \vec{a}]=0$ бўлади. Ортларнинг вектор кўпайтмалари:

$$[\vec{i}\ \vec{j}]=-[\vec{j}\ \vec{i}]=\vec{k};\ [\vec{i}\ \vec{i}]=0.$$
$$[\vec{j}\ \vec{k}]=-[\vec{k}\ \vec{j}]=\vec{i};\ [\vec{j}\ \vec{j}]=0.$$
$$[\vec{k}\ \vec{i}]=-[\vec{i}\ \vec{k}]=\vec{j};\ [\vec{k}\ \vec{k}]=0.$$

Агар $\vec{a}\,\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b}\,\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ бўлса, уларнинг вектор кўпайтмаси:

$$[\vec{a}\ \vec{b}]=(a_yb_z-a_zb_y)\,\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\,\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\vec{k}=$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

унинг модули

$$\|[\vec{a}\ \vec{b}]\|=\sqrt{(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_xb_z-a_zb_x)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2}$$

формула билан ҳисобланади. Учлари $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right]\right\|$$

формула билан ҳисобланади.

6- мисол. a ва b векторлар орасидаги бурчак $\varphi=\frac{\pi}{4}$ га тенг ва $|\vec{a}|=\sqrt{2}$; $|\vec{b}|=3$ эканлиги маълум. $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ векторнинг узунлигини ҳисобланг.

△. $\vec{c}$ векторнинг узунлигини топиш учун векторларнинг скаляр кўпайтмаларидан фойдаланамиз. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$ деб белгилаб ва $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ ни эътиборга олиб, берилган векторнинг ҳар икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$\vec{c}^2=(2\vec{a}+3\vec{b})^2=4\vec{a}^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2.$$

Берилганларга асосан:

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=2;\ \vec{b}^2=|\vec{b}|^2=9;\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\ \cos\frac{\pi}{4}=3.$$

Демак, $\vec{c}^2=4\cdot2+12\cdot3+9\cdot9=125$ ёки $|\vec{c}|=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$. ▲

☐. **21.** $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак $\varphi=\frac{\pi}{3}$ га тенг. $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=4$. $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ векторнинг узунлигини ҳисобланг.

Жавоб. $|\vec{c}|=\sqrt{217}$.

22. Агар $|\vec{a}|=7\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=4$ ва $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\frac{\pi}{4}$ бўлса, $3\vec{a}+\alpha\vec{b}$ ва $\vec{a}-2\vec{b}$ векторлар α нинг қандай қийматларида ўзаро перпендикуляр бўлади?

Жавоб. $\alpha=31{,}5$.

23. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг координаталари берилган:

$$\vec{a}=7\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k};\ \vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}.$$

Бу векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Жавоб. $\vec{a}\cdot\vec{b}=22$.

24. Учлари A $(-1;\ 5;\ 1)$, B $(1;\ 1;\ -2)$ ва C $(-3;\ 3;\ 2)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. AC томонни давом эттиришдан ҳосил бўлган ташқи бурчакни аниқланг.

Жавоб. $\varphi=\arccos\left(\frac{4}{9}\right)$.

25. Учлари A $(-2;\ 3;\ 1)$, B $(-2;\ -1;\ 4)$ ва C $(-2;\ -4;\ 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Бу учбурчакнинг C ички бурчагини ҳисобланг.

Жавоб. $\angle BCA=\frac{\pi}{4}$.

26. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг координаталари берилган:

$$\vec{a}\ \{1;\ -4;\ 8\}=\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k},$$

$$\vec b\,\{4;\ 4;\ -2\}=4\vec i+4\vec j-2\vec k,$$
$$\vec c\,\{2;\ 3;\ 6\}=2\vec i+3\vec j+6\vec k.$$

$(\vec b+\vec c)$ векторнинг $\vec a$ вектордаги проекциясини топинг.

Жавоб. $\text{Пр}_a\,(\vec b+\vec c)=\frac{10}{9}$. ■

7-мисол. $|\vec a|=8$; $|\vec b|=15$; $\vec a\cdot\vec b=96$ берилган. $\vec a$ векторнинг $\vec b$ вектор билан вектор кўпайтмасининг узунлигини топинг.

△. $\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг вектор кўпайтмасининг узунлиги, шу векторлар узунликларининг кўпайтмаси билан улар орасидаги бурчак синусининг кўпайтмасига тенг. $\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг скаляр кўпайтмасига асосан:

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cos\,(\widehat{\vec a,\ \vec b}),$$

бундан:

$$\cos\,(\widehat{\vec a,\ \vec b})=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\cdot|\vec b|}=\frac{4}{5}.$$

У ҳолда

$$\sin\,(\widehat{\vec a,\ \vec b})=\sqrt{1-\cos^2\,(\widehat{\vec a\ \vec b})}=\frac{3}{5}.$$

Демак,

$$|[\vec a\ \vec b]|=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\,(\widehat{\vec a,\ \vec b})=8\cdot15\cdot\frac{3}{5}=72.$$ ▲

☐. **27.** $\vec a$, $\vec b$ ва $\vec c$ векторлар $\vec a+\vec b+\vec c=0$ шартни қаноатлантиради. $[\vec a\ \vec b]=[\vec c\ \vec a]=[\vec b\ \vec c]$ эканлигини исботланг.

28. Учлари A (1; 2; 0), B (3; 0; −3) ва C (5; 2; 6) нуқталарда бўлган учбурчак юзини ҳисобланг.

Жавоб. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}]|=14$ кв. бирлик.

29. $\overrightarrow{AB}=-3\vec i-2\vec j+6\vec k$ ва $\overrightarrow{BC}=-2\vec i+4\vec j+4\vec k$ векторлар ΔABC томонлари. $\overrightarrow{AD}$ баландликнинг узунлигини ҳисобланг.

Жавоб. $|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{2S_{ABC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$.

30. $\vec{a}$ {6; 0; 2} ва $\vec{b}$ {1,5; 2; 1} векторлардан тузилган параллелограммнинг юзини ва диагоналларининг узунликларини ҳисобланг.

Жавоб. $|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{277}$; $|\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\sqrt{101}$. $S_{ABCD}=13$ кв. бирлик.

3- §. Текислик ва унинг тенгламалари

1. Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари. Фазо нуқтасининг x, y, z координаталарига нисбатан биринчи даражали ҳар қандай

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

тенглама текисликни ифодалайди ва аксинча, ҳар қандай текислик биринчи даражали тенглама билан берилиши мумкин. Текисликнинг тенгламасида бир-бирига боғлиқ бўлмаган учта параметр бўлади.

(1) тенгламанинг хусусий ҳоллари: а) Агар (1) тенгламадаги озод ҳад $D=0$ бўлса, (1) тенглама

$$Ax+By+Cz=0 \qquad (2)$$

кўринишга келади ва бу тенглама координаталар бошидан ўтган текисликни тасвирлайди;

б) A, B ва C коэффициентлардан бирортаси нолга тенг бўлса

$$By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

тенглама Ox ўққа параллел бўлган текисликни ифодалайди;

$$Ax+Cz+D=0 \qquad (4)$$

тенглама Oy ўққа параллел бўлган текисликни ифодалайди;

$$Ax+By+D=0 \qquad (5)$$

тенглама Oz ўққа параллел бўлган текисликни ифодалайди;

в) (3), (4) ва (5) тенгламалардаги озод ҳад $D=0$ бўлса:

$$By+Cz=0 \qquad (6)$$

тенглама Ox ўқ орқали ўтувчи текисликни ифодалайди;

$$Ax+Cz=0 \qquad (7)$$

тенглама Oy ўқ орқали ўтувчи текисликни ифодалайди.

$$Ax+By=0 \tag{8}$$

тенглама Oz ўқ орқали ўтувчи текисликни ифодалайди;

г) Агар (1) тенгламада координатали ҳадлардан иккитаси бўлмаса, текислик шу қатнашмаган координата ўқларини ўзига олган координата текислигига параллел бўлади, яъни $Ax+D=0$, $By+D=0$, $Cz+D=0$ тенгламалар мос ҳолда yOz, xOz ва xOy координата текисликларига параллел бўлган текисликларни ифодалайди;

д) Агар (1) тенгламада координатали ҳадлардан иккитаси ва озод ҳад бўлмаса, у ҳолда $Ax=0$, $By=0$ ва $Cz=0$ тенгламалар мос равишда yOz, xOz ва xOy координаталар текислигини ифодалайди.

Ниҳоят, агар (1) тенгламада учала координатали ҳадлар бўлмаса ҳамда озод ҳад нолдан фарқли бўлса, бундай тенгламанинг маъноси бўлмайди.

2. Текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмаларига нисбатан тенгламаси. Текисликнинг нормал тенгламаси. Агар текисликнинг координата ўқларидан кесган a, b ва c кесмалари параметр деб қабул қилинса, (1) текисликнинг тенгламаси қуйидаги шаклни олади:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{9}$$

(9) тенглама *текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси* дейилади.

Агар координаталар бошидан текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлигини p билан белгиласак ва бу перпендикулярнинг йўналтирувчи косинуслари $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ларни параметрлар деб қабул қилсак, текисликнинг қуйидаги нормал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{10}$$

(1) умумий тенгламани нормал шаклга келтириш учун уни ҳадма-ҳад нормалловчи кўпайтувчи

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{11}$$

га кўпайтириш керак. Бу ҳолда

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\quad \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\quad p=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{12}$$

бўлади. Агар $D<0$ бўлса, юқоридаги формулаларнинг ўнг томонида мусбат, $D>0$ бўлса, манфий ишора олинади. Ҳар қандай M $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан (1) текисликкача бўлган масофа

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{13}$$

формула билан, агар текислик нормал тенглама билан берилган бўлса,

$$d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p| \tag{13'}$$

формула билан ҳисобланади.

3. Икки текислик орасидаги бурчак. Икки текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари. Берилган

$$\left.\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

текисликлар орасидаги бурчак

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{15}$$

формула билан аниқланади.

Текисликларнинг *параллеллик шарти*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{16}$$

каби, текисликларнинг *перпендикулярлик шарти* эса

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{17}$$

каби ифодаланади.

4. Берилган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Берилган тўртта нуқтанинг бир текисликда ётиш шарти. M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ва M_3 $(x\ ;\ y_3;\ z_3)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\x_1 & y_1 & z_1 & 1\\x_2 & y_2 & z_2 & 1\\x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0. \tag{18}$$

Агар тўртта M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, M_3 $(x_3;\ y_3;\ z\ )$ ва M_4 $(x_4;\ y_4;\ z_4)$ нуқта бир текисликда ётса, уларнинг координаталари орасида қуйидаги муносабат мавжуд бўлади:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Агар бу тўртта нуқта бир текисликда ётмаса, учлари шу нуқталардан иборат бўлган тетраэдрнинг ҳажми ушбу формулага биноан ҳисобланади:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (20)$$

☐. **31.** Ушбу $4x + y + 3z + 1 = 0$ текислик қуйидаги нуқталарнинг бирортасидан ўтадими:

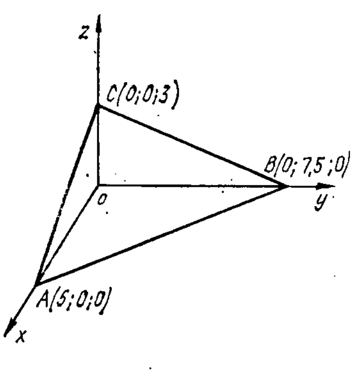
A (−1; 6; 3), B(3; −2; −5), C (0; 4; 1), D (2; 0; 5) E (2; 7; 0), F (0; 1; 0)?

Жавоб. Текислик A, B, C ва F нуқталардан ўтади. ■

1-мисол. $3x+2y+5z-15=0$ текисликни ясанг.

△. Берилган тенгламадан кўриниб турибдики, текислик коодинаталар бошидан ўтмайди. Бу текисликнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топайлик: Ox ўқ билан кесишиш нуқтасини топиш учун берилган тенгламада $y=0$ ва $z=0$ деб фараз қиламиз, бу ҳолда берилган тенгламадан қуйидагиларни топамиз:

$3x - 15 = 0$ ёки $x = 5$; шунга ўхшаш агар $x = 0$ ва $z=0$ десак, $y=7{,}5$; агар $x = 0$, $y=0$ десак, $z=3$. Координата ўқларидан $x = 3$, $y = 7{,}5$ ва $z=5$ кесмалар ажратиб, мос равишда A (5; 0; 0), B (0; 7, 5; 0) ва C (0; 0; 3) нуқталарга эга бўламиз. Бу нуқталарни тўғри чизиқлар билан бирлаштирсак, изланаётган текисликнинг координата текисликлари билан кесишиш чизиқлари ҳосил бўлиб, текисликнинг вазияти кўринади (3.19- чизма).



3.19- чизма

$3x+2y+5z-15=0$ тенгламани (9) кўринишга келтириб текисликни ясаса ҳам бўлади:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{7,5}+\frac{z}{3}=1,\text{ бунда } a=5;\ b=7,5;\ c=3.$$ ▲

□. **32.** Бошланғич вазияти M (5; —1; 2) бўлган нуқта y ўқига параллел ҳаракат қилади. Унинг $x-2y-3z+7=0$ текислик билан учрашиш нуқтасини топинг.

Жавоб. M (5; 3; 2).

33. Қуйидаги текисликларнинг координата ўқларидан кесган кесмаларини ҳисобланг:

а) $2x-3y-z+12=0$.	*Жавоб.* (—6; 4; 12);
б) $5x+y-3z-15=0$.	*Жавоб.* (3; 15; —5);
с) $x-y+z-1=0$.	*Жавоб.* (1; —1: 1);
д) $x-4z+6=0$.	*Жавоб.* $(-6;\ \infty;\ \frac{3}{2})$; текислик Oy ўқига параллел);
е) $5x-2y+z=0$.	*Жавоб.* (0; 0; 0);
f) $x-7=0$.	*Жавоб.* (7; ∞; ∞); текислик (yOz) текислигига параллел). ■

2-мисол. Oz ўқ ҳамда M (—3; 1; —2) нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

△. Бу масалани ечиш учун (8) формуладан фойдаланамиз. Oz ўқ орқали ўтувчи текислик тенгламаси $Ax+By=0$ кўринишда бўлади.

Текислик M (—3; 1; —2) нуқта орқали ўтганлиги учун бу нуқтанинг координаталари текислик тенгламасини қаноатлантириши керак, яъни $-3A+B=0$ ёки $B=3A$, B нинг бу қийматини юқоридаги тенгламага қўйиб, A га қисқартирсак изланаётган тенглама ҳосил бўлади:

$$x+3y=0.$$ ▲

□. **34.** а) xOz текисликка параллел ва M (2; —5; 3) нуқтадан ўтувчи;

б) Oz ўқ ҳам M (4; —2; 7) нуқта орқали ўтувчи;

с) Ox ўқига параллел ва A (4; 0; —2), B (5; 1; 7) нуқталардан ўтувчи текисликнинг тенгламасини ёзинг.

Жавоб. а) $y+5=0$; б) $x+2y=0$; c) $9y-z-2=0$.

35. Қуйидаги текисликларнинг тенгламаларини нормал шаклга келтиринг:

а) $2x-9y+6z-22=0$;
в) $10x+2y-11z+60=0$;
c) $6x-6y-7z+33=0$.

Жавоб. а) $\frac{2}{11}x-\frac{9}{11}y+\frac{6}{11}z-2=0;$

б) $-\frac{2}{3}x-\frac{2}{15}y+\frac{11}{15}z-4=0;$

с) $-\frac{6}{11}x+\frac{6}{11}y+\frac{7}{11}z-3=0.$

36. $15x-10y+6z-190=0$ текисликдан координаталар бошигача бўлган масофани топинг.

Жавоб. $p=10$.

37. а) A (3; 1; -1) нуқтадан $22x+4y-20z-45=0$ текисликкача,

б) B (4; 3; -2) нуқтадан $3x-y+5z+1=0$ текисликкача,

с) C (2; 0; $-\frac{1}{2}$) нуқтадан $4x-4y+2z+17=0$ текисликкача бўлган масофаларни топинг.

Жавоб. а) $d=\frac{3}{2}$; б) $d=0$ нуқта текисликда ётади; с) $d=+4$.

38. Қуйидаги текисликлар орасидаги бурчакни топинг:

а) $4x-5y+3z-1=0$ ва $x-4y-z+9=0$;

б) $3x-y+2z+15=0$ ва $5x+9y-3z-1=0$;

с) $6x+2y-4z+17=0$ ва $9x+3y-6z-4=0$.

Жавоб. а) $\varphi=\arccos 0,7$; б) текисликлар бир-бирига перпендикуляр; с) текисликлар бир-бирига параллел.

39. Координаталар бошидан ва A (3; -2; 1), B (1; 4; 0) нуқталардан ўтувчи текисликнинг тенгламасини ёзинг.

Жавоб. $4x-y-14z=0$.

40. Тетраэдрнинг учлари берилган A (0; 0; 2), B (3; 0; 5), C (1; 1; 0) ва D (5; 1; 2). Шу тетраэдрнинг ҳажмини ҳисобланг.

Жавоб. $V=\frac{1}{2}$ куб бирлик. ■

4- §. Фазодаги тўғри чизиқ. Тўғри чизиқ билан текислик

1. **Тўғри чизиқнинг тенгламалари. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Фазодаги икки тўғри чизиқнинг кесишиш шарти.** а) Фазодаги тўғри чизиқни икки текисликнинг кесишиш чизиғи деб қараш мумкин. Агар $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ нисбатлар бажарилмаса иккита

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{1}$$

тенглама биргаликда фазодаги тўғри чизиқни ифодалайди.

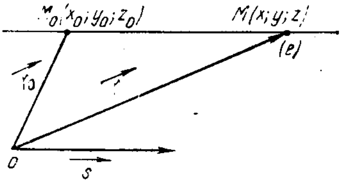
(1) тенгламалар системаси тўғри чизиқнинг *умумий тенгламаси* деб аталади.

б) Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари қуйидаги кўринишга эгадир:

$$\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0, \\ z=pt+r_0 \end{cases} \tag{2}$$

Бу ерда x_0, y_0, z_0 — тўғри чизиқда ётувчи тайин M_0 нуқтанинг координаталари;

$\vec{S}$ (m; n; p)—тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори; t—ўзгарувчи параметр (3.20- чизма).



3.20- чизма

(2) тенгламалардан параметр t ни чиқариб,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{3}$$

га эга бўламиз. (3) тенгламалар тўғри чизиқнинг *каноник тенгламалари* дейилади.

Кўп масалаларда тўғри чизиқларнинг каноник кўринишдаги тенгламаларидан фойдаланиш қулай бўлади. Шунинг учун умумий кўринишдаги (1) тенгламалар системасини бу шаклга келтира билиш жуда муҳимдир.

(3) тенгламадан m, n, p лар ўрнига буларга пропорционал миқдорларни қуйидаги пропорциядан топилади:

$$m:n:p=\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Агар (3) тенгламаларда m, n ва p махражлардан бирортаси нолга тенг бўлиб қолса, у ҳолда мос касрнинг суратини ноль деб фараз қилиш керак.

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1} \text{ ва } \frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2}$$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{5}$$

формула ёрдамида аниқланади. Бу тўғри чизиқларнинг *параллеллик шарти*

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{6}$$

муносабатдан, *перпендикулярлик шарти* эса

$$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0 \tag{7}$$

муносабатдан иборат.

d) M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{8}$$

тенгламалар билан ифодаланади.

e) берилган M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ўтиб, берилган $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \tag{9}$$

тенгламалар билан аниқланади.

f) иккита $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ ва $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ тўғри чизиқнинг кесишиши учун

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0; \tag{10}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

1-мисол. Тўғри чизиқнинг қуйидаги тенгламасини каноник шаклга келтиринг:

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+9=0. \end{cases} \tag{*}$$

Δ. Бу мисолни ечиш учун тўғри чизиқнинг бирор нуқтаси ва йўналтирувчи $\vec{S}$ векторини аниқлаш керак. Берилган тўғри чизиқнинг бирор M_0 нуқтасининг координаталарини аниқлайлик. Бунинг учун координаталардан ихтиёрий биттасини нолга тенглаштириб оламиз. Масалан, $z=0$ бўлсин. У ҳолда (*) тенглама

$$\begin{cases} 2x-3y-9=0, \\ x-2y+3=0 \end{cases}$$

кўринишда бўлади. Бундан $x=27$ ва $y=15$ ларни топамиз. Демак, тўғри чизиқнинг нуқталаридан бири M_0 (27; 15; 0) экан. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини аниқлаш учун (4) пропорциядан фойдаланамиз:

$$m:n:p=\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix},$$

бундан

$$m:n:p=(-9):(-5):(-1),$$

демак, тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{S}$ {9; 5; 1}, (3) формулага кўра тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси

$$\frac{x-27}{9}=\frac{y-15}{5}=\frac{z}{1} \qquad (**)$$

кўринишда бўлади. Масалани бошқача йўл билан ҳам ечиш мумкин. (*) системани x ва y га нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases}x=9z+27,\\ y=5z+15.\end{cases}$$

Бу тенгламалар системасининг ҳар биридан z ни аниқлаймиз:

$$\frac{x-27}{9}=z; \qquad \frac{y-15}{5}=z,$$

бундан (**) ни ҳосил қилиш мумкин. ▲

2-мисол. Берилган

$$\begin{cases}3x-4y-2z=0\\ 2x+y-2z+1=0\end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases}4x+y-6z-2=0\\ y-3z-2=0\end{cases}$$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

△. (4) пропорцияга асосан бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторларини аниқлаймиз

$$m_1:n_1:p_1=\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & 1\end{vmatrix};$$

$$m_2:n_2:p_2=\begin{vmatrix}1 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-6 & 4\\ -3 & 0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix};$$

булардан

$$m_1:n_1:p_1=10:2:11,$$
$$m_2:n_2:p_2=3:12:4.$$

Демак, берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак (5) формулага асосан

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}=$$

$$=\pm\frac{10\cdot3+2\cdot12+11\cdot4}{\sqrt{100+4+121}\cdot\sqrt{9+144+16}}=\pm\frac{98}{195}$$

га тенг бўлади.

Агар мусбат ишора олинса тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчак, манфий ишора олинса ўтмас бурчак топилади. Юқоридан:

$$\varphi=\arccos\frac{98}{195}\approx 59^\circ48'.\ \blacktriangle$$

□. **41.** Координаталар бошидан ва (a; b; c) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

42. Учбурчак учларининг A (2; 3; −1), B (1; —2; 0) ва C (—3; 2; 2) координаталари берилган. AD медиананинг каноник тенгламасини тузинг.

Жавоб. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

43. Ушбу

$$\begin{cases}x+2y+4z-4=0,\\10x+4y+5z-20=0\end{cases}$$

тўғри чизиқни ясанг.

Кўрсатма. Тўғри чизиқни ясаш учун берилган текисликларнинг ҳар бирини алоҳида ясанг ва кесишиш нуқталарини бирлаштиринг.

44. Тўғри чизиқнинг қуйидаги тенгламасини каноник шаклга келтиринг:

$$\begin{cases}2x-3y-z-9=0,\\x-2y+z+3=0.\end{cases}$$

Жавоб. $\frac{x-27}{5}=\frac{y-15}{3}=\frac{z-0}{1}$.

45. M (2; —5; 3) нуқтадан ўтиб, Oy ўққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламаларини тузинг.

Жавоб. $\frac{x-2}{0}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{0}$.

$$\begin{cases}x=2,\\y=t-5,\\z=3.\end{cases}$$

46. Ушбу

$$\begin{cases}x-2y+3z-4=0,\\2x+3y-4z+5=0.\end{cases}$$

тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтиринг:

Жавоб. $\frac{x-2.7}{-1}=\frac{y+3/7}{10}=\frac{z-0}{7}$.

47. M (2; —5; 3) нуқтадан ўтувчи ва $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

Жавоб. $\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-3}{9}$.

48. Ушбу

$$\begin{cases}2x+3y-4z+5=0,\\ x-y+z=0\end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases}x-y+2z-4=0,\\ 2x+y-z-5=0\end{cases}$$

тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни аниқланг.

Жавоб. $\varphi\approx19^\circ11'$.

49. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг кесишиш ё кесишмаслигини текшириб кўринг:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ ва $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$;

б) $\begin{cases}4x+z-1=0,\\ x-2y+3=0\end{cases}$ ва $\begin{cases}3x+y-z+4=0,\\ y+2z-8=0.\end{cases}$

Жавоб. а) ва б) кесишади.

Кўрсатма. (10) тенглик бажарилишини текшириб кўринг. б) ҳолда тўғри чизиқ тенгламасини каноник ҳолга келтиринг. ■

2. Тўғри чизиқ билан текислик.

а)
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{11}$$

тўғри чизиқ билан

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{12}$$

текисликнинг кесишиш нуқтасини топиш учун бу уч тенгламани биргаликда ечиш керак. Агар (11) тенгликдаги учта нисбат ўрнига уларнинг ҳар бирига тенг бўлган t параметр ишлатилса, иш осонлашади. У ҳолда $x=mt+x_0$; $y=nt+y_0$; $z=pt+z_0$, координаталарнинг бу қийматларини текисликнинг (12) тенгламасига қўйиб, t нинг қийматини ҳосил қиламиз, сўнгра изланган координаталарни топамиз.

б) (11) тўғри чизиқ билан (12) текислик орасидаги бурчак ушбу формула билан ҳисобланади:

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{13}$$

в) (11) тўғри чизиқ билан (12) текисликнинг параллеллик шарти:

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{14}$$

г) Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик шарти:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{15}$$

d) Берилган M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ўтиб, берилган $Ax+By+Cz+D=0$ текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}. \tag{16}$$

Берилган M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ва берилган $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ тўғри чизиқдан ўтган текислик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0. \tag{17}$$

е) $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ ва $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$.

тўғри чизиқларнинг бир текисликда ётиши шарти:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \tag{18}$$

д) (11) тўғри чизиқнинг (12) текисликда ётиш шарти қуйидаги икки тенглик билан ифодаланади:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases} \tag{19}$$

3-мисол. A $(-1;\ 2;\ -3)$ нуқтадан ҳамда $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ тўғри чизиқ билан $3x-y+2z-5=0$ текисликнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△. Изланаётган тўғри чизиқ тенгламасини тузиш учун берилган тўғри чизиқ билан берилган текисликнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини аниқлаймиз. Бунинг учун берилган тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини параметрик кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases} x=5t+7, \\ y=t+4, \\ z=4t+5. \end{cases} \qquad (*)$$

x, y, z ларнинг бу қийматларини берилган текислик тенгламасига қўйиб, параметр t нинг қийматини аниқлаймиз:

$$3\,(5t+7)-(t+4)+2(4t+5)-5=0,$$

бундан

$$t=-1.$$

t нинг бу қийматини (*) га қўйиб, берилган тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтасини аниқлаймиз:

$$x=2;\ y=3;\ z=1,\ A_1\ (2;\ 3;\ 1).$$

Изланаётган тўғри чизиқ берилган $A\ (-1;\ 2;\ -3)$ нуқтадан ва топилган $A_1\ (2;\ 3;\ 1)$ нуқтадан ўтади. (8) формулага асосан унинг тенгламаси:

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z+3}{1+3} \text{ ёки } \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{4}$$ ▲

4-мисол. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ тўғри чизиқ $4x+3y-z+$ $+3=0$ текисликда ётиш-ётмаслигини текширинг.

△. (19) шартни текшириб кўрамиз:

$$4\cdot 2+3\,(-1)+(-1)\cdot 5=8-8=0,$$
$$4\cdot(-1)+3\cdot(-3)-1\cdot(-2)+3=7-7=0.$$

Демак, берилган тўғри чизиқ берилган текисликда ётади. ▲

☐ 50. $\frac{x-12}{5}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ тўғри чизиқ билан $3x+5y-z-$ $-2=0$ текисликнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Жавоб. $M\ (0;\ 0;\ -2)$.

51. $A\ (3;\ -3;\ 0)$ нуқта ҳамда $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$ тўғри чизиқ билан $3x-4y+3z-1=0$ текисликнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Жавоб. $\frac{x-3}{4}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z}{5}$.

52. а) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ тўғри чизиқ билан $3x-3y+2z-$ $-5=0$ текисликнинг;

в) $\frac{x-13}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ тўғри чизиқ билан $x+2y-4z+$ $+1=0$. текисликнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Жавоб. а) тўғри чизиқ текисликка параллел; б) кесишиш нуқтаси аниқ эмас; в) тўғри чизиқ текисликда ётади.

53. A коэффициентнинг қиймати қандай бўлганда $Ax+3y-5z+1=0$ текислик $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

Жавоб. $A=-1$.

54. A ва B коэффициентларнинг қийматлари қандай бўлганида $Ax+By+6z-7=0$ текислик

$$\frac{x-2}{2}+\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$$

тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади?

Жавоб. $A=4$; $B=-8$.

55. M $(3; -2; 4)$ нуқтадан $5x+3y-7z+1=0$ текисликка перпендикуляр туширинг.

Жавоб. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$

56. Координаталар бошидан $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$ тўғри чизиққа перпендикуляр текислик ўтказинг.

Жавоб. $4x+5y-2z=0$.

57. Текширинг:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ тўғри чизиқ $4x+3y-z+3=0$ текисликда ётадими;

в) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}$ тўғри чизиқ $3x-2y-z+15=0$ текисликда ётадими;

с) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$ тўғри чизиқ $5x-8y-2z-1=0$ текисликда ётадими?

Жавоб. а) ётади; в) ва с) ётмайди.

58. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{6}$ тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни топинг.

Жавоб. $\varphi\approx 1°17'$. ■

5- §. Сферик ва цилиндрик сиртлар. Айланма сиртлар

1. Сфера. Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (1)$$

тенглама маркази C $(a; b; c)$ нуқтада ва радиуси R га тенг бўлган *сферани* аниқлайди. M (x; y; z) нуқта унинг ихтиёрий нуқтаси. Агар координаталар боши сфера марказига кўчирилса, унинг тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \quad (2)$$

Сферик сирт ҳар қандай текислик билан ҳақиқий ёки мавҳум айлана бўйича кесишади. Агар текислик сфера марказидан радиусга тенг масофада бўлса, у ҳолда кесишиш чизиғи ноль радиусли доирага айланади, яъни текислик сферага уринади, бу нуқтада сферага уринувчи ҳамма тўғри чизиқлар шу текисликда ётади.

2. Цилиндрик сиртлар. Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида f (x; y)=0 тенглама ясовчиси Oz ўққа параллел бўлган *цилиндрик сиртни* ифода қилади.

Шунга ўхшаш φ (x; z)=0 тенглама ясовчиси Oy ўққа параллел цилиндрик сиртни ва ψ (y; z)=0 эса ясовчиси Ox ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртни ифода қилади.

3. Айланма сиртлар. Тўғри бурчакли Декарт координаталари системасида

$$F\ (\pm\sqrt{x^2+y^2};\ z)=0$$

тенглама yOz текисликдаги бирор L чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган *айланма сиртни* аниқлайди. Бошқа ўқлар учун ҳам шунга ўхшаш қоидалар мавжуд.

Масалан, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Агар ўша эллипс Ox ўқ атрофида айлантирилса, тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

кўринишда бўлган айланма сирт, $a=b$ бўлганда эса сфера ҳосил бўлади.

4. Эллипсоид. Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (3)$$

тенглама билан тасвирланган сирт *эллипсоид* дейилади. a, b, c лар эллипсоиднинг ярим ўқлари.

(3) эллипсоидни xOy, xOz ва xOy текисликлар билан кесилса, кесимда мос ҳолда қуйидаги эллипслар ҳосил бўлади:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

1-мисол. $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$ сфера марказининг координаталари ва радиусининг узунлигини топинг.

△. Берилган сфера тенгламасини (1) кўринишга келтирамиз:

$$x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=$$
$$=x^2-6x+9+y^2+8y+16+z^2+2z+1-26+10=$$
$$=(x-3)^2+(y+4)^2+(z+1)^2-16=0,$$

бундан $(x-3)^2+(y+4)^2+(z+1)^2=4^2$.

Демак, берилган сферанинг маркази $C\ (3;\ -4;\ -1)$ нуқтада ва радиусининг узунлиги $R=2$ экан. ▲

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=13\\ z=5\end{cases}$$

тенгламалар биргаликда қандай чизиқни тасвирлайди?

△. $z=5$ текислик билан

$$(x-2)^2+(y+7)^2+(z-3)^2=13$$

сферанинг кесишган чизиғи айланани тасвирлайди. Иккинчи тенгламага $z=5$ ни қўйсак, бу айлана

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+4)^2=3^2\\ z=5\end{cases}$$

тенгламалар системаси билан тасвирланади. ▲

□. **59.** Қуйида берилганлардан фойдаланиб, шар сиртининг тенгламасини ёзинг:

а) шарнинг маркази $C\ (2;\ -1;\ 3)$ нуқтада, радиуси $R=6$;

б) шарнинг маркази $O\ (0;\ 0;\ 0)$ нуқтада ва шар $M\ (6;\ -2;\ 3)$ нуқтадан ўтади;

в) шарнинг маркази $C\ (6;\ -8;\ 3)$ нуқтада ва шар Z ўқига уринади.

Жавоб. а) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$;
б) $x^2+y^2+z^2=49$;
с) $(x-6)^2+(y+8)^2+(z-3)^2=100$.

60. Қуйидаги сфералардан ҳар бири марказининг координаталарини ва радиусининг узунлигини топинг:

а) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$;

б) $x^2+y^2+z^2-6x-16=0$;

с) $36x^2+36y^2+36z^2+24y-72z-95=0$.

Жавоб а) $C(-1;\ 2;\ 0),\ R=3$; с) $C\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 10\right),\ R=2$.

б) $C(3;\ 0;\ 0),\ R=5$;

61. $\frac{x+5}{3}=\frac{y+11}{5}=\frac{z-9}{-4}$ тўғри чизиқ билан $x^2+y^2+z^2+4x-2y+10z-19=0$ сферанинг кесишиш нуқтасини топинг.

Жавоб. $N_1(4;\ 4;\ -3)$; $N_2(1;\ -1;\ 1)$.

62.
$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=12\\ z=\frac{3}{2}\end{cases}$$

тенгламалар биргаликда қандай чизиқни тасвирлайди?

Жавоб. Тенгламаси
$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-2)^2=\frac{47}{4}\\ z=\frac{3}{2}\end{cases}$$

бўлган айланани тасвирлайди.

63. $3x^2+36y^2+81z^2-324=0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди?

Жавоб. Ярим ўқлари $a=6\sqrt{3}$; $b=3$; $c=2$ бўлган эллипсоидни тасвирлайди.

64. $x^2+y^2=R^2$ айланани Oz ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб. $x^2+y^2+z^2=R^2$.

65. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоиднинг

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$$

тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.

Жавоб. $N_1(2\sqrt{2};\ 3\sqrt{2};\ 2-2\sqrt{2})$;

$N_2(-2\sqrt{2};\ 3\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{2})$.

66. $4x^2+6z^2-24=0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди?

Жавоб. Ясовчиси Oy ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртни тасвирлайди. ■

IV БОБ

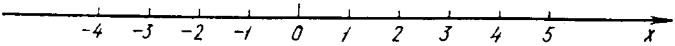
МАТЕМАТИК АНАЛИЗГА КИРИШ

1- §. Ҳақиқий сон, ҳақиқий сонлар тўплами ва ҳақиқий сонниНг абсолют миқдори

Барча чекли ўнли касрлар ва барча даврий чексиз касрлар *рационал сонлар* дейилади. Ҳар бир рационал сонни иккита ўзаро туб, бутун p ва q сонларнинг $\frac{p}{q}$ нисбати каби ёзиш мумкин. Аксинча p ва q лар бутун бўлганда $\frac{p}{q}$ рационал сон бўлади.

Даврий бўлмаган чексиз ўнли каср *иррационал сон* дейилади. Иррационал сонларга $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π ва ҳ. к. сонлар мисол бўлади. Барча рационал ва иррационал сонлар биргаликда *ҳақиқий сонлар* дейилади. Барча ҳақиқий сонлар тўпламини R билан белгилаймиз. X—элементлари ихтиёрий объектлардан иборат бирор тўплам, x эса бирор объект бўлсин. У ҳолда ушбу $x \in X$ ифода, x элемент X тўпламга қарашли эканлигини билдиради. Ушбу $x \notin X$ ифода эса x элемент X тўпламга қарашли эмаслигини билдиради.

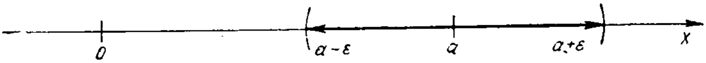
Ихтиёрий a, b ҳақиқий сонлар берилган бўлсин, $a < x < b$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ҳақиқий сонлар тўпламини *очиқ оралиқ* дейилади ва $]a, b[$ кўринишда белгиланади. $a \leqslant x \leqslant b$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ҳақиқий сонлар тўпламини эса *ёпиқ оралиқ* дейилади ва $[a, b]$ кўринишда белгиланади. $a < x \leqslant b$, $a \leqslant x < b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган ҳақиқий сонлар тўпламларини мос равишда *ярим очиқ* ва *ярим ёпиқ* оралиқлар дейилади ва $]a, b]$, $[a, b[$ кўринишда белгиланади. Ҳар бир ҳақиқий сонга сонлар ўқидаги битта нуқта мос келади (4.1- чизма). Шунинг учун баъзан ҳақиқий сон нуқта ҳам дейилади.



4.1- чизма

$-\infty$ ва $+\infty$ белгиларни барча ҳақиқий сонларда, яъни ихтиёрий $x\in R$ да $-\infty < x < +\infty$ тенгсизликни қаноатлантирадиган сонларнинг белгиси деб қабул қиламиз. Бунда $-\infty$ сонлар ўқида чапдаги, $+\infty$ сонлар ўқида ўнгдаги *чексиз узоқлашган нуқталар* дейилади.

Ушбу $]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[$ очиқ оралиқ a нуқтанинг ε- *атрофи* дейилади (4·2- чизма).



4.2- чизма

Ихтиёрий x ҳақиқий соннинг абсолют миқдори қуйидагича аниқланади:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{агар } x < 0, \\ x, & \text{агар } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Абсолют миқдорнинг хусусиятлари;

1) $|x| \leqslant \alpha$ тенгсизлик $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ тенгсизликка тенг кучлидир.

2) $|x| \geqslant \alpha$ тенгсизликнинг бажарилишидан $x \geqslant \alpha$ ёки $x \leqslant -\alpha$ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади ва аксинча.

3) $|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$.

4) $|x \pm y| \geqslant ||x| - |y||$.

5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

6) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$.

1- мисол. Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

1) $|x+2| \leqslant 3$; 2) $|2x-3| < 1$;

3) $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$; 4) $1 < |x-3| < 4$.

△. 1) $|x+2| \leqslant 3$ тенгсизлик ушбу

$$-3 \leqslant x+2 \leqslant 3$$

тенгсизликка тенг кучли. Бундан қуйидаги

$$-5 \leqslant x \leqslant 1$$

тенгсизлик келиб чиқади.

2) $|2x-3| < 1$ тенгсизлик ушбу

$$-1 < 2x-3 < 1$$

тенгсизликка тенг кучли. Бундан қуйидаги

$$2 < 2x < 4 \text{ ёки } 1 < x < 2$$

тенгсизлик келиб чиқади.

3) Берилган тенгсизлик x нинг ушбу $x^2 - 7x + 12 < 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча қийматларида ўринлидир. Шунинг учун $x^2 - 7x + 12 < 0$ тенгсизликни ечамиз.

$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) < 0$, бундан ушбу $x - 3 > 0$, $x - 4 < 0$ тенгсизликларга эга бўламиз. Демак, $3 < x < 4$ экан.

4) $1 < |x-3| < 4$ тенгсизлик қуйидаги $|x-3| > 1$ ва $|x-3| < 4$ тенгсизликларга тенг кучли. Булардан 1) $|x-3| > 1 \Longrightarrow$ а) $x - 3 > 1 \Longrightarrow x > 4$; б) $x - 3 < -1 \Longrightarrow x < 2$; 2) $|x-3| < 4 \Longrightarrow$ а) $x - 3 < 4 \Longrightarrow x < 7$; б) $x - 3 < 4 \Longrightarrow x > -1$.

Бу тенгсизликларни биргаликда қарасак, $-1 < x < 2$ ва $4 < x < 7$ оралиқларга эга бўламиз. Айнан шу оралиқларда берилган тенгсизлик ўринли бўлади. ▲

2-мисол. Қуйидаги тенгламалар ечимга эгами:

1) $|x| = x + 3$; 2) $|x| = x - 3$?

△. 1) $x \geqslant 0$ бўлса, $x = x + 3$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама ечимга эга эмас. Агар $x < 0$ бўлса, $-x = x + 3$ тенглама ҳосил бўлади, бундан $x = -\frac{3}{2}$ ечимга эга бўламиз.

2) $x \geqslant 0$ бўлса, $x = x - 3$ га эга бўламиз. Бу тенгламанинг ечими йўқ. Агар $x < 0$ бўлса, $-x = x - 3$ тенглама ҳосил бўлади, бундан $x = \frac{3}{2}$ га эга бўламиз. Бу ечим $x < 0$ деган фаразимизга зиддир. Демак, $|x| = x - 3$ тенглама ечимга эга эмас. ▲

□. Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

1. $|x| < 4$. *Жавоб.* $-4 < x < 4$.
2. $x^2 < 2$. *Жавоб.* $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
3. $|x-3| > 3$. *Жавоб.* $-\infty < x < 0$ ва $6 < x < +\infty$.
4. $|3x-2| < 4$. *Жавоб.* $-\frac{3}{2} < x < 2$.
5. $|x| > |x+2|$. *Жавоб.* $x < -1$.
6. $1 < |x+2| < 4$. *Жавоб.* $-6 < x < -3$ ва $-1 < x\ 2$.
7. $x^2 > 9$. *Жавоб.* $-\infty < x < -3$ ва $3 < x < +\infty$.
8. $|x| > 2$. *Жавоб.* $-\infty < x < 2$ ва $2 < x < +\infty$.

9. $|x+1|>|x|$. *Жавоб.* $x>-\frac{1}{2}$.

10. $|x+2|<2$. *Жавоб.* $-4<x<0$. ■

Қуйидаги тенгламалар ечимга эгами?

11. $|x|=x+5$. *Жавоб.* $x=-\frac{5}{2}$.

12. $|x|=x-5$. *Жавоб.* Ечимга эга эмас. ■

2- §. Функциянинг таърифи

Таъриф. X ва Y тўплам берилган бўлсин. Агар бирор қоида X тўпламнинг ҳар бир элементига Y тўпламнинг битта ва фақат битта элементини мос қўйса, бу қоида *функция* дейилади.

Бу таърифдаги X ва Y лар орасидаги боғланишни *функционал боғланиш* дейилади ва қуйидагича белгиланади: $y=f(x)$. Бу ерда x эркли ўзгарувчи, y эса эрксиз ўзгарувчи ва f — x ни y га мос қўювчи қоида, яъни функциядир. Демак, $f(x)$ ва f бир нарса эмас. f қоида, $f(x)$ эса бу қоида ёрдамида x га мос қўйилган Y нинг элементидир. Таърифдаги X тўплам функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади ва функция Y тўпламдан қийматлар қабул қилади. Баъзан $y=f(x)$ функционал боғланишнинг ўзи функция деб юритилади, аммо функция x га y ни мос қўювчи f қоида эканлигини доимо назарда тутиш керак.

Шундай қилиб, функция берилган бўлиши учун унинг *аниқланиш соҳаси* деб аталган X тўплам олдиндан берилган бўлиши ҳамда унинг ҳар бир элементига қандай объект (элемент) мос қўйилишини аниқлаб берадиган f қоида берилиши керак. Бунда X нинг ҳар бир x элементига мос келган $f(x)$ элементлар тўплами функциянинг *ўзгариш соҳасини* ташкил қилади.

Қўлланманинг IV, V ва VI бобларида ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган ва қийматлари ҳам ҳақиқий сонлардан иборат функциялар қаралади.

Битта ҳақиқий сонга бошқа ҳақиқий сонни мос қўювчи қоида характер жиҳатидан ҳар хил бўлиши мумкин. Масалан, ҳар бир ҳақиқий сонга унинг квадратини мос қўйиш мумкин. Бу функционал боғланиш қуйидагича ёзилади:

$$y=x^2.$$

Бу ерда x эркли ўзгарувчи, y эса эрксиз ўзгарувчи, квадратга кўтариш амали эса функциядан иборатдир. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами R дан ва ўзгариш соҳаси $[0, \infty)$ оралиқдан иборатдир. Бу функция 2 га 4 ни, -7 га 49 ни мос қўяди. 4 ва 49 ларга мос равишда функциянинг 2 ва -7 нуқталардаги хусусий қийматлари дейилади. Биз баъзан функция 2 да 4 га тенг ёки -7 да 49 ни қабул қилади деб ҳам юритамиз. Функционал боғланишни ёзишда ўзгарувчиларни қандай белгилашнинг аҳамияти йўқ. Масалан, ушбу

$$z = t^2, \ u = v^2, \ \omega = \alpha^2, \ x = y^2$$

ифодалар битта функцияни билдиради, чунки бу боғланишларда қоида битта — квадратга кўтаришдир.

Ушбу

$$y = \frac{1}{x}$$

боғланиш ҳар бир ҳақиқий сонга унинг тескарисини мос қўяди. Бу ҳолда функциянинг аниқланиш соҳаси $]-\infty, 0[$ ва $]0, \infty[$ оралиқлардан иборат.

Функцияни аниқлайдиган қоидалар анча мураккаб бўлиши ҳам мумкин, масалан қуйидагича функцияни қурайлик:

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt[4]{2-x} + x^{10}.$$

Бу ҳолда функция $1+x \geqslant 0$ ва $2-x \geqslant 0$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x ларда, яъни $-1 \leqslant x \leqslant 2$ оралиқда аниқланган.

Баъзан функцияни аниқлайдиган қоида ягона формуладан иборат бўлмаслиги мумкин. Масалан, ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ агар } & x < 0 \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } & 0 < x < 3 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{x}, \text{ агар } & 3 < x \text{ бўлса} \end{cases}$$

қоида барча $x \in R$ ларда функцияни аниқлайди. Функцияни қуйидагича аниқлаш ҳам мумкин:

$$y = \begin{cases} 0, \text{ агар } x \text{ рационал бўлса,} \\ 1, \text{ агар } x \text{ иррационал бўлса.} \end{cases}$$

Бу функция ҳам барча $x \in R$ ларда аниқланган.

1-мисол. Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқталардаги хусусий қийматини ҳисобланг:

1) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$, $x = 3$ да;

2) $y = x^2 \arccos\frac{x}{2} - 3x \operatorname{arcctg} x$, $x = -1$ да.

△. 1) $f(3) = \frac{2\cdot 3+1}{3^2+1} = \frac{7}{10}$, демак, бу функция 3 га $\frac{7}{10}$ ни мос қўяр экан.

2) $y = x^2 \arccos\frac{x}{2} - 3x \operatorname{arcctg} x = (-1)^2 \arccos\frac{(-1)}{2} + 3\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{2}{3}\pi + \frac{9}{4}\pi = \frac{35}{12}\pi$. Бу функция -1 га $\frac{35}{12}\pi$ ни мос қўяди. ▲

2-мисол. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

1) $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$; 2) $h(t) = \sqrt{\sqrt{t}-1}$;

3) $y = \sqrt{1-x^2}$; 4) $r = \sqrt{\sin\varphi}$;

5) $\omega = \frac{t}{\sin t}$; 6) $\varphi(x) = \lg(x-1) + \arcsin\frac{x}{2}$.

△. 1) $\sqrt{x-1}$ нинг қиймати ҳақиқий сон бўлиши учун, $x-1 \geqslant 0$ бўлиши керак. Бундан $x \geqslant 1$ келиб чиқади. Худди шундай, $\sqrt{2-x}$ маънога эга бўлиши учун $2-x \geqslant 0$ бўлиши керак, бундан $x \leqslant 2$ га эга бўламиз. $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ маънога эга бўлиши учун унинг махражи нолдан фарқли бўлиши керак. Демак $x \neq 2$ бўлиши керак. Юқоридаги $x \geqslant 1$, $x \leqslant 2$ ва $x \neq 2$ шартлардан бу функция $1 \leqslant x < 2$ ярим ёпиқ оралиқда аниқланган эканлиги келиб чиқади.

2) $h(t) = \sqrt{\sqrt{t}-1}$ функция аниқланган бўлиши учун а) $\sqrt{t}$ аниқланган, б) $\sqrt{t}-1 \geqslant 0$ бўлиши керак. а) дан $t \geqslant 0$, б) дан эса $t \geqslant 1$ бўлиши керак. а) дан $t \geqslant 0$, б) дан эса $t \geqslant 1$ келиб чиқади. Демак, берилган функция $t \geqslant 1$ да аниқланган, яъни функциянинг аниқланиш соҳаси $[1, +\infty[$ дан иборат.

3) $y = \sqrt{1-x^2}$ аниқ ҳақиқий қийматни қабул қилиши учун $1-x^2 \geqslant 0$ бўлиши керак. Бундан $x^2 \leqslant 1$, яъни функция $-1 \leqslant x \leqslant 1$ да аниқланган экан.

4) $z = \sqrt{\sin\varphi}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $\sin\varphi \geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган φ лардан иборат бўлади. $\sin\varphi$ биринчи ва иккинчи чоракда мусбат бўлади. Демак, бу функция $2k\pi \leqslant \varphi \leqslant (2k+1)\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ оралиқларда аниқланган.

5) Аввало $\omega = \frac{t}{\sin t}$ функциянинг махражи нолга айла-

надиган нуқталарни топамиз: агар $t=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ бўлса, $\sin t=0$. Бу қийматларда касрнинг махражи нолга тенг бўлгани учун функция бу қийматларда аниқланган эмас. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси сонлар ўқидаги $t=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ нуқталардан ташқари барча нуқталардир.

6) $\varphi(x)=\lg(x-1)+\operatorname{ars}\sin\frac{x}{2}$ функция аниқланган бўлиши учун биринчидан $x-1>0$ бўлиши керак, бундан $x>1$. Иккинчидан, $-1 \leqslant \frac{x}{2} < 1$ бўлиши керак, бундан $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $1<x \leqslant 2$ ярим очиқ оралиқдир. ▲

☐. Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқталардаги қийматини ҳисобланг:

13. $\varphi(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$; $x=0$, $x=-1$, $x=\frac{3}{2}$. *Жавоб.* -3; $-\frac{5}{2}$; 0.

14. $f(x)=2\operatorname{ars}\sin x+\operatorname{ars}\operatorname{tg}2x$; $x=-\frac{1}{2}$. *Жавоб.* $-\frac{7}{12}\pi$.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

15. $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$. *Жавоб.* $1 \leqslant x < 2$ ва $2<x<+\infty$.

16. $z=\sqrt{1+t}-t\sqrt[4]{5-t}$. *Жавоб.* $-1 \leqslant t \leqslant 5$.

17. $y=\sqrt{4x-x^2}$. *Жавоб.* $0 \leqslant x \leqslant 4$.

18. $y=-\sqrt{2\sin x}$. *Жавоб.* $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, $k=1,2,3,\ldots$

19. $v=\arccos\frac{1-2x}{3}$ *Жавоб.* $-1<x \leqslant 2$.

20. $\omega=\log_2(x^2-9)$. *Жавоб.* $]-\infty; -3]$ ва $]3, +\infty[$.

21. $f(x)=\log^x 5$ *Жавоб.* $]0,1[,]1,\infty[$

22. $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$. *Жавоб.* $1 \leqslant x \leqslant 6$.

23. $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{4x-1}}-\sqrt{1-x^2}$. *Жавоб.* $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$.

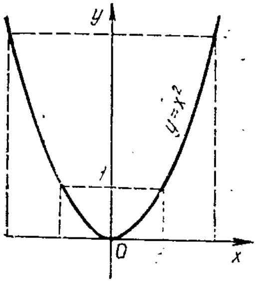
24. $y=\operatorname{ctg}x$. *Жавоб.* $x \neq k\pi$. $k. =0$, 1, 2. . ... ■

3- §. Функциянинг графиги

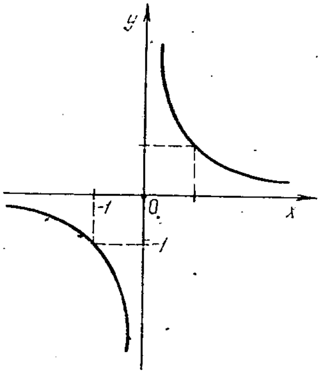
Таъриф. Агар x нинг қийматлари функциянинг аниқланиш соҳасидан олинса, текисликдаги $(x, f(x))$ нуқталар тўплами f *функциянинг графиги* дейилади.

Шундай қилиб функциянинг графиги у ҳақидаги тўла жадвалдир, унда функция ҳақидаги барча маълумотлар берилган. Агар функциянинг графиги ёки графигининг бир қисми чизилган бўлса, функцияни „қуриш“ мумкин.

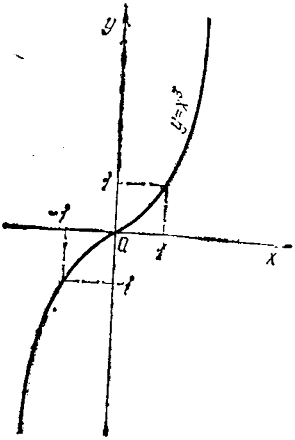
Бир неча мисол қарайлик. Маълумки, $y = x^2$ функциянинг графиги (4. 3- чизма) *парабола*, $y = \frac{1}{x}$ функциянинг



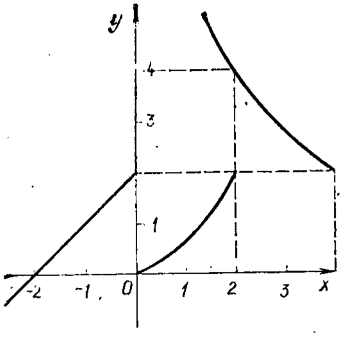
4.3- чизма



4.4- чизма



4.5- чизма



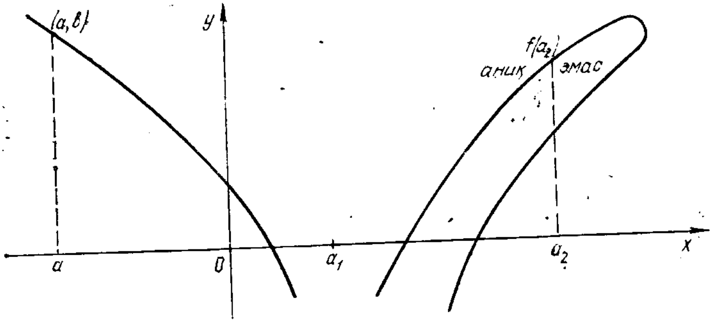
4.6- чизма

графиги эса (4. 4- чизма) *гипербола* бўлади. $y = x^3$ функциянинг графиги эса (4. 5- чизма) *кубик парабола* дейилади. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{2}{x} & \text{агар } 1 < x \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг графиги (4.6- чизма) учта бўлакдан иборатдир.

Текисликдаги нуқталарнинг ихтиёрий тўплами функциянинг графиги бўла олмайди. Текисликдаги нуқталар тўплами функциянинг графиги бўлиши учун тўпламнинг ихтиёрий иккита нуқтаси бир вертикалда ётмаслиги зарур ва етарлидир. Бу шарт бажарилганда, $x = a$ тўғри чизиқ функция графигини кесиб ўтмаса, $x = a$ нуқта бу функция берилган соҳага кирмайди. Агар $x = a$ тўғри чизиқ функция графигини (a, b) нуқтада кесса, $f(a) = b$ бўлади (4. 7- чизма).



4.7- чизма

4. 7- чизмадаги чап томонда жойлашган эгри чизиқ бирор функциянинг графигини тасвирлайди. Ўнг томондагиси эса функциянинг графигини тасвирлай олмайди, чунки x ўқида шундай нуқта топиладики, бу нуқтадан ўтган вертикал тўғри чизиқ эгри чизиқни иккита нуқтада кесиб ўтади. Мана шу 47- чизмадаги a_2 нуқтада функция аниқланмаган.

Мисол. Маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг бўлган айлана функциянинг графиги бўла олмайди. Чунки $-1 < x < 1$ оралиқдаги ҳар бир нуқтадан ўтувчи вертикал тўғри чизиқ айланани иккита нуқтада кесиб ўтади. Аммо юқори ярим айлана, яъни ушбу $x^2+y^2=1$ ва $y \geqslant 0$ шартларни қаноатлантирадиган (x, y) нуқталар тўплами $y=\sqrt{1-x^2}$ функциянинг графиги бўлади. Худди шундай пастки ярим айлана $y=-\sqrt{1-x^2}$ функциянинг графиги бўлади.

□. Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқлардаги графигини чизинг:

25. $y=x^2-2x-1$ $[-2,4]$ да;
26. $y=x^2-4|x-1|+1$, $[-6,5]$ да;
27. $y=\frac{16}{x^2}-1$, Ox ўқи билан кесишиш оралиқларида;
28. $y=|x-2|-3$. ■

4- §. Функцияларнинг баъзи синфлари

1. Монотон функциялар. Таъриф. f функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлсин. Агар $x_1<x_2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий иккита $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ нуқтада $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ бўлса, бу функцияни X тўпламда *ўсувчи* (камаювчи) дейилади. Агар ихтиёрий $x_1 \in X$ ва $x_2 \in X$ лар учун $x_1<x_2$ бўлиб, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$ бўлса, f функцияни *камаймайдиган* (ўсмайдиган) функция дейилади.

Агар функция ўсувчи ёки камаювчи бўлса, уни *қатъий монотон* дейилади. Агар функция ўсмайдиган ва камаймайдиган бўлса, у монотон дейилади. Масалан, $f(x)=x^2$ функция R тўпламда бу синфларнинг ҳеч бирига кирмайди, чунки $x<0$ да камаювчи ва $x>0$ да ўсувчидир.

2. Жуфт ва тоқ функциялар. Таъриф. f функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлсин. Агар ихтиёрий $x \in X$ ва $-x \in X$ да $f(-x)=f(x)$ тенглик бажарилса, f *жуфт*, $f(-x)=-f(x)$ тенглик бажарилса, f *тоқ функция* дейилади. Масалан, $f(x)=x^2$ жуфт функция, $f(x)=x^3$ эса тоқ функциядир.

Жуфт функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик бўлади. Тоқ функциянинг графиги эса координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади. Тоқ ҳам, жуфт ҳам бўлмаган функциялар ҳам мавжуд, албатта. 4. 6- чизмада шундай функция графиги тасвирланган.

1- мисол. Қуйидаги функцияларни монотон ёки монотон эмаслигини текширинг:

1) $y=x^5$; 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

3) $z = x^3 + x^2$;   4) $g(x) = |x| + x$;

5) $h(n) = \frac{|u|}{u}$;

6) $\varphi(x) = \begin{cases} x+1, & \text{агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

△ 1) $y = x^5$ функция $]-\infty, +\infty[$ оралиқда аниқланган бўлиб ўсувчидир, чунки $0 < x_1 < x_2$ да $y(x_1) \leqslant y(x_2)$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $y(x_1) = x_1^5$ ни $y(x_2) = x_2^5$ дан айириб

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2^5 - x_1^5 = (x_2 - x_1)(x_2^4 + x_2^3 x_1 + x_2^2 x_1^2 + x_2 x_1^3 + x_1^4)$$

ифодага эга бўламиз. Бу ифоданинг иккала кўпайтувчиси ҳам $x_1 < x_2$ ларда мусбат бўлади. Демак, $y(x_2) > y(x_1)$ экан.

$y = x^5$ функция тоқ бўлгани учун y координаталар бошига нисбатан симметрикдир. Шунинг учун $x_1 < x_2 < 0$ бўлганда ҳам $y(x_1) < y(x_2)$ бўлади. Демак, бу функция $]-\infty, \infty[$ оралиқда ўсувчидир.

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функция $]0, +\infty[$ ярим ўқда аниқланган ва камаювчидир, чунки $0 < x_1 < x_2$ бўлса, $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ бўлади. Бундан эса

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{x_1}} > \frac{1}{\sqrt{x_2}} = f(x_2)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

3) $z = x^3 + x^2$ функция монотон ўсувчи ҳам, монотон камаювчи ҳам эмас, чунки ихтиёрий $x_1 < x_2$ да

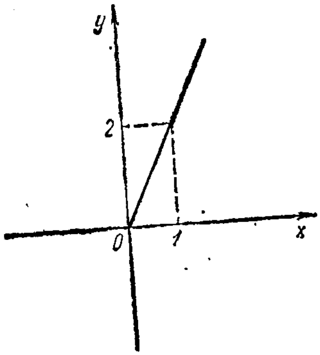
$$z(x_2) - z(x_1) = (x_2^3 + x_2^2) - (x_1^3 + x_1^2) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 + x_2 + x_1)$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккала кўпайтувчи ҳам $x_1 < x_2 < -1$ ва $0 < x_1 < x_2$ бўлганда мусбат бўлиб, $-1 < x_1 < x_2 < 0$ ларда биттаси мусбат, биттаси манфий бўлади. Демак, $z(x_2) - z(x_1)$ айирма ўз ишорасини ўзгартиради.

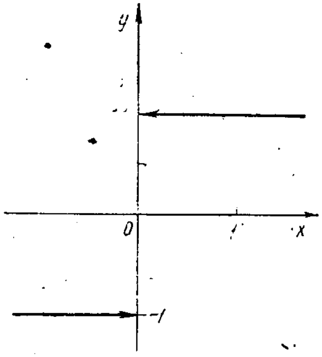
4) $g(x) = |x| + x$ камаймайдиган функциядир. Чунки

$$g(x) = \begin{cases} \text{агар } x < 0 \text{ бўлса } 0, \text{ чунки } x < 0 \text{ да } |x| = -x, \\ \text{агар } x > 0 \text{ бўлса } 2x, \text{ чунки } x > 0 \text{ да } |x| = x. \end{cases}$$

Демак, $g(x)$ $]-\infty, 0[$ оралиқда ўзгармас бўлиб, 0 га тенг, $[0, \infty[$ да $2x$ га тенг, яъни бу оралиқда ўсувчидир.



4.8- чизма



4.9- чизма

Бу функциянинг графиги 4.8- чизмада тасвирланган.

5) $h(u) = \frac{|u|}{u}$ функция ҳам камаймайдиган функциядир. Чунки

$$h(u) = \begin{cases} \text{агар } u < 0, \text{ бўлса} - 1, \text{ чунки } u < 0 \text{ да } |u| = -u, \\ \text{агар } u > 0 \text{ бўлса } 1, \text{ чунки } u > 0 \text{ да } |u| = u. \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 4.9- чизмада тасвирланган.

6)
$$\varphi(x) = \begin{cases} \text{агар } x \leqslant 0, \text{ бўлса, } x + 1, \\ \text{агар } x > 0 \text{ бўлса, } x^2, \end{cases}$$

функция монотон эмас, чунки $x_1 < x_2 < 0$ бўлса, $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ бўлади ва $0 < x_1 < x_2$ ларда ҳам $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ бўлади. Аммо $x_1 = -\frac{1}{2}$ десак, $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ бўлиб, $x_2 = \frac{1}{2}$ бўлса, $\varphi(x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ бўлади.

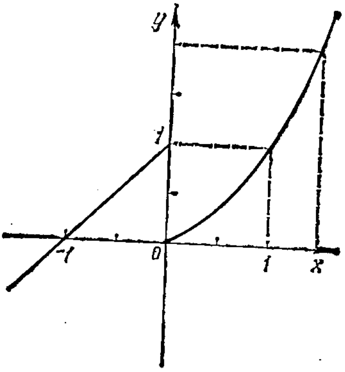
Демак, $x_1 = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} = x_2$ ларда $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varphi(x_2)$ экан. Бу функциянинг графиги 4.10- чизмада тасвирланган. ▲

☐. Қуйидаги функцияларнинг монотон ёки монотон эмаслигини текширинг.

29. $y = x^3 + 3x + 5$.	*Жавоб.* Ўсувчи.
30. $y = a^x$, $a > 1$.	*Жавоб.* Ўсувчи.
31. $f(x) = \log_a x$.	*Жавоб.* Ўсувчи.
32. $f(x) = \|x + 1\| + x + 1$.	*Жавоб.* Камаймайди.
33. $f(t) = \frac{\|t+1\|}{t+1}$	*Жавоб.* Камаймайди.

34.

$$f(x)=\begin{cases}\text{агар } x<0 \text{ бўлса, } 4x+1,\\ \text{агар } x>0 \text{ бўлса, } \quad x^2.\end{cases}$$



4.10- чизма

Жавоб. Монотон эмас.

35. $y=a^x$, $0<a<1$.

Жавоб. Камаювчи.

36. $y=\sqrt{x}$.

Жавоб. Ўсувчи.

37. $y=\sin x+1$.

Жавоб. Монотон эмас.

38. $y=\log_a x$, $0<a<1$.

Жавоб. Камаювчи.

2- мисол. Қуйидаги функцияларнинг жуфт-тоқлигии ёки жуфт ҳам, тоқ ҳам эмаслигини кўрсатинг:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}-x^4$;

2) $f(x)=x^3+x^2$;

3) $f(x)=\cos x$;

4) $f(x)=\sin x$;

5) $f(x)=\sqrt{x^3+1}$

6) $\varphi(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}+5}{|x|}$

$\triangle$. 1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}-x^4$ жуфт функция, чунки $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2+1}-(-x)^4=\sqrt[3]{x^2+1}-x^4=f(x)$.

2) $f(x)=x^3+x^2$ функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас, чунки $f(-x)=(-x)^3+(-x)^2=-x^{-3}+x^2$. Бу ифода $f(x)$ га ҳам, $-f(x)$ га ҳам тенг эмас.

3) $f(x)=\cos x$ жуфт функциядир, чунки

$$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x).$$

4) $f(x)=\sin x$ тоқ функциядир, чунки

$$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x).$$

5) $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас, чунки $f(-x)=\sqrt{(-x)^3+1}=\sqrt{1-x^3}$. Бу ифода $f(x)$ га ҳам, $-f(x)$ га ҳам тенг эмас.

6) $\varphi(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+5}}{|x|}$ жуфт функция, чунки

$$\varphi(-x)=\frac{\sqrt[3]{(-x)^2+5}}{|-x|}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+5}{|x|}=\varphi(x)\ \blacktriangle$$

Қуйидаги функцияларнинг жуфт-тоқлигини ёки жуфт ҳам, тоқ ҳам эмаслигини кўрсатинг.

39. $f(x)=\sqrt{x^4-1}$. *Жавоб.* Жуфт.

40. $f(x)=x^3+3x$. *Жавоб.* Тоқ.

41. $f(x)=\sin^2 x\cos x$. *Жавоб.* Жуфт.

42. $f(x)=\sqrt{x^3+1}$. *Жавоб.* Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.

43. $f(x)=\sin x\cos x$. *Жавоб.* Тоқ.

44. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}+3}{x}$. *Жавоб.* Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.

45. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$. *Жавоб.* Жуфт.

46. $f(x)=\frac{1}{x}$. *Жавоб.* Тоқ.

47. $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$. *Жавоб.* Тоқ.

48. $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\sin^2 x$. *Жавоб.* Жуфт. ■

5- §. Сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити

1. Кетма-кетлик. Барча мусбат бутун сонлар, яъни 1, 2, 3, 4, . . . лар натурал сонлар тўпламини ташкил этади. Бу тўпламни N билан белгилаймиз, яъни $N=\{1, 2, 3, \dots\}$.

1- таъриф. Натурал сонлар тўплами N да аниқланган f функцияни *кетма-кетлик* дейилади.

Бу функциянинг қийматлари $f(n)$, $n=1, 2, 3, \dots$ *кетма-кетликнинг ҳадлари* дейилади. Кетма-кетликнинг n- ҳади $f(n)$ ни (a_n ни) $a_n=f(n)$ кўринишда белгилаймиз. У ҳолда кетма-кетликни $\{a_n\}$ ёки $a_1, a_2, \dots, a_n$ шаклда ёзиш ҳам мумкин.

Қуйидаги кетма-кетликларни қарайлик:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots \qquad (1)$$

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots \qquad (2)$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots \qquad (3)$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \dots \qquad (4)$$

(1) кетма-кетлик тоқ сонлардан тузилган, унинг 5- ҳади 9 га тенг ва n- ҳади $2n-1$ га тенг.

(2) кетма-кетликнинг n- ҳади, n жуфт бўлса, 0 га, тоқ бўлса, 1 га тенг. Унинг n- ҳадини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{1-(-1)^n}{2}.$$

(3) кетма-кетликнинг n- ҳади $\frac{1}{n}$ га тенг.

Бу ердаги (4) кетма-кетликни Фибоначчи кетма-кетлиги дейилади, унинг биринчи иккита ҳади бирга, бошқа ҳар бир ҳади олдинги иккита ҳадининг йиғиндисига тенг. Шунинг учун (4) кетма-кетликнинг 8- ҳади $8 + 13 = 21$, 9- ҳади $13 + 21 = 34$ га тенг бўлади. Ҳар доим бирор кетма-кетлик ҳақида гап юритилганда функция тушунчасидан фойдаланилади.

Масалан,

$$a_n = 2_{n-1}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

формула тоқ сонлар кетма-кетлиги (1) ни аниқласа,

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n = 3,\ 4,\ \ldots$$

формула Фибоначчи кетма-кетлигини аниқлайди. Бу формулалардаги a ва n лар ихтиёрий ўзгарувчилардир. Масалан, Фибоначчи кетма-кетлигини

$$b_1 = b_2, \quad b_j = b_{j-1} + b_{j-2}$$

ёки

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}, \quad k = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

формулалар билан ҳам аниқлаш мумкин.

1- мисол. Қуйидаги кетма-кетликларнинг дастлабки 6 та ҳадини топинг:

1) $a_n = n^2 - n$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$; 2) $b_k = (-2)^k$
$k = 0,\ 1{,}2,\ \ldots$;

3) $x_k = \frac{k}{k^2 + 1}$, $k = -1{,}0{,}1,\ \ldots$; 4) $a_n = n^{n-1}$
$n = 1{,}2{,}3,\ \ldots$;

△. 1) $a_1 = 1^2 - 1 = 0$, $a_2 = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$
$a_3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$, $a_4 = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$,

$a_5 = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$, $a_6 = 6^2 - 6 = 36 - 6 = 30$, яъни $a_n = n^2 - n$ кетма-кетликнинг дастлабки олтита ҳади 0, 2, 6, 12, 20, 30 лардан иборат.

2) $b_0 = (-2)^0 = 1$ $b_1 = (-2)^{-1} = -2$,
$b_2 = (-2)^2 = 4$, $b_3 = (-2)^3 = -8$,
$b_4 = (-2)^4 = 16$, $b_5 = (-2)^5 = -32$.

Демак, кетма-кетликнинг изланган ҳадлари 1, -2, 4, -8, 16, -32 лардан иборат.

3) $x_{-1} = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$; $x_0 = \frac{0}{0 + 1} = 0$;

$$x_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}; \qquad x_2 = \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5};$$

$$x_3 = \frac{3}{3^3+1} = \frac{3}{10}; \qquad x_4 = \frac{4}{4^2+1} = \frac{4}{17}.$$

Демак, кетма-кетликнинг изланган ҳадлари

$-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}$ лардан иборат.

4) $a_1 = 1^{1-4} = 1^{-3} = 1, \quad a_2 = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{4},$

$a_3 = 3^{3-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}, \quad a_4 = 4^{4-4} = 4^0 = 1, \ a_5 = 5^{5-4} =$
$= 5^1 = 5, \quad a_6 = 6^{6-4} = 6^2 = 36.$

Демак, кетма-кетликнинг изланган ҳадлари $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3},$ $1, 5, 36$ лардан иборат. ▲

2-мисол. $a_{-1} - 1$, $a_0 = 4$, $a_1 = 9$, $a_2 = 16$, $a_3 = 25$ бўлса, a_n нимага тенг бўлади?

△. Бу кетма-кетликнинг берилган ҳадларини текширганимизда унинг умумий ҳади, $a_n = (n+2)^2$, $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ формула билан аниқланишини кўриш мумкин. ▲

3-мисол. Ушбу $0, 4, 8, 12, 16, \ldots$ кетма-кетликнинг умумий ҳадини топинг.

△. Бу кетма-кетликнинг ҳам берилган ҳадларини текширсак, унинг умумий ҳади $a_n = 4n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ эканлиги кўринади. ▲

□. Қуйидаги кетма-кетликларнинг дастлабки олтита ҳадини топинг:

49. $a_n = (-1)^n (n-1)^3$, $n = 1, 2, \ldots$; *Жавоб.* $0, 1, -8, 27, -64, 125 \ldots$.

50. $b_k = k^2 - k$, $k = -1, 0, 1, 2, \ldots$; *Жавоб.* $2, 0, 0, 2, 6, 12, \ldots$.

51. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_n = 2, x_{n-1} - x_{n-2}$, $n = 3, 4, \ldots$; *Жавоб.* $1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$.

52. $b_k = 2k + (-1)^k k = 5,6,7, \ldots$ *Жавоб.* $5, 18, 7, 24, 9, 30, \ldots$.

53. $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 4$, $b_5 = 8$, $b_6 = 16$, $b_7 = 32$ бўлса, b_k ни топинг. *Жавоб.* $b_k = 2^{k-2}$.

54. Ушбу $1, -4, 7, -10, 13, -16, \ldots$ кетма-кетликнинг умумий ҳадини топинг ва номерлаш нечадан бошланишини кўрсатинг.

Жавоб. $a_n = (-1)^n (3n+1)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ■

9*

Қуйидаги кетма-кетликларнинг дастлабки 10 та ҳадини топинг.

55. $a_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$; *Жавоб.* 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...

56. $x_n = 2+(-1)^n \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Жавоб.* $1,\ 2\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{4},\ 1\frac{4}{5},\ 2\frac{1}{6},\ 1\frac{6}{7},\ 2\frac{1}{8},\ 1\frac{8}{9},\ 2\frac{1}{10},\ \ldots$.

57. $x_n = 1^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Жавоб.* 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...

58. $a_n = 2^{(-1)^n n}$, $n = 0, 1\ 2, 3, \ldots$ *Жавоб.* $1,\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{1}{8},\ 16,\ \frac{1}{32},\ 64,\ \frac{1}{128},\ 256,\ \frac{1}{512},\ \ldots$.

2. **Яқинлашувчи кетма-кетлик.** Яқинлашувчи кетма-кетлик, кетма-кетликнинг лимити тушунчаларини киритишда ва улар устида гап юритганда „кетма-кетликнинг қарийб ҳамма элементлари“, яъни „кетма-кетликнинг чекли сондаги элементлардан бошқа ҳамма элементлари“, деган жумладан фойдаланиш жуда қулай бўлади. Масалан, ушбу

$$-10,\ -9,\ -8,\ -7,\ \ldots$$

кетма-кетликнинг қарийб ҳамма элементлари мусбат, чунки унинг биринчи 10 та ҳади манфий, 11-ҳади 0 ва қолган барча элементлари эса мусбатдир.

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар бирор x_0 сон топилиб, қуйидаги иккита шарт бажарилса:

I. кетма-кетликнинг қарийб ҳамма элементлари x_0 дан катта ихтиёрий b ($b > x_0$) сондан кичик бўлса,

II. кетма-кетликнинг қарийб ҳамма элементлари x_0 дан кичик ихтиёрий a ($a < x_0$) сондан катта бўлса, *кетма-кетлик x_0 га яқинлашади* ёки унинг *лимити x_0 га тенг* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \qquad (1)$$

Бу таъриф қуйидаги таърифга тенг кучлидир.

2-таъриф. $x_1, x_2, x_3, \ldots$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар бирор x_0 сон топилса ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$

сон учун бирор мусбат бутун сон $N(\varepsilon)$ топилиб, барча $n > N(\varepsilon)$ ларда ушбу

$$|x_n - x_0| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, x_0 сонни (x_n) кетма-кетликнинг лимити ёки (x_n) *кетма-кетлик* x_0 *га яқинлашади* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Ҳамма кетма-кетликлар ҳам яқинлашувчи бўлавермайди. Чекли лимитга эга бўлмаган кетма-кетликларни *узоқлашувчи* дейилади. a_1, a_2, a_3; ... кетма-кетликнинг қарийб барча элементлари ихтиёрий M сондан катта $(a_n > M)$ бўлса, бу кетма-кетлик $+\infty$ *га узоқлашади* дейилади ва у қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Худди шундай кетма-кетликнинг қарийб барча элементлари ихтиёрий M сондан кичик $(a_n < M)$ бўлса, кетма-кетлик $-\infty$ *га узоқлашади* дейилади ва у қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Яқинлашувчи кетма-кетликлар устидаги арифметик амаллар қуйидаги теоремада ифодаланган.

1-теорема. *Агар* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ *бўлса,*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta,$$

$$\lim_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\,\alpha, \quad \text{ва} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \ (\beta \neq 0 \text{ да})$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\cdot b_n) = \alpha\cdot\beta$$

бўлади.

1-мисол. Қуйидаги тенгликларни кетма-кетлик лимитининг таърифидан фойдаланиб исботланг:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right] = 2$.

Δ. 1) буни кўрсатиш учун аввал 1-таърифдаги I шартнинг бажарилишини текширамиз. Бунинг учун ихтиёрий $b > 0$ сонни олайлик. Энди қандай k ларда $\frac{1}{k} < b$ тенгсизлик бажарилишини топайлик. Бу тенгсизлик $k > \frac{1}{b}$

тенгсизлик бажариладиган бутун k ларда ўринлидир. N агар $N \geqslant \frac{1}{b}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бутун сон бўлса, барча $k \geqslant N$ ларда $\frac{1}{k} < b$ тенгсизлик бажарилади. Шундай қилиб, берилган кетма-кетликнинг биринчи $N-1$ ҳадидан ташқари барча ҳадлари b дан кичик бўлади. Демак, I шарт бажарилади.

Энди II шартни текширамиз. Бу кетма-кетликда II шартнинг бажарилишини текшириш жуда осон. Ҳақиқатан ҳам, ихтиерий манфий $a < 0$ сонни олсак, бу кетма-кетликнинг барча ҳадлари a дан катта. Демак, II шарт ҳам бажарилади.

2) Энди ушбу

$$2-1,\ 2+\frac{1}{2},\ 2-\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ 2-\frac{1}{5} \qquad (1)$$

кетма-кетликнинг 2 га яқинлашишини, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right)=2 \qquad (2)$$

эканлигини таъриф ёрдамида кўрсатамиз.

Биринчи шартнинг бажарилишини текширамиз. Ихтиёрий $b > 2$ сонни оламиз. У ҳолда n тоқ бўлса, $a_n = 2 - \frac{1}{n} < 2 < b$. Агар n жуфт бўлса, $a_n = 2 + \frac{1}{n} < b$· тенгсизлик барча $n > \frac{1}{b-2}$ ларда бажарилади. Шундай қилиб, агар N ушбу $N > \frac{1}{b-2}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган бутун сон бўлса, кетма-кетликнинг дастлабки N та ҳадидан ташқари қолган барча ҳадлари $a_n < b$ тенгсизликни қанотлантиради. Масалан, агар $b = 2{,}01$ бўлса, дастлабки 100 та ҳадидан кейинги барча ҳадлари $a_n < b$ тенгсизликни қаноатлантиради. Агар $b = 2{,}0001$ бўлса, дастлабки 10000 та ҳадидан кейинги барча ҳадлари $a_n < b$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Энди II шартнинг бажарилишини текширамиз. Бунинг учун ихтиёрий $a < 2$ сонни оламиз: Агар n жуфт бўлса,

$$a_n = 2+\frac{1}{n} > 2 > a.$$

Агар n тоқ бўлса,

$$a_n = 2-\frac{1}{n} > a$$

тенгсизлик барча $n > \frac{2}{2-a}$ ларда бажарилади. Демак, N ушбу $N > \frac{2}{2-a}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган бутун сон бўлса, кетма-кетликнинг дастлабки N та ҳадидан кейинги барча ҳадлари $a_n > a$ тенгсизликни қаноатлантиради. Демак, II шарт ҳам ўринли экан.

Энди 2) мисолни 2-таърифдан фойдаланиб ечамиз. Бунинг учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонни олайлик. n қандай бутун сон бўлганда

$$\left|\left(2 + (-1)^n \frac{1}{n}\right) - 2\right| < \varepsilon \qquad (3)$$

тенгсизлик ўринли бўлади? Бу тенгсизлик $\frac{1}{n} < \varepsilon$, яъни $n > \frac{1}{\varepsilon}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган n ларда бажарилади. Демак, N ушбу $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ тенгсизлик бажариладиган энг кичик бутун сон бўлса, барча $n > N$ ларда (3) тенгсизлик бажарилади. Бу мулоҳазалар (2) ни исботлайди. ▲

2-мисол. Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{5n^2-2n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+2n^2}{1-n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

△.1) Бу лимит 1-теоремага асосан қуйидагича топилади:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{5n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{5-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3+0}{5-0+0} = \frac{3}{5}.$$

Бу ерда биз $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ифодадан фойдаландик. Бу ифодани бевосита лимитнинг таърифига асосан исботлаш ҳам мумкин. Юқоридаги 1-мисолнинг биринчисини эътиборга олсак, 1-теоремага асосан қуйидагига эга бўламиз;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2 = 0^2 = 0.$$

2) 1-теорема ва узоқлашувчи кетма-кетликнинг таърифига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+n^2}{1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{-n\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}(-n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n}}=$$

$$=(-\infty)\cdot 2=-\infty.$$

3) 1-теоремага асосан $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$ қуйидагича топилади:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n^3}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2+0}}{2-0}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\blacktriangle$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^2+1}}$ лимитни ҳисоблаш учун аввал $S_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ формуладан, кейин 1-теоремадан фойдаланиб қуйидагини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{9n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{9+\frac{1}{n^4}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+0}{\sqrt{9+0}}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}.\blacktriangle$$

□. Қуйидаги ифодаларни кетма-кетлик лимитининг таърифидан фойдаланиб исботланг:

59. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}}=2;$

60. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=1,\ 0<q<1,$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5}{1+3n}=\infty.$ ■

Қуйидаги лимитларни топинг:

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2+n+1}.$ *Жавоб.* $\frac{2}{3}.$

62. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{1+n-n^2}.$ *Жавоб.* 2.

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-3n+4}{n^2+4}.$ *Жавоб.* $+\infty.$

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n-1}.$ *Жавоб.* 0.

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{(n-1)^2}, \ a > 1.$ *Жавоб.* $+\infty$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n^3}}.$ *Жавоб.* 0.

67. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}.$ *Жавоб.* $\sqrt{3}$

68. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{1+2+3+\ldots+n}.$ *Жавоб.* 2.

69. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3}{2n^2+3}+\frac{1-5n^2}{5n+1}\right).$ *Жавоб.* $\frac{1}{5}$

70. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}).$ *Жавоб.* ∞ ■.

6-§. Функция лимитининг таърифи

1-таъриф. $X \subset R$ тўплам ва $\delta > 0$ сон берилган бўлсин. Агар $x_0 \in R$ нуқтанинг ихтиёрий $(x_0-\delta, \ x_0+\delta)$ атрофида X тўпламнинг x_0 дан фарқли бирор элементи ётса, x_0 нуқтаи X тўпламнинг *қуюқланиш* ёки *лимит нуқтаси* дейилади.

2-таъриф. $y=f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган ва x_0 нуқта X тўпламнинг қуюқланиш нуқтаси бўлсин. Агар бирор A сон топилиб ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун бирор $\delta > 0$ сон топилса ва X тўпламнинг $|x-x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x элементлари учун қуйидаги

$$|f(x)-A| < \varepsilon \tag{1}$$

тенгсизлик бажарилса, *A сонни $f(x)$ функциянинг x аргумент x_0 га интилгандаги лимити* дейилади ва у қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A. \tag{2}$$

Бу функция лимитининг „ε—δ тилидаги“ таърифи дейилади.

3-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун бирор $M(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ва $x > M(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x ларда қуйидаги

$$|f(x)-A| < \varepsilon \tag{3}$$

тенгсизлик бажарилса, *A сонни $x+\infty$ га интилгандаги f нинг лимити* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

Шунингдек, $x_0 - \infty$ интилганда ва A чекли сон бўлмаган ҳоллар ҳам юқоридагига ўхшаш таърифланади.

1-мисол. Функция лимитининг таърифидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликларни исбот қилинг:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-4) = -2$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{6x+2} = \frac{1}{2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x = \frac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x = +\infty$. $(a>1)$.

△. 1) Функция лимитининг „$\varepsilon-\delta$ тилидаги“ таърифига асосан ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун бирор $\delta>0$ топилиб, $|x-1|<\delta$ бўлганда $|f(x)-(-2)|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилиши керак. Бошқача айтганда,

$$|2x-4-(-2)| = |2x-2| = 2|x-1| < \varepsilon$$

тенгсизлик δ ни қандай танлаганда бажарилишини топамиз. Охирги тенгсизликдан кўринадики, $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$ бажарилса, $|f(x)+2|<\varepsilon$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Демак, $\lim\limits_{x\to 1}(2x-4) = -2$.

2) Аргумент чексизликка интилгандаги функция лимитининг таърифига асосан ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун барча $x>M$ ларда

$$\left|\frac{3x-1}{6x+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

тенгсизлик бажариладиган M топилишини кўрсатиш керак. Бу тенгсизликни ихчамлаб

$$\left|\frac{3x-1}{6x+2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{|3x+1|} < \varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу ерда $x>0$ бўлгани учун

$$\frac{1}{3x+1} < \varepsilon$$

тенгсизликни ечиш етарлидир. Бундан қуйидаги

$$x > \frac{1-\varepsilon}{3\varepsilon}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шундай қилиб, масалан $M = \frac{1}{3\varepsilon}$ деб олсак, барча $x>M$ ларда $(*)$ тенгсизлик бажарилади. Демак,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{6x+2} = \frac{1}{2}.$$

3) Ихтиёрий $\varepsilon < 0$ учун шундай $\delta > 0$ топилиб, $\left|x-\frac{\pi}{6}\right| < \delta$ дан $\left|\sin x-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ бўлишини кўрсатиш керак. Агар $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ва $|\sin x_1-\sin x_2| < |x_1-x_2|$ ларни ҳисобга олсак, исботлаш керак бўлган тенгсизликдан

$$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right| = \left|\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\right| < \left|x-\frac{\pi}{6}\right| < \varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $\delta=\varepsilon$ деб олсак, $\left|x-\frac{\pi}{6}\right| < \delta$ дан $\left|\sin x-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ га эга бўламиз. Шуни исботлаш керак эди.

4) Бу мисолда ихтиёрий $k > 0$ учун бирор M топилиб, барча $x > M$ ларда $\log_a x > k$ тенгсизлик бажарилишини кўрсатиш керак. Ихтиёрий $k > 0$ ни олиб, $\log_a x > k$ тенгсизликни қараймиз. Энди $M=a^k$ деб олсак, барча $x > M$ ларда $\log_a x > k$ бажарилади. Демак,

$$\lim_{x\to\infty}\log_a x = +\infty. \blacktriangle$$

□. Функция лимитининг таърифидан фойдаланиб, қуйидаги ифодаларни исботланг:

80. $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)=1$;

81. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}=3$;

82. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$;

83. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$;

84. $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$;

85. $\lim\limits_{x\to 1}\cos x=0$;

86. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2}{3}$;

87. $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=+\infty\ (a > 1)$;

88. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$;

89. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$. ■

7-§. Функциянинг лимитини топиш

1-теорема. *Агар* $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ *ва* $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ *лар мавжуд бўлса:*

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (C — ўзгармас сон);

3) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

$$4)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0)$$

бўлади.

Баъзи ифодаларнинг лимитини топишда қуйидаги лимитлардан фойдаланилади:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (1-ажойиб лимит);

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2{,}71828\ldots$ (2-ажойиб лимит);

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$; б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

1-мисол. Қуйидаги лимитларни топинг:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^8+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-5x+25}{x^2-25}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+5}{x^3+2x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-7x})$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)$.

△.1) Бу каср суратининг ҳам, махражининг ҳам лимити мавжуд ва махражининг лимити нолдан фарқли. Шунинг учун 1-теореманинг 4-пунктидан фойдаланиш мумкин:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^8+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(4x^5+9x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^6+x^8+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(4x^5)+\lim\limits_{x\to 1}(9x)+7}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^6)+\lim\limits_{x\to 1}(x^8)+1}=$$

$$=\frac{4\cdot 1+9\cdot 1+7}{3\cdot 1+1+1}=\frac{4+9+7}{3+1+1}=\frac{20}{5}=4.$$

2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-5x+25}{x^2-25}$ ни топишда касрнинг лимитини топиш қоидасидан бевосита фойдаланиш мумкин эмас, чунки $x\to 5$ да касрнинг сурати ҳам, махражи ҳам нолга интилади. Демак, $\frac{0}{0}$ шаклидаги аниқмасликка эга бўламиз. Агар $x\neq 5$ бўлса,

$$\frac{2x^2-5x-25}{x^2-25}=\frac{(x-5)(2x+5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{2x+5}{x+5}$$

бўлади. Шундай қилиб $x=5$ кирмайдиган соҳада

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+25}{x^2-25}, \text{ ва } \varphi(x)=\frac{2x+5}{x+5}$$

функциялар тенг, демак уларнинг лимити ҳам тенг бўлади, $\varphi(x)$ нинг лимити эса бевосита топилади:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-5x-25}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{2x+5}{x+5}=\frac{2\cdot 5+5}{5+5}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{3x^6+x^2+1}$ ҳам $\frac{0}{0}$ шаклдаги аниқмасликдан иборат. Шунинг учун агар $x\neq 2$ бўлса,

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)}=\frac{x-3}{x-5}$$

бўлади. Демак

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)}=\lim_{x+2}\frac{x-3}{x-5}=\frac{2-3}{2-5}=\frac{1}{3}.$$

4) Бу мисолда $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3+x+5)=\infty$ ва $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2x+1)=$ $=\infty$ бўлади. Демак $\frac{\infty}{\infty}$ шаклидаги аниқмасликка тўғри келамиз. Бу аниқмасликдан қутулиш учун касрнинг сурат ва махражини x^3 га бўлиб қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+5}{x^3+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\frac{2+0+0}{1+0+0}=2.$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-7x})$ $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}=\infty$ ва $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-7x}=\infty$ бўлгани учун $\infty-\infty$ шаклидаги аниқмасликка тўғри келамиз. Бу аниқмасликдан қутулиш учун берилган ифодани ўзининг қўшмасига кўпайтириб бўламиз:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-7x})=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-7x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-7x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-7x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)-(x^2-7x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-7x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-7x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}}\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}}}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=4.$$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)$ ни топишда ҳам $\infty-\infty$ шаклидаги аниқмасликка тўғри келамиз. Худди 5) мисолдаги каби, ўзининг қўшмасига кўпайтириб ва бўлиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+1}-3x)(\sqrt{9x^2+1}+3x)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(9x^2+1)-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+x}=0.\blacktriangle$$

□. Қуйидаги лимитларни топинг:

90. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+1}{x^3+1}$. *Жавоб.* $-\frac{3}{2}$.

91. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-x+3}{x^2-1}$. *Жавоб.* 3.

92. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3-3x^3+x}{7x}$. *Жавоб.* $\frac{1}{7}$.

93. $\lim\limits_{x\to3}\frac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}$. *Жавоб.* 7.

94. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$. *Жавоб.* 3.

95. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$. *Жавоб.* 0.

96. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+3}{5x^3+x^2-8}$. *Жавоб.* $\frac{2}{5}$.

97. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-5x+7}{3x^2+4x-2}$. *Жавоб.* 2.

98. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. *Жавоб.* $\frac{1}{2}$.

99. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$. *Жавоб.* $-\frac{1}{2}$.

100. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$. *Жавоб.* 0.

101. $\lim\limits_{x+\infty}(\sqrt{x^2+3x-3}-x)$. *Жавоб.* $\frac{3}{2}$.

2-мисол. Қуйидаги лимитларни топинг:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n}\right)^n$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$; 6) $\lim\limits_{x+0}\sqrt[x]{1-3x}$.

△.1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ ни топиш учун биринчи ажойиб лимитдан қуйидагича фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5.$$

2) Бу мисолни ҳам, биринчи ажойиб лимитдан фойдаланиб ечамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$ ни топиш учун аввал бу ердаги касрнинг суратини кўпайтма шаклига келтириб кейин биринчи ажойиб лимитдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos a\cdot\sin x}{x}=$$

$$=2\cos a\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cos a\cdot 1=2\cos a.$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n}\right)^n$ ни топишда иккинчи ажойиб лимитдан фойдаланамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=e^a.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ ни топиш учун аввал асосининг бутун қисмини ажратиб, $t=\frac{2}{2x+1}$ белгилашни киритамиз. Кейин иккинчи ажойиб лимитдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}+\frac{1}{2}}=$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2}}=1\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]=e.$$

б) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-3x}$ ни ҳам иккинчи ажойиб лимитдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{x\to0}\sqrt[x]{1-3x}=\lim_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}(1-3x)^{-\frac{1}{3x}\cdot(-3)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to0}(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\right]^{-3}=e^{-3}=\frac{1}{e^{3}}.\ \blacktriangle$$

□. Қуйидаги лимитларни топинг:

102. $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}x.$ *Жавоб.* 1.

103. $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{x}{n}.$ *Жавоб.* x.

104. $\lim\limits_{x\to\pi}\sin2x\cdot\operatorname{ctg}x.$ *Жавоб.* 2.

105. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}.$ *Жавоб.* $\frac{a}{b}$.

106. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}.$ *Жавоб.* $\frac{1}{2}(n-m)(m-n)$

107. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}.$ *Жавоб.* $\frac{1}{2}$.

108. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$ *Жавоб.* $\frac{1}{2}$.

109. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}.$ *Жавоб.* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

110. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}.$ *Жавоб.* e^{2}.

111. $\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{n}{x}}.$ *Жавоб.* nk.

112. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)x^{4}.$ *Жавоб.* 0.

113. $\lim\limits_{x\to0}(1+4\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}.$ *Жавоб.* e^{4}.

114. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{(1+4x)^{3}}.$ *Жавоб.* e^{12}.

115. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+\sin x}.$ *Жавоб.* e.

116. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos\alpha)^{2\sec x}.$ *Жавоб.* e^{2}. ■

8-§. Чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар. Уларни солиштириш

1-таъриф. $\alpha(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин. Агар $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ бўлса, $\alpha(x)$ функцияни $x\to a$ да *чексиз кичик миқдор* дейилади.

2-таъриф. Агар $\alpha(x)x=\infty$ нинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$ бўлса, $\alpha(x)$ ни $x\to\infty$ да *чексиз кичик миқдор* дейилади.

3-таъриф. $\beta(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ бўлса, $\beta(x)$ ни $x\to a$ да *чексиз катта миқдор* дейилади. $x\to\infty$ даги *чексиз катта миқдор* ҳам худди шундай аниқланади.

Чексиз кичик миқдорлар қуйидаги хоссаларга эга:

1. Чекли сондаги чексиз кичик миқдорларнинг йиғиндиси яна чексиз кичик миқдор бўлади.

2. Ихтиёрий сондаги чексиз кичик миқдорларнинг кўпайтмаси яна чексиз кичик миқдор бўлади.

3. Чегараланган функция билан чексиз кичик миқдорнинг кўпайтмаси яна чексиз кичик миқдор бўлади.

Чексиз кичик миқдорларни солиштириш. Агар $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз кичик миқдорлар бўлиб,

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C \qquad \text{(бу ерда } C\neq 0 \text{ ўзгармас сон)}$$

тенглик ўринли бўлса, $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ ларни *бир хил тартибдаги чексиз кичик миқдор* дейилади. Агар $C=1$ бўлса, $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ ларни *эквивалент чексиз кичик миқдорлар* дейилади ва $\alpha(x)\sim\beta(x)$ кўринишда белгиланади.

Агар $C=0$ бўлса, $\alpha(x)$ чексиз кичик миқдорни $\beta(x)$ чексиз кичик миқдорга нисбатан *юқори тартибли чексиз кичик миқдор* дейилади.

Агар $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n}=C$ (бу ерда $0<|C|<\infty$) бўлса, $\alpha(x)$ чексиз кичик миқдорни $\beta(x)$ чексиз кичик миқдорга нисбатан *n-тартибли чексиз кичик миқдор* дейилади.

1-мисол. Қуйидаги функцияларнинг чексиз кичик миқдор эканлигини кўрсатинг:

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ $\quad x\to 1$ да.

2) $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ $\quad x\to 0$ да.

3) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad x\to\infty$ да.

△.1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ функциянинг чексиз кичик миқдор эканлигини кўрсатиш учун

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+1}=0$$

лимитни ҳисоблаш етарлидир.

2) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ функциядаги x, $x\to 0$ да чексиз кичик миқдор ва $\sin\frac{1}{x}$ чегараланган функция

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$$

бўлгани учун берилган функция чексиз кичик миқдор бўлади. Яъни

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

3) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ функция эса, $\sin x$ чегараланган ва $\frac{1}{x}$, $x\to\infty$ да чексиз кичик миқдор бўлгани сабабли, чексиз кичик миқдор бўлади. Яъни

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0. \ \blacktriangle$$

2-мисол. Қуйидаги чексиз кичик миқдорларни $\varphi(x)=x$ чексиз кичик миқдорлар билан $x\to 0$ да солиштиринг:

1) $5x$; 2) x^3; 3) $4\sin x$; 4) $\sin^3 x$; 5) $\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$.

△.1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}5=5$. Демак, $5x$ билан x лар $x\to 0$ да бир хил тартибдаги чексиз кичик миқдорлардир.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$. Демак x^3, $x\to 0$ да x га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор бўлиб, x эса x^3 га нисбатан қуйи тартибли чексиз кичик миқдордир, яъни $x\to 0$ да x, x^3 га нисбатан нолга секин интилади.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin x}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=4.$

Демак, $4\sin x$ билан x лар, $x\to 0$ да бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлардир.

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\sin^2x\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot1 = 0.$

Демак. $\sin^3x$ функция x га нисбатан $x\to0$ да юқори тартибли чексиз кичик миқдордир.

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg^2x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\left[\frac{tg^2x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\cdot\frac{1}{x}\right] = 0.$

Демак, tg^2x, x га нисбатан $x\to0$ да юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. ▲

□. Қуйидаги функцияларнинг чексиз кичик миқдор эканлигини кўрсатинг:

117. $f(x) = \frac{2x-6}{x^3+1}$, $x\to3$ да;

118. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, $x\to\infty$ да;

119. $f(x) = (x-2)^2\sin^2\frac{1}{x-2}$, $x\to2$ да;

120. $f(x) = \sqrt{9+x}-3$, $x\to3$ да;

$\varphi(x) = x$ чексиз кичик миқдор билан $x\to0$ да қуйидаги чексиз кичик миқдорларни солиштиринг:

121. ax. 122. $3x^2$. 123. $\sqrt[4]{\sin x}$. 124. $tg\,3x$.
125. $\sqrt{16+x}-4$. 126. $\sin x^3$. 127. $2\sin^3x-x^4$.
128. $\sin2x-2\sin x$. ■

9-§. Бир томонли лимитлар

1-таъриф. Агар ушбу $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}f(x)$ лимит мавжуд бўлса, у сонни f функциянинг x_0 нуқтадаги *чап лимити* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0}f(x).$$

„$\varepsilon-\delta$ тилида“ бу қуйидагича таърифланади: ҳар қандай $\varepsilon>0$ берилганда ҳам шундай $\delta>0$ ни топиш мумкин бўлсаки, X соҳанинг $0<x_0-x<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма x нуқталари учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ ўринли бўлса, A га $f(x)$ нинг x_0 нуқтадаги чап лимити дейилади.

2-таъриф. Агар ушбу $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}f(x)$ лимит мавжуд бўлса, у сонни f функциянинг x_0—нуқтадаги *ўнг лимити* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0}f(x).$$

1-мисол. Қуйидаги функцияларнинг бир томонли лимитларини топинг:

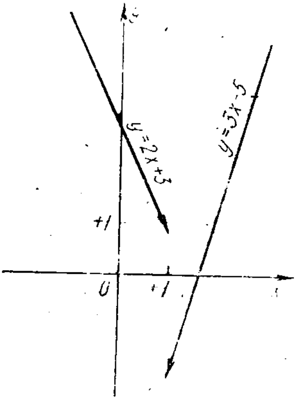
1) $f(x) = \begin{cases} \text{Агар } x \leqslant 1 \text{ бўлса, } -2x+3 \\ \text{Агар } x > 1 \text{ бўлса, } \quad 3x-5 \end{cases}$ $x \to 1$ да

2) $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}$, $x \to 0$ да.

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$, $x \to 1$ да.

4) $f(x) = \frac{5}{(x-2)^3}$, $x \to 2$ да.

5) $f(x) = \begin{cases} \text{Агар } x < 0 \text{ бўлса, } x \\ \text{Агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса, } x^2. \end{cases}$

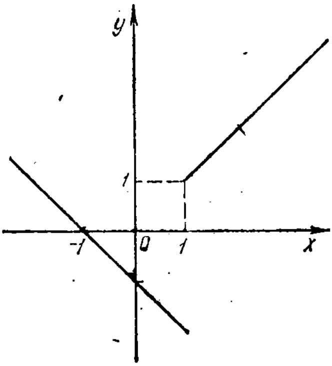


4.11- чизма

△. 1) Агар $x \leqslant 1$ бўлса, $f(x) = -2x+3$ бўлади. Демак, $x = 1$ даги чап лимит $f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 1$. Агар $x > 1$ бўлса, $f(x) = 3x-5$ бўлади. Шунинг учун $x = 1$ даги ўнг лимит $f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(3x-5) = -2$ бўлади (4.11- чизма).

2) Агар $x \leqslant 1$ бўлса, $|x-1| = -x+1$ бўлади. Демак,

$$f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{x^2-1}{-x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = -(x+1).$$



4.12- чизма

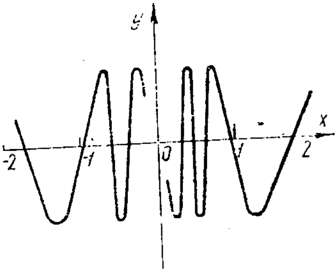
Агар $x > 1$ бўлса, $|x-1| = x-1$ бўлади. Демак, $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ экан. Шунинг учун $x = 1$ да чап лимит $f(1-0) = \lim\limits_{x\to x-0} f(x) = -2$ ва шу нуқтада ўнг лимит $f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 2$ бўлади (4.12- чизма).

3) Умумий ҳадлари $x_n = \frac{1}{2n}$ ва $x_n' = \frac{2}{2n+1}$ $(n=1, 2, 3 \ldots)$ бўлган кетма-кетликларни олай-

лик. У ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0$ ва

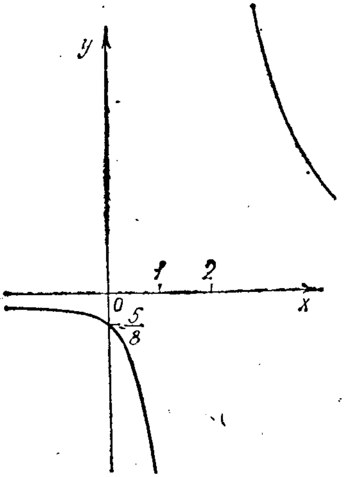
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\cos 2n\pi=1;\ \lim_{n\to\infty} f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}=0$$

бўлади. Демак, $x=0$ нуқтада $f(x)$ нинг ўнг лимити мавжуд эмас. $f(x)$ функция жуфт функция бўлгани учун, худди шундай, $x=0$ нуқтада чап лимити ҳам мавжуд бўлмайди (4.13- чизма).

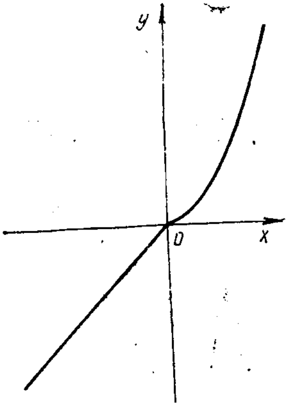


4.13- чизма

4) Агар $x<2$ бўлса, $x-2<0$ бўлади. У ҳолда $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-\infty$. Агар $x>2$ бўлса, $x-2>0$ бўлади. Демак, $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=+\infty$ бўлади. (4.14- чизма).



4.14- чизма



4.15- чизма

5) Агар $x<0$ бўлса, $f(x)=x$. Демак, $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=0$ ва $x>0$ бўлса, $f(x)=x^2$. Демак, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=0$ бўлади (4.15- чизма). ▲

□. Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқтадаги бир томонли лимитларини топинг:

129. $y = \frac{5}{2-x}$ $x = 2$ да. *Жавоб.* $y(2-0) = -\infty$,
$y(2+0) = +\infty$.

130. $y = 2^{\frac{1}{x}}$ $x = 0$ да. *Жавоб.* $y(0-0) = 0$,
$y(0+0) = +\infty$.

131. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x = 0$ да *Жавоб.* $y(-0-0) = -\frac{\pi}{2}$,
$y(0+0) = +\frac{\pi}{2}$.

132. $f(x) = \begin{cases} \text{Агар } x<0 \text{ бўлса, } x+1, \\ \text{агар } x>0 \text{ бўлса, } x^2-1. \end{cases}$ *Жавоб.* $f(0-0) = 1$,
$f(0+0) = -1$.

133. $f(x) = \begin{cases} \text{Агар } x\leqslant 2 \text{ бўлса, } x^2-4. \\ \text{агар } x>2 \text{ бўлса, } 6-2x. \end{cases}$ *Жавоб.* $f(2-0) = 0$,
$f(2+0) = 2$.

134. $f(x) = \begin{cases} \text{Агар } x \leqslant -1 \text{ бўлса, } 4x+5, \\ \text{агар } x > -1 \text{ бўлса, } x^2-4x. \end{cases}$
Жавоб. $f(-1-0) = 1$,
$f(-1+0) = +5$.

135. $f(x) = \operatorname{tg}x$, $x = \frac{\pi}{2}$ да. *Жавоб.* $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = +\infty$,
$f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = -\infty$.

136. $f(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$, $x = 3$ да. *Жавоб.* $f(3-0) = -1$,
$f(3+0) = +1$.

10-§. Функциянинг узлуксизлиги

1-таъриф. $y = f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, X нинг x_0 лимит нуқтаси ўзига тегишли бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун бирор $\delta > 0$ сон топилиб, x_0 нуқтанинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ атрофидаги барча $x \in X$ лар учун

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, f функция x_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади.

Функциянинг x_0 нуқтадаги узлуксизлиги функция лимитининг таърифига асосан

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ифодага тенг кучлидир. Демак, f функция x_0 нуқтада узлуксиз деган жумла қуйидаги иккита: 1) Лимит $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ мавжуд; 2) бу лимит x_0 нуқтадаги f функциянинг $f(x_0)$ қийматига тенг, деган талабни ўз ичига олади.

2-таъриф. X соҳада ётувчи x_0 ва $x_0+\Delta x$ нуқталарни олайлик, бунда $\Delta x \gtrless 0$, $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ айирмага f функциянинг x_0 *нуқтадаги орттирмаси* дейилади.

Бу тушунча ёрдамида функциянинг нуқтадаги узлуксизлигини қуйидагича таърифлаш мумкин.

3-таъриф. Агар x_0 нуқтадаги аргумент орттирмаси $\Delta x \to 0$ да функция орттирмаси Δy ҳам нолга интилса, f функция x_0 *нуқтада узлуксиз* дейилади.

Агар f функция аниқланиш соҳасидаги бирор x_0 нуқтада узлуксиз бўлмай қолса, бундай нуқтада функция *узилишга эга* дейилади. Функциянинг узилиш нуқтаси шу нуқта атрофидаги характерига қараб икки турга бўлинади.

4-таъриф. Агар x_0 нуқтада, чекли $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$ лар мавжуд бўлиб, $f(x_0-0)\neq$ $\neq f(x_0+0)$ бўлса, f ни x_0 нуқтада *биринчи тур узилишга эга* дейилади ва $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ ни функциянинг x_0 *нуқтадаги сакраши* дейилади.

5-таъриф. Агар $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ лардан бирортаси $+\infty$ ёки $-\infty$ га тенг бўлса ёки умуман мавжуд бўлмаса, f ни x_0 да *иккинчи тур узилишга эга* дейилади.

1-мисол. Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини текширинг:

1) $f(x)=x^2$; 2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$;

3) $f(x)=\frac{1}{x}$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$;

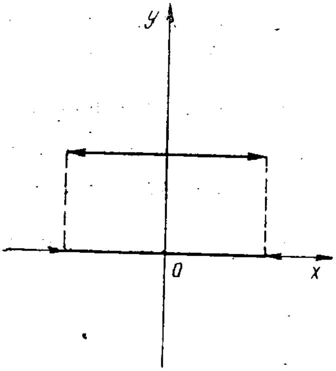
5) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$; 6) $f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$.

△. 1) $f(x)=x^2$ функциянинг аниқланиш соҳаси R дан иборат ва ихтиёрий $x_0\in R$ нуқтада узлуксиздир. Чунки $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0^2=$ $=(2x_0+\Delta x)\cdot\Delta x^2$, яъни Δx нолга интилганда Δy ҳам нолга интилади.

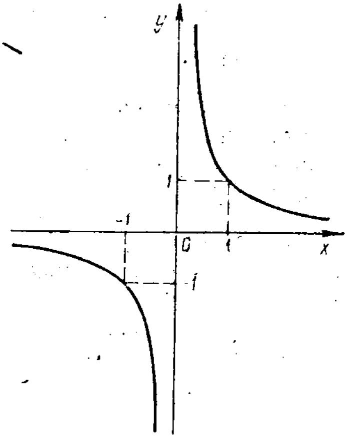
2) Агар $|x|<1$, яъни $-1<x<1$ бўлса, $n\to\infty$ да x^{2n} нолга интилади. Шунинг учун $|x|<1$ да $f(x)=1$. Агар

$|x| > 1$ бўлса, $n \to \infty$ да $x^{2n} \to \infty$. Шунинг учун $|x| > 1$ бўлса, $f(x) = 0$ бўлади. Агар $x = \pm 1$ бўлса, $x^{2n} = 1$ ва $f(1) = \frac{1}{2}$ бўлади. Демак, $f(-1-0) = 0$ ва $f(-1+0) = 1$, $f(-1) = \frac{1}{2}$ экан, яъни $x = -1$ нуқтада функциянинг сакраши 1 га тенг экан. Худди шундай $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$ ва $f(1) = \frac{1}{2}$ бўлади. Шунинг учун берилган функциянинг $x = 2$ нуқтадаги сакраши ҳам 1 га тенг. Демак, бу функция $x_2 = -1$ ва $x_2 = 1$ нуқталарда биринчи тур узилишга эга (4.16-чизма).

3) $f(x) = \frac{1}{x}$ функция $x_0 = 0$ нуқтада аниқланган эмас, аммо $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = \infty$ ва $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ бўлади, демак, бу функция $x_0 = 0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга (4.17-чизма).

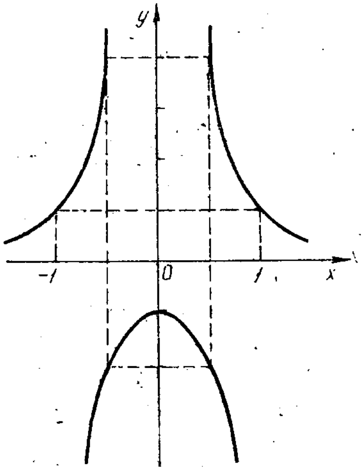


4.16- чизма



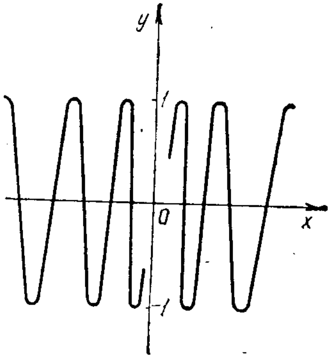
4.17- чизма

4) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ функция $x_{1,2} = \pm 1$ нуқталарда аниқланган эмас. $\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{x^3 - 1} = -\infty$ ва $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$ бўлади. Демак, бу функция ҳам $x_1 = -1$ ва $x_2 = +1$ нуқталарда иккинчи тур узилишга эга экан (4.18-чизма).



4.18- чизма

5) $y=\sin\frac{1}{x}$ функция барча $x\neq 0$ нуқталарда аниқланган. $\frac{1}{x}$ функция $\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ оралиқда ўзгарганда берилган функция $[-1, 1]$ оралиқдаги барча қийматларни қабул қилади. $x_n=\frac{2}{[4n+1]\pi}$ нуқталарда функциянинг қиймати 1 га $x_n=\frac{2}{(4n-1)\pi}$ нуқталарда -1 га тенг бўлади. Бундан кўринадики, x нолга яқинлашган сари функциянинг -1 билан $+1$ орасидаги тебраниши тезлашади, яъни $x=0$ нуқтанинг атрофида чексиз кўп ўхшаш тербанишга эга бўлади. $x=0$ нуқтанинг ўзида функция умуман аниқланган эмас. Демак, бу функция $x=0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга (4.19- чизма).



4.19- чизма

□. Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини текширинг:

137. $f(x)=x^3$.

Жавоб. Узлуксиз.

138. $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

Жавоб. $x=1$ да иккинчи тур узилишга эга.

139. $f(x)=\frac{x^2-2}{|x-2|}$.

Жавоб. $x=2$ да биринчи тур узилишига эга.

140. $f(x)=\begin{cases}\text{Агар } x\leqslant 3 \text{ бўлса, } -2x^2,\\ \text{агар } x>3 \text{ бўлса, } x\end{cases}$

Жавоб. $x=3$ да биринчи тур узилишга эга.

141. $f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}$.

Жавоб. $x=\frac{3}{2}$ да биринчи тур узилишга эга.

142. $f(x)=\begin{cases}\text{Агар } x\neq 0 \text{ бўлса, } e^{\frac{1}{x}}\\ \text{агар } x=0 \text{ бўлса, } 0.\end{cases}$

Жавоб. $x=0$ да иккинчи тур узилишга эга.

143. $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$.

Жавоб. $x=2$ да иккинчи тур узилишга эга.

144. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Жавоб. $x=0$ да биринчи тур узилишга эга.

145. $f(x)=\lg(x^2+3x)$.

Жавоб, $x=-3$ ва $x=0$ да иккинчи тур узилшга эга.

146. $f(x)=\begin{cases}\text{Агар } x<2 \text{ бўлса, } -\frac{1}{2}x^2,\\ \text{агар } x>2 \text{ бўлса } x.\end{cases}$

Жавоб. $x=1$ да биринчи тур узилишга эга. ■

V БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1- §. Функциянинг ҳосиласи ва унинг геометрик маъноси. Ҳосилани бевосита ҳисоблаш

Таъриф. $y=f(x)$ функция $X\in R$ тўпламда аниқланган ва x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Агар бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δy ни, доимо $x_0+\Delta x\in X(\Delta x\gtrless^{0}_{0})$ бўлгандаги аргумент орттирмаси Δx га нисбатининг Δx нолга интилгандаги лимити

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

мавжуд бўлса, бу сонни $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *ҳосиласи* дейилади.

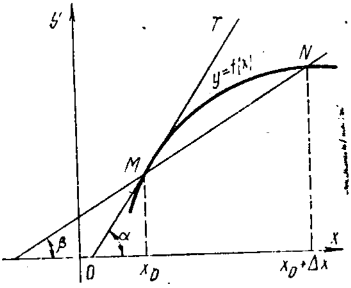
Функция ҳосиласи y', $f'(x_0)$ ёки $\frac{dy}{dx}$ символларнинг бирортаси билан белгиланади.

Агар $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи мавжуд бўлса, бу функцияни x_0 нуқтада *дифференциалланувчи* дейилади. Функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш амалини эса *дифференциаллаш амали* дейилади.

Энди ҳосиланинг геометрик маъносини қарайлик. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, x_0, $x_0+\Delta x\in[a, b]$ бўлса, ушбу

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

нисбат $(x_0, f(x_0))$ ва $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ нуқталардан ўтадиган кесувчининг ($\Delta x\neq 0$ бўлганда) бурчак коэффициентидан иборатдир (5.1- чизмага қаранг). Шунинг учун, агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $\Delta x\to 0$ да кесувчи, $(x_0, f(x_0))$ нуқтадан ўтган



5.1- чизма

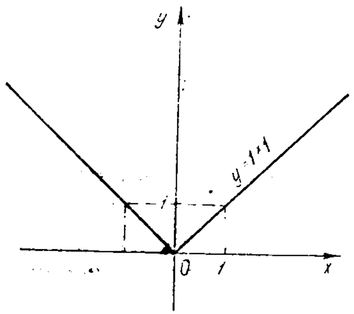
уринмага яқинлашиб боради. Демак, $f'(x_0)$ ҳосила бу уринманинг бурчак коэффициентидан иборат:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x};\ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha.$$

Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, шу нуқтада узлуксиз бўлади. $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши, унинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун зарурдир, аммо етарли эмас. Масалан, $y=|x|$ функцияни $[-1,\ 1]$ оралиқда қарасак, бу оралиқда узлуксиздир, аммо $x=0$ нуқтада бу функциянинг ҳосиласи мавжуд эмас. Чунки

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1 \quad \text{ва} \quad \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

бўлади.



5.2- чизма

Яъни $y=|x|$ функциянинг графигига, $x=0$ нуқтада уринма ўтказиш мумкин эмас. (5.2- чизма).

Бирор функциянинг ҳосиласини, бевосита ҳосиланинг таърифи ёрдамида ҳисоблаш учун қуйидаги амалларни бажариш керак:

I. x_0 нуқтага ихтиёрий Δx орттирма бериб, $y=f(x)$ функциянинг $x_0+\Delta x$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз:

$$y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x).$$

II. $y=f(x)$ функциянинг $x_0+\Delta x$ нуқтадаги қийматидан x_0 нуқтадаги қийматини айириб, функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

III. Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини топамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

IV. Δx нолга интилганда юқоридаги нисбатнинг лимитини ҳисоблаймиз. Бу сон, $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи бўлади.

1- мисол. Ҳосиланинг таърифидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг ҳосиласини топинг. 1) $y=2x^2+3x$; $y=\sqrt{x}$; $y=\sin 2x$.

$\triangle$. Юқоридаги таърифга амал қилиб, бирин-кетин бу функцияларнинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

1) $y=2x^2+3x$.

I. $y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)=2x^2+4x\cdot\Delta x+$ $+2\Delta x^2+3x+3\cdot\Delta x=2x^2+3x+4x\cdot\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2$;

II. $\Delta y=[2x^2+3x+4\cdot\Delta x\cdot x+3\Delta x+2(\Delta x)^2]-2x^2-$ $-3x=4x\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2$;

III. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4x\Delta x+3\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}=4x+3+2\Delta x$;

IV. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x+3+2\cdot\Delta x)=4x+3$.

Демак, бу функциянинг ихтиёрий x нуқтадаги ҳосиласи

$$y'=4x+3$$

экан.

2) $y=\sqrt{x}$.

Бу функция учун

I. $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$;

II. $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$;

III. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$;

IV. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Бу функция $[0;+\infty[$ оралиқда аниқланган эди. Шунинг учун $x=0$ нуқтада функциянинг ўнг ҳосиласи ҳақидагина гапириш мумкин. Кўрамизки, бу нуқтада ўнг ҳосила ҳам мавжуд эмас. Ҳақиқатан, $x=0$ нуқтада функция графигига ўтказилган ўнг уринма вертикал бўлади.

3) $y=\sin 2x$. ▲

Бу функция учун

I. $y+\Delta y=\sin 2(x+\Delta x)$;

II. $\Delta y=\sin 2(x+\Delta x)-\sin 2x=2\cos(2x+\Delta x)\cdot\sin\Delta x$;

III. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos(2x+\Delta x)\cdot\sin\Delta x}{\Delta x}$;

IV. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(2x+\Delta x)\cdot\sin\Delta x}{\Delta x}=$

$=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(2x+\Delta x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=2\cos 2x$. ▲

☐ Ҳосиланинг таърифидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини ҳисобланг:

1. $y=2x^2-5x+1$. *Жавоб.* $4x-5$.
2. $y=\cos 4x$. *Жавоб.* $-4\sin 4x$.
3. $y=\sqrt{3x-1}$. *Жавоб.* $\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$.
4. $y=\operatorname{ctg} x$. *Жавоб.* $-\frac{1}{\sin^2 x}$.
5. $y=\frac{1}{x}$. *Жавоб.* $-\frac{1}{x^2}$.
6. $y=a^x$. *Жавоб.* $a^x\ln a$.
7. $y=\ln x$. *Жавоб.* $\frac{1}{x}$.
8. $y=\sin 5x$. *Жавоб.* $5\cos 5x$.
9. $y=x^3$. *Жавоб.* $3x^2$.
10. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$. *Жавоб.* $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$. ■

2- §. Дифференциаллаш қоидалари ва элементар функцияларнинг ҳосилалари

Ҳосила тушунчаси хилма-хил масалаларни ечишда кенг қўлланилади. Аммо ҳосилани ҳисоблашда, ҳар гал юқорида келтирилган бир неча босқичдан иборат лимит ҳисобланмайди.

Амалда ҳосила дифференциаллаш қоидалари ва элементар функциялар ҳосилаларининг жадвали ёрдамида ҳисобланади.

1. Дифференциаллаш қоидалари. $f(x)$, $g(x)$ функциялар дифференциалланувчи функциялар бўлиб, C ўзгармас бўлсин.

I. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$.

II. $[cf(x)=cf'(x)$.

III. $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

IV. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, бу ерда $g(x)\neq 0$.

1- мисол. Дифференциаллаш қоидаларидан ва элементар функциялар ҳосилалари жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосиласини топинг:

1) $y=x^3-3x+5$; 2) $y=\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{3x^3}$;

3) $z=x^4(3-\frac{x}{2}+3x^2)$; 4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$;

5) $\varphi(t)=\frac{8}{2\sin t+5\cos t}$; 6) $\psi(t)=\frac{\sin t}{1-\operatorname{ctg} t}$.

Асосий элементар функциялар ҳосилаларининг жадвали

№	Функция	Ҳосиласи	Аргументининг ўзгариш соҳасига чегаралар
1	$c(\text{const})$	0	агар $\alpha \in R$ бўлса, $x > 0$ ва $x \in N$ бўлса, $x \in R$.
2	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	
3	a^{x}	$a^{x}\ln a$	$x \in R$ $(a>0,\ a \neq 1)$
4	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$x \in R+$ $(a>0,\ a \neq 1)$
5	$\sin x$	$\cos x$	
6	$\cos x$	$-\sin x$	
7	$\mathrm{tg}\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$
8	$\mathrm{ctg}\,x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi\ \ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$
9	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
10	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
11	$\mathrm{arctg}\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
12	$\mathrm{arcctg}\,x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

△. 1) $y' = (x^3 - 3x + 5)'$ ифодани I қоидага асосан

$$y' = (x^3)' - (3x)' + (5)'$$

кўринишда ёзиб оламиз. Энди II қоидани эътиборга олиб, жадвалдан фойдалансак, берилган функциянинг ҳосиласи

$$y' = 3x^2 - 3$$

функциядан иборат эканини топамиз.

2) Агар каср ва манфий даражани эътиборга олсак, берилган функцияни

$$y = x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{1}{3}} + x^{-2} - \frac{2}{3}x^{-3}$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. Энди I ва II қоидаларни қўлланиб, жадвалдан фойдалансак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{3}{4}} + (-2)\cdot x^{-3} - \frac{2}{3}(-3)x^{-4} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4}.$$

3) Бу мисолни икки хил усул билан ечиш мумкин:

1- усул. III қоидадан фойдаланиб ечиш:

$$z' = (x^4)' \left(3 - \frac{x}{2} + 3x^2\right) + x^4\left(3 - \frac{x}{2} + 3x^2\right)' =$$

$$= 4x^3\left(3 - \frac{x}{2} + 3x^2\right) + x^4\left(-\frac{1}{2} + 6x\right) =$$

$$= 12x^3 - 2x^4 + 12x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 6x^5 = 18x^5 - 2\frac{1}{2}x^4 + 12x^3.$$

2- усул. Аввал қавсни очиб, кейин бевосита ҳосилани ҳисоблаш:

$$z = 3x^4 - \frac{1}{2}x^5 + 3x^6.$$

$$z' = 18x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 12x^3.$$

Бу мисолдан кўринадики функцияни аввал соддалаштириб, кейин ҳосилани ҳисоблаш қулайроқ бўлади.

4) Бу $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ функциянинг ҳосиласини топишда IV қоидадан фойдаланамиз:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot (x^2+1) - x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}.$$

5) Бу мисолни ечишда ҳам IV қоидадан фойдаланамиз:

$$\varphi'(t) = \left(\frac{8}{2\sin t + 5\cos t}\right)' = -\frac{8(2\sin t + 5\cos t)'}{(2\sin t + 5\cos t)^2} =$$

$$= \frac{-8(2\cos t - 5\sin t)}{(2\sin t + 5\cos t)^2} = \frac{40\sin t - 16\cos t}{(2\sin t + 5\cos t)^2}.$$

6) $$\psi' t = \left(\frac{\sin t}{1 - \operatorname{ctg} t}\right)' = \frac{(\sin t)'(1 - \operatorname{ctg} t) - \sin t(1 - \operatorname{ctg} t)'}{(1 - \operatorname{ctg} t)^2} =$$

$$= \frac{\cos t(1 - \operatorname{ctg} t) - \sin t\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{(1 - \operatorname{ctg} t)^2} =$$

$$= \frac{\cos t - \frac{\cos^2 t}{\sin t} - \frac{1}{\sin t}}{(1 - \operatorname{ctg} t)^2} = \frac{\sin t \cos t - \cos^2 t - 1}{\sin t(1 - \operatorname{ctg} t)^2}. \ \blacktriangle$$

2- мисол. Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқтадаги ҳосиласини ҳисобланг:

1) $f(x) = \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{x}$, $x = 0{,}01$; 2) $z = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$, $t = \frac{\pi}{8}$.

△. 1) Аввал қавсни очиб касрни соддалаштирамиз, кейин ҳосилани ҳисоблаймиз:

$$f(x)=\frac{1-2\sqrt{x}+x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+1=x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}+1;$$

$$f'(x)=-x^{-2}-2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Энди бу ифодадаги x ўрнига $x=0{,}01$ қийматини қўйиб $f'(0{,}01)$ ни топамиз:

$$f'(0{,}01)=-\frac{1}{(0{,}01)^2}+\frac{1}{\sqrt{0{,}01^3}}=-100^2+10^3=-9000.$$

2) IV қоидага асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$z'=\frac{(\sin t)'\ (1+\cos t)-(1+\cos t)\sin t}{(1+\cos t)^2}=$$

$$=\frac{\cos t(1+\cos t)-(-\sin t)\cdot\sin t}{(1+\cos t)^2}=\frac{\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}{(1+\cos t)^2}=\frac{1}{1+\cos t}.$$

Бу ифодада t ўрнига $t=\frac{\pi}{3}$ қийматни қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$z'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.\ ▲$$

□. Ҳосилани ҳисоблаш қоидаларидан ва жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосиласини топинг.

11. $y=3x^3+2x^2-x+5.$ *Жавоб.* $9x^2+4x-1.$

12. $y=\frac{2x^2-x+3}{x^2+x+1}.$ *Жавоб.* $\frac{3x^2-2x-4}{(x^2+x+1)}.$

13. $y=x+\sqrt{x}.$ *Жавоб.* $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

14. $y=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}x^{10}.$ *Жавоб.* $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+5x^9.$

15. $y=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{5x^5}.$ *Жавоб.* $1-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^6}.$

16. $y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$ *Жавоб.* $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right).$

17. $y=\sqrt[3]{(4+3x)^2}.$ *Жавоб.* $\frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}.$

18. $y=\frac{5x}{(5-2x)^3}.$ *Жавоб.* $\frac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}.$

19. $y=x^2\cos x.$ *Жавоб.* $x\ (2\cos x-x\sin x).$

20. $y=\frac{\cos x}{x^2}$. *Жавоб.* $-\frac{x\sin x+2\cos x}{x^3}$.

21. $y=\frac{x^2}{x^2+1}$. *Жавоб.* $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

22. $y=\sqrt{x}\cdot\cos x$. *Жавоб.* $\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{x}}$.

23. $y=2\cdot e^x+\ln x$. *Жавоб.* $2e^x+\frac{1}{x}$.

24. $y=\frac{e^x+\sin x}{e^x}$. *Жавоб.* $\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$.

25. $y=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. $f'(1)$ ни ҳисобланг. *Жавоб.* $\frac{1}{8}$.

26. $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ни ҳисобланг. *Жавоб.* 2.

27. $y=\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$. *Жавоб.* $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4\sin^3\frac{\varphi}{2}}$.

28. $y=e^x(\cos+\sin x)$. *Жавоб.* $2e^x\cos x$.

29. $f(x)=\sqrt{x^2+7}$. $f'(3)$ ни ҳисобланг. *Жавоб.* $\frac{3}{4}$.

30. $y=\frac{\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$. $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ни ҳисобланг. *Жавоб.* $-2\sqrt{3}$.

3-§. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

Агар $y=f(u)$ бўлиб, $u=\varphi(x)$ бўлса, яъни y x билан оралиқ аргумент орқали боғланган бўлса, y ни x нинг *мураккаб функцияси* дейилади.

1-мисол. $y=\sin^5x$, бу ерда $u=\varphi(x)=\sin x$; $y=f(u)=u^5$, яъни $f(u)=\sin^5x$.

Мураккаб функциянинг ҳосиласи, унинг оралиқ аргумент бўйича ҳосиласини оралиқ аргументнинг эркли аргумент бўйича ҳосиласига кўпайтмасига тенг, яъни:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad\text{ёки}\quad y'=f'(u)\cdot u'(x).$$

Агар $u=\varphi(x)$ бўлса, 2-параграфдаги жадвалда берилган формулаларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

1) $(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$; 2) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.

3) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$; 4) $(\mathrm{tg}\,u)'=\frac{1}{\cos^2u}\cdot u'$.

5) $(\mathrm{ctg}\,u)'=-\frac{1}{\sin^2u}\cdot u'$; 6) $(e^u)'=e^u\cdot u'$.

7) $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$; 8) $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$.

9) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$; 10) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.

11) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}u'$; 12) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}u'$.

2- мисол. Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш формулаларидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг ҳосиласини топинг:

1) $y = (1+2x)^5$; 2) $y = \sin x^3$;
3) $y = \ln\cos x$; 4) $y = \sqrt[5]{1+x^5}$;
5) $y = 3^{\sin x}$; 6) $y = \operatorname{ctg}\sqrt{x}$;
7) $y = \arccos x^2$; 8) $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$.

△. 1) Агар $u = 1+2x$ десак, $y = u^5$ бўлади ва $\frac{dy}{dx} = 5u^4$, $\frac{du}{dx} = 2$ ни ёзиш мумкин. Бундан ушбу $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 5u^4\cdot 2 = 10(1+2x)^4$ ифодага эга бўламиз.

2) Бу функция ҳосиласини топиш учун $u = x^3$ деб, кейин 2- формуладан фойдаланамиз:

$$y' = (\sin x^3)' = \cos x^3\cdot(x^3)' = 3x^2\cos x^3.$$

3) Бу ерда $u = \cos x$ деб, 8- формуладан фойдаланамиз:

$$y' = (\ln\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} =$$
$$= -\operatorname{tg} x.$$

4) $y = \sqrt[5]{1+x^5}$ функция ҳосиласини топиш учун $u = 1+x^5$ деб уни $y = \sqrt[5]{u'} = u^{\frac{1}{5}}$ кўринишга келтирамиз. Энди 1- формуладан фойдаланамиз:

$$y' = \frac{1}{5}u^{\frac{1}{5}-1}\cdot u' = \frac{1}{5}u^{-\frac{4}{5}}(1+x^5)' = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{u^4}}\cdot 5x^4 =$$
$$= \frac{x^4}{\sqrt[5]{(1+x^5)^4}}.$$

5) $y = 3^{\sin x}$ да y' ни топиш учун $u = \sin x$ деб 7-формулани қўлланамиз:

$$y' = (3^u)' = (3^u)'\ln 3\cdot u' = 3^{\sin x}\cdot\ln 3\cdot\cos x.$$

6) 5- формуладан фойдаланиб $y = \operatorname{ctg}\sqrt{x}$ нинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = (\mathrm{ctg}\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{x}}.$$

7) Бу мисолни ечишда 10- формуладан фойдаланамиз:

$$y' = (\arccos x^2)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot(x^2)' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

8) Ниҳоят 11- формуладан фойдаланиб охирги функция ҳосиласини топамиз:

$$y' = (\mathrm{arctg}(\ln x))' = \frac{1}{1+(\ln x)^2}(\ln x)' = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}. \ ▲$$

☐. Қуйидаги функцияларнинг ҳосиласини топинг:

31. $y=(1+x+2x^2)^3$. *Жавоб.* $3(4x+1)(2x^2+x+1)^2$.

32. $y=\sin 3x$. *Жавоб.* $3\cos 3x$.

33. $y=\ln(\mathrm{tg}x)$. *Жавоб.* $\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$.

34. $y=\sqrt[3]{(4+3x)^2}$. *Жавоб.* $\frac{2}{\sqrt[3]{3x+4}}$.

35. $y=\ln\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$. *Жавоб.* $\mathrm{ctg}x-\sin x\cos x$.

36. $y=\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}$. *Жавоб.* $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

37. $y=\mathrm{arctg}\frac{x}{a}$. *Жавоб.* $\frac{a}{a^2+x^2}$.

38. $y=\frac{1}{2}\ln\mathrm{tg}x+\ln\cos x$. *Жавоб.* $\frac{1}{\sin 2x}-\mathrm{tg}x$.

39. $y=\sin 3x+\cos\frac{x}{3}$. *Жавоб.* $3\cos 3x-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$.

40. $y=\mathrm{arctg}(\ln x)$. *Жавоб.* $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. ■

4- §. Юқори тартибли ҳосилалар

$y=f(x)$ функция (a, b) оралиқнинг барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, $y'=f'(x)$ (a, b) оралиқда аниқланган бўлади. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, агар у мавжуд бўлса, $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *иккинчи тартибли ҳосиласи* дейилади ва қуйидагича белгиланади: $y''(x_0)=f''(x_0)$ ёки $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.

Юқори тартибли ҳосилалар худди шундай аниқланади.

Учинчи тартибли ҳосила:

$$(y'')' = y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Тўртинчи тартибли ҳосила: $(y''')' = y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4}$.
n- тартибли ҳосила:

$$(y^{n-1})' = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Демак, функциянинг n- тартибли ҳосиласи унинг $n-1$- тартибли ҳосиласидан олинган ҳосиладир. Уни ҳисоблаш учун олдинги барча тартибли ҳосилаларни ҳисоблаш керак.

Иккита функция кўпайтмасининг n- тартибли ҳосиласи ушбу

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + nu'v^{(n-1)} +$$
$$+uv^{(n)}$$

формуладан фойдаланиб топилади. Бу формула Лейбниц формуласи дейилади. Хусусан,

$$(u\cdot v)' = u'v + u\cdot v'.$$

1- мисол. Қуйидаги функцияларнинг талаб қилинган тартибли ҳосиласини топинг.

1) $y = x^6 + 3x^3 - 5x^2 + 7$, $y^{(III)} = ?$ 2) $y = x^n$, $y^{(k)} = ?$

3) $y = \sin x$, $y^{(n)} = ?$ 4) $y = \sin 7x \cos 3x$, $y^{(n)} = ?$

5) $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + e^x$ функция $y'' - 4y' + 4y = e^x$ дифференциал тенгламани қаноатлантиришини исботланг.

△. 1) Берилган функцияни дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$(y)' = y' = 6x^5 + 9x^2 - 10x.$$

Энди y' ни дифференциаллаб, қуйидаги

$$(y')' = y'' = 30x^4 + 18x - 10$$

ифодага эга бўламиз ва ҳосил бўлган функцияни дифференциаллаб,

$$(y'')' = y''' = 120x^3 + 18$$

ни топамиз.

2) $y = x^n$ функциянинг биринчи, иккинчи ҳосилаларини топайлик:

$$y = x^n; \quad y' = n\cdot x^{n-1}; \quad y'' = n(n-1)\cdot x^{n-2} \ldots$$

Кўрамизки, бу функциянинг k- тартибли ҳосиласи

$$y^{(k)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)x^{n-k}\dots$$

кўринишга эга бўлади, математик индукция методини қўллансак $k \geqslant n+1$ бўлганда $y^{(k)}=0$ экани келиб чиқади.

3) Бу мисолда

$$y' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right);$$

Агар k- тартибли ҳосила

$$y^{(k)} = \sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$$

деб фараз қилсак,

$$y^{(k+1)} = \cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sin\left[x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

бўлади. Бу ердан, математик индукция методига асосан ихтиёрий n учун қуйидаги

$$y^{(n)} = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

натижага эга бўламиз.

4) $y = \sin 7x \cos 3x = \frac{1}{2}[\sin 10x + \sin 4x]$

бўлгани учун

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left[10^n \sin\left(10x+n\frac{\pi}{2}\right) + 4^n \sin\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

бўлади.

5) y' ва y'' ларни топамиз:

$$y' = (c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+e^x)' = 2c_1e^{2x}+c_2e^{2x}+2c_2xe^{2x}+e^x,$$

$$y'' = (y')' = (2c_1e^{2x}+c_2e^{2x}+2c_2xe^{2x}+e^x)' =$$

$$= 4c_1e^{2x}+2c_2e^{2x}+2c_2e^{2x}+4c_2xe^{2x}+e^x =$$

$$= 4c_1e^{2x}+4c_2e^{2x}+4c_2xe^{2x}+e^x.$$

Энди y'', y' ва y ларни берилган тенгламага қўямиз:

$$4c_1e^{2x}+4c_2e^{2x}+4c_2xe^{2x}+e^x-4(2c_1e^{2x}+c_2e^{2x}+2c_2xe^{2x}+$$

$$+e^x)+4(c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+e^x) = 4c_1e^{2x}+4c_2e^{2x}+4c_2xe^{2x}+$$

$$+e^x-8c_1e^{2x}-4c_2e^{2x}-8c_2xe^{2x}-4e^x+4c_1e^{2x}+$$
$$+4c_2xe^{2x}+4e^x=e^x.$$

$e^x=e^x$ айниятга эга бўлдик. Шуни исботлаш талаб қилинган эди. ▲

□. Қуйидаги функцияларнинг талаб қилинган тартибли ҳосиласини топинг:

41. $y=3x^5+x^3-2x+5,\ y'''=?$ *Жавоб.* $180x^2+6.$
42. $y=\ln x,\quad y^{(n)}=?$ *Жавоб.* $(-1)^n\ (n-1)!\ \frac{1}{x^n}.$
43. $y=x^3e^{2x},\ y''=?$ *Жавоб.* $e^{2x}[4x^3+12x^2+6x].$
44. $y=\frac{1}{x^2},\quad y'''=?$ *Жавоб.* $-\frac{24}{x^5}.$
45. $y=\cos x,\ y^{(n)}=?$ *Жавоб.* $\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$
46. $y=\sin^2 x,\ y'''=?$ *Жавоб.* $-4\sin 2x.$
47. $y=\mathrm{arctg}3x,\ y''=?$ *Жавоб.* $-\frac{54x}{(1+9x^2)^2}.$
48. $y=t^3+\sin 3t,\ y'''=?$ *Жавоб.* $6-27\cos 3t.$
49. $y=e^{-\varphi}\sin\varphi$ функция

$$y''+2y'+2y=0$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиришини исботланг.

50. $s=\frac{1}{t\cdot\ln ct}$ функция $t\frac{ds}{dt}+s=-ts^2$ дифференциал тенгламани қаноатлантиришини исботланг.

2-мисол. Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибли ҳосиласини Лейбниц формуласидан фойдаланиб топинг:

1) $y=x^3\sin x;\quad y^{(20)}=?$ 2) $y=e^x(3x^2-4);\ y^{(20)}=?$
3) $y=e^{-x}\sin x;\ y^{(n)}=?$

△. 1) Лейбниц формуласига асосан:

$$y^{(20)}=(x^3\sin x)^{(20)}=(x^3)^{(20)}\sin x+20(x^3)^{(19)}(\sin x)'+$$
$$+\frac{20\cdot19}{2}(x^3)^{(18)}(\sin x)''+\ldots+\frac{20\cdot19\cdot18}{3!}(x^3)'''(\sin x)^{(17)}+$$
$$+\frac{20\cdot19}{2!}(x^3)''(\sin x)^{(18)}+20(x^3)'(\sin x)^{(19)}+x^3(\sin x)^{(20)}=$$
$$=20\cdot19\cdot18\sin(\ x+17\frac{\pi}{2}\ +10\cdot19\cdot6x\sin\left(x+18\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+60x^2\sin\left(x+19\frac{\pi}{2}\right)+x^3\sin\left(x+20\ \frac{\pi}{2}\right)=6840\cos x-$$
$$-1140x\sin x-60x^2\cos x+x^3\sin x.$$

Чунки $y = x^3$ функциянинг учинчидан юқори тартибли ҳосилалари нолга тенг бўлади.

2) $y^{(20)}(e^x(3x^2-4))^{(20)} = (e^x)^{20}(3x^2-2) + 20(e^x)^{(19)}(3x^2-2)' + \frac{20\cdot 19}{2}(e^x)^{18}(3x^2-2)'' + \ldots + 20(e^x)'(3x^2-2)^{(19)} + e^x(3x^2-2)^{(20)} = e^x(3x^2-2) + 60xe^x + 1140e^x$.

Чунки $y = 3x^2 - 2$ функциянинг иккинчидан юқори тартибли ҳосилалари нолга тенг бўлади.

3) $y^{(n)} = (e^{-x}\sin x)^{(n)} = (e^{-x})^{(n)}\sin x + n(e^{-x})^{(n-1)}(\sin x)' + \frac{n(n-1)}{2}(e^{-x})^{n-2}(\sin x)'' + \ldots + n(e^{-x})'(\sin x)^{(n-1)} + e^{-x}(\sin x)^{(n)} = (-1)^n e^{-x}\sin x + n(-1)^{n-1}e^{-x}\cos x - \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}e^{-x}\sin x + \ldots + ne^{-x}\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + e^{-x}\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. ▲

☐. Лейбниц формуласидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг талаб қилинган тартибли ҳосилаларини топинг:

51. $y = x^2\sin x$, $y^{(25)} = ?$ *Жавоб.* $(x^2 - 600)\cos x + 50x\sin x$.

52. $y = e^x(x^2 - 1)$, $y^{(24)} = ?$ *Жавоб.* $e^x(x^2 + 48x + 552)$.

53. $y = (1 - x^2)\cos x$, $y^{(2n)} = ?$ *Жавоб.* $(-1)^n[(4n^2 + 3n + 1 - x^2)\cos x - 4nx\sin x]$.

54. $y = e^{-x}\sin x$, $y''' = ?$ *Жавоб.* $2e^{-x}(\sin x + \cos x)$. ■

5- §. Функциянинг дифференциали

Агар $y = f(x)$ функция бирор x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

бўлар эди. Бунда лимитнинг таърифига асосан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon(x_0)$$

ёки

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon(x_0)\cdot\Delta x \qquad (2)$$

ифодага эга бўламиз (бу ерда $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\varepsilon(x_0) = 0$).

тенгликдан кўриниб турибдики, функция орттирмаси Δy ни икки қисмга ажратиш мумкин. Биринчиси эркли ўзгарувчининг орттирмаси Δx га нисбатан чизиқли бўлган қисм, иккинчиси Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордан иборат.

Таъриф. Функция орттирмасидаги эркли ўзгарувчининг орттирмасига нисбатан чизиқли қисмини, яъни (2) формуланинг ўнг тарафидаги биринчи қўшилувчини x_0 нуқтадаги функция орттирмасининг *бош қисми* ёки *дифференциали* дейилади ва

$$dy = y'\,\Delta x \tag{3}$$

каби белгиланади.

Бу таърифга асосан эркли ўзгарувчининг дифференциали унинг орттирмасига тенг, яъни $dx = \Delta x$. Шунинг учун (3) ифода

$$dy = y'\,dx \tag{4}$$

каби ёзилади.

Функциянинг дифференциалини топиш ҳам, унинг ҳосиласини топиш каби *дифференциаллаш* дейилади. (4) формуладан кўриниб турибдики, функциянинг дифференциалини топиш учун унинг ҳосиласини топиб, ҳосилани эркли ўзгарувчининг орттирмасига кўпайтириш керак экан.

Агар $|dx|$ етарли кичик бўлса, функция орттирмасини унинг дифференциали билан алмаштирилса бўлади:

$$\Delta y \approx dy. \tag{5}$$

Йўл қўйилган хатолик $|dx|$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор бўлади. Шунинг учун (5) тақрибий формула тақрибий ҳисоблашларда кўп қўлланилади. Чунки функция орттирмасини ҳисоблашга нисбатан унинг дифференциалини ҳисоблаш элементар функциялар учун анча енгилдир.

Юқори тартибли дифференциаллар қуйидагича аниқланади:

$$d^2y = d(dy);\quad d^3y = d\,(d^2y);\ \ldots;\ d^ny = d(d^{n-1}y).$$

1- мисол. Қуйидаги функцияларнинг дифференциалини топинг:

1) $y = \sqrt{1 + x^2}$; 2) $y = \frac{a}{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

△. Берилган функцияларнинг ҳосиласини топиб, уни dx га кўпайтирамиз:

$$1)\ dy = y'dx = (\sqrt{1+x^2})'\,dx = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$2)\ dy = \left(\frac{a}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)'dx = \left[-\frac{a}{x^2} + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]dx =$$

$$= \left[-\frac{a}{x^2} + \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}\right]dx = \left[-\frac{a}{x^2} + \frac{a}{a^2+x^2}\right]dx = -\frac{a^3dx}{x^2(a^2+x^2)}. \blacktriangle$$

2-мисол. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг берилган нуқтадаги қийматини тақрибий ҳисобланг:

1) $y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$, $x = 0,15$; 2) $y = \sin 31°$;

3) $y = \lg 10,21$.

△. $\Delta y = y\,(x+\Delta x) - y\,(x)$ бўлгани учун $y\,(x+\Delta x) = y\,(x) + \Delta y$. Бунда $\Delta y \approx dy$ бўлгани учун

$$y\,(x+\Delta x) \approx y\,(x) + dy \qquad (6$$

бўлади. Бизнинг мисолимизда $x = 0$ ва $\Delta x = 0,15$ деб олсак,

$$y' = \frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^4}\cdot\frac{(-4)}{(2+x)^2};$$

$$y'(0) = -\frac{1}{5};\quad dy = -\frac{1}{5}\cdot 0,15 = -0,03.$$

Демак,

$$y\,(0,15) \approx y\,(0) + dy = 1 - 0,03 = 0,97.$$

2) Бу мисолни ечишда ҳам (6) формуладан фойдаланамиз. Бу ерда $x = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ деб оламиз. У ҳолда:

$$y\,(x) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};\quad y'\,(x) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin 31° = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times$$

$$\times\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + 0,015 = 0,515.$$

3) $y = \lg 10,21$ ни ҳисоблашда ҳам (6) формуладан фойдаланамиз. Бу ерда $x = 10$ ва $\Delta x = 0,21$ деб олсак,

$y(x) = \lg\ 10 = 1,\ y'(x) = \frac{1}{x}\ \ln e = \frac{1}{10} \cdot 0{,}4342 = 0{,}04342.$

$\lg 10{,}21 = \lg 10 + y'(x)\,dx = 1 + 0{,}04342 \cdot 0{,}21 = 1{,}0091.$ ▲

□. Дифференциал тушунчасидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг берилган нуқталардаги тақрибий қийматини топинг:

55. $y = \ln(1+e^{10x})+\mathrm{arctg}\, e^{5x},\ x = 0{,}2.$	*Жавоб.* 0,5.
56. $y = \cos 31°.$	*Жавоб.* 0,851.
57. $y = \sqrt[4]{x};\quad x = 17.$	*Жавоб.* 2,031.
58. $y = \mathrm{ctg}\, 45°10'.$	*Жавоб.* 0,9942.
59. $y = \sin 29°.$	*Жавоб.* 0,4848.

■

6- §. Лопиталь қоидаси ва унинг лимитларни топишга татбиқи

Теорема. *$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтанинг атрофида дифференциалланувчи бўлиб, $g'(x) \neq 0$ бўлсин. Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ёки $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ бўлиб, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ мавжуд бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу теорема *Лопиталь қоидаси* деб аталади. Лопиталь қоидаси $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ шаклидаги аниқмас ифодаларнинг лимитини ҳисоблашда қўлланилади. $0 \cdot \infty$ ва $\infty - \infty$ шаклидаги аниқмасликлар, алгебраик ўзгартиришлар ёрдамида $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ шаклига келтирилади. Ушбу 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} шаклдаги аниқмасликлар эса аввал логарифмлаш орқали $0 \cdot \infty$ шаклидаги аниқмасликка келтирилиб, сўнгра $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилади.

1- мисол. Лопиталь қоидасини қўлланиб, қуйидаги лимитларни топинг:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}$;　2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$;　4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x - x}{x - \sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$.

△. 1) Лопиталь қоидасига асосан:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{\cos x}=\ln 2$. Чунки $x\to 0$ да 2^x ҳам, $\cos x$ ҳам 1 га интилади.

2) Лопиталь қоидасига кўра:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}e^x=e^0=1.$$

3) Бу мисолда ҳам, $\frac{0}{0}$ шаклидаги аниқмаслик бўлгани учун Лопиталь қоидасини қўлланамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=\frac{1}{2}\sin 0=0.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$ ни топиш учун ҳам бевосита Лопиталь қоидасини қўлланамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x\,(1-\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x\,(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1+\cos 0}{\cos^2 0}=$$

$$=\frac{1+1}{1}=2.$$

5) $$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x-3}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{(x^2-3)(2x-3)}=$$

$$=\frac{2\cdot 2}{(2^2-3)(2\cdot 2-3)}=4.$$

6) Бу мисолда, аввалгилардагидан фарқли, $\frac{\infty}{\infty}$ шаклдаги аниқмаслик:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{(1+x)'}{1+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{1}=\infty.$$ ▲

□. Қуйидаги лимитларни, Лопиталь қоидасини қўлланиб топинг:

60. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$. *Жавоб.* $\frac{3}{5}$.

61. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$. *Жавоб.* $\frac{a}{b}$.

62. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. Жавоб. $\frac{1}{2}$.

63. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. Жавоб. $\frac{1}{6}$.

64. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$. Жавоб. 0.

65. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$. Жавоб. $\frac{1}{3}$.

66. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}$. Жавоб. $\frac{2}{5}$.

67. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$. Жавоб. $\frac{5}{3}$.

68. $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{\ln(e^x-e^a)}{\ln(x-a)}$. Жавоб. 1.

69. $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$. Жавоб. 1

70. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. Жавоб. $\frac{2}{\pi}$.

7- §. Функциянинг монотонлик шартлари

Монотон функция тушунчаси, I бобнинг 3- § да кўрилган эди. Бу параграфда ҳосила тушунчаси ёрдамида монотон функцияларни текширамиз.

Теорема. *$y=f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда дифференциалланувчи бўлсин.*

а) *Бу функция $[a, b]$ оралиқда монотон ўсувчи (монотон камаювчи) бўлиши учун $[a, b]$ оралиқдаги барча x ларда $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$ бўлиши зарур ва етарлидир.*

б) *Бу функция шу $[a, b]$ оралиқда қатъий монотон ўсувчи (қатъий монотон камаювчи) бўлиши учун $[a, b]$ оралиқдаги барча x ларда $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ бўлиши зарур ва етарлидир.*

1- мисол. Қуйидаги функцияларнинг монотонлик оралиқларини топинг:

1) $f(x)=2x^2-\ln x$; 2) $f(x)=2x^3-9x^2-24x+7$;

3) $f(x)=x^2e^{-x}$; 4) $f(x)=\ln|x|$;

5) $y=\cos\frac{\pi}{x}$.

Δ. Бирор функциянинг монотонлик оралиқларини топиш учун унинг ҳосилалари ишорасини сақлайдиган оралиқларини топиш керак. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$

оралиқда узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, $a < x_1 < x_2 < < \ldots < x_n < b$ нуқталарда $f'(x_k) = 0$ $(k = 1,2, \ldots, n)$ бўлса, $y' = f'(x)$ функция (a, x_1) (x_1, x_2), ..., (x_n, b) оралиқларда ишорасини сақлайди.

1) $f(x) = 2x^2 - \ln x$ функция $x > 0$ да аниқланган бўлиб, унинг ҳосиласи

$$y' = 4x - \frac{1}{x},$$

$x > \frac{1}{2}$ бўлганда мусбат ва $x < \frac{1}{2}$ да манфий. Демак, $y = 2x^2 - \ln x$ функция $0 < x < \frac{1}{2}$ оралиқда монотон камаювчи ва $\frac{1}{2} < x < +\infty$ оралиқда эса монотон ўсувчи бўлар экан.

2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$ функция $]-\infty, \infty[$ оралиқда аниқланган. Бу функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24 = 6\ (x^2 - 3x - 4).$$

$x_1 = -1$ ва $x_2 = 4$ нуқталарда нолга тенг бўлиб, $]-\infty, -1[$ ва $]4, \infty[$ оралиқда $f'(x) > 0$ ва $]-1,4[$ оралиқда эса $f'(x) < 0$ бўлади. Демак, $f(x)$ функция $]-\infty, -1[$ ва $]4,\infty[$ оралиқларда монотон ўсувчи бўлиб, $]-1,4[$ оралиқда монотон камаювчи экан.

3) $f(x) = x^2e^{-x}$ функциянинг ҳосиласи $f'(x) = (2x - x^2)\, e^{-x}$, $x_1 = 0$ ва $x_2 = 2$ нуқталарда нолга айланади. $(-\infty; 0)$ ва $(2; \infty)$ оралиқларда $f'(x) < 0$ бўлгани учун, $f(x)$ монотон камаювчи ва $(0,2)$ оралиқда $f'(x) > 0$ бўлгани учун $f(x)$ монотон ўсувчи бўлади.

4) $f(x) = \ln |x|$ функция сонлар ўқидаги $x = 0$ нуқтадан ташқари барча нуқталарда аниқланган. Унинг ҳосиласи $y' = (\ln |x|)' = \frac{|x|'}{|x|} = \frac{\operatorname{sg} nx}{|x|} = \frac{1}{x}$. Демак, $x > 0$ бўлса, $y' > 0$ ва $x < 0$ бўлса $y' < 0$ бўлади. Бундан чиқадики, $y = \ln |x|$ функция $]-\infty, 0[$ оралиқда монотон камаювчи ва $]0, \infty[$ оралиқда монотон ўсувчи бўлади.

5) $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ функция ҳам сонлар ўқидаги $x = 0$ дан ташқари барча нуқталарда аниқланган ва дифференциалланувчидир:

$$y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}.$$

Кўрамизки, y' нинг ишораси $\sin \frac{\pi}{x}$ нинг ишораси билан бир хил бўлиб,

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

тенгсизлик бажарилганда $\sin\frac{\pi}{x} > 0$.

$(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < 1\ (k+2)\pi$ оралиқда $\sin\frac{\pi}{x} < 0$ бўлади.

Демак, $y = \cos\frac{\pi}{x}$ функция $\left]\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right[$ оралиқда ўсувчи бўлиб,

$\left]\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right[$ оралиқда камаювчи бўлади. ▲

□. Қуйидаги функцияларнинг монотонлик оралиқларини топинг:

71. $y = \ln(1 - x^2)$. *Жавоб.* $]-1,0[$ да ўсувчи, $]0,1]$ да камаювчи.

72. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$. *Жавоб.* $]-\infty, \infty[$ да ўсувчи.

73. $f(x) = e^x + 5x$. *Жавоб.* $]-\infty, \infty[$ да ўсувчи.

74. $f(x) = x(1 + 2\sqrt{x})$. *Жавоб.* $[0, \infty]$ да ўсувчи.

75. $f(x) = \cos x - x$. *Жавоб.* $(-\infty, \infty)$ да камаювчи.

76. $y = \frac{2x}{1+x^2}$. *Жавоб.* $(-\infty, 1)$ ва $(1, \infty)$ оралиқларда камаювчи, $(-1, 1)$ оралиқда ўсувчи.

8- §. Функциянинг локал максимуми ва минимумини (экстремумини) топиш

Таъриф. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг бирор $J = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ атрофи топилиб, бу атрофдаги барча $x \in J$ ларда $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$ тенгсизлик бажарилса, x_0 нуқтада $y = f(x)$ функция *локал максимумни (минимумни)* қабул қилади, дейилади.

Функциянинг локал максимуми ва локал минимуми унинг *локал экстремуми* дейилади, яъни функция бирор нуқтада локал экстремумни қабул қилди деганда, шу нуқтада ёки локал максимумни, ёки локал минимумни қабул қилиши тушунилади.

1- теорема. *$y = f(x)$ функция x_0 нуқтада локал экстремумни қабул қилса ва шу нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f'(x_0) = 0$ бўлади.*

Демак, $f'(x_0) = 0$ бўлиши, x_0 нуқтада $f(x)$ функция локал экстремумни қабул қилиши учун зарур экан, аммо бу шарт етарли эмас.

Мисол. $f(x) = x^3$ функциянинг ҳосиласи $f'(x) = 3x^2$. Демак, $x = 0$ нуқтада $f'(0) = 0$ бўлади, аммо бу функция $x = 0$ нуқтада локал максимумни ҳам, локал минимумни ҳам қабул қилмайди (4.5- чизмага қаранг).

Демак, $y = f(x)$ функция локал экстремумларини $f'(x) = 0$ бўлган нуқталарда, ёки $f'(x)$ мавжуд бўлмаган нуқталарда қабул қилади. Бу нуқталарни *стационар* ёки *критик нуқталар* дейилади.

Функциянинг локал экстремумни қабул қилишини аниқлайдиган етарли шартлар қуйидаги теоремаларда ифодаланган.

2- теорема. *$y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, бу нуқтанинг бирор $J = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ атрофида x_0 нуқтадан ташқари барча нуқталарда дифференциалланувчи бўлсин. Агар $J_1 = (x_0 - \varepsilon_0\ x_0)$ да $f'(x) > 0$ ва $J_2 = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ да $f'(x) < 0$ бўлса, x_0 нуқтада $f(x)$ локал максимумга эришади, бордию J_1 да $f'(x) < 0$ ва J_2 да $f'(x) > 0$ бўлса, x_0 нуқтада $f(x)$ локал минимумга эришади.*

3- теорема. *$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор $J = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ атрофида дифференциалланувчи бўлсин. Агар $f'(x_0) = 0$ бўлиб, $f''(x_0) < 0$ бўлса, $f(x)$ x_0 нуқтада локал максимумга,* бордию, *$f''(x_0) > 0$ бўлса, локал минимумга эришади.*

Бу теоремалардан келиб чиқадики, $y = f(x)$ функциянинг экстремумларини топиш учун қуйидаги амалларни бажариш керак.

I. Стационар нуқталар топилади, яъни $f'(x)$ мавжуд бўлмаган нуқталар билан $f'(x) = 0$ тенгламанинг илдизлари топилади.

II. а) Ҳар бир критик нуқтадан чап ва ўнг томонда $f'(x)$ нинг ишораси текширилади;

1) Агар x_0 критик нуқтанинг чап томонида ҳосиланинг ишораси мусбат, ўнг томонида манфий бўлса, бу нуқтада $f(x)$ локал максимумга эришади;

2) Агар x_0 критик нуқтанинг чап томонида ҳосиланинг ишораси манфий, ўнг томонда мусбат бўлса, бу нуқтада $f(x)$ локал минимумга эришади;

3) Агар x_0 критик нуқтанинг чап томони билан ўнг томонида ҳосиланинг ишораси бир хил бўлса, бу нуқтада $f(x)$ функция экстремумга эришмайди.

Баъзи ҳолларда $y = f(x)$ функциянинг критик нуқталарида унинг локал максимумни ёки локал минимумни қабул қилишини иккинчи ҳосила ёрдамида (3- теоремага асосан) текшириш анча қулай бўлади.

б) $f'(x_0) = 0$ бўлган ҳар бир критик нуқтада $f''(x_0)$ топилиб, унинг ишораси текширилади:

1) Агар $f''(x_0) < 0$ бўлса, x_0 нуқтада $f(x)$ локал максимумга эришади;

2) Агар $f''(x_0) > 0$ бўлса, x_0 нуқтада $f(x)$ локал минимумга эришади;

3) Агар $f''(x_0) = 0$ бўлса, x_0 нуқтада локал экстремумга эришишини а) қоида ёрдамида текширилади.

Бу иккала қоидадан бирортаси ёрдамида $y = f(x)$ функция критик нуқталарда локал максимумни ёки локал минимумни қабул қилиши аниқлангандан кейин, шу нуқтадаги функциянинг қиймати топилади.

1- мисол. Биринчи ҳосила ёрдамида қуйидаги функцияларнинг экстремумларини топинг:

1) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$; 2) $f(x) = x(x+1)^3(x-3)^2$;

3) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$; 4) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

△. 1) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$ функция сонлар ўқидаги барча нуқталарда аниқланган ва дифференциалланувчи, шунинг учун унинг критик нуқталари

$$f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x = 3x(x+2)(x-3) = 0$$

тенгламанинг илдизлари, яъни $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ ва $x_3 = 3$ нуқталардир. Энди бу критик нуқталарнинг атрофида $f'(x)$ нинг ишорасини текширамиз. $f'(x)$ нинг ишораси $(-\infty, -2)$ оралиқда манфий, $(-2, 0)$ оралиқда мусбат, $(0,3)$ оралиқда манфий ва $(3, \infty)$ оралиқда мусбатдир. Демак, $f(x)$ $x_1 = -2$ ва $x_3 = 3$ нуқталарда локал минимумга, $x_2 = 0$ нуқтада локал максимумга эришади. Бу нуқталарда функциянинг қийматлари қуйидагича:

$$f(-2) = -9,\ f(0) = 7 \text{ ва } f(3) = -40\frac{1}{4}.$$

Бу текширишлар натижасини қуйидаги жадвал шаклида ёзиш мумкин.

X	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f'(x)$	$f'(x)<0$	$f'(-2)=0$	$f'(x)>0$	$f'(0)=0$	$f'(x)<0$	$f'(3)=0$	$f'(x)>0$
$f(x)$	камаювчи	минимум $f(-2)=-9$	ўсувчи	$f(0)=7$ максимум	камаювчи	$f(3)=-40\frac{1}{4}$ минимум	ўсувчи

2) $f(x)=x(x+1)^3(x-3)^2$ функциянинг ҳам критик нуқталари фақат ҳосиласи нолга айланадиган нуқталардан иборатдир. Шунинг учун $f'(x)$ ни топайлик:

$$f'(x)=(x+1)^3(x-3)^2+3x(x+1)^2(x-3)^2+$$
$$+2x(x+1)^3(x-3)=3(x+1)^2(x-3)(2x^2-3x-1).$$

Энди бу ифодани нолга тенглаштириб унинг илдизларини топамиз:

$$x_1=-1;\ x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4};\ x_3=\frac{3+\sqrt{17}}{4};\ x_4=3.$$

Энди критик нуқталар орасидаги ҳосиланинг ишораларидан жадвал тузамиз:

x	$x<-1$	$-1<x<x_2$	$x_2<x<x_3$	$x_3<x<3$	$x>3$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

Бу жадвалдан кўринадики, $x_1=-1$ нуқтада функция экстремумга эришмайди, $x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$ нуқтада минимумга эришади, $x_3=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ нуқтада максимумга эришади ва $x_4=3$ нуқтада минимумга эришади.

3) $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$ функция сонлар ўқида аниқланган ва узлуксиздир. Ҳосиласини топайлик:

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-x\right).$$

$f'(x)=0$ тенгламанинг илдизи $x_{1,2}=\pm 1$ дан иборат. Бундан ташқари $x=0$ нуқтада $f'(x)$ чексизликка айланади.

Шундай қилиб, $x_1 = -1$, $x_2 = +1$ ва $x_3 = 0$ нуқталар бу функциянинг критик нуқталаридир.

Энди бу функциянинг критик нуқталари оралиғидаги ҳосиланинг ишораларидан жадвал тузайлик:

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Демак, $x_1 = -1$ ва $x_3 = +1$ нуқталарда бу функция максимумга эришади ва $f(-1) = 2, f(1) = 2$. $x_2 = 0$ нуқтада эса минимумга эришади ва $f(0) = 0$.

4) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ функция сонлар ўқидаги $x = 0$ дан ташқари нуқталарда аниқланган. Энди ҳосиласини топамиз.

$$y' = \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2}.$$

$y' = 0$ бўлиши учун $x^2 - 4 = 0$ бўлиши керак. Бундан:

$$x_1 = -2, \ x_2 = +2.$$

Шундай қилиб, бу функция экстремумга эришса, $x_1 = -2$ ва $x_2 = 2$ нуқталарда эришиши керак. $y' > 0$ бўлиши учун $x^2 - 4 > 0$ бўлиши керак. Демак, $x < -2$ ва $x > 2$ бўлганда $y' > 0$ бўлади. Агар $-2 < x < 2$ бўлса, $y' < 0$ бўлади. Бу функция ҳосиласининг критик нуқталар оралиғидаги ишораларидан қуйидаги жадвални тузамиз:

x	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Демак, $x_1 = -2$ нуқтада бу функция максимумга эришади ва $f(-2) = -2$, $x_2 = 2$ нуқтада эса минимумга эришади ва $f(2) = 2$. ▲

□. Қуйидаги функцияларнинг экстремумларини биринчи ҳосила ёрдамида топинг:

77. $f(x) = (1 - x^2)^3$. *Жавоб.* $f_{\max}(0) = 1$.

78. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. *Жавоб.* $f_{\min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$; $f_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

79. $f(x)=x^3-3x^2+3x$. *Жавоб.* Экстремуми йўқ.

80. $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$. *Жавоб.* $f_{\min}(-2)=4$.

81. $f(x)=x-2\ln x$. *Жавоб.* $f_{\min}(2)=2-2\ln 2$.

82. $f(x)=x-\operatorname{arc\,tg}2x$ *Жавоб.* $f_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}28$;

$f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}28$. ■

2- мисол. Қуйидаги функцияларнинг экстремумларини иккинчи ҳосила ёрдамида топинг:

1) $y=2\sin x+\cos 2x$. 2) $f(x)=2x^3-15x^2-84x+8$.

3) $f(x)=\frac{50}{3x^4+8x^3-18x^2+60}$; 4) $f(x)=\sqrt{e^{x^2}-1}$.

△. 1) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ функция даврий функция бўлиб, даври $[0,2\pi]$ дан иборат бўлгани учун, бу функцияни шу $[0,2\pi]$ оралиқда текшириш билан чегараланамиз. Аввало бу функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x\,(1-2\sin x);$$
$$y''=-2\sin x-4\cos 2x.$$

Энди $2\cos x\,(1-2\sin x)=0$ тенгламани ечиб, берилган функциянинг $[0,2\pi]$ оралиқдаги критик нуқталарини топамиз:

$$x_1=\frac{\pi}{6},\ x_2=\frac{\pi}{2},\ x_3=\frac{5\pi}{6},\ x_4=\frac{3\pi}{2}.$$

Энди иккинчи тартибли ҳосиланинг критик нуқталардаги ишорасини текширамиз:

$y''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3<0$, шунинг учун, бу функция $x_1=\frac{\pi}{6}$ нуқтада максимумга эришади, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$;

$y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2>0$, шунинг учун, бу функция $x_2=\frac{\pi}{2}$ нуқтада минимумга эришади, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

$y''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-3<0$, шунинг учун, бу функция $x_3=\frac{5\pi}{6}$ нуқтада максимумга эришади, $y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$;

$y''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=6>0$, шунинг учун, бу функция $x_4=\frac{3\pi}{2}$ нуқтада минимумга эришади, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$.

2) Аввал $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$ функциянинг ҳам биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топайлик:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x - 84; \quad f''(x) = 12x - 30.$$

Энди ушбу, $6x^2 - 30x - 84 = 0$ тенгламани ечиб, берилган функциянинг критик нуқталарини топамиз:

$$6x^2 - 30x - 84 = 6(x^2 - 5x - 14) = 0.$$

Бундан $x_1 = -2$ ва $x_2 = 7$ келиб чиқади.

Энди бу критик нуқталарда иккинчи ҳосиланинг ишорасини текширамиз:

$f''(-2) = -54 < 0$, шунинг учун $x_1 = -2$ нуқтада функция максимумга эришади ва $f(-2) = 100$;

$f''(7) = 12 \cdot 7 - 30 = 54 > 0$ бўлгани учун $x_2 = 7$ нуқтада функция минимумга эришади ва $f(7) = -629$.

$f(x) = \frac{50}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60}$ функциянинг сурати ўзгармас бўлгани учун махражи максимумга эришган нуқтада функция минимумга ва махражи минимумга эришган нуқтада функция максимумга эришади. Шунинг учун $f_1(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 16$ функцияни текшириш кифоядир. Бунинг учун $f_1(x)$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз:

$$f'_1(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x; \quad f''_1(x) = 36x^2 + 48x - 36.$$

Энди ушбу $f'_1(x) = 12x(x^2 + 2x - 3) = 0$ тенгламанинг илдизларини, яъни $f_1(x)$ функциянинг критик нуқталарини топамиз:

Ушбу $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ нуқталар $f_1(x)$ функциянинг критик нуқталари бўлади.

Энди бу критик нуқталарда $f''_1(x)$ нинг ишораларини текширамиз:

$f''_1(-3) = 144 > 0$ бўлгани учун, $f_1(x)$ функция $x = -3$ нуқтада минимумга эришади ва $f_1(-3) = -75$.

Демак, $x_1 = -3$ нуқтада $f(x)$ локал максимумга эришади ва

$$f(-3) = \frac{50}{-75} = -\frac{2}{3}.$$

$f''_1(0) = -36$ бўлгани учун $f_1(x)$, $x_2 = 0$ нуқтада локал максимумга эришади ва $f_1(0) = 60$. Демак, бу $x_2 = 0$ нуқтада $f(x)$ локал минимумга эришади ва $f(0) = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$.

$f_1'(1) = 48 > 0$, шунинг учун $f_1(x)$ $x_3 = 1$ нуқтада локал минимумга эришади, $f(1) = 53$. Демак, $f(x)$ $x_3 = 1$ нуқтада локал максимумга эришади ва

$$f(x) = \frac{50}{53}.$$

4) $y = \sqrt{e^{x^2} - 1}$ функциянинг экстремумларини топиш учун аввал илдиз остидаги

$$f_1(x) = e^{x^2} - 1$$

функциянинг экстремумларини топамиз. Берилган функция ҳам айнан шу нуқталарда экстремумга эришади. Шунинг учун $f_1(x)$ нинг критик нуқталарини топайлик:

$f_1'(x) = 2xe^{x^2}$ фақат $x = 0$ нуқтада, $f_1'(x) = 0$ бўлади. Энди $x = 0$ нуқтада $f_1(x)$ нинг иккинчи тартибли ҳосиласининг ишорасини аниқлаймиз:

$$f_1''(x) = 2e^{x^2}(1 - 2x^2),\ f_1''(0) = 2 > 0.$$

Демак, $x = 0$ нуқтада $f_1(x)$ функция минимумга эришади ва $f_2(0) = 0$. Шунинг учун $x = 0$ нуқтада $f(x)$ функция ҳам минимумга эришади ва $f(0) = 0$. ▲

☐. Қуйидаги функцияларнинг экстремумларини иккинчи ҳосила ёрдамида топинг:

83. $y = x^3 + 6x^2 + 9$. *Жавоб.* $f_{\max}(-4) = 41$, $f_{\min}(0) = 9$.

84. $f(x) = x^4 e^{-x^2}$. *Жавоб.* $f_{\max}(\pm\sqrt{2}) = \frac{4}{e^2}$; $f_{\min}(0) = 0$.

85. $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$. *Жавоб.* $f_{\max}(-3) = 3\sqrt[3]{3}$, $f_{\min}(2) = -\sqrt[3]{44}$.

86. $f(x) = x^2 \ln x$. *Жавоб.* $f_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

87. $f(x) = \frac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$. *Жавоб.* $f_{\max}(\pm 2) = -1$, $f_{\min}(0) = 7$.

88. $f(x) = \sin 3x - 3\sin x$. *Жавоб.* $[0, 2\pi]$ да $f_{\max}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 4$, $f_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$. ■

9- §. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш қуйидаги теоремага асосланади.

Теорема. $y=f(x)$ *функция* $[a, b]$ *ёпиқ оралиқда узлуксиз бўлса, бу оралиқда ўзининг энг катта ва энг кичик қийматига эришади.*

Бу теоремада оралиқнинг ёпиқлиги муҳимдир, чунки функция (a, b) очиқ оралиқда аниқланган бўлса, у ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришмаслиги ҳам мумкин.

Масалан: $y=\frac{1}{x}$ функцияни $(0,1)$ оралиқда қарасак, бу оралиқда у узлуксиз, лекин ўзининг энг кичик ва энг катта қийматига эришмайди.

$y=f(x)$ функция $[a, b]$ ёпиқ оралиқда узлуксиз бўлса, бу функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун, аввал унинг (a,b) оралиқдаги локал максимум ва локал минимумлари топилади, кейин a ва b нуқталардаги қийматлари $f(a)$ ва $f(b)$ топилиб, бу қийматлар орасидан энг катта ва энг кичиги ажратиб олинади.

1- мисол. Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$, $\left[-2, \frac{5}{2}\right]$ кесмада;
2) $f(x)=x-2\ln x$, $[1, l]$ кесмада
3) $y=\sin x\cdot\sin 2x$, $]-\infty, \infty[$ оралиқда;
4) $y=\arccos x^2$. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ кесмада.

△. 1) Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$f'(x)=6x^2-6x-12.$$

Бу ифода $x_1=-1$ ва $x_2=2$ нуқталарда нолга айланади. Бу иккита нуқта ҳам, берилган ёпиқ оралиқнинг ичида ётади. Шунинг учун функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини излашда $x_1=-1$, $x_2=2$ нуқталардаги ва кесманинг четки нуқталаридаги функциянинг қийматлари топилади:

$$f(-2)=-3;\quad f(-1)=8;\quad f(2)=-19; f\left(\frac{5}{2}\right)=-16\frac{1}{2}.$$

Демак, функциянинг энг катта қиймати $f(-1)=8$ бўлиб, энг кичик қиймати $f(2)=-19$ экан.

2) Бу мисолда ҳам аввал критик нуқталарни топамиз:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x}.$$

Фақат $x = 2$ да ҳосила нолга тенг бўлади. Функциянинг энг катта қиймати билан энг кичик қиймати $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = l$ нуқталардаги қийматларидан бири бўлиши керак:

$f(1) = 1$; $\quad f(2) = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2)$, $\quad f(l) = l - 2$.

Демак, берилган функциянинг энг катта қиймати $f(1) = 1$ ва энг кичик қиймати $f(l) = l - 2$ экан.

3) Берилган функцияни ушбу

$$y = \frac{\cos x - \cos 3x}{2}$$

кўринишда ёзиб олсак, унинг жуфт ва даври 2π га тенг бўлган даврий функция экани кўринади. Шунинг учун бу функцияни $[0; 2\pi]$ оралиқда текшириш кифоядир.

Унинг ҳосиласи:

$$y' = \frac{1}{2} 3\,(\sin 3x - \sin x) \quad [0, \pi] \text{ оралиқда фақат}$$

$$x_1 = 0, \ x_2 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_3 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \ x_4 = \pi$$

нуқталарда нолга айланади. Функциянинг бу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$y(0) = y(\pi) = 0; \quad y\left[\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Демак, берилган функциянинг $]-\infty, \infty[$ оралиқдаги энг кичик қиймати $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$ бўлиб, энг катта қиймати $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ экан.

4) $y = \arccos x^2$ функциянинг

$$y' = -\frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

ҳосиласи берилган оралиқдаги фақат $x = 0$ нуқтада нолга тенг бўлади. Энди функциянинг $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = 0$ ва $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ нуқталардаги қийматини ҳисоблаймиз:

$$y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad y(o) = \frac{\pi}{2}, \quad y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Демак, функциянинг энг катта қиймати $\frac{2\pi}{3}$ га, энг кичик қиймати $\frac{\pi}{3}$ га тенг экан. ▲

□. Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

89. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35 \quad [-4,\ 4]$ да.

Жавоб. $\begin{cases} y(-1) = 40 \text{ энг катта,} \\ y(-4) = -41 \text{ энг кичик.} \end{cases}$

90. $y = x^2 \ln x \quad [1, e]$.

Жавоб. $\begin{cases} y(e) = e^2 \text{ энг катта,} \\ y(1) = 0 \text{ энг кичик.} \end{cases}$

91. $y = 2\sin x + \sin 2x \quad \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ да.

Жавоб. $\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ энг катта,} \\ y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = --2 \text{ энг кичик.} \end{cases}$

92. $y = \operatorname{arc\,tg} x^2 \quad (-\infty, \infty)$ да.
Жавоб. $y(0) = 0$ энг кичик.

93. $y = x + \sqrt{x} \quad [0,4]$ да.
Жавоб. $\begin{cases} y(0) = 0 \text{ энг кичик,} \\ y(4) = 6 \text{ энг катта.} \end{cases}$

94. $y = \sqrt{4 - x^2} \quad [-2, 2]$ да.
Жавоб. $\begin{cases} y(0) = 2 \text{ энг катта,} \\ y(\pm 2) = 0 \text{ энг кичик.} \end{cases}$

95. $y = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln x, \quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ да.

Жавоб. $\begin{cases} y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\ln 3 \text{ энг катта,} \\ y(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\ln 3 \text{ энг кичик.} \end{cases}$

96. $y = x - 2\ln x \quad [1, e]$ да.
Жавоб. $\begin{cases} y(1) = 1 \quad \text{энг катта,} \\ y(2) = 2(1 - \ln 2) \text{ энг кичик.} \end{cases}$

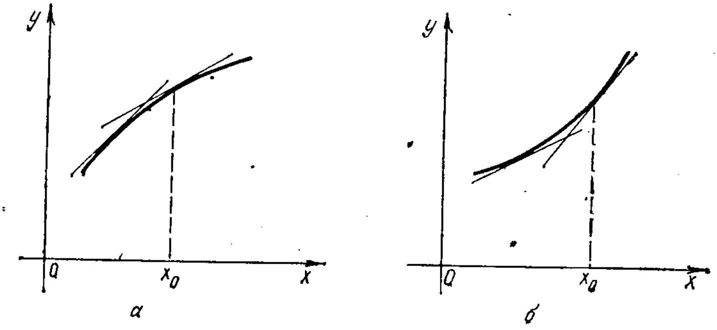
97. $y = \sin x \sin 2x$.
Жавоб. $\begin{cases} y\left[\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{-4}{3\sqrt{3}} \text{ энг кичик,} \\ y\left[\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{4}{3\sqrt{3}} \text{ энг катта.} \end{cases}$

98. $y = \arccos x^2$.

Жавоб. $$\begin{cases} y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{3} \text{ энг кичик,} \\ y(0)=\frac{\pi}{2} \text{ энг катта.} \end{cases}$$

10- §. Функциянинг қавариқлиги ва ботиқлиги

1- таъриф. $y=f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар бирор $]\alpha, \beta[\subset]a, b]$ оралиқдаги барча нуқталарда эгри чизиққа ўтказилган уринма, ундан юқорида (қуйида) жойлашса, бундай эгри чизиқни $]\alpha, \beta[$ оралиқда *қавариқ (ботиқ)* эгри чизиқ дейилади. 5.3- *а* чизмада қавариқ, 5.3- *б* чизмада ботиқ функциялар тасвирланган.



5.3- чизма

1- теорема. *Агар $y=f(x)$ функциянинг $]\alpha, \beta[$ оралиқдаги иккинчи тартибли ҳосиласи узлуксиз бўлиб, барча $x \in]\alpha, \beta[$ ларда $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$ бўлса, $y=f(x)$ эгри чизиқ $]\alpha, \beta[$ оралиққа қавариқ (ботиқ) бўлади.*

2- таъриф. Агар x, x_0 нуқтадан ўтишда, $y=f(x)$ эгри чизиқ, унга x_0 нуқтада ўтказилган уринманинг бир томонидан иккинчи томонига ўтса, x_0 нуқтани эгри чизиқнинг *букилиш (эгилиш) нуқтаси* дейилади.

2- теорема. *Агар x, x_0 нуқтадан ўтишда $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $f''(x)$ ишорасини ўзгартирса, x_0 нуқта $y=f(x)$ эгри чизиқнинг букилиш нуқтаси бўлади.*

1- мисол. Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва букилиш нуқталарини топинг:

1) $y=x^4+x^3-18x^2+24x-12$;

2) $y=3x^4-8x^3+6x^2+12$;

3) $y = x + x^{\frac{5}{3}}$;   4) $y = x\sin(\ln x)$.

Δ. 1) Аввал берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24; \quad y'' = 12x^2 + 6x - 36.$$

Энди $y'' = 0$ бўладиган нуқталарни, яъни ушбу $12x^2 + 6x - 36 = 0$ тенгламанинг илдизларини топамиз. Бу тенгламанинг илдизлари $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{3}{2}$ нуқталардир. Берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $]-\infty, -2[$, $\left]\frac{3}{2}, \infty\right[$ оралиқларда мусбат ва $\left]-2, \frac{3}{2}\right[$ оралиқда манфий бўлади. Бу маълумотлардан фойдаланиб қуйидаги жадвални тузамиз:

x	$x < -2$	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
y'' ишора	+	−	+
$f(x)$ натижа	ботиқ	қавариқ	ботиқ

Демак, $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{3}{2}$ нуқталар, функциянинг букилиш нуқталаридир.

2) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x; \quad y'' = 36x^2 - 48x + 12.$$

Энди $36x^2 - 48x + 12 = 0$ тенгламанинг илдизларини топамиз. Бу тенгламанинг илдизлари $x_1 = \frac{1}{3}$ ва $x_2 = 1$ нуқталардир. Берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ ва $]1, \infty[$ оралиқларда мусбат ва $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$ оралиқда манфий бўлади. Бу маълумотлардан фойдаланиб қуйидаги жадвални тузамиз:

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$x > 1$
y'' ишора	+	−	+
$f(x)$	ботиқ	қавариқ	ботиқ

Демак, $x_1 = \frac{1}{3}$ ва $x_2 = 1$ нуқталар функциянинг букилиш нуқталаридир.

3) Аввал берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y' = 1 + \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}; \qquad y'' = \frac{10}{9} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

Бу функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосиласи ҳеч бир ерда нолга тенг эмас, аммо $x = 0$ нуқтада мавжуд эмас. Иккинчи тартибли ҳосила $x < 0$ бўлганда $y'' < 0$ ва $x > 0$ бўлганда $y'' > 0$ бўлади. Демак, $x < 0$ да берилган функция қавариқ ва $x > 0$ да ботиқ бўлиб, $x = 0$ нуқтада эгилар экан.

4) Бу функциянинг ҳам ҳосилаларини топайлик:

$$y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x); \; y'' = \frac{1}{x}[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{x} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right).$$

Иккинчи тартибли ҳосила $\ln x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$ нуқталарда нолга тенг бўлади. x_k нуқталардан ўтишда $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right)$ функция ишорасини ўзгартиргани учун y'' ҳам x_k нуқталардан ўтишда ишорасини ўзгартиради. Шунинг учун ҳам x_k нуқталар функциянинг букилиш нуқталарининг абсциссаларидан иборатдир. Эгри чизиқ ушбу $]e^{2k\pi - 3\pi/4}; e^{2k\pi + \pi/4}[$ интервалда қавариқ, $]e^{2k\pi + \pi/4}, e^{2k\pi + 5\pi/4}[$ интервалда ботиқ бўлади.

□. Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик, ботиқлик оралиқлари ва букилиш нуқталарини топинг:

99. $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

Жавоб. $x = 1$ букилиш нуқтаси, $]-\infty, 1[$ да қавариқ, $]1, \infty[$ да ботиқ.

100. $y = \frac{1}{(x+1)^3}$.

Жавоб. $]-\infty, -1[$ да қавариқ, $]-1, \infty[$ да ботиқ.

101. $y = x - \ln x$.

Жавоб. $]0, \infty[$ да ботиқ.

102. $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$.

Жавоб. $]-\infty, -2[$ да ботиқ, $]-2, \infty[$ да қавариқ.

103. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

Жавоб. $]-\infty, 0[$ да қавариқ, $]0, \infty[$ да ботиқ.

104. $y = \sin x$.

Жавоб. $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ларда қавариқ, $[2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ ларда ботиқ. ■

11- §. Эгри чизиқнинг асимптоталарини топиш

Таъриф. $]-,\infty, \infty[$ оралиқда $y = f(x)$ функция ва $y = kx + b$ тўғри чизиқ берилган бўлсин. Агар $x \to -\infty$ ёки $x \to \infty$ да $y = f(x)$ функциянинг графиги билан $y = kx + b$ тўғри чизиқ орасидаги масофа нолга интилса, $y = kx + b$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ *функция графигининг асимптотаси* дейилади.

Асимптоталар уч хил бўлади: а) горизонтал асимптота; б) вертикал асимптота; г) оғма асимптота.

Агар $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$ бўлса, $y = A$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ эгри чизиқнинг горизонтал асимптотаси бўлади.

Агар

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{ва} \quad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = b$$

лимитлар мавжуд бўлса, $y = kx + b$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ эгри чизиқнинг *оғма асимптотаси* бўлади. Демак, бу ердаги $k = 0$ бўлса, $y = b$ тўғри чизиқ *горизонтал асимптота* бўлар экан.

Агар $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$ ёки $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ лимитлардан камида бирортаси мавжуд бўлса, $x = a$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ эгри чизиқнинг *вертикал асимптотаси* бўлади.

1- мисол. Қуйидаги эгри чизиқларнинг асимптоталарини топинг:

1) $y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}$;
2) $y = 2\sqrt{x^2 + 4}$;
3) $y = xe^{-x}$;
4) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$;
5) $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

△. 1) а) $y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}$ функция $x = -2$ нуқтада иккинчи турдаги узилишга эга, яъни

$$\lim_{x \to -2 \pm 0} \frac{2x^2 - 9}{x + 2} = \mp\infty.$$

Шунинг учун $x = -2$ тўғри чизиқ берилган функцияга вертикал асимптота бўлади.

б) оғма асимптотасини топамиз:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-9}{x(x+2)} = 2;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - 2x] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-9}{x+2} - 2x\right] = -\lim_{x\to\infty}\frac{4x+9}{x+2} = 4.$$

Бу қийматларни $y = kx + b$ тенгламадаги k ва b ларнинг ўрнига қўйиб, $y = 2x + 4$ тўғри чизиққа эга бўламиз. Ана шу тўғри чизиқ берилган функциянинг оғма асимптотаси бўлади.

2) $y = 2\sqrt{x^2+4}$ функция $]-\infty, \infty[$ оралиқдаги барча нуқталарда узлуксиз, шунинг учун у вертикал асимптотага эга эмас. Энди унинг оғма асимптотасини топамиз:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} = 2;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[2\sqrt{x^2+4} - 2x] = 2\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = 0.$$

Демак, $y = 2x$ тўғри чизиқ берилган функциянинг оғма асимптотаси бўлади.

3) $y = xe^{-x}$ функция ҳам $]-\infty, \infty[$ оралиқдаги барча нуқталарда узлуксиз, шунинг учун унинг вертикал асимптотаси бўлмайди.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[x\cdot e^{-x} - 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0.$$

Демак, $y = 0$ тўғри чизиқ, бу функциянинг горизонтал асимптотаси бўлади. Бошқа асимптотаси йўқ.

4) $y = x\cdot\operatorname{arctg} x$ функция ҳам сонлар ўқидаги барча нуқталарда узлуксиз функциядир, шунинг учун унинг вертикал асимптотаси йўқ.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\left[\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -1.$$

Демак, $x \to +\infty$ да $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ ва $x \to -\infty$ да $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ чизиқлар оғма асимптота бўлар экан.

5). $y = x + \frac{\ln x}{x}$ функция $x = 0$ да чексизликка интилади, шунинг учун $x = 0$ тўғри чизиқ берилган функцияга вертикал асимптота бўлади.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{\ln x}{x^2}\right] = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\left(x + \frac{\ln x}{x}\right) - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Демак, $y = x$ тўғри чизиқ, берилган функциянинг оғма асимптотаси бўлади. ▲

☐. Қуйидаги эгри чизиқларнинг асимптоталарини топинг:

105. $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$ *Жавоб.* $x = 3$, $y = x + 1$.

106. $y = x + \frac{\sin x}{x}$. *Жавоб.* $y = x$.

107. $y = \operatorname{arcctg} x$. *Жавоб.* $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$.

108. $y = x \cdot e^x$. *Жавоб.* $y = 0$.

109. $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$. *Жавоб.* $y = x - 2$.

110. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$. *Жавоб.* $y = \frac{x}{2}$.

12- §. Функцияни текширишнинг умумий схемаси ва унинг графигини ясаш

Функцияни текшириш ва унинг графигини ясаш қуйидаги схема бўйича олиб борилади:

I. Функциянинг аниқланиш соҳаси топилади.

II. Функциянинг узилиш нуқталари, бу нуқталардаги бир томонлама лимитлар топилади.

III. Функциянинг тоқ-жуфтлиги ва даврийлиги аниқланиб, даври топилади.

IV. Функция графигининг координата ўқлари билан кесишадиган нуқталари ва ишораси ўзгармайдиган оралиқлари топилади.

V. Функциянинг асимптоталари топилади.

VI. Функциянинг экстремумга эришадиган нуқталари ва ўсувчи ҳамда камаювчи оралиқлари топилади.

VII. Функциянинг букилиш нуқталари ва қавариқлик ҳамда ботиқлик оралиқлари топилади.

VIII. Юқоридаги маълумотлардан, агар бу маълумотлар етишмаса, функциянинг берилишидан фойдаланиб, унинг графикдаги баъзи нуқталарини топиб, сўнгра графиги чизилади.

1- мисол. Қуйидаги функцияларни текширинг ва уларнинг графигини ясанг:

1) $y = x^3 - 3x + 2$; 2) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$;

3) $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$: 4) $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$;

5) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Δ. 1) I. $y = x^3 - 3x + 2$ функциянинг аниқланиш соҳаси сонлар ўқидан иборат.

II. Бу функциянинг узилиш нуқтаси йўқ, яъни аниқланиш соҳасидаги нуқталарда узлуксиз бўлади.

III. Бу функция тоқ ҳам, жуфт ҳам, даврий ҳам эмас.

IV. Агар $x = 0$ бўлса, $y = 2$ бўлади. Демак, функциянинг графиги OY ўқини $(0, 2)$ нуқтада кесади. Унинг Ox ўқини кесадиган нуқталарни топиш учун $x^3 - 3x + 2 = 0$ тенгламани ечамиз:

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) =$$
$$= (x - 1)(x^2 - x - 2) = 0,$$

бундан $x_1 = x_2 = 1$ ва $x_3 = -2$ га эга бўламиз. Демак, функциянинг графиги Ox ўқи билан $(-2, 0)$ ва $(1, 0)$ нуқталарда кесишади.

V. а) бу функция $]-\infty, \infty[$ оралиқдаги барча нуқталарда узлуксиз бўлгани учун вертикал асимптотаси йўқ.

$$\text{б) } k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \infty,$$

яъни оғма асимптотанинг бурчак коэффициенти k мавжуд эмас. Демак, бу функциянинг оғма асимптотаси ҳам мавжуд эмас.

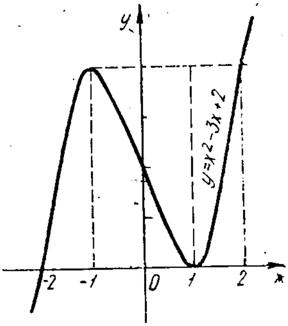
VI. $y' = 3x^2 - 3$;
агар $x_{1,2} = \pm 1$ бўлса, $y' = 0$ бўлади. Демак, $x_1 = -1$ ва $x_2 = 1$ нуқталар критик нуқтадир. Критик нуқта атрофидаги y' нинг ишорасига қараб қуйидаги жадвални тузайлик:

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
y'	$+$	$-$	$+$
y	ўсувчи	камаювчи	ўсувчи

Демак, берилган функция $x_1 = -1$ нуқтада локал максимумга эришади ва $f(-1) = 4$. Ушбу $x_2 = 1$ нуқтада эса локал минимумга эришади ва $f(1) = 0$.

VII. $y'' = 6x$ барча нуқталарда мавжуд ва $x = 0$ да $y'' = 0$. Барча $x < 0$ ларда $y'' < 0$ ва $x > 0$ ларда $y'' > 0$. Демак, $x < 0$ ларда y қавариқ, $x > 0$ ларда ботиқ ва $x = 0$ нуқта эса функциянинг букилиш нуқтаси экан.

Бу функциянинг графиги 5.4- чизмада тасвирланган.



5.4- чизма

2) I. $y = \frac{x^2}{1 - x^2}$ функциянинг аниқланиш соҳасига сонлар ўқидаги $x_1 = -1$ ва $x_2 = 1$ нуқталар кирмайди.

II. Бу функция $x_1 = -1$ ва $x_2 = 1$ нуқталарда узилишга эга. Лимитларни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^2}{1 - x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{x^2}{1 - x^2} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{1 - x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{1 - x^2} = -\infty.$$

III. Бу функция жуфт функциядир. Шунинг учун унинг графигини $[0, \infty[$ оралиқда ясаб, уни $]-\infty, 0]$ оралиққа кўчирамиз.

IV. Бу функциянинг графиги фақат (0,0) нуқтадагина координата ўқлари билан кесишади ва]— ∞, — 1[,]1,∞[оралиқларда манфий,]— 1, 1[оралиқда мусбат бўлади.

V. а) $x = -1$ ва $x = 1$ тўғри чизиқлар бу функциянинг вертикал асимптоталари бўлади;

б) $$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(1-x^2)} = 0,$$

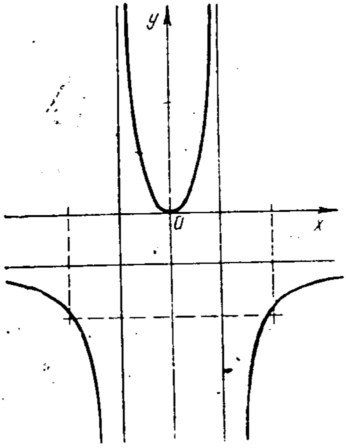
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x^2} = -1.$$

Демак, $y = -1$ тўғри чизиқ бу функциянинг горизонтал асимптотаси бўлади.

VI. $y' = \frac{2x(1-x^2) - 2x\cdot x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$.

Демак, $x = 0$ бўлгандагина $y' = 0$ бўлади. Бу ерда $x < 0$ бўлганда $y' < 0$ ва $x > 0$ бўлганда $y' > 0$ бўлади. Яъни $x = 0$ нуқтада берилган функция минимумга эришади ва $y(0) = 0$ бўлади.

VII. Бу функциянинг иккинчи тартибли $y'' = \frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$ ҳосиласи барча x ларда нолдан фарқли. Демак, берилган функциянинг букилиш нуқтаси йўқ. [0,1] оралиқда $y'' > 0$ ва]1, ∞[оралиқда $y'' < 0$ бўлади, шунинг учун ҳам бу эгри чизиқ [0,1[орациқда ботиқ ва]1, ∞[оралиқда қавариқдир. Бу функциянинг графиги 5.5-чизмада тасвирланган.



5.5- чизма

3) I. Бу функция]— ∞, ∞ [да аниқланган ва узлуксиз.

II. Тоқ ҳам, жуфт ҳам, даврий ҳам эмас.

III. Бу функция Ox ўқи билан кесишмайди. Oy ўқи билан (0, — 1) нуқтада кесишади.]— ∞, ∞ [да манфий, чунки $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+1}$.

IV. а)]— ∞, ∞ [да узлуксиз бўлгани учун, вертикал асимптотаси бўлмайди.

б) Ушбу

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}\right) =$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1})(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x+1})}{\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x(x+1)})+\sqrt[3]{x+1}}=0$$

ифодадан $x\to\infty$ да $x\to 0$ экани келиб чиқади. Шунинг учун оғма асимптотаси бўлмайди. $y=0$ эса горизонтал асимптота бўлади.

V. $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt{x^2(x+1)^2}}$.

Демак, биринчи тартибли ҳосила $x_1=-\frac{1}{2}$ нуқтада нолга тенг ва $x_2=-1$, $x_3=0$ нуқталарда ∞ га айланади. Иккинчи тартибли

$$y''=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}-\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}=$$

$$=-\frac{2\left[\sqrt[3]{(x+1)^5}-\sqrt[3]{x^5}\right]}{9\sqrt[3]{[x(x+1)]^5}}$$

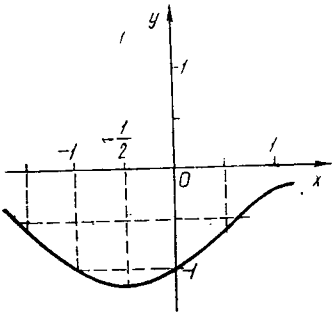
ҳосила ҳеч бир нуқтада нолга айланмайди, аммо $x_1=-1$ ва $x_2=0$ нуқталарда чексизликка айланади.

Энди юқоридаги маълумотлардан фойдаланиб жадвал тузамиз:

x	-1	$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$(0,\infty)$	1
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y''	∞	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	
y	-1	ботиқ	$-\sqrt[3]{4}$	ботиқ	қавариқ	қавариқ	$-0{,}26$
	↘		min		↗		

Бу функциянинг графиги 5.6- чизмада тасвирланган

4) I. $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ функция ҳам, сонлар ўқидаги барча нуқталарда аниқланган ва узлуксиз.



5.6- чизма

II. Бу функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас, аммо даври 2π га тенг. Шунинг учун бу функцияни $[0,2\pi]$ оралиқда текшириш етарлидир.

III. Узлуксиз ва даврий бўлгани учун асимптотаси йўқ.

IV. Биринчи тартибли ҳосилани ҳисоблаймиз:

$$y' = \cos 2x - \sin x.$$

Бу ифода $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$ нуқталарда нолга тенг. Энди иккинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y'' = -2\sin 2x - \cos x.$$

Бу ифода $[0,2\pi]$ оралиқда

$$x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \pi + \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right),\ x_3 = \frac{3\pi}{2},\ x_4 = 2\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$$

нуқталарда нолга тенг бўлади.

Энди юқоридаги маълумотлардан фойдаланиб, жадвал тузамиз.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{6}$	x_2	$\left(x_2, \frac{3\pi}{2}\right)$
y'	0	-2	0	$1\frac{1}{8}$	
y''	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$-$
y	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0			
	max				

Бу функциянинг графиги 5.7- чизмада тасвирланган.

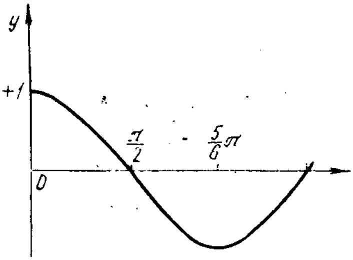
5) 1. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ функция $]-\infty, 0[$ ва $]0, \infty[$ оралиқларда аниқланган.

II. $x=0$ нуқта узилиш нуқтаси.

$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^2} = \infty\left(t=\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 0-0} y = \lim_{x\to 0-0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Демак, $x=0$ чизиқ бу функциянинг вертикал асимптотаси бўлади. Горизонтал асимптотаси йўқ.



5.7- чизма

III. Бу функциянинг экстремумини топиш учун биринчи ҳосилани ҳисоблаймиз.

$$y' = 2x\cdot e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = 2e^{\frac{1}{x}}\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

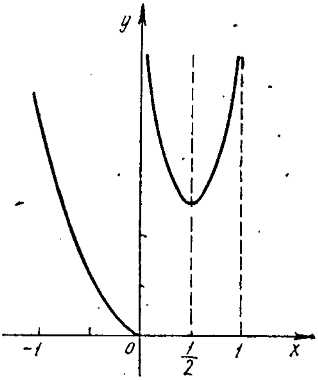
Демак, бу функция ягона $x=\frac{1}{2}$ критик нуқтага эга. Шу билан бирга $x\neq 0$ нуқталарда:

$$y'' = 2e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(2x^2-2x+1) > 0;$$

Демак, бу функция $]-\infty, 0[$ ва $]0, \infty[$ оралиқларда ботиқ бўлади. $x=\frac{1}{2}$ нуқтада эса локал минимумга эришади:

$$y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^2 \approx 1{,}87.$$

Юқоридаги маълумотлардан фойдаланиб, бу функциянинг графигини чизамиз. (5.8- чизма) ▲



5.8- чизма

☐. Функцияларни текширишнинг умумий схемасидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг графигини чизинг:

101. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

102. $y = \frac{1}{x} + x^2$.

103. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

104. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2}$.

105. $y = \frac{1}{4} x^4 - 8x$.

106. $y = x^2 e^{-4x}$

107. $$y = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ да} \\ 0; & x = 0 \text{ да.} \end{cases}$$

108. $y = 2 - x - x^3$. ■

VI БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ВА АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл тушунчаси. Асосий интеграллаш формулалари

1-таъриф. $X\subset R$ тўпламда $F(x)$ ва $f(x)$ функциялар берилган бўлсин. Агар X тўпламдаги барча x ларда $F'(x)=f(x)$ (яъни $dF(x)=f(x)dx$) тенглик бажарилса, $F(x)$ ни $f(x)$ нинг *бошланғич функцияси* дейилади.

Ҳар қандай узлуксиз функциянинг бошланғич функцияси чексиз кўп бўлиб, улар бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади. Ҳақиқатан ҳам, биринчидан, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси ва C ихтиёрий ўзгармас сон бўлса, $F(x)+C$ ҳам $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади. Чунки $(F(x)+C)'=F'(x)+0=F'(x)=f(x)$. Иккинчидан, $F_1(x)$ ва $F(x)$ лар $f(x)$ нинг бошланғич функциялари бўлса, $F_1(x)=F(x)+C$ бўлади. Чунки, $[F_1(x)-F(x)]'=F_1'(x)-F'(x)]=f(x)-f(x)=0$. Аниқланиш соҳасидаги барча нуқталарда ҳосиласи нолга тенг бўлган функция ўзгармас сон бўлгани учун $F_1(x)-F(x)=C$ дир. Демак, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси бўлса, унинг барча бошланғич функциялари $\{F(x)+C\}$ тўпламдан иборат бўлади.

2-таъриф. $f(x)$ функциянинг барча бошланғич функцияларидан иборат $\{F(x)+C\}$ тўпламни $f(x)$ функциянинг *аниқмас интеграли* дейилади ва $\int f(x)dx$ каби белгиланади. Шундай қилиб, $\int f(x)dx=F(x)+C$. Бу ерда $f(x)dx$ интеграл остидаги ифода, „$\int$“ — интеграл белгиси, C эса ихтиёрий ўзгармас сондан иборатдир. $F(x)$ эса $f(x)$ нинг бирор бошланғич функциясидир.

Аниқмас интегралнинг хоссалари:

I. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x)$ ёки $d\int f(x)dx=f(x)dx$.

II. $\int F'(x)dx=F(x)+C$ ёки $\int dF(x)=F(x)+C$.

III. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, яъни ўзгармас сонни интеграл белгисининг олдига чиқариш мумкин.

IV. $\int\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$, яъни йиғиндининг интеграли интеграллар йиғиндисига тенг.

Асосий интеграллар жадвали:

1. $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C,\ \mu \neq -1.$

2. $\int x^{-1}dx = \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. а) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a>0,\ a\neq 1).$ б) $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Бу формулаларнинг ҳар бири шу интеграл остидаги тенгламанинг ўнг томонидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларининг умумий қисмида ўринлидир.

1-мисол. Интегралнинг хоссалари ва асосий интеграллар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int \sqrt[3]{x^2}dx$; 2) $\int (x^2+5)^3 dx$;

3) $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx,\ x\neq 0$; 4) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;

5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x},\ x = k\pi$; 6) $\int 5^x dx$.

△. 1) $\int \sqrt[3]{x^2}dx$ интегрални топиш учун каср даражадан фойдаланиб, берилган интегрални $\int x^{\frac{2}{3}}dx$ кўринишда ёзиб оламиз, кейин 1-формуладан фойдаланамиз:

$$\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C.$$

2) $\int (x^2+5)^3 dx$ интегрални топиш учун аввал икки ҳад йиғиндисининг куби формуласидан фойдаланиб, интеграл остидаги функцияни ёйиб ёзамиз, кейин IV хосса ва 1-формуладан фойдаланамиз:

$$\int (x^2+5)^3 dx = \int (x^6 + 15x^4 + 75x^2 + 125)dx = \int x^6 dx + $$

$$+ 15\int x^4 dx + 75\int x^2 dx + 125\int dx = \frac{x^7}{7} + 3x^5 + 25x^3 +$$

$$+ 125x + C.$$

$$3) \int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}} dx + 5\int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} -$$

$$- \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{5}{3}x - 1\right) + C.$$

4) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$ ни $\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C.$$

5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ни топиш учун интеграл остидаги функцияни

$$\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

каби ўзгартириб оламиз. У ҳолда

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C.$$

6) $\int 5^x dx$ ни 3а-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C. \quad \blacktriangle$$

□. Асосий интеграллар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}$. *Жавоб.* $\frac{3}{2\sqrt[3]{5}}\sqrt[3]{x^2+C}$.

2. $\int (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^2 dx$. *Жавоб.* $\frac{1}{2}x^2-\frac{12}{11}x\sqrt[6]{x^5}+$ $+\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$.

3. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$. *Жавоб.* $-\frac{1}{x}-\mathrm{arctg}x+C$.

4. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$. *Жавоб.* $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C$.

5. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$. *Жавоб.* $-\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x+C$.

6. $\int \frac{3-2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$. *Жавоб.* $3\mathrm{tg}x+2\mathrm{ctg}x+C$.

7. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. *Жавоб.* $x+\cos x+C$.

8. $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$. *Жавоб.* $4\ln x-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C$.

9. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$. *Жавоб.* $e^x+\mathrm{tg}x+C$.

10. $\int 3^x\left(1-\frac{3^{-x}}{x^5}\right)dx$. *Жавоб.* $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{4x^4}+C$. ■

2-§. Аниқмас интегрални топиш усуллари

а) **Ўзгарувчини алмаштириш усули.** Теорема. $f(x)$ ва $\varphi(t)$ функциялар берилган ва $f(\varphi(t))$ аниқланган бўлсин. Агар $\varphi(t)$ дифференциалланувчи бўлиб, $f(x)$ нинг бошланғич функцияси мавжуд бўлса,

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

тенглик ўринли бўлади.

1-мисол. Қуйидаги интегралларни ўзгарувчини алмаштириш усули билан топинг:

1) $\int (x-3)^5 dx$; 2) $\int \sqrt{3x+5}\,dx$;

3) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; 4) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

5) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx;$ 6) $\int \operatorname{tg} x dx.$

△. 1) Агар $t = x - 3$ десак, $dt = dx$ бўлади. Бу белгилашдан фойдалансак, берилган интеграл $\int t^5 dt$ кўринишга келади. Энди бу интегрални жадвалдаги 1-формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$\int t^5 dt = \frac{t^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{6} t^6 + C = \frac{1}{6}(x-3)^6 + C.$$

2) $\sqrt{3x+5}dx$ интегрални ҳисоблаш учун ўзгарувчини алмаштирамиз:
$t = 3x + 5$, бундан

$$dt = d(3x+5) = (3x+5)'dx = 3dx.$$

dx ни топамиз: $dx = \frac{1}{3}dt$. Бу ҳолда берилган интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\int (3x+5)^{\frac{1}{2}} dx = \int t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}} dt.$$

Энди бу интегрални жадвалдаги 1-формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$\int \sqrt{3x+5}dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Энди берилган интегралдаги $\ln x$ нинг ўрнига t ни ва $\frac{dx}{x}$ нинг ўрнига dt ни қўйсак, у қуйидаги кўринишга келади:

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int \ln^3 x \frac{dx}{x} = \int t^3 dt.$$

Энди бу интегрални жадвалдаги 1-формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\ln^4 x + C.$$

3) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ интегрални топиш учун ўзгарувчини алмаштирамиз: $t = x^2 + 1$. Бу ҳолда $dt = d(x^2+1) = (x^2+1)'dx = 2xdx$ бўлади. Бундан $dx = \frac{1}{2}dt$, энди берилган инте-

гралдаги x^2+1 нинг ўрнига t ни ва xdx нинг ўрнига $\frac{1}{2}dt$ ни қўйсак, у

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$$

кўринишга келади. Демак, ўзгарувчини юқоридагидек алмаштиргандан кейин берилган интеграл жадвалдаги 2-формулага келар экан. Шунинг учун

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

4) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ интегрални топиш учун ўзгарувчини алмаштирамиз: $t^2 = x$, кейин dx ни топамиз:

$$dx = 2tdt.$$

Бу ҳолда, берилган интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^t}{t}2t\,dt = 2\int e^t dt.$$

Энди бу интегрални жадвалдаги 3,б - формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^t \cdot dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

5) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$ интегрални ҳисоблаш учун ўзгарувчини алмаштирамиз: $t = \ln x$, бундан dt ни топамиз:

$$dt = d(\ln x) = (\ln x)'\,dx = \frac{1}{x}dx.$$

6) $\int \mathrm{tg}\,xdx$ интегрални ҳисоблаш учун ҳам аввал ўзгарувчини алмаштирамиз: $t = \cos x$, бундан dt ни топамиз:

$$dt = d(\cos x) = (\cos x)'dx = -\sin xdx.$$

Энди берилган интегралдаги $\cos x$ нинг ўрнига t ни ва $\sin xdx$ нинг ўрнига $-dt$ ни қўйсак, у қуйидаги кўринишга келади:

$$\int \mathrm{tg}\,xdx = \int \frac{\sin xdx}{\cos x} = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t}.$$

Бу интегрални жадвалдаги 2-формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$\int \mathrm{tg}x dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C. \ ▲$$

□. Қуйидаги интегралларни ўзгарувчини алмаштириш усули билан топинг:

11. $\int \sqrt{5x+3}\,dx.$ *Жавоб.* $\frac{2}{15}(5x+3)\sqrt{5x+3} + C.$

12. $\int x(x^2-1)^3 dx.$ *Жавоб.* $\frac{1}{8}(x^2-1)^4 + C.$

13. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx.$ *Жавоб.* $\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C.$

14. $\int \frac{dx}{(x-1)^4}.$ *Жавоб.* $-\frac{1}{3(x-1)^3} + C.$

15. $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}.$ *Жавоб.* $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}x^3 + C.$

16. $\int \mathrm{ctg}x dx.$ *Жавоб.* $\ln(\sin x) + C.$

17. $\int \cos(5x-3)dx.$ *Жавоб.* $\frac{1}{5}\sin(5x-3) + C.$

18. $\int \sin^2 x \cos x dx.$ *Жавоб.* $\frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

19. $\int \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx.$ *Жавоб.* $\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2 + C.$

20. $\int x\cdot e^{x^2}dx.$ *Жавоб.* $\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$ *Жавоб.* $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + C.$

22. $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}.$ *Жавоб.* $\mathrm{arctg}(\sin x) + C.$

б) **Бўлаклаб интеграллаш усули.** Бу усул, $u(x)$ ва $v(x)$ лар дифференциалланувчи функциялар бўлганда, $\int udv$ интегрални $\int vdu$ интегралга келтиришдан иборат бўлиб,

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

формулага асосланган.

2-мисол. Қуйидаги интегралларни бўлаклаб интеграллаш усули билан топинг:

1) $\int x\cdot\cos x dx;$ 2) $\int \ln x dx;$

3) $\int \mathrm{arctg}\, x dx$; 4) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$;

5) $\int x \cdot e^{-2x} dx$.

△. 1) $\int x\cos x dx$ ни топиш учун $u = x$, $dv = \cos x dx$ белгилашларни киритамиз. Бу ҳолда

$$du = dx, \quad v = \sin x$$

бўлади. Демак,

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

2) $\int \ln x dx$ ни топиш учун $u = \ln x$, $dv = dx$ белгилашларни киритамиз. Бу ҳолда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

бўлади. Демак,

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

3) $\int \mathrm{arctg}\, x dx$ интегрални топиш учун $u = \mathrm{arctg}\, x$, $dv = dx$ белгилашларни киритамиз. Бу ҳолда

$$du = \frac{dx}{11x^2}, \quad v = x$$

бўлади. Демак,

$$\int \mathrm{arctg}\, x dx = x \,\mathrm{arctg}\, x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \cdot \mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.$$

4) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ интегрални топиш учун $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ белгилашларни киритамиз. Бу ҳолда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = 2\sqrt{x}$$

бўлади. Демак,

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 2\int \sqrt{x} \frac{dx}{x} = 2\sqrt{x} \ln x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$
$$= 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x} (\ln x - 2) + C.$$

5) $\int x e^{-2x} dx$ ни топиш учун $u = x$, $dv = e^{-2x} dx$ белгилашларни киритамиз. Бу ҳолда

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{-2x}$$

бўлади. Демак,

$$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2} xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C = -\frac{1}{4} e^{-2x}(2x+1) + C. \quad ▲$$

□. Қуйидаги интегралларни бўлаклаб интеграллаш усули билан топинг:

23. $\int x \cdot \sin x dx.$	*Жавоб.* $-x\cos x + \sin x + C.$
24. $\int x \cdot \ln x dx.$	*Жавоб.* $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$
25. $\int \arcsin x dx.$	*Жавоб.* $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$
26. $\int \ln^2 x dx.$	*Жавоб.* $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C.$
27. $\int (x^2+1)e^x dx.$	*Жавоб.* $e^x(x^2 - 2x + 3) + C.$
28. $\int x\cos 2x dx.$	*Жавоб.* $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$
29. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$	*Жавоб.* $\frac{2}{3} x \sqrt{x}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C.$
30. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$	*Жавоб.* $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$
31. $\int x^2 e^{3x} dx.$	*Жавоб.* $\frac{1}{27} e^{3x}(9x^2 - 6x + 12) + C.$
32. $\int x^2 \ln x dx.$	*Жавоб.* $\frac{1}{9} x^3 (\ln x - 3) + C.$ ■

3-§. Рационал касрларни интеграллаш

Сурат ва махражи

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

кўпҳадлардан иборат $\frac{P(x)}{Q(x)}$ касрга *рационал каср* дейилади. Агар $n < m$ бўлса, бу касрни *тўғри каср*, $n \geqslant m$ бўлса, бу касрни *нотўғри каср* дейилади.

Агар $n \geqslant m$ бўлса, $P(x)$ ни $Q(x)$ га бўлиб, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ни ҳамма вақт тўғри касрга келтириш мумкин. Ана шундай касрларни интеграллашнинг баъзи оддий ҳолларини кўрамиз:

I. $\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C.$

II. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int(x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C.$

III. $\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$

III интегрални ҳисоблашда x^2+px+q квадрат учҳаднинг илдизларига қараб, учта ҳол бўлиши мумкин.

а) Квадрат учҳаднинг илдизлари ҳақиқий ва бир хил: $x_1=x_2=x_0$. Бу ҳолда $x^2+px+q=(x-x_0)^2$ бўлиб, $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ интеграл иккинчи ҳолга келади.

б) Квадрат учҳаднинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил: $x_1\neq x_2$. Бу ҳолда $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$ бўлади. Энди берилган касрни оддий касрларнинг йиғиндиси шаклида қуйидагича

$$\frac{1}{x^2+px+q}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

ёзиш мумкин. Бу ердаги A ва B ўзгармас сонларни ўзаро тенг кўпҳадларнинг мос коэффициентларининг тенглигидан фойдаланиб топилади. Шундай қилиб, бу ҳол ҳам биринчи ҳолга келар экан.

с) x^2+px+q квадрат учҳаднинг илдизлари комплекс сон бўлса, интеграл қуйидагича топилади:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}x\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

1-мисол. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int\frac{dx}{x^2-6x+9}$; 2) $\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}$;

3) $\int\frac{dx}{x^2-5x+4}$; 4) $\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$.

1) $\int\frac{dx}{x^2-6x+9}$ интегралда $x^2-6x+9=(x-3)^2$, шунинг учун

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+9}=\int\frac{dx}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)^{1-2}}{1-2}+C=C-\frac{1}{x-3}.$$

2) $\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ интеграл остидаги функцияни икки оддий касрларнинг йиғиндиси шаклида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right).$$

Шунинг учун

$$\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\int\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)dx=\frac{1}{b-a}\int\frac{dx}{x-b}-$$
$$-\frac{1}{b-a}\int\frac{dx}{x-a}=\frac{1}{b-a}\ln|x-b|-\frac{1}{b-a}\ln|x-a|+C=$$
$$=\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|+C.$$

3) $\int\frac{dx}{x^2-5x+4}$ интегралда $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ бўлгани учун интеграл 2-мисолдаги каби

$$\int\frac{dx}{x^2-5x+4}=\int\frac{dx}{(x-1)(x-4)}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C$$

кўринишда бўлади.

4) $\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$ интегралда x^2-2x+5 нинг илдизлари комплекс сон, шунинг учун

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+5}=\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}=\int\frac{dx}{(x-1)^2+\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

☐. Қуйидаги интегралларни топинг:

33. $\int\frac{dx}{(x+1)^5}$. *Жавоб.* $-\frac{1}{4(x+1)^4}+C.$

34. $\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$. *Жавоб.* $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$

35. $\int\frac{dx}{x^2+6x+5}$. *Жавоб.* $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.$

36. $\int e^{x^2}d_x$ *Жавоб.* $\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

37. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$. *Жавоб.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$

38. $\int\frac{dx}{(x^2-2x+1)^2}$. *Жавоб.* $-\frac{1}{3(x-1)^3}+C.$

39. $\int\frac{xdx}{x+2}$. *Жавоб.* $x-2\ln|x+2|+C.$

40. $\int\frac{dx}{x^2+8x+7}$. *Жавоб.* $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right|+C.$

41. $\int \frac{dx}{4x^2+4x-3}$. *Жавоб.* $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right|+C$.

42. $\int \frac{4dx}{3x^2+8x-2}$. *Жавоб.* $\frac{2}{\sqrt{22}}\ln\left|\frac{3+4-\sqrt{22}}{3+4+\sqrt{22}}\right|+C$. ■

IV. $\int \frac{a_1x+a_0}{b_2x^2+b_1x+b_0}\,dx = \frac{a_1}{b_2}\int \frac{x+\frac{a_0}{a_1}}{x^2+\frac{b_1}{b_2}x+\frac{b_0}{b_2}}\,dx$. Аввал $b = \frac{a_1}{b_2}$; $a = \frac{a_0}{a_1}$, $p = \frac{b_1}{b_2}$, $q = \frac{b_0}{b_2}$ деб белгилаб оламиз. У ҳолда

$$\int \frac{a_1x+a_0}{b_0x^2+b_1x+b_0}dx = b\int \frac{x+a}{x^2+px+q}\,dx = \frac{b}{2}\int \frac{2x+2a}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{b}{2}\int \frac{2x+p+2a-p}{x^2+px+q}\,dx = \frac{b}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx +$$

$$+ \frac{b}{2}\int \frac{2a-p}{x^2+px+q}dx = \frac{b}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + b\left(a-\frac{p}{2}\right) \times$$

$$\times \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{b}{2}\ln|x^2+px+q| + b\left(a-\frac{p}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Бу ифодадаги интеграл x^2+px+q квадрат учҳаднинг илдизига қараб, III интегрални ҳисоблашдаги a, b, c ҳолларнинг биттасига келади.

V. $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ интеграл махражидаги кўпҳаднинг илдизи каррали бўлган ҳол. Бу хилдаги интегралларни мисолларда тушунтирамиз.

2-мисол. Қуйидаги интегралларни ҳисоблайлик:

1) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^3}$; 2) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

△. 1) даги интегрални топиш учун интеграл остидаги тўғри касрни содда касрларнинг йиғиндиси шаклида ёзиб оламиз:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}.$$

Бу тенгликни қаноатлантирувчи коэффициентларни топиш учун тенгликнинг икки томонини $(x-1)(x-2)^3$ га кўпайтириб

$$A(x-2)^3 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)(x-2) + D(x-1) = x$$

тенгламага ёки ундан

$$A(x^3-6x^2-12x-8) + B(x^3-5x^2+8x-4) + C(x^2-3x+2) +$$
$$+ D(x-1) = x$$

тенгламага эга бўламиз. Энди x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенглаштириб, қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ C - 6A - 5B = 0, \\ 12A + 8B - 3C + D = 1, \\ 2C - D - 8A - 4B = 0. \end{cases}$$

Бу системани ечиб $A = -1$. $B = 1$, $C = -1$ ва $D=2$ ларни топамиз. Демак,

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{-1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Энди бу тенгликнинг ҳар иккала томонини интеграллаймиз:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2} = -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} +$$

$$+ 2\int \frac{dx}{(x-2)^3} = -\ln|x-1| + \ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} +$$

$$+ C = \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{2(x-2)^2} + C.$$

2) $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$ интеграл остидаги каср махражининг илдизлари ҳақиқий, уларнинг орасида карралилари ҳам бор:

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1).$$

Шунинг учун интеграл остидаги касрни

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} - \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

содда касрга ёйиш мумкин. Бундан

$$Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 = 1 \text{ ёки}$$

$$(A+C)x^2 + (B-A)x - B = 1.$$

Бундан

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B - A = 0, \\ -B = 1. \end{cases}$$

Демак, $A = B = -1$; $C = -A = 1$. Юқоридаги A, B, C ларнинг ўрнига бу қийматларини қўйиб,

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

ифодага эга бўламиз. Энди бу ифоданинг иккала томонини интеграллаймиз:

$$\int\frac{dx}{x^3-x}=\int\frac{dx}{x^2(x-1)}=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}=\ln|x-1|-$$

$$-\ln|x|+\frac{1}{x}+C=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}=C.\blacktriangle$$

□. Қуйидаги интегралларни топинг:

43. $\int\frac{dx}{x^3+x}$. *Жавоб.* $\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

44. $\int\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx$. *Жавоб.* $\ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right|-\frac{2}{x-1}+C$.

45. $\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$. *Жавоб.* $\ln\left|\frac{x^2}{x+2}\right|-\frac{14}{x+2}+C$.

46. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$. *Жавоб.* $\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right|-\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}$.■

VI. $\int\frac{P(x)}{Q(x)}$ интегралдаги $Q(x)$ кўпҳаднинг кўпайтувчилари ичида иккинчи даражалилари бор. Бу хилдаги интегралларни ҳам мисолларда тушунтирамиз.

3-мисол. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; 2) $\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$.

△. 1) Интеграл остидаги рационал каср содда касрга қуйидагича ёйилади:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

Бундан

$$(Ax+B)(x^2+4)+(Dx+E)(x^2+1)=1.$$

Демак,

$$(A+D)x^2+(B+E)x^2+(4A+D)x+(4B+E)=1.$$

Бу тенгликдаги бир хил даражали номаълумларнинг олдидаги коэффициентларини тенглаштириб

$$\begin{cases}A+D=0,\\4A+D=0,\\B+E=0,\\4B+E=1\end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадан эса $A=0$, $D=0$, $B=\frac{1}{3}$, $E=-\frac{1}{3}$ лар келиб чиқади. Шундай қилиб

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-$$

$$-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

2) интеграл остидаги рационал касрни содда касрга қуйидагича ёйилади:

$$\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}=\frac{7x-15}{x(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2-2x+5}.$$

Бундан

$$(A+B)\,x^2+(D-2A)\,x+5A=7x-15$$

тенгламага эга бўламиз. У ҳолда $A=-3$, $B=3$, $D=$ бўлади. Демак,

$$\int\frac{7x-15}{x^3-x^2+5x}\,dx=-\int\frac{3}{x}\,dx+\int\frac{3x+1}{x^2-2x+5}=-3\ln x+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{2x+\frac{2}{3}}{x^2-2x+5}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-2+2\frac{2}{3}}{x^2-2x+5}\,dx-3\ln|x|=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+5}-4\int\frac{dx}{x^2-2x+5}-3\ln|x|=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5|-3\ln|x|+4\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5|-3\ln|x|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.\ ▲$$

□. Қуйидаги интегралларни топинг.

47. $\int\frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)}$. *Жавоб.* $\frac{1}{10\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-$

$-\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

48. $\int\frac{dx}{x^3+4x}$. *Жавоб.* $\frac{1}{4}\ln\frac{|x|}{\sqrt{4+x^2}}+C.$

49. $\frac{5x+2}{x^2+2x+10}$. *Жавоб.* $\frac{5}{2}\ln|x^2+2x+10|-$

$-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$

50. $\frac{dx}{x^4+3x^2}$. *Жавоб.* $-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+$

$+C.$ ■

4-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

R рационал функция бўлсин. $\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \ldots)dx$ интегрални қарайлик. Бу ерда $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$, $\beta = \frac{m_2}{n_2}$, ... рационал сонлар бўлиб, k — уларнинг умумий махражи бўлса, у ҳолда $x = t^k$ алмаштириш ёрдамида юқоридаги интеграл рационал функцияни интеграллашга келади. $\int R(x, (ax+b)^{\alpha}, (ax+b)^{\beta}, \ldots)\,dx$, $\int R\left(x\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \ldots\right)dx$ интеграллар эса $ax+b=t^k$, $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ алмаштиришлар ёрдамида рационал функцияни интеграллашга келади.

1-мисол. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; 2) $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$; 4) $\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$;

5) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

$\triangle$. 1) $x = t^6$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $dx = 6t^5dt$ бўлади. Демак,

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \int\frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3} = 6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6\int dt - 6\int\frac{dt}{1+t^2} = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C =$$

$$= 6\int(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}) + C.$$

2) $t^2 = \frac{x-2}{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $x = \frac{2}{1-t^2}$ ва $dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$ бўлади. Демак,

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx = \int\frac{1}{2}(1-t^2)\,t\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt = 2\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)} =$$

$$= 2\int\frac{1-(1-t^2)}{1-t^2}dt = 2\int\frac{dt}{1-t^2} - 2\int dt = \ln\frac{1+t}{1-t} - 2t + C =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}} - 2\sqrt{\frac{x-2}{x}} + C.$$

3) $t^3=2x-3$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $x=\frac{1}{2}(t^3+3)$ ва $dx=\frac{3}{2}t^2dt$ бўлади. Демак,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}=\int\frac{\frac{3}{2}t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int tdt-\frac{3}{2}\int dt+\int\frac{dt}{t+1}=\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{3}{4}(2x-3)^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}(2x-3)^{\frac{1}{3}}+\ln|\sqrt[3]{2x+1}+1|+C.$$

4) Интеграл остидаги ифода x ва $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ га нисбатан рационал функциядир. Шунинг учун $t^3=\frac{2-x}{2+x}$ алмаштиришни бажарамиз. Бундан

$$x=\frac{2-2t^3}{1+t^3};\ 2-x=\frac{4t^3}{1+t^3}\ \text{ва}\ dx=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

бўлади. Демак,

$$\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx=-\int\frac{2(1+t^3)t\cdot12t^2}{16t^6(1+t^3)^2}dt=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=$$

$$=\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

5) $t^2=x^2+2$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $x^2=t^2-2$ ва $xdx=tdt$ бўлади.
Демак,

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{(t^2-2)tdt}{t}=\int(t^2-2)dt=\int t^2dt-2\int dt=$$

$$=\frac{1}{3}t^3-2t+C=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3}-2\sqrt{x^2+2}+C.$$ ▲

□. Қуйидаги интегралларни топинг.

51. $\int\frac{1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx.$ *Жавоб.* $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C.$

52. $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx.$ *Жавоб.* $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$

53. $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$ *Жавоб.* $C-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}.$

54. $\int x\sqrt{3-x}\,dx.$ *Жавоб.* $\frac{2}{5}(x^2-x-6)\sqrt{3-x}+C.$

55. $\int x\sqrt{a-x}\,dx$. *Жавоб.* $\frac{2}{15}(3x^2-ax-2a^2)\times$
$\times\sqrt{a-x}+C$.

56. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$. *Жавоб.* $\frac{2x+1}{12}(2\sqrt{2x+1}-3)+C$.

57. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. *Жавоб.* $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}+C$.

58. $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. *Жавоб.* $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$.

59. $\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$. *Жавоб.* $\left(1-\frac{1}{2}x\right)\sqrt{1-x^2}-$
$-\frac{3}{2}\arcsin x+C$.

60. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$. *Жавоб.* $\frac{1}{3}(x^2-4)\sqrt{x^2+2}+C$.

5-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш

1. $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$ кўринишдаги интегрални қарайлик. Бу ерда $R(\sin x,\ \cos x)$ ифода $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг рационал функцияси бўлсин. Бу хилдаги интегралда тўртта хусусий ҳол бўлади:

1) Агар $\cos x$ нинг ишораси ўзгариши билан $R(\sin x,$ $\cos x)$ нинг ишораси ўзгарса, $t=\sin x$ алмаштириш ёрдамида $R(\sin x,\ \cos x)$ функцияни t га боғлиқ рационал функцияга келтирилади.

2) Агар $\sin x$ нинг ишораси ўзгариши билан R $(\sin x,$ $\cos x)$ функциянинг ишораси ўзгарса, $t=\cos x$ алмаштириш орқали $R(\sin x,\ \cos x)$ функция t га боғлиқ рационал функцияга келтирилади.

3) Агар $\sin x$, $\cos x$ ларнинг ишоралари бир вақтда ўзгарганда $R(\sin x,\ g\cos x)$ функциянинг ишораси ўзгармаса, $t=\mathrm{tg}x$ алмаштириш ёрдамида $R(\sin x,\ \cos x)$ функция t га боғлиқ рационал функцияга келтирилади.

4) Агар $R(\sin x,\ \cos x)$ функция учун юқоридаги ҳолларнинг ҳеч бири ўринли бўлмаса, $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ алмаштириш ёрдамида $R(\sin x,\ \cos x)$ функция t га боғлиқ рационал функцияга келтирилади. Ҳақиқатан-ҳам,

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} =$$
$$= \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$ ёки $x = 2\operatorname{arctg} t$, бундан $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ бўлади. Шунинг учун интеграл остидаги $\sin x$, $\cos x$ ва dx нинг ўрнига юқоридаги t орқали ифодаси қўйилса, интеграл остидаги ифода t нинг рационал функцияси бўлади.

Эслатма. Тўртинчи ҳолдаги $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ алмаштириш юқоридаги тўртта ҳол учун ҳам яроқлидир.

II. $\int \sin^{2n}x dx$; $\int \cos^{2n}x dx$; $\int \sin^{2n}x \cdot \cos^{2n}x dx$ кўринишдаги интегралларни топишда:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$
$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

формулалар ёрдамида интеграл остидаги функциянинг даражаси пасайтириб борилади ва охири $\sin kx$ ва $\cos kx$ функцияларнинг тоқ даражасига келтирилади.

III. $\int \operatorname{tg}^n x$; $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ кўринишдаги интеграллар $t = \operatorname{tg} x$ ва $t = \operatorname{ctg} x$ алмаштиришлар ёрдамида топилади.

IV. $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$; $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$; $\int \cos a x \cos bx \, dx$ кўринишдаги интеграллар

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right].$$
$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right],$$
$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right]$$

формулалар ёрдамида топилади.

V. $\sqrt{a^2 + x^2}$ ифодалар қатнашган интегрални топишда мос равишда $x = a\operatorname{tg} t$, $x = a\sin t$ каби белгилашлардан фойдаланиш қулайдир.

1-мисол. Қуйидаги интегралларни топинг.

1) $\int \sin^5 x dx$; 5) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$;
2) $\int \sin^4 x \cos x dx$; 6) $\int \sin 3x \cdot \sin 4x dx$;

3) $\int\cos^4xdx$;   7) $\int\cos\frac{4}{3}x\cdot\cos 3xdx$;

4) $\int \mathrm{tg}^2xdx$;   8) $\int\sqrt{4-x^2dx}.$

△. 1) $\int\sin^5xdx$ интеграл I турдаги интегралнинг иккинчи хили бўлгани учун аввал берилган интегрални

$$\int\sin^5xdx=\int\sin^4x\sin xdx=\int(1-\cos^2x)^2\cdot\sin xdx$$

кўринишда ёзиб олиб, кейин $t=\cos x$ деб белгиласак, берилган интеграл

$$\int\sin^5xdx=-\int(1-t^2)^2dt=-\int(1-2t^2+t^4)dt$$

кўринишга келади. Демак,

$$\int\sin^5xdx=-\int dt+2\int t^2dt-\int t^4dt=-t+\frac{2}{3}t^3-$$

$$-\frac{1}{5}t^5+C=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos 5x+C$$

бўлар экан.

2) $\int\sin^4x\cos xdx$ интегрални топиш учун $t=\sin x$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $dt=\cos xdx$ бўлгани учун

$$\int\sin^4x\cos xdx=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{5}\sin^5x+C$$

бўлади.

3) $\int\cos^4xdx$ интегрални топиш учун II қоидани қўлланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\cos^4xdx=\int(\cos^2x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos2x)^2dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int dx+\int\cos2xd(2x)+\int\cos^22xdx.\right.$$

Бу интеграллардан биринчи иккитаси жадвалдаги интеграллардир, учинчиси эса яна II қоидадан фойдаланиб топилади:

$$\int\cos^22xdx=\frac{1}{2}\int(1+\cos4x)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos4xd(4x)=$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin4x.$$

Бу ифодани юқоридаги тенгламага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\cos^4xdx=\frac{1}{4}(x+\sin2x+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin4x)+C=$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{32}\sin4x+C.$$

4) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$ интегрални топиш учун III қоидани қўллanамиз. У ҳолда $t = \mathrm{tg}x$, $x = \mathrm{arctg}t$ ва $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ бўлади. Демак,

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int t^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2} dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= t - \mathrm{arctg}t + C = \mathrm{tg}x - x + C$$

бўлар экан.

5) $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^3 \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx =$
$$= \int \sin^3 x(1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx.$$

Энди $t = \sin x$ алмаштиришни бажарсак, берилган интеграл қуйидагича топилади:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx = \int t^3(1-t^2)dt = \int t^3 dt - \int t^5 dt =$$
$$= \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{6} t^6 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

6) $\int \sin 3x \sin 4x dx$ интегрални IV қоида ёрдамида топилади:

$$\int \sin 3x \cdot \sin 4x dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos(3-4)x - \cos 7x\right] dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos x dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + C.$$

7) $\int \cos\frac{4}{3}x\cos 3x dx$ интеграл ҳам IV қоида ёрдамида топилади:

$$\int \cos\frac{4}{3}x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos\left(\frac{4}{3}+3\right)x + \cos\left(\frac{4}{3}-3\right)x\right] dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\cos\frac{13}{3}x + \cos\frac{5}{3}x\right] dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{13}{3}} \sin\frac{13}{3}x + \frac{1}{2} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{\frac{5}{3}} \sin\frac{5}{3}x + C = \frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x + \frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x + C.$$

8) $\int \sqrt{4-x^2}dx$ интегрални топиш учун $x = 2\sin^2 t$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $dx = 4\sin t \cdot \cos t dt$ ва $t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$ бўлади. Демак,

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 4\sin t \cdot \cos t dt =$$

$$= 8\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\sin t\cos t\,dt = 8\int\cos^2 t\cdot\sin t\,dt =$$

$$= -8\int z^2dz = -\frac{8}{3}z^3 + C = -\frac{8}{3}\cos^3 t + C =$$

$$= -\frac{8}{3}\cos^3\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + C = -\frac{8}{3}\left(\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)^3 + C$$

бўлади. ▲

□. Қуйидаги интегралларни топинг.

61. $\int\cos^5 x dx$; *Жавоб.* $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$

62. $\int\sin^4 x dx$; *Жавоб.* $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

63. $\int\sin^7 x\cos x dx$; *Жавоб.* $\frac{1}{8}\sin^8 x + C.$

64. $\int\cos^4 x\sin x dx$; *Жавоб.* $-\frac{1}{5}\cos^5 x + C.$

65. $\int \mathrm{tg}^3 x dx$; *Жавоб.* $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{2}\ln(1 + \mathrm{tg}^2 x) + C.$

66. $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$; *Жавоб.* $\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg}\, x - x + C.$

67. $\int\sin^3 x\cos^5 x dx$; *Жавоб.* $\frac{1}{8}\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos 6x + C.$

68. $\int\sin 3x\cos 5x dx$; *Жавоб.* $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$

69. $\int\sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx$; *Жавоб.* $\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sin(\alpha-\beta)x -$

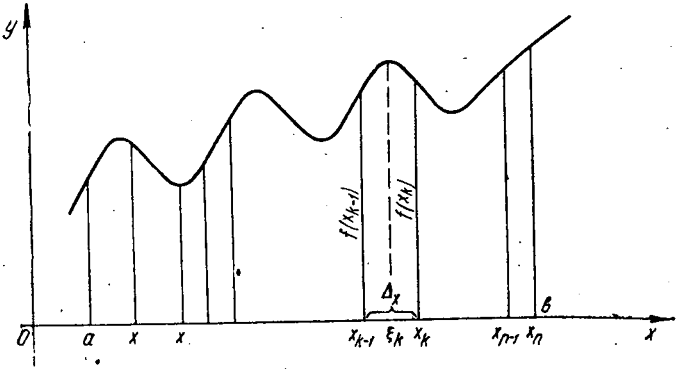
$-\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\sin(\alpha+\beta)x + C.$

70. $\int\sqrt{9-x^2}dx$; *Жавоб.* $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} +$

$+\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C.$ ■

6- §. Аниқ интегралнинг таърифи, хоссалари ва аниқмас интеграл билан боғланиши

Бизга $[a, b]$ ёпиқ оралиқда $y = f(x)$ чегараланган функция берилган бўлсин. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нуқталар билан $[a, b]$ оралиқни n та $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ оралиқларга бўламиз. Бу оралиқларнинг узунликларини мос равишда Δx_1, Δx_2, $\ldots$ Δx_n лар билан белгилаймиз. Бу ерда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ (6.1- чизма). Энди ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ оралиқдан ихтиёрий



6.1- чизма

бир ξ_k нуқтани олиб, $f(x)$ нинг бу нуқтадаги $f(\xi_k)$ қийматини ҳисоблаймиз. Бу миқдорлардан

$$S_n = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n \qquad (1)$$

йиғиндини тузамиз. Бу йиғиндини $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги *интеграл йиғиндиси* дейилади.

Интеграл йиғиндининг миқдори оралиқни бўлаклаш сонига, бўлаклаш усулига ва нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлади.

Энди Δx_1, Δx_2, . . . , Δx_n ларнинг энг каттасини λ билан белгилаймиз, яъни $\lambda = \max\limits_k \Delta x_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

1- таъриф. Агар λ нолга интиладиган қилиб, n ни чексизликка интилтирганда, интеграл йиғинди S_n нинг лимити бўлаклаш усулига ва ξ_1, ξ_2, . . . , ξ_n нуқталарнинг танланишига боғлиқсиз бирор J сонга интилса, шу J сонни $f(x)$ нинг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интеграли дейилади ва у қуйидагича бегиланади:

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty(\lambda\to 0)} S_n .$$

Демак, λ нолга интиладиган қилиб, n ни чексизликка интилтирганда интеграл йиғindининг лимити аниқ интеграл бўлади.

Йиғинди белгисидан фойдалансак, бу ифодани

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty,(\lambda\to 0)} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу ерда a интегралнинг *қуйи чегараси*, b эса интегралнинг *юқори чегараси* дейилади.

Теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, $[a, b]$ оралиқда унинг аниқ интеграли мавжуд бўлади.*

Аниқ интегралнинг энг содда хоссалари

1. *Агар аниқ интегралнинг чегаралари алмаштирилса, унинг ишораси қарама-қаршисига ўзгаради:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx.$$

2. *Юқори ва қуйи чегараси тенг бўлган аниқ интеграл нолга тенг бўлади:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. *Интеграллаш оралиқларини бўлакларга бўлиш мумкин:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b.$$

4. *Ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисининг олдига чиқариш мумкин:*

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

5. *Йиғиндининг аниқ интеграли қўшилувчилар аниқ интегралларининг йиғиндисига тенг:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Аниқ интеграл Ньютон-Лейбницнинг

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

формуласи орқали ҳисобланади.

Демак, $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича аниқ интеграли $f(x)$ функциянинг бирор бошланғич функциясининг b нуқтадаги қийматидан a нуқтадаги қийматини айирилганига тенг.

1-мисол. Қуйидаги интегралларни ҳисоблайлик:

1) $\int\limits_1^3 x^3dx;$ 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx;$

2) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx;$ 5) $\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx;$

3) $\int\limits_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx;$ 6) $\int\limits_0^{a\sqrt{2}} \frac{dx}{a^2+x^2}.$

△. 1) $\int\limits_1^3 x^3dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_1^3 = \frac{1}{4}3^4 - \frac{1}{4}1^4 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} =$

$= \frac{80}{4} = 20.$

2) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx = \int\limits_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} =$

$= \frac{2}{3}2^3 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$

3) $\int\limits_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx = \int\limits_1^2 x^2dx + \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 - \frac{1}{3}x^{-3}\Big|_1^2 =$

$= \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{24} = \frac{64-1}{24} = \frac{63}{24}.$

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0 =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

5) $\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx = 3\cdot e^{\frac{x}{3}}\Big|_0^3 = 3e^{\frac{3}{3}} - 3e^0 = 3e - 3 = 3(e-1).$

6) $\int\limits_0^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_a^{a\sqrt{3}} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{3}}{a} -$

$- \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{a} = \frac{1}{a}(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}1) = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12a}.$ ▲

☐ Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

71. $\int\limits_1^3 3x^2dx.$ *Жавоб.* 26.

72. $\int\limits_0^4 (1+e^{\frac{x}{4}})dx.$ *Жавоб.* $4e$.

73. $\int\limits_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx.$ *Жавоб.* $6\frac{2}{3}$.

74. $\int\limits_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}.$ *Жавоб.* $\frac{8}{3}$.

75. $\int\limits_{-1}^1 (1-\sqrt[3]{x^2})dx.$ *Жавоб.* $\frac{4}{5}$.

76. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{3x-2}.$ *Жавоб.* $\frac{\ln 13}{3}$,

77. $\int\limits_0^1 \frac{dz}{(2z+1)^3}.$ *Жавоб.* $\frac{2}{9}$.

78. $\int\limits_0^\pi \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx.$ *Жавоб.* 0. ■

7- §. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, $x=\varphi(t)$ қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1) $\varphi(t)$ $[\alpha, \beta]$ оралиқда аниқланган, бир қийматли ва $\varphi'(t)$ узлуксиз бўлса;

2) t эркли ўзгарувчи $[\alpha, \beta]$ оралиқда ўзгарганда $x=\varphi(t)$ нинг қиймати $[a; b]$ дан чиқиб кетмасдан уни тўлдирса ва $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ бўлса, $f(\varphi(t))$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз бўлиб

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

формула ўринли бўлади. Бу формулани аниқ интегралда *ўзгарувчини алмаштириш формуласи* дейилади.

Баъзи ҳолларда $x=\varphi(t)$ алмаштириш ўрнига тескари $t=\psi(x)$ алмаштириш қўлланилади. Бу ҳолда α ва β бевосита $\alpha=\psi(a)$ ва $\beta=\psi(b)$ тенгликлардан аниқланади.

1-мисол. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

1) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)^2}$ 4) $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

2) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin x\,dx$;

3) $\int\limits_{-1}^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^2}$.

Δ. 1) $t=x+1$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $x=0$ бўлганда $t=1$ ва $x=1$ бўлганда $t=2$ бўлади. Демак,

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)^2}=\int\limits_1^2 \frac{(t+1)^2dt}{t^2}=\int\limits_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2}dt=\int\limits_1^2 dt+2\int\limits_1^2 \frac{dt}{t}+$$
$$+\int\limits_1^2 \frac{dt}{t^2}=t\Big|_1^2+2\ln t\Big|_1^2-\frac{1}{t}\Big|_1^2=2-1+2\ln 2-\frac{1}{2}+1=$$
$$=\frac{3}{2}+2\ln 2.$$

2) $t=\sqrt{e^x-1}$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $x=0$ бўлганда $t=0$ ва $x=\ln 2$ бўлганда $t=1$ бўлади. Шу билан бирга $t^2=e^x-1$ бўлиб, бундан $x_1=\ln(1+t)^2$ ҳамда $dx=\frac{2tdt}{1+t^2}$ бўлади. Демак,

$$\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int\limits_0^1 t\cdot\frac{2tdt}{1+t^2}=2\int\limits_0^1\frac{t^2dt}{1+t^2}=2\int\limits_0^1\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=$$
$$=2\int\limits_0^1 dt-2\int\limits_0^1\frac{dt}{1+t^2}=2t\Big|_0^1-2\operatorname{arctg} t\Big|_0^1=2-2\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}.$$

3) $\int\limits_{-1}^3 x^2\sqrt{9-x^2dx}$ интегрални ҳисоблаш учун $x=3\cos\varphi$ алмаштиришни бажарамиз, у ҳолда $x=-3$ бўлса, $\varphi=\pi$ ва $x=3$ бўлса, $\varphi=0$ бўлади. Шу билан бирга $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\cos^2\varphi}=3\sin\varphi$ ҳамда $dx=-3\sin\varphi d\varphi$ бўлади. Демак,

$$\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = \int\limits_{\pi}^{0} 9\cos^2\varphi 3\sin\varphi(-3)\sin\varphi d\varphi =$$

$$= -81\int\limits_{\pi}^{0}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \frac{81}{4}\int\limits_{0}^{\pi}(2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{81}{4}\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{81}{8}\int\limits_{0}^{\pi}2\sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{81}{8}\int\limits_{0}^{\pi}[1-\cos 4\varphi]d\varphi =$$

$$= \frac{81}{8}\int\limits_{0}^{\pi}d\varphi - \frac{81}{8}\int\limits_{0}^{\pi}\cos 4\varphi d\varphi = \frac{81}{8}\varphi\Big|_0^{\pi} - \frac{81}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{81}{8}\pi - \frac{81}{32}\sin 4\pi + \frac{81}{32}\sin 0 = \frac{81}{8}\pi.$$

4) $t=\sqrt{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $x=4$ бўлса, $t=2$ ва $x=9$ бўлса, $t=3$ бўлади. Шу билан бирга $x=t^2$ бўлиб, $dx=2tdt$ бўлади. Демак,

$$\int\limits_{4}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x}-1} = \int\limits_{2}^{3}\frac{2tdt}{t-1} = 2\int\limits_{2}^{3}\frac{t-1+1}{t-1}dt = 2\int\limits_{2}^{3}dt + 2\int\limits_{2}^{3}\frac{dt}{t-1} =$$

$$= 2t\Big|_2^3 - 2\ln(t-1)\Big|_2^3 = 2(3-2) - 2\ln(3-1) +$$

$$+ 2\ln(2-1) = 2 - 2\ln 2 + 2\ln 1 = 2(1-\ln 2).$$

5) $t=\cos x$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $x=0$ бўлса, $t=1$ ва $x=\frac{\pi}{2}$ бўлса, $t=0$ бўлади. Шу билан бирга $dt=-\sin x dx$ бўлади. Демак,

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x dx = -\int\limits_{1}^{0}t^2 dt = \int\limits_{0}^{1}t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

6) $t=\frac{1}{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $x=1$ бўлса, $t=1$ ва $x=2$ бўлса, $t=\frac{1}{2}$ бўлади. Шу билан бирга $dt=-\frac{dx}{x^2}$ бўлади. Энди аввал берилган интегрални бир оз ўзгартириб олиб, кейин бу алмаштиришлардан фойдалансак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x+x^2} = \int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)} = -\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t+1} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{t+1} = \ln(t+1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \ln 2 - \ln\left(\frac{1}{2}+1\right) = \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{2}{\frac{3}{2}} = \ln\frac{4}{3}\,.\ ▲$$

□. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

79. $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. *Жавоб.* 4.

80. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. *Жавоб.* $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.

81. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{2+\cos\varphi}$. *Жавоб.* $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

82. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$. *Жавоб.* $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

83. $\int\limits_0^{\sqrt{a}} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. *Жавоб.* $\frac{\pi a^2}{16}$.

84. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)dx$. *Жавоб.* $2\ln 2-1$. ■

8-§. Аниқ интегралда бўлаклаб интеграллаш

Агар u ва v лар $[a, b]$ оралиқда дифференциалланувчи бўлса, $\int\limits_a^b udv$ интегрални бўлаклаб интеграллаш $\int\limits_a^b udv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b vdu$ формула ёрдамида амалга оширилади.

1-мисол. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

1) $\int\limits_a^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin axdx$; 3) $\int\limits_e^{e^2} x\cdot\ln xdx$;

2) $\int\limits_{-a}^{a} x\cos\frac{x}{a}\,dx$; 4) $\int\limits_0^1 x\cdot e^x dx$.

△. 1) Агар $u = x + 3$ ва $dv = \sin axdx$ деб белгиласак, $du = dx$ ва $v = -\frac{1}{a}\cos ax$ бўлади. Бу ерда $u=x+3$ ва $v = -\frac{1}{a}\cos ax$ лар $\left[0,\ \frac{\pi}{2a}\right]$ оралиқда дифференциалланувчидир. Шунинг учун бу интегрални ҳисоблашда бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланиш мумкин:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}(x+3)\cdot\sin axdx = -\frac{x+3}{a}\cos ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\cos axdx =$$

$$= \frac{-\frac{\pi}{2a}+3}{a}\cos a\cdot\frac{\pi}{2a} + \frac{3}{a}\cos a\cdot 0 + \frac{1}{a^2}\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} =$$

$$= \frac{3}{a} + \frac{1}{a^2}\sin a\cdot\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{a^2}\sin a\cdot 0 = \frac{3}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{1+3a}{a^2}.$$

2) $u = x$ ва $dv = \cos\frac{x}{a}dx$ деб белгилаймиз. У ҳолда $du = dx$ ва $v = a\cdot\sin\frac{x}{a}$ бўлади. Бу ерда $u = x$ ва $v = a\cdot\sin\frac{x}{a}$ функциялар $[-a,\ a]$ оралиқда дифференциалланувчидир. Шунинг учун бу интегрални ҳисоблашда бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланиш мумкин:

$$\int_{-a}^{a} x\cos\frac{x}{a}dx = a\cdot x\sin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} - a\int_{-a}^{a}\sin\frac{x}{a}dx = a^2\sin 1 -$$

$$- a(-a)\cdot\sin(-1) - a\cdot a\left(-\cos\frac{x}{a}\right)\Big|_{-a}^{a} = a^2\sin 1 - a^2\sin 1 +$$

$$+ a^2\cos\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = a^2\cos 1 - a^2\cos(-1) = 0.$$

3) $u = \ln x$ ва $dv = xdx$ деб белгиласак, $du = \frac{dx}{x}$ ва $v = \frac{x^2}{2}$ бўлади. Бу ерда $u = \ln x$ ва $v = \frac{x^2}{2}$ функциялар $[e,\ e^2]$ оралиқда дифференциалланувчидир. Шунинг учун бу интегрални ҳисоблашда бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланиш мумкин:

$$\int_e^{e^2} x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2} - \frac{x^2}{4}\Big|_e^{e^2} =$$

$$= \frac{e^4}{2}\ln e^2 - \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{4} = \frac{e^4}{2}\cdot 2 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2 = \frac{1}{4}e^2(3e^2-1).$$

4) $u=x$ ва $dv=e^{x}dx$ белгилашларни киритамиз, у ҳолда $du=dx$ ва $v=e^{x}$ бўлади. Бу ерда $u=x$ ва $v=e^{x}$ функциялар $[0,\ 1]$ оралиқда дифференциалланувчидир. Шу сабабли бу интегрални ҳам бўлаклаб интеграллаш мумкин:

$$\int_0^1 xe^{x}dx = xe^{x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x}dx = e - e^{x}\Big|_0^1 = e - e + e^{0} = 1.\ \blacktriangle.$$

☐. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

85. $\int\limits_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$. *Жавоб.* 8.

86. $\int\limits_1^e x^{2}\ln x dx$. *Жавоб.* $\frac{2e^{3}+1}{9}$.

87. $\int\limits_0^1 (3-2x)e^{-3x}$. *Жавоб.* $\frac{5e^{-6}+7}{9}$.

88. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$. *Жавоб.* $\frac{\pi}{2}-1$.

89. $\int\limits_1^e \ln^{2}x dx$. *Жавоб.* $e-2$.

90. $\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}\, x dx$. *Жавоб.* $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

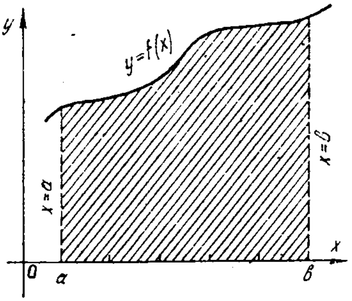
91. $\int\limits_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. *Жавоб.* $4(\ln 4-1)$

92. $\int\limits_0^1 x\cdot e^{3x}dx$. *Жавоб.* $\frac{2e^{3}+1}{9}$.

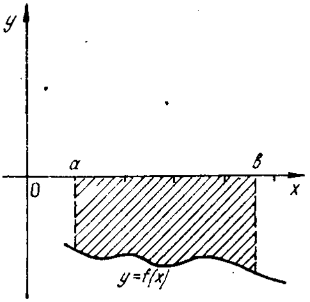
9- § Аниқ интегралнинг геометрияга татбиқлари

1. Ясси фигуранинг юзини ҳисоблаш.

1. Агар $[a,\ b]$ оралиқда $y=f(x)$ функция берилган бўлиб, у узлуксиз ва $f(x)\geqslant 0$ бўлса, аниқ интегралнинг таърифидан $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегралнинг қиймати пастдан Ox ўқи билан, чапдан $x=a$, ўнгдан $x=b$ тўғри чизиқлар ва юқоридан $y=f(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган эгри



6.2- чизма



6.3- чизма

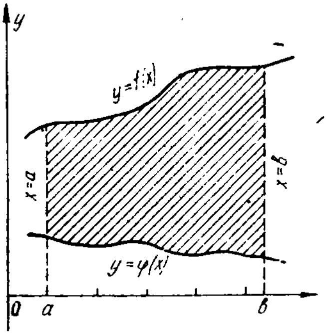
чизиқли трапециянинг юзига тенглиги бевосита келиб чиқади, яъни (6.2- чизма):

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

2. Агар $[a, b]$ оралиқда $f(x)\leqslant 0$ бўлса, $-f(x)\geqslant 0$ бўлади. Бу ҳолда эгри чизиқли трапециянинг юзи қуйидаги формула билан ҳисобланади (6.3- чизма):

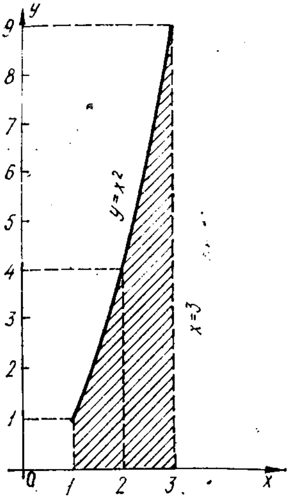
$$S=-\int_a^b (fx)dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|. \qquad (2)$$

3. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, бир неча нуқтада нолга айланса, $f(x)$ функция Ox ўқ, $x=a$ ва $x=b$ чизиқлар орасидаги эгри чизиқли трапециянинг юзасини ҳисоблаш учун, $f(x)$, Ox ўқ ва ёнма-ён турган иккита ноллар орасидаги эгри чизиқли трапецияларнинг юзалари топилиб, улар қўшилади. Ёнма-ён турган ноллар орасидаги эгри чизиқли трапециянинг юзаси бу оралиқда функция мусбат бўлса (1) формула билан, агар бу оралиқда $f(x)$ манфий бўлса иккинчи формула билан топилади.

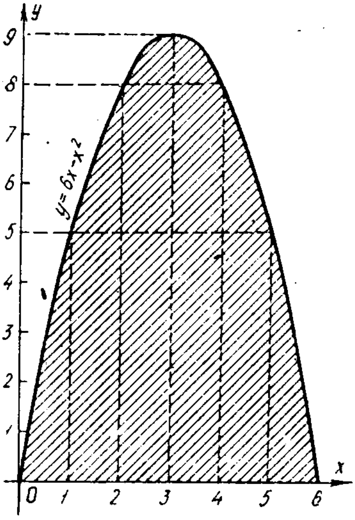


6.4- чизма

4. Агар $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ узлуксиз функциялар берилган бўлиб, $[a, b]$ да $f(x)\geqslant\geqslant\varphi(x)\geqslant 0$ бўлса, (6.4- чизма) даги эгри чизиқли трапециянинг юзи қуйидаги формула билан ҳисобланади:



6.5- чизма



6.6-чизма

$$S=\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]dx. \qquad (3)$$

Мисол. Юқоридан $y=x^2$ парабола, чапдан $x=1$, ўнгдан $x=3$ тўғри чизиқлар ва пастдан Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топинг (6.5- чизма). Бу фигуранинг юзини биринчи формуладан фойдаланиб топамиз:

$$S=\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=9-\frac{1}{3}=8\frac{2}{3}\ \text{кв. бирлик.}$$

1- мисол. $y=6x-x^2$ парабола ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топинг (6.6- чизма).

$\triangle$. Бу мисолда интегралнинг чегараси эгри чизиқ билан Ox ўқининг кесишиш нуқталаридан топилади. Бунинг учун

$$\begin{cases} y=6x-x^2 \\ y=0 \end{cases}$$

системани ечиш керак. Энди $6x-x^2=0$ тенгламани ечиб, $x_1=0$ ва $x_2=6$ ларга эга бўламиз. Шунинг учун изланаётган юз

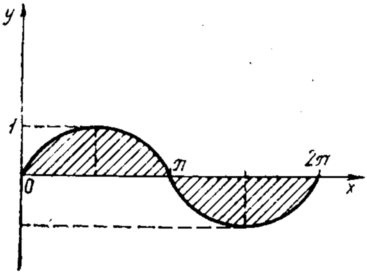
$$S=\int_0^6(6x-x^2)dx$$

интегралнинг қийматига тенг, яъни:

$$S = \int_0^6 (6x - x^2)dx = 3x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^6 = 3\cdot 6^2 - \frac{6^3}{3} = 108 - 72 =$$

$= 36$ кв. бирлик. ▲

2- мисол. $[0, 2\pi]$ оралиқда $y = \sin x$ функциянинг графиги ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топинг (6.7- чизма).



6.7- чизма

△. $[0, 2\pi]$ оралиқни иккита $[0, \pi]$ ва $[\pi, 2\pi]$ оралиққа бўламиз. $[0, \pi]$ оралиқда $\sin x \geqslant 0$ ва $[\pi, 2\pi]$ оралиқда $\sin x \leqslant 0$. Берилган фигуранинг юзини топиш учун (1) ва (2) формуладан фойдаланамиз:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right| = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \left|-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right| = 4.$$

3- мисол. $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$, $x - 2y + 8 = 0$ чизиқлар орасидаги фигуранинг юзини ҳисобланг.

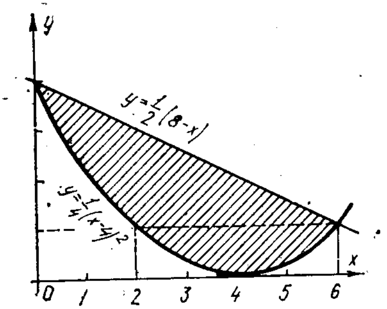
△. Бу мисолда интегралнинг чегараси берилган чизиқларнинг кесишиш нуқталарининг абсциссаси бўлади. У нуқталарини топиш учун

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}(x-4)^2 \\ y = \frac{1}{2}(x-8) \end{cases}$$

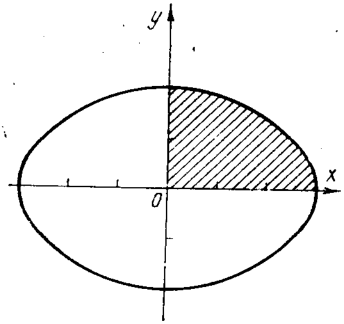
системани ечамиз: $\frac{1}{4}(x-4)^2 = \frac{1}{2}(8-x)$, бундан $\frac{1}{4}(x-4)^2 = \frac{1}{2}(8-x)$ ёки $x^2 - 6x = 0$. Демак, $x_1 = 0$ ва $x_2 = 6$, яъни изланаётган юз (6.8- чизма) 3) формула билан топилади:

$$S = \int_0^6 \left[\frac{1}{2}(8-x) - \frac{1}{4}(x-4)^2\right]dx = \int_0^6 \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^2\right)dx =$$

$= 9$кв. бирлик. ▲



6.8- чизма



6.9- чизма

4- мисол.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ёпиқ эгри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

△. Эгри чизиқ эллипсдан иборатдир (6.9- чизма). Бу фигура координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани сабабли унинг юзини топишда аввал биринчи квадратга жойлашган қисмининг юзини топиб, сўнгра уни 4 га кўпайтириш кифоя.

Демак,

$$S=4\int_b^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Бу ерда $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Шунинг учун

$$S=4\cdot\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=4\cdot\frac{b}{a}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\varphi d\varphi=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\varphi)d\varphi=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi+$$

$$+2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\varphi d\varphi=2ab\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\cdot2ab\sin2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2ab\frac{\pi}{2}+$$

$$+ab\sin2\cdot\frac{\pi}{2}-ab\sin0=\pi ab.$$ ▲

□ Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

93. $y = 8 + 2x - x^2$, $y = 2x + 4$. *Жавоб.* $10\frac{2}{3}$ кв. бирлик.

94. $y = x^3 - 4x$, $y = 0$. *Жавоб.* 8 кв. бирлик.

95. $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$, $x - 2y + 9 = 0$. *Жавоб.* $41\frac{2}{3}$ кв. бирлик.

96. $y = \frac{1}{3}\cdot(x-2)^2$, $2x - y - 4 = 0$. *Жавоб.* 12 кв. бирлик.

97. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. *Жавоб.* $10\frac{2}{3}$ кв. бирлик.

98. $y^2 = 2px$, $x = h$. *Жавоб.* $\frac{4}{3}h\sqrt{2ph}$ кв. бирлик.

99. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. *Жавоб.* $8\ln 2$ кв. бирлик.

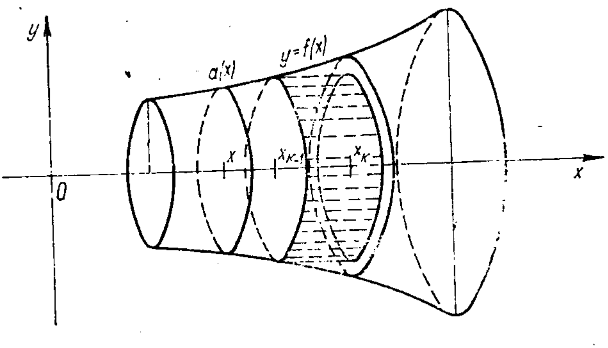
100. $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$. *Жавоб.* $5\frac{1}{3}$ кв. бирлик.

101. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. *Жавоб.* $4\frac{2}{3}$ кв. бирлик.

102. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. *Жавоб.* $20\frac{5}{6}$ кв. бирлик. ■

10- §. Интеграл ёрдамида ҳажмни ҳисоблаш

$x = a$, $x = b$ текисликлар орасида жойлашган (6.10-чизма) фигурани қарайлик. $[a, b]$ оралиқдаги ҳар бир x нуқтадан ўтувчи ва Ox ўққа перпендикуляр текислик бу



6.10- чизма

фигурани кесганда ҳосил бўлган кесимнинг юзи $Q(x)$ га тенг бўлсин. $[a, b]$ оралиқда $Q(x)$ узлуксиз функция деб фараз қилиб, фигуранинг ҳажмини топамиз. Бунинг учун $[a, b]$ оралиқни n та тенг бўлакка бўламиз ва ҳар бир бўлиниш нуқтасидан Ox ўққа перпендикуляр текисликлар ўтказамиз. Бу текисликлар берилган фигурани n та қисмга ажратади. Агар k- қисмини, яъни $x = x_{k-1}$ ва $x = x_k$ текисликлар орасида жойлашган қисмини олсак, унинг ҳажми $\Delta V(\Delta V = Q(x_{k-1})\Delta x_k)$ ни топамиз. Энди барча бўлиниш нуқталари бўйича тузилган $\sigma_n = \sum_{k-1}^{n} (x_{k-1})\Delta x_k$ йиғиндини қарайлик. Интегралнинг таърифига асосан берилган фигуранинг ҳажми

$$V = \int_a^b Q(x)dx \qquad (1)$$

интегралнинг қийматига тенг бўлади. Бу интеграл $Q(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун мавжуд бўлади.

Агар $y = (x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, бу функциянинг графигини Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган фигуранинг ҳажми

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (2)$$

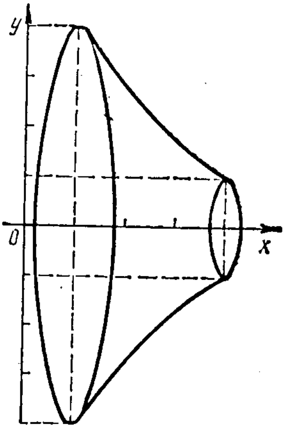
формула билан топилади. Чунки бу ҳолда фигуранинг $x \in [a, b]$ нуқтадаги кесимининг юзи $Q(x) = \pi f^2(x)$ бўлади.

1-мисол. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигураларни координата ўқлари атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмини топинг:

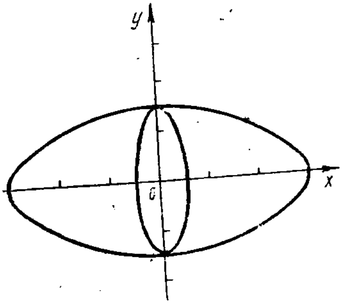
1) $xy = 4$, $y = 0$, $x = 4$; Ox ўқ атрофида;
2) $y^2 + x - 4 = 0$, $x = 0$; Oy ўқ атрофида;
3) $y = x^3 + 3$, $x = 4$; Ox ўқ атрофида;
4) $y = 2x - x^2$, $y = 0$; Ox ўқ атрофида;
5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; Ox ўқ атрофида.

△. 1) $xy = 4$, $y = 0$, $x = 4$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг (6.11- чизма) ҳажми:

$$V = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx$$



6.11- чизма



6.12- чизма

интегралнинг қийматига тенг:

$$V=\pi\int_1^4 \frac{16}{x^2}dx = 16\pi \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = 16\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 =$$

$$=16\pi\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{1}\right)=16\pi\left(1-\frac{1}{4}\right)=12 \text{ куб бирлик.}$$

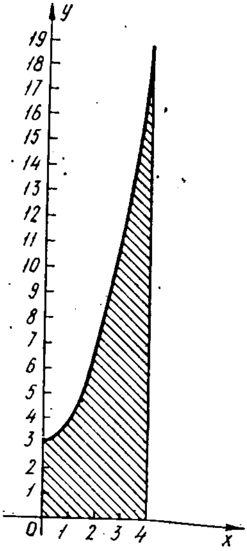
2) $y^2+x-4=0$; $x=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Oy ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми (6.12- чизма):

$$\pi\int_{-2}^{2}(4-y^2)^2dy$$

интегралнинг қийматига тенг:

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(4-y^2)dy = 2\pi\int_0^{\pi}(16-8y^2+y^4)\,dy = 2\pi\left(16y-\frac{8}{3}y+\frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^2 = 2\pi\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)=$$

$$=34\frac{2}{15}\pi \text{ куб бирлик.}$$



6.13- чизма

3) $y=x^2+3$, $x=4$ чизиқлар

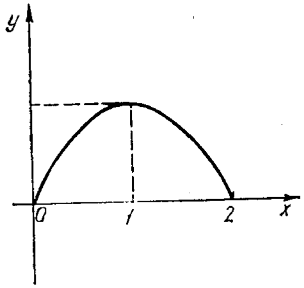
билан чегараланган фигурани Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми (6.13- чизма)

$$\pi\int_0^4 (x^2+3)^2 dx$$

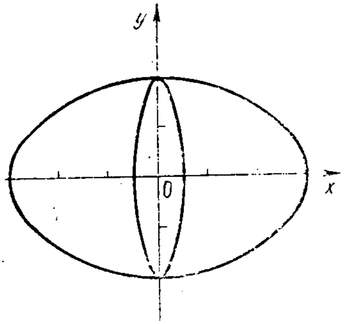
интегралнинг қийматига тенгдир:

$$V=\pi\int_0^4 (x^2+3)^2 dx=\pi\int_0^4 (x^4+6x^2+9)dx=\pi\left(\frac{1}{5}x^5+2x^3+\right.$$

$$\left.+9x\right)\Big|_0^4=\pi\left(\frac{4^5}{5}+2\cdot 4^3+9\cdot 4\right)=368\frac{4}{5}\cdot\pi \text{ куб бирлик.}$$



6-14 чизма.



6.15- чизма

4) $y=2x-x^2$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми (6.14- чизма)

$$\pi\int_0^2 (2x-x^2)^2 dx$$

интегралнинг қийматига тенг:

$$V=\pi\int_0^2 (2x-x^2)dx=\pi\int_0^2 (4x^2-4x^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2=\pi\left(\frac{4}{3}\cdot 2^3-2^4+\frac{1}{5}2^5\right)=$$

$$=\frac{16}{5} \text{ куб бирлик.}$$

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ чизиқ эллипсдан иборат, уни Ox ўқ атрофида айлантирганда эллипсоид ҳосил бўлади. Эллипсоиднинг ҳажми (6.15- чизма)

$$\pi \frac{b^2}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx$$

интегралнинг қийматига тенг.

$$V=\pi\frac{b^2}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int\limits_{0}^{a}(a^2-x^2)dx=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\,\frac{2}{3}\,a^3=\frac{4}{3}\pi ab^3. \ \blacktriangle$$

□. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигураларни координата ўқлари атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмини топинг:

103. $xy=9,\ y=3,\ y=9;$ Oy ўқ атрофида.
Жавоб. 18π куб бирлик.

104. $y=10-x^2,\ y=x^2+2;$ Oy ўқ атрофида.
Жавоб. 16π куб бирлик.

105. $y=4-x^2,\ 2x+y-4=0;$ Ox ўқ атрофида
Жавоб. $6{,}4\pi$ куб бирлик.

106. $y^2=2px,\ x=h;$ Ox ўқ атрофида.
Жавоб. πph^2 куб бирлик.

107. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=\pm b;$ Oy ўқ атрофида.
Жавоб. $\frac{8\pi a^2b}{3}$ куб бирлик.

108. $x^2+y^2=a^2;$ Ox ўқ атрофида.
Жавоб. $\frac{4}{3}\pi a^3$ куб бирлик.

109. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\ x=0,\ y=0,\ (x>0);$ Ox ўқ атрофида. *Жавоб.* $\frac{\pi}{4}\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ куб бирлик.

110. $x^2-y^2=a^2,\ x=\pm 2a;$ Ox ўқ атрофида.
Жавоб. $\frac{8}{3}\pi a^3$ куб бирлик.

111. $y=\left(a-\frac{x^2}{a}\right),\ x+y=a;$ Oy ўқ атрофида
Жавоб. $\frac{\pi}{6}a^3$ куб бирлик.

112. $x^2-y^2=4,\ y=2;$ Oy ўқ атрофида.
Жавоб. $\frac{32\pi}{3}$ куб бирлик. ■

11-§. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш

Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашнинг бир неча усуллари мавжуддир. Бу усуллардан фойдаланиб, $\int\limits_a^b f(x)dx$ аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун қуйидаги ишлар бажарилади:

1) $[a,\ b]$ ораликни $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1}$ нуқталар билан n та тенг ораликларга бўлинади. Бу ҳолда ораликларнинг узунлиги $h=\frac{b-a}{n}$ га тенг бўлади.

2) Бу бўлиниш нуқталарида $y=f(x)$ функциянинг $y_0=f(a),\ y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2), \ldots,\ y_{n-1}=f(x_{n-1}),\ y_n=$ $=f(b)$ қийматлари ҳисобланади.

3) Кейин тақрибий ҳисоблаш формулаларининг биррортасидан фойдаланилади.

I. Тўғри тўртбурчаклар формуласи.

$$\int\limits_a^b f(x)dx=h(y_0+y_1+y_2+\ \ldots\ +y_{n-1})=h\sum_{i=0}^{n-1}y_i \qquad (1)$$

ёки

$$\int\limits_a^b f(x)dx=h(y_1+y_2+\ldots+y_n)=h\sum_{i=1}^{n}y_i \qquad (2)$$

Бу формулалар ёрдамида $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегралнинг қийматига тенг бўлган $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзи штрихланган (6.16) ва (6.17- чизма) тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндиси билан алмаштирилади. Тўртбурчаклар формуласидаги хатолик:

$$\Delta(n)\leqslant\frac{(b-a)^2}{2n}V'_{\text{э.к.}},$$

бу ерда $Y'_{\text{э.к.}}$ $|y'|$ нинг $[a,\ b]$ даги энг катта қийматидир.

II. Трапециялар формуласи.

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ \ldots\ +y_{n-1}\right)=$$

$$=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right). \qquad (3)$$

Бу формула ёрдамида эгри чизиқли трапециянинг юзи штрихланган (6.18- чизма) трапециялар юзларининг йиғиндиси билан алмаштирилади. Трапециялар формуласидаги хатолик:

$$\Delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} Y''_{\text{э.к.}},$$

бу ерда $Y''_{\text{э.к.}}$, $|y''|$ нинг $[a, b]$ даги энг катта қийматидир.

III. Симпсон формуласи. n — жуфт сон.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\Big[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\Big]. \qquad (4)$$

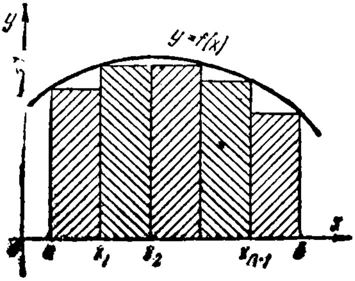
Бу формула ёрдамида ҳисоблашда бир жуфт полосаларнинг юзи шу участкадаги $y = f(x)$ эгри чизиқни мос равишда $(x_i f(x_i))$, $(x_{i+1};\ f(x_{i+1}))$ ва $(x_{i+2} = x_{i\,+\,2,h};f(x_{i+2}))$ нуқталардан ўтувчи $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ парабола билан алмаштирилгандаги полосаларнинг юзи билан алмаштирилади (6.19- чизма)

Симпсон формуласидаги хатолик:

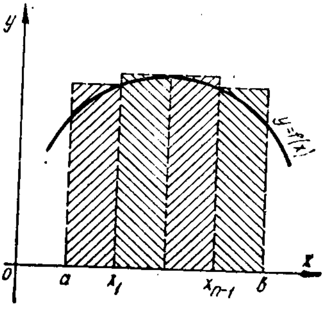
$$\Delta(n) \leqslant \frac{b-a}{180n^4} Y^{(4)}_{\text{э.к.}},$$

бу ерда $Y^{(4)}_{\text{э.к.}}$ $|y^{(4)}|$ нинг $[a, b]$ даги қийматининг энг каттасидир.

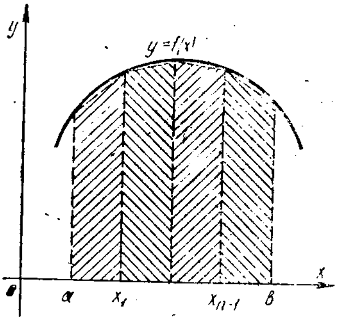
Агар бирор миқдор A сонга тенг бўлиб, B унинг тақрибий қиймати бўлса, ушбу $\Delta = |A - B|$ миқдорни A нинг абсолют хатоси ва $\delta = \frac{\Delta}{A} \cdot 100\%$ сонни A нинг нисбий хатоси дейилади.



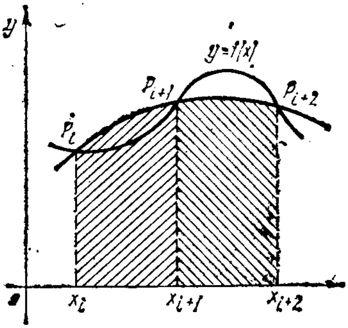
6.16- чизма



6.17- чизма



6.18- чизма



6.19- чизма

1- мисол.

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

интегрални $n = 5$ бўлганда трапециялар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

△. Бу ҳолда трапециялар формуласи

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{6-1}{5}\left[\frac{y_0+y_5}{2} + [y_1+y_2+y_3+y_4]\right]$$

кўринишда бўлади. $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ лар $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ функциянинг $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$ нуқталардаги қийматларидир, яъни

$$x_0 = 1; \qquad y_0 = \frac{1}{\sqrt{1+1^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71.$$

$$x_1 = 2; \qquad y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+2^3}} = \frac{1}{\sqrt{9}} \approx 0{,}33.$$

$$x_2 = 3; \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{28}} \approx 0{,}19.$$

$$x_3 = 4; \qquad y_3 = \frac{1}{\sqrt{1+4^3}} = \frac{1}{\sqrt{65}} \approx 0{,}12.$$

$$x_4 = 5; \qquad y_4 = \frac{1}{\sqrt{1+5^3}} = \frac{1}{\sqrt{126}} \approx 0{,}09.$$

$$x_5 = 6; \qquad y_5 = \frac{1}{\sqrt{1+6^3}} = \frac{1}{\sqrt{217}} \approx 0{,}07.$$

Шунинг учун

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx 1\left[\frac{0{,}71+0{,}07}{2} + 0{,}33 + 0{,}19 + 0{,}12 + 0{,}9\right] = 1{,}12. \blacktriangle$$

2-мисол. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ интегрални аввал Ньютон—Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисобланг. Кейин берилган оралиқни 10 та бўлакка бўлиб, тўғри тўртбурчаклар формуласи, трапециялар формуласи ва Симпсон формулалари ёрдамида тақрибий ҳисобланг. Ундан кейин тақрибий ҳисоблаш формулалари билан ҳисоблаганда қилинган хатоларни процент ҳисобида баҳоланг (барча ҳисоблашларни 4 та ўнли рақамгача олиб боринг).

△. 1. Бу интегрални Ньютон—Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$$

2. Энди бу интегрални тақрибий ҳисоблаш формулаларидан фойдаланиб ҳисоблаймиз. Бунинг учун оралиқни ўнта тенг бўлакка бўлиб, бу нуқталардаги функциянинг қийматларини топамиз:

$x_0 = 0{,}0000;$ $y_0 = 1{,}0000.$
$x_1 = 0{,}1000;$ $y_1 = 0{,}9900.$
$x_2 = 0{,}2000;$ $y_2 = 0{,}9615.$
$x_3 = 0{,}3000;$ $y_3 = 0{,}9174.$
$x_4 = 0{,}4000;$ $y_4 = 0{,}8620.$
$x_5 = 0{,}5000;$ $y_5 = 0{,}8000.$
$x_6 = 0{,}6000;$ $y_6 = 0{,}7352.$
$x_7 = 0{,}7000;$ $y_7 = 0{,}6711.$
$x_8 = 0{,}8000;$ $y_8 = 0{,}6097.$
$x_9 = 0{,}9000;$ $y_9 = 0{,}5524.$
$x_{10} = 1{,}0000;$ $y_{10} = 0{,}5000.$

а) Берилган интегрални аввал (1) формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$I = h\sum_{i=0}^{9} y_i \approx 0{,}8100.$$

Бу ҳолда абсолют хато $|0{,}7854 - 0{,}81| = 0{,}0246$ га тенг. Нисбий хато эса $\frac{0{,}0240 \cdot 100}{0{,}7854} \approx 3{,}13\%$.

Энди (2) формула ёрдамида ҳисоблаймиз: $I = h\sum_{i=1}^{10} y_i = 0{,}7600$. Бу ҳолда абсолют хато $|0{,}7854 - 0{,}7600| = 0{,}0254$ га тенг. Нисбий хато эса $\frac{0{,}0254 \cdot 100}{0{,}7854} \approx 3{,}23\%$.

б) Берилган интегрални трапециялар формуласи ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$I = h\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + \sum_{i=1}^{9} y_i\right) \approx 0,7849.$$

Бу ҳолда абсолют хато $(0,7854 - 0,7849) = 0,0005$ га тенг. Нисбий хато эса $\frac{0,0005 \cdot 100\%}{0,7854} \approx 0,0637\%$.

в) Берилган интегрални Симпсон формуласи ёрдамида ҳисоблаймиз: $I \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + \right.$ $\left. + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right] \approx 0,7853$.

Бу ҳолда абсолют хато $|0,7854 - 0,7853| = 0,0001$ га тенг. Нисбий хато эса $\frac{0,0001 \cdot 100\%}{0,7854} \approx 0,0127\%$. ▲

☐. Қуйидаги интегралларни аввал трапециялар формуласи, сўнгра Симпсон формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

113. $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x}$, $h = 10$. *Жавоб.* 0,6938; 0,6931. ■

Қуйидаги интегралларни аввал Ньютон-Лейбниц формулалари ёрдамида ҳисобланг, сўнгра $n = 10$ бўлганда бу интегрални тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида тақрибий ҳисобланг. Ундан кейин тақрибий ҳисоблаш формулалари билан ҳисоблаганда қилинган хатоларни процент ҳисобида баҳоланг (барча ҳисоблашларни 4 та ўнли рақамгача олиб боринг).

114. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. *Жавоб.* 0,7188; 0,6681; 0,6938; 0,6932.

115. $\int_1^9 \sqrt{6x - 5}\,dx$. *Жавоб.* 34,8183; 40,8183; 37,8183; 37,9655. ■

VII БОБ

КЎП АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯ

1- §. Кўп аргументли функциянинг таърифи ва аниқланиш соҳаси

Ихтиёрий натурал сон n берилган бўлсин. Барча тартибланган n та $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ҳақиқий сонлар системасидан тузилган тўпламни *n ўлчовли фазо* дейилади. Уни

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_n \in R, k = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

каби белгилаймиз. n ўлчовли R^n фазонинг элементини унинг *нуқтаси* дейилади ва уни қисқача $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кўринишда белгиланади. Агар бу ерда $n = 2$ бўлса, R^2 текисликка, $n = 3$ бўлса, R^3 фазога эга бўламиз.

Таъриф. G тўплам n ўлчовли фазонинг бирор қисм тўплами бўлсин, яъни $G \subset R^n$. Агар бирор қоида G тўпламнинг ҳар бир $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ элементига битта ҳақиқий сонни мос қўйса, G тўпламда функция берилган дейилади ва у

$$y = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

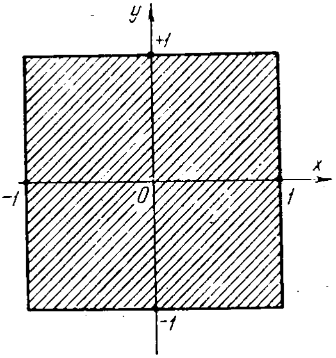
каби белгиланади. Бу функцияни *n аргументли функция* дейилади.

1) Томонлари x ва y га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи $S = xy$ га тенг, яъни у икки аргументли функция.

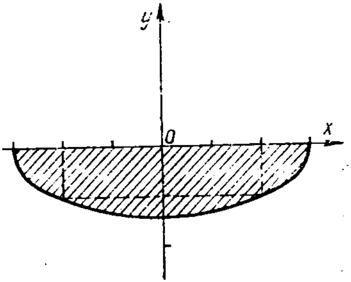
2) Қирралари x, y ва z бўлган параллелепипеднинг ҳажми V уч аргументли функциядир, у $V = xyz$ формула билан ифодаланади.

Икки аргументли функциянинг аниқланиш соҳаси текисликдаги бирор тўплам бўлиб, $z = f(x, y)$ функция фазода сиртни ифодалайди. Уч аргументли $u = F(x, y, z)$ функциянинг аниқланиш соҳаси фазода бирор тўпламдан иборат бўлади. Унинг қийматлари 4 ўлчовчи фазода ётади.

1- мисол. Қуйидаги тенгсизликлар билан аниқланган соҳани ясанг.



7.1- чизма

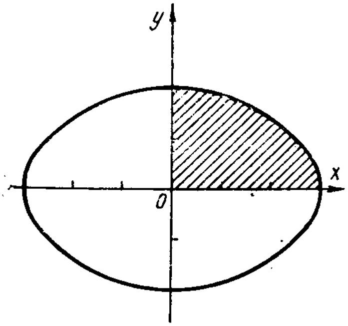


7.2- чизма

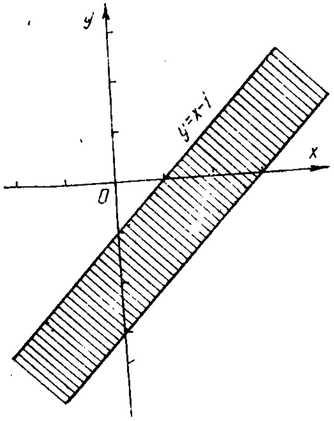
1) $-1 < x < 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 2) $x^2+y^2 \leqslant 9$, $y < 0$;
3) $x^2+2y < 4$, $x > 0$, $y > 0$; 4) $1 \leqslant x - y < 3$.

△. 1) Берилган тенгсизликни томонлари $x = -1$, $x = 1$ ва $y = -1$, $y = 1$ тўғри чизиқларнинг устида ётган квадратнинг ичида ётадиган нуқталар қаноатлантиради. Демак, берилган тенгсизлик билан аниқланадиган соҳа 7.1- чизмадаги квадратнинг ички қисмидир. Бу соҳага квадратнинг томонлари устидаги нуқталар кирмайди, у *очиқ соҳа* дейилади.

2) Берилган соҳа $x^2 + y^2 \leqslant 9$ доиранинг x ўқидан пастдаги қисмидир, чунки $y \leqslant 0$ деб олиш керак (7.2- чизма).



7.3- чизма



7.4- чизма

Бу соҳага чегара ҳам киради, бундай соҳани *ёпиқ соҳа* дейилади.

3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} < 1$ соҳа эллипснинг ичидаги биринчи квадратнинг қисмидан иборатдир (7.3- чизма), чунки $x > 0$ ва $y > 0$ дир.

4) $1 \leqslant x - y < 3$ соҳа $y = x - 1$ ва $y = x - 3$ тўғри чизиқлар орасидаги (7.4- чизма) полосадан иборатдир. Бу соҳага тўғри чизиқларнинг устидаги нуқталар киради. ▲

2- мисол. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг.

1) $z = a^2 - x^2 - 2y^2$; 2) $u = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}$;
3) $v = \frac{1}{x^2 - y^2}$; 4) $\omega = \sqrt{3x} - \frac{5}{\sqrt{y}}$;
5) $z = \frac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{(y - x)}}$; 6) $\omega = \arccos(x^2 + y^2)$.

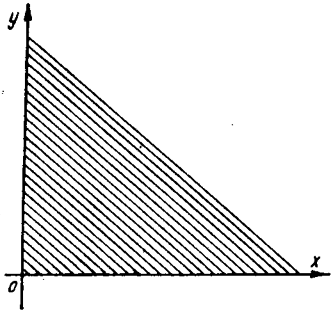
△. 1) $z = a^2 - x^2 - 2y^2$ функция бутун рационал функция бўлгани учун унинг аниқланиш соҳаси текисликдаги барча нуқталардан иборатдир.

2) $u = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $\frac{x^2}{2} + y^2 \leqslant 1$ эллипснинг ички қисми ва унинг устидаги нуқталардан иборатдир. Эллипснинг устидаги нуқталарда илдиз тагидаги ифоданинг қиймати нолга тенг, ичидаги нуқталарда эса мусбат, эллипсдан ташқаридаги нуқталарда манфий.

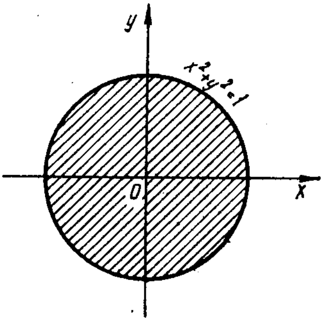
3) $v = \frac{1}{x^2 - y^2}$ функция каср-рационал функция бўлгани сабабли, унинг махражи нолга тенг бўлмаслиги керак. Бу функциянинг аниқланиш соҳасига $y^2 - x^2 = 0$, яъни $y = \pm x$ тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар кирмаслиги керак деган сўз. Демак, бу функция $y = x$ ва $y = -x$ биссектрисалари устидаги нуқталардан ташқари текисликдаги барча нуқталарда аниқланган.

4) $\omega = \sqrt{3x} - \frac{5}{\sqrt{y}}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $x \geqslant 0$, $y > 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар бўлиши керак. Бу тенгсизликни (7.5- чизма) биринчи квадрат ичидаги ва x ўқининг мусбат томони устидаги барча нуқталар қаноатлантиради.

5) $z = \frac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y - x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасига $y -$



7.5- чизма



7.6- чизма

— $x = 0$ тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар кирмайди. Логарифмик функция фақат мусбат қийматларда аниқланган бўлгани учун $y > 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар аниқланиш соҳасига киради. Демак, бу функциянинг аниқланиш соҳаси юқори ярим текисликдаги биринчи квадратнинг биссектрисасини олиб ташлаганда қолган тўпламдан иборат бўлади.

6) $\omega = \arccos(x^2 + y^2)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $x^2 + y^2 \leqslant 1$ доирадан иборат (7.6- чизма), чунки $y = \text{ars}\cos x$ функция $(-1,1)$ оралиқда аниқлангандир. ▲

☐. Қуйидаги тенгсизликлар билан аниқланган соҳани ясанг.

1. $1 \leqslant x \leqslant 5$;
2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$;
3. $2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$;
4. $0 < y < x$.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг.

5. $z = 4 - x - 2y$.

Жавоб. Текисликдаги барча нуқталар.

6. $u = \frac{3}{x^2 + y^2}$.

Жавоб. (0,0) дан ташқари барча нуқталар.

7. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Жавоб. $x^2 + y^2 = 1$ айлана ичидаги ва устидаги нуқталар.

8. $u = \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Жавоб. 1- ва 3- квадратнинг ички нуқталари.

9. $\omega = \frac{x^2y}{2x + y}$.

Жавоб. Текисликда $2x + y = 0$ тенгламани қаноатлантирадиган нуқталардан ташқари барчаси.

10. $v = \arcsin(x + y)$.

Жавоб. $x + y + 1 = 0$ ва $x + y - 1 = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги полоса.

2- §. Кўп аргументли функциянинг лимити ва узлуксизлиги

n ўлчовли R^n фазонинг ҳар бир $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ элементига

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x^2{}_n} \qquad (1)$$

сонни мос қўямиз. Бу сон X *элементнинг узунлиги* дейилади. Бу ҳолда ихтиёрий $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $Y = (y_1, y_2, \ldots. y_n)$ нуқталар орасидаги масофа

$$d = \| X - Y \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \qquad (2)$$

каби аниқланади. n ўлчовли фазода ихтиёрий $X^\circ = (x_1{}^\circ, x_2{}^\circ, \ldots, x^\circ{}_n)$ нуқта берилган бўлсин. Ушбу

$$U_\varepsilon(x^\circ) = \{X \in R^n : \| X - X^\circ \| < \varepsilon\} \qquad (3)$$

тўпламни X° нуқтанинг ε-*атрофи* дейилади.

1- таъриф. $G \subset R^n$ тўплам берилган бўлсин. Агар $X^\circ \in R^n$ нуқтанинг ихтиёрий $\varepsilon > 0$ атрофида G тўпламнинг X° дан фарқли бирор нуқтаси ётса, X° нуқта G тўпламнинг *лимит нуқтаси* дейилади.

2- таъриф. $y = f(X)$ функция $G \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, X° нуқта G тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун бирор $\delta > 0$ сон топилиб, $\| X - X^\circ \| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$ ларда

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, *A сон $f(x)$ функциянинг X нуқта X° га интилгандаги лимити* дейилади ва у

$$\lim_{X \to X^\circ} f(x) = A$$

каби белгиланади.

3- таъриф. Агар X° нуқта $Y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига қарашли бўлиб, $\lim\limits_{X \to X^\circ} f(x) = f(X^\circ)$ тенглик бажарилса, $y = f(x)$ функция X° нуқтида *узлуксиз* дейилади.

Демак, $f(x)$ функция X° нуқтада узлуксиз бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

1) $f(x)$ функция X° нуқтада ва унинг атрофида аниқланган бўлиши;

2) X нуқта X° га яқинлашганда $f(x)$ нинг лимити мавжуд бўлиши;

3) бу лимит $f(X^{\circ})$ га тенг бўлиши керак.

Функция G тўпламда аниқланган бўлиб, бу тўпламнинг барча нуқталарида узлуксиз бўлса, *тўплам узлуксиз* дейилади.

1- мисол. Ушбу

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{27}{x^4 + 2x^2 + y^6}$$

лимитни ҳисобланг:

Δ. Бу лимит $+\infty$ га тенг. Чунки бу функциянинг (0,0) нуқта атрофидаги қиймати мусбат ҳамда унга тескари функция озод ҳади нолга тенг кўпҳаддан иборат. Демак, унинг (0,0) нуқтадаги қиймати 0 га тенг. ▲

2- мисол. Ушбу

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 + 3y^2}{x^2 + y^2}$$

лимитни ҳисобланг.

Δ. Бу лимит мавжуд эмас. Чунки бу ерда $y = 0$ деб олиб, x бўйича нолга яқинлашсак, бу ифоданинг лимити нолга тенг бўлади, яъни

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2x = 0.$$

Аввал $x = 0$ деб олиб, у бўйича нолга яқинлашсак, бу ифоданинг лимити 3 га тенг бўлади, яъни

$$\lim_{y\to 0} \frac{3y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} 3 = 3.$$

Демак, (0,0) нуқтага x ўқи бўйича яқинлашганимизда берилган ифоданинг лимити 0 га тенг бўлиб, y ўқи бўйича яқинлашганимизда 3 га тенг экан. Яъни (0,0) нуқтага ҳар хил йўллар билан яқинлашганда берилган ифоданинг лимити ҳар хил бўлади. Лимитнинг таърифига асосан (x, y) нуқта ихтиёрий йўллар билан (x_0, y_0) нуқтага яқинлашганда берилган ифоданинг лимити мавжуд ва бир хил бўлиши керак эди. ▲

3- мисол. $f(x,y)=\sqrt{x^2y}$ функциянинг $(x,y)\to(0,0)$ даги лимити мавжудми?

△ Йўқ. Чунки $(x,y)\to(0,0)$ да x^4+y^2 ифода нолга интилади. Бу ҳолда $\ln(x^4+y^2)-\infty$ га интилади. Шунинг учун (x,y) нуқталар, координаталар бошини ўз ичида сақлайдиган кесмада ўзгарса, $\sin\ln(x^4+y^2)$ нинг қийматлари $[-1,1]$ сегментни тўлдиради. ▲

4- мисол. Ушбу

$$z=5-x-y$$

функциянинг $(x,y)\to(1,2)$ даги лимитини топинг.

△. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(5-x-y)=5-1-2=2.$ ▲

5- мисол. Қандай ҳолларда $f(X)$ функция X° нуқтада узилишга эга бўлади? Мисоллар билан тушунтиринг.

△. $f(X)$ функция X° нуқтанинг атрофида аниқланган бўлиб, X° нуқтанинг ўзида аниқланмаган бўлса, бундай функция X нуқтада узилишга эга бўлади. ▲

6- мисол.

△. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

функция (0,0) нуқтада аниқланган эмас. Шунинг учун (0,0) нуқтада узилишга эга, XOY текисликнинг қолган барча нуқталарида эса узлуксиз.

$f(X)$ функция X° нуқтанинг атрофида ҳам, ўзида ҳам аниқланган бўлиб, $X\to X^\circ$ да $f(X)$ нинг лимити мавжуд бўлмаса, X° нуқтада $f(X)$ функция узилишга эга бўлади. ▲

7- мисол. Ушбу

$$z=\begin{cases}\text{агар } x\neq 0,\ y\neq 0 \text{ бўлса, } \sin\ln(x^4+y^2)\\ \text{агар } x=y=0 \text{ бўлса, } 0\end{cases}$$

функция $X^\circ(0,0)$ нуқтада узилишга эга, чунки бу функция (0,0) нуқтада ҳам, унинг ихтиёрий атрофидаги нуқталарда ҳам аниқланган, аммо $(X,y)\to(0,0)$ да лимити мавжуд эмас. xOy текисликнинг (0,0) нуқталардан ташқари барча нуқталарида бу функция узлуксиздир.

$f(X)$ функция X° нуқтанинг атрофида ҳам, ўзида ҳам аниқланган, аммо $\lim\limits_{x\to x^\circ}f(x)\neq f(x_0)$ бўлса, $f(X)$ функция X° нуқтада узилишга эга бўлади.

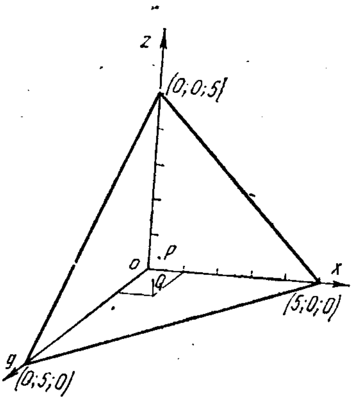
Мисол. Ушбу

$$z=\begin{cases}\text{агар } x\neq 1,\ y\neq 2 \text{ бўлса, } 5-x-y\\ \text{агар } x=1,\ y=2 \text{ бўлса, } 1\end{cases}$$

функция $X^\circ(1,2)$ нуқтада узилишга эга. Ҳақиқатан ҳам, бу функция $X^\circ(1,2)$ нуқтада ҳам, унинг ихтиёрий атрофида ҳам аниқланган, аммо

$$\lim_{X\to X^\circ} z = 2 \neq z(X^\circ) = 1.$$

Бу функциянинг графигига $z=5-x-y$ текисликдаги $P(1;\,2;\,2)$ нуқтадан ташқари барча нуқталар ва $Q(1;\,2;\,1)$ нуқта киради (7.7- чизма).



7.7- чизма

8- мисол. Ушбу

$$z=\frac{1}{1-x^2-y^2}$$

функция $x^2+y^2=1$ айлананинг устидаги барча нуқталарда узилишга эга. ▲

☐ Қуйидаги лимитларни ҳисобланг.

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$. *Жавоб.* $-\frac{1}{4}$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x,y)}{xy}$. *Жавоб.* 1.

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x,y)}{x}$. *Жавоб.* 0.

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} \dfrac{\mathrm{tg}(x,y)}{y}$. *Жавоб.* 3.

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$. *Жавоб.* Мавжуд эмас.

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ *Жавоб.* Мавжуд эмас.

☐. Қуйидаги функциялар узилишга эга бўлган нуқта ёки чизиқни кўрсатинг.

17. $z=\dfrac{10x}{(x-1)^2+(y-1)^2}$. *Жавоб.* (1,1) нуқта.

18. $z=\dfrac{3y}{2x-y}$. *Жавоб.* $y=2x$ тўғри чизиқ.

19. $z=\dfrac{x^2}{x^2-2y^2-4}$. *Жавоб.* $y=\frac{1}{2}(x^2-4)$ парабола.

20. $z=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$. *Жавоб.* (0,0) нуқта. ■

3- §. Кўп аргументли функциянинг хусусий ҳосиласи

Агар

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{(fx_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0 + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1^0 . x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_i}$$

лимит мавжуд бўлса, n аргументли функциянинг X° нуқтадаги x_i ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи

$$f'_{x_i}(X^\circ) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^\circ) =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0 + \Delta x, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_i}$$

кўринишда топилади.

Икки аргументли $z = f(x, y)$ функция берилган бўлса, бу функциянинг $(x^\circ, \; y^\circ) \in G$ нуқтадаги x ва y бўйича хусусий ҳосилалари қуйидагича топилади;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^\circ, y^\circ) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x^\circ + \Delta x, y^\circ) - f(x^\circ, y^\circ)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} x^\circ, y^\circ) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x^\circ, y^\circ + \Delta y) - f(x^\circ, y^\circ)}{\Delta y}.$$

Агар кўп аргументли функциянинг хусусий ҳосилалари G соҳанинг барча нуқталарида мавжуд бўлса, бу хусусий ҳосилалар G соҳада яна кўп аргументли функциялар бўлади. Бу хусусий ҳосилалардан яна кетма-кет хусусий ҳосилаларни олсак, $y = f(x)$ функциянинг юқори тартибли хусусий ҳосилаларига эга бўламиз. Икки аргументли функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари қуйидагича ҳисобланади:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = f''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = f''_{yx};\right.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Худди шунингдек, n- тартибли хусусий ҳосилалар қуйидагича аниқланади:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = f^{(n)}_{x^n};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\,\partial y} = f^{(n)}_{x^{n-1}y}$$

ва ҳоказо.

1- **мисол.** Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг.

1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$; 2) $z = \frac{y}{x}$;

3) $z = (5x^3y^2 + 1)^3$; 4) $z = \ln(x^2 + y^2)$.

5) $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$; 6) $v = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}$.

△. 1) Берилган функцияни фақат x ўзгарувчининг функцияси деб қараб, ҳосила ҳисоблаш жадвалидаги 1- формулага асосан $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy$ ифодага эга бўламиз.

Худди шундай z ни фақат y нинг функцияси деб ҳисоблаб, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$ ифодага эга бўламиз.

2) z ни аввал x нинг, кейин y нинг функцияси деб ҳисоблаб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x^2};$$

3) z дан x ва y лар бўйича ҳосила олаётганда аввал даражали функциянинг ҳосиласи ҳисобланиб, асосдан ҳосила олинаётганда навбатма-навбат битта ўзгарувчини ўзгармас деб қаралади:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(5x^3y^2 + 1)^2(5x^3y^2 + 1)'_x = 3(x^3y^2 + 1)^2\cdot 5\cdot 3x^2y^2 =$$
$$= 45x^2y^2(x^3y^2 + 1)^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(5x^3y^2 + 1)^2(5x^3y^2 + 1)'_y = 3(5x^3y^2 + 1)^2 5x^3\cdot 2y =$$
$$= 30x^3y(5x^3y^2 + 1)^2.$$

4) z ни аввал x нинг, кейин y нинг функцияси деб қараб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

5) u ни аввал фақат x нинг, ундан кейин фақат y нинг,

кейин фақат z нинг функцияси деб қараб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{z};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2};\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z^2}.$$

6) y ни, кейин x ни ўзгармас деб қараб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})'_x}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})'_y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0+\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}.\ \blacktriangle$$

2- мисол. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

1) $u = x^1 + 3x^2y^2 - 2y^4$; 2) $u = e^x \ln y + \sin y \ln x$.

$\triangle$. 1) Аввал биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз, кейин уларнинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаб қуйидагиларга эга бўламиз:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2$; $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y - 8y^3$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx} = 12x^2 + 6y^2$; $\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = u''_{xy} = 12xy$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy} = 6x^2 - 24y^2$; $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx} = 12xy$.

2) Аввал биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни ҳисоблаб, кейин уларнинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$u'_x = e^x \ln y + \frac{1}{x}\sin y$; $\quad u'_y = \frac{1}{y}e^x + \cos y \ln x$;

$u''_{xx} = e^x \ln y - \frac{1}{x^2}\sin y$; $\quad u''_{xy} = \frac{1}{y}e^x + \frac{1}{x}\cos y$.

$u''_{yy} = -\frac{1}{y^2}e^x - \sin y \ln x$; $\quad u''_{yx} = \frac{1}{y}e^x + \cos y$.

3- мисол. $u = \ln(x^2+y^2)$ $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ ни топинг.

$\triangle$ Аввал x бўйича хусусий ҳосилани топамиз:

$$u''_x = \frac{(x^2+y^2)'_x}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Энди бу функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласини топамиз:

$$u''_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{(2x)'_x\,(x^2+y^2)-2x\,(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{2\,(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2\,(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Энди бу ифоданинг y бўйича хусусий ҳосиласини топамиз:

$$u'''_{x^2y}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\left(\frac{2\,(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)'_y=$$

$$=\frac{2(y^2-x^2)'_y\,(x^2+y^2)^2-[(x^2+y^2)]'_y\cdot 2\,(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=\frac{4y\,(x^2+y^2)^2-2\,(x^2+y^2)\,2y\cdot 2\,(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=\frac{4y\,(x^2+y^2)\,[(x^2+y^2)-2(y^2-x^2)]}{(x^2+y)^4}=\frac{4y\,(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}. \ \blacktriangle$$

□. Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг.

21. $z=\ln(x^2+y^2)$.

Жавоб. $z'_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $z'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

22. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Жавоб. $z'_x=\frac{-y}{x^2+y^2}$; $z'_y=\frac{x}{x^2+y^2}$.

23. $u=\frac{xy}{x-y}$.

Жавоб. $u'_x=-\frac{y^2}{(x-y)^2}$; $u'_y=\frac{x^2}{(x-y)^2}$.

24. $u=x\cdot e^{-yx}$

Жавоб. $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-xy}\,(1-xy)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^{-xy}$.

25. $v=\arcsin(t,\sqrt{x})$.

Жавоб. $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{t}{2\sqrt{x-x^2t^2}}$; $\frac{\partial v}{\partial t}=\sqrt{\frac{t}{1-xt^2}}$.

26. $v=\ln\,\sin(x-2t)$.

Жавоб. $v'_x=\operatorname{ctg}(x-2t)$; $v'_i=-2\operatorname{ctg}(x-2t)$.

Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

27. $z = x^3 - 2x^2y + 3y^2$.

Жавоб. $z''_{xx} = 6x - 4y;$
$z''_{yy} = z''_{yx} = -4x;$
$z''_{yy} = 6.$ ■

28. $z = e^{xyt}$

Жавоб. $u''_{xx} = y^2t^2e^{xyt};$
$u''_{xy} = u''_{yx} = t(1 + xyt)e^{xyt};$
$u''_{xt} = u''_{tx} = y(1 + xyz)e^{xyt};$
$u''_{yt} = u''_{ty} = x(1 + xyt)e^{xyt};$
$u''_{yy} = x^2t^2e^{xyt};$
$u''_{tt} = x^2y^2e^{xyt}.$

29. $u = \frac{y}{x}$ нинг учинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Жавоб. $u'''_{xxx} = -\frac{6y}{x^4}.$

30. $u = 2^{xyz}$ ни топинг.

Жавоб. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2^{xyz}(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1).$

31. $u = \sin(xy)$. u'''_{xyy} ни топинг.

Жавоб. $u'''_{xyy} = -[2x\sin(xy) + x^2y\cos(xy)].$ ■

4- §. Кўп аргументли функциянинг тўлиқ дифференциали

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўп гргументли функция $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта ва унинг бирор атрофида аниқланган бўлсин.

$f(x_1 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ифодани функциянинг $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, X_n^0)$ нуқтадаги *тўлиқ орттирмаси* дейилади.

1- таъриф. Агар фақат X^0 нуқтага боғлиқ бўлган $A, B, \dots, C$ ўзгармас ҳақиқий сонлар мавжуд бўлиб

$$\Delta u = A \cdot \Delta x_1 + B\Delta x_2 + \dots + C\Delta x_n + \rho r(x_1, x_2, \dots x_n), \qquad (1)$$

ўринли бўлса (бу ерда $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$) ва $r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ узлуксиз функция бўлиб,

$$\lim_{\rho \to 0} r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (2)$$

бўлса, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция $X^\circ = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нуқтада *дифференциаллanувчи* дейилади. (1) тенгликдаги

$$A\,\Delta x_1 + B\Delta x_2 + \ldots + C\Delta x_n$$

ифодани берилган функциянинг $X^\circ = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нуқтадаги *тўлиқ дифференциали* дейилади ва у

$$df = A\,\Delta x_1 + B\Delta x_2 + \ldots + C\Delta x_n \qquad (3)$$

каби белгиланади.

Агар $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция дифференциалланувчи бўлса, яъни (1) ва (2) муносабатлар бажарилса, (1) тенгликдаги $A, B, \ldots, C$ ўзгармаслар мос равишда $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар бўйича $X^0 = (x_2^0, y^0, \ldots, t^\circ)$ нуқтадаги хусусий ҳосилаларига тенг бўлади, яъни

$$A = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X^\circ),\ B = \frac{\partial f}{\partial x_2}(X^\circ),\ \ldots,\ C = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X^\circ).$$

Энди $\Delta x_1 = dx_1, \Delta x_2 = dx_2, \ldots, \Delta x_n = dx_n$ деб белгиласак ва $A, B, \ldots, C$ ларнинг ўрнига хусусий ҳосилаларни қўйсак, (3) формула қуйидаги кўринишда бўлади:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx + \frac{\partial f}{\partial x_2}dy_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \qquad (4)$$

Эслатма. Агар $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция дифференциалланувчи бўлса,

$$\Delta u \approx du \qquad (5)$$

бўлади. Бу муносабат (1) ва (2) дан келиб чиқади. (5) муносабат тақрибий ҳисоблашларда кўп қўлланилади.

1-мисол. Қуйидаги функцияларнинг тўлиқ дифференциалини топинг.

1) $z = x^2y$;   2) $u = e^{\frac{s}{t}}$;

3) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;   4) $z = y \ln 2x$.

△. 1) Аввал берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2.$$

Энди бу хусусий ҳосилаларни мос равишда dx ва dy га кўпайтириб, натижаларни қўшамиз:

$$dz = 2xy\,dx + x^2dy.$$

2) $u = e^{\frac{s}{t}}$ функциянинг хусусий ҳосилалари:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = e^{\frac{s}{t}}\frac{1}{t}; \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -e^{\frac{s}{t}}\frac{s}{t^2},$$

шунинг учун

$$du = e^{\frac{s}{t}}\left|\frac{1}{t}ds - \frac{s}{t^2}dt\right].$$

3) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функциянинг хусусий ҳосилалари:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

шунинг учун

$$du = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

4) $z = y \ln 2x$ функциянинг хусусий ҳосилалари:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln 2x,$$

шунинг учун

$$dz = \frac{2y}{x}dx + \ln 2\,xdy. \ ▲$$

2-мисол. $z = \frac{x}{x-y}$ функция тўлиқ дифференциалининг, $x = 2, y = 1$, $dx = -\frac{1}{3}, dy = \frac{1}{2}$ лардаги қийматини топинг.

△. Бу функциянинг хусусий ҳосилалари:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{(x-y)^2}; \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2},$$

шунинг учун

$$dz = -\frac{y}{(x-y)^2}dx + \frac{x}{(x-y)^2}dy.$$

Демак,

$$dz = -\frac{1}{(2-1)^2}\cdot\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{(2-1)^2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{1}\left(-\frac{1}{3}\right) + \right.$$

$$+\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + 1 = 1\frac{1}{3}. \ ▲$$

3-мисол. $u = \sin 1{,}59 \operatorname{tg} 3{,}09$ ни ҳисобланг.

$\triangle$. Бу мисолни ечиш учун $u = \sin x \operatorname{tg} y$ функциянинг $M_0\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ нуқтадаги қийматидан ва Δu нинг тахминан du га тенглигидан фойдаланамиз. Бунинг учун аввал $u = \sin x \operatorname{tg} y$ функциянинг $M_0\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ нуқтадаги хусусий хосилаларини топайлик:

$$\frac{\partial u\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}{\partial x} = \cos x \operatorname{tg} y \Big|_{\substack{x = \frac{\pi}{2} \\ y = \pi}} = \cos\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \pi = 0;$$

$$\frac{\partial u\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}{\partial y} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} \Big|_{\substack{x = \frac{\pi}{2} \\ y = \pi}} = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \pi} = 1.$$

Энди

$$\Delta u \approx du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

тенгликдан қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\sin 1{,}59 \operatorname{tg} 3{,}09 - \sin\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \pi = \frac{\partial u\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial u\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}{\partial y} dy,$$

Бундан

$$\sin 1{,}59 \operatorname{tg} 3{,}09 = dy$$

келиб чиқади. $dy = 3{,}09 - 3{,}14 = -0{,}05$ бўлгани учун

$$\sin 1{,}59 \cdot \operatorname{tg} 3{,}09 = -0{,}05. \blacktriangle$$

☐. Қуйидаги функцияларнинг тўлиқ дифференциалини топинг.

32. $z = 3x^2y^5$.

Жавоб. $dz = 6xy^5 dx + 15x^2y^4 dy$.

33. $u = 2 \cdot x^{yz}$.

Жавоб. $du = 2x^{yz}\left(\frac{yz}{x} dx + z \ln x\, dy + y \ln xyz\right)$.

34. $s = x \ln t$.

Жавоб. $ds = \ln t\, dx + \frac{x}{t} dt$.

35. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

Жавоб. $dz = -\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right) dy$.

36. $u = \sin\frac{x}{y}$.

Жавоб. $du = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\,dy$.

37. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Жавоб. $dz = \frac{\sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy}{2\sqrt{xy}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$.

38. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ функция тўлиқ дифференциалининг $x = 1$, $y = 3$, $dx = 0{,}01$, $dy = -0{,}05$ лардаги қийматини топинг. *Жавоб.* $-0{,}008$.

39. Ушбу

1) $1{,}08^{3,96}$ 2) $\frac{\sin 1{,}49 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}07}{2^{2,95}}$

ифодаларни тақрибан ҳисобланг. *Жавоб.* 1,32, 0,01.

5- §. Мураккаб функциянинг дифференциали

Агар

$$z = F(u, v, \ldots, \omega)$$

функциянинг u, v, ..., ω аргументлари ўз навбатида $x, y, \ldots, t$ ўзгарувчиларнинг функцияси, яъни

$$u = \varphi(x, y, \ldots, t),\ v = \psi(x, y, \ldots, t),\ \ldots,\ \omega = \\ = g(x, y, \ldots, t)$$

бўлса, у ҳолда z функция $x, y, \ldots, t$ ларга боғлиқ мураккаб функция бўлади. Демак,

$$z = F(\varphi(x, y, \ldots t),\ \psi(x, y, \ldots, t),\ \ldots, \\ g(x, y, \ldots, t)).$$

Бу функциянинг $x, y, \ldots, t$ лар бўйича хусусий ҳосилалари қуйидаги формулалар орқали топилади:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x};\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial t}
\end{aligned}$$

Агар u, v, . . . , ω аргументлар фақат x га боғлиқ функциялар бўлса, z фақат x га боғлиқ мураккаб функция бўлади. Бундай мураккаб функциянинг ҳосиласини *тўла ҳосила* дейилади ва у қуйидагича топилади:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}. \qquad (2)$$

1- мисол. Қуйидаги мураккаб функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

1) $z = e^{uv}$, $u = x^2$, $v = xy$ $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

2) $z = \ln(e^x + e^t)$, $x = t^3$, $\frac{\partial z}{\partial t} = ?$ $\frac{dz}{dt} = ?$

3) $u = e^{z-2y}$, $z = \sin x$, $y = x^3$; $\frac{du}{dx} = ?$

△. 1) $z = e^{uv}$ функция x ва y ларга боғлиқ мураккаб функциядир. Шунинг учун унинг хусусий ҳосилалари (1) формула ёрдамида топилади.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = e^{uv}\cdot v\,2x - e^{uv}\,u\cdot y = 3x^2y\,e^{x3y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = e^{uv}\cdot v\cdot 0 + e^{uv}\,u\cdot x = x^3e^{x^3y}.$$

2) $z = \ln(e^x + e^t)$ мисолда берилган функция t га нисбатан мураккаб эмас, шунинг учун

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{(e^x + e^t)'_t}{e^x + e^t} = \frac{e^t}{e^x + e^t}.$$

x эса t га боғлиқ, шунинг учун

$$\frac{da}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dt} = \frac{e^x}{e^x + e^t}\cdot 3t^2 + \frac{e^t}{e^x + e^t} = \frac{3t^2e^x + e^t}{e^x + e^t}.$$

3) $u = e^{z-2y}$ функциянинг ҳар иккала аргументи x га боғлиқ, шунинг учун бу функция x га боғлиқ мураккаб функциядир. Демак, унинг ҳосиласи (2) формула орқали ҳисобланади:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = e^{z-2y}\cos x + e^{z-2y}(-2)\,3x^2 =$$

$$= e^{z-2y}(\cos x - 6x^2). \quad ▲$$

☐. Қуйидаги мураккаб функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

40. $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$; $\frac{\partial u}{\partial x} = ?$, $\frac{\partial u}{\partial y} = ?$

Жавоб. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{vy}(3x + 2v\ln v)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{vy^2}(y + v\ln v)$.

41. $z=\frac{y}{x},\ x=e^{t},\ y=1-e^{2t},\ \frac{dz}{dt}=?$

Жавоб. $\frac{dz}{dt}=-(e^{t}+e^{-t})$.

42. $z=\frac{u^{2}}{v^{2}},\ u=x-2y,\quad v=y+2x.$

Жавоб. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{v}\left(1-\frac{u}{v}\right);\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{u}{v}\left(4+\frac{u}{v}\right)$.

43. $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}},\ x=\sin t,\quad y=\cos t.$

Жавоб. $\frac{dz}{dt}=0$.

44. $z=xe^{y}$ y, x нинг функцияси. $\frac{dz}{dx}=?$

Жавоб. $\frac{dz}{dx}=e^{y}+xe^{y}\frac{dy}{dx}$.

45. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x};\ x=e^{2t}+1,\ y=e^{2t}-1,\ \frac{dz}{dt}=?$

Жавоб. $\frac{dz}{dt}=\frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$. ■

6- §. Ошкормас функциянинг ҳосиласи

Агар $F(x,y)$ функция $G\subset R^{2}$ соҳада узлуксиз бўлиб $(x_0,y_0)\in G$ нуқтада нолга тенг, яъни $F(x_0,y_0)=0$ ва $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ бўлса, x_0 нинг бирор атрофида $F(x,y)=0$ тенглама бирор $y=f(x)$ функцияни ошкормас равишда ифодалайди. Унинг ҳосиласи

$$F'_x(x_0,y_0)+F'_y(x_0,y_0)\cdot f'(x_0)=0 \qquad (1)$$

ифодадан топилади, яъни

$$f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}. \qquad (2)$$

1- мисол. Қуйидаги тенгламалардан $\frac{dy}{dx}$ ни топинг.

1) $x^{2}+y^{2}-4x+6y=0$; 2) $x\cdot e^{2y}-ye^{2x}=0$;

3) $2y^{4}-3y^{2}x-x^{5}-40=0$; 4) $xy-e^{x}\sin y-\pi=0$;

5) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$.

△. 1) $x^{2}+y^{2}-4x+6y=0$ тенгламадан аввал x бўйича, кейин y бўйича ҳосила олиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$F'_x=2x-4;\quad F'_y=2y+6.$$

Демак,

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{4 - 2x}{2y + 6}.$$

2) Худди шунга ўхшаш

$$F'_x = e^{2y} - 2ye^{2x}; \quad F'_y = 2xe^{2y} - e^{2x}.$$

Демак,

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^{2y} - 2ye^{2x}}{2x\,e^{2y} - e^{2x}} = \frac{2y\,e^{2x} - e^{2y}}{2x\,e^{2y} - e^{2x}}.$$

3) Юқоридаги мисоллардагидек хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$F'_x = -3y^2 - 5x^4; \quad F'_y = 8y^3 - 6xy.$$

Демак,

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{5x^4 + 3y^2}{8y^3 - 6xy}.$$

4) Бу мисолда ҳам тенгламадан аввал x бўйича, кейин y бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$F'_x = y - e^x \sin y; \quad F'_y = x - e^x \cos y.$$

Демак,

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{e^x \sin y - y}{x - e^x \cos y}.$$

5) Хусусий ҳосилалар қуйидагича:

$$F'_x = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}; \qquad F'_y = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}};$$

Шунинг учун

$$y'_x = \frac{-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}. \ \blacktriangle$$

☐. Қуйидаги тенгламалардан $\frac{dy}{dz}$ ни топинг.

46. $x^2 - 4y^2 = 4$. *Жавоб.* $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$.

47. $xy + \ln y + \ln x = 0$. *Жавоб.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

48. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1.$ *Жавоб.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}.$

49. $e^{-x\cos y} + \sin y = e.$ *Жавоб.* $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x\cos y}\cdot\cos y}{x\sin y\, e^{-x\cos y} + \cos y}.$

50. $y + x = e^{\frac{y}{a}}.$ *Жавоб.* $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^3}{xy}.$

51 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{x}}.$ *Жавоб.* $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$

52. $y^{10} + 2yx^{10} - 3 = 0.$ *Жавоб.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{10x^9y}{5y^9 + x^{10}}.$

53. $2\cos(x - 2y) - 2y + x = 0.$ *Жавоб.* $y'_x = \frac{1}{2}.$

7- §. Кўп аргументли функциянинг экстремуми

Таъриф. $y = f(x)$ функция $G \subset R^n$ тўпламда берилган ва $X^\circ \in G$ бўлсин. Агар X° нуқтанинг бирор δ-атрофи топилиб, бу атрофга тегишли барча нуқталарда $f(x) \leqslant f(x^\circ)$ $(f(x) \geqslant f(x^\circ))$ тенгсизлик бажарилса, X° нуқтада функция *локал максимумга (минимумга)* эришади дейилади.

Локал максимум ёки локал минимумга эришадиган нуқталарда функциянинг хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлади. Бундай нуқталарни, яъни хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлган нуқталарни *стационар нуқталар* дейилади. Бир аргументли функциялардагидек, хусусий ҳосилаларнинг нолга тенглиги экстремумни қабул қилиш учун зарурдир. Бу шарт етарли эмас.

Қуйида икки аргументли функция учун етарли шартни келтирамиз.

Теорема. *Икки аргументли* $z = f(x, y)$ *функция* $M_0(x_0, y_0)$ *нуқтанинг бирор* $U_\delta(M_0)$ *атрофида иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,* M_0 *нуқтада узлуксиз бўлсин ҳамда*

$$A = f''_{xx}(M_0), \quad B = f''_{xy}(M_0), \quad C = f''_{yy}(M_0)$$

ва

$$\Delta = AC - B^2$$

деб белгилайлик. У ҳолда:

1) *агар* $\Delta > 0$ *бўлса,* M_0 *нуқтада* f *функция экстремумга эришади:* а) $A < 0$ *бўлса, максимумга,* б) $A > 0$ *бўлса, минимумга эришади.*

2) $\Delta<0$ *бўлса,* M_0 *нуқтада экстремумга эришмайди.*

3) *Агар* $\Delta=0$ *бўлса,* M_0 *нуқтада экстремумга эришиш ёки эришмаслигини қўшимча текшириш керак.*

1-мисол. Қуйидаги функцияларнинг экстремумини топинг.

1) $z=x^3+y^3-3xy$; 2) $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$;

3) $z=x^3+xy^2+6xy$; 4) $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$;

5) $u=3\ln\frac{x}{6}+2\ln y+\ln(12-x-y)$.

△. 1) Бу функциянинг экстремумини топиш учун аввал хусусий ҳосилаларини нолга тенглаштириб, тенгламалар системасини ечсак, стационар нуқталар топилади:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0; \qquad \begin{cases} 3(x^2-y)=0, \\ 3(y^2-3x)=0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0;$$

Бу системанинг биринчисидан $y=x^2$ ни топамиз. Энди бу ифодани иккинчисига қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x^4-x=0 \text{ ёки } x(x^3-1)=0.$$

Бу тенгламанинг иккита $x_1=0$ ва $x_2=1$ ҳақиқий илдизи бор. Демак, $y_1=0$, $y_2=1$ экан. Шундай қилиб, бу функциянинг иккита $M_0(0, 0)$ ва $M_1(1, 1)$ стационар нуқтаси бор.

Энди бу нуқталарда Δ нинг қийматини текшириш учун иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз: $z''_{xx}=6x$, $z''_{xy}=-3$, $z''_{yy}=6y$. $M_0(0, 0)$ нуқтада $A=0$, $B=-3$, $C=0$. Демак, бу нуқтада $\Delta=-9$. Шунинг учун $M_0(0, 0)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

$M_1(1, 1)$ нуқтада эса $A=z''_{xx}(1)=6$, $B=-3$, $C=z''_{yy}(1)=6$ га тенг. Шунинг учун $\Delta=36-(-3)=39>0$. Иккинчидан, $M_1(1, 1)$ нуқтада $A=6>0$. Демак, $M_1(1, 1)$ нуқтада функция минимумга эришар экан, яъни

$$f_{\min}(1, 1)=1+1-3\cdot1\cdot1=-1.$$

2) Бу мисолда ҳам аввал биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-6; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-9.$$

Энди $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ системани, яъни

$$\begin{cases}2x + y - 6 = 0,\\ x + 2y - 9 = 0\end{cases}$$

системани ечиб, $M(1,4)$ нуқтани топамиз. Бу функция R^2 да аниқланган ва унинг ягона $M(1,4)$ критик нуқтаси бор.

Энди бу критик нуқтада Δ нинг қийматини текширайлик. Бунинг учун аввал иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топайлик: $A = z''_{xx} = 2$, $B = z''_{xy} = 1$, $C = z''_{yy} = 2$. Демак, $\Delta = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$. Шунинг учун $M(1,4)$ нуқтада функция экстремумга эга, айнан шу нуқтада $A > 0$ бўлгани учун у минимумга эришади.

3) Критик нуқтани топиш учун

$$\begin{cases}z'_x = 3x^2 + y^2 + 6y = 0,\\ z'_y = 2xy + 6x\end{cases}$$

системани ечамиз. Бу системани $M_1(-\sqrt{3}; -3)$, $M_2(\sqrt{3}; -3)$ нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради. Бу функция ҳам R^2 да аниқланган ва шу иккита нуқта унинг критик нуқтаси бўлади.

Бу критик нуқталарда Δ нинг ишорасини текширамиз. Бунинг учун иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топайлик: $z''_{xx} = 6x$; $z''_{xy} = 2y + 6$, $z''_{yy} = 2x$. Шунинг учун $A = z''_{xx}(-\sqrt{3}, -3) = -6\sqrt{3}$, $B = z''_{xy}(-\sqrt{3}, -3) = 2\cdot(-3)+6=-6+6=0$, $C=z''_{yy}(-\sqrt{3}, -3)=2(-\sqrt{3})= -2\sqrt{3}$. Демак, $M_1(-\sqrt{3}, 3)$ нуқтада $\Delta = AC - B^2 = 36-0=36>0$ ва $A < 0$ бўлгани учун функция локал максимумга эришади. $M_2(\sqrt{3}, -3)$ нуқтада эса $A = z''_{xx}(\sqrt{3}, -3)=6\sqrt{3}$, $B=z''_{xy}(\sqrt{3}, -3)=2(-3)+6=0$, $C=z''(\sqrt{3}, -3) = 2\sqrt{3}$. Демак, $M_2(\sqrt{3}, -3)$ нуқтада $\Delta=36>0$ ва $A=6\sqrt{3}>0$ экан. Шунинг учун бу нуқтада функция локал минимумга эришади.

4) Бу мисолда $z'_x = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + y^2 + 1\right)$ ва $z'_y = 2ye^{\frac{x}{2}}$.

Демак, бу функция учун $M(-2;\ 0)$ нуқта стационар нуқта бўлади. Энди иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг бу нуқтадаги қийматларини топамиз: $z''_{xx} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + y^2 + 2\right)$; $z''_{xy} = 2ye^{\frac{x}{2}}$; $z'_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}$. Демак,

$A = z''_{xx}(-2;\ 0) = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot(-2)+0+2\right) = \frac{1}{2e}$; $B =$ $= z''_{xy}(-2;\ 0)=0$, $C=z''_{yy}(-2;\ 0)=\frac{2}{e}$. Шунинг учун $\Delta =$ $= \frac{1}{e^2} > 0$ ва $A > 0$ бўлгани учун бу функция $M(-2,\ 0)$ нуқтада минимумга эришади:

$$\varphi_{\min} = \varphi(-2;\ 0) = e^{-\frac{2}{2}}(-2,\ +0) = -\frac{2}{e}.$$

5) Бу функциянинг хусусий ҳосилалари қуйдагилардан иборат:

$$u'_x = \frac{3}{x} - \frac{1}{12-x-y} = \frac{36-4x-3y}{x(12-x-y)};$$

$$u'_y = \frac{2}{y} - \frac{1}{12-x-y} = \frac{24-2x-3y}{y(12-x-y)}.$$

Координаталари

$$\begin{cases} u'_x = 0 \\ u'_y = 0 \end{cases}$$

системани, яъни

$$\begin{cases} 4x+3y = 36 \\ 2x+3y = 24 \end{cases}$$

системани қаноатлантирадиган нуқта бу функциянинг стационар нуқтаси бўлади. Демак, $M(6,\ 4)$ нуқта стационар нуқта экан.

Энди Δ нинг ишораларини текшириш учун берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$u''_{xx} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2};$$

$$u''_{xy} = -\frac{1}{(12-x-y)^2};$$

$$u_{yy} = -\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}.$$

Шунинг учун $A = u''_{xx}(6;\ 4) = -\frac{1}{3}$; $B = u''_{xy}(6;\ 4) =$ $= -\frac{1}{4}$; $C = u''_{yy}(6;\ 4) = -\frac{3}{8}$. Демак, $\Delta = AC - B^2 =$ $= \frac{1}{16} > 0$. Бу функция $M(6;\ 4)$ нуқтада максимумни қабул қилади:

$$u_{\max} = u(6;\ 4) = 3\ln\frac{6}{6} + 2\ln 4 + \ln 2 = 5\ln 2.$$ ▲

□. Қуйидаги функцияларнинг экстремумини топинг.

54. $z = 2xy - 2x - 4y$.

Жавоб. Экстремумга эришмайди.

55. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

Жавоб. $z_{max} = z(4;\ 4) = 15$.

56. $u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Жавоб. $M_1(0;\ 0)$ ва $M_2\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ стационар нуқталар. M_1 нуқтада эктремумга эришмайди.

57. $u = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$.

Жавоб. Аниқланиш соҳанинг ичида критик нуқтаси йўқ.

58. $v = (x - y)^3 + (y - 1)^3$.

Жавоб. Экстремумга эришмайди.

59. $w = x^{2/3} + y^{2/3}$.

Жавоб. $w_{min} = w(0,\ 0) = 0$. ■

VIII БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

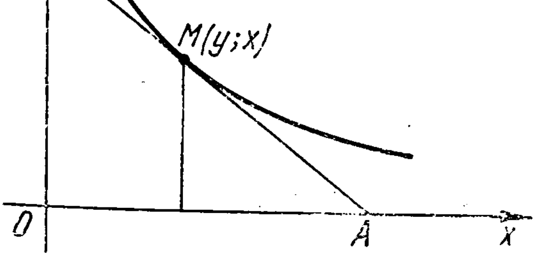
1-§. Асосий тушунчалар ва таърифлар

1-мисол. Эгри чизиққа унинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан кесган кесмаси уриниш нуқтаси ординатасининг иккиланганига тенг. Шу эгри чизиқ тенгламасини топинг.

△. Изланаётган эгри чизиқда ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқта оламиз (8.1-чизма). M нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$Y-y=y'(X-x)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда X, Y уринма нуқталарининг ўзгарувчи координаталари, y' — изланаётган функциянинг берилган нуқтадаги ҳосиласи (уринманинг бурчак коэффициенти). Уринманинг Oy ўқдан ажратадиган кесмасини топиш учун $X=0$ деймиз. $У$ ҳолда $OB=Y=$ $=y-xy'$. Иккинчи томондан масаланинг шартига кўра



8.1-чизма

$OB = 2y$. OB кесма учун топилган иккала ифодани таққослаб,

$$y - xy' = 2y$$

ёки (1)

$$xy' + y = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг иккала томонини dx га кўпайтириб, уни дифференциал иштирок этган тенгламага келтирамиз:

$$xdy + ydx = 0. \qquad (2)$$

(2) тенгламанинг чап томони ўзгарувчилар кўпайтмасининг дифференциали $d(xy)$ дан иборат, шунинг учун иккинчи тенгламани

$$d(xy) = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин, бундан:

$$xy = C, \qquad (3)$$

бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас сон. (3) тенглик изланаётган эгри чизиқнинг тенгламасини беради, уни ошкор ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = \frac{C}{x}. \qquad (4)$$

Аслини олганда (3) тенглама ҳам (4) каби битта эгри чизиқни эмас, балки эгри чизиқларнинг бутун бир оиласини — асимптоталари координаталар ўқларидан иборат бўлган тенг ёнли гиперболалар оиласини ташкил этади (8.2- чизма).

Бу эгри чизиқлар оиласидан бирини ажратиб олиш учун аргументнинг бирорта тайин қийматига функциянинг мос қийматини бериш керак. Айтайлик, изланаётган эгри чизиқ $M(3;\ 2)$ нуқтадан ўтсин, яъни $x = 3$ да функция $y = 2$ қийматга эга бўлсин. Бу қийматларни (3) ёки (4) формулага қўйиб, $C = 6$ ни топамиз, шу сабабли изланаётган эгри чизиқ бу ҳолда

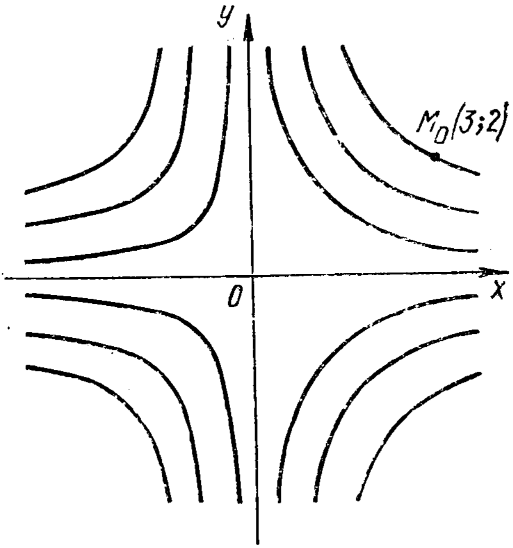
$$xy = 6 \qquad (5)$$

ёки

$$y = \frac{6}{x} \qquad (6)$$

кўринишга эга бўлади.▲

Энди асосий тушунчаларни таърифлашга ўтайлик. *Дифференциал тенглама* деб эркли ўзга-



8.2- чизма

рувчи, номаълум функция ва унинг турли тартибли ҳосилалари ёки дифференциалларини ўзаро боғловчи тенгламага айтилади.

Тенгламадаги номаълум функция битта эркли ўзгарувчининг функцияси бўлса, бундай дифференциал тенглама *оддий дифференциал тенглама* дейилади. *Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама* деб икки ёки бир нечта x, y ... ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган номаълум z функция, x, y ... эркли ўзгарувчилар ҳамда z нинг $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ва ҳоказо хусусий ҳосилаларини ўзаро боғловчи тенгламага айтилади. n- тартибли дифференциал тенгламани ушбу

$$F(x,\ y,\ y'\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0 \qquad (7)$$

кўринишда ёки агар мумкин бўлса, юқори тартибли ҳосилага нисбатан ечилган

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \qquad (8)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $y = y(x)$ изланаётган номаълум функция, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$ функциянинг x бўйича k тартибли ҳосиласидир ($k = \overline{1,n}$).

n-тартибли дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб n та ихтиёрий ўзгармас сонларни ўз ичига олган

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (9)$$

ечимга айтилади.

(8) дифференциал тенгламанинг умумий ечими формуласи (9) дан $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ларга маълум қийматлар бериб ҳосил қилинадиган ҳар бир ечими (8) тенгламанинг *хусусий ечими* дейилади. Агар (8) дифференциал тенгламанинг хусусий ечими $\Phi(x, y) = 0$ кўринишда берилса, бу муносабат берилган дифференциал тенгламанинг *хусусий интеграли* деб аталади. Агар умумий ечим $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots . C_n) = 0$ кўринишда ёзилган бўлса, бу муносабат (8) тенгламанинг *умумий интеграли* дейилади.

2-мисол. Ушбу функциялар мос равишда берилган дифференциал тенгламанинг ечими бўлишини текшириб кўринг.

а) $y = \frac{\sin x}{x}$; $\qquad xy' + y = \cos x.$

б) $y = c_1 e^{C_2 x}$; $\qquad y''y - (y')^2 = 0.$

$\triangle$. а) $y = \frac{\sin x}{x}$ функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини топамиз:

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2},$$

буни ва функцияни тенгламага келтириб қўямиз:

$$x\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) + \frac{\sin x}{x} = \cos x - \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} \equiv \cos x.$$

Берилган функция тенгламани айниятга айлантирди, демак $y = \frac{\sin x}{x}$ функция $xy' + y = \cos x$ тенгламанинг $x = 0$ ни ўз ичига олмаган ихтиёрий интервалда (хусусий) ечими бўлар экан.

б) Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y' = (C_1 e^{C_2 x})' = C_1 (e^{C_2 x})' = C_1 e^{C_2 x}(C_2 x)' = C_1 C_2 e^{C_2 x}$$

$$y'' = (C_1 C_2 e^{C_2 x})' = C_1 C_2 (e^{C_2 x})' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x},$$

y, y' y'' ларнинг ифодаларини тенгламага қўйсак, C_1, C_2 ўзгармасларнинг ихтиёрий қийматларида ўринли бўлган

$$C_1^2 C_2^2 e^{2C_2 x} - (C_1 C_2 e^{C_2 x})^2 \equiv 0$$

айният ҳосил бўлади. Демак, $y = C_1e^{C_2x}$ функция $y''y - (y')^2 = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими экан. ▲

3-мисол. $y''y - (y')^2 = 0$ дифференциал тенгламанинг $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган хусусий ечимини топинг.

△. Берилган $y''y - (y')^2 = 0$ тенглама учун $y = C_1e^{C_2x}$ функция умумий ечим бўлишини 3б-мисолда текшириб кўрган эдик. Бошланғич шарт қийматларини $y = C_1e^{C_2x}$ ва $y' = C_1C_2e^{C_2x}$ ифодаларга қўйиб C_1 ва C_2 ларни топиш учун

$$\begin{cases} C_1 = 2, \\ C_1C_2 = 5 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз, бундан $C_1 = 2$, $C_2 = 2{,}5$ келиб чиқади. Демак, изланган хусусий ечим $y = 2e^{2,5x}$ функция бўлади.

Қурилаётган тенглама учун $y = C\,(C \neq 0)$ функция ҳам ечимдир. Бу ечим умумий ечим формуласи $y = C_1e^{C_2x}$ дан C_1 ва C_2 ларнинг биронта ҳам қийматида ҳосил бўлмайди. Шунинг учун $y = C$ ечим махсус ечим бўлади. ▲

4-мисол. Қуйидаги дифференциал тенгламалар учун ечимнинг мавжудлик ва ягоналик соҳаларини топинг.

$$\text{а) } y' = x\sqrt{1-y^2}; \quad \text{б) } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{в) } y'' = \frac{y\sqrt{y'}}{x}.$$

△. а) Берилган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x,\ y) = x\sqrt{1-y^2}$ функция $|y| \leqslant 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи y лар учун узлуксиз, бу функциянинг y бўйича хусусий ҳосиласи: $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}$ эса $|y| \leqslant a < 1$ бўлганда узлуксиз. Демак, берилган тенглама учун

$$D = \{x,\ y): -\infty < x < +\infty,\ -1 < y < 1)\}$$

соҳа — ечимнинг мавжудлик ва ягоналик соҳасидир.

б) Бу ҳолда $f(x) = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$ функция $|x| < 1$ да аниқланган ва узлуксиздир. Демак, ечимнинг мавжудлик ва ягоналик соҳаси

$$D = \{(x,\ y): -1 < x < 1,\ -\infty < y < +\infty\}$$

бўлади.

в) Қурилаётган тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x, y, y') = \frac{y\sqrt{y'}}{x}$ функция ва унинг y бўйича $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{y'}}{x}$ $(x \neq 0)$ хусусий ҳосиласи $y' \geqslant 0$ бўлганда узлуксиз; y' бўйича хусусий ҳосиласи $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y}{2x\sqrt{y'}}$ эса $x \neq 0$, $y' > 0$ бўлганда узлуксиз. Демак, ечимнинг мавжудлик ва ягоналик соҳаси $D = \{(x, y, y') : x \neq 0, -\infty < y < +\infty, y' > 0\}$ бўлади.▲

☐ 1. Ушбу

а) $y = \sin x - 1$; б) $y = e^{-\sin x}$;
в) $y = \sin x$

функциялар бирор оралиқда $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ дифференциал тенгламанинг ечими бўладими?

Жавоб. а) Ҳа (ҳар қандай интервалда); б) йўқ; в) йўқ.

2. Ушбу

а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; б) $y = -\sqrt{1 - x^2}$;
в) $y = \sqrt{C - x^2}$ (C — ихтиёрий мусбат ўзгармас)

функциялар $xdx + ydy = 0$ тенгламанинг ечимлари бўладими?

Жавоб. а) Ҳа ($|x| < 1$); б) йўқ; в) ҳа ($|x| < C$).

3. α нинг қандай қийматларида берилган функция мос равишда берилган дефференциал тенгламанинг бирор оралиқдаги ечими бўлади:

а) $y = e^{\alpha x} + \frac{1}{3}e^{x}$; $y' + 2y = e^{x}$.

б) $y = (x^2 - x)^{\alpha}$; $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

в) $y = x^{\alpha}$; $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.

Жавоб. а) $\alpha = -2$; $\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\alpha = 2$, $\alpha = -3$.

Қуйидаги мисолларда берилган функцияни мос равишда берилган дифференциал тенглама ечими эканини текшириб кўринг:

4. $y = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$. $y' = x + \sin x$.

5. $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$ $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy = 0$

6. $y = C(1 + x)e^{-x}$. $xydx + (x + 1)dy = 0$.

7. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

8. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$. $y'' + 2y' - 3y = x$.

Қуйидаги дифференциал тенгламалар учун ечимнинг мавжудлик ва ягоналик соҳаларини топинг.

9. $y' = x^2 - y^2$. *Жавоб.* $D = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$.

10. $y'' = x + \sqrt{x^2 - y^2}$. *Жавоб.* $D = \{(x, y, y'): -\infty < x + \infty, y' < x^2\}$

2-§. Энг содда кўринишдаги ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

Агар 1-§ даги (7) тенгламанинг чап томони фақат x, y ва y' га боғлиқ бўлса, бундай тенглама *биринчи тартибли дифференциал тенглама* дейилади.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Одатда (1) тенгламани ҳосилага нисбатан ечиб,

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

кўринишда ёки дифференциаллар иштирок этган

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{3}$$

кўринишда ифодалаб олишга ҳаракат қилинади. (2) дан (3) га ва аксинча, ўтиш осон. Ҳақиқатан, агар (2) тенгламада y' ни $\frac{dy}{dx}$ билан алмаштириб ва тенгламанинг иккала томонини dx га кўпайтириб, ҳамма ҳадларини бир томонга ўтказсак, (3) тенгламага ўхшаш қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$f(x, y)\,dx - dy = 0,$$

бу ерда

$$M(x, y) = f(x, y), \quad N(x, y) = -1.$$

Аксинча, агар (3) тенгламанинг биринчи ҳадини ўнг томонга ўтказиб ва $N(x, y) \neq 0$ деб фараз қилиб, тенгламанинг ҳар икки томонини $N(x, y)\,dx$ га бўлсак,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

ни, яъни (2) муносабатни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Шундай қилиб, (2) ва (3) муносабатлар бутунлай тенг кучли; келгусида конкрет ҳол учун уларнинг қайси бири қулай бўлса, шунисидан фойдаланамиз.

1-мисол. $y'=5x^4-6x^2+2$ дифференциал тенгламанинг $y(1)=7\frac{1}{2}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

△. Берилган тенгламани

$$dy=(5x^4-6x^2+2)\,dx$$

кўринишда ёзамиз. Сўнгра интеграллаб, унинг умумий ечимини топамиз:

$$y=x^5-2x^3+2x+C.$$

Хусусий ечимни топиш учун умумий ечимда $x=1$, $y=7\frac{1}{2}$ деймиз ва $7\frac{1}{2}=1-2+2+C$ дан $C=6\frac{1}{2}$ ни топамиз. Демак, изланаётган хусусий ечим

$$y=x^5-2x^3+2x+\frac{13}{2}$$

кўринишда бўлади.*

2-мисол. $y'=\cos^2 y$ дифференциал тенгламанинг $y(1)=\frac{\pi}{4}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

△. Берилган тенгламани $\cos^2 y\neq 0$ шарт остида $dx=\frac{dy}{\cos^2 y}$ кўринишда ёзамиз. Сўнгра интеграллаб, унинг умумий ечимини топамиз:

$$x=\operatorname{tg} y+C.$$

Хусусий ечимни топиш учун умумий ечимда $x=1$, $y=\frac{\pi}{4}$ деймиз ва $1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+C$ дан $C=0$ ни топамиз. Демак, изланаётган хусусий ечим $x=\operatorname{tg} y$ ёки $y=\operatorname{arctg} x$ кўринишда бўлади. ▲

Агар $M(x, y)=M_1(x)M_2(y)$, $N(x, y)=N_1(x)N_2(y)$ бўлса, биринчи тартибли

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dx=0$$

---

* Албатта бу ерда ечимни ихтиёрий интервалда қараш мумкин, чунки $y(x)$ функция $]-\infty, +\infty[$ ораликда узлуксиз бўлиб, ҳар бир x нуқтада $y(x)$ мавжуд ва улар тенгламани айниятга айлантиради. Келгусида ечимларнинг интервалларига тўхталмаймиз.

дифференциал тенгламани *ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама* дейилади.

3-мисол. Ушбу дифференциал тенгламани ечинг:

$$(1+x^2)\,dy - xy\,dx = 0.$$

△. Тенгламанинг барча ҳадларини $(1+x^2)\,y$ ифодага бўламиз:

$$\frac{(1+x^2)\,dy}{(1+x^2)\,y} - \frac{xy\,dx}{(1+x^2)\,y} = 0; \quad \frac{dy}{y} - \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0.$$

Буни интеграллаб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий интегралини топамиз:

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Ихтиёрий ўзгармас сон C ўрнига (ҳосил қилинган ифодани потенцирлаш қулай бўлиш учун) $\ln C_1$ ёзамиз (бундай алмаштириш мумкин, чунки C катталик ихтиёрийдир):

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln C_1; \quad \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = C_1;$$

$$y = C_1\sqrt{1+x^2}$$

берилган тенгламанинг умумий ечимидир. ▲

4-мисол.

$$(x + xy^3)\,dx - (y^2 + x^2y^2)\,dy = 0$$

дифференциал тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган хусусий интегралини топинг.

△. Умумий кўпайтувчиларни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$x(1+y^3)\,dx - y^2(1+x^2)\,dy = 0.$$

Тенгламанинг барча ҳадларини $(1+y^3)(1+x^2)$ ифодага бўламиз:

$$\frac{x(1+y^3)dx}{(1+y^3)(1+x^2)} - \frac{y^2(1+x^2)\,dy}{(1+y^3)(1+x^2)} = 0$$

ёки

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx - \frac{y^2}{1+y^3}\,dy = 0.$$

Энди ҳосил қилинган ифодани интеграллаймиз:

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^2} - \int\frac{y^2dy}{1+y^3} = C; \quad \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - \frac{1}{3}\int\frac{d(1+y^3)}{1+y^3} = C;$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{3}\ln(1+y^3) = C.$$

Ўзгармас C ўрнига $\frac{1}{6}\ \ln C_1$ ни ёзамиз:

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{3}\ln(1+y^3)=\frac{1}{6}\ln C_1,$$
$$\ln(1+x^2)^3-\ln(1+y^3)^2=\ln C_1,$$
$$\frac{(1+x^2)^3}{(1+y^3)^2}=C_1.$$

Топилган ифода берилган тенгламанинг умумий интегралидир. Хусусий интегрални топиш учун умумий интеграл ифодасига $x=0$, $y=1$ ни қўйиб, $C_1=\frac{1}{4}$ ни топамиз.

Изланаётган хусусий интеграл $(1+y^3)^2-4(1+x^2)^3=0$ бўлади. ▲

□. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимлари (интеграллари) ни топинг:

11. $y'=3x^2-2x+1.$ *Жавоб.* $y=x^3-x^2+x+C.$

12. $\frac{dy}{dx}=y^2.$ *Жавоб.* $y=\frac{1}{C-x}.$

13. $\frac{dx}{2}-\frac{dy}{\cos x}=0.$ *Жавоб.* $y=\frac{1}{2}\sin x+C.$

14. $y'=x(y^2+1).$ *Жавоб.* $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}+C\right).$

15. $y^2dy+xdx=0.$ *Жавоб.* $y=\sqrt[3]{3\left(C-\frac{x^2}{2}\right)}.$

16. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=2x.$ *Жавоб.* $y=2+C\sqrt{1-x^2}.$

17. $e^{x-y}dx=\frac{1}{x}dy.$ *Жавоб.* $y=\ln(xe^x-e^x-C).$

18. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+1}.$ *Жавоб.* $y^3+y-x^2=C.$

19. $y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2.$ *Жавоб.* $\operatorname{arctg}y-\arcsin x=C.$

20. $y'=e^{x+y}.$ *Жавоб.* $e^x+e^{-y}=C.$

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимлари (интеграллари) ни топинг:

21. $(x-1)dx+ydy=0;\quad y(0)=1.$
Жавоб. $x^2-2x+y^2=1.$

22. $\frac{2x+1}{y+1}=\frac{dx}{dy};\quad y(4)=2.$
Жавоб. $y=\sqrt{2x+1}-1.$

23. $\frac{dx}{3}+\frac{dy}{\cos x}=0;\quad y(0)=-1.$
Жавоб. $y=\frac{1}{3}\sin x-1.$

24. $(1+y^2)dx - xydy = 0; \quad y(1) = 0.$

Жавоб. $x^2 - y^2 = 1.$

25. $\frac{dx}{2} + \frac{dy}{\sin x} = 0; \quad y(0) = 1.$

Жавоб. $y = \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{2}.$

26. $\frac{dy}{e^x} + \frac{dx}{3} = 0; \quad y(0) = -1.$

Жавоб. $y = -\frac{1}{3}e^x - \frac{2}{3}.$

27. $(xy^2 + x)dy + (x^2y - y)dx = 0; \quad y(1) = 1.$

Жавоб. $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = 1.$

28. $y'\operatorname{tg} x = y; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Жавоб. $y = \sin x.$

29. $e^x dx - 2dy; \quad y(0) = 0.$

Жавоб. $y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}.$

30. $(1 + e^x)yy' = e^x; \quad y(0) = 1.$

Жавоб. $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}\,(1 + e^x).$

Агар $f(x, y)$ функцияда x ва y ўзгарувчиларни мос равишда t_x ва t_y га алмаштирилганда (бу ерда t — ихтиёрий катталик, параметр) t^n га кўпайтирилган ўша функция ҳосил бўлса, яъни

$$f(t_x, t_y) \equiv t^n f(x, y)$$

шарт бажарилса, $f(x, y)$ функция *n ўлчовли бир жинсли функция* дейилади.

Бир хил ўлчовли бир жинсли $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функция қатнашган

$$M(x, y)dx + N(x, y)dx = 0$$

тенглама x ва y га нисбатан *бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенглама* дейилади. Бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириб ечилади.

1-мисол. Қуйидаги дифференциал тенгламаларни ечинг.

1) $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0.$
2) $ydx = (x + y)dy.$
3) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, \; y(1) = -2.$
4) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$

△. 1) Тенгламадаги $M(x, y) = x^2 - 2y^2$; $N(x, y) = 2xy$ функцияларнинг ҳар бири иккинчи тартибли бир жинсли функциялардир, демак, биринчи тартибли бир жинсли тенгламанинг юқорида келтирилган таърифига кўра берилган тенглама бир жинсли тенгламадир. Буни ечиш учун $y = 2x$ алмаштиришни бажарамиз, у ҳолда $dy = 2dx + xdz$ бўлади. Бу ифодаларни берилган тенгламага қўямиз:

$$x^2dx - 2(zx)^2 dx + 2xzx(zdx + xdz) = 0, \text{ бундан}$$
$$x^2dx - 2z^2x^2dx + 2z^2x^2dx + 2zx^3dz = 0 \text{ ни}$$

ёки $dx + 2zxdz = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу 2-§ да кўрилган ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$2zdz + \frac{dx}{x} = 0.$$

Бу тенгламани ҳадма-ҳад интеграллаб

$$\int 2zdz + \int \frac{dx}{x} = C$$

ни, бундан $z^2 + \ln|x| = C$ тенгламанинг z орқали ифодаланган умумий интеграли топилади. Ихтиёрий ўзгармас C ўрнига (ҳосил қилинган ифодани потенцирлаш қулай бўлиши учун) $\ln C_1$ ёзамиз:

$$z^2 + \ln|x| = \ln|C_1|; \quad \ln|x| = \ln|C_1| - z^2;$$
$$\ln|x| = \ln|C_1| + \ln e^{-z^2},$$

бундан $x = C_1e^{-z^2}$ бўлиб, бу тенгламанинг z қатнашган умумий ечимидир. Номаълум функция y га қайтиш учун бу ечимда z ўрнига $\frac{y}{x}$ ни қўйиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий интеграли $x = C_1 e^{-\frac{y^2}{x^2}}$ ни ҳосил қиламиз. ▲

△. 2) Бу $ydx = (x + y)dy$ тенгламада $y = zx$ эмас, балки $x = zy$ алмаштиришни бажариш қулайдир. У ҳолда $dx = ydz + zdy$ бўлади ва тенглама

$$y(ydz + zdy) = y(z + 1)dy; \quad ydz = dy; \quad dz = \frac{dy}{y}$$

кўринишга келади. Бу ердан $\ln y = z + \ln C$; $y = Ce^z$ ни топамиз, демак, умумий ечим $y = Ce^{\frac{x}{y}}$ эгри чизиқлар оиласидан иборат. ▲

△. 3. $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$ тенглама бир жинсли тенглама эканлигини кўриш қийин эмас. $x=zy$ деб оламиз. У ҳолда $dx=zdy+ydz$ бўлади. Бу ифодаларни берилган тенгламага қўямиз:

$$y^2dy-3(zy)^2dy+2zy^2(zdy+ydz)=0;$$
$$2zy^3dz-(z^2-1)y^2dy=0.$$

Бундан $y=0$ ечимни ва ўзгарувчилари ажраладиган $(z^2-1)dy-2zydz=0$ дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб, ҳадма-ҳад интеграллаймиз:

$$\frac{dy}{y}-\frac{2zdz}{z^2-1}=0,$$
$$\ln|y|-\ln|z^2-1|=\ln C.$$

$\frac{y}{z^2-1}=C$ ёки z ўрнига $\frac{x}{y}$ ни қўйсак, $\frac{y^3}{x^2-y^2}=C$ бўлади.

Топилган ифода берилган тенгламанинг умумий интегралидир. Хусусий интегрални топиш учун умумий интеграл ифодасига $x=1$ ва $y=2$ ни қўйиб, $C=\frac{8}{3}$ ни топамиз. Демак, $3y^3-8(x^2-y^2)=0$ берилган тенгламанинг талаб қилинган хусусий интегральдир. ▲

△. 4) Берилган $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ бир жинсли дифференциал тенгламада $y=zx$ алмаштиришдан фойдаланиб аввал умумий ечимни топамиз:

$$z+xz'=\frac{1}{z}+z;\quad xz'=\frac{1}{z};$$
$$zdz=\frac{dx}{x};\quad \frac{z^2}{2}=\ln|x|+C \text{ ёки } z^2=2(\ln|x|+C).$$

y ўзгарувчига қайтсак $y^2=2x^2(\ln|x|+C)$. Бу берилган тенгламанинг умумий интегралидир. Энди хусусий ечимни топиш учун $x=1$, $y=1$ деб C ни топамиз. $1=2\cdot C$, $C=-\frac{1}{2}$. Буни умумий ечимга қўйсак

$$y^2=2x^2\left(\ln|x|+\frac{1}{2}\right) \text{ ёки } y=\pm x\sqrt{\ln(ex^2)}$$

ҳосил бўлади. Бу эса изланган хусусий ечимдир. ▲

□. Қуйидаги дифференциал тенгламаларни ечинг.

31. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0.$

Жавоб. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=C.$

32. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x.$

Жавоб. $\sin\frac{y}{x} + \ln x = C.$

33. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - xdy = 0.$

Жавоб. $y = \frac{1}{2}C(x^2 - C^2);\quad C > 0.$

34. $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$

Жавоб. $y = xe^{1-Cx}.$

35. $xydy - y^2dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}dx.$

Жавоб. $(x + y)\ln Cx = xe^{\frac{y}{x}}.$

36. $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y.$

Жавоб. $y = 2x\,\mathrm{arctg}\,Cx.$

37. $(x^2+2xy-y^2)\,dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0;\qquad y(1)=1.$

Жавоб. $x^2 + y^2 = x + y.$

38. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$

Жавоб. $y(y - 2x)^3 = C(x - y)^2.$

39. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0;\quad y(0) = 2.$

Жавоб. $x + ye^{\frac{x}{y}} = 2.$

40. $xdy - (y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx = 0;\quad y(0) = \frac{1}{2}.$

Жавоб. $y = 1 - \frac{1}{4}x^2.$ ■

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \qquad (4)$$

кўринишдаги тенглама *биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама* дейилади. Бунда $P(x)$, $Q(x)$ лар аргумент x нинг бирор интервалда узлуксиз функциясидир.

$P(x) = 0$ ёки $Q(x) = 0$ бўлган ҳолни алоҳида қараб чиқиш шарт эмас, чунки бу ҳолда (4) тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган тенглама* бўлади.

(4) чизиқли тенгламанинг умумий ечимини топиш

учун $y = uv$ (u ва v фақат x нинг функциясидир) алмаштириш бажарилади.

1-мисол. $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 3$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

△. Бу тенгламанинг барча ҳадларини x^2 га бўлиб, қайта ёзамиз:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}.$$

Демак, берилган мисолда $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = \frac{3}{x^2}$ бўлиб, берилган тенглама (4) типдаги биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама экан. Берилган тенгламада $y = u\cdot v$ деб оламиз, у ҳолда $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$ алмаштиришдан сўнг қуйидагига эга бўламиз:

$$x^2\left(v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}\right) - 2xuv = 3; \quad x^2v\frac{du}{dx} + x^2u\frac{dv}{dx} - 2xuv = 3$$

ёки

$$x^2v\frac{du}{dx} + ux\left[x\frac{dv}{dx} - 2v\right] = 3. \qquad (*)$$

Бу ерда v ни шундай танлаймизки, $X\frac{dv}{dx} - 2v = 0$ бўлсин. (Худди шунингдек $xv\left[x\frac{du}{dx} - 2u\right] + x^2u\frac{dv}{dx} = 0$ тенгламада u ни $x\frac{du}{dx} - 2u = 0$ бўлсин деб танлаш мумкин.)

$x\frac{dv}{dx} - 2v = 0$ тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб v ни топамиз:

$$\frac{dv}{v} - 2\frac{dx}{x} = 0, \text{ бундан } \ln v - 2\ln x = \ln C$$

ёки $v = Cx^2$. Юқорида айтиб ўтилганидек, $C = 1$ бўлгандаги $v = x^2$ хусусий ечим билан чекланиш мумкин. v нинг ифодасини алмаштирилган (*) тенгламага қўйиб u ни топамиз:

$$x^2\cdot x^2\frac{du}{dx} = 3 \text{ ёки } du = \frac{3dx}{x^4}, \text{ бундан}$$

$$u = -\frac{1}{x^3} + C.$$

$y = u\cdot v$ формулага u ва v учун топилган ифодаларни қўйиб, берилган чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y = Cx^2 - \frac{1}{x}. \blacktriangle$$

□. Қуйидаги дифференциал тенгламаларни ечинг.

41. $(1+x^2)y'-xy=2x.$ *Жавоб.* $y=C(\sqrt{1+x^2}-C_1).$

42. $y'-\frac{4y}{x}=\frac{x+1}{x}.$ *Жавоб.* $y=C_1x^4-\frac{x}{3}-\frac{1}{4}.$

43. $y'+y\cos x=\sin x\cos x;$ *Жавоб.* $y=\sin x+e^{-\sin x}-1.$
$y(0)=0.$

44. $\frac{dy}{dx}\cos x+y\sin x=1;$ $y(0)=1.$ *Жавоб.* $y=\sin x+\cos x.$

45. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x.$ *Жавоб.* $y=\frac{1}{3x}(x^3-C_1).$

46. $xy'-3y=-x^2.$ *Жавоб.* $y=x^2+C_1x.$

47. $y'-y\mathrm{tg}x\mathrm{g}=\frac{1}{\cos x};$ $y(0)=0.$ *Жавоб.* $y=\frac{x}{\cos x}.$

48. $y'+2xy=2xe^{-x^2}.$ *Жавоб.* $y=(x^2+C)e^{-x^2}.$

49. $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^2.$ *Жавоб.* $y=\frac{C}{x^2}+\frac{x^4}{6}.$

50. $xdy+ydx=e^x(1+x)dx;$ *Жавоб.* $y=\frac{1-e}{x}+e^x.$
$y(1)=1.$

Агар биринчи тартибли

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0 \tag{5}$$

дифференциал тенгламанинг чап томони бирорта $u(x,\ y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du(x,\ y),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,\ y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,\ y)\right)$$

бўлса, (5) тенглама *тўлиқ дифференциал тенглама* дейилади.

Мисол. $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$ тенгламанинг тўлиқ дифференциал тенглама эканлигига ишонч ҳосил қилиб сўнгра ечинг.

△. Бунда $M(x,\ y)=\frac{y}{x}$, $N(x,\ y)=y^3+\ln x$ эканлигини эътиборга олиб, теореманинг (3) шартини текширамиз:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x};\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y^3+\ln x)=\frac{1}{x}.$$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ бўлгани учун тенглама тўлиқ дифференциал тенгламадир, демак, таърифга кўра $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ва $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ тенгликлар ўринли бўлади.

Номаълум $u(x, y)$ ни топамиз. Бунинг учун

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = \frac{y}{x}$$

тенгликни фиксирланган y да x бўйича интеграллаб

$$u(x, y) = \int \frac{y}{x} dx + \varphi(y) = y\ln x + \varphi(y), \quad (x > 0) \qquad (*)$$

ни ҳосил қиламиз. Энди $\varphi(y)$ ни топамиз, бунинг учун (*) ни

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = y^3 + \ln x$$

тенгликка қўйиб,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y \ln x + \varphi(y)\right) = y^3 + \ln x,$$

$$\ln x + \varphi(y) = y^3 + \ln x,$$

$$\varphi'(y) = y^3$$

ни ҳосил қиламиз.

Бундан $\varphi(y) = \frac{1}{4} y^4 + C_1$ ни топамиз. Буни (*) га қўйиб, $u(x, y) = y \ln x + \frac{1}{4} y^4 + C_1$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий интеграли:

$$y \ln x + \frac{1}{4} y^4 = C.$$ ▲

☐. Қуйидаги дифференциал тенгламаларни тўлиқ дифференциал тенглама эканлигига ишонч ҳосил қилинг, сўнгра ечинг.

51. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$
Жавоб. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$
52. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0.$
Жавоб. $x^2 + xy + y^2 = C.$
53. $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0.$
Жавоб. $5x^2y - 8xy + x + 3y + C.$
54. $(2x + e^{\frac{x}{y}})dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0.$
Жавоб. $x^2 + ye^{\frac{x}{y}} = C.$
55. $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0.$
Жавоб. $x^2\cos^2 y + y^2 = C.$ ■

3-§. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар

$y'' = f(x)$ ёки $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ кўринишдаги тенглама *энг содда кўринишдаги иккинчи тартибли дифференциал тенглама* дейилади. Бу тенглама бевосита икки марта интеграллаш йўли билан ечилади.

1-мисол. Қуйидаги дифференциал тенгламаларни ечинг.

а) $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 - 1$; б) $y'' = x\sin x$.

△. а) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ бўлгани учун

$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = (3x^2 - 1)\,dx$ бўлади. Бу ерда

$\frac{dy}{dx} = \int (3x^2 - 1)\,dx + C_1 = x^3 - x + C_1$ ёки

$$dy = (x^3 - x + C_1)\,dx.$$

Демак,

$$y = \int (x^3 - x + C_1)\,dx + C_2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

бўлади.

б) $y'' = \frac{d(y')}{dx}$ бўлгани сабабли $d(y') = x\sin x dx$.

Бу ердан

$$y' = \int x\sin x dx + C_1 = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x dx + C_1 = -x\cos x + \sin x + C_1.$$

Демак,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -x\cos x + \sin x + C_1$$

ёки

$$dy = (-x\cos x + \sin x + C_1)\,dx.$$

Охирги муносабатдан

$$y = -x\sin x - 2\cos x + C_1x + C_2. ▲$$

$y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$, $y=-x\sin x-2\cos x+C_1x+C_2$

функциялар мос равишда $\frac{d^2y}{dx^2}=3x^2-1$, $y''=x\sin x$ тенгламаларнинг ечимлари эканини текшириб ишонч ҳосил қилишни ўқувчига тавсия қиламиз.

□. Қуйидаги дифференциал тенгламаларни ечинг.

56. $y''=x^2$. *Жавоб.* $y=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$.

57. $y''=e^x$. *Жавоб.* $y=e^x+C_1x+C_2$.

58. $y''=1-2x$. *Жавоб.* $y=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$.

59. $y''=\sin x$. *Жавоб.* $y=-\sin x+C_1x+C_2$.

60. $y''=\sin 3x$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$. *Жавоб.* $y'=-\frac{\sin 3x}{9}+\frac{x}{3}=\frac{1}{3}$.

Ушбу

$$y''+P(x)y'+g(x)y=0 \tag{1}$$

кўринишдаги тенглама *иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама* дейилади. Бу ерда $P(x)$ ва $g(x)$ узлуксиз функциялардир.

Агар $P(x)$ ва $g(x)$ функциялар ўзгармас сонлардан иборат бўлса,

$$y''+py'+gy=0 \tag{2}$$

тенглама *ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли тенглама* дейилади. Бу ерда p ва g ўзгармас ҳақиқий сонлар. Бу тенгламанинг хусусий ечимларини

$$y=e^{kx} \qquad \text{(бунда } k-\text{const)}$$

кўринишда излаймиз. Бу ҳолда

$$y'=ke^{kx},\quad y''=k^2e^{kx}$$

бўлгани учун (1′) дан

$$e^{kx}(k^2+pk+g)=0.$$

Аммо $e^{kx}\neq 0$ бўлгани учун

$$k^2+pk+g=0. \tag{3}$$

Демак, (3) квадрат тенгламани қаноатлантирувчи k лар учун $y=e^{kx}$ кўринишдаги функция (2) тенгламанинг хусусий ечими бўлади. (3) тенглама (2) тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади.

Бу характеристик тенгламанинг ечимлари:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

(3) тенглама $D = \frac{p^2}{4} - q$ нинг мусбат, ноль ва манфий бўлишига қараб қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин.

1) $D > 0$, яъни характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил ($k_1 \neq k_2$) бўлган ҳол. Бу ҳолда

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

функциялар хусусий ечимлар бўлади. Бу ечимлар

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \mathrm{const}$$

бўлгани учун чизиқли боғлиқ бўлмайди.

Демак, умумий ечим

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

кўринишда бўлади.

2-мисол. Қуйидаги ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенгламаларни ечинг:

а) $y'' + 3y' - 4y = 0$; б) $y'' + 6y' = 0$.

△. а) Унинг

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

характеристик тенгламасининг илдизларини топамиз:

$$k_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}; \quad k = 1, \quad k_2 = -4.$$

Умумий ечим

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$$

бўлади.

б) Бу ҳолда характеристик тенглама $k^2 + 6k = 0$ бўлиб, илдизлари $k_1 = 0$, $k_2 = -6$ бўлади. Демак, умумий ечим: $y = C_1 + C_2 e^{-6x}$.▲

2) $D = 0$, яъни характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва бир хил ($k_1 = k_2$) бўлган ҳол. Бу ҳолда $D = \frac{p^2}{4} - q = 0$ бўлгани учун $k_1 = k_2 = k = -\frac{p}{2}$ бўлади. Бунда $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ ифода умумий ечим учун ўз кучини йўқотади, чунки бунда $e^{k_1 x}$ ва $e^{k_2 x}$ хусусий ечимлар айнан тенг бўлгани учун $e^{k_2 x}$ ни иккинчи хусусий ечим сифатида олиш мумкин эмас. Демак, биринчи

хусусий ечим ($y_1 = e^{k_1x}$) билан чизиқли боғлиқ бўлмаган иккинчи хусусий ечимни топиш керак. Иккинчи хусусий ечимни

$$y_2 = u(x)\, e^{k_1x} = u(x)e^{-\frac{p}{2}x}$$

кўринишда излаймиз, бунда $u(x)$ аниқланиши керак бўлган номаълум функция. Дифференциаллаб, қуйидагиларни топамиз:

$$y_2' = \left(ue^{-\frac{p}{2}x}\right)' = u'e^{-\frac{p}{2}x} + u\left(-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}x} =$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x}\left(u' - \frac{p}{2}u\right)$$

$$y'' = -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x}\left(u' - \frac{p}{2}u\right) + e^{-\frac{p}{2}x}\left(u'' - \frac{p}{2}u'\right) =$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x}\left[u'' - pu' + \left(\frac{p}{2}\right)^2 u\right].$$

Ҳосилаларнинг бу ифодаларини (2) тенгламага қўйиб,

$$e^{-\frac{p}{2}x}\left[u'' - pu' + \frac{p^2}{4}u + u'p - \frac{p^2}{2}u + uq\right] =$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x}\left[u'' - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)u\right] = 0$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бунда $D = \frac{p^2}{4} - q = 0$ эканлигини эътиборга олсак, $u(x)$ ни топиш учун $e^{-\frac{p}{2}x}u'' = 0$ ёки $u''=0$ тенгламани ечиш керак. $u''=0$ дан $u=Ax+B$ ни топамиз. Хусусий ҳолда $A=1$ ва $B=0$ деб олиш мумкин: бунда $u=x$ бўлади. Шундай қилиб иккинчи хусусий ечим сифатида

$$y_2 = xe^{kx} = xe^{-\frac{p}{2}x}$$

функцияни олиш мумкин. $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const}$ бўлгани учун бу ечим билан биринчи хусусий ечим чизиқли боғлиқ эмас. Шунинг учун

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2x)$$

(2) тенгламанинг умумий ечими бўлади.

3-мисол. $y''+4y'+4y=0$ тенгламани ечинг.

△. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^2+4k+4=0.$$

Унинг илдизлари $k_1=k_2=2$. Демак, умумий ечим

$$y=(C_1+xC_2)e^{2x}$$

бўлади. ▲

3) $D<0$, яъни характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар бўлган ҳол. Характеристик тенглама илдизлари $D<0$ бўлгани учун

$$k_1=-\frac{p}{2}+i\sqrt{q-\frac{p^3}{2}}=\alpha+\beta i;\ k_2=-\frac{p}{2}-i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=$$
$$=\alpha-\beta i$$

кўринишда бўлади, бунда $\alpha=-\frac{p}{2}$; $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Бу ҳолда (2) тенгламанинг хусусий ечимлари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_1=e^{k_1x}=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha}e^{i\beta x},$$
$$y_2=e^{k_2x}=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha}e^{-i\beta x}.$$

Буни қуйидаги

$$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x,$$
$$e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x$$

Эйлер формулаларидан фойдаланиб,

$$y_1=e^{\alpha}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$
$$y_2=e^{\alpha}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

кўринишда ёзамиз. Булар ҳақиқий аргументнинг комплекс функциялари бўлиб, (2) тенгламани қаноатлантиради. Бунга ишонч ҳосил қилишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

(2) тенгламанинг комплекс хусусий ечимларини ҳақиқий ечимлар билан алмаштириш учун қуйидаги функцияларни кўрамиз:

$$\bar{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$\bar{y}_2=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Бу функциялар ҳам (2) тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади.

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}=\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=\operatorname{ctg}x\neq\text{const}$$

бўлгани учун—y_1 ва $\bar{y}_2$ хусусий ечимлар чизиқли боғлиқ эмас. Демак, характеристик тенглама комплекс илдизларига эга бўлганда (2) тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1\bar{y}_1 + C_2\bar{y}_2 = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

кўринишда бўлади.

Бу ечимнинг муҳим хусусий ҳоли характеристик тенглама илдизларининг соф мавҳум сонлардан иборат бўлган ҳолидир. Бу ҳол (2) тенгламада $p = 0$ бўлганда ўринли бўлиб, тенглама

$$y'' + gy = 0 \qquad (*)$$

кўринишга эга бўлади. Бунинг

$$k^2 + q = 0, \quad (q > 0)$$

характеристик тенгламасининг илдизлари

$$k_{1,2} = \pm i\sqrt{q} = \pm i\beta, \quad (\alpha = 0)$$

бўлиб, (*) тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

кўринишда бўлади.

4-мисол. Қуйидаги ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламаларни ечинг.

а) $y'' - 4y' + 13y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$.

Δ. а) Характеристик тенгламани ёзамиз: $k^2 - 4k + 13 = 0$. Унинг илдизларини топамиз:

$$k_1 = 2 + 3i \text{ ва } k_2 = 2 - 3i.$$

Демак,

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

умумий ечим бўлади.

б) Характеристик тенгламани ёзамиз:

$$k^2 + 9 = 0.$$

Унинг илдизлари $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$ бўлади.
Умумий ечим $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. ▲

5-мисол. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларини қаноатлантирувчи хусусий ечимларни топинг

а) $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
б) $y'' + a^2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Δ. а) $k^2+2k+5=0$ характеристик тенгламани тузиб, унинг $k_1=-1+2i$, $k_2=-1-2i$ илдизларини топамиз. Демак, тенгламанинг умумий ечими $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ бўлади. Умумий ечимни дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$y'=-e^{-x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)+e^{-x}(-2C_1\sin2x+2C_2\cos2x)$$

ёки

$$y'=e^{-x}[(2C_2-C_1)\cos 2x-(2C_1+C_2)\sin 2x].$$

Ўзгармас, C_1 ва C_2 ларни бошланғич шартлардан топамиз:

$$\begin{cases} 0=e^{-0}(C_1\cos 0+C_2\sin 0), \\ 1=e^{-0}[(2C_2-C_1)\cos 0-(2C_1-C_2)\sin 0]. \end{cases}$$

Бундан $C_1=0$ ва $C_2=\frac{1}{2}$. Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим $y=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$ бўлади.

б) $k^2+a^2=0$ характеристик тенгламани тузиб, унинг $k_{1,2}=\pm ia$ илдизларини топамиз. Демак, тенгламанинг умумий ечими $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$ бўлади. Бундан $y'=-aC_1\sin ax+aC_2\cos ax$. Ўзгармас C_1 ва C_2 ларни бошланғич шартлардан топамиз:

$$\begin{cases} 2=C_1\cos 0+C_2\sin 0, \\ -1=-aC_1\sin 0+aC_2\cos 0. \end{cases}$$

Бундан $C_1=2$ ва $C_2=-\frac{1}{a}$ $(a\neq 0)$. Шундай қилиб, берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим $y=2\cos ax-\frac{1}{a}\sin ax$ бўлади. ▲

☐. Қуйидаги ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламаларни ечинг.

61. $y''+5y'+6y=0$. *Жавоб.* $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$.
62. $y''-7y'+6y=0$. *Жавоб.* $y=C_1e^{x}+C_2e^{6x}$.
63. $y''-25y=0$. *Жавоб.* $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{5x}$.
64. $y''+2y'-15y=0$. *Жавоб.* $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{3x}$.
65. $y''-2y'=0$. *Жавоб.* $y=C_1+C_2e^{2x}$.
66. $y''+2y'+y=0$. *Жавоб.* $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.
67. $y''-6y'+9y=0$. *Жавоб.* $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$.
68. $y''+36y=0$. *Жавоб.* $y=C_1\cos 6x+C_2\sin 6x$.
69. $y''-2y'+5y=0$. *Жавоб.* $y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.
70. $y''+6y'+10y=0$. *Жавоб.* $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларини топинг.

71. $y'' - 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6.$

Жавоб. $y = 2e^{3x}.$

72. $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

Жавоб. $y = e^{2x} + 2e^{-x}$

73. $y'' + 2y' + 5y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

Жавоб. $y = e^{-x}\ (\cos 2x + \sin 2x).$

74. $y'' - 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 8.$

Жавоб. $y = 2(1 - x)e^{5x}.$

75. $y'' + 3y' + 2y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 3.$

Жавоб. $y = e^{-x} - 2e^{-2x}.$

76. $y'' + 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

Жавоб. $y = e^{-3x}(2 + 7x).$

77. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

Жавоб. $y = e^{x}(\cos x + 2\sin x)$

$$y'' + py' + gy = f(x) \qquad (4)$$

кўринишдаги тенглама *ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама* дейилади.

6- мисол. Қуйидаги ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларни ечинг.

а) $y'' + 2y' - 8y = x^2;$ б) $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x};$

в) $y'' - 2y' = x + 3;$ г) $y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}.$

Δ. а) Берилган тенгламага мос бир жинсли $y'' + 2y' - 8y = 0$ тенгламани ечамиз. Характеристик $k^2 + 2k - 8 = 0$ тенгламанинг илдизлари $k_1 = -4,\ k_2 = 2$ бўлгани учун бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}$ бўлади. Берилган тенгламанинг ўнг томони

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} = P_2(x)e^{0\cdot x} = x^2$$

кўринишда бўлиб, $\alpha = 0$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлмагани учун хусусий ечимини

$$y^* = A_0x^2 + A_1x + A_2$$

кўринишда излаймиз. Буни берилган тенгламага қўйсак

$$2A_0 + 2(2A_0x + A_1) - 8(A_0x^2 + A_1x + A_2) \equiv x^2$$

ёки

$$-8A_0x^2 + (4A_0 - 8A_1)x + 2A_0 + 2A_1 - 8A_2 \equiv x^2$$

айният ҳосил бўлади. Бундан x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни бир-бирига тенглаб,

$$-8A_0 = 1,\ 4A_0 - 8A_1 = 0,\ 2A_0 + 2A_1 - 8A_2 = 0$$

системани ҳосил қиламиз ва ундан $A_0 = -\frac{1}{8}$, $A_1 = -\frac{1}{16}$, $A_2 = -\frac{3}{64}$ номаълум коэффициентларни топамиз. Демак, тенгламанинг хусусий ечими $y^* = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{3}{64}$ бўлиб, умумий ечими $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{3}{64}$ бўлади.

б) $k^2 + 9 = 0$ характеристик тенгламанинг илдизлари $k_{1,2} = \pm 3i$ бўлгани учун бир жинсли $y'' - 9y = 0$ тенгламанинг умумий ечими $\bar{y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$ бўлади. Берилган тенгламанинг ўнг томони

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} = (x^2 + 1)e^{3x} = P_2(x)e^{3x}$$

кўринишда бўлиб, $\alpha = 3$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлмагани учун хусусий ечимни

$$y^* = (A_0x^2 + A_1x + A_2)e^{3x}$$

кўринишда излаймиз. Буни берилган тенгламага қўямиз:

$$[9A_0x^2 + (12A_0 + 9A_1)x + 2A_0 + 6A_1 + 9A_2]e^{3x} + \\ + 9(A_0x^2 + A_1x + A_2)e^{3x} \equiv (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Энди e^{3x} га қисқартириб, ўхшаш ҳадларни ихчамласак:

$$18A_0x^2 + (12A_0 + 18A_1)x + 2A_0 + 6A_1 + 18A_2 \equiv x^2 + 1$$

айният ҳосил бўлади. Бундан x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни бир-бирига тенглаб,

$$18A_0 = 1,\ 12A_0 + 18A_1 = 0,\ 2A_0 + 6A_1 + 18A_2 = 1$$

системани ҳосил қиламиз ва ундан $A_0 = \frac{1}{18}$, $A_1 = -\frac{1}{27}$, $A_2 = \frac{5}{81}$ номаълум коэффициентларни топамиз. Демак, хусусий ечим

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}$$

бўлиб умумий ечим

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}$$

бўлади.

в) Берилган тенгламага мос бир жинсли $y'' - 2y' = 0$ тенгламанинг умумий ечими $\bar{y} = C_1 + C_2e^{2x}$ бўлади, чунки характеристик тенглама $k^2 - 2k = 0$ нинг илдизлари $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Тенгламанинг ўнг томони

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} = x + 3 = P_1(x)\ e^{0\cdot x}$$

кўринишда бўлиб, $\alpha = 0$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлгани учун хусусий ечимни

$$y^* = xQ(x) \quad \text{ёки} \quad y^* = x(A_0x + A_1)$$

кўринишда излаймиз. $y^{*'}$ ва $y^{*''}$ ларни топиб, берилган тенгламага қўйсак:

$$2A_0 - 2(2A_0x + A_1) \equiv x + 3 \text{ ёки}$$
$$-4A_0x + (2A_0 - 2A_1) \equiv x + 3$$

айният ҳосил бўлади. Бундан x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини бир-бирига тенглаб,

$$-4A_0 = 1, \; 2A_0 - 2A_1 = 3$$

системани ҳосил қиламиз ва ундан $A_0 = -\frac{1}{4}$, $A_1 = -\frac{7}{4}$ эканлигини топамиз.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг хусусий ечими $y^* = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4}x$ бўлиб умумий ечими $y = C_1 + C_2e^{2x} - -\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4}x$ бўлади.

г) $k^2 - 6k + 9 = 0$ характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1 = k_2 = 3$ бўлгани учун $y'' - 6y' + 9 = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{3x}$ бўлади. Берилган тенгламанинг ўнг томони

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} = 5e^{3x} = P_0(x)e^{3x}$$

кўринишда бўлиб, $\alpha = 3$ характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлгани учун хусусий ечимни

$$y^* = x^2Q(x)e^{3x} \quad \text{ёки} \quad y^* = A_0x^2e^{3x}$$

кўринишда излаймиз, y^* ни ва $y^{*'}$, $y^{*''}$ ларни топиб берилган тенгламага қўйсак, ундан $A_0 = \frac{5}{2}$ ни топамиз. Демак, берилган тенгламанинг хусусий ечими $y^* = \frac{5}{2}x^2e^{3x}$ бўлиб, умумий ечими

$$y = \bar{y} + y^* = (C_1 + C_2x + \frac{5}{2}x^2)e^{3x}$$

бўлади. Δ

☐ Қуйидаги ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларни ечинг.

78. $y'' + 2y' - 8y = 3x$.

Жавоб. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} - \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}$.

79. $y'' - 5y = 5x$.

Жавоб. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{5}{4}x$.

80. $y'' - 3y' - 4y = x^2 + 1$.

Жавоб. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{13}{32}$.

81. $y'' - 2y' = x + 3$.

Жавоб. $y = C_1 + C_2e^{2x} - 0{,}25x^2 - 17{,}5x$.

82. $y'' - y' = x^3$.

Жавоб. $y = C_1 + C_2e^x - 0{,}25x^4 - x^3 - 3x^2 - 6x$.

83. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$.

Жавоб. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x - 0{,}5e^{-x}$.

84. $y'' - 5y' + 4y = e^x$.

Жавоб. $y = C_1e^x + C_2e^{4x} - \frac{1}{3}xe^x$.

85. $y'' - 9y' - 14y = e^{2x}$.

Жавоб. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{7x} - 0{,}2xe^{2x}$.

86. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

Жавоб. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 0{,}5x^2e^{-x}$.

87. $y'' + 2y' + 2y = \sin x$.

Жавоб. $y = (C_1\sin x + C_2\cos x)e^{-x} + 0{,}4\cos x + 0{,}2\sin x$.

88. $y'' + 4y = \cos 2x$.

Жавоб. $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x - 0{,}25\sin 2x$.

89. $y'' - 3y' = x^2 - e^{3x}$.

Жавоб. $y = C_1 + C_2e^{3x} - \frac{4}{9}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{3}xe^{3x}$.

90. $y'' + y = e^x + \sin x + 2\cos x$.

Жавоб. $y = C_1\sin x + C_2\cos x + x(0{,}5\sin x - \cos x) +$
$+ 0{,}5e^x$.

91. $y'' - y' - 2y = e^{2x} + e^{-x}$.

Жавоб. $y = C_1e^{-x} + C_2{}^{2x} + \frac{1}{3}x(e^{-x} + e^{2x})$.

92. $y'' + 9y = 15\sin 2x$.
$y(0) = 7, \; y'(0) = 0$.

Жавоб. $y = 3\sin 2x - 7\cos 3x - 2\sin 3x$.

93. $y'' - 3y' = 3x^2 + x^2$,
$y(0) = 0, \; y'(0) = \frac{70}{27}$.

Жавоб. $y = e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{8}x^2 - \frac{11}{27}x - 1$.

94. $y'' + y' = 2x^2e^x$.

$y(0) = 5,\ y'(0) = 0{,}5$.

Жавоб. $y = 1{,}5 + e^x(x^2 - 3x + 3{,}5)$.

95. $y'' + 16y = \sin 4x$.

$y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{7}{8}$.

Жавоб. $y = \frac{1}{4}\sin 4x + \left(1 + \frac{x}{8}\right)\cos 4x$

IX БОБ

ҚАТОРЛАР

1-§. Сонли қаторлар. Яқинлашувчи ва узоқлашувчи қаторлар.

1. Умумий тушунчалар. Агар сонларнинг бирор

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$

чексиз кетма-кетлиги берилган бўлса, у ҳолда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2)$$

ифода *сонли қатор* дейилади. (1) сонлар (2) қаторнинг *ҳадлари*, a_n эса қаторнинг *умумий ҳади* дейилади.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ да n индекс 1 дан ∞ гача бўлган барча натурал қийматларни қабул қилади. Баъзан қатор ҳадларини номерлашни бирдан бошламасдан нолдан ёки бирдан катта бўлган бирор натурал сондан бошлаш қулайдир.

Агар қатор $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ кўринишда берилган бўлса, уни $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ кўринишда ёзиш осон.

Эслатма. Қаторнинг дастлабки бир нечта ҳади уни тўлиқ аниқламайди, чунки дастлабки бир нечта ҳади бир хил бўлган ниҳоятда кўп қаторлар мавжуд.

1-мисол. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$ қаторни $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$ кўринишда ёзинг.

Δ. n га кетма-кет 1, 2, 3, 4, 5 қийматлар бериб, қаторнинг

$$a_1 = \frac{1}{2^2}, \quad a_2 = \frac{2}{3^2}, \quad a_3 = \frac{3}{4^2}, \quad a_4 = \frac{4}{5^2}, \quad a_5 = \frac{5}{6^2}$$

ҳадлари топилади ва берилган қаторни қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+\frac{4}{5^2}+\frac{5}{6^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}. \qquad ▲$$

2-мисол. $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 22}+\ldots$ қаторнинг a_n ва a_{n+1} ҳадларини ёзинг.

Δ. Берилган қатор ҳадлари махражидаги биринчи кўпайтувчилар 2, 7, 12, 17, ... кетма-кетликни, иккинчи кўпайтувчилар 7, 12, 17, 22, ... кетма-кетликни ташкил қилади. Демак, бу кетма-кетликларнинг умумий ҳадларини қуйидагича ёзсак бўлади*:

$$2+(n-1)\cdot 5=5n-3;\ 7+(n-1)\cdot 5=5n+2.$$

Қатор ҳадларининг суратлари эса 1 га тенг. Энди қаторнинг a_n ва a_{n+1} ҳадларини ёзамиз:

$a_n=\frac{1}{(5n-3)(5n+3)}$, бу ерда n га $(n+1)$ қиймат бериб, $(n+1)$-ҳадни ҳосил қиламиз:

$$a_{n+1}=\frac{1}{[5(n+1)-3]\cdot[5(n+1)+2]}=\frac{1}{(5n+2)(5n+7)}.$$

Демак, қаторнинг умумий ҳади формуласини ёзишда унинг ҳадларининг тузилиш қонунини билиш зарурдир. ▲

□. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторни $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots$ кўринишда ёзинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^3+3}}$.

2. Қуйидаги қаторларнинг a_n ва a_{n+1} ҳадларини ёзинг:

а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots$;

Жавоб. $a_n=\frac{n}{n+1}$; $a_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$.

---

* Бу ерда қаторнинг кейинги ҳадлари ҳам шу бошланғич ҳадлар бўйсунган қонуниятга бўйсуниши назарда тутилган.

б) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$

Жавоб. $a_n=\frac{2n-1}{2n}$; $\quad a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}$.

в) $2+\frac{5}{2!}+\frac{8}{3!}+\frac{11}{4!}\ldots$;

Жавоб. $a_n=\frac{3n-1}{n!}$; $a_{n+1}=\frac{3n+2}{(n+1)!}$.

г) $\frac{1}{201}+\frac{1}{401}+\frac{1}{601}+\frac{1}{801}+\ldots$,

Жавоб. $a_n=\frac{1}{200n+1}$; $a_{n+1}=\frac{1}{200(n+1)+1}$.

д) $\frac{2}{15}+\frac{5}{65}+\frac{12}{375}+\frac{20}{1875}+\ldots$,

Жавоб. $a_n=\frac{n(n+1)}{3\cdot 5^n}$; $a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{3\cdot 5^{n+1}}$.

2. Сонли каторнинг яқинлашиши. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ қаторнинг биринчи n та ҳадлари йиғиндиси $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ n чексизликка интилганда ($n\to\infty$), чекли S лимитга интилса, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S<\infty$ бўлса, қатор *яқинлашувчи* дейилади. S—яқинлашувчи қаторнинг *йиғиндиси* дейилади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\pm\infty$ га тенг бўлса ёки лимит бутунлай мавжуд бўлмаса, қатор *узоқлашувчи* дейилади. Шундай қилиб, қаторнинг яқинлашиши кетма-кетликнинг яқинлашиши орқали, унинг йиғиндисини топиш кетма-кетлик лимитини топиш билан ҳал қилинади.

3- мисол. Ҳадлари чексиз геометрик прогрессияни ташкил этган қаторни кўрайлик.

$$\Delta.\ \sum_{n=1}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots. \qquad (3)$$

Бу қатор учун S_n нинг тузилишини текширамиз:

$$S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^n=\frac{a-aq^{n+1}}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}q^{n+1}.$$

Агар $|q|<1$ бўлса, берилган қатор яқинлашувчи бўлади, ҳақиқатан ҳам,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q}\cdot q^{n+1}=\frac{a}{1-q}<\infty.$$

Шундай қилиб, $|q|<1$ бўлганда қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\frac{a}{1-q}$ га тенг.

Агар $|q|\geqslant 1$ бўлиб, $a\neq 0$ бўлса, (3) қатор узоқлашувчи бўлади, чунки бу ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ мавжуд эмас.

4- мисол. Қуйидаги қаторнинг яқинлашишини текширинг:

$$\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}+\ldots+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}.$$

Δ. Берилган қаторнинг биринчи n та ҳади йиғиндиси S_n ни ёзамиз ва уни ҳисоблаймиз:

$$S_n=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}=$$
$$=\ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\ldots n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n}=\ln(n+1).$$

Энди $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty.$$

Демак, берилган қатор узоқлашувчидир. ▲

5- мисол. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

қаторнинг йиғиндисини топинг.

$\triangle$. Берилган қаторнинг умумий ҳадини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Қаторнинг биринчи n та ҳади йиғиндиси S_n ни ҳисоблаймиз:

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-3}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right);\ \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}.$$

Демак, қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\frac{1}{2}$ га тенг. ▲.

□. Қуйидаги мисолларда S_n ни ҳисобланг ва қаторнинг яқинлашишини текширинг, агар қатор яқинлашувчи бўлса, унинг йиғиндисини топинг.

3. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots.$

Жавоб. $S_n=\frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{3^{2n+2}}\right)$, қатор яқинлашувчи ва $S=\frac{9}{8}$.

4. $\ln 2+\ln\frac{3}{1}+\ln\frac{4}{2}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n-1}+\ldots.$

Жавоб. $S_n=\ln(1+n)n$, қатор узоқлашувчи.

5. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+,\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots.$

Жавоб. $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$, қатор яқинлашувчи ва $S=\frac{3}{4}$.

6. $1+\frac{a}{a+1}+\left(\frac{a}{a+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a}{a+1}\right)^n+\ldots.$

Жавоб. Агар $a>-\frac{1}{2}$ бўлса, қатор яқинлашувчи ва $S=a+1$; агар $a=-1$ бўлса, $\frac{a}{a+1}$ маънога эга эмас, агар $a\leqslant-\frac{1}{2}$ бўлса, қатор узоқлашувчи.

7. $\frac{5}{4}+\frac{13}{16}+\frac{35}{64}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{4^n}+\ldots.$

Жавоб. Қатор яқинлашувчи ва $S=4$.

8. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\ldots+\frac{2^n}{3^n}+\ldots.$

Жавоб. $S=2$.

9. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 16}+\frac{1}{\ln 256}+\ldots.$

Жавоб. $S=\frac{2}{\ln 2}$.

10. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots.$

Жавоб. $S=\frac{1}{4}$.

3. Қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шарти. $\sum\limits_{n-1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ қатор яқинлашувчи бўлиши учун n чексизликка интилганда ($n\to\infty$) унинг умумий ҳади a_n нинг лимити нолга тенг

бўлиши ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$) зарур (аммо етарли эмас). Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ бўлса, у ҳолда қатор узоқлашувчи ҳам, яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин. Бундай ҳолда масалани ҳал қилиш учун қатор яқинлашувчи бўлишининг етарли шартларига мурожаат этилади.

Қуйидаги мисолларда қатор яқинлашишининг зарурий шартини текширинг ва узоқлашувчи қаторларни кўрсатинг.

6- мисол. $1+\frac{6}{4}+\frac{9}{5}+\frac{12}{6}+\frac{15}{7}+\ldots.$

Δ. Умумий ҳадни ёзамиз:

$$a_n=\frac{3n}{n+2}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ни аниқлаймиз.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{2}{3}}=3.$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3\neq 0$, яъни қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шарти бажарилмаган. Демак, қатор узоқлашувчи. ▲

7- мисол. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots.$

Δ. Бу ерда

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)};\quad \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=0.$$

Қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун зарурий шарт бажарилган. Биз юқорида бу қаторни кўрган эдик (5- мисолга қаранг), у яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $\frac{1}{2}$ га тенг. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ бўлса, қатор яқинлашиши шарт эмас.

8- мисол. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

гармоник қаторнинг узоқлашувчи эканлигини исботланг.

Δ. Бу қатор учун яқинлашишнинг зарурий шарти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ бажарилган, лекин қатор узоқлашади. Буни исботлаш учун қуйидаги ажойиб лимитни эслайлик:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

бундан

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

ёки

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e. \qquad (1)$$

(1) тенгсизликни e асос бўйича логарифмлаймиз:

$$n[\ln(n+1)-\ln n] < 1,$$

бундан

$$\ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

(2) тенгсизликдан n га кетма-кет 1, 2, 3, 4, ..., n қийматлар бериб, қуйидаги тенгсизликларни ҳосил қиламиз:

$$\ln 2 < 1,$$

$$\ln 3-\ln 2 < \frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\ln n-\ln(n-1) < \frac{1}{n-1},$$

$$\ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n},$$

Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$\ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}.$$

яъни $S_n > \ln(n+1)$, бу ерда S_n— гармоник қаторнинг биринчи n та ҳади йиғиндиси. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$ бўлгани учун $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ бўлади.

Демак, қатор яқинлашувчи бўлиши ҳақидаги таърифга асосан гармоник қатор узоқлашувчидир. ▲

Қуйидаги мисолларда қатор яқинлашишининг зарурий шартини текширинг ва узоқлашувчи қаторларни кўрсатинг:

■. 11. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{7}+\ldots+\frac{2n}{2n+1}+\ldots.$

Жавоб. $\ln a_n = 1 \neq 0$, узоқлашади.

12. $1+\frac{3}{8}+\frac{5}{27}+\frac{7}{64}+\ldots+\frac{2n+1}{n^3}+\ldots.$

Жавоб. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

13. $\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}+\ldots.$

Жавоб. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

14. $1+\frac{4}{3}+\frac{6}{4}+\frac{8}{5}+\ldots .$

Жавоб. $\ln a_n = 2 \neq 0$, узоқлашади.

15. $\frac{1}{99}+\frac{2}{199}+\frac{3}{299}+\ldots .$

Жавоб. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{100} \neq 0$, узоқлашади.

16. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\ldots .$

Жавоб. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n+1}$.

Жавоб. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (лимитни ҳисоблашда Лопиталь қоидасидан фойдаланинг).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n}$.

Жавоб. $\lim a_n = \infty$ узоқлашади (берилган қатор махражи $q=\frac{5}{2}>1$ бўлган геометрик қатордир).

19. $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+$
$+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ldots .$

Жавоб. $\lim a_n = e \neq 0$, узоқлашади.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+1}$.

Жавоб. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3} \neq 0$, узоқлашади.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n+2}$.

Жавоб. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (лимитни ҳисоблашда Лопиталь қоидасидан фойдаланинг.) ■

4. Мусбат ҳадли қатор яқинлашувчи бўлишининг етарли аломатлари (белгилари). А. *Даламбер аломати.* Мусбат ҳадли

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots .$$

қатор берилган бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ мавжуд бўлсин. У ҳолда:

1) агар $l<1$ бўлса, берилган қатор яқинлашади;

2) агар $l>1$ бўлса, қатор узоқлашади;

3) агар $l=1$ бўлиб қолса, қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масала ҳал қилинмаган бўлади ва уни бошқа йўл билан ҳал қилишга тўғри келади.

Даламбер аломатига кўра қуйидаги қаторларнинг яқинлашишини текширинг.

9- мисол. $\frac{1}{5}+\frac{2}{11}+\frac{3}{29}+\ldots+\frac{n}{3^n+2}+\ldots.$

Δ. Яқинлашишнинг зарурий шарти бажарилган (19- мисолга қаранг). Демак, қатор яқинлашувчи ҳам, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин. Масалани ҳал қилиш учун қаторнинг $(n+1)$- ҳадининг n- ҳадига нисбатини ва бу нисбатнинг $n\to\infty$ даги лимитини топамиз:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{n+1}{3^{n+1}+2}}{\dfrac{n}{3^n+2}}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3^n+2}{3^{n+1}+2}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1+\dfrac{2}{3^n}}{3+\dfrac{2}{3^n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}.$$

Бу ҳолда $l=\frac{1}{3}<1$, шунинг учун берилган қатор яқинлашади. ▲

10- мисол. $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}+\ldots.$

Δ. Берилган қатор учун Даламбер аломатини текширамиз:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Демак, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=l>1$ бўлгани учун Даламбер аломатига кўра қатор узоқлашувчидир.

11- мисол. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$

Δ. Берилган гармоник қаторга Даламбер аломатини татбиқ этиб,

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини Даламбер аломатига кўра аниқлаш мумкин эмас. (Бу гармоник қаторнинг узоқлашувчи эканлигини биз юқорида кўрсатган эдик, 8-мисолга қаранг).

12- мисол. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots.$

Δ. Қуйидагиларни топамиз:

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)};\quad a_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{3}{n}\right)};$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=1.$$

Демак, Даламбер аломати масалани ҳал қилмайди. (Бу қаторнинг яқинлашувчи экани маълум, 5-мисолга қаранг).

13- мисол. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

Δ. Бунда $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{2n+1}:\frac{n}{2n-1}\right]=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{2n^2+n}=1$. Демак, берилган қаторнинг узоқлашувчи ёки яқинлашувчи эканини Даламбер аломатига кўра аниқлаш мумкин эмас. Лекин

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq0$$

бўлиб, яқинлашишнинг зарурий шарти бажарилмагани учун берилган қатор узоқлашувчидир. ▲

☐. Қуйидаги қаторларнинг яқинлашишини Даламбер аломатига кўра текширинг.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$.

Жавоб. Яқинлашади.

23. $\frac{1}{(\ln 2)^3}+\frac{1}{(2!\ln 3)^3}+\frac{1}{(3!\ln 4)^3}+\ldots .$

Жавоб. Яқинлашади.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3n}.$

Жавоб. Яқинлашади.

25. $1+\frac{2!}{5}+\frac{3!}{5^2}+\frac{4!}{5^3}+\ldots .$

Жавоб. Узоқлашади.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}.$

Жавоб. Яқинлашади.

27. $\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{5}{4!}+\frac{7}{5!}+\ldots .$

Жавоб. Яқинлашади.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}.$

Жавоб. Узоқлашади.

29. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots .$

Жавоб. Даламбер аломати масалани ҳал қилмайди.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(4n-1)}.$

Жавоб. Яқинлашади.

31. $1+\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^3-1}+\frac{1}{2^4-1}+\ldots .$

Жавоб. Яқинлашади.

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{100}}.$

Жавоб. Узоқлашади.

33. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots .$

Жавоб. Даламбер аломати масалани ҳал қилмайди. ■

Б. Таққослаш аломати. Мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашиш белгиларидан яна бири таққослаш аломатидир. У қуйидагидан иборат: берилган қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини аниқлаш учун бу қаторнинг ҳадларини яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлиги аввалдан маълум бўлган бошқа мусбат ҳадли қаторнинг мос ҳадлари билан таққосланади.

Иккита мусбат ҳадли қатор берилган бўлсин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots . \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots . \qquad (2)$$

1) Агар бирор n- ҳаддан бошлаб қолган ҳамма ҳадлар учун $a_n \leqslant b_n$ бўлиб, (2) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

2) Агар бирор n- ҳаддан бошлаб қолган ҳамма ҳадлар учун $a_n \geqslant b_n$ бўлиб, (2) қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда (1) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

Таққослаш аломати ёрдамида қуйидаги қаторларнинг яқинлашишини текширинг.

14- мисол. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$ (мустақил ечиш учун берилган 33- мисолга қаранг).

Δ. Бу қатор учун $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ бўлиб, Даламбер аломати қаторнинг яқинлашиш масаласини ҳал қилолмаган эди. Бу масалани ҳал қилиш учун берилган қаторнинг биринчи ҳадини ташлаб қолган ҳадларини яқинлашиши бизга маълум бўлган 5- мисолдаги қаторнинг ҳадлари билан таққослаймиз:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots .$$

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots .$$

Равшанки,

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{5^2} < \frac{1}{3\cdot 5}, \ldots, \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}, \ldots .$$

Шундай қилиб, текширилаётган қаторнинг иккинчи ҳадидан бошлаб қолган ҳадлари яқинлашувчи эканлиги бизга олдиндан маълум бўлган ечиб кўрсатилган 5- мисолдаги қаторнинг мос ҳадларидан кичик бўлиб қоляпти. Шунинг учун таққослаш аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчидир. ▲

15- мисол. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$

Δ. Берилган қатор ҳадларини узоқлашувчи эканлиги бизга маълум бўлган

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ (8- мисолга қаранг)

гармоник қаторнинг мос ҳадлари билан таққослаймиз. Ушбу

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{n}$$

тенгсизлик ўринлидир, шунинг учун таққослаш аломатига кўра берилган қатор узоқлашувчидир. ▲

□. **34.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}.$ *Жавоб.* Узоқлашади.

35. $1+\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5^2}+\frac{1}{n\cdot 5^n}+\ldots.$ *Жавоб.* Яқинлашади.

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}.$ *Жавоб.* Яқинлашади.

37. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\ldots.$

Жавоб. Узоқлашади.

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}.$ *Жавоб.* Яқинлашади.

39. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{3n-1}\ldots.$

Жавоб. Узоқлашади.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$ *Жавоб.* Яқинлашади.

41. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\frac{1}{2n-1}+\ldots.$

Жавоб. Узоқлашади.

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}.$ *Жавоб.* Яқинлашади.

43. $\ln 2+\frac{\ln 4}{2^3}+\frac{\ln 8}{3^3}+\frac{\ln 16}{4^3}+\dots.$

Жавоб. Яқинлашади. ■

2- §. Ишоралари алмашинувчи қаторлар

Ишоралари алмашинувчи қаторлар. *Лейбниц аломати. Ишоралари алмашинувчи* қатор деб, ҳадлари навбат билан мусбат ва манфий ишорага эга бўлган қаторга айтилади. Бундай қаторни ёзганда ҳадларининг ишораларини очиқ-ойдин кўрсатиб

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\dots+(-1)^{n-1}a_n+\dots.$$

каби ёзиш қулайдир (бу ерда ҳамма $a_n>0$ деб ҳисобланади). Масалан:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots.$$

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\dots.$$

$$1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-2}+\dots.$$

қаторлар ишоралари алмашинувчи қаторлардир. Ишоралари алмашинувчи қаторлар яқинлашувчи бўлишининг етарли шартини Лейбниц аломати ифодалайди.

Ишоралари алмашувчи

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\dots+(-1)^{n-1}a_n+\dots$$

қатор берилган бўлиб, агар:

1) Қаторнинг ҳадлари абсолют қийматлари бўйича камайса:

$$a_1>a_2>a_3>\dots>a_n>\dots.$$

ҳамда

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

бўлса, қатор *яқинлашувчи* бўлади ва унинг $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ —йиғиндиси $0<S<a_1$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Изоҳ. Лейбниц аломати шартларини қаноатлантирувчи қаторнинг қолдиғи $R_n=S-S_n$ ўзининг биринчи ҳадининг ишорасига эга бўлиб, абсолют қиймати бўйича ундан кичик, яъни $|R_n|<a_{n+1}$ бўлади. Бу фактдан фойдаланиб, Лейбниц аломати шартларини қаноатлантирувчи қатор йиғиндиси S ни $S_n(n=1,2,3,\dots)$ хусусий йиғиндилар орқали берилган аниқликда тақрибий ҳисоблаш мумкин.

1-мисол. Ушбу а) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+$ $+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots;$

б) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{3n-1}+\ldots;$

в) $\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{4}{9}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}+\ldots$

қаторларнинг яқинлашишини текширинг.

Δ. а) Берилган қатор умумий ҳадининг абсолют қийматини ёзамиз:

$$a_n=\frac{1}{2n-1}.$$

Лейбниц аломати шартларини текширамиз:

1) $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\ldots.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0.$

Демак, қатор ҳадлари абсолют қийматлари бўйича камаювчи ва нолга интилади, шунинг учун қатор яқинлашувчи. Бу ерда қатор йиғиндиси: $S<1$.

б) Бу қатор учун Лейбниц аломатининг биринчи шарти бажарилади:

1) $\frac{1}{2}>\frac{2}{5}>\frac{3}{8}>\ldots.$

Лекин иккинчи шарт бажарилмайди:

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq0,$

яъни қатор яқинлашиши учун зарурий ҳам бўлган шарт бажарилмайди. Демак, бу қатор узоқлашувчи.

в) Бу қатор учун $a_n=\frac{n}{2n+1}$ бўлиб,

1) $\frac{1}{3}<\frac{2}{3}<\frac{3}{7}<\ldots,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq0$ бўлади.

Лейбниц аломатининг иккала шарти ҳам бажарилмади. Қатор узоқлашувчидир. ▲

Шунга эътибор бериш керакки, иккинчи шарт бажарилиб, биринчи шарт бажарилмаса қатор узоқлашади деб хулоса чиқара олмаймиз, чунки Лейбниц аломатидаги биринчи шарт қаторнинг яқинлашиши учун зарурий эмас. Бу ҳолда бошқа усулларга мурожаат қилиш зарурати туғилади.

□. Қуйидаги қаторларнинг яқинлашишини Лейбниц аломатидан фойдаланиб текширинг.

44. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

Жавоб. Яқинлашади.

45. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

Жавоб. Яқинлашади.

46. $2-\frac{3}{2}+\frac{4}{5}-\frac{5}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}+\ldots$

Жавоб. Узоқлашади.

47. $1-\frac{3}{2}+\frac{4}{5}-\frac{5}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}+\ldots$

Жавоб. Узоқлашади.

48. $\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}+\ldots$

Жавоб. Яқинлашади.

2-мисол. Ушбу $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}$ қатор яқинлашишини текширинг ва унинг йиғиндисини 0,01 аниқлик билан тақрибий ҳисобланг.

Δ. Ишораси алмашинувчи бу қатор учун Лейбниц аломати шартларини текшириб кўрамиз:

1) $a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{9},\ a_3=\frac{1}{28},\ a_4=\frac{1}{65},\ a_5=\frac{1}{126},\ \ldots$ бўлгани учун

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{9}>\frac{1}{28}>\frac{1}{65}>\ldots,$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+1}=0.$

Демак, қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S<\frac{1}{2}$ бўлади. Бу яқинлашувчи қатор йиғиндиси S ни 0,01 аниқликда ҳисоблаш учун $|R_n|<0{,}01$ тенгсизликни қаноатлантирувчи n ни ҳисоблаймиз. Маълумки,

$$|R_n|<a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^3+1}<0{,}01.$$

$\frac{1}{(n+1)^3+1}<0{,}01$ ёки $(n+1)^3+1>100$ тенгсизлик бажарилиши учун $n=4$ бўлиши етарлидир. Демак, S ни 0,01 аниқликда тақрибий ҳисоблаш учун қаторнинг тўртинчи хусусий йиғиндисини олиш кифоя экан:

$$S_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{28}-\frac{1}{65}\approx 0{,}41.$$

Шундай қилиб

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}\approx S_4. \quad (0{,}01 \text{ аниқликда}) \ \blacktriangle.$$

□. Қуйидаги қаторнинг яқинлашишини Лейбниц аломатига кўра текширинг ва қатор йиғиндисини 0,01 аниқлик билан тақрибий ҳисобланг.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$. *Жавоб.* 0,36.

50. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{4}{4!}+\ldots$ *Жавоб.* 0,62.

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$. *Жавоб.* 0,96.

52. $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}+\ldots$ *Жавоб.* $\frac{57}{64}$.

2. **Ўзгарувчан ишорали қаторлар. Абсолют ва шартли яқинлашиш.**

Агар қаторнинг ҳадлари орасида чексиз кўп мусбат ва чексиз кўп манфий ҳадлар бўлса, бундай қатор *ўзгарувчан ишорали қатор* деб аталади. Масалан,

$$1)\ \frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{2^3}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{2^n}+\ldots,$$

бунда α исталган сон.

$$2)\ \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1^2}+\frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{2^2}+\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{n^2}+\ldots$$

қаторлар ўзгарувчан ишорали қаторлардир. Биз бундан олдин кўриб ўтган ишоралари алмашинувчи қаторлар ўзгарувчан ишорали қаторларнинг хусусий ҳолидир.

Ушбу

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

ўзгарувчан ишорали қатор берилган бўлсин (бунда a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ сонлар мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин). Агар (1) қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots \qquad (2)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, берилган қатор *абсолют яқинлашувчи* қатор дейилади. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, лекин унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган (2) қатор узоқлашувчи бўлса, берилган (1) қатор *шартли яқинлашувчи* қатор деб аталади. Абсолют яқинлашувчи ҳар қандай қатор яқинлашувчидир.

3- мисол. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$ қаторнинг шартли яқинлашувчи эканини кўрсатинг.

△. Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

қатор гармоник қатор бўлиб, унинг узоқлашувчи экани бизга маълум. Шунинг учун берилган қатор шартли яқинлашувчидир. ▲

4- мисол. $\frac{\sin\alpha}{3}+\frac{\sin 2\alpha}{3^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^3}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{3^n}+\ldots$

қаторнинг абсолют яқинлашишини исботланг.

△. Берилган ўзгарувчан ишорали қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$\left|\frac{\sin\alpha}{3}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{3^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin n\alpha}{3^n}\right|+\ldots \qquad (^*)$$

қаторнинг ҳар бир ҳади яқинлашувчи ва ҳадлари чексиз камаювчи геометрик прогрессия ташкил қилувчи

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

қаторнинг мос ҳадларидан кичик. Шунинг учун (*) қатор таққослаш аломатига кўра яқинлашувчи. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчидир. ▲

□. Қуйидаги ўзгарувчан ишорали қаторларнинг яқинлашишини текширинг. Агар қатор яқинлашувчи бўлса, унинг абсолют ёки шартли яқинлашишини аниқланг.

53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. *Жавоб.* Шартли яқинлашади.

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$. *Жавоб.* Шартли узоқлашади.

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$. *Жавоб.* Абсолют яқинлашади.

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. *Жавоб.* Шартли яқинлашади.

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{5^n}$. *Жавоб.* Абсолют яқинлашади.

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$. *Жавоб.* Абсолют яқинлашади.

59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n+1}$. *Жавоб.* Узоқлашади.

60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$. *Жавоб.* Шартли яқинлашади.

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$. *Жавоб.* Шартли яқинлашади.

62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$. *Жавоб.* Абсолют яқинлашади.

3- §. Даражали қаторлар. Даражали қаторларнинг яқинлашиш интервали. Яқинлашиш радиуси

Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

кўринишдаги қаторга *даражали қатор* деб аталади, бунда $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ўзгармас сонлар бўлиб, улар қаторнинг *коэффициентлари* дейилади. Кўриш қийин эмаски, ихтиёрий даражали қатор $x = 0$ нуқтада яқинлашувчидир. Умуман, *қаторнинг яқинлашиш соҳаси* деб ўзгарувчининг шундай қийматлари тўпламига айтиладики, бу қийматларни ўзгарувчининг ўрнига қўйганда ҳосил бўлган сонли қатор яқинлашади.

Демак, $x = 0$ нуқта даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасига тегишлидир. Маълумки, даражали қатор $x = x_0$ нуқтада яқинлашса, $|x| < |x_0|$ шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай x да у абсолют яқинлашади. Даражали қаторнинг *яқинлашиш интервали* деб, шундай $]-R, +R[$ интервалга айтиладики, бу интервал ичида ётган ҳар қандай x нуқтада қатор яқинлашади, шу билан бирга абсолют яқинлашади, унинг ташқарисидаги x нуқталарда эса қатор узоқлашади. R сон даражали қаторнинг *яқинлашиш радиуси* дейилади.

Интервалнинг чегараларида (яъни $x = R$ ва $x = -R$)

да берилган қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши ҳақидаги масала ҳар бир конкрет қатор учун алоҳида ҳал этилади. Баъзи қаторларнинг яқинлашиш интервали нуқтага айланиши ($R = 0$), баъзилари эса Ox ўқни бутунлай ўз ичига олишини ($R = +\infty$) айтиб ўтамиз. (1) қатор ўзининг яқинлишиш интервали чегараларида яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишига қараб унинг яқинлашиш соҳаси қуйидаги оралиқларнинг биридан иборат бўлади:

$$]-R, +R[, \quad [-R, +R], \quad]-R, +R], \quad [-R, +R[.$$

Қандай ҳол бўлишидан қатъи назар $]-R, R[$ ни даражали қаторнинг яқинлашиш интервали деймиз. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини топиш учун берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u^n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \\ + \ldots \tag{2}$$

қаторга Даламбер аломатини қўллаймиз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = x \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|;$$

$a_n \neq 0$ бўлган ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

мавжуд бўлсин, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x| \cdot l$$

бўлади.

Даламбер аломатига кўра $|x| \cdot l < 1$ бўлса, (2)қатор яқинлашади, $|x| \cdot l > 1$ бўлса, узоқлашади. Демак, $|x| \cdot l < 1$ тенгсизликдан кўринадики, $|x| < \frac{1}{l}$ ёки $-\frac{1}{l} < x < \frac{1}{l}$ бўлганда (2) қатор яқинлашувчи бўлади ва шунинг учун бу оралиқда (1) қатор абсолют яқинлашади. Қаторнинг яқинлашиш радиуси учун қуйидаги ифодани ёза оламиз:

$$R = \begin{cases} \text{агар } l \neq 0 \text{ бўлса, } \frac{1}{l}, \\ \text{агар } l = 0 \text{ бўлса, } +\infty, \\ \text{агар } l = +\infty \text{ бўлса, } 0. \end{cases}$$

Шундай қилиб, $a_n \neq 0$ бўлган ҳолда R ни қуйидаги формула бўйича аниқлаймиз:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{3}$$

Агар берилган даражали қаторнинг коэффициентларидан баъзилари нолга тенг бўлса, масалан, x фақат жуфт ёки тоқ даражаларда қатнашса, (3) формуладан фойдаланиб бўлмайди. Бундай ҳолларда берилган қатор учун тўғридан-тўғри Даламбер аломатини ишлатамиз.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интервалини аниқланг ва қаторларни яқинлашиш интервалининг чегараларида текширинг.

1-мисол. $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots$

△ Қаторнинг яқинлашиш радиусини (3) формулага асосан топамиз:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l\ m}}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Демак, қатор фақат $x = 0$ нуқтадагина яқинлашади.

2-мисол. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 2^2} + \frac{x^3}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot 2^n} + \ldots$.

△. Бу қатор учун:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\cdot 2^n} : \frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n} = 2.$$

Демак, қаторнинг яқинлашиш интервали $]-2, 2]$ экан. Энди бу интервалнинг чегараларида қаторнинг яқинлашишини текширамиз. Агар $x = 2$ бўлса, қуйидаги сонли қаторни ҳосил қиламиз:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots ,$$

бу узоқлашувчи бўлган гармоник қатордир, шунинг учун $x = 2$ берилган қаторнинг яқинлашиш соҳасига кирмайди. Агар $x = -2$ бўлса,

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots$$

қаторни ҳосил қиламиз, бу қатор эса Лейбниц аломатига кўра яқинлашувчидир (2-§ га қаранг). Шунинг учун $x = -2$ берилган қаторнинг яқинлашиш соҳасига киради. Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-2; +2[$ оралиқдан иборат экан. ▲

3-мисол. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$

△. Бу қаторга (3) формулани қўллана олмаймиз, чунки x нинг тоқ даража кўрсаткичли ҳадларининг коэффициенти нолга тенг, яъни $a_{2k+1}=0$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Шунинг учун берилган қаторга Даламбер аломатини тўғридан-тўғри қўлланамиз:

$$u_n(x)=(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2^n)!}, \qquad u_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}$$

бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}:\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}(2n)!}{x^{2n}(2(n+1))!}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0<1$$

исталган x учун бажарилади. Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш интервали $]-\infty, +\infty[$ дан иборат. ▲

4-мисол. $\frac{x}{3}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{3^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{3^n}+\ldots$

△. $a_2k=0$, $k=1, 2, 3, \ldots$ бўлгани учун (3) формуладан фойдаланиб бўлмайди. Даламбер аломатини қўлланамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u^{n}+_{1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{3^{n+1}}:\frac{x^{2n-1}}{3^n}\right| = \frac{x^2}{3}<1.$$

Демак, қатор $\frac{x^2}{3}<1$ ёки $|x|<\sqrt{3}$ бўлганда яқинлашади ва унинг яқинлашиш радиуси $R=\sqrt{3}$, яқинлашиш интервали эса $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$ дан иборатдир. Интервал чегараларида қатор яқинлашишини текширамиз.

Агар $x=\pm\sqrt{3}$ бўлса, узоқлашувчи бўлган қуйидаги сонли қаторлар ҳосил бўлади:

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\pm\ldots$$

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $]-\sqrt{3}, +\sqrt{3}[$ дан иборат экан. ▲

☐. Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интервалларини аниқланг.

63. $1+\frac{x}{5\cdot 2}+\frac{x^2}{5^2\cdot 3}+\frac{x^3}{5^3\cdot 4}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{5^{n-1}n}+\ldots$

Жавоб. $]-5, 5[$.

64. $1-\frac{x}{3\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{3^3\sqrt{4}}+\dots$ *Жавоб.* $]-5,\ 5[$

65. $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$

Жавоб. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида абсолют яқинлашади.

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$; *Жавоб.* $[-3,\ +3[$.

67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. *Жавоб.* $[-1,\ +1]$.

68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$. *Жавоб.* $1 < x \leqslant 2$.

69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)^2\cdot 2^{2n}}$. *Жавоб.* $-2 < x < 2$.

70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(x)$. *Жавоб.* $\frac{1}{l} < x < l$.

71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$. *Жавоб.* $]0,\ +\infty[$.

72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}=\frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}+\dots+\frac{nx}{e^{nx}}+\dots$

Жавоб. $]0, +\infty[$.

4-§. Функцияни даражали қаторга ёйиш

Функцияни даражали қаторга ёйиш ҳақидаги қуйидаги теоремани келтирамиз.

Теорема. Агар $f(x)$ функция бирор $]-R;\ R[$ оралиқда исталган тартибли ҳосилага эга бўлиб, x кўрсатилган оралиқда ўзгарганда, бу ҳосилалар абсолют қиймати бўйича ҳосила тартиби n га боғлиқ бўлмаган биргина сон билан чегараланган

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant c$$

бўлса, у ҳолда, бутун оралиқда берилган функцияни қуйидаги *Маклорен қаторига ёйиш мумкин:*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots,\quad (1)$$

бу қатор—коэффициентлари $a_k = \frac{f^{(n)}(0)}{k!}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ бўлган *даражали қатордир.*

Агар $f(x)$ функция ёки унинг ҳосилалари $x = 0$ нуқтада мавжуд бўлмаса, бундай функцияни *Маклорен қаторига ёйиб бўлмайди* (масалан, $\ln x$, $\sqrt{x}$, $\operatorname{ctg} x$, $\frac{1}{x}$ функциялар).

(1) қатор кўпинча қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

бунда $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x)}{k!} x^k$ қаторнинг *қолдиқ ҳади* дейилади.

Қолдиқ ҳаднинг Лагранж формаси қуйидаги кўринишга эга:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x),$$

бунда $0 \leqslant \theta < 1$.

$f(x)$ функция учун x нинг бирор қийматида (1) ёйилма ҳақиқатан ўринли бўлиши учун x нинг ўша қийматида $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ бўлиши зарур ва етарлидир.

x нинг $R_n(x)$ етарли кичик бўладиган қийматларида

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

тақрибий тенгликни ёзиш мумкин. Баъзан функциянинг Маклорен қаторини топишда даражали қаторни унинг яқинлашиш оралиғи ичида ҳадма-ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш мумкинлигидан фойдаланилади.

Баъзи элементар функцияларнинг Маклорен қаторига ёйилмалари:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots; \qquad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \qquad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad (4)$$

бу қаторлар x нинг ҳар қандай қийматлари учун мос (кўрсатилган) функцияларга яқинлашади.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots; \qquad (5)$$

бу биномиал қатор бўлиб, $|x| < 1$ бўлганда $(1+x)^m$ га яқинлашади. m — ихтиёрий ҳақиқий сон.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (6)$$

қатор $-1 < x \leqslant 1$ бўлганда $\ln(1+x)$ га яқинлашади.

$$\operatorname{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad (7)$$

қатор $|x| \leqslant 1$ бўлганда $\operatorname{arctg}x$ га яқинлашади.

Агар $t = \varphi(x)$ ва $\varphi(0) = 0$ бўлса,

$$e^t,\ \ln(1+t),\ (1+t)^m,\ \sin t,\ \cos t,\ \operatorname{arctg}t,$$

функцияларнинг Маклорен қаторига ёйилмаси юқоридагига ўхшаш ёзилади.

1-мисол. а) $\frac{1}{1+x}$, б) $\frac{1}{1-x}$ функцияларни Маклорен қаторига ёйинг.

△. а) (5) биномиал қаторда m ўрнига $m=-1$ ни қўйиб топамиз:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots .$$

Бу ёйилмани (6) қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаб ҳосил қилса ҳам бўлади.

б) $\frac{1}{1+x}$ функция ёйилмасида x ўрнига $(-x)$ ни қўйсак, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ ҳосил бўлади.

$\frac{1}{1+x}$ ва $\frac{1}{1-x}$ ларнинг ёйилмаларини махражи $q = -x$ ва $q = x$ бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндиси сифатида қараб тўғридан-тўғри ёзсак ҳам бўлар эди. ▲

2-мисол. $f(x) = \sin^2 x$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг ва унинг яқинлашиш интервалини топинг.

△. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ бўлгани учун

(4) ёйилмадан x нинг ўрнига $2x$ ни қўйиб $\cos 2x$ нинг ёйилмасини топамиз:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{2^4 \cdot x^4}{4!} - \frac{2^6 \cdot x^6}{6!} + \ldots (-1)^n \frac{2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Буни юқоридаги тенгликка қўямиз:

$$\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots$$

Яқинлашиш интервали Даламбер аломати ёрдамида аниқланади:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)\right|^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2(n+1))!}x^{2n+2}:$$

$$:(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\Bigg|=x^2\Bigg|\lim_{n\to\infty}\frac{4}{(2n+1)(2n+2)}=0<1.$$

Бу исталган x учун бажарилади. Демак, қаторнинг яқинлашиш интервали $(-\infty,\ +\infty)$ дан иборат. ▲

3- мисол. $f\ x)=\frac{1}{1+x^2}$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг.

△. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$

ёйилмада x нинг ўрнига x^2 ни қўйиб ёки (7- ёйилмага қаранг)

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

ёйилмани унинг яқинлашиш оралиғида ҳадма-ҳад дифференциаллаб, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ функциянинг Маклорен қаторига ёйилмасини топамиз:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots.$$ ▲

□. 73. Биномиал қатордан фойдаланиб (5- қаторга қаранг), қуйидаги функцияларни қаторга ёйинг:

а) $\sqrt{1+x}$;   б) $\sqrt{1-x}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$;   г) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;   д) $\sqrt{1-x^3}$.

Жавоблар.

а) $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4+\ldots$;

б) $\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1}{2^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4+\ldots$;

в) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots$;

г) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots$;

д) $\sqrt{1-x^3} = 1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^6 - \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^9 - \dots$

74. Қуйидаги функцияларни Маклорен қаторига ёйинг:

а) $f(x) = e^{-x}$. *Жавоб.* $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$

б) $f(x) = \sin 2x$. *Жавоб.* $\sin 2x = \frac{2x}{1!} - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - \frac{2^7x^7}{7!} + \dots$

в) $f(x) = \cos 3x$. *Жавоб.* $\cos 3x = 1 - \frac{3^2\cdot x^2}{2!} + \frac{3^4\cdot x^4}{4!} - \frac{3^3\cdot x^6}{6!} + \dots$

г) $f(x) = \sin(x^2)$. *Жавоб.* $\sin(x^2) = \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$

д) $f(x) = e^{-x^2}$. *Жавоб.* $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$

е) $f(x) = \cos^2 x$. *Жавоб.* $\cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \dots$

75. Интеграл остидаги функцияни Маклорен қаторига ёйиб ва ҳадма-ҳад интеграллаб, қуйидаги интегралларни қатор кўринишида ёзинг.

а) $\int \frac{\sin x}{x}dx$. *Жавоб.* $C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \dots$

б) $\int \frac{e^x}{x}dx$. *Жавоб.* $C + \ln x + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \dots$

в) $\int \sin(x^2)dx$. *Жавоб.* $C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \dots$

г) $\int \sqrt{x}e^x dx$. *Жавоб.* $C + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5\cdot 1!}x^{5/2} + \frac{2}{7\cdot 2!}x^{7/2} + \dots$

д) $\int \sqrt{1-x^3}dx$. *Жавоб.* $C + x - \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 1!} - \frac{x^7}{2^2\cdot 7\cdot 2!} - \frac{1\cdot 3\cdot x^{10}}{2^3\cdot 10\cdot 3!} - \dots$

е) $\int \cos\sqrt{x}dx$. *Жавоб.* $C + x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^2}{3\cdot 4!} - \frac{x^4}{4\cdot 6!} + \dots$

5- §. Қаторларнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи

Функциянинг даражали қаторга ёйилмасидан фойдаланиб, бу функцияларнинг айрим нуқталардаги хусусий қийматларини ва юқори чегаранинг функциялари сифатида элементар функциялар орқали чекли кўринишда ифодаланмайдиган аниқ интегралларни исталган аниқликда тақрибий ҳисоблаш мумкин.

1. e^x, $\sin x$ ва $\cos x$ функцияларнинг даражали қаторга ёйилмаси орқали бу функцияларнинг қийматларини ихтиёрий x учун исталган аниқликда ҳисоблаш мумкин.

1- мисол. $\cos 10°$ ни 0,0001 аниқликда ҳисобланг.

△. $f(x)=\cos x$ функциянинг Маклорен қаторига ёйилмасини ёзамиз:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

(4- § даги 4- қатор).

$\cos 10°=\cos\frac{\pi}{18}$ бўлгани учун $\cos x$ ёйилмасида x нинг ўрнига $x=\frac{\pi}{18}$ ни қўямиз, натижада

$$\cos\frac{\pi}{18}=1-\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^6}{6!}+\ldots$$

ёки

$$\cos 10°=1-\frac{(0,1745)^2}{2!}+\frac{(0,1745)^4}{4!}-\frac{(0,1745)^6}{6!}+\ldots$$

ишоралари алмашинувчи сонли қатор ҳосил бўлди. Бу қатор Лейбниц аломати шартларини қаноатлантиради.

$\frac{(0,1745)^4}{4!}<\frac{(0,2)^4}{24}=\frac{0,0016}{24}<0,0001$ бўлгани учун ёйилмада иккита ҳад олиш кифоядир.

Шундай қилиб,

$$\cos 10°\approx 1-\frac{0,1745^2}{18}\approx 0,9848. ▲$$

□. **76**. а). $\sin 18°$ ни 0,0001 аниқлик билан ҳисобланг.

б) $f(x)=e^x$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг ва $e^{0,1}$ ни ҳисобланг (ҳисоблашда қаторнинг учта ҳади билан чегараланинг);

в) $\cos 12°$ ни 0,0001 аниқлик билан ҳисобланг. ■

2. Биномиал қатор илдизларни тақрибий ҳисоблашда қўлланилади.

2-мисол. $\sqrt[4]{630}$ ни 0,0001 аниқлик билан ҳисобланг.

△. Биномиал қатордан фойдаланиш учун $\sqrt[4]{630}$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sqrt[4]{630}=\sqrt[4]{625+5}=\sqrt[4]{625\left(1+\frac{5}{625}\right)}=5\sqrt[4]{1+0{,}008}=$$
$$=5(1+0{,}008)^{1/4}.$$

4-§ даги 5-биномиал қаторда x ўрнига $x=0{,}008$, m ўрнига $m=\frac{1}{4}$ ни қўйсак, ушбу

$$(1+0{,}008^{1/4}=1+0{,}002-0{,}000006+0{,}0000028-\ldots$$

ишоралари алмашинувчи сонли қатор ҳосил бўлади. Агар $(1+0{,}008)^{1/4}$ ни ҳисоблашда қаторнинг иккита ҳади билан чегаралансак, йўл қўйилган хатонинг абсолют қиймати 0,000006 дан ошмайди. У ҳолда $\sqrt[4]{630}=5\sqrt[4]{1+0{,}008}$ ни ҳисоблашдаги хато $5\cdot 0{,}000006=0{,}00003<0{,}0001$ дан ошмайди.

Демак,

$$\sqrt[4]{630}=5\cdot\sqrt[4]{1+0{,}008}\approx 5\cdot(1+0{,}002)=5{,}01 \qquad ▲$$

☐. **77**. Биномиал қатордан фойдаланиб, қуйидагиларни 0,001 аниқлик билан ҳисобланг:

а) $\sqrt{108}$; б) $\sqrt{0{,}994}$; в) $\sqrt[3]{1{,}015}$; г) $\sqrt[3]{130}$; д) $\sqrt[3]{500}$; $\sqrt[4]{17}$.

Жавоб. а) 1,004; б) 0,997; в) 1,005; г) 5,066; д) 7,937; е) 2,030.

3. $\ln(1+x)$ ва $\ln(1-x)$ функцияларнинг қаторга ёйилмаларидан фойдаланиб, $|x|<1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи сонларнинг натурал логарифмларини исталган аниқликда ҳисоблаш мумкин.

3-мисол. $\ln(1{,}1)$ ни 0,0001 аниқлик билан ҳисобланг.

△ $\ln(1+x)$ ни Маклорен қаторини ёямиз (4-§ даги 6-қатор):

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

бу қатор $(-1, +1)$ оралиқда $\ln(1+x)$ га яқинлашади. $\ln(1+x)$ ни $x=0{,}1$ да ҳисоблаш учун ишоралари алмашинувчи қуйидаги қаторни ҳосил қиламиз:

$$\ln(1{,}1)=0{,}1-\frac{(0{,}1)^2}{2}+\frac{(0{,}1)^3}{3}-\frac{(0{,}1)^4}{4}+\ldots.$$

ln(1,1) ни 0,0001 аниқликда ҳисоблаш учун қаторнинг учта ҳадини олиш кифоядир.

Демак,

$$\ln(1,1)\approx 0,1-\frac{0,01}{2}+\frac{0,001}{3}\approx 0,0953.$$ ▲

□. 78. а) ln 1,6 ни 0,0001 аниқлик билан ҳисобланг. *Жавоб.* 0,4556.

б) ln 0,7 ни 0,00001 аниқлик билан ҳисобланг. *Жавоб.* — 0,3572.

4. **Аниқ интегрални қаторлар ёрдамида тақрибий ҳисоблаш.** Қуйидаги мисолни кўрайлик.

4-мисол. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ аниқ интегрални 0,001 аниқлик билан ҳисобланг.

△. Берилган интеграл учун Ньютон—Лейбниц формуласини қўлланиб бўлмайди, чунки $\int e^{-x^2}dx$ интегралнинг бошланғич функцияси элементар функциялар орқали ифода қилинмайди. Шунинг учун e^x функциянинг қаторга ёйилмасида x нинг ўрнига $(-x^2)$ ни қўйиб, e^{-x^2} нинг ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots.$$

Бу қаторни унинг яқинлашиш интервали $(-\infty, +\infty)$ ичида ҳадма-ҳад интеграллаймиз:

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx=\int\limits_0^1\left[1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+\ldots\right]dx=\Big[x=$$

$$-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}+\ldots+\Big]_0^1-1-\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\frac{1}{11\cdot 5!}+\ldots.$$

Ҳосил бўлган ишоралари алмашинувчи сонли қатор Лейбниц аломати шартларини қаноатлантиради. Агар $\int\limits_0^1 e^{-x2}dx$ ни ҳисоблашда қаторнинг бешта ҳади билан чегаралансак, йўл қўйилган хатоликнинг абсолют қиймати $\frac{1}{11\cdot 5!}=\frac{1}{1320}<0,001$ дан ошмайди. Демак,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}\approx 0{,}747.$$ ▲

☐ **79.** Биномиал қаторни ҳадма-ҳад интеграллашдан фойдаланиб, $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ аниқ интеграл қийматини 0,001 аниқлик билан ҳисобланг.

Жавоб. 0,487.

80. $\int_0^{1/2}\frac{\sin 2x}{x}dx$ аниқ интеграл қийматини 0,001 аниқлик билан ҳисобланг.

Жавоб. 0,946.

81. Қуйидаги интегралларнинг қийматини 0,001 аниқлик билан ҳисобланг:

а) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$, б) $\int_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx$, в) $\int_0^{1/2} x\ln(1+x^2)dx$.

Жавоб. а) 0,764; б) 0,508; в) 0,014.

X БОБ

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ АСОСЛАРИ

1-§. Ҳодисалар ва уларнинг турлари. Ҳодисалар устида амаллар

1. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан бири *тажриба* ва тажриба натижасида кузатилиши мумкин бўлган *ҳодиса* тушунчаларидир.

Ҳодиса дейилганда рўй бериши ёки рўй бермаслиги мумкин бўлган ҳар қандай воқеани тушунамиз.

Тажриба ҳодисани рўёбга келтирувчи шартлар мажмуи (шартлар комплекси) S нинг бажарилишини таъминлашдан иборатдир. Бу жумлалар аниқ математик таъриф бўла олмаса-да, биз шу билан чекланамиз.

1-мисол. Тажриба — ичида фақат оқ ва қора шарлар бўлган яшикдан таваккалига битта шар олиш.

Ҳодиса — олинган шарнинг биз хоҳлаган рангда бўлиши.

Изоҳ. Биз қизиққан ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслиги ўтказилаётган тажрибанинг шартлар комплекси S га боғлиқдир. Шунинг учун бу шартлар олдиндан келишиб олинади.

Тажрибанинг ҳар қандай натижаси *элементар ҳодисалар* дейилади. Ҳар қандай тажриба натижасида рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар ҳодисалар тўпламни ташкил этади. Элементар ҳодисалар тўпламини Ω орқали, ҳар бир элементар ҳодисани эса e ($e \in \Omega$) орқали белгилаймиз.

2-мисол. Тажриба симметрик, бир жинсли тангани икки марта ташлашдан иборат бўлсин. Бунда элементар ҳодисалар қуйидагича бўлади:

e_1 = (ГГ) — биринчи ташлашда герб, иккинчисида ҳам герб тушиш ҳодисаси;

e_2 = (ГР) — биринчи ташлашда герб, иккинчисида рақам тушиш ҳодисаси;

e_3 = (РГ) — биринчи ташлашда рақам, иккинчисида герб тушиш ҳодисаси;

$e_4 = (\text{РР})$ — биринчи ташлашда рақам, иккинчисида ҳам рақам тушиш ҳодисаси.

Бу тажрибада элементар ҳодисаларнинг Ω тўплами тўрт элементдан иборат;

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}.$$

3-мисол. Тажриба ёқлари бирдан олтигача номерланган бир жинсли ўйин соққасини (кубни) икки марта ташлашдан иборат бўлсин. Бу ҳолда элементар ҳодисалар ушбу кўринишга эга:

$$e_{ij} = (i, j).$$

Бу ҳодиса кубни биринчи ташлашда i рақамли ёқ, иккинчи ташлашда j рақамли ёқ тушганлигини билдиради. Бу ерда

$$\Omega = \{e_{ij}\}, \quad i, \ j = 1,6$$

ва элементар ҳодисалар сони $N = 6^2 = 36$ (1-жадвал);

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 1;1 & 2;1 & 3;1 & 4;1 & 5;1 & 6;1 \\ 1;2 & 2;2 & 3;2 & 4;2 & 5;2 & 6;2 \\ 1;3 & 2;3 & 3;3 & 4;3 & 5;3 & 6;3 \\ 1;4 & 2;4 & 3;4 & 4;4 & 5;4 & 6;4 \\ 1;5 & 2;5 & 3;5 & 4;5 & 5;5 & 6;5 \\ 1;6 & 2;6 & 3;6 & 4;6 & 5;6 & 6;6 \end{matrix} \right\} \qquad (1)$$

Тажриба натижасида албатта руй берадиган ҳодиса *муқаррар ҳодиса* ва аксинча, мутлақо рўй бермайдиган ҳодиса *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади ва уларни мос равишда U, V ҳарфлар орқали белгиланади. Тўплам маъносида U ва V ларни мос равишда $U = \Omega$, $V = \varnothing$ ($\varnothing$ = бўш тўплам) каби белгилаймиз. Тажриба натижасида рўй бериши олдиндан аниқ бўлмаган ҳодиса *тасодифий ҳодиса* дейилади. Тасодифий ҳодисалар, одатда, латин алфавитининг бош ҳарфлари A, B, C, ... лар билан белгиланади.

Ҳар қандай тасодифий ҳодиса элементар ҳодисалар тўпламидан иборат бўлиб, унинг „катта-кичиклиги" унга кирган элементар ҳодисалар „сонига" боғлиқдир.

4-мисол. A ҳодиса 3-мисолдаги тажрибада соққани 1-ва 2-марта ташлашда унинг ёқларида тушган очколар йиғиндиси еттига тенг бўлишидан иборат бўлсин. A ҳодиса 1-жадвалга кўра

$$A = (e_{1,6}, e_{2,5}, e_{3,4}, e_{4,3}, e_{5,2}, e_{6,1})$$

каби бўлади, яъни тажриба натижасида $e_{1,6}$ рўй берса, ёки $e_{2,5}$ рўй берса, ёки $e_{3,4}$ ва ҳоказо ёки $e_{6,1}$ рўй берса,

A ҳодиса рўй беради, деймиз. Шундай қилиб A ҳодиса 6 та элементар ҳодисадан ташкил топган экан.

A бирор ҳодиса бўлсин. A ҳодисага *қарама-қарши ҳодиса* деб A ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат ҳодисани тушунамиз. Бу ҳодисани $\overline{A}$ орқали белгилаймиз. Масалан, соққани бир марта ташлаганда жуфт очко тушиши A ҳодиса бўлсин, у ҳолда $\overline{A}$ ҳодиса тоқ очко тушишини билдиради.

□. **5.** Муқаррар, мумкин бўлмаган ва тасодифий ҳодисаларга мисоллар келтиринг.

6. Тажриба симметрик, бир жинсли тангани уч марта ташлашдан иборат бўлсин. Рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар тўпламини ёзинг.

Жавоб. $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} e_{\text{ггг}},\ e_{\text{ггр}},\ e_{\text{грр}},\ e_{\text{ррр}} \\ e_{\text{ргр}},\ e_{\text{ррг}},\ e_{\text{грг}},\ e_{\text{ргг}} \end{array} \right\}.$

7. B ҳодиса тангани уч марта ташлашда ҳеч бўлмаганда (ақалли) икки марта герб тушишидан иборат бўлсин. B ни ташкил қилувчи элементар ҳодисаларни ёзинг.

Жавоб. $B = \{e_{\text{ггг}}, e_{\text{ггр}}, e_{\text{грг}}, e_{\text{ргг}}\}$.

8. C ҳодиса тангани уч марта ташлашда ҳеч бўлмаганда бир марта герб тушишидан иборат бўлсин. C ни ташкил қилувчи элементар ҳодисаларни ёзинг.

Жавоб. $C = \{e_{\text{ггг}}, e_{\text{ггр}}, e_{\text{грг}}, e_{\text{ргг}}, e_{\text{грр}}, e_{\text{ргр}}, e_{\text{ррг}}\}$.

9. Иккита ўйин соққаси ташланган. Қуйидаги ҳодисаларни ташкил қилувчи элементар ҳодисаларни ёзинг: а) тушган очколар йиғиндиси саккизга тенг; б) тушган очколар айирмаси тўртга тенг.

Жавоб. а) $(e_{2,6}, e_{3,5}, e_{4,4}, e_{6,2}, e_{5,3})$,
б) $(e_{5,1}, e_{6,2})$.

2. Ҳодисалар орасидаги қуйидаги муҳим муносабатларни (амалларни) билиш жуда зарурдир. Уларни таърифлаймиз.

1). Агар A ҳодисани ташкил этган ҳамма элементар ҳодисалар B ҳодисага ҳам тегишли бўлса, A ҳодиса B ҳодисани *эргаштиради* дейилади ва бу $A \subset B$ каби белгиланади. Кўриниб турибдики, бу ҳолда A рўй берса, B ҳам албатта рўй беради, лекин B рўй берса, A нинг рўй бериши шарт эмас. Масалан, соққа бир марта ташланганда рўй бериши мумкин бўлган $A = \{e_2;\ e_5\}$ ва $B = \{e_1\ e_2,\ e_3,\ e_5\}$ тасодифий ҳодисалар учун $A \subset B$ ўринлидир.

2) A ва B ҳодисалар бир хил элементар ҳодисалар

тўпламидан ташкил топган бўлса, яъни A ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар албатта B га ҳам тегишли ва, аксинча, B ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар A га ҳам тегишли бўлса, A ва B ҳодисалар тенг дейилади ва $A = B$ каби белгиланади.

3) A ва B *ҳодисаларнинг йиғиндиси* деб A ёки B ҳодисаларнинг камида бири рўй берганда ва фақат шу ҳолда рўй берадиган C ҳодисага айтилади ва $C = A \cup B$ (ёки $A + B = C$) каби белгиланади.

Бу ерда иккита изоҳ бериб ўтиш керак. Биринчидан, C тўпламда A ва B тўпламларнинг элементларидан бошқа элементлар бўлмайди. Иккинчидан, агар бирор элемент ҳам A да, ҳам B да учраса, у C тўпламга фақат бир марта киради. Масалан, иккита соққа ташланганда рўй бериши мумкин бўлган

$$A = (e_{1;1},\ e_{3;5},\ e_{4;6},\ e_{6;6}) \quad \text{ва}$$

$$B = (e_{2;2},\ e_{3;5},\ e_{4;6},\ e_{5;5})$$

ҳодисалар йиғиндиси

$$C = A \cup B = (e_{1;1},\ e_{2;2},\ e_{3;5},\ e_{4;6},\ e_{5;5},\ e_{6;6})$$

бўлади.

4) A ва B *ҳодисаларнинг кўпайтмаси* деб ҳам A, ҳам B рўй берганда ва фақат шу ҳолда рўй берадиган C ҳодисага айтилади ва $C = A \cap B$ (ёки $A \cdot B$) каби белгиланади. Масалан, юқорида келтирилган мисолда:

$$A \cap B = (e_{3;5},\ e_{4;6}).$$

5) A ва B *ҳодисаларнинг айирмаси* деб A рўй бериб, B рўй бермаслигидан иборат C ҳодисага айтилади. A ва B ҳодисаларнинг айирмаси $C = A \setminus B$ (ёки $A - B$) каби белгиланади. Масалан, юқорида келтирилган мисолдаги A ва B ҳодисалар учун уларнинг айирмаси $A \setminus B = (e_{1;1},\ e_{6;6})$ каби бўлади.

6) Агар $A \cap B = V$ (V — бўш тўплам, яъни $V = \varnothing$) бўлса, A ва B ҳодисалар *биргаликда рўй бермайдиган ҳодисалар* дейилади. Масалан, соққани бир марта ташлашда рўй бериши мумкин бўлган

$$A = (e_1,\ e_4) \text{ ва } B = (e_3,\ e_5)$$

тасодифий ҳодисалар биргаликда рўй бермайдиган ҳодисалардир, яъни $A \cdot B = V$.

7) A ҳодисага қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодиса A га кирмаган барча элементар ҳодисалар тўпламидан иборатдир, яъни $A \cap \bar{A} = V$ ва $A \cup \bar{A} = U$.

8) Агар $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U$ бўлса, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар *ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади дейилади.* Хусусан, $A_i \cap A_j = V$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ ва $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U$ бўлса, A_1 $A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар ўзаро биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади дейилади.

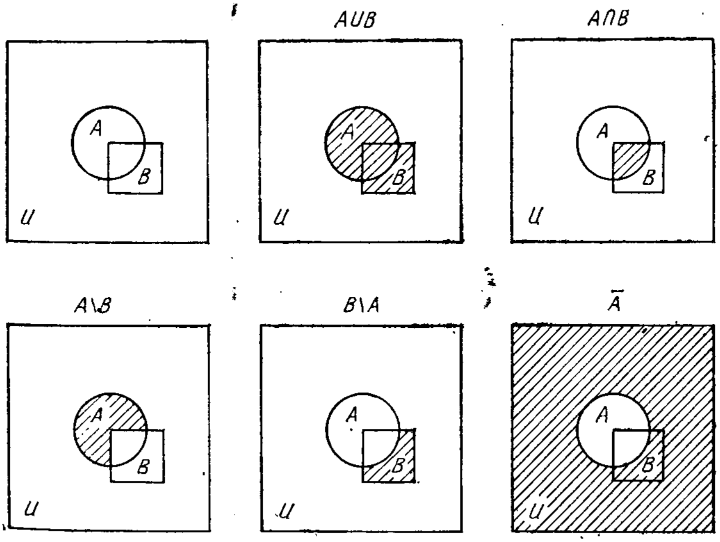
Масалан, тажриба бир қисми I заводда, бир қисми II заводда, бир қисми III заводда тайёрланган электр лампочкалари солинган яшикдан таваккалига битта лампочка олишдан иборат бўлсин. Бу ҳолда қуйидаги ҳодисаларни кузатиш мумкин:

A_1 ҳодиса — олинган лампочка I заводда тайёрланган,
A_2 ҳодиса — олинган лампочка II заводда тайёрланган,
A_3 ҳодиса — олинган лампочка III заводда тайёрланган.

Бу ҳодисалар учун $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = U$ ва $i \neq j$ лар учун $A_i \cap A_j = V (i, j = 1, 2, 3)$ эканлиги равшан. Демак, A_1 A_2, A_3 ҳодисалар ўзаро биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади.

Ҳодисалар орасидаги юқорида киритилган тушунчаларни 10.1-чизма ёрдамида тушунтириш қулай. Бунда S шартлар комплекси 10.1-чизмадаги катта квадратга нуқтани таваккалига ташлашдан иборат.

□. **10.** Икки мерган нишонга биттадан ўқ узмоқда



10.1- чизма

Агар A_1 биринчи мерган узган ўқнинг нишонга тегиш ҳодисаси, A_2 — иккинчи мерган узган ўқнинг нишонга тегиш ҳодисаси бўлса, у ҳолда $A_1 \cup A_2$ ва $A_1 \cap A_2$ ҳодисалар нимани англатади?

11. Қарама-қарши ҳодисаларга ва биргаликда рўй бермайдиган ҳодисаларга мисоллар келтиринг.

12. Ҳодисалар ўртасидаги қуйидаги муносабатларни текширинг:

а) $A + B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + AB$,
б) $A = AB + A\overline{B}$,
в) $(A \cup B) \cdot C = AC \cup BC$,
г) $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$,
д) $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

13. Агар A_1, A_2, A_3, ($\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$) ҳодисалар мос ҳолда 1-ўқнинг, 2-ўқнинг, 3-ўқнинг нишонга тегишини (тегмаслигини) билдирса, у ҳолда қуйидаги ҳодисалар нимани англатади:

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$
$$C = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3. \blacksquare$$

2-§. Эҳтимолнинг классик таърифи. Комбинаторика элементлари

1. Энди жуда муҳим тушунча — *ҳодисанинг эҳтимоли* тушунчаси билан танишайлик.

Эҳтимол термини ҳодисанинг амалга ошиш, рўй бериш имкониятининг объектив ўлчовини ифодалайди.

Бирор тажриба натижасида чекли сондаги $e_1, e_2, \ldots, e_n$ элементар ҳодисалардан бирортаси рўй бериши мумкин бўлсин, яъни

бўлсин. $$U = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

Бу элементар ҳодисаларга қуйидаги шартларни қўямиз:

1) ҳодисалар жуфт-жуфти билан биргаликда эмас, бошқача қилиб айтганда, исталган иккита e_i ва e_j $(i \neq j)$ ҳодиса учун улардан бири рўй берса, иккинчиси албатта рўй бермайди.

2) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ҳодисалар ягона мумкин бўлган ҳодисалар, яъни уларнинг бирортаси албатта рўй бериши лозим.

3) $e_1, e_2, \ldots e_n$ ҳодисалар тенг имкониятли. Бу шарт $e_1, e_2 \ldots, e_n$ ҳодисалардан бирортасининг бошқа-

ларидан кўпроқ рўй беришига ёрдам берадиган ҳеч қандай объектив сабаблар йўқлигини англатади.

Айтайлик, A ҳодиса берилган бўлиб, у $e_i(i=\overline{1,n})$ элементар ҳодисалардан баъзилари рўй бергандагина рўй берсин. Бундай ҳолда биз $e_i(i=\overline{1,n})$ элементар ҳодисалардан рўй бериши A ҳодисанинг рўй беришига ҳам олиб келадиганларини A ҳодисага *қулайлик туғдирадиган ҳодисалар* деб атаймиз.

Айтайлик, қаралаётган n та $e_1, e_2, \ldots, e_n$ элементар ҳодисадан m таси A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирсин, яъни

$$A=(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_m}) \text{ бўлсин.}$$

Эҳтимолнинг классик таърифи. A ҳодисанинг эҳтимоли деб *A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи ҳодисалар сонининг тенг имкониятли барча элементар ҳодисалар сонига нисбатига айтилади* ва қуйидагича белгиланади:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A \text{ га кирган элементар ҳодисалар сони}}{\text{барча элементар ҳодисалар сони}}$$

Эҳтимолнинг хоссалари.

а) муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг:

$$P(U)=1.$$

б) мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг:

$$P(V)=0,$$

с) исталган A ҳодисанинг эҳтимоли қуйидаги қўш тенгсизликни қаноатлантиради:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2. Классик таърифдан фойдаланиб масалалар ечишда комбинаторика элементлари муҳим роль ўйнайди, шуни эътиборга олиб комбинаторикага доир баъзи тушунчалар билан танишиб ўтайлик.

Ҳар қандай нарсалардан тузилган ва бир-бирадан ё шу нарсаларнинг тартиби билан, ёки шу нарсаларнинг ўзлари билан фарқ қилувчи турли группалар *бирлашмалар* деб аталади.

Бирлашмалар уч хил бўлиши мумкин: ўринлаштириш, ўрин алмаштириш ва группалар. Уларнинг ҳар бирини кўриб чиқайлик.

1) n элементини m тадан (бунда $m \leqslant n$) *ўринлаштириш* деб шундай бирлашмаларга айтиладики, уларнинг

ҳар бирида берилган n та элементдан олинган m та элемент бўлиб, улар бир-биридан ё элементлари билан, ёки элементларнинг тартиби билан фарқ қилади. n та элементдан m тадан барча ўринлаштиришлар сони A_n^m каби белгиланиб, у

$$A_n^m = n(n-1) \ldots [n-(m-1)]$$

формула билан ҳисобланади.

2) Агар ўринлаштиришлар n та элементдан n тадан олинган бўлса (яъни фақат элементларининг тартиби билан фарқ қилса), бундай ўринлаштиришлар *ўрин алмаштиришлар* деб аталади, у ҳолда юқоридаги формулага кўра n та элементдан барча ўрин алмаштиришлар сони қуйидагича бўлади:

$$P_n = n(n-1) \ldots 1 = n!$$

3) Агар n та элементдан m тадан тузиш мумкин бўлган барча ўринлаштиришлардан бир-биридан энг камида бир элемент билан фарқ қиладиганларини танлаб олсак, у ҳолда *группалар* (комбинациялар) деб аталган бирлашмаларни ҳосил қиламиз.

n та элементдан m тадан барча группалашлар (комбинациялар) сони

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n(n-1) \ldots [n-(m-1)]}{m!}$$

формула ёрдамида топилади.

Юқоридаги 3 та формула учун $A_n^m = C_n^m \cdot P_n$ муносабат ўринлидир.

Энди масалалар ечиш намуналари билан танишайлик.

1-масала. Халтада ўлчамлари ва оғирлиги бир хил бўлган 5 та кўк, 11 та қизил ва 9 та оқ шар бўлиб, шарлар яхшилаб аралаштирилган. Халтадан битта шар олинганда кўк шар чиқиши, қизил шар чиқиши ва оқ шар чиқиши эҳтимолларини топинг.

△. Исталган шарнинг чиқишини тенг имкониятли деб ҳисоблаш мумкин бўлганидан, жами $n=5+11+9=25$ та элементар ҳодисага эгамиз. Агар A, B, C орқали мос равишда кўк, қизил ва оқ шар чиқишидан иборат ҳодисаларни, m_1, m_2, m_3 орқали эса бу ҳодисаларга қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сонини белгиласак, у ҳолда $m_1=5$, $m_2=11$, $m_3=9$ бўлиши тушунарли. Шунинг учун

$$P(A)=\frac{5}{25}=0{,}2; \quad P(B)=\frac{11}{25}=0{,}44; \quad P(C)=\frac{9}{25}=0{,}36. \blacktriangle$$

2-масала. Тажриба симметрик бир жинсли тангани уч марта ташлашдан иборат бўлсин. $m(m=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ марта гербли томон тушиш эҳтимолини ҳисобланг.

△. Тангани уч марта ташлашда рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар тўплами

$$\Omega=\left\{\begin{array}{llll} e_1=(\text{ГГГ}); & e_2=(\text{ГГР}); & e_3=(\text{ГРР}); & e_4=(\text{РРР}); \\ e_5=(\text{РГР}); & e_6=(\text{РРГ}); & e_7=(\text{ГРГ}); & e_8=(\text{РГГ}). \end{array}\right\}$$

8 та элементдан иборат, яъни $n=8$. Бизни қизиқтирган ҳодисалар эса

$$A_0=\{e_4\},\quad A_1=\{e_3,\ e_5,\ e_6\},\quad A_2=\{e_2,\ e_7,\ e_8\},\quad A_3=(e_1)$$

бўлиб, бунда A_m m марта герб тушиш ҳодисасидир. Демак, $m_0=1$, $m_1=3$, $m_2=3$, $m_3=1$ бўлиб, эҳтимолнинг классик таърифига кўра ёза оламиз:

$$P(A_0)=\frac{1}{8};\quad P(A_1)=\frac{3}{8};\quad P(A_2)=\frac{3}{8};\quad P(A_3)=\frac{1}{8}.$$

Бунда $P(U)=P(A_0+A_1+A_2+A_3)=1$ бўлишига эътибор беринг.▲

3-масала. Группада 8 та фан ўрганилади ва ҳар куни 3 хил дарс ўтилади. Кунлик дарс неча хил усул билан тақсимланиши мумкин?

△. Дарсларнинг барча мумкин бўлган кунлик тақсимоти 8 элементдан 3 тадан тузилган барча ўринлаштиришлар сонига тенг, яъни

$$A_8^3=8\cdot7\cdot6=336.$$

Демак, кунлик дарсни 336 хил усул билан тақсимлаш мумкин.▲

4-масала. 12 кишилик овқат ҳозирланган столга 12 кишини неча хил усулда ўтказиш мумкин?

△. Ўтказиш турлари сони 12 та элементдан мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришлар сонига тенг бўлади, яъни

$$P_{12}=1\cdot2\cdot3\ \ldots\ 12=479771600.$$▲

□. **14.** Группада 10 та фан ўқитилади. Агар ҳар куни 4 хил дарс ўтилса, бир кунлик дарсни неча хил усул билан тақсимлаш мумкин?

Жавоб. 5040.

15. 8 та стулга 8 кишини неча хил усул билан ўтказиш мумкин?

Жавоб. 40320.

16. $C_n^m=C_n^{n-m}$ тенглик ўринли эканини исботланг.

17. Иккита танга бир вақтда ташланган·m $(m=0, 1, 2)$ марта гербли томон тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$.

18. Ёқларига 1, 2, 3, 4, 5, 6 рақамлар ёзилган иккита соққа бир вақтда ташланади. Иккала соққада тушган очколар йиғиндиси 8 га тенг бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P=\frac{5}{36}$.

19. Иккита соққа ташланган. Тушган очколар йиғиндиси бешга, кўпайтмаси тўртга тенг бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P=\frac{1}{18}$.

20. Танга икки марта ташланган. Ҳеч бўлмаганда бир марта „гербли" томон тушиши эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P=\frac{3}{4}$.

21. Яшикда 15 та деталь бўлиб, улардан 10 таси бўялган. Йиғувчи таваккалига 3 та деталь олади. Олинган деталларнинг бўялган бўлиши эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{24}{91}$.

22. Абонент телефон номерини тераётиб номернинг охирги учта рақамини эслай олмади ва бу рақамларни турли эканлигини билгани ҳолда уларни таваккалига терди. Кераклн рақамлар терилганлиги эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P=\frac{1}{A_{10}^3}=\frac{1}{720}$.

23. Цехда 6 эркак ва 4 аёл ишлайди. Табель номерлари бўйича таваккалига 7 киши ажратилган. Ажратилганлар орасида 3 аёл бўлиши эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P=\frac{C_4^3\cdot C_6^4}{C_{10}^7}=0,5.$ ■

3-§. Эҳтимолнинг бошқа таърифлари

Эҳтимолнинг юқорида кўриб чиқилган классик таърифини татбиқлар учун муҳим бўлган кўпчилик ҳолларда қўлланиб бўлмайди, чунки эҳтимолнинг классик таърифи учун фақат чекли сондаги ягона мумкин бўлган тенг имкониятли ва биргаликда бўлмаган ҳодисаларни қараш талаб қилинади, лекин мумкин бўлган ҳодисаларнинг чекли сонда бўлишига ҳар доим ҳам эришиб бўлавермайди. Кўп ҳолларда эса қаралаётган ҳодисанинг тенг имкониятли элементар ҳодисаларга ёйилишининг ўзи мумкин бўлмай қолади.

Бу қийинчиликларни баъзан эҳтимолнинг геометрик таърифи ёки статистик таърифи ёрдамида бартараф қилиш мумкин.

1. Эҳтимолнинг геометрик таърифи. Бирор Q соҳа берилган бўлиб, бу соҳа Q_1 соҳани ўз ичига олсин, Q соҳага таваккалига ташланган нуқтанинг Q_1 соҳага тушиш эҳтимолини топиш талаб қилинади. Бу ерда барча элементар ҳодисалар тўплами Q нинг барча нуқталаридан иборат. Бинобарин, бу ҳолда классик таърифдан фойдалана олмаймиз. Танланган нуқта Q га албатта тушсин ва унинг бирор Q_1 қисмига тушиш эҳтимоли шу Q_1 қисмнинг ўлчовига (узунлигига, юзига, ҳажмига) пропорционал бўлиб, Q_1 нинг формасига ва Q_1 қисм Q нинг қаерида жойлашганлигига боғлиқ бўлмасин. Бу шартларда қаралаётган ҳодисанинг эҳтимоли

$$P = \frac{\text{mes}\, Q_1}{\text{mes}\, Q}$$

формула ёрдамида аниқланади. Бу формула ёрдамида аниқланган p функция эҳтимолнинг барча хоссаларини қаноатлантиришини кўриш қийин эмас.

Баъзи масалаларнинг ечилиши билан танишайлик.

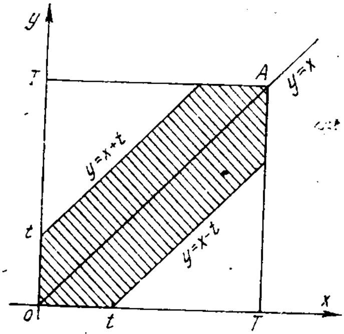
1-масала. L узунликка эга бўлган кесмага таваккалига нуқта ташланади. Ташланган нуқтанинг кесманинг ўртасидан кўпи билан l масофада ётиш ҳодисаси эҳтимолини топинг.

△. Юқоридаги шартни қаноатлантирадиган нуқталар тўплами $-l \leqslant x \leqslant l$ дан иборат (умумийликка зиён келтирмасдан кесманинг ўртасини саноқ боши деб қабул қиламиз). Бу кесманинг узунлиги $2l$ га тенг. Демак, қаралаётган ҳодисанинг эҳтимоли:

$$P = \frac{2l}{L}. \blacktriangle$$

2-масала. Икки студент кундузи соат 12 билан $12 + T$ орасида тайин жойда учрашишга ва олдин келган студент ўртоғини t соат ($t < T$) кутиб, у келмаса кейин кетишига келишиб олишди. Агар ҳар бир студент ўзининг келиш моментини таваккалига (соат 12 билан $12+T$ орасида) танласа, уларнинг учрашиш эҳтимолини топинг.

△. Биринчи ва иккинчи студентларнинг келиш моментларини мос равишда x ва y орқали белгилаймиз. Масала



10.2- чизма

шартига кўра ушбу қўш тенгсизликлар бажарилиши лозим:

$$0 \leqslant x \leqslant T, \quad 0 \leqslant y \leqslant T.$$

x ва y ларни текисликдаги Декарт координаталари сифатида тасвирлаймиз.

Координаталар текислигида юқоридаги тенгсизликларни $OTAT$ квадратга тегишли бўлган исталган нуқтанинг координаталари қаноатлантиради (10.2- чизма).

Икки студент учрашиши учун $|x-y| \leqslant t$ ёки

$$y > x \text{ бўлганда, } y < x + t,$$
$$y < x \text{ бўлганда, } y > x - t$$

тенгсизликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. 10.2- чизмадан кўринадики, изланаётган эҳтимол штрихланган юзнинг квадрат юзига бўлган нисбатига тенг (10.2- чизма):

$$P = \frac{T^2 - 2\frac{(T-t)^2}{2}}{T^2} = \frac{t(2T-t)}{T^2} . \blacktriangle$$

☐ **24.** Радиуси R бўлган доирага радиуси r бўлган кичик доира жойлаштирилган. Катта доирага тасодифан ташланган нуқтанинг кичик доирага тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг доирага тушиш эҳтимоли доира юзига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоб. $P = \frac{r^2}{R^2}$.

25. Текислик бир-биридан $2a$ масофада жойлашган тўғри чизиқлар билан бўлинган. Текисликка радиуси $r < a$ бўлган танга таваккалига ташланган. Танга тўғри чизиқларнинг бирортасини ҳам кесмаслиги эҳимолини топинг.

Жавоб. $P = \frac{2a - 2r}{2a} = \frac{a - r}{a}$.

26. Икки дўст кундузи соат 12 билан 13 орасида тайин бир жойда учрашишга ва олдин келган киши дўстини $\frac{1}{4}$ соат кутиб, у келмагандан кейин кетишга келишиб олишди. Агар ҳар бир киши ўзининг келиш моментини таваккалига (соат 12 билан 13 орасида) танласа, уларнинг учрашиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = \frac{7}{16}$. Кўрсатма. 2-масалага қаранг.

27. Ox ўқининг узунлиги L бўлган OA кесмасига иккита $B(x)$ ва $C(y)$ нуқта таваккалига қўйилган. Ҳосил бўлган учта кесмадан учбурчак ясаш мумкин бўлиши эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = \frac{1}{4}$.

28. Радиуси R бўлган доира ичига таваккалига нуқта ташланган. Ташланган нуқта доирага ички чизилган: а) квадрат ичига; б) мунтазам учбурчак ичига тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг доира бўлагига тушиш эҳтимоли бу бўлакнинг юзига пропорционал бўлиб, унинг доирага нисбатан жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоб. а) $p = \frac{2}{\pi}$; б) $p = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. ■

2. Эҳтимолнинг статистик таърифи. Эҳтимоллар назариясининг кўпгина татбиқларида эҳтимолнинг *статистик таърифи* деб аталувчи таърифдан фойдаланилади.

Ҳар бирида бирор ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслиги кузатиладиган тажрибаларни шароитни ўзгартирмаган ҳолда чексиз кўп марта такрорлаш мумкин бўлсин деб фараз қилайлик. Масалан, ўйин соққасини ёки тангани ташлаш, нишонга ўқ узиш ва шунга ўхшаш тажрибаларни чексиз кўп марта такрорлаш мумкин.

Айтайлик, тажрибалар сони n етарлича катта бўлганда бизни қизиқтираётган A ҳодиса m марта рўй берган бўлсин.

$W(A) = \frac{m}{n}$ нисбат A ҳодисанинг *нисбий частотаси* деб аталади.

Кўп кузатишлар шуни кўрсатадики, агар бир хил шарт-шароитда тажрибалар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида синовлар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда нисбий частота турғунлик хоссасига эга бўлади.

Тажриба ўтказилаётган шароитларни ўзгартирмаганда атрофида ҳодисанинг рўй бериш частотаси тебранадиган ва частотани характерлайдиган сон шу ҳодисанинг *эҳтимоли* деб аталади. Келтирилган бу таъриф *эҳтимолнинг статистик таърифи* дейилади. Шундай қилиб, агар тажриба йўли билан нисбий частота аниқланган бўлса, у ҳолда уни ёки унга яқин сонни эҳтимолнинг тақрибий қиймати учун олиш мумкин.

3-масала. Швед статистика маълумотларига кўра 1935 йилда қиз болалар туғилиш сонининг нисбий частотаси ойлар бўйича қуйидагича ўзгарган:

Ойлар	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь	бир йилда
w	0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482	0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473	0,482

Нисбий частота 0,482 сони атрофида тебранади, шунинг учун бу сонни қиз болалар туғилиши эҳтимолининг тақрибий қиймати сифатида олиш мумкин.

4-масала. Танганинг гербли томони билан тушиш частотасини ўрганиш мақсадида тажрибалар ўтказилган бўлиб, уларнинг натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган:

Ташлашлар сони	Гербли томони билан тушиш сони	Нисбий частота
4040	2048	0,5080
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Бу ерда нисбий частота 0,5 сонидан кам фарқ қилади. Тажрибалар сонининг ортиши билан бу фарқ янада камаяди. Танга ташлашда гербли томон тушиш эҳтимоли 0,5 га тенг эканини эътиборга олсак, нисбий частотанинг эҳтимол атрофида тебранишига яна бир карра ишонч ҳосил қиламиз.

☐ **29.** 10 000 та тарвузни транспорт билан ташишда 36 таси бузилди. Бузилмаган тарвузлар сонининг нисбий частотасини топинг.

30. 100 деталли партиядан техника-контрол бўлими 5 та ностандарт деталь топди. Ностандарт деталлар чиқишининг нисбий частотасини топинг.

31. Милтиқдан ўқ узишда нишонга теккан ўқлар сонининг нисбий частотаси 0,85 га тенглиги аниқланди. Агар жами 120 та ўқ узилган бўлса, нишонга теккан ўқлар сонини топинг.

Жавоб. 102.

32. Берилган қуйидаги маълумотларга кўра сотилган эркаклар пойабзалининг размерлари бўйича нисбий частоталарини ҳисобланг.

Пойабзал номери	38	39	40	41	42	43	44	45	46	Жами
Сотилган жуфт пойабзаллар сони	6	53	138	166	140	70	82	9	1	665

33. Швед статистика маълумотларига кўра 1935 йилда туғилган ҳамма болалар ва қиз болалар сони ойлар бўйича қуйидагича тақсимланган:

Ойлар	Ҳамма болалар сони	Қиз болалар сони
1	7280	3537
2	6957	3407
3	7893	3866
4	7884	3711
5	7892	3775
6	7609	3665
7	7585	3621
8	7393	3596
9	7203	3491
10	6903	3391
11	6552	3160
12	7132	3371
Бир йилда	88273	42591

Ойлар бўйича ва бир йил ичида ўғил болалар туғилиш сонининг нисбий частотасини ҳисобланг. ■

4-§. Эҳтимолларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари. Шартли эҳтимоллар. Ҳодисаларнинг боғлиқсизлиги

Берилган ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳолларни бевосита ҳисоблаш анча қийин бўлиши мумкин. Шунинг учун ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблашда уни бошқа соддароқ ҳодисалар комбинацияси кўринишида ифодалаш қулайроқдир. Бироқ бунда ҳодисани бошқа ҳодисаларнинг комбинацияси кўринишида ифодалашда ҳодисанинг эҳтимоли бўйсунадиган қоидаларни билиш керак. Қуйида улар билан танишиб ўтамиз.

1. **Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси.** Иккита биргаликда бўлмаган A ва B ҳодисадан исталган бирининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Умуман ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган бир нечта $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалардан исталган бирининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:

$$P(A_1+A_2+\ \ldots\ +A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Натижа. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалардан фақат биттаси албатта рўй берадиган ва улар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса, у ҳолда

$$P(A_1)+P(A_2)+\ \ldots\ +P(A_n)=1.$$

Хусусий ҳолда, агар A ва $\overline{A}$ ҳодисалар ўзаро қарама-қарши ҳодисаларни ифодаласа, у ҳолда

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Бу теоремага кейинроқ мисол кўрамиз.

2. **Шартли эҳтимоллар. Ҳодисаларнинг боғлиқсизлиги.** Ҳодисаларнинг эҳтимолини аниқлаш асосида бирор S шартлар комплекси ётишини айтган эдик. Агар $P(A)$ эҳтимолни ҳисоблашда S шартлар комплексидан бошқа ҳеч қандай шартлар талаб қилинмаса бундай эҳтимол, шартсиз эҳтимол дейилади. Кўп ҳолларда A ҳодисанинг эҳтимолини бирор B ҳодиса ($P(B)>0$ деб фараз қилинади) рўй берган деган шартда ҳисоблашга тўғри келади. Бундай эҳтимол *шартли эҳтимол* дейилади ва $P(A\ B)$ каби белгиланади. Агар иккита A ва B ҳодисадан бирининг эҳтимоли иккинчисининг рўй бериши ёки рўй бермаслиги натижасида ўзгармаса, у ҳолда бу ҳодисалар *ўзаро боғлиқсиз ҳодисалар* дейилади, акс ҳолда бу ҳодисалар *ўзаро боғлиқ ҳодисалар* дейилади.

Масалан, оқ ва қора шарлар солинган яшикдан олинган биринчи шар унга қайта солинса, иккинчи марта олинган шарнинг оқ бўлиш эҳтимоли биринчи олинган шарнинг оқ ёки қора бўлишига боғлиқ эмас. Шунинг учун биринчи ва иккинчи шар олиш натижалари ўзаро боғлиқсиз бўлади.

Аксинча, агар биринчи олинган шар яшикка қайта солинмаса, у ҳолда иккинчи марта шар олинишидаги натижа биринчи марта шар олиш натижасига боғлиқ равишда ўзгаради, чунки биринчи марта шар олиниши натижасида яшикдаги шарларнинг состави ўзгаради. Бу ерда биз боғлиқ ҳодисалар мисолига эгамиз.

Шартли эҳтимоллар учун қабул қилинган белгилашлардан фойдаланиб, A ва B ҳодисаларнинг ўзаро боғлиқсиз бўлиши шартини

$$P(A;B) = P(A)$$

ёки

$$P(B;A) = P(B)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

3. Ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремаси. Иккита боғлиқ ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли улардан биринчисининг эҳтимолини иккинчисининг биринчиси рўй берган деган шарт остидаги шартли эҳтимолига кўпайтирилганига тенг ва аксинча, яъни

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B\ A),$$
$$P(A\cdot B) = P(B)\cdot P(A\ B).$$

Хусусий ҳолда, агар A ва B ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаса, уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B).$$

4. Биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси. Иккита биргаликда бўлган A ва B ҳодисадан ҳеч бўлмаганда бирининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимоллари йиғиндисидан уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимолининг айирилганига тенг:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Агар A ва B ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда ушбу формула ўринли бўлади:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B);$$

1-масала. Яшикда 55 та шар бор, улардан 20 таси қизил, 12 таси кўк ва 18 таси оқ. Таваккалига битта шар олинди, унинг рангли (қизил ёки кўк) шар бўлиш эҳтимолини топинг.

△. Рангли шар чиқиши ё қизил шар, ёки кўк шар чиқишини билдиради. Қизил шар чиқиш (*А* ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(A) = \frac{20}{50} = 0{,}4.$$

Кўк шар чиқиш (*В* ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(B) = \frac{12}{50} = 0{,}24.$$

А ва *В* ҳодисалар биргаликда эмас (бир рангли шар чиқиши бошқа рангли шар чиқишини йўққа чиқаради), шунинг учун биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларининг қўшиш теоремасини қўлланиш мумкин.

Рангли шар чиқиш ($A + B$ ҳодиса) эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}24 = 0{,}64. \blacktriangle$$

2-масала. Институтнинг консультация пунктига *А*, *В* ва *С* шаҳарлардан контрол ишлар солинган пакетлар келади. *А* шаҳардан пакет олиниш эҳтимоли 0,5 га, *В* шаҳардан пакет олиниш эҳтимоли эса 0,3 га тенг. Навбатдаги пакетнинг *С* шаҳардан келиш эҳтимолини топинг.

△. „Пакет *А* шаҳардан келган“, „Пакет *В* шаҳардан келган“ ва „Пакет *С* шаҳардан келган“ ҳодисалари тўла группа ҳосил қилади, шунинг учун бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг:

$$0{,}5 + 0{,}3 + p = 1.$$

Бу ердан изланаётган эҳтимол:

$$p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2. \blacktriangle$$

3-масала. Яшикда 15 та шар бўлиб, улардан 5 таси қизил рангда, қолганлари эса бошқа рангда. Таваккалига олинган 3 та шарнинг ҳеч бўлмаганда биттаси қизил бўлиш (*А* ҳодиса) эҳтимолини топинг.

△. *А* ҳодиса (олинган 3 та шардан ҳеч бўлмаганда биттаси қизил рангда) ва $\overline{A}$ ҳодиса (олинган 3 та шарнинг биттаси ҳам қизил рангда эмас) қарама-қарши ҳодисалардир, шунинг учун

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

(қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг).

Бундан

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

$\overline{A}$ ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли классик таърифга кўра:

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91} \cdot ▲$$

Изланаётган эҳтимол:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91} \cdot ▲$$

34. Пул-буюм лотереясида 1000 та билетли ҳар бир серияга 120 та пул ютуғи ва 80 та буюм ютуғи тўғри келади. Битта лотереяси бор кишига пул ютуғи ёки буюм ютуғи, умуман ютуқ чиқиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = 0{,}20$.

35. Мерганнинг битта ўқ узишда 10 очко уриш эҳтимоли 0,15 га, 9 очко уриш эҳтимоли 0,35 га, 8 ёки ундан кам очко уриш эҳтимоли 0,5 га тенг. Мерганнинг битта ўқ узишда камида 9 очко уриш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = 0{,}5$.

36. 10 та деталли партияда 8 та стандарт деталь бор. Таваккалига олинган иккита деталдан камида биттаси стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = \frac{44}{45}$.

37. Учта яшикнинг ҳар бирида 10 тадан деталь бор. Биринчи яшикда 9 та, иккинчи яшикда 8 та, учинчи яшикда 7 та стандарт деталь бор. Ҳар бир яшикдан таваккалига биттадан деталь олинади. Олинган учала деталь стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = 0{,}504$.

38. Агар A ҳодиса B ҳодисани эргаштирса, у ҳолда $P(B) \geqslant P(A)$ бўлишини исботланг.

39. Яшикда 10 та оқ ва 5 та қора шар бор. Яшикдан икки марта таваккалига биттадан шар олинади. Олинган шарлар яшикка қайтариб солинмайди. Агар биринчи олинган шар қора бўлса (A ҳодиса), иккинчи олинган шар оқ бўлиш (B ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P(B/A) = \frac{5}{7}$.

40. Яшикда 6 та шар бор, улардан учтаси қизил рангда. Яшикдан таваккалига 2 та шар олинди. Иккала шарнинг ҳам қизил рангда бўлиш эҳимолини топинг.

Жавоб. $p = 0{,}2$.

41. Иккита мерган биттадан ўқ узишди. Биринчи мерганнинг нишонга текказиш эҳтимоли 0,7 га, иккинчисиники эса 0,6 га тенг. Мерганлардан ақалли биттасининг нишонга текказиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. 0,88.

42. Студент имтиҳонга программадаги 25 та саволдан 20 тасини билиб келди. Имтиҳон олувчи студентга 3 та савол берди. Студентнинг учала саволни ҳам билиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{57}{115}$.

43. Студент имтиҳон билетларидан баъзиларини билмайди. Студент учун қайси ҳолда у билмайдиган билетни олиш эҳтимоли кичик бўлади: биринчи бўлиб олгандами ёки энг охирида олгандами?

Жавоб. Иккала ҳолда ҳам эҳтимоллар бир хил.

44. Учта ўйин соққаси ташланди. Камида битта соққада 6 очко тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{91}{216}$. ■

5-§. Тўла эҳтимол формуласи. Байес формуласи

Мураккаб ҳодисаларнинг эҳтимолларини ҳисоблашда кўпинча бу ҳодисаларга қўшиш ва кўпайтириш теоремаларини бирга татбиқ қилиб ҳосил қилинган формулалардан фойдаланишга тўғри келади. Қуйида ана шундай муҳим формулаларнинг баъзилари билан танишиб ўтамиз.

1. **Тўла эҳтимол формуласи.** Фараз қилайлик, A ҳодиса n та жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган H_1; H_2, ..., H_n ҳодисалар (гипотезалар)нинг биттаси ва фақат биттаси билангина рўй бериши мумкин бўлсин, бошқача қилиб айтганда:

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n \quad (A\text{-мураккаб ҳодиса}).$$

Бу ерда $AH_i \cap AH_j = V\ (i \neq j)$, у ҳолда биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремасига асосан:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n).$$

Кўпайтириш теоремасига кўра $P(AH_i) = P(H_i)\cdot P(A/H_i)$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\dots+P(H_n)P(A/H_n)$$

ёки

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i).$$

Бу тенглик *тўла эҳтимол формуласи* дейилади. Тўла эҳтимол формуласидан фойдаланиб, Байес формуласи ёки гипотезалар эҳтимоллари формуласи деб аталувчи муҳим формулани ҳосил қилиш мумкин.

2. Байес формуласи. Биргаликда бўлмаган H_1, H_2, . . . , H_n ҳодисаларнинг (гипотезаларнинг) тўла группаси берилган бўлиб, тажрибани ўтказишга қадар уларнинг ҳар бирининг $P(H_i)$, $i=\overline{1,n}$ эҳтимоллари тайин қийматга эга бўлсин. Тажриба натижасида A ҳодиса рўй берди деган шарт остида H_i $(i=\overline{1,n})$ гипотезаларнинг эҳтимоллари тажрибадан сўнг қандай бўлади?

H_i ва A ҳодисаларнинг кўпайтмаси учун ушбу

$$P(AH_i)=P(A)\,P(H_i/A)=P(H_i)\,P(A/H_i)$$

формуланинг ўринлилигидан

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\,P(A/H_i)}{P(A)}$$

муносабатга эга бўламиз, бу ерда тўла эҳтимол формуласини қўлласак, ушбу *Байес формуласи* деб аталувчи формулани ҳосил қиламиз:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(H_k)\,P(A/H_k)}.$$

Бу формулалар ёрдамида ечиладиган масалаларни кўрайлик.

1-масала. Омборга 360 та маҳсулот келтирилди. Булардан 300 таси 1-корхонада тайёрланган бўлиб, уларнинг 250 таси яроқли маҳсулот; 40 таси 2-корхонада тайёрланган бўлиб, уларнинг 30 таси яроқли ҳамда 20 таси 3-корхонада тайёрланган бўлиб, улардан 10 таси яроқли. Таваккалига олинган маҳсулотнинг яроқли бўлиш эҳтимолини топинг.

△. Таваккалига олинган маҳсулот учун қуйидаги гипотезалар ўринли бўлади:

H_1 гипотеза — маҳсулотнинг 1-корхонада тайёрланган бўлиши;

H_2 гипотеза — маҳсулотнинг 2-корхонада тайёрланган бўлиши;

H_3 гипотеза — маҳсулотнинг 3-корхонада тайёрланган бўлиши.

Уларнинг эҳтимоллари қуйидагича бўлади:

$$P(H_1)=\frac{5}{6};\quad P(H_2)=\frac{1}{9};\quad P(H_3)=\frac{1}{18}.$$

Агар олинган маҳсулотнинг яроқли бўлишини A ҳодиса деб белгиласак, у ҳолда бу ҳодисанинг турли гипотеза шартлари остидаги эҳтимоллари қуйидагича бўлади:

$$P(A/H_1)=\frac{5}{6};\quad P(A/H_2)=\frac{3}{4};\quad P(A/H_3)=\frac{1}{2}.$$

Юқорида топилганларни тўла эҳтимол формуласига қўйиб, изланаётган ҳодиса эҳтимолини топамиз:

$$P(A)=P(H_1)\,P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2)+P(H_3)\,P(A/H_3)=$$
$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}=\frac{29}{36}.\blacktriangle$$

2-масала. Икки мерган нишонга биттадан ўқ узади. Биринчи мерганнинг ўқи нишонга 0,8 эҳтимол билан, иккинчи мерганники эса 0,4 эҳтимол билан тегади. Ўқ узилгандан сўнг нишонга битта ўқ текканлиги (A ҳодиса) маълум бўлди, бу ўқни биринчи мерган узган бўлиши эҳтимолини топинг.

$\triangle$. Тажриба ўтказишдан олдин қуйидаги гипотезаларни қўямиз:

H_1 — биринчи мерган отган ўқ ҳам, иккинчи мерган отган ўқ ҳам нишонга тегмайди;

H_2 — иккала мерганнинг отган ўқи ҳам нишонга тегади;

H_3 — биринчи мерганнинг отган ўқи нишонга тегади, иккинчисиники эса тегмайди;

H_4 — биринчи мерганнинг отган ўқи нишонга тегмайди, иккинчисиники эса тегади.

Гипотезалардан биттаси ва фақат биттаси тажриба натижасида албатта рўй беради, яъни H_1, H_2, H_3, H_4 лар боғлиқ бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади.

Бу гипотезаларнинг тажрибадан олдинги эҳтимоллари:

$$P(H_1)=0{,}2\cdot0{,}6=0{,}12,$$
$$P(H_2)=0{,}8\cdot0{,}4=0{,}32,$$
$$P(H_3)=0{,}8\cdot0{,}6=0{,}48,$$
$$P(H_4)=0{,}2\cdot0{,}4=0{,}08.$$

Бу гипотезаларда кузатилаётган A ҳодисанинг шартли эҳтимоллари қуйидагиларга тенг: $P(A/H_1)=0$, $P(A/H_2)=0$, $P(A/H_3)=1$, $P(A\ H_4)=1$.

Тажрибадан кейин (A ҳодиса рўй берганидан кейин) H_1, H_2 гипотезалар рўй бермаслиги маълум бўлади.

H_3 ва H_4 гипотезаларнинг тажрибадан кейинги эҳтимоллари Байес формуласига кўра қуйидагича:

$$P(H_3/A) = \frac{0,48\cdot 1}{0,48\cdot 1 + 0,08\cdot 1} = \frac{6}{7};$$

$$P(H_4/A) = \frac{0,08\cdot 1}{0,48\cdot 1 + 0,08\cdot 1} = \frac{1}{7}.$$

Демак, нишонга теккан ўқнинг биринчи мерганга тегишли бўлиш эҳтимоли $\frac{6}{7}$ экан. ▲

□. **45.** Спортчилар группасида 20 чанғичи, 6 велосипедчи ва 4 югурувчи бор. Саралаш нормасини бажариш эҳтимоли чанғичи учун 0,9 га, велосипедчи учун 0,8 га, югурувчи учун 0,75 га тенг. Таваккалига ажратилган спортчининг нормани бажара олиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. 0,86.

46. Биринчи яшикда 10 та деталь бўлиб, улардан 15 таси стандарт, иккинчи яшикда 30 та деталь бўлиб, улардан 24 таси стандарт, учинчи яшикда 10 та деталь бўлиб, улардан 6 таси стандарт. Таваккалига танланган яшикдан таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{43}{60}$.

47. 1-масала шартида, агар таваккалига олинган маҳсулот яроқли эканлиги маълум бўлса, уни 1-корхонада тайёрланган бўлиш эҳтимолини топинг.

48. Ичида 2 та шар бўлган идишга битта оқ шар солиниб, шундан кейин идишдан таваккалига битта шар олинган. Шарларнинг дастлабки таркиби (ранги бўйича) ҳақида мумкин бўлган барча гипотезалар тенг имкониятли бўлса, у ҳолда олинган шарнинг оқ рангда бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{2}{3}$.

49. Бензоколонка жойлашган шосседан ўтадиган юк машиналари сонининг ўша шосседан ўтадиган енгил машиналар сонига нисбати 3 : 2 каби. Юк машинасининг бензин олиш эҳтимоли 0,1 га тенг, енгил машина учун бу эҳтимол 0,2 га тенг. Бензоколонка ёнига бензин олиш учун машина келиб тўхтади. Унинг юк машина бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{3}{7}$. ■

6-§. Боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлиги. Бернулли формуласи

1. Агар бирор A ҳодисанинг рўй бериш ёки рўй бермаслигини кузатиш учун бир нечта тажрибалар ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш ёки рўй бермаслик эҳтимоли қолган тажрибаларнинг натижаларига боғлиқ бўлмаса (боғлиқ бўлса), у ҳолда бу тажрибалар A ҳодисага нисбатан *боғлиқ бўлмаган* (боғлиқ бўлган) *тажрибалар кетма-кетлигини* ташкил этади дейилади.

Масалан, яшикда s та оқ ва l та қора шар бўлсин. Шу яшикдан бир неча марта биттадан шар олиш тажрибалари кетма-кетлигини кўрайлик. Бунда ҳар бир тажрибадан сўнг олинган шар яшикка қайтариб солинса (қайтариб солинмаса), бу тажрибалар кетма-кетлиги бир-бирига боғлиқ бўлмайди (бир-бирига боғлиқ бўлади).

Боғлиқ бўлмаган n та тажриба ўтказилаётган бўлиб, ҳар бир тажрибада кузатилаётган A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ва рўй бермаслик эҳтимоли $q = 1 - p$ бўлсин. Бу ҳолда кузатилаётган A ҳодисанинг n та тажрибада k марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k)$ қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

бу ерда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Бу формула *Бернулли формуласи* дейилади.

Ҳодисанинг рўй беришлар сонини μ десак, у ҳолда

а) $0 \leqslant \mu \leqslant k-1$ (k дан кам марта);

б) $k+1 \leqslant \mu \leqslant n$ (k дан кўп марта);

в) $k \leqslant \mu \leqslant n$ (камида k марта)

г) $0 \leqslant \mu \leqslant k$ (кўпи билан k марта)

д) $k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2$ (камида k_1, кўпи билан k_2 марта)

ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоли ушбу формулалар бўйича топилади:

а) $P_n\{0 \leqslant \mu \leqslant k-1\} = \sum\limits_{m=0}^{k-1} P_n(m)$,

б) $P_n\{k+1 \leqslant \mu \leqslant n\} = \sum\limits_{m=k+1}^{n} P_n(m)$,

в) $P_n\{k \leqslant \mu \leqslant n\} = \sum\limits_{m=k}^{n} P_n(m)$, г) $P_n\{0 \leqslant \mu \leqslant k\} = \sum_{m=0}^{k} P_n(m)$,

д) $P_n\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\} = \sum_{m=k_1}^{k_2} P_n(m)$.

Булардаги $P_n(m)$ -- Бернулли формуласидир.

$P_n(k)$ эҳтимоллар учун $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$ муносабат ўринли бўлишини кўриш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

$C_n^k p^k q^{n-k}$ ифода $(px+q)^n$ бином ёйилмасидаги x^k қатнашган ҳаднинг коэффициенти бўлгани учун $P_n(k)$ ларни *эҳтимолнинг биномиал тақсимот қонуни* дейилади.

2. Ҳодиса рўй беришининг энг катта эҳтимолли сони. Тайинланган n да $P_n(k)$ эҳтимол k нинг функцияси экани равшан.

Агар $P_n(k_0) \geqslant P_n(k)$ $(k \neq k_0)$ бўлса, у ҳолда k_0 сон ҳодиса рўй беришининг *энг катта эҳтимолли сони* дейилади. Ушбу

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}$$

нисбатини текширишдан қуйидаги натижага келинади:

энг катта эҳтимолли k_0 сон қуйидаги қўш тенгсизликдан аниқланади:

$$np - q \leqslant k_0 < np + p,$$

бунда:

а) агар $np - q$ сон каср бўлса, у ҳолда битта энг катта эҳтимолли k_0 сон мавжуд бўлади;

б) агар $np - q$ сон бутун бўлса, у ҳолда иккита энг катта эҳтимолли k_0 ва $k_0 + 1$ сонлар мавжуд бўлади.

в) агар np бутун сон бўлса, у ҳолда энг катта эҳтимолли сон $k_0 = np$ бўлади.

Изоҳ. n етарлича катта бўлганда энг катта эҳтимолли сон k_0 нинг қиймати $k_0 \approx np$ дан аниқланади.

Қуйидаги масалаларнинг ечилиши билан танишайлик.

1-масала. Чигитнинг унувчанлиги 80% бўлса, экилган 4 та чигитдан: а) учтасининг униб чиқиш; б) ҳеч бўлмаганда иккитасининг униб чиқиш эҳтимолини топинг.

△. а) Шартга кўра $n = 4$; $k=3$; $p = 0,8$; $q = 0,2$. Бернулли формуласига кўра:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

б) A ҳодиса экилган 4 та чигитдан 2 таси ёки 3 таси, ёки 4 таси униб чиқишини, яъни ҳеч бўлмаганда иккитасининг униб чиқишини билдирсин. Эҳтимолларни қўшиш теоремасига кўра:

$$P_4(A) = P_4 \text{ (ёки 2, ёки 3, ёки 4)} = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4).$$

$P_4(3)$ эҳтимол (а) пунктда ҳисобланган;

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536;$$

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096.$$

Демак, $P(A) = 0,9728$.▲

2-масала. Битта деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли $p = 0,05$ бўлсин. Ихтиёрий олинган 10 000 деталь ичида яроқсиз деталларнинг сони 50 тадан кўп бўлмаслик эҳтимолини топинг.

△. μ — яроқсиз деталлар сони бўлсин.

$$\mu : 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 50.$$

$$P_{10000}\{0 \leqslant \mu \leqslant 50\} = \ldots ?$$

$$P_{10000}\{0 \leqslant \mu \leqslant 50\} = \sum_{k=0}^{50} P_n(k) = \sum_{k=0}^{50} C_{10000}^k (0,05)^k (0,95)^{10000-k}$$

(бундан кейинги ҳисоблаш анча қийин, шунинг учун уларни келтирмаймиз). ▲

3-масала. Техник контрол бўлими 24 та деталдан иборат партияни текширмоқда. Деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,6 га тенг. Стандарт деб тан олинадиган деталларнинг энг катта эҳтимолли сонини топинг.

△. Шартга кўра $n = 24$; $p = 0,6$; $q = 0,4$. Стандарт деб тан олинган деталларнинг энг катта эҳтимолли сонини қуйидаги қўш тенгсизликдан топамиз:

$$np - q \leqslant k_0 < np + p.$$

$np - q = 24 \cdot 0,6 - 0,4 = 14$ бутун сон бўлгани учун энг катта эҳтимолли сон иккита:

$$k_0 = 14 \text{ ва } k_0 + 1 = 15.\ ▲$$

□ **50.** Боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлигига мисоллар келтиринг.

51. Чигитнинг унувчанлиги 70% бўлса, экилган 5 та чигитдан: а) учтасининг; б) кўпи билан учтасининг; с камида учтасининг униб чиқиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. а) 0,3087; б) 0,4717; с) 0,8370.

52. Икки тенг кучли рақиб шахмат ўйнамоқда. Қайси эҳтимол каттароқ:

а) рақиблардан бирининг икки партиядан биттасини ютиш эҳтимолими ёки тўрт партиядан иккитасини ютиш эҳтимолими?

б) тўрт партиядан камида иккитасини ютиш эҳтимолими ёки беш партиядан камида учтасини ютиш эҳтимолими? Дуранг натижалар эътиборга олинмайди.

Жавоб. а) $P_2(1) > P_4(2)$; б) $P_4(\mu \geqslant 2) > P_5(\mu \geqslant 3)$.

53. Икки мерган бир вақтда нишонга ўқ узмоқда. Битта ўқни узишда нишонга теккизиш эҳтимоли биринчи мерган учун 0,8 га, иккинчи мерган учун 0,6 га тенг. Агар бир йўла 15 марта ўқ узиладиган бўлса, иккала мерганнинг ҳам нишонга теккизишларининг энг катта эҳтимолли сонини топинг.

Жавоб. 7

54. Агар 49 та боғлиқ бўлмаган тажрибада ҳодиса рўй беришининг энг катта эҳтимолли сони 30 га тенг бўлса, тажрибаларнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ни топинг.

Жавоб. $0,60 < p \leqslant 0,62$. ■

7-§. Асимптотик формулалар

Юқоридаги 6- § да келтирилган мисоллардан кўринадики, тажрибалар сони n етарлича катта бўлганда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ эҳтимолни ҳисоблаш катта қийинчиликларга олиб келади. Бундай ҳолларда ҳисоблашни осонлаштирувчи формулаларга, ҳатто улар изланаётган эҳтимолнинг тақрибий қийматини берса ҳам эҳтиёж туғилади. Бундай формулалар асимптотик формулалар деб аталади. Ушбу параграфда шундай формулалар билан танишамиз.

1. **Муавр—Лапласнинг локал теоремаси.** Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p\,(0 < p < 1)$ га тенг бўлган n та боғлиқсиз тажрибада ҳодисанинг k марта рўй бериш эҳтимоли (n етарлича катта бўлганда) тақрибан

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x) \qquad (1)$$

га тенг. Бу ерда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

$\varphi(x)$ функциянинг қийматлар жадвали 1-иловада келтирилган ($\varphi(-x) = \varphi(x)$ — жуфт функция).

(1) формула Муавр — Лапласнинг локал формуласидир.

2. Пуассон формуласи. Агар тажрибалар сони етарлича катта бўлиб, ҳар бир тажрибада ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p жуда кичик бўлса, у ҳолда

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{2}$$

бу ерда $\lambda = np$. (2) — Пуассон формуласидир.

3. Муавр — Лапласнинг интеграл формуласи. Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p $(0 < p < 1)$ га тенг бўлган n та боғлиқсиз тажрибада ҳодисанинг камида k_1 марта ва кўпи билан k_2 марта рўй бериш эҳтимоли (n етарлича катта бўлганда) тақрибан

$$P_n(k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x') \tag{3}$$

га тенг. Бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Лаплас функцияси бўлиб, бунда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

x нинг $(0 \leqslant x \leqslant 5)$ мусбат қийматлари учун Лаплас функциясининг қийматлари жадвали 2-иловада келтирилган. $x > 5$ қийматлар учун $\Phi(x) = 0{,}5$ деб олинади. ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$, яъни $\Phi(x)$ — тоқ функция.)

Қуйидаги масалаларнинг ечилиши билан танишайлик.

1-масала. Корхонада ишлаб чиқарилган деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли 0,005 га тенг. 10 000 та деталдан иборат партиядаги яроқсиз деталлар сонининг 40 та бўлиш эҳтимолини топинг.

△. Масаланинг шартига кўра $n = 10\ 000$;

$$k = 40; \quad p = 0{,}005; \quad q = 0{,}995.$$

$n = 10\ 000$ етарлича катта сон бўлгани учун Муавр — Лапласнинг локал формуласидан фойдаланамиз:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

бу ерда

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

x нинг қийматини топамиз:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 10\,000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \approx -\frac{10}{7{,}05} = -1{,}42.$$

Жадвалдан $\varphi(-1{,}42) = \varphi(1{,}42) = 0{,}1456$ ни топамиз. Демак, изланаётган эҳтимол:

$$P_{10\,000}(40) \approx \frac{1}{7{,}05} \cdot 0{,}1456 \approx 0{,}0206. \blacktriangle$$

2-масала. Дарслик 200 000 нусхада босиб чиқарилган. Дарсликнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,00005 га тенг. Бутун тиражда роса бешта брак китоб бўлиш эҳтимолини топинг.

△. Шартга кўра $n = 200\ 000$, $p = 0{,}00005$, $k = 5$. n сон катта ва p эҳтимол кичик, шу сабабли Пуассон формуласидан фойдаланамиз:

$$P_n(k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

бу ерда $\lambda = np$, λ нинг қийматини топамиз:

$$\lambda = 200\ 000 \cdot 0{,}00005 = 10.$$

Демак, изланаётган эҳтимол:

$$P_{20\,0000}(5) = \frac{10^5}{5!} e^{-10} = \frac{10^5}{120} \cdot 0{,}000045 \approx 0{,}0375. \blacktriangle$$

3-масала. Таваккалига олинган пилланинг яроқсиз чиқиш эҳтимоли 0,2 га тенг. Тасодифан олинган 400 та пилладан 70 тадан 130 тагача яроқсиз бўлиш эҳтимолини топинг.

△. Масала шартига кўра:

$$p = 0{,}2;\ q = 0{,}8;\ n = 400;\ k_1 = 70;\ k_2 = 130.$$

Муавр—Лапласнинг интеграл формуласидан фойдаланамиз:

$$P_n(k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

x' ва x'' ларнинг қийматларини топамиз:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -\frac{10}{8} = -1{,}25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 - 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{55}{8} = 6{,}25.$$

Жадвалдан топамиз:

$$\Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}39435,$$

$$\Phi(6{,}25) = 0{,}5, \text{ чунки } x > 5 \text{ да } \Phi(x) = 0{,}5.$$

Демак, изланаётган эҳтимол:

$$P_{400}(70 \leqslant \mu \leqslant 130) = \Phi(6{,}25) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}39435 = 0{,}89435. \blacktriangle$$

□. **55.** Ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг бўлса, унинг 400 та тажрибадан 80 тасида рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоб $P_{400}(80) \approx 0{,}04986$.

56. Ўғил бола туғилиш эҳтимоли 0,51 га тенг. Туғилган 100 чақалоқнинг 50 таси ўғил бола бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{100}(50) \approx 0{,}04565$.

57. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p = 0{,}5$ га тенг бўлган 10 000 та тажриба ўтказилади. Шунча тажрибада A ҳодиса рўй беришининг энг катта эҳтимолли сонининг эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{10\,000}(5000) \approx 0{,}007978$.

58. Ишчи аёл 800 та урчуққа хизмат кўрсатади. Δt вақт оралиғида ҳар бир урчуқда йигирилаётган ипнинг узилиш эҳтимоли 0,005 га тенг. Узилишларнинг энг катта эҳтимолли сонини ва бу соннинг эҳтимолини топинг.

Жавоб. $k_0 = 4$, $P_{800}(4) = 0{,}1954$.

59. Бир соат давомида истаган абонентнинг коммутаторга телефон қилиш эҳтимоли 0,01 га тенг. Телефон станцияси 300 абонентга хизмат қилади. Бир соат давомида 4 та абонентнинг телефон қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{300}(4) \approx 0{,}169$.

60. Ҳар бир отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,001 га тенг. Агар 5000 та ўқ отилган бўлса, камида 2 та ўқнинг нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{5000}(\mu \geqslant 2) \approx 0{,}9596$.

61. Факультет студентларининг имтиҳон комиссиясидан „4“ ва „5“ баҳолар билан ўтиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Таваккалига олинган 400 студентдан 34 тадан 55 тагачаси ҳеч бўлмаганда битта фандан „4“ дан паст баҳо олиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{400}(34 \leqslant \mu \leqslant 55) = 0{,}8351$.

62. Ҳодисанинг 2 100 та боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,7 га тенг. Ҳодисанинг: а) камида 1470 марта ва кўпи билан 1500 марта; б) камида 1470 марта; в) кўпи билан 1469 марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоб. а) $P_{2100}(1470 \leqslant \mu \leqslant 1500) \approx 0{,}4236$;
б) $P_{2100}(1470 \leqslant \mu \leqslant 2100) \approx 0{,}5$; в) $P_{2100}(0 \leqslant \mu \leqslant 1469) \approx \approx 0{,}5$.

8-§. Муавр — Лаплас интеграл теоремасининг татбиқи

Фараз қилайлик, Муавр — Лапласнинг интеграл теоремасидаги барча шартлар бажарилган бўлсин. $\frac{m}{n}$ нисбий частотанинг ўзгармас p эҳтимолидан четлашишининг абсолют қиймати бўйича аввалдан берилган $\varepsilon > 0$ сондан катта бўлмаслик эҳтимолини топиш масаласини кўрайлик. Ушбу

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

тенгликни эътиборга олсак, Муавр — Лапласнинг интеграл теоремасига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 2\lim_{n\to\infty} \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 1.$$

Бу муносабат Бернулли схемаси учун *катта сонлар қонуни* ёки *Бернулли теоремаси* дейилади. Бернулли теоремаси эҳтимоллар назариясининг асосий теоремаларидан ҳисобланиб, бу теорема ёрдамида кўпгина амалий масалалар ҳал қилинади.

Шундай қилиб, $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$ тенгсизликнинг рўй бериш эҳтимоли тақрибан Лаплас функциясининг $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ нуқтадаги қийматининг иккиланганига тенг экан:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Қуйидаги масалаларнинг ечилиши билан танишайлик.

1-масала. Тажриба танга ташлашдан иборат бўлсин. A — ташланган танганинг гербли томони билан тушиш ҳодисаси бўлсин. Тангани 400 марта ташланганда A ҳодиса нисбий частотаси $\frac{m}{400}$ нинг $\frac{1}{2}$ эҳтимолдан абсолют қиймат бўйича четлашиши 0,08 дан кичик бўлиш эҳтимолини топинг.

△. Масаланинг шартига кўра $n = 400$, $p = q = \frac{1}{2}$. $\varepsilon = 0{,}08$. У ҳолда юқоридаги формулага кўра:

$$P\left\{\left|\frac{m}{400} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}08\right\} \approx 2\Phi\left(0{,}08\cdot\sqrt{\frac{400}{\frac{1}{4}}}\right) = 2\Phi\,(3{,}2).$$

Жадвалдан $\Phi(3,\ 2) = 0{,}49931$ топилади.

Демак,

$$P\left\{\left|\frac{m}{400} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}08\right\} \approx 0{,}99862. \ \blacktriangle$$

2-масала. Қоракўл терининг ярокциз чиқиш эҳтимоли $p = 0{,}09$ га тенг бўлсин. Нечта қоракўл тери олинганда қоракўлнинг яроқсиз чиқиш нисбий частотасининг 0,09 эҳтимолдан фарқи абсолют қиймати жиҳатидан 0,02 дан кичик бўлиш эҳтимоли 0,9962 га тенг бўлади.

△. Шартга кўра $p = 0{,}09$; $q = 0{,}91$; $\varepsilon = 0{,}02$,

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0{,}09\right| < 0{,}02\right\} = 0{,}9962.$$

Бу ифодадан n ни топамиз. Муавр — Лапласнинг интеграл формуласига кўра

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0{,}09\right| < 0{,}02\right\} = 2\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}09\cdot 0{,}91}}\right) \approx$$

$$\approx 2\Phi\left(0{,}071\sqrt{n}\right)$$

бўлгани учун, $2\Phi(0{,}071\sqrt{n}) = 0{,}9982$ ёки

$$\Phi(0{,}071\sqrt{n}) = 0{,}4981 \text{ бўлади.}$$

Жадвалдан $\Phi(2{,}9) = 0{,}4981$ эканини топамиз.

Демак, $0{,}071\sqrt{n} = 2{,}9$; $n = 1664$. ▲

3-масала. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,25 га тенг. 600 та тажриба ўтказилганда 0,92 эҳтимол билан ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси ҳодиса эҳтимолидан қанчагача четлашиши мумкин?

△. Шартга кўра $p = 0{,}25$; $q = 0{,}75$; $n = 600$.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 0{,}92.$$

Бундан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$P\left\{\left|\frac{m}{600} - 0{,}25\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0{,}25\cdot 0{,}75}}\right) = 0{,}92$$

ёки

$$\Phi(56{,}57\cdot\varepsilon) = 0{,}46.$$

Жадвалдан $\Phi(1{,}755) = 0{,}46$ эканини топсак,

$$56{,}57\cdot\varepsilon = 1{,}755 \text{ бўлади.}$$

Демак,

$$\varepsilon = 0{,}031.$$ ▲

□. **63.** Ўзаро боғлиқ бўлмаган 625 та тажрибанинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,8 га тенг. Ҳодисанинг рўй бериш нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четлашиши абсолют қиймати бўйича 0,04 дан катта бўлмаслиқ эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P\left\{\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|<0{,}04\right\}\approx 0{,}9876$.

64. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,5 га тенг. Ҳодиса рўй бериш нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четлашиши абсолют қиймати бўйича 0,02 дан ортиқ бўлмаслигининг 0,7698 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун нечта тажриба ўтказиш керак?

Жавоб. $n=900$.

65. Ўйин соққасини ушбу

$$\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|\leqslant 0{,}01$$

тенгсизликнинг эҳтимоли қарама-қарши тенгсизликнинг эҳтимолидан кичик бўлмаслиги учун неча марта ташлаш лозим (бу ерда m ўйин соққасини n марта ташлашда беш очко чиқиш сони)?

Жавоб. $n\geqslant 632$.

66. Техник контрол бўлими 900 та деталнинг стандартга мувофиқлигини текширади. Деталнинг стандартга мувофиқ бўлиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Шундай ε мусбат сон топингки, деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли нисбий частотасининг унинг эҳтимоли 0,9 дан четлашишининг абсолют қиймати ε дан катта бўлмаслигини 0,9544 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлсин.

Жавоб. $\varepsilon=0{,}02$.

67. Техник контрол бўлими 475 та буюмнинг яроқлигини текширади. Буюмнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,05 га тенг. Текширилган буюмлар орасида браклари сони m нинг ётадиган чегараларини 0,9426 эҳтимол билан топинг.

Жавоб. $14\leqslant m\leqslant 32$. ■

XI БОБ

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

1- §. Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни. Биномиал ва Пуассон қонунлари

Тасодифий миқдор деб аввалдан номаълум бўлган ва олдиндан инобатга олиб бўлмайдиган тасодифий сабабларга боғлиқ бўлган ҳамда синов (тажриба) натижасида мумкин бўлган қийматлардан биттасини қабул қилувчи миқдорга айтилади.

Тасодифий миқдорларнинг икки хилини кўрамиз:

1) Дискрет тасодифий миқдор.

2) Узлуксиз тасодифий миқдор.

Тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари алоҳида-алоҳида олинган миқдорлардан (масалан, бутун ва рационал сонлардан) иборат бўлса, у дискрет тасодифий миқдор дейилади.

Агар тасодифий миқдор (a; b) ёки $(-\infty; +\infty)$ оралиқдаги ихтиёрий қийматни қабул қила олса, у *узлуксиз* дейилади.

Тасодифий миқдорларни X, Y, Z ҳарфлари билан, уларнинг қабул қиладиган қийматларини x, y, z лар билан белгилаймиз. Масалан, X тасодифий миқдор 5 та қийматни қабул қилади дейилса, буни x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 каби ёзамиз. Аввал дискрет тасодифий миқдорлар устида тўхтаб ўтамиз.

Дискрет тасодифий миқдор берилган бўлиши учун унинг қабул қиладиган қийматлари ва бу қийматларни қабул қилиш эҳтимоллари кўрсатилиши керак. Дискрет тасодифий миқдорнинг *тақсимот қонуни* деб тасодифий миқдор қабул қиладиган қийматлар билан уларнинг эҳтимоллари орасидаги ўрнатилган мосликка айтилади. Масалан, n та қиймат қабул қилувчи тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини қуйидагича ёзиш мумкин:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

бу ерда $P\{x=x_i\}=p_i$ ва $p_1+p_2+\ \ldots\ +p_n=1$. Тақсимот қонунининг графиги *тақсимот кўпбурчаги* дейилади. Бу графикни ясаш учун $M_1(x_1,\ p_1)$, $M_2(x_2,\ p_2)$, ..., $M_n(x_n\ ,\ p_n)$ нуқталар тўғри бурчакли координаталар системасида ясалади ва улар тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирилади. Дискрет тасодифий миқдорнинг баъзи тақсимот қонунларини келтирамиз.

а) Биномиал тақсимот қонуни. Биз юқорида ҳар бир синовда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $P(A)=p$ ва рўй бермаслик эҳтимоли $P(\overline{A})=q=1-p$ бўлса, n та эркли синовда A ҳодисанинг роппа-роса k марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k)$ Бернулли формуласи ёрдамида топилишини кўрган эдик. A ҳодисанинг n та эркли синовда рўй беришлар сони X дискрет тасодифий миқдор бўлиб, унинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари 0, 1, 2, 3, ..., n бўлади.

Агар X тасодифий миқдор 0, 1, 2, ..., n қийматларни

$$P_n\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=\overline{0,\ n}$$

эҳтимол билан қабул қилса, бу тасодифий миқдор *биномиал тақсимотга эга* дейилади. Биномиал тақсимотни қуйидаги жадвал кўринишида ёзиш мумкин:

X	0	1	2	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

б) Пуассон тақсимот қонуни. Агар X тасодифий миқдор 0, 1, 2, ... қийматларни $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda>0$ эҳтимоллар билан қабул қилса, X тасодифий миқдор *Пуассон тақсимотига* эга дейилади. Пуассон тақсимоти жадвали қуйидагичадир:

X	0	1	2	3	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$	...

Баъзан Пуассон тақсимотини кам рўй берадиган ҳодисалар тақсимоти ҳам дейилади. Бу тақсимот қонунидан p етарли кичик ва n етарли катта бўлиб, $\lambda=np=\text{const}<10$ бўлганда фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

1-мисол. Экилган ҳар бир чигитнинг униб чиқиш эҳтимоли 0,8 га тенг бўлса, экилган 3 та чигитдан униб чиқишлар сонининг тақсимот қонунини тузинг.

△ Экилган ҳар бир чигит униб чиқиши ҳам, униб чиқмаслиги ҳам мумкин бўлгани сабабли экилган 3 та чигитдан униб чиқишлар сони X биномиал тақсимотга эга бўлган тасодифий миқдор бўлади. Тасодифий миқдор X нинг қабул қиладиган қийматлари $x_1=0$; $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$ бўлиб, бу қийматларни қабул қилиш эҳтимолларини Бернулли формуласи ёрдамида топамиз:

$n=3$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$ $k=0, 1, 2, 3$ бўлгани учун:

$$P_3(X=0)=C_3^0p^0q^3=(0{,}8)^0\cdot(0{,}2)^3=(0{,}2)^3=0{,}008,$$
$$P_3(X=1)=C_3^1pq^2=3\cdot(0{,}8)\cdot(0{,}2)^2=0{,}096,$$
$$P_3(X=2)=C_3^2p^2q=3\cdot(0{,}8)^2\cdot(0{,}2)=0{,}384,$$
$$P_3(X=3)=C_3^3p^3q^0=(0{,}8)^3.\ (0{,}2)^0=(0{,}8)^3=0{,}512.$$

Демак, экилган 3 та чигитдан униб чиқишлари сони X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидагича бўлади:

X	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

Текшириш:

$$\sum_{i=1}^{4}p_i=0{,}008+0{,}096+0{,}384+0{,}512=1. \blacktriangle$$

2-мисол. Лампочка заводида 10 000 та лампочка ишлаб чиқарилган. Ҳар қайси лампочканинг брак бўлиш эҳтимоли $p=0{,}0001$ га тенг. Бу лампочкалар ичидан таваккалига 4 та лампочка олинган. Яроқсиз лампочкалар сонининг тақсимот қонунини ёзинг.

△. Лампочкалар сони катта ва брак бўлиш эҳтимоли кичик бўлганлиги учун Пуассон формуласидан фойдаланиш қулай. $n=10\,000$, $p=0{,}0001$, $\lambda=n\cdot p=1$, $k=0, 1, 2, 3, 4$ бўлгани учун Пуассон формуласига асосан:

$$P_4(0)=\frac{\lambda^0e^{-\lambda}}{0!}=e^{-1};$$
$$P_4(1)=\frac{e^{-1}}{1!}=e^{-1};$$
$$P_4(2)=\frac{e^{-1}}{2!}=\frac{1}{2}e^{-1};$$
$$P_4(3)=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{1}{6}e^{-1};$$
$$P_4(4)=\frac{1}{24}e^{-1}.$$

Демак қаралаётган тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни

X	0	1	2	3	4
P	$P_4(0)$	$P_4(1)$	$P_4(2)$	$P_4(3)$	$P_4(4)$

яъни

X	0	1	2	3	4
P	e^{-1}	e^{-1}	$\frac{1}{2}e^{-1}$	$\frac{1}{6}e^{-1}$	$\frac{1}{24}e^{-1}$

кўринишда бўлади.

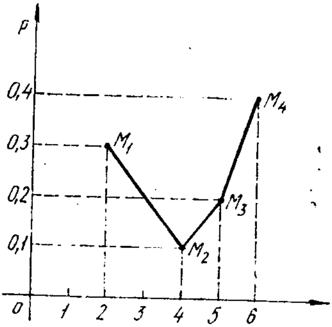
Бу ерда $e^{-1}+e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{6}e^{-1}+\frac{1}{24}e^{-1}\approx 1$, чунки, юқорида айтганимиздек, Пуассон формуласи тақрибий формуладир. ▲

3- мисол. Дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Тақсимот кўпбурчагини ясанг.

△. Тўғри бурчакли координаталар системасининг абсциссалар ўқи бўйлаб x_i қийматларни, ординаталар ўқи бўйлаб уларга мос p_i қийматларни қўямиз. Ҳосил бўлган $M_1(2;\ 0{,}3)$, $M_2(4;\ 0{,}1)$, $M_3(5;\ 0{,}2)$, $M_4(6;\ 0{,}4)$ нуқталарни ясаймиз. Бу нуқталарни синиқ чизиқ билан туташтириб, тақсимот кўпбурчагини ҳосил қиламиз (11.1- чизма). ▲



11.1- чизма

□. 1. Экилган ҳар бир дарахтнинг кўкариш эҳтимоли 0,9 бўлса, экилган 3 та дарахтдан кўкарганлари сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Жавоб.

X	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

2. Отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,6 га тенг. Отилган 4 та ўқдан нишонга тегиш сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Жавоб.

X	0	1	2	3	4
P	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

3. Танга икки марта ташланди. Гербли томон тушиш сонини билдирувчи X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини тузинг.

Жавоб.

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

4. Яшикдаги 100 та деталнинг 10 таси яроқсиз. Тасодифий олинган 2 та деталдан яроқсиз бўлиш сонининг тақсимот қонунини тузинг ва графигини ясанг.

Кўрсатма. $P_{10}(X=k)=\dfrac{C_{10}^{k}C_{90}^{2-k}}{C_{100}^{k}}$ формуладан фойдаланинг.

Жавоб.

X	0	1	2
P	0,8091	0,1818	0,0091

5. Ҳар бир туп ғўзанинг вильт касалига чалиниш эҳтимоли 0,001 бўлса, тасодифий олинган 2000 туп ғўзадан вильт касалига чалинганлари сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Кўрсатма. Пуассон тақсимотидан фойдаланинг.

X	0	1	2	3	...
P	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{2}{e^2}$	$\frac{2}{e^2}$	$\frac{4}{3e^2}$	...

2- §. Дискрет тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари

Бизга X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган бўлсин:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Дискрет тасодифий миқдорнинг *математик кутилиши* деб, унинг барча қабул қилиши мумкин бўлган қийматларининг мос эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$

бу ерда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — тасодифий миқдор X нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — мос равишда бу миқдорларни қабул қилиш эҳтимоллари. Тасодифий миқдорнинг математик кутилишини баъзан тасодифий миқдорнинг *ўртача қиймати* ҳам дейилади.

Математик кутилишнинг хоссалари

1. Ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши унинг ўзига тенг: $M(C) = C$.

2. Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгиси олдига чиқариш мумкин:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Тасодифий миқдорлар алгебраик йиғиндисининг математик кутилиши шу тасодифий миқдорлар математик кутилишларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. Ўзаро эркли тасодифий миқдорлар кўпатмасининг математик кутилиши уларнинг математик кутилишларининг кўпайтмасига тенг:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

5. Ҳар бир синовда p эҳтимол билан содир бўладиган A ҳодисанинг n та боғлиқ бўлмаган тажрибада содир бўлишлар сони X— дискрет тасодифий миқдор бўлиб, унинг математик кутилиши $M(X) = n \cdot p$ га тенг.

Дискрет тасодифий миқдорнинг *дисперсияси* деб тасодифий миқдор билан унинг математик кутилиши айирмаси квадратининг математик кутилишига айтилади ва у қуйидагича белгиланади:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Агар тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни маълум бўлса, унинг дисперсияси

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i$$

га тенг бўлади.

Дисперсияни қуйидаги формула ёрдамида ҳисоблаш мумкин:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Дисперсия тасодифий миқдорнинг математик кутилиши атрофида қанчалик сочилиб (тарқалиб) жойлашганлигини характерлайди.

Дисперсиянинг хоссалари

1. Ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг:

$$D(C) = 0.$$

2. Ўзгармас кўпайтувчини дисперсия белгиси олдига квадратга кўтариб чиқариш мумкин:

$$D(CX) = C^2D(X).$$

3. Иккита боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар алгебраик йиғиндисининг дисперсияси уларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Агар A ҳодиса n та боғлиқ бўлмаган тажрибанинг ҳар бирида p эҳтимол билан рўй берса, рўй беришлар сони X нинг дисперсияси

$$Dx = npq$$

га тенг бўлади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши деб унинг дисперсиясидан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

1-мисол. Тақсимот қонуни билан берилган қуйидаги тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг:

X	12	14	18	24	27
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

△. $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$ формуладан фойдаланамиз.

$$M(X) = 12\cdot0,4 + 14\cdot0,3 + 18\cdot0,1 + 24\cdot0,1 + 27\cdot0,1 = 4,8 + 4,2 + 1,8 + 2,4 + 2,7 = 15,9.$$ ▲

2-мисол. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидагича берилган:

а)

X	10	12	20	25	30
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

б)

X	30	40	50	60	70
P	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1

Тасодифий миқдорнинг математик кутилишини, дисперсиясини, ўртача квадратик четланишини топинг.

△. а) математик кутилиш таърифига кўра:

$$M(X) = 10\cdot 0{,}1 + 12\cdot 0{,}2 + 20\cdot 0{,}1 + 25\cdot 0{,}2 + 30\cdot 0{,}4 = \\ = 1 + 2{,}4 + 2 + 5 + 12 = 22{,}4.$$

Дисперсиясини ҳисоблаш учун $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун X^2 нинг тақсимот қонунини тузиб чиқамиз:

X^2	100	144	400	625	900
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,3

$M(X^2)$ ни ҳисоблаймиз:

$$M(X^2) = 100\cdot 0{,}1 + 144\cdot 0{,}2 + 400\cdot 0{,}1 + 625\cdot 0{,}2 + 900\times \\ \times 0{,}4 = 10 + 28{,}8 + 40 + 125 + 360 = 563{,}8.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 563{,}8 - (22{,}4)^2 = 62{,}04.$$

Демак, $D(X) = 62{,}04$. Ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{62{,}04} \approx 7{,}9,\ \sigma(X) \approx 7{,}9.$$

б) Математик кутилишини юқоридаги каби топамиз:

$$M(X) = 30\cdot 0{,}5 + 40\cdot 0{,}1 + 50\cdot 0{,}2 + 60\cdot 0{,}1 + 70\cdot 0{,}1 = \\ = 15 + 4 + 10 + 6 + 7 = 42.\ M(X) = 42.$$

Дисперсияни

$D(X) = \sum (x_i - M(X))^2 \cdot P_i$ формуладан фойдаланиб топамиз. Бунинг учун $[X - M(X)]^2$ нинг тақсимот қонунини тузамиз:

$[X-M(X)]^2$	144	4	64	324	784
P	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1

$< 144 = (30 - 42)^2,\ 4 = (40 - 42)^2$ ва ҳ. к.$<$

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = 144\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}1 + 64\cdot 0{,}2 + 324\times \\ \times 0{,}1 + 784\cdot 0{,}1 = 72 + 0{,}4 + 12{,}8 + 32{,}4 + 78{,}4 = 196{,}0.$$

$$D(X) = 196.$$

Ўртача квадратик четланиш:

$$\sigma(x) \approx \sqrt{196} \approx 14,$$
$$\sigma(x) \approx 14. \quad ▲$$

3-мисол. Агар X ва Y тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари маълум: $M(X)=3$, $M(Y)=5$ бўлса,

$$\text{а) } Z = 2X + 3Y; \quad \text{б) } Z = 3X - Y$$

тасодифий миқдорларнинг математик кутилишларини топинг.

△. Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланамиз (алгебраик йиғиндининг математик кутилиши математик кутилишлар алгебраик йиғиндисига тенг; ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгиси олдига чиқариш мумкин):

а) $M(Z) = M(2X + 3Y) = M(2X) + M(3Y) = 2M(X) + 3M(Y) = 2\cdot 3 + 3\cdot 5 = 21$; $M(Z) = 21$.

б) $M(Z) = M(3X - Y) = 3M(X) - M(Y) = 3\cdot 3 - 5 = 4$; $M(Z) = 4$. ▲

4-мисол. Боғлиқ бўлмаган (эркли) X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари берилган:

X	-1	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Y	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,4

$Z = X + Y$ ва $Z = XY$ тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларини тузинг ва $M(Z) = M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ ва $M(Z) = M(XY) = M(X)\cdot M(Y)$ эканлигини текширинг.

△. Аввал $Z = X + Y$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини тузамиз.

Бунинг учун $X + Y$ нинг мумкин бўлган қийматларини ва уларни қабул қилиш эҳтимолларини топамиз:

$$z_1 = -1 + 0; \quad z_2 = -1 + 1; \quad z_3 = -1 + 2; \quad z_4 = -1 + 3;$$
$$z_5 = 0 + 0; \quad z_6 = 0 + 1; \quad z_7 = 0 + 2; \quad z_8 = 0 + 3;$$
$$z_9 = 1 + 0; \quad z_{10} = 1 + 1; \quad z_{11} = 1 + 2; \quad z_{12} = 1 + 3.$$

$Z = X + Y$ тасодифий миқдорнинг $z_k = x_i + y_j$ қийматни қабул қилиш эҳтимоли мос равишда x_i ва y_j ни қабул қилиш эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг. Масалан:

$$P(z_3 = -1 + 2) = P(x = -1 \text{ ва } y = 2) = P(x = -1)\times$$
$$\times P(y = 2) = 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}06.$$

$Z=X+Y$	-1	0	1	2	0	1	2	3	1	2	3	4
$P_z=P_x\cdot P_y$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,03	0,06	0,09	0,12	0,05	0,1	0,15	0,20

ёки

$Z=X+Y$	-1	0	1	2	3	4
P_z	0,02	0,07	0,17	0,27	0,27	0,20

$$\sum P_i = 0{,}02+0{,}07+0{,}17+0{,}27+0{,}20=1.$$

$M(X+Y)$ ни ҳисоблаймиз:

$M(X+Y)=-1\cdot 0{,}02+0\cdot 0{,}07+1\cdot 0{,}17+2\cdot 0{,}27+$
$+3\cdot 0{,}27+4\cdot 0{,}20=-0{,}02+0{,}17+0{,}54+0{,}81+0{,}80=2{,}3.$

$M(X)$ ва $M(Y)$ ларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз:

$M(X)=1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5=-0{,}2+0{,}5=0{,}3;$

$M(Y)=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}4=0{,}2+0{,}6+$
$+1{,}2=2;$

$M(X)+M(Y)=0{,}3+2=2{,}3.$

Демак,

$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ тенглик бажарилади.

$Z=XY$ нинг тақсимот қонунини тузамиз. Бунинг учун юқоридаги каби мулоҳаза юритамиз:

$z_1=(-1)\cdot 0;$ $z_2=(-1)\cdot 1;$ $z_3=(-1)\cdot 2;$ $z_4=(-1)\cdot 3;$
$z_5=0\cdot 0;$ $z_6=0\cdot 1;$ $z_7=0\cdot 2;$ $z_8=0\cdot 3;$
$z_9=1\cdot 0;$ $z_{10}=1\cdot 1;$ $z_{11}=1\cdot 2;$ $z_{12}=1\cdot 3.$

Тақсимот қонуни қуйидагича ифодаланади:

$Z=XY$	0	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	1	2	3
$P_z=P_xP_y$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,03	0,06	0,09	0,12	0,05	0,1	0,15	0,2

Тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг қабул қилган қийматларини умумлаштириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$Z=XY$	-3	-2	-1	0	1	2	3
P_z	0,08	0,06	0,04	0,37	0,10	0,15	0,20

Энди математик кутилиш $M(Z)$ ни ҳисоблаймиз:

$MZ=M(XY)=(-3)\cdot 0{,}08+(-2)\cdot 0{,}06+(-1)\cdot 0{,}04+$
$+1\cdot 0{,}10+2\cdot 0{,}15+3\cdot 0{,}20=-0{,}24-0{,}12-0{,}04+$
$+0{,}1+0{,}30+0{,}60=0{,}6;$ демак,

$$M(Z)=0{,}6.$$

Юқоридаги ҳисоблашлардан:

$$M(X)\cdot M(Y) = 0{,}3\cdot 2 = 0{,}6 \text{ ва } M(XY) = 0{,}6.$$

Демак,

$$M(XY) = M(X)\cdot M(Y) \text{ тенглик ўринлидир.}$$

5-мисол. Дискрет тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ ҳамда $M(X) = 2{,}3$; $M(X^2) = 5{,}9$ лар берилган. X миқдор x_1, x_2, x_3 қийматларни қандай эҳтимоллар билан қабул қилишини топинг.

△. X қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларнинг эҳтимоллари йиғиндиси $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Энди $M(X)$ ва $M(X^2)$ нинг таърифига асосан қуйидагига эгамиз:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3, \text{ бу ердан}$$
$$2{,}3 = 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 3p_3.$$
$$M(X^2) = x_1^2\cdot p_1 + x_2^2\cdot p_2 + x_3^2p_3, \text{ бу ердан}$$
$$5{,}9 = 1\cdot p_1 + 4\cdot p_2 + 9\cdot p_3.$$

p_1, p_2, p_3 ларга нисбатан уч номаълумли учта тенглама системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1,\\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 &= 2{,}3,\\ p_1 + 4p_2 + 9p_3 &= 5{,}9. \end{aligned}\right\}$$

Бу системани ечиб,

$$p_1 = 0{,}2; \quad p_2 = 0{,}3; \quad p_3 = 0{,}5$$

ларни топамиз. ▲

6-мисол. Ҳар бир синовда A ҳодиса 0,7 эҳтимол билан рўй берса, 10 та эркли синовда бу ҳодисанинг рўй беришлар сонининг математик кутилишини топинг.

△. Масала шартига кўра ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p = 0{,}7$ га тенг, тажрибалар сони $n = 10$. Рўй беришлар сонини X десак, унинг математик кутилиши $M(X) = n\cdot p$ формулага асосан (XI- боб, 2- § даги 5-хосса) қуйидагича бўлади:

$$M(X) = 10\cdot 0{,}7 = 7. \quad M(X) = 7. \ ▲$$

□. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунлари берилган. Унинг математик кутилиши, дисперсияси, ўрта квадратик четланишини топинг.

6.

X	8	12	18	24	30
p	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1

Жавоб. $M(X) = 16{,}8$, $D(X) = 58{,}56$, $\sigma(X) \approx 7{,}65$.

7.

X	21	25	32	40	50
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Жавоб. $M(X) = 34,7$, $D(X) = 227,79$, $\sigma(X) \approx 15,09$.

8.

X	10,2	12,4	16,5	18,1	20
p	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

Жавоб. $M(X)=14,93$, $D(X) = 10,32$, $\sigma(X) \approx 3,21$.

9.

X	12	16	21	26	30
p	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Жавоб. $M(X) = 20,6$, $D(X) = 31,64$, $\sigma(X) \approx 5,63$.

10.

X	12,0	13,5	15,0	18,0	18,5
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Жавоб. $M(X)=15,36$, $D(X) = 4,25$, $\sigma(X) = 2,06$.

11.

X	11,5	13,5	15,0	17,5	18,0
p	0,1	0,5	0,2	0,1	0,1

Жавоб. $M(X)=14,45$, $D(X) = 3,58$, $\sigma(X) \approx 1,89$.

12.

X	4,6	6,2	6,8	7,2	8,4
p	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1

Жавоб. $M(X) = 6,20$, $D(X) \approx 1,49$, $\sigma(X)=1,22$.

13.

X	1,4	2,2	3,5	4,1	5,2
p	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

Жавоб. $M(X) = 2,84$, $D(X) = 1,55$, $\sigma(X) \approx 1,25$.

14. Иккита тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунлари берилган:

X	4	6	10	15	20
p	0,15	0,16	0,2	0,4	0,1

,

Y	12	10	8	25
p	0,2	0,1	0,3	0,4

.

$X+Y$ йиғиндининг тақсимот қонунини тузинг. X, Y ва $X+Y$ миқдорларнинг дисперсиясини топинг.

Жавоб. $D(X) = 25,55$; $D(Y) = 58,36$; $D(X+Y)=83,91$.

15. X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонуни берилган:

X	10	20	30
p	0,2	0,3	0,5

,

Y	6	8
p	0,4	0,6

.

$X-Y$ айирманинг тақсимот қонунини тузинг. $D(X)$, $D(Y)$ $D(X-Y)$ ларни топинг.

Жавоб. $D(X)=61$; $D(Y)=0{,}96$;
$D(X-Y)=61{,}96$.

16. X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонуни берилган:

X	18	24	30
p	0,2	0,7	0,1

,

Y	20	26
p	0,9	0,1

$\frac{X+Y}{2}$ нинг тақсимот қонунини тузинг ҳамда $D(X)$, $D(Y)$, $D\left(\frac{X+Y}{2}\right)$ ларни топинг.

Жавоб. $D(X)=10{,}44$; $D(Y)=3{,}24$; $D\left(\frac{X+Y}{2}\right)=3{,}42$.

17. Группада лотерея ўйини ташкил этилди. Биринчиси 20 сўм, иккинчиси 30 сўм бўлган иккита ютуқ тайинланди. Студент ҳар донаси 1 сўмдан бўлган 50 та билетдан биттасини сотиб олди. Студентга чиқадиган соф ютуқнинг тақсимот қонунини тузинг ва унинг математик кутилишини топинг.

Жавоб.

X (соф ютуқ)	−1	19	29
P (эҳтимол)	0,96	0,02	0,02

.

$M(X)=0$.

18. Мураккаб асбобларни текшириш натижасида ўртача 50 та асбобдан 10 таси нуқсонли экани аниқланди. Таваккалига олинган 6 та асбобдан нуқсонсиз бўлганлри сонининг тақсимот қонунини тузинг. Унинг математик кутилиши, дисперсиясини топинг.

Жавоб.

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,0001	0,0015	0,0154	0,0819	0,2458	0,3932	0,2621

.

$M(x)=4{,}80$.

Кўрсатма. $P_n(k)$ ни Бернулли формуласи ёрдамида топинг.

19. Нишонга қарата ўқ узилди. Ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли $\frac{1}{3}$. Нишонга тегиш сонининг дисперсиясини топинг.

Жавоб. $D(X) = \frac{2}{9}$.

20. Факультет студентларининг фанларни ўзлаштириш кўрсаткичи 90%. Тасодифан 40 та студент ажратилди. Шулар орасида фанларни ўзлаштирувчи студентлар сонининг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг.

Жавоб. $M(X) = 36$, $D(X) = 3{,}6$.

21. n та ўйин соққаси ташланади. Ҳамма ёқларда чиқадиган очколар йиғиндисининг математик кутилишини топинг.

Жавоб. $M(X) = \frac{7}{2}n$.

Кўрсатма. $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ — барча ёқларда чиқадиган очколар йиғиндиси. $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n)$ эканлигидан фойдаланинг.

22. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини ва дисперсиясини топинг.

Жавоб. $M(X) = \lambda$. $D(X) = \lambda$.

Кўрсатма. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$, $M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

эканлигидан фойдаланинг.

23. A ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли 0,4 га тенг. X дискрет тасодифий миқдор — A ҳодисанинг 10 та эркли синовда рўй бериш сонининг дисперсиясини топинг.

Жавоб. $D(X) = 2{,}4$.

3-§. Катта сонлар қонуни

Чебишев тенгсизлиги. X тасодифий миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланишининг абсолют қиймат бўйича ε мусбат сондан кичик бўлиш эҳтимоли $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ дан кичик эмас, яъни:

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}.$$

Чебишев теоремаси. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — *жуфт-жуфти билан эркли тасодифий миқдорлар бўлиб,* *уларнинг дисперсиялари бир хил ўзгармас C сон билан текис чегараланган бўлса:* $D(X_1) \leqslant C$, $D(X_2) \leqslant C, \ldots$, $D(X_n) \leqslant C$, *у ҳолда ҳар қандай мусбат* ε *сон учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади.*

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) < \varepsilon\right\} = 1.$$

Чебишев теоремаси юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи тасодифий миқдорларнинг ўрта арифметиги уларнинг математик кутилишига p эҳтимол бўйича яқинлашишини кўрсатади, бу тасдиқ қуйидагича ёзилади:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i).$$

Бу теоремадан хусусий ҳолда қуйидаги Бернулли теоремаси келиб чиқади.

Теорема. *Агар боғлиқ бўлмаган n та тажрибанинг ҳар бирида A ҳодиса ўзгармас p эҳтимол билан рўй берса, у ҳолда тажрибалар сони етарлича катта бўлганда*

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

бўлади, бу ерда $W_n = \frac{m}{n}$ — нисбий частота, p — ҳар бир тажрибада ҳодиса рўй бериш эҳтимоли, $q = 1 - p$.

1-мисол. Қўрада боқилаётган бузоқларнинг ўртача оғирлиги 100 кг, ўртача оғирликдан четланиши 0,04. Таваккалига олинган бузоқнинг оғирлиги 99,5 ва 100,5 кг оралиғида бўлиши эҳтимоли қандай?

△. Масала шартига кўра $D(X) = 0{,}04$; $M(X) = 100$ ва $99{,}5 \leqslant X \leqslant 100{,}5$. Бу тенгсизликдан ҳадлаб $M(X) = 100$ ни айирамиз:

$$-0{,}5 \leqslant X - M(X) \leqslant 0{,}5.$$

Бу тенгсизликка тенг кучли бўлган

$|X - M(X)| \leqslant 0{,}5$ тенгсизликни оламиз. Бу ерда $\varepsilon = 0{,}5$. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланамиз:

$$P\{|X - M(x)| \leqslant 0{,}5\} > 1 - \frac{0{,}04}{0{,}25} \text{ дан } P > 0{,}84. \blacktriangle$$

келиб чиқади.

2-мисол. Цехда ишлаб чиқарилаётган маҳсулотларнинг нoстандарт бўлиши 2% ни ташкил этади. Таваккалига олинган 1000 та маҳсулотдан стандарт бўлганлари сони 970 билан 990 орасида бўлиши эҳтимолини баҳоланг.

△. Стандарт маҳсулотлар сонини X билан белгилаймиз ва $M(X)$, $D(X)$ ва ε ларни топамиз. Стандарт маҳсулотлар 98% ни ташкил қилади. Демак, $p=0{,}98$, стандарт бўлмаслик эҳтимоли $q=0{,}02$;

$M(X)=n\cdot p$ ва $D(X)=npq$ формулаларга асосан топамиз:

$M(X)=1000\cdot 0{,}98=980, \quad D(X)=1000\cdot 0{,}98\cdot 0{,}02=19{,}6.$

Масала шартидан келиб чиқадиган $970\leqslant X\leqslant 990$ тенгсизликнинг иккала томонидан $M(X)=980$ ни айирамиз:

$$-10\leqslant X-M(X)\leqslant 10, \text{ бундан}$$

$|X-M(X)|\leqslant 10$. Бу ердан $\varepsilon=10$ эканлигини эътиборга олиб, Чебишев тенгсизлигига асосан топамиз:

$$P\{\,|X-M(X)\,|\leqslant 10\}>1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{19{,}6}{100},$$

Бу ердан $P>0{,}804$.

3- мисол. 2000 га майдонга экилган пахтанинг ўртача ҳосилдорлигини аниқлаш учун ҳар бир гектардан 1 м^2 майдондаги пахта ҳосили олиб текширилди. Бир гектар майдондаги ҳосилдорлик дисперсияси 9 дан ошмаслиги маълум бўлса, танлаб олинган майдондаги ўртача ҳосилдорликнинг бутун майдондаги ўртача ҳосилдорликдан 0,3 центнерга ошмаслик эҳтимолини топинг.

△. Масала шартига кўра $n=2000$, $D(X)=C=9$, $\varepsilon=0{,}3$.

Агар ҳар бир гектар майдондаги ҳосилдорликни тасодифий миқдор десак (X_1 — биринчи гектардан, X_2 — иккинчи гектардан ва ҳоказо), у ҳолда ўртача ҳосилдорлик

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$$

бўлади. Агар $M(X_1)$, $M(X_2)$, ..., $M(X_n)$ ларни ҳар бир гектардан олинган ўртача ҳосилдорлик десак, у ҳолда Чебишев теоремасига асосан

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|\leqslant\varepsilon\right\}>$$

$$>1-\frac{C}{n\varepsilon^2}=1-\frac{C}{n\varepsilon^2}=1-\frac{9}{2000\cdot 0{,}09}=0{,}95 \text{ бўлади. Демак,}$$

изланаётган эҳтимол $P>0{,}95$ бўлади. ▲

4- мисол. Техника назорат бўлимининг маълумотига кўра ишлаб чиқарилган деталлар орасида брак бўлиши

2,5 % ни ташкил этади. Тажриба учун олинган 8000 та детални текшириб чиқилганда брак деталлар процентининг техника назорати бўлими томонидан қўйилган нормадан фарқи 0,005 дан ошмаслик эҳтимолини баҳоланг.

$\triangle$. Бу масалани ечишда Бернулли теоремасидан фойдаланамиз. Масала шартига кўра:

$P=0{,}025$ (2,5% брак деталлар), $q=1-p=0{,}975, \varepsilon=0{,}005.$

У ҳолда Бернулли теоремасига асосан:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right. >1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}=1-\frac{0{,}025\cdot 0{,}975}{8000\cdot 0{,}005^2}=0{,}88.$$

Демак, $P>0{,}88$. ▲

5- мисол. Ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p=0{,}6$ га тенг. Нисбий частотанинг ҳар бир тажрибадаги ўзгармас эҳтимолдан оғиши абсолют қиймати бўйича 0,1 дан кичик бўлиши эҳтимоли 0,98 дан катта бўлиши учун нечта тажриба ўтказиш керак?

$\triangle$ Масалани ечиш учун Бернулли теоремасидан фойдаланамиз.

$1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\geqslant 0{,}98$ бўлиши керак. Бу ердан n ни топамиз:

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2}\leqslant 0{,}02 \text{ ёки } n\geqslant\frac{pq}{\varepsilon^2 0{,}02}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}4}{0{,}01\cdot 0{,}02}=1200.$$

Демак, камида $n=1200$ та тажриба ўтказиш лозим экан. ▲

6- мисол. 5000 та боғлиқ бўлмаган тажрибада ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг ҳар бир тажрибада ҳодиса рўй бериши эҳтимоли $p=0{,}8$ дан оғишини топинг (бунда бу оғиш эҳтимоли $P>0{,}94$ билан кутилади).

$\triangle$. Бу масалани ечиш учун ҳам Бернулли формуласидан фойдаланамиз.

Қуйидагиларга эгамиз:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}>0{,}94,$$

$$P=0{,}8;\quad q=1-p=0{,}2;\quad n=5000.$$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}>1-\frac{pq}{n\cdot\varepsilon^2}=0{,}94.$$

Бу ердан

$$0{,}94=1-\frac{pq}{n\varepsilon^2};\quad \varepsilon^2=\frac{pq}{(1-0{,}94)n};\quad \varepsilon=\sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{0{,}06\cdot 5000}}\approx 0{,}02.$$

Демак,

$$\varepsilon\approx 0{,}02. ▲$$

□. **24.** X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни берилган:

X	8	10	12	16	20	28
p	0,4	0,2	0,1	0,2	0,05	0,05

Тасодифий олинган вариантанинг математик кутилишдан оғишининг абсолют қиймати 15 дан кичик бўлиши эҳтимолини баҳоланг.

Кўрсатма. Аввал $M(X)$ ва $D(X)$ ни топиш керак.

Жавоб. $p > 0,2$.

25. Агар $D(X) = 0,001$ бўлса, $|X - M(X)| < 0,1$ нинг эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб. $p > 0,9$.

26. $P\{|X - M(X)| \leqslant \varepsilon\} > 0,9$ ва $D(X) = 0,004$ берилган. ε қийматини топинг.

Жавоб. $\varepsilon = 0,2$.

27. 1200 та боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдор берилган бўлиб, улардан ҳар бирининг дисперсияси 3 дан ошмайди. Шу тасодифий миқдорлар ўрта арифметигининг математик кутилишлар ўрта арифметигидан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,2 дан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p > 0,9375$.

28. 1600 та боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдордан ҳар бирининг дисперсияси 9 дан ошмайди. Тасодифий миқдорлар ўрта арифметигининг математик кутилишлар ўрта арифметигидан оғиши абсолют қиймати бўйича 0,6 дан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p > 0,996$.

29. Эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги X_1, X_2, . . . , X_n, . . . ушбу тақсимот қонунлари билан берилган:

а)

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$1/2n^2$	$1-1/n^2$	$1/2n^2$

, б)

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$1/4$	$1/2$	$1/4$

бу кетма-кетликларга Чебишев теоремасини қўлланиш мумкинми?

Жавоб. а) $M(X_n) = 0$, $D(X_n) = \alpha^2$ бўлиб, теоремани қўлланиш мумкин;

б) $M(X_n) = 0$; $D(X_n) = \frac{1}{2} n^2 \alpha^2 \to \infty$, $n \to \infty$, теорема шартлари бажарилмайди, шунинг учун уни қўлланиш мумкин эмас.

30. Эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги тақсимоти берилган:

X_n	$n+1$	$-n$
P	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Уларнинг дисперсияси текис чегараланганми?

Жавоб. n ортиши билан $D(X_n)=\frac{2n^3+3n^2+n}{n+1}$ чексиз ортади, демак, чегараланган эмас.

31. Заводда ишлаб чиқарилган деталнинг ўртача узунлиги 50 см, ўртача квадратик четланиши 0,2 см. Таваккалига олинган детал узунлиги 49,5 см билан 50,5 см орасида бўлиши эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб. $p>0,84$.

32. Ўйин соққаси 350 марта ташланди. Очколар тушиш математик кутилиши 3,5; дисперсияси $\frac{35}{12}$ га тенг.

Очколар тушиш ўрта арифметигининг математик кутилишдан четланишини абсолют қиймати 0,2 дан ошмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p>0,782$.

33. Маълум ўсимлик уруғларининг униб чиқиши 70% ни ташкил этади. Экилган 10000 та уруғдан униб чиқишлар сони нисбий частотасининг берилган ўзгармас p эҳтимолдан оғиши абсолют қиймати бўйича 0,01 дан катта бўлмаслигининг эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб. $p>0,79$.

4- §. Тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот функциялари

1. Интеграл функция. X тасодифий миқдорнинг *тақсимот функцияси* ёки *интеграл функцияси* деб

$$P(X<x)=F(x)$$

тенглик билан аниқланган $F(x)$ функцияга айтилади. Тақсимот функцияси (дискрет ёки узлуксиз ҳолда ҳам) тасодифий миқдор қонуниятининг умумийроқ формада берилишидир. Тақсимот функцияси узлуксиз дифференциалланувчи бўлган тасодифий миқдор *узлуксиз тасодифий миқдор* дейилади.

Тасодифий миқдор тақсимот функцияси қуйидаги хоссаларга эга:

1) *Интеграл функциянинг қийматлари* [0, 1] *кесмага тегишли, яъни* $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

2) *Интеграл функция камаймайдиган функция.*

3) *Агар* X *тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари* (a, b) *интервалга тегишли бўлса, у ҳолда* $x \leqslant a$ *бўлганда* $F(x) = 0$, $x \geqslant b$ *бўлганда* $F(x) = 1$.

Тақсимотнинг интеграл функцияси таърифидан, яъни $P\{X < x\} = F(x)$ дан $F(-\infty) = 0$ ва $F(+\infty) = 1$ келиб чиқади.

Натижа. *Узлуксиз тасодифий миқдорнинг битта тайин қийматни қабул қилиш эҳтимоли нолга тенг:*

$$P\{X = x_1\} = 0.$$

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг $[a, b]$ интервалга тушиш эҳтимоли $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = F(b) - F(a)$ га тенг.

2. Узлуксиз тасодифий миқдор эҳтимоллари тақсимотининг дифференциал функцияси. Эҳтимоллар тақсимотининг *дифференциал функцияси* деб, интеграл функциядан олинган биринчи тартибли ҳосилага айтилади:

$$f(x) = F'(x).$$

Дифференциал функция қуйидаги хоссаларга эга:

1) Дифференциал функция манфий эмас: яъни $f(x) \geqslant 0$.

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалга тегишли қийматни қабул қилиш эҳтимоли

$$P\{a < X < b\} = \int\limits_a^b f(x)dx$$

тенглик билан аниқланади.

Агар дифференциал функция маълум бўлса, интеграл функцияни қуйидагича топиш мумкин:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

3. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари. Агар X узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бутун Ox

ўққа тегишли бўлса, унинг математик кутилиши

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

билан, унинг дисперсияси эса

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

формула билан аниқланади.

Хусусий ҳолда, агар X тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда унинг математик кутилиши

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx$$

формула билан, дисперсияси эса

$D(X) = \int_{a}^{b} [x - M(X)]^2 f(x)dx$ формула билан аниқланади.

Умуман дисперсияни қуйидаги формула орқали ҳисоблаш мумкин:

$$D(X) = \int x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Тасодифий миқдорнинг *ўртача квадратик четланиши* деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

1-мисол. Дискрет тасодифий миқдор X қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

X	1	2	3	4	5
p	0,1	0,15	0,2	0,35	0,2

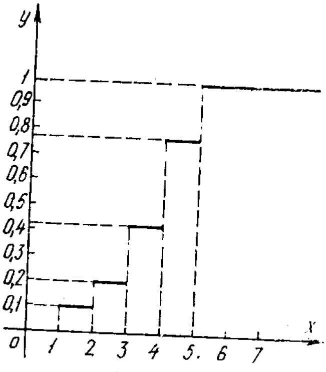
Тақсимот интеграл функциясини топинг ва графигини ясанг.

△. Дискрет тасодифий миқдор учун

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{\{x_i < x\}} P(X = x_i)$$

бўлганидан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

агар $x \leqslant 1$ бўлса, $F(x) = 0$;



11.2- чизма

агар $1 < x \leqslant 2$ бўлса, $F(x) = 0{,}1$;
агар $2 < x \leqslant 3$ бўлса, $F(x) = 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}25$;
агар $3 < x \leqslant 4$ бўлса, $F(x) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}45$;
агар $4 < x \leqslant 5$ бўлса, $F(x) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}35 = 0{,}8$;
агар $x > 5$ бўлса, $F(x) = 0{,}8 + 0{,}2 = 1$ бўлади.

Яъни

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leqslant 1 \quad \text{бўлса,} \\ 0{,}1, & \text{агар } 1 < x \leqslant 2 \quad \text{бўлса,} \\ 0{,}25, & \text{агар } 2 < x \leqslant 3 \quad \text{бўлса,} \\ 0{,}45, & \text{агар } 3 < x \leqslant 4 \quad \text{бўлса,} \\ 0{,}8, & \text{агар } 4 < x \leqslant 5 \quad \text{бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 5 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

□. Тақсимот интеграл функциясининг графиги қуйидагича бўлади: (11.2- чизма). ▲

2- мисол. Тасодифий миқдор X тақсимотининг интеграл функцияси қуйидагича:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{8}x^3, & \text{агар } 0 < x < 2 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

X тасодифий миқдорнинг $[0{,}5,\ 1{,}5]$ интервалдан қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

△. $[0{,}5;\ 1{,}5]$ интервал $[0,\ 2]$ интервал ичида ётгани учун $P\{a < x < b\} = F(b) - F(a)$ формулага асосан:

$$P\{0{,}5 < x < 1{,}5\} = F(1{,}5) - F(0{,}5) = \frac{1}{8}(1{,}5)^3 - \frac{1}{8}\ (0{,}5)^3 \approx$$

$$\approx 0{,}4063.$$ ▲

3- мисол. Интеграл функцияси қуйидагича

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{2}x, & \text{агар } 0 < x \leqslant 2 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлган узлуксиз тасодифий миқдор X нинг;

а) дифференциал функциясини;

б) дифференциал функциядан фойдаланиб $P\{0 < x < 1\}$ эҳтимолини топинг.

△ а)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{2}, & \text{агар } 0 < x \leqslant 2 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

б) $P\{a < X < b\} = \int\limits_a^b f(x)dx$ бўлгани учун

$$P\{0<x<1\}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^1=\frac{1}{2},$$

демак $P\{0<x<1\}=\frac{1}{2}$ бўлади. ▲

4- мисол. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг интеграл функцияси қуйидагича:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ \sin 2x, \text{ агар } 0<x\leqslant \frac{\pi}{4}, \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } x>\frac{\pi}{4} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$f(x)$ дифференциал функцияни топинг.

△. Дифференциал функция интеграл функциядан олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x<0 \text{ бўлса,} \\ 2\cos 2x, \text{ агар } 0<x<\frac{\pi}{4} \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x>\frac{\pi}{4} \text{ бўлса,} \end{cases}$$

яъни $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ интервалда $f(x)=2\cos 2x$, бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$.

5- мисол. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси қуйидагича:

$(0, \infty)$ интервалда $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$ $(\alpha>0)$ кўринишда берилган. Бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. X нинг $(1, 2)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

△ Ушбу $P\{a<x<b\}=\int_a^b f(x)dx$ формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра $a=1$; $b=2$; $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$. Демак изланаётган эҳтимол

$$P\{1<x<2\}=\int_1^2 \alpha e^{-\alpha x}dx=-\int_1^2 e^{-\alpha x}d(-\alpha x)=-e^{-\alpha x}\Big|_1^2=$$

$$=-e^{-2\alpha}+e^{-\alpha}=-\frac{1}{e^{2\alpha}}+\frac{1}{e^{\alpha}}=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{2\alpha}}$$

бўлади. ▲

6-мисол. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси ушбу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ бўлганда,}\\ \sin x; & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ бўлганда,}\\ 0, & x>\frac{\pi}{2} \text{ бўлганда}\end{cases}$$

кўринишда, унинг $F(x)$ интеграл функциясини топинг.

△. Ушбу

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

формуладан фойдаланамиз. Агар $x\leqslant 0$ бўлса, $f(x)=0$, демак $F(x)=0$. Агар $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ бўлса,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{x}\sin x dx=-\cos x\Big|_{0}^{x}=-\cos x+\cos 0=$$
$$=1-\cos x.$$

Агар $x>\frac{\pi}{2}$ бўлса,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0\cdot dx=1$$

бўлади. Шундай қилиб,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ 1-\cos, & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ бўлса,}\\ 1, & x>\frac{\pi}{2} \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлади. ▲

7-мисол. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси бутун Ox ўқда аниқланган бўлиб,

$$f(x)=\frac{2C}{1+x^2}$$

кўринишга эга. C ўзгармасни топинг.

△. Дифференциал функциянинг хоссаси $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ га асосан

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2C}{1+x^2}dx = 1 \text{ ёки } \lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{2C}{1+x^2}dx = \lim_{\alpha\to\infty} 2C\operatorname{arctg}x\Big|_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$=2C(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)) = 2C\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2C\pi,$$

яъни

$$2C\pi = 1 \text{ дан } \qquad C = \frac{1}{2\pi} \text{ бўлади.} \ ▲$$

8-мисол. Тасодифий миқдор X нинг дифференциал функцияси $[10;\ 12]$ интервалда

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 5 \text{ орқали берилган.}$$

Интервал ташқарисида $f(x) = 0$. Унинг математик кутилиши, дисперсияси ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Δ. Математик кутилиш формуласига кўра

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx,$$

$$M(X) = \int_{10}^{12} x\left(\frac{1}{2}x - 5\right)dx = \left(\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right)\Big|_{10}^{12} = \frac{34}{3}.$$

Дисперсиясини

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

формула орқали топамиз:

$$D(X) = \int_{10}^{12} x^2\left(\frac{1}{2}x - 5\right)dx - \left(\frac{34}{3}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{8}x^4 - 5\,\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{10}^{12} - \left(\frac{34}{13}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ўртача квадратик четланиш

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}526$$

бўлади. ▲

□. **34.** Дискрет тасодифий миқдор X қуйидаги тақсимот қонунлари билан берилган:

1)

X	0	2	4
P	0,3	0,5	0,2

2)

X	2	4	6	8	10
P	0,1	0,15	0,2	0,35	0,2

3)

X	3	5	9	12
P	0,3	0,2	0,4	0,1

4)

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

уларнинг $F(X)$ интеграл функцияларини топиб, графикларини чизинг.

35. X тасодифий миқдор қуйидаги интеграл функция билан берилган:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant -1 \text{ бўлса,} \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, \text{ агар } -1<x\leqslant \frac{1}{3} \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } x>\frac{1}{3} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Синов натижасида миқдорнинг $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ интервалда ётган қийматини қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{1}{4}$.

36. Тасодифий миқдор X нинг интеграл функцияси берилган:

$$F(x)=\begin{cases} 4^x, \text{ агар } -\infty<x\leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } x>0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Унинг $[-1;\ 0]$ интервалда ётиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. 0,75.

37. Тасодифий миқдор X нинг қуйидаги $F(X)$ интеграл функцияларига кўра

а) дифференциал функцияларини топинг;

б) математик кутилиши ва дисперсияларини топинг:

1)
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } x\leqslant 0 \quad \text{бўлса,} \\ \frac{x^2}{4}, & \text{агар } 0<x\leqslant 2 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x>2 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

2)
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } x< 0 \quad \text{бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } 0<x\leqslant 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x>1 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

3)
$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 0 & \text{бўлса,}\\ \sin x, \text{ агар } 0<x\leqslant\frac{\pi}{2} & \text{бўлса,}\\ 1, \text{ агар } x>\frac{\pi}{2} & \text{бўлса.}\end{cases}$$

4)
$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 0 & \text{бўлса,}\\ \frac{1}{4}x, \text{ агар } 0<x\leqslant 4 & \text{бўлса,}\\ 1, \text{ агар } x>4 & \text{бўлса.}\end{cases}$$

5)
$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant -2 & \text{бўлса,}\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}, \text{ агар } -2<x\leqslant 2 & \text{бўлса,}\\ 1, \text{ агар } x>2 & \text{бўлса.}\end{cases}$$

38. X тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 0 & \text{бўлса,}\\ \frac{1}{8}x; \text{ агар } 0<x\leqslant 4 & \text{бўлса,}\\ 0, \text{ агар } x>4 & \text{бўлса.}\end{cases}$$

Унинг математик кутилиши, дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг, ҳамда [0,5; 1], [2; 2,5] интервалларининг қийматлар қабул қилиш эҳтимоллигини топинг.

Жавоб. $M(X)=2\frac{2}{3}$; $D(X)=\frac{8}{9}$; $\sigma(X)=0{,}94$.

39. Қуйидаги дифференциал функциялар берилган. Уларнинг интеграл функцияларини топинг.

1)
$$f(x)=\begin{cases} 0; \; x\leqslant -\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\cos x; \; -\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0; \; x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

2)
$$f(x)=\begin{cases} 0; \; x\leqslant 12,\\ \frac{1}{2}x-A; \; 12<x\leqslant 14,\\ 0; \; x>14.\end{cases}$$

A ни топинг.

3)
$$f(x)=\begin{cases} 0; \; x\leqslant 6,\\ \frac{1}{2}x-3; \; 6<x\leqslant 8,\\ 0; \; x>8.\end{cases}$$

4) $$f(x)=\begin{cases} 0; \ x \leqslant \frac{\pi}{6}, \\ 3\sin 3x; \ \frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ 0; \ x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

40. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси

а) бутун Ox ўқда $f(x)=\frac{4C}{e^{x}-e^{-x}}$ тенглик билан берилган,

б) $f(x)=C\sin 2x$ тенглик билан $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда берилган, бу оралиқдан ташқарида унинг қиймати нолга тенг. C параметрни топинг.

41. X тасодифий миқдорнинг $(-C, C)$ интервалда $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{C^2-x^2}}$ дифференциал функцияси берилган. Бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. X миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг.

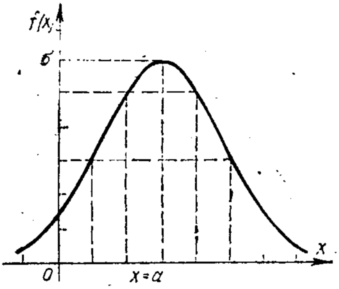
Жавоб. $M(x)=0$.

5- §. Нормал тақсимот

Агар узлуксиз тасодифий миқдор x нинг дифференциал функцияси ушбу

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

кўринишда бўлса, бу тасодифий миқдор *нормал тақсимланган* дейилади, бу ерда a параметр X нинг математик кутилиши, σ эса унинг ўртача квадратик четланиши (11. 3-чизмага қаралсин).



11.3- чизма

X миқдорнинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли қуйидаги тенглик ёрдамида топилади:

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz.$$

Бу функция *Лаплас функцияси* дейилади. Унинг қийматлари иловадаги 2- жадвалда келтирилган, $x \geqslant 5$ бўлганда $\Phi(x) \approx 0{,}5$ деб қабул қилинади.

X тасодифий миқдорнинг математик кутилишидан четланишининг абсолют қиймати δ мусбат сондан кичик бўлиш эҳтимоли

$$P\{|X - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

формула билан топилади.

Бу ерда $\delta = \sigma$; $\delta = 2\sigma$; $\delta = 3\sigma$ деб 2- жадвалдан қуйидагиларни

$$P\{|X - a| < \sigma\} = 2\Phi(1) = 0{,}6826,$$
$$P\{|X - a| < 2\sigma\} = 2\Phi(2) = 0{,}9544,$$
$$P\{|X - a| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0{,}9973$$

ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, агар X тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлса, ўз қийматларини 0,9973 ишонч эҳтимоли билан $[a - 3\sigma;\ a + 3\sigma]$ интервалда қабул қилади.

1-мисол. Нормал тақсимланган тасодифий миқдор қийматларини $[14, 24]$ кесмада қабул қилиш эҳтимолини топинг (математик кутилиши $a = 20$, ўртача квадратик четланиши $\sigma = 2$ га тенг).

△. Масала шартига кўра $\alpha = 14$, $\beta = 24$, $a = 20$, $\sigma = 2$; $P\{14 < X < 24\}$ ни топиш керак. Нормал тақсимланган тасодифий миқдор X нинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топиш

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

формуласига асосан
2- жадвалга асосан:

$$\Phi(2) = 0{,}4772;\quad \Phi(3) = 0{,}4965$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$P\{14 < X < 24\} = -0{,}4772 + 0{,}4965 - 0{,}97585$$

бўлади. ▲

2-мисол. Заводда ишлаб чиқарилаётган консерва банкасининг ўртача оғирлиги 250 г, ўртача квадратик четланиши 5 граммни ташкил этади. Банкаларнинг оғирлиги нормал тақсимланган деб унинг ўртачасидан оғишининг абсолют қиймати 8 граммдан ошмаслик эҳтимолини топинг.

△. Масала шартига кўра $a = 250$, $\sigma = 5$, $\delta = 8$.

$P\{|X - 250| < \delta\}$ ни топиш керак.

$P\{|x - a| < \delta| = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формулага асосан:

$$P\{|X - 250| < 8| = 2\Phi\left(\frac{8}{5}\right) = 2\Phi(1{,}6).$$

Китоб охиридаги 2- жадвалдан $\Phi(1{,}6) = 0{,}4452$ ни топамиз.

Демак,

$$P\{|X - 250| < 8 = 2 \cdot 0{,}4452 - 0{,}8904$$

бўлади. ▲

□. **42.** Нормал тақсимланган X тасодифий миқдор математик кутилиши a га, ўртача квадратик четланиши σ га тенг. Унинг (α, β) интервалдан қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

42. $a = 18$, $\sigma = 4$, $\alpha = 14$, $\beta = 24$.
43. $a = 12$, $\sigma = 2$, $\alpha = 10$, $\beta = 16$.
44. $a = 15$, $\sigma = 5$, $\alpha = 13$, $\beta = 23$.
45. $a = 10$, $\sigma = 3$, $\alpha = 7$, $\beta = 16$.
46. $a = 11$, $\sigma = 6$, $\alpha = 5$, $\beta = 23$.
47. $a = 2$, $\sigma = 3$, $\alpha = 0$, $\beta = 8$.
48. $a = 9$, $\sigma = 5$, $\alpha = 4$, $\beta = 24$.
49. $a = 5$, $\sigma = 1$, $\alpha = 4$, $\beta = 6$.
50. $a = 18$, $\sigma = 5$, $\alpha = 13$, $\beta = 33$.
51. $a = 7$, $\sigma = 4$, $\alpha = 3$, $\beta = 15$.

52. Кунгабоқр уруғининг оғирлиги нормал тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин. Унинг математик кутилиши $a = 58$ г ва ўртача квадратик четланиши $\sigma = 1$ бўлса, тасодифий олинган уруғ оғирлиги 57 граммдан 60 граммгача бўлиш эҳтимолини топинг.

X тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлиб, ўртача квадратик четланиши σ маълум бўлса, $|x - a| < \delta$ тенгсизлик бажарилиши эҳтимолини топинг:

53. $a = 15$, $\sigma = 3$, $\delta = 6$.
54. $a = 15$, $\sigma = 5$, $\delta = 10$.
55. $a = 11$, $\sigma = 6$, $\delta = 3$.
56. $a = 2$, $\sigma = 3$, $\delta = 4$.
57. $a = 12$, $\sigma = 8$, $\delta = 12$.

XII БОБ

ТАНЛАНМА МЕТОД

1-§. Танланманинг статистик тақсимоти

Танланманинг статистик тақсимоти ҳақидаги масалани ечишдан аввал математик статистиканинг айрим тушунчаларини айтиб ўтамиз. Математик статистика асосан иккита масалани ҳал қилади:

1. Статистик маълумотларни тўплаш ва агар лозим бўлса, группалаш усулларини кўрсатишдир.

2. Тадқиқот мақсадларига мувофиқ равишда статистик маълумотларни таҳлил қилиш методларини ишлаб чиқишдир.

Бир жинсли объектлар тўпламини ўрганиш бу объектларни характерловчи сифат ёки сон белгиларига қараб амалга оширилиши мумкин. Масалан, 1983 хўжалик йилида бирор колхоз ҳосилдорлиги унда етиштирилган пахтанинг килограмига (сон белгиси) ёки сортига (сифат белгиси) қараб баҳоланиши мумкин.

Баъзи ҳолларда объектлар тўпламининг барча элементларини бирор белгисига қараб текшириш мумкин. Аммо бу усул объектлар тўплами катта бўлганда, жуда катта амалий қийинчилик туғдиради. Бундай ҳолларда тўпламдан чекли сондаги объектлар тасодифий равишда ажратиб олиниб, шу олинган объектларгина ўрганилади.

Танланма тўплам деб ўрганилаётган объектлар тўпламидан тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўпламига айтилади.

Бош тўплам деб танлаш амалга ошириладиган объектлар тўпламига айтилади.

Тўпламнинг ҳажми деб тўпламдаги объектлар сонига айтилади.

Умуман танланма тўплам (бош тўпламдан) шундай олиниши керакки, унда бош тўпламнинг муҳим асосий хусусиятлари сақланган бўлсин, яъни олинган танланма тўпламни статистик таҳлил қилиш ёрдамида чиқарилган назарий ва амалий хулосалар бош тўпламини берилган ишончлилик даражаси билан етарлича тўлиқ характерлайдиган бўлсин. Математик статистикада бундай танланмани *репрезентатив танланма* дейилади. Бу хусусият кўпинча тасодифий танланмаларда сақланади.

Мисол. 70 га майдони бўлган бригаданинг биринчи теримда гектаридан ўртача неча центнердан пахта териб олишини тахминан баҳолаш талаб қилинган бўлсин. Айтайлик, 1 га майдонда ўртача 120000 туп ғўза бўладиган бўлса, табиийки, 70 га майдондаги ғўзалар сонини ва ҳар бирида очилган пахта чаноқлари сонини санаб чиқиш амалий жиҳатдан бажариб бўлмайдиган ҳолдир. Шу сабабли барча пахта майдонини ўлчами 100 кв. м. бўлган 7000 та квадратларга ажратиб уларни номерлаймиз ва улардан тасодифий равишда бир нечтасини, масалан, 50 тасини оламиз. Бу мисолда бош тўплам бригаданинг барча майдони 70 га бўлиб, унинг ҳажми $N = 7000$, танланма тўплам эса ажратиб олинган 0,5 га, ҳажми $n = 50$ бўлади.

Танлаш усуллари асосан қуйидагиларга бўлинади:

1. Бош тўпламни қисмларга ажратишни талаб қилмайдиган танлаш:

а) оддий қайтарилмайдиган тасодифий танлаш;

б) оддий қайтариладиган тасодифий танлаш.

2. Бош тўпламни қисмларга ажратилгандан кейин танлаш:

а) типик танлаш;

б) механик танлаш;

в) серияли танлаш.

Айтайлик, бош тўпламни ўрганиш учун бирор белгисига қараб ҳажми n бўлган танланма тўплам олинган бўлсин. Бунда x_1 қиймат n_1 марта, x_2 қиймат n_2 марта ва ҳоказо, x_k қиймат n_k марта кузатилган, $\sum n_i = n$ бўлсин*. Кузатилган x қийматлар *вариантaлар* дейилади, Вариантaларнинг ўсиб бориши тартибида ёзилган кетма-кетлик *вариацион қатор* дейилади. Кузатишлар сони n_i ни частоталар, $W = \frac{n_i}{n}$ ни *нисбий частоталар* дейилади.

Буни мисолда тушунтирамиз. Маълум бир пахта майдонидан тасодифий равишда 100 туп ғўза олиниб, шу олинган ғўзаларнинг ҳар бир тупида очилган чаноқлар сонини ҳисоблайлик. Бу мисолда барча ғўза тупи $n = 100$

---

* Тўплам тушунчасидагидан фарқли бу ерда бир элемент такрор қатнашиши мумкин деб ҳисобланилади.

танланма ҳажми бўлиб, варианта қиймати $x_1 = 0$ эса очилган чаноқлари сони 0 та бўлган ғўзани ва шундай ғўзалардан 100 туп ичида нечта бўлса, уларнинг сони n_1 (частотаси) бўлади, худди шундай варианта қиймати, $x_2 = 1$ очилган чаноғи 1 та бўлган ғўзани ва уларнинг сони n_2 (частотаси) бўлади ва ҳоказо.

Танланманинг *статистик тақсимоти* деб вариацион қаторнинг x варианталари ва уларга мос келувчи частоталар ёки нисбий частоталар рўйхатига айтилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\begin{array}{lllll} x_i & x_1 & x_2 \ldots x_k & \\ n_i & n_1 & n_2 \ldots n_k & (n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n) \\ x & x_1 & x_2 \ldots x_k & \\ W_i & W_1 & W_2 \ldots W_к & (W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 1). \end{array}$$

1-мисол. Группадаги ўқувчилардан 20 нафарининг бўйлари ўлчаниб, қуйидаги маълумотлар олинди:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
бўйи см	145	147	151	155	163	147	168	155	179	155	163	171	174	145	169	163	166	168	151	155

Шу маълумотларга кўра статистик тақсимотни тузинг.

△. Биз кўрамизки, маълумотлардан айримлари такрорланиб келаяпти, масалан, $x = 145$ икки марта, $x = 147$ икки марта ва ҳоказо. Шунинг учун частотали ва нисбий частотали статистик тақсимот тузишимиз мақсадга мувофиқдир:

x_i	бўйи, см	145	147	151	155	163	166	168	169	171	174	179
n_i	ўқувчилар сони	2	2	2	4	3	1	2	1	1	1	1
W_i	—	0,1	0,1	0,1	0,2	0,15	0,05	0,1	0,05	0,05	0,05	0,05

2-мисол. Танланма

$$\begin{array}{llll} x_i & 5 & 7 & 12 \\ n_i & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

частоталар тақсимоти кўринишда берилган. Нисбий частоталар тақсимотини топинг.

△. Танланманинг ҳажми қуйидагича:

$$n = 2 + 5 + 3 = 10$$

Нисбий частоталарни топамиз, бунинг учун ҳар бир частотани танламанинг ҳажмига бўламиз:

$$W_1 = \frac{2}{10} = 0{,}2; \qquad W_2 = \frac{5}{10} = 0{,}5; \qquad W_3 = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Демак, нисбий частоталар тақсимоти:

x_i	5	7	12
W_i	0,2	0,5	0,3

▲

Биз юқоридаги мисолларда танланма ҳажми кичик бўлганда унинг статистик тақсимотини тузишни ўргандик. Агар ўрганилаётган белги узлуксиз ўзгарувчи вариантадан иборат бўлса ёки дискрет бўлиб, қабул қиладиган қийматлари сони кўп (яъни танланма ҳажми $n \geqslant 30$) бўлса, бундай ҳолда статистик тақсимотнинг интервалли (группаларга ажратилган) вариацион қаторини тузиш мақсадга мувофиқ бўлади. Бош тўпламнинг объектив статистик қонуниятини очишда танланма тўпламни қуйидаги k та интервалга (группага) бўлиб (Стердеж таклиф қилган формула бўйича) таҳлил қилиш мумкин:

$$k = 1 + 3{,}322 \lg n.$$

Агар бу ерда k нинг қиймати каср сон бўлса, у яхлитлаб олинади. Фойдаланишга қулайлик туғдириш учун танланма ҳажмига боғлиқ равишда Стердеж формуласидан аниқланувчи интерваллар сонининг жадвалини келтирамиз:

Танланма ҳажми (n)	Олинадиган интерваллар сони (k)
25 — 40	5 — 6
40 — 60	6 — 8
60 — 100	7 — 10
100 — 200	8 - 12
n — 200	10 — 15

Интерваллар узунлиги (группалар кенглиги) h ни топишда

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

формуладан фойдаланиш мумкин, бу ерда $x_{\max}$, $x_{\min}$, мос равишда вариацион қаторнинг энг катта ва энг кичик қийматларидир. У ҳолда узунликлари h бўлган интерваллар (группалар) кетма-кетлигини қуйидаги тартибда олиш мумкин:

$$\left[x_{\min}-\frac{h}{2};\quad x_{\min}+\frac{h}{2}\right] \text{ — биринчи интервал,}$$

$$\left[x_{\min}+\frac{h}{2};\quad x_{\min}+\frac{3h}{2}\right] \text{ — иккинчи интервал,}$$

$$\left[x_{\min}+\frac{3h}{2};\quad x_{\min}+\frac{5h}{2}\right) \text{ — учинчи интервал ва ҳоказо.}$$

Албатта, интервалларни шундай олиш керакки, ҳар бир варианта фақат битта интервалга тегишли бўлсин.

3-мисол. Пахта майдонидан тасодифий равишда олинган $n = 50$ туп ғўзанинг ҳар биридан териб олинган пахта ҳосилининг оғирлиги (грамм ҳисобида) қуйидагича бўлди:

38,0	51,5	48,3	40,8	33,2	40,2	49,2	34,6	32,0	27,5
41,3	43,2	42,0	30,3	48,0	43,0	36,0	39,6	38,2	56,0
47,4	53,8	45,6	33,2	38,2	39,0	35,0	40,5	45,0	44,4
30,0	35,7	43,5	42,1	42,0	37,3	42,8	50,3	44,6	46,3
59,0	46,0	37,8	45,0	36,1	44,3	51,7	44,5	48,5	36,4

Шу танланма тўпламнинг статистик тақсимотини тузинг

△. Танланма ҳажми $n = 50$. Стердеж формуласига асосан интерваллар (группалар) сонини топамиз:

$k = 1 + 3{,}322\lg 50 = 1 + 3{,}322\lg(10\cdot 5) = 1 + 3{,}322\lg 10 + {}$ $+ 3{,}322\lg 5 = 1 + 3{,}322 + 3{,}322\cdot 0{,}699 = 6{,}64$(чунки $\lg 10 =$ $= 1,\ \lg 5 = 0{,}699$).

Демак, интерваллар (группалар) сонини ортиғи билан яхлитлаб $k = 7$ деб оламиз. Танланма тўплам қийматлари жадвалидан $x_{\min}=27{,}5$ ва $x_{\max}=59$ бўлганлигидан интерваллар (группалар) узунлиги қуйидагича бўлади:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{59-27{,}5}{6{,}64} = \frac{31{,}5}{6{,}64} = 4{,}74.$$

Бу мисолимизда узунлиги $h=4{,}74$ бўлган интерваллар қуйидагича бўлади:

[26,50—31,24], [31,24—35,98], [35,98—40,72], [40,72—45,46], [45,46—50,20], [50,20—54,94], [54,94—59,68]

Энди ҳар бир интервалга тушувчи варианталар (сонини) частоталарини топамиз. Масалан, [26,50—31,24]—биринчи интервалга 3 та варианта тегишли, улар 27,5; 30,0 30,3 бўлиб, интервални ўртача қиймати 28,27 га тенг, нисбий частотаси $W_1 = \frac{3}{50} = 0{,}06$. Худди шундай иккинчи интервалга [31,24—35,98] тегишли варианталар сони (частотаси) 6 та, яъни улар 34,6; 33,2; 32,6; 33,2; 35,0 35,7. Интервалнинг ўртача қиймати 33,6 бўлиб, интервалга тушувчи варианталар нисбий частотаси $W_2 = \frac{6}{50} = 0{,}12$ ва ҳоказо.

Юқоридаги ҳисоблашларга асосан танланма тўпламнинг тузилган вариацион қатори қуйидагича бўлади:

варианта интерваллари (г)	интервалга тегишли варианталар сони (частотаси) n_i	интервал ўртаси	нисбий частота (W)
26,50 — 31,24	3	28,87	0,06
31,24 — 35,98	6	33,61	0,12
35,98 — 40,72	12	38,35	0,24
40,72 — 45,46	15	43,09	0,30
45,46 — 50,20	8	47,83	0,16
50,20 — 54,94	4	52,57	0,08
54,94 — 50,68	2	57,31	0,04

Шундай қилиб, бу жадвал берилган 50 та маълумотнинг статистик тақсимоти бўлади.

☐ 1. Тажриба участкасидаги олмалардан 50 таси тортиб кўрилганда уларнинг оғирликлари қуйидагича бўлди (грамм ҳисобида):

65	28	38	55	77	100	40	46	52	80	74
70	25	30	58	46	80	69	60	25	33	50
60	74	87	90	98	22	39	60	74	80	55
92	95	38	78	70	49	30	92	100	50	43
95	40	80	92	90	50					

Танланманинг вариацион қаторини тузинг.

2. Частотали статистик тақсимот берилган.

x_i	6	8	12	16	25
n_i	3	5	8	2	2

Нисбий частотали тақсимотни тузинг.

2- §. Тақсимотнинг эмпирик (интеграл) функцияси

Қуйидаги белгилашларни киритамиз: n—танланма ҳажми, n_x—x дан кичик варианталар сони. У ҳолда $X<x$ ҳодисанинг нисбий частотаси $\frac{n_x}{n}$ бўлиб, x ўзгариши билан у ҳам ўзгариб боради, яъни x нинг функцияси бўлади, буни $F^*(x)$ билан белгилаймиз:

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n}.$$

$F^*(x)$ тақсимотнинг *эмпирик функцияси* дейилади Эмпирик функция қуйидаги хоссаларга эга:

1) $F^*(x)$ нинг қийматлари $]0;\ 1[$ кесмага тегишли.

2) $F^*(x)$ камаймайдиган функция.

3) Агар x_1 энг кичик варианта, x_2 эса энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x\leqslant x_1$ бўлганда $F^*(x)=0$; $x>x_2$ бўлганда эса $F^*(x)=1$ бўлади.

$F(x)$ бош тўпламдаги интеграл функция, яъни тақсимотнинг назарий функцияси, $F^*(x)$ танланма тақсимотнинг эмпирик функцияси бўлсин. $F^*(x)$ функция $F(x)$ функцияни статистик баҳолаш учун хизмат қилади.

1-мисол. Танланманинг ушбу тақсимоти бўйича унинг эмпирик функциясини топинг:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

△. Танланманинг ҳажмини топамиз:

$$n=1+3+2+4=10.$$

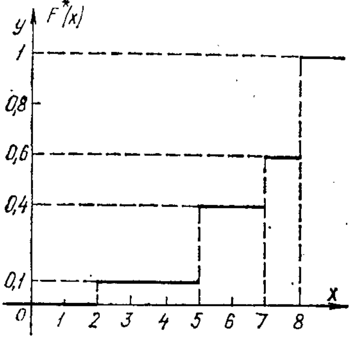
Энг кичик варианта 2 га тенг, шунинг учун $x\leqslant 2$ бўлганда $F^*(x)=0$ бўлади. $x<5$ қиймат, яъни $x_1=2$ қиймат 1 марта кузатилган, демак, $2<x\leqslant 5$ бўлганда $F^*(x)=\frac{1}{10}=$ $=0,1$; $x<7$ қийматлар; чунончи $x_1=2$, $x_2=5$ қийматлар $1+3=4$ марта кузатилган, демак, $5<x<7$ бўлганда $F^*(x)=\frac{4}{10}=0,4$; $x<8$ қийматлар; чунончи $x_1=2$, $x_2=6$, $x_3=7$ қийматлар $1+3+2=6$ марта кузатилган, демак, $7<x<8$ бўлганда $F^*(x)=\frac{6}{10}=0,6$.

$x_4=8$ энг катта варианта бўлганлиги учун $x>8$ бўлганда $F^*(x)=1$ бўлади.

Изланаётган эмпирик функция қуйидагича бўлади;

$$F^*(x)=\begin{cases} x\leqslant 2 \text{ бўлганда } 0; \\ 2< x\leqslant 5 \text{ бўлганда } 0,1; \\ 5<x\leqslant 7 \text{ бўлганда } 0,4; \\ 7<x\leqslant 8 \text{ бўлганда } 0,6; \\ x>8 \text{ бўлганда } 1. \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги эса қуйидагича бўлади (12.1-чизма):



12.1- чизма

Танланманинг қуйида берилган ушбу тақсимоти бўйича унинг эмпирик функциясини топинг ва графикларини чизинг.

3.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

4.

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

5.

x_i	5	6	8	11
n_i	6	5	4	5

6.

x_i	7	9	11	13
n_i	7	8	9	6

Жавоблар

3. $F^*(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 1 \text{ бўлса}, \\ 0,2, \text{ агар } 1<x\leqslant 4 \text{ бўлса}, \\ 0,5, \text{ агар } 4<x\leqslant 6 \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } x>6 \text{ бўлса}. \end{cases}$

4. $F^*(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 2 \text{ бўлса}, \\ 0,2, \text{ агар } 2<x\leqslant 6 \text{ бўлса}, \\ 0,5, \text{ агар } 6<x\leqslant 10 \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } x>10 \text{ бўлса}. \end{cases}$

5. $F^*(x)\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 5 \text{ бўлса}, \\ 0,3, \text{ агар } 5<x\leqslant 6 \text{ бўлса}, \\ 0,55, \text{ агар } 6<x\leqslant 8 \text{ бўлса}, \\ 0,75, \text{ агар } 8<x\leqslant 11 \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } x>11 \text{ бўлса}. \end{cases}$

$$6.\ F^*(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\leqslant 7 \text{ бўлса,} \\ 0{,}23 \text{ агар } 7<x\leqslant 9 \text{ бўлса,} \\ 0{,}5, \text{ агар } 9<x\leqslant 11 \text{ бўлса,} \\ 0{,}8, \text{ агар } 11<x\leqslant 13 \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } x>13 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

3- §. Полигон ва гистограмма

Ҳажми n бўлган танланма статистик тақсимоти билан берилган бўлсин:

x	x_1	x_2	...	x_k
n	n_1	n_2	...	n_k
W	W_1	W_2	...	W_k

бу ерда x_1, x_2, ... x_k—варианталар;
n_1, n_2, ..., n_k—мос частоталар;
W_1, W_2, ..., W_k—нисбий частоталар.

Частоталар полигони деб, (x_1, n_1), (x_2, n_2), ... (x_k, n_k) нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади.

Нисбий частоталар полигони деб (x_1, W_1), (x_2, W_2), ..., (x_k, W_k) нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади.

Бу чизиқларнинг графикларини ясаш учун варианталар қийматлари абсциссалар ўқига, частоталар ёки нисбий частоталар қийматлари ординаталар ўқига қўйиб чиқилади.

Статистик тақсимотнинг гистограммасини ясаш учун аввал барча кузатилган қийматларни узунлиги h бўлган кетма-кет қисмий интервалларга (группаларга) бўлинади ва ҳар бир интервалга тушган варианталарнинг частоталари топилади.

Частоталар гистограммаси деб, асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари $\frac{n_i}{h}$ нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади. Бу ерда $\frac{n_i}{h}$ нисбат *частота зичлиги* дейилади.

Нисбий частоталар гистограммаси деб, асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари $\frac{W_i}{h}$ нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади.

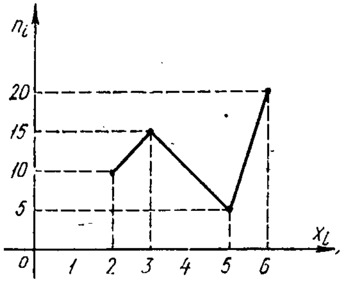
Частоталар гистограммасининг юзи танланма ҳажми n га, нисбий частоталар гистограммасининг юзи эса бирга тенг бўлади.

1-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича частоталар полигонини ясанг.

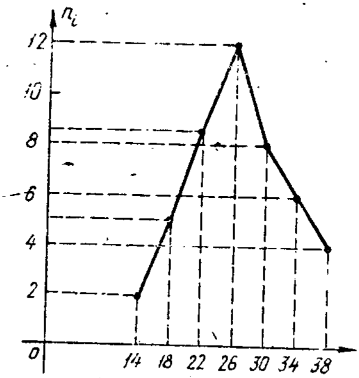
1) x_i	2	3	5	6			
n_i	10	15	5	20			
2) x_i	12	17	22	16	30	34	38
n_i	2	5	9	12	8	8	4

△ 1) Абсциссалар ўқида 2, 3, 5, 6 сонларни, ординаталар ўқида эса уларга мос 10, 15, 5, 20 сонларни белгилаймиз, яъни координаталари (2; 10), (3; 15), (5; 5), (6; 20) бўлган нуқталарни ясаб, уларни синиқ чизиқлар билан туташтирамиз (12.2-чизмага қаранг).

2) Юқоридаги мисол каби ечилади (12. 3-чизма). ▲



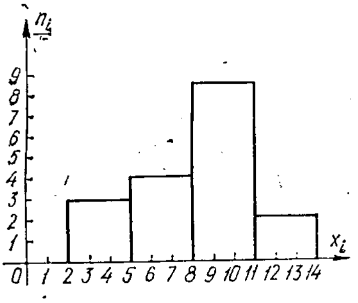
12.2-чизма



12.3-чизма

2-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича гистограмма ясанг.

Қисмий интерваллар	Интервалдаги варианталарнинг частоталари йиғиндиси	Частота зичлиги
2—5	9	3
5—8	10	$\frac{10}{3}$
8—5	25	$\frac{25}{3}$
11—14	6	2



12.4- чизма

△. Интерваллар узунлиги $h=3$ эканлиги мисолнинг шартидан кўриниб турибди. Абсциссалар ўқида $h=3$ узунликдаги интервалларни, ординаталар ўқида частоталар зичлиги ўринларини аниқлаймиз, сўнгра у нуқталардан абсциссалар ўқига параллел қилиб, ҳар бир интервал устида кесма чизамиз. Уларни туташтириб гистограммани ҳосил қиламиз (12.4-чизма). ▲

3-мисол. Жўхори донидан 100 дона олинди ва улар нинг ҳар бирини тортиб кўриб қуйидаги статистик тақсимот олинди:

Жўхорилар оғирликлари (г)	0,1—0,3	0,3—0,5	0,5—0,7	0,7—0,9
Жўхорилар сони	18	52	18	12

Шу тақсимотнинг гистограммасини тузинг.

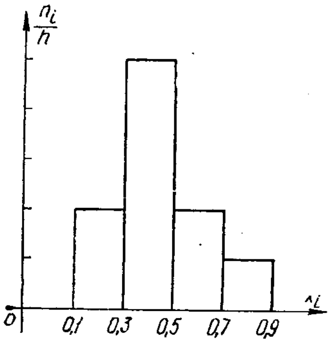
△. Интерваллар узунлиги $h=0,2$ га тенг бўлгани учун тўғри тўртбурчак баландликларининг нисбати мос равишда қуйидагича бўлади:

$$\frac{n_1}{h} = \frac{18}{0,2} = 90; \quad \frac{n_2}{h} = 260; \quad \frac{n_3}{h} = 90; \quad \frac{n_4}{h} = 60.$$

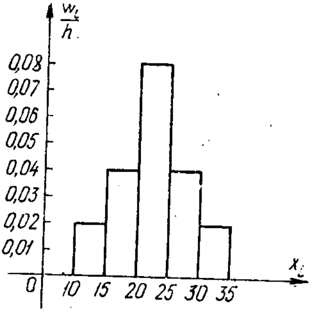
Интервалларни абсциссалар ўқида, баландликларини ординаталар ўқида қўйиб поғонавий тўғри тўртбурчаклар ҳосил қиламиз (12.5-чизмага қаранг). ▲

4-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича нисбий частоталар гистограммасини ясанг.

Интерваллар	Частоталар йиғиндиси
10—15	2
15—20	4
20—25	8
25—30	4
30—35	2



12.5- чизма



12.6- чизма

△. Бу ерда $n = 20$.

Нисбий частоталарни топамиз:

$$W_1 = \frac{2}{20} = 0,1;\ W_2 = \frac{4}{20} = 0,2;\ W_3 = 0,4;\ W_4 = 0,2;\ W_5 = 0,1.$$

Нисбий частоталар зичлигини топамиз:

$$\frac{W_1}{h} = \frac{0,1}{5} = 0,02;\ \frac{W_2}{h} = 0,04;\ \frac{W_3}{h} = 0,08;\ \frac{W_4}{h} = 0,04;\ \frac{W_5}{h} = 0,02.$$

Абсциссалар ўқида берилган қисмий интервалларни белгилаймиз. Нисбий частоталар зичликларини ординаталар ўқида белгилаймиз ва ҳар бир интервал устида кесмалар ўтказамиз, масалан (10, 15) интервал устида абсциссалар ўқига параллел ва ундан 0,02 масофада ётадиган кесма ўтказамиз ва ҳоказо (12. 6- чизмага қаранг). ▲

□. 7. Частоталар полигонини ясанг.

1)	x_i	1	4	5	7	
	n_i	20	10	14	6	
2)	x_i	15	20	25	30	40
	n_i	10	15	30	20	25

8. Нисбий частоталар полигонини ясанг.

1)	x_i	1	3	5	7	9
	n_i	10	15	30	33	12
2)	x_i	2	4	6	8	10
	n_i	15	10	35	30	10

9. 100 боланинг бўйи ўлчаниши натижасида қуйидаги маълумотлар олинди:

Боланинг бўйи, см	90—94	94—98	98—102	102—106	106—110	110—114	114—118
Болалар сони	2	8	20	32	24	12	2

Статистик тақсимотнинг гистограммасини ясанг.

10. Қуйидаги жадвалда келтирилган маълумотларга қараб гистограммани ясанг.

Қисмий интерваллар	Частоталар йиғиндиси
5—10	4
10—15	6
15—20	16
20—25	36
25—30	24
30—35	10
35—40	4

11. 400 га майдондаги экиннинг ҳосилдорлиги текширилиши натижасида қуйидаги маълумотлар олинди:

Ҳосилдорлик (ц)	8—10	10—12	14—14	14—16	16—18	18—20
га сони	6	19	54	141	102	78

Гистограммасини ясанг.

12. 50 колхозчининг меҳнат ҳақи бир йилда қуйидагича бўлди (сўм ҳисобида):

1336, 1302, 1304, 1316, 1350, 1321, 1322, 1307
1296, 1298, 1368, 1370, 1302, 1316, 1320, 1321
1340, 1342, 1304, 1306, 1330, 1326, 1313, 1318
1340, 1308, 1290, 1310, 1281, 1280, 1316, 1342
1354, 1360, 1313, 1326, 1292, 1300, 1360, 1370
1324, 1326, 1300, 1342, 1321, 1331, 1330, 1332
1341, 1282.

Интервалли вариацион қатор тузинг ва гистограммасини ясанг.

4-§. Бош ўртача қиймат ва дисперсия

Ўртача танланма қиймат ва танланма дисперсия. Айтайлик, бош тўпламнинг X дискрет сон белгиси ўрганилаётган бўлсин. Бош тўплам ҳажми N бўлиб, X символ қабул қиладиган қийматлари x_1, x_2, ..., x_k лардан иборат бўлиб, уларни мос равишда N_1, N_2, ... N_k частоталар билан қабул қилса ($N_1+N_2+\ldots+N_k=N$) у ҳолда

$$\bar{x}_Б = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i x_i = \frac{N_1x_1+N_2x_2+\ldots+N_kx_k}{N} \qquad (1)$$

ифода бош ўртача қиймат дейилади. Бунда

$$D_Б = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i(x_i-\bar{x}_Б)^2}{N} \qquad (2)$$

бош дисперсия дейилади.

Бош ўртача квадратик четланиш деб, бош дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_Б = \sqrt{D_Б}. \qquad (3)$$

Бош тўпламни ўрганиш мақсадида n ҳажмли танланма олинган бўлсин. Агар n ҳажмли танланма белгининг барча x_1, x_2, ..., x_k қийматлари мос равишда n_1, n_2, ..., n_k частоталарга эга бўлиб, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ бўлса,

$$\bar{x}_т = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_kx_k}{n} \qquad (4)$$

ифода *ўртача танланма қиймат* дейилади.

$$D_т = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-\bar{x}_т)^2}{h}. \qquad (5)$$

Танланма ўртача квадратик четланиш деб танланма дисперсиядан олинган квадратик илдизга айтилади:

$$\sigma_т = \sqrt{D_т}. \qquad (6)$$

Иккала ҳолда ҳам дисперсияни қуйидаги формула орқали ҳисоблаш қулайдир:

$$D=\overline{x}^2-[\overline{x}]^2, \tag{7}$$

бу ерда

$$\overline{x}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2: \qquad \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_ix_i.$$

Вариацион қаторнинг яна бошқа сонли характеристикалари мавжуд. Биз улардан айримларини келтирамиз.

1. Вариантанинг энг катта частотага эга бўлган қиймати *мода* деб айтилади ва Мо билан белгиланади.

2. *Медиана* m_e деб вариацион қаторни варианталар сонини тенг икки қисмга ажратадиган вариантага айтилади. Агар $n=2k+1$ бўлса, $m_e=x_k+1$ бўлади; агар $n=2k$ бўлса,

$$m_e=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}.$$

3. *Вариация қулочи* деб энг кичик ва энг катта варианталар айирмасига айтилади:

$$R=x_{max}-x_{min}.$$

4. *Ўртача абсолют четланиш* деб абсолют четланишларнинг ўртача арифметик қийматига айтилади:

$$\theta=\frac{\sum n_i|x_i-x_{\text{т}}|}{\sum n_i}.$$

Вариация коэффициенти деб ўртача танланма квадратик четланишнинг ўртача танланма қийматга нисбатининг процентларда ифодаланишига айтилади:

$$V=\frac{\sigma_{\text{т}}}{x_{\text{т}}}\cdot 100\%.$$

Варианталар айирмалари бир хил c га тенг бўлган ҳол учун ўртача қийматни қуйидаги формула орқали ҳисоблаш мумкин:

$$\overline{x}=a=\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i-a}{c}\right)n_i. \tag{8}$$

Худди шу каби дисперсияни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\sigma^2=\frac{c^2}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i-a}{c}\right)^2n_i-(\overline{x}-a)^2, \tag{9}$$

бу ерда *a*—сохта ноль, яъни энг катта частотага эга бўлган варианта.

1-мисол. Туғилган 500 та бузоқдан 63 таси олиниб оғирлиги ўлчанганда қуйидаги маълумотлар оилинд:

Бузоқлар оғирликлари (кг)	24	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	43	45
Бузоқлар сони	2	1	7	6	5	3	10	3	2	6	7	5	1	2	1	1	1

Танланма ўртача қиймат, дисперсия, ўртача квадратик четланишини топинг.

Бу мисолни ечишда (4), (7), (6) формулалардан фойдаланамиз:

$$1)\quad \bar{x}_т = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{2066}{63} = 32,79$$

$$x_т = 32,79.$$

$$2)\quad D = \frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i} - [x_т\,]^2 = 1092,76 - 1075,18 = 17,58.$$

$$D_т = 17,58.$$

$$3)\quad \sigma = \sqrt{D_т} = \sqrt{17,58} = 4,19.$$

$$\sigma = 4,19.$$

2-мисол. Аввалги параграфдаги 12 мисолда келтирилган маълумотлар асосида 50 та колхозчининг бир йиллик меҳнат ҳақининг ўртача қийматини, дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

△. (4) формулага асосан

$$\bar{x} = \frac{1285\cdot3+1295\cdot4+1305\cdot9+1315\cdot7+1325\cdot9+1335\cdot5+1345\cdot6+}{50}$$

$$\frac{+1355\cdot2+1365\cdot5}{50} = \frac{66190}{50} = 1323,8 \approx 1324.$$

$$\bar{x} = 1323,8 \text{ сўм} \approx 1324 \text{ сўм}.$$

Дисперсиясини топиш учун (5) формуладан фойдаланамиз:

$$D = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = 406,6. \quad D = 406\ 6.$$

Энди ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{406,6} = 20,16.$$

Демак, четланиш $\sigma = 20$ сўм 16 тийин экан (яъни ўртача ҳақдан 20 сўм 16 тийинга фарқ қилар экан).

3-мисол. Сув омборида 20000 та балиқ бўлиб, уларнинг ўртача узунликларини аниқлаш учун 500 та балиқ олинган. Ҳар бир балиқ узунлиги ўлчанганда қуйидаги статистик тақсимот олинган:

Балиқлар узунликлари, см	12,5 13,5	13,5 -14,5	14,5 -15,5	15,5 -16,5	16,5 -17,5	17,5 -18,5	18,5 -19,5	19,5 -20,5	20,5 -21,5
Балиқлар, ўртача узунликлари см x_i	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Балиқлар сони n_i	20	15	40	80	150	100	60	20	15

Қуйидағиларни топинг:

1) Ўртача танланма қиймат; 2) танланма дисперсия; 3) ўртача квадратик четланиш; 4) мода; 5) медиана; 6) вариация қулочи; 7) ўртача абсолют четланиш; 8) вариация коэффициенти.

1) Ўртача танланма қийматни (8) формуладан фойдаланиб топамиз. Бу мисолда $a = 17$ деб оламиз, чунки 17 энг катта частотага эга, $c = 1$ деб оламиз, чунки варианталар орасидаги айирма 1 га тенг. $\frac{x_i - a}{c}$ ни ҳисобласак: —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4 сонлар келиб чиқади, демак қуйидаги жадвал ҳосил бўлди:

x_i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
n_i	20	15	40	80	150	100	60	20	15	
$\frac{x_i - a}{c}$	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	
$\left(\frac{x_i - a}{c}\right)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16	
$\frac{x_i - a}{c} \cdot n_i$	—80	—45	—80	—80	0	100	120	60	60	55
$\left(\frac{x_i - a}{c}\right)^2 n_i$	320	135	160	80	0	100	240	180	240	1455

Олинган қийматларни (8) га келтириб қўямиз:

$$\bar{x} = a + \frac{c}{n}\sum_{i=1}^{R}\left(\frac{x_i - a}{c}\right)n_i = 17 + \frac{1}{500}\cdot 55 \approx 17{,}11.$$

$$\bar{x} = 17{,}11 \text{ см}.$$

2). Дисперсияни ҳисоблашда (9) формуладан фойдаланамиз:

$$\sigma^2 = \frac{c^2}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i - a}{c}\right)^2 n_j - (\bar{x} - a)^2 = \frac{1^2}{500}\cdot 1455 - (17{,}11 -$$

$$- 17)^2 \approx 2{,}92.$$

$$\sigma^2 = 2{,}92.$$

3) Ўртача квадратик четланиш қуйидагича бўлади:

$$\sigma_0 = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2{,}92} \approx 1{,}7; \quad \sigma = 1{,}7.$$

4) Модани ҳисоблаймиз:

$M_0 = 17$ (чунки энг катта частотага эга бўлган вариантадир).

5) Медианани топамиз:

$$m_e = 17.$$

6) Вариация қулочи қуйидагича бўлади:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 21 - 13 = 8. \quad R = 8.$$

7) Ўртача абсолют четланишни топиш учун $|x_i - x_т|$ ни ҳисоблаймиз:

$(x_i - x)$	4,11	3,11	2,11	1,11	0,11	0,89	1,89	3,89	.
$(x_i - x)n_i$	82,2	46,65	88,8	16,5	89	113,4	57,8	58,35	537,10

Демак, $\theta = \dfrac{\sum n_i|x_i - \bar{x}|}{\sum n_i} = \dfrac{537{,}10}{500} = 1{,}7.$

$$\theta = 1{,}7.$$

8) Вариация коэффициентини топамиз:

$$V = \frac{\sigma_0}{\bar{x}}\cdot 100\% = \frac{1{,}7}{17{,}11}\cdot 100\% \approx 99\%.$$

□. **13.** Танланма тўплам тақсимоти берилган:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Танланма дисперсияси ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Жавоб. $\overline{x}_т = 2$, $D_т = 1$, $\sigma_т = 1$.

14. Қуйидаги статистик тақсимот берилган:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	1	4	10	39	13	7	3	2	1

$\overline{x}$, D, σ, $M_о$, me, v ларни топинг.

Жавоб. $\overline{x} = 4{,}35$; $D = 1{,}88$; $\sigma = 1{,}37$;
$M_о = 4$; $m_e = 5$; $V = 31{,}5$.

15. Кузатилган 200 асбобнинг бузилмасдан (тўхтамасдан) ишлаш вақти қуйидагича:

Ишлаш вақти. x_i (соат)	25	75	125	175	225	275	325	375	425
Асбоблар сони n_i	1	1	24	30	71	31	21	13	2

Шу маълумотларга асосан асбобларнинг ўртача ишлаш вақти, дисперсияси ва ўртача квадратик четланишини топинг:

Жавоб. $\overline{x} \approx 229$ соат; $D = 5846{,}5$; $\sigma_о = 76{,}5$.

16. Танланманинг берилган

1)

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

2)

x_i	2560	2600	2650	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

статистик тақсимотлари бўйича танланма қийматини ва дисперсиясини топинг.

XIII БОБ

ТАҚСИМОТ ПАРАМЕТРЛАРИНИНГ СТАТИСТИК БАҲОЛАРИ

1-§. Нуқтавий баҳо

Айтайлик назарий мулоҳазаларга асосан бош тўпламнинг сон белгиси x маълум типдаги тақсимотга эга бўлсин. Бу ҳолда табиий равишда тақсимотни аниқловчи параметрларни бош тўпламдан олинган танланма тўплам ёрдамида баҳолаш масаласи туғилади. Масалан, ўрганилаётган x белги бош тўпламда нормал тақсимланганлиги маълум бўлса, нормал тақсимот математик кутилиши ва дисперсияси билан тўлиқ аниқланганлиги сабабли бу номаълум параметрларни танланма ёрдамида баҳолаш зарур бўлади. Умуман, назарий тақсимот номаълум параметрининг *статистик баҳоси* деб, кузатиш натижаларининг бир қийматли ихтиёрий функциясига айтилади.

Номаълум параметрларни танланма ҳажми катта бўлганда нуқтавий баҳо ва танланма ҳажми кичик бўлганда интервалли баҳо ёрдамида баҳолаш мумкин.

Нуқтавий баҳо деб, битта сон билан аниқланадиган статистик баҳога айтилади. „Яхши“ яқинлашиши учун у 1) силжимаган; 2) эффектив ва 3) асосли баҳо бўлиши керак.

1) *Силжимаган* (систематик хатога эга бўлмаган) *баҳо* деб математик кутилиши исталган ҳажмли танланма бўлганда ҳам, баҳоланаётган θ параметрга тенг бўлган θ^* статистик баҳога айтилади, яъни θ^* статистик баҳо номаълум θ параметрга силжимаган баҳо бўлиши учун $M\theta^*=\theta$ бўлиши керак.

Масалан, кўрсатиш мумкинки $\overline{x}_Б$ бош ўртача қиймат учун $\overline{x}_Т$ танланма ўртача қиймат силжимаган баҳо бўлади, яъни $M\overline{x}_Т=\overline{x}_Б$. Аммо бош дисперсия $D_Б$ учун танланма дисперсия $D_Т$ силжимаган баҳо бўла олмайди. Бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси учун тузатилган

$$S^2=\frac{n}{n-1}D_\Gamma=\frac{\sum n_i\,(x_i-\overline{x}_T)^2}{n-1}$$

танланма дисперсия олинади.

2) *Эффектив баҳо* деб (танланманинг ҳажми n берилганда) мумкин бўлган энг кичик дисперсияга эга бўлган статистик баҳога айтилади.

3) *Асосли баҳо* деб $n\to\infty$ да баҳоланаётган параметрга эҳтимол бўйича яқинлашадиган статистик баҳога айтилади.

Масалан, хусусий ҳолда, агар $n\to\infty$ да баҳонинг дисперсияси нолга интилса, бундай баҳо асосли ҳам бўлади.

Юқорида айтилган $\overline{x}_T$, D_Γ, S^2 баҳолар—нуқтавий баҳолардир.

1-мисол. Бош тўпламдан $n=60$ ҳажмли танланма олинган:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Бош ўртача қийматнинг силжимаган баҳосини топинг.

△. Ўртача танланма қиймат бош ўртача қиймат учун силжимаган баҳо бўлгани учун, уни

$$\overline{x}_T=\frac{\sum n_i\ x_i}{n}$$

формула билан ҳисоблаймиз.

$$\overline{x}_T=\frac{1\cdot 8+3\cdot 40+6\cdot 10+26\cdot 2}{60}=\frac{8+120+60+52}{60}=4,$$

демак,

$$\overline{x}_T=4.\ \blacktriangle$$

2-мисол. $n=51$ ҳажмли танланма бўйича бош дисперсиянинг $D_Г=5$ силжиган баҳоси топилган. Бош тўплам дисперсиясининг силжимаган баҳосини топинг.

△. Тузатилган танланма S^2 дисперсиясини қуйидаги формула орқали топамиз:

$$S^2=\frac{n}{n-1}D_T=\frac{51}{50}\cdot 5=5{,}1.\ S^2=5{,}1\quad\blacktriangle$$

2-§. Баҳонинг аниқлиги, ишончли эҳтимол. Ишончли интервал

Айтайлик, бош тўпламнинг x сон белгиси маълум тақсимотга эга бўлсин. Бу тақсимотнинг номаълум параметрларини, танланма ҳажми кичик бўлганда, нуқтавий баҳо ёрдамида баҳолаш қўпол хатога олиб келиши мумкин. Бундай ҳолда интервал баҳодан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади. *Интервал баҳо* деб иккита сон — интервалнинг учлари билан аниқланадиган баҳога айтилади.

θ—номаълум параметр, θ^*—танланма маълумотлари бўйича топилган статистик характеристика, яъни θ нинг баҳоси бўлсин.

Равшанки, $|\theta-\theta^*|$ қанча кичик бўлса, яъни $|\theta-\theta^*|<\delta$ шартда δ қанча кичик бўлса, θ^* баҳо шунча аниқ бўлади. Бунда δ сон θ^* баҳонинг **аниқлиги** дейилади.

θ баҳонинг θ^* бўйича *ишончлилиги (ишончли эҳтимол)* деб $|\theta-\theta^*|<\delta$ тенгсизликнинг амалга ошиш эҳтимоли γ га айтилади, яъни

$$P\{|\theta-\theta^*|<\delta\}=\gamma.$$

Ишончли интервал деб номаълум параметрни берилган γ ишончлилик билан қоплайдиган $(\theta^*-\delta, \theta^*+\delta)$ интервалга айтилади.

Бош тўпламнинг бирор характеристик сон белгиси x нормал тақсимланган бўлсин. Шу миқдорнинг a математик кутилишини унинг ўртача квадратик четланиши маълум бўлганда $x_{\text{т}}$ танланма ўртача қиймат бўйича баҳолаш талаб қилинган бўлсин. Бу ҳолда бош тўпламнинг номаълум математик кутилиш a учун γ ишончлилик даражаси билан тузилган ишончли интервал

$$\bar{x}_{\text{т}}-t_\gamma\frac{\tau}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_{\text{т}}+t_\gamma\frac{\tau}{\sqrt{n}}$$

бўлади, бу ерда $\delta=t_\gamma\frac{\tau}{\sqrt{n}}$ баҳонинг аниқлиги; n—танланма ҳажми; t_γ—Лаплас функцияси $\Phi(t_\gamma)$ аргументнинг $\Phi(t)=\gamma/2$ бўладиган қиймати (2- жадвал).

σ номаълум бўлганда, юқоридаги баҳо учун

$$\bar{x}_{\text{т}}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_{\text{т}}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}$$

интервал хизмат қилади, бу ерда S—тузатилган ўртача квадратик четланиш t_γ ни (Стьюдент тақсимоти бўйича) 3-жадвалдан берилган n ва γ бўйича топилади.

Танланма аниқлигини баҳолашда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) баҳонинг аниқлиги δ берилади, $P\{|\bar{x}_{\text{т}}-a|\leqslant\delta\}$ эҳтимолни топиш керак бўлади.

2) $P\{|\bar{x}_T - a| \leqslant \delta\}$ эҳтимол берилади, δ ни топиш керак бўлади.

3) баҳонинг аниқлиги δ ва $P\{|\bar{x}_T - a| \leqslant \delta\}$ эҳтимоли берилган бўлиб, танланма ҳажми n ни топиш керак бўлади.

Нормал тақсимланган X миқдорий белгининг σ ўртача квадратик четланишини, S тузатилган танланма ўртача квадратик четланиш бўйича γ ишончлилик билан баҳолаш учун ушбу ишончли интерваллар хизмат қилади:

$$S(1-q)<\sigma<S(1+q) \quad (q<1),$$
$$0<\sigma<S(1+q) \quad (q>1),$$

бу ерда q ни 4-жадвалдан берилган n ва γ бўйича топилади.

1-мисол. Нормал тақсимланган X белгининг ўртача квадратик четланиши $\sigma=2$, танланма ўртача қиймати $\bar{x}_T=5{,}4$ ва танланма ҳажми $n=10$ бўлса, унинг номаълум a математик кутилишига $\gamma=0{,}95$ ишончлилик билан ишончли интервални тузинг.

$\triangle$. Аввал $2\Phi(t)=0{,}95$ тенгликдан $\Phi(t)=0{,}475$ ни ҳосил қиламиз. Китоб охиридаги 2-жадвалдан $t_{0,95}=1{,}96$ ни топамиз. Энди баҳонинг аниқлиги δ ни $\delta=\frac{t\sigma\gamma}{\sqrt{n}}$ формуладан топамиз:

$$\delta=\frac{1{,}96\cdot 2}{\sqrt{10}}\approx 1{,}24.$$

Ишончли интервал $\bar{x}_T-1{,}24<a<\bar{x}_T+1{,}24$ ёки $5{,}4-1{,}24<a<5{,}4+1{,}24$ ёки $4{,}16<a<6{,}64$ бўлади.

Демак, 95% ишонч билан айтиш мумкинки (4,15; 6,64) ишончли интервал номаълум a параметрни тўла қоплайди. Баҳонинг аниқлиги $\delta=1{,}24$. ▲

2-мисол. Экилган канопдан 100 тупи танлаб олинди. Каноп пояларининг узунликларини ҳисоблаб чиқилганда қуйидаги маълумотлар олинди (см):

варианталар x_i	45	55	65	75	85	95	105	115
частоталар n_i	1	5	11	26	33	16	7	1

X бош тўплам ўрта қиймати учун ишончли интервални топинг ($\gamma=0{,}95$).

$\triangle$. Аввал статистик характеристикаларни ҳисоблаймиз. Бунинг учун ҳисоблаш жадвалини қуйидагича тузамиз:

1) биринчи устунга варианталарни;

2) иккинчи устунга частоталарни;

3) учинчи устунга частоталар билан варианталар кўпайтмасини;

4) тўртинчи устунга варианталар квадратларини;

5) бешинчи устунга варианталар квадратларининг мос частоталарга кўпайтмасини жойлаштирамиз.

6) жадвал остига мос устунлардаги рақамлар йиғиндисини ёзамиз.

x_i	n_i	$x_i\ n_i$	x_i^2	$x_i^2\ n_i$
45	1	45	2025	2025
55	5	275	3025	15125
65	11	715	4225	46475
75	26	1950	5625	146250
85	33	2805	7225	238425
95	16	1520	9025	144400
105	7	735	11025	77175
115	1	115	13225	111225
Σ	100	8160	—	683100

7) танланма ўртасини

$$\bar{x}_{\text{Т}} = \frac{1}{n}\sum x_i\, n_i$$

формула орқали ҳисоблаймиз. Жадвалдаги қийматларни ўрнига қўйиб чиқамиз:

$$\bar{x}_{\text{Т}} = \frac{8160}{100} = 81{,}6, \qquad \bar{x}_{\text{Т}} = 81{,}6;$$

8) дисперсияни

$$D_{\text{Т}} = \frac{1}{n}\sum n_i\, x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum x_i\, n_i\right)^2$$

формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз. Жадвалдаги қийматларни қўямиз:

$$S^2 = 6831 - (81{,}60)^2 = 180{,}44; \quad S = 180{,}44;$$

9) ўрта квадратик четланишни топамиз:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{180{,}44} \approx 13{,}4 \text{ см};$$

10) вариация коэффициентини топамиз:

$$V = \frac{S}{\bar{x}_{\text{Т}}} \cdot 100\% = \frac{13{,}4}{81{,}6} \cdot 100\% = 16{,}3\%;$$

11) танланма ўртасининг абсолют хатоси қуйидагича:

$$\theta=\frac{S}{\sqrt{n}}=\frac{13,4}{10}=1,34 \text{ см};$$

12) бош тўплам ўртасининг ишончли интервалини топамиз: Бизда $\bar{x}_T=81,6$; $\gamma=0,95$; $n=100$; $S=13,4$.

Ишонч интервали

$$\bar{x}_T-t_\gamma\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_T+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (*)$$

тенгсизликдан топилади.

t_γ ни 3-жадвалда берилган n ва γ лар бўйича топамиз. ($n=100$, $\gamma=0,95$) $t_\gamma=1,984$. Буларни (*) тенгсизликка олиб бориб қўямиз:

$$81,6-1,984\cdot\frac{13,4}{\sqrt{100}}<a<81,6+1,984\frac{13,4}{\sqrt{100}};$$

$$78,9<a<84,3.$$ ▲

3-мисол. Танланманинг шундай минимал ҳажмини топингки, нормал тақсимланган бош тўплам математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича баҳосининг аниқлиги 0,925 ишончлилик билан 0,2 га тенг бўлсин. Бош тўпламнинг ўртача квадратик четланиши маълум: $\sigma=1,5$.

Бизга қуйидагилар берилган:

$$\gamma=0,925;\ \sigma=1,5;\ \delta=0,2;\ 2\Phi(t)=0,925.$$

Булардан фойдаланиб $\Phi(t)$ ни топамиз:

$$\Phi(t)=\frac{0,925}{2}=0,4625.$$

2-жадвалда $\Phi(t)=0,4625$ га t нинг $t=1,78$ қиймати мос келади.

Бош тўплам математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича баҳосининг аниқлигини ифодалайдиган

$$\delta=t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

формуладан фойдаланамиз:

$$\sqrt{n}=\frac{t\sigma}{\delta} \text{ ёки } n=\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}.$$

Бу ерда t, σ, δ ларнинг қийматларини қўямиз:

$$n=\frac{(1,78)^2\cdot(1,5)^2}{(0,2)^2}=177,\quad n=177.$$ ▲

4-мисол. Бош тўпламнинг x сон белгиси нормал тақсимланган ҳажмли танланма бўйича тузатилган ўртача квадратик четланиш s топилган.

Агар а) $n=10$, $s=5,1$; б) $n=50$, $s=14$ бўлса, σ ўртача квадратик четланишни 0,999 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

△. $\gamma=0,999$ ва $n=10$ бўйича 4-жадвалдан $q=1,80$ ни топамиз.

Маълумки, ишончлилик интервалини топиш учун қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$s\,(1-q)<\sigma<s\,(1+q) \qquad (\text{агар } q<1 \text{ бўлса})$$

ёки

$$0<\sigma<s\,(1+q) \qquad (\text{агар } q>1) \text{ бўлса})$$

$g=1,80>1$ бўлгани учун иккинчи формуладан фойдаланамиз:

$$0<\sigma<5,1\cdot(1+1,8) \text{ ёки } 0<\sigma<14,28.$$

б) 4-жадвалдан $q=0,43$ ни топамиз. $q<1$ бўлгани учун

$$s\,(1-q)<\sigma<s\,(1+q)$$

формуладан фойдаланамиз:
$14\cdot(1-0,43)<\sigma<14\ (1+0,43)$ ёки $7,98<\sigma<20,02$ бўлади. ▲

5-мисол. 10 000 гектар майдонда танлаб олиш йўли билан 500 гектари олинган ва ундаги экиннинг ҳосилдорлиги ўлчанганда қуйидаги маълумотлар олинган (такрорланмаган тасодифий танланма):

1 га даги ҳосилдорлиги, ц	8—10	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	Жами
Гектарлар сони	8	37	79	165	126	35	$n=500$

Тақсимотни нормал деб фараз қилиб:

1) бутун майдондаги ҳосилдорликнинг танлаб олинган участкасидаги ҳосилдорлик ўртачасидан 0,2 ц га ортмаслик эҳтимолини топинг;

2) ўртача ҳосилдорлик чегараси (интервали)ни 0,95 эҳтимол билан топинг.

а) Аввал танланма ўртачасини

$$\bar{x}_T=a+\frac{c}{n}\sum\left(\frac{x_i-a}{c}\right)n_i$$

формула орқали топамиз. Бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз (танланма ўртачасини юқорида ҳам ҳисоблаган эдик) формулада $a=15$; $c=2$ деб оламиз:

x_i	9	11	13	15	17	19	Жами
n_i	8	37	79	165	126	85	500
$\frac{x_i-a}{c}$	-3	-2	-1	0	1	2	—
$\left(\frac{x_i-a}{c}\right)^2$	9	4	1	0	1	4	—
$\left(\frac{x_i-a}{c}\right)n_i$	-27	-74	-79	0	126	170	119
$\left(\frac{x_i-a}{c}\right)^2 n_i$	72	148	79	0	126	340	765

$$\overline{x}_T = 15 + \frac{2}{500}\cdot 119 = 15,676. \quad \overline{x}_T = 15,676 \text{ ц}.$$

Танланма дисперсиясини топишда

$$\sigma^2 = \frac{c^2}{n}\sum\left(\frac{x_i-a}{c}\right)^2 n_i - (\overline{x}_T - a)^2$$

формуладан фойдаланамиз:

$$\sigma^2 = \frac{4}{500}\cdot 765 - (15,676 - 15)^2 \approx 5,66.$$

Энди $P\{|\overline{x}_T - a| \leqslant \delta\}$ эҳтимолни топишимиз керак, бу ерда $\delta = 0,2$ танланма такрорланмайдиган бўлгани учун эҳтимолни топишда

$$P\ \{|\overline{x}_T - a| \leqslant \delta) = \Phi\left(\delta\cdot\sqrt{\frac{n}{\sigma_0^2\left(1-\frac{n}{N}\right)}}\right)$$

формуладан фойдаланамиз, бу ерда a—бош тўпламнинг ўртача қиймати.

$n=500$, $N=10000$ σ_0^2 номаълум бўлгани учун унинг ўрнига σ^2—ни оламиз:

$$P\ \{|\overline{x}_T - a| < 0,2\} = \Phi\left(0,2\sqrt{\frac{500}{5,66\left(1-\frac{500}{10\,000}\right)}}\right) =$$

$$= \Phi\ (0,2\cdot\sqrt{92,3}) = \Phi\ (1,92).$$

Китоб охиридаги 2-жадвалдан

$$\Phi\ (1,92) = 0,4726$$

ни топамиз. Демак $P\ \{|\overline{x}_T - a| < 0,2\} = 0,4726$ бўлади;

б) аввал δ ни топиш учун

$$\delta = t\sqrt{\frac{\sigma_0^2\left(1-\frac{n}{N}\right)}{n}}$$

формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун t ни $2\Phi(t)=0,95$ тенгликдан топамиз. 2-жадвалдан $t=1,96$ ни аниқлаймиз:

$$\sigma = 1,96\sqrt{\frac{5,66\left(1-\frac{500}{10\,000}\right)}{500}} \approx 0,2.$$

Демак ишончли интервал

$$\bar{x}_{\text{Т}} - \delta \leqslant a \leqslant \bar{x}_{\text{Т}} + \delta$$

дан фойдалансак $15,676 - 0,2 \leqslant a \leqslant 15,676 + 0,2$ ёки $15,476 < a \leqslant 15,876$ бўлади. ▲

□. **1.** Бош ўртача квадратик четланиш σ, танланма ўртача қиймат $\bar{x}_{\text{Т}}$ ва танланма ҳажми n берилган. Бош тўпламни нормал тақсимланган деб, унинг номаълум a математик кутилишига 0,95 ишончлилик даражаси билан ишончли интервалларни тузинг:

1) $\sigma=5$, $\bar{x}_{\text{Т}}=14$, $n=25$;

2) $\sigma=4$, $\bar{x}_{\text{Т}}=10,2$, $n=16$.

Жавоб. 1) $12,04<a<15,96$; 2) $7,63<a<12,77$.

2. Бош тўпламдан $n=10$ ҳажмли танланма олинган:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Бош тўпламнинг нормал тақсимланган x белгисининг a математик кутилишини танланма ўртача қиймат бўйича 0,95 ишончлилик билан ишончли интервал ёрдамида баҳоланг.

Жавоб $03<a<3,7$.

3. Бош тўпламдан олинган $n=16$ ҳажмли танланманинг нормал тақсимланган миқдорий белгининг тузатилган ўртача квадратик четланиши $s=1$ топилган. σ бош ўртача квадратик четланишни 0,95 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

Жавоб. $0,56<\sigma<1,44$.

4. Буғдой донининг оқсилини аниқлаганда қуйидаги маълумотлар олинган: $\bar{x}_{\text{Т}}=14,80\%$. Танланма ўртачасининг нисбий хатоси $S_{\bar{x}}=0,20\%$, $n=4$. Бош ўртача учун 95% ли ва 99% ли ишончли интервалларни топинг.

Жавоб. а) (14,16; 15,44); б) (13,63; 15,97).

Кўрсатма. $\bar{x}_T \pm t \frac{s}{\sqrt{n}}$ формуладан фойдаланиш керак.

5. Катта партияда тайёрланган деталлардан n ҳажмли танланмадаги деталлар узунликларининг ўртача арифметиги $\bar{x}_T$ топилган. Деталлар узунлиги X—нормал тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин. Бош тўплам ўртача квадратик четланиши. $\sigma=0,5$ мм маълум бўлса, номаълум математик кутилиши a ни γ ишончли эҳтимол билан қопловчи ишончли интервалини топинг:

а) $\bar{x}_T=50$ мм; $n=64$; $\gamma=0,95$;

б) $\bar{x}_T=51$ мм; $n=49$; $\gamma=0,99$;

в) $\bar{x}_T=52$ мм; $n=36$; $\gamma=0,999$.

Жавоб. а) $49,8775<a<50,1225$; б) $50,815<a<51,185$; в) $51,725<a<52,275$.

6. Деталларнинг узунликлари нормал тақсимланган X тасодифий миқдор бўлсин. Агар бош ўртача квадратик четланиш $\sigma=0,5$ мм бўлиб, ишончли эҳтимоллари γ маълум бўлса, математик кутилиш a ни $\delta=0,25$ баҳо аниқликда қопловчи энг кичик танланма ҳажмини топинг.

а) $\gamma=0,95$; б) $\gamma=0,99$; в) $\gamma=0,999$.

Кўрсатма. $n=\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$ формуладан фойдаланиш керак.

7. Бош тўпламнинг сон белгиси x нормал тақсимланган. $n=10$ ҳажмли танланма бўйича „тузатилган" ўртача квадратик четланиш $s=0,16$ топилган. Бош ўртача квадратик четланиш σ ни 0,999 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

Жавоб. $0<\sigma<0,448$.

3-§. Танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг кўпайтмалар методи

1. Тенг узоқлашган варианталар. Варианталарнинг қабул қиладиган қийматлари катта сонлар бўлганда, танланманинг йиғма характеристикаларини қуйидаги кўпайтмалар методи билан ҳисоблаш қулайдир.

Тенг узоқликдаги варианта деб h айирмали арифметик прогрессия ташкил этадиган вариантага айтилади. *Шартли варианталар* деб

$$u_i = \frac{x_i - c}{h} \quad (i=\overline{1, k})$$

тенглик билан аниқланадиган варианталарга айтилади, бу ерда c — сохта ноль (энг катта частотага эга бўлган варианта), h—икки варианта орасидаги масофа (бирлик.)

Танланманинг йиғма характеристикаларини ҳисоблашда эмпирик моментлардан фойдаланиш қулайдир. Эмпирик моментлар кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланади:

$M'_k=\frac{1}{n}\sum n_i\ (x_i-c)^k$ ифода *k-тартибли оддий эмпирик момент* дейилади, бу ерда c—сохта ноль, $n=\sum n_i$ танланма ҳажми, n_i —частота. $M_k=\frac{1}{n}\sum n_i x_i$ ифода *k-тартибли бошланғич эмпирик момент* дейилади. $k=1$ бўлса, $M_1=\frac{1}{n}\sum n_i x_i=\overline{x}_\text{Т}$ бўлади.

$m_k=\frac{1}{n}\sum n_i\,(x_i-\overline{x}_\text{Т})^k$ ифода *k-тартибли марказий эмпирик момент* дейилади.

$$m_2=\frac{1}{n}\sum n_i\ (x_i-\overline{x}_\text{Т})^2=D_\text{Т}\,.$$

Эмпирик қийматларни ҳисоблашда осонлик учун шартли эмпирик моментлардан фойдаланиш мумкин:

$$M^*_k=\frac{1}{n}\sum n_i\,u_i^k=\frac{1}{n}\sum n_i\left(\frac{x_i-c}{h}\right)^k$$

ифода *k-тартибли шартли эмпирик момент* дейилади.

$$M^*_1=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sum n_i\,x_i-c\frac{1}{n}\sum n_i\right]=\frac{1}{h}\ (\overline{x}_\text{Т}-c)$$

ёки бу ердан $\overline{x}_\text{Т}$ни топамиз: $\overline{x}_\text{Т}=M^*_1\,h+c$ формула танланма ўртача қийматини топиш формуласидир. $D_\text{Т}=[M^*_2-(M^*_1)^2]h^2$ эса танланма дисперсиясини ҳисоблаш формуласи.

$\overline{x}_\text{Т}$ ва $D_\text{Т}$ларни ҳисоблашда, кўпайтмалар методидан фойдаланиш учун ҳисоблаш жадвалини тузиш керак.

1) Жадвалнинг биринчи устунига варианталар ортиб бориш тартибида ёзилади;

2) иккинчи устунга варианталарнинг мос равишдаги частоталари ёзилади. Устун тагига частоталар йиғиндиси ёзилади;

3) учинчи устунга шартли варианталар $u_i=\frac{x_i-c}{h}$ ёзилади;

4) тўртинчи устунга частоталар шартли варианталарга

кўпайтириб ёзилади. Устун тагига уларнинг йиғиндиси ёзилади;

5) бешинчи устунга частоталар шартли варианталар квадратларига кўпайтирилиб ёзилади, устун тагига уларнинг йиғиндиси ёзилади;

6) олтинчи устунга частоталар ҳар қайсисини битта орттирилган шартли варианталарнинг квадратларига кўпайтириб ёзилади ва устун тагига $\sum n_i (u_i + 1)^2$ йиғинди ёзилади.

Бу устун *контрол устун* дейилади. Агар $\sum n_i (u_i + 1)^2$ йиғинди

$$\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$$

йиғиндига тенг бўлса, у ҳолда ҳисоблашлар тўғри бажарилган деб ҳисобланади. Жадвал тўлдирилгандан кейин

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i \qquad M_2^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2$$

шартли моментлар топилади. Сўнгра $\bar{x}_T$ ва D_T лар ҳисобланади.

1-мисол. Танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қийматини ва танланма дисперсиясини кўпайтмалар методи билан топинг.

а)	варианта x_i	18,6	19	19,4	19,8	20,2	20,6
	частота n_i	4	6	30	40	18	2
б)	варианта x_i	65	70	75	80	85	
	частота n_i	2	5	25	15	3	

△. а) Ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i\ u_i$	$n_i\ u_i^2$	$n_i\ (u_i + 1)^2$
18,6	4	—3	—12	36	16
19,0	6	—2	—12	24	6
19,4	30	—1	—30	30	0
19,8	40	0	—54	0	40
20,2	18	1	18	18	72
20,6	2	2	4	8	18
			22		
$\sum$	$n=100$		$\sum n_i u_i = 32$	$\sum n_i u_i^2 = 116$	$\sum n_i\ (u_i + 1) = 152$

Ҳисоблашларни текшириш учун

$$\sum n_i\ (u_i+1)^2=\sum n_i u_i^2+2\sum n_i u_i+n$$

айниятдан фойдаланамиз: $\sum n_i\,(u_i+1)^2=116-64+$ $+100=152.$

Контрол йиғиндиларнинг бир хил эканлиги ҳисоблашлар тўғри бажарилганидан далолат беради. Энди, биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментларни ҳисоблаймиз:

$$M_1^*=\frac{1}{n}\sum n_i u_i=-\frac{32}{100}=-0{,}32,$$

$$M_2^*=\frac{1}{n}\sum n_i u_i^2=\frac{116}{100}=1{,}16.$$

Берилган мисолда $h=19-18{,}6=0{,}4$; $c=19{,}8$ эканини ҳисобга олсак:

$$\overline{x}_\text{т}=M_1^*h+c=-0{,}32\cdot 0{,}4+19{,}8=19{,}672,$$

$$D_\text{т}=[M_2^*-(M_1^*)^2]h^2=[1{,}16-(-0{,}32)^2]\cdot 0{,}4^2=0{,}1692.$$

б) Бу мисолда ҳам осонлик учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i\ u_i$	$n_i\ u_i^2$	$n_i\ (u_i+1)^2$
65	2	−2	−4	8	2
70	5	−1	−5	5	0
75	25	0	$\boxed{-9}$	0	25
80	15	1	15	15	60
85	3	2	6	12	27
			$\boxed{21}$		
$\sum$	50		12	40	114

Контрол: $\sum n_i\,(u_i+1)^2=114.$

$$\sum n_i\, n_i^2+\sum n_i\, u_i+n=40+24+50=114.$$

Демак, ҳисоблашлар тўғри экан. Энди M_1^* ва M_2^* ни ҳисоблаймиз:

$$M_1^*=\frac{1}{n}\sum n_i\, u_i=\frac{12}{50}=0{,}24,$$
$$M_2^*=\frac{1}{n}\sum n_i\, u_i^2=\frac{40}{50}=0{,}8.$$

Берилган мисолда $h=70-65=5$; $c=70$ эканлигини ҳисобга олсак:

$$\bar{x}_\text{т}=M_1^*\cdot h+c=0{,}24\cdot 5+75=76{,}2.$$
$$D_\text{т}=[M_2^*-(M_1^*)^2]h^2=[0{,}8+(0{,}24)^2]\cdot 25=18{,}56. \quad ▲$$

□. Танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қийматини ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг.

8.	x_i	12	14	16	18	20	22
	n_i	5	15	50	16	10	4

Жавоб. $\bar{x}_\text{т}=16{,}46$; $D_\text{т}=4{,}87$.

9.	x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12
	n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Жавоб. $\bar{x}_\text{т}=11{,}1$; $D_\text{г}=0{,}14$.

10.	x_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55
	n_i	6	13	38	74	106	85	30	10	4

Жавоб. $\bar{x}_\text{т}=34{,}7$; $D_\text{т}=54{,}46$.

11.	x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
	n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Жавоб. $\bar{x}_\text{т}=90{,}72$; $D_\text{т}=17{,}20$. ■

2. Тенг узоқликда бўладиган варианталар. Кузатиш натижаларида варианталар ҳамма вақт ҳам тенг узоқликда жойлашган бўлавермайди. Тенг узоқликдаги варианталарга келтириш учун белгининг кузатилаётган ҳамма қийматлари кирган интервални бир неча тенг қисмий интервалларига бўлинади, сўнгра қисмий интервалларнинг ўрталари топилади. Ҳар бир янги интервал частотаси учун шу интервалдаги частоталар йиғиндиси олинади.

2-мисол. $n=50$ ҳажмли танланманинг тенг узоқликда бўлмаган варианталари тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг.

$$\begin{array}{lllllllllll} x_i & 6 & 8 & 11 & 13 & 15{,}5 & 17{;}5 & 20 & 23{,}5 & 24{,}5 & 26 \\ n_i & 1 & 9 & 6 & 6 & 4 & 6 & 8 & 5 & 4 & 1 \end{array}$$

△. 6—26 интервални узунлиги $h=4$ бўлган 5 та қисмий интервалга бўламиз:

6—10 10—14, 14—18, 18—22 22—26

Қисмий интервалларнинг ўрталарини янги y_i варианталар сифатида олиб, тенг узоқликдаги варианталарни ҳосил қиламиз:

$$y_1=8,\quad y_2=12,\quad y_3=16,\quad y_4=20,\quad y_5=24.$$

Ҳар бир интервалнинг частоталари қуйидагича бўлади:

$$n_1=1+9=10,\ n_2=6+6=12,\ n_3=4+6=10,$$
$$n_4=8,\ n_5=5+4+1=10.$$

Демак, тенг узоқликдаги варианталар тақсимоти:

$$\begin{array}{llllll} y_i & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \\ n_i & 10 & 12 & 10 & 8 & 10 \end{array}$$

Кўпайтмалар методидан фойдаланамиз, бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

y_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
8	10	—1	—10	10	0
12	12	0	—10	0	12
16	10	1	+10	10	40
20	8	2	16	32	72
24	10	3	30	90	160
			56		
$\sum$	50		46	142	284

Контрол:

$$\sum n_i (u_i+1)^2=284.$$

$$\sum n_i u_i^2+2\sum n_i u_i+n=142+92+20=284.$$

Демак, ҳисоблашлар тўғри экан. Энди M_1^* ва M_2^* ларни ҳисоблаймиз:

$$M_1^*=\frac{1}{n}\sum n_i u_i=\frac{46}{50}=0,92,$$

$$M_2^*=\frac{1}{n}\sum n_i u_i^2=\frac{142}{50}=2,84.$$

Берилган мисолда $h=4$, $c=12$ бўлгани учун:

$$\overline{y}_{\text{т}}=M_1^*\cdot h+c=0,92\cdot 4+12=15,68,$$

$$D_{\text{т}}=[M_2^*-(M_1^*)^2]h^2=[2,84-(0,92)^2]\cdot 16=32.$$

Танланма дисперсияни ҳисоблашда группалаш натижасида вужудга келган хатони камайтириш мақсадида *Шеффард тузатмаси* киритилади, у қуйидагига тенг:

$$D'_{\text{т}}=D_{\text{т}}-\frac{1}{12}h^2.$$

$D_{\text{т}}$ ва h нинг қийматларини ўрнига қўямиз:

$$D'_{\text{т}}=32-\frac{1}{12}\cdot 4^2=32-1,3=30,7.$$ ▲

□. Қуйидаги мисолларда $\overline{x}_{\text{т}}$ ва $D_{\text{т}}$, $D'_{\text{г}}$ ларни кўпайтмалар усули билан топинг.

12.

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	26	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9.

Жавоб. $\overline{x}_{\text{т}}=15,56$; $D_{\text{г}}=45,14$; $D'_{\text{т}}=42,14$.

13.

x_i	10	13	15	17	19	23	24	26	28	32	34	35
n_i	2	4	6	8	9	6	20	25	10	8	7	5

Жавоб. $\overline{x}_{\text{т}}=24,35$, $D_{\text{г}}=31,83$ $D_{\text{г}}=29,75$. ■

4- §. Эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцесси

Математик статистикада нисбий частоталар тақсимоти *эмпирик тақсимот* дейилади (эҳтимоллар назариясида эҳтимоллар тақсимоти *назарий тақсимот* деб юритилади). Баъзан эмпирик тақсимотнинг назарий нормал тақсимотдан четланишини баҳолашда асимметрия ва эксцесс каби махсус характеристикалардан фойдаланилади.

Нормал тақсимот учун бу характеристикаларнинг қийматлари нолга тенг. Агар ўрганилаётган тақсимот учун асимметрия ва эксцесс қийматлари нолга яқин бўлса, у ҳолда бу статистик тақсимотнинг нормал тақсимотга яқинлигини тахмин қилиш мумкин. Эмпирик тақсимотнинг нормал эгри чизиққа қараганда кўп ёки кам кўтарилишини баҳолаш учун эксцессдан фойдаланилади.

Эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцесси қуйидаги тенгликлар билан топилади:

$$a_s = \frac{m^3}{\sigma_T^3}, \qquad l_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3,$$

бу ерда σ_T —танланма ўртача квадратик четланиши;

$m_3 = \frac{1}{n}\sum n_i (x_i - \overline{x}_T)^3$ — учинчи тартибли марказий эмпирик момент,

$m_4 = \frac{1}{n}\sum n_i (x_i - \overline{x}_T)^4$ — тўртинчи тартибли марказий эмпирик момент. Агар варианталар h қадамли тенг узоқликдаги варианталар бўлса, m_3 ва m_4 лар қуйидаги формулалар орқали ҳисобланади:

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^*M_2^* + 2(M_1^*)^3]\,h^3,$$
$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^*M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4]\,h^4,$$
$$M_k^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^k, \quad u_i = \frac{x_i - c}{h},$$

c—сохта ноль.

1-мисол. Ушбу эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцессини топинг.

x_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	5	10	17	30	20	12	6

△. Кўпайтмалар методидан фойдаланамиз. Бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз. 1—5 устунлар аввалги параграфдаги каби тўлдирилади, яъни бу ерда шартли $u_i = \frac{x_i - c}{h}$ варианталарга ўтиб (с=11,2 энг катта частотали варианта, $h = x_{i+1} - x_i = 0{,}2$) учинчи устунни тўлдирамиз. Сўнгра иккинчи ва учинчи устунлардаги мос элементларни кўпайтириб тўртинчи учун элементларини, учинчи ва тўртинчи устундаги мос элементларни кўпайтириб, бешинчи устун элементларини ҳосил қиламиз ва ҳоказо. Охирги устунни ҳосил қилиш учун эса учинчи устун элементларига 1 ни қўшиб, уларнинг тўртинчи даражаларини иккинчи устуннинг мос элементларига кўпайтирамиз.

x_i	n_i	u_i	$n_i\ u_i$	$n_i\ u_i^2$	$n_i\ u_i^3$	$n_i\ u_i^4$	$n_i\ (u_i+1)^4$
10,6	5	—3	—15	45	—135	405	80
10,8	10	—2	—20	40	—80	160	10
11,0	17	—1	—17	17	—17	17	0
11,2	30	0	$\boxed{-52}$	0	$\boxed{-232}$	0	30
11,4	20	1	20	20	20	20	320
11,6	12	2	24	48	96	192	972
11,8	6	3	18	54	162	486	1536
			$\boxed{62}$		$\boxed{278}$		
Σ	100		$\sum n_i\ u_i = 10$	$\sum n_i u_i^2 = 224$	$\sum n_i u_i^3 = 46$	$\sum n_i u_i^4 = 1280$	$\sum n_i\ (u_i + 1)^2 = 2948$

Контрол: $\sum n_i\ (u_i\ +1)^4 = 1948.$

$$\sum n_i\ u_i^4 + 4\sum n_i\ u_i^3 + 6\sum n_i\ u_i^2 + n =$$
$$= 1280 + 184 + 1344 + 40 + 100 = 2948.$$

Демак ҳисоблашлар тўғри экан. Энди M_1^*, M_2^*, M_3^*, M_4^* ва $\bar{x}_Т$, $D_Т$, σ ларни ҳисоблаймиз:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i\ u_i\ = \frac{10}{100} = 0,1;$$

$$M_2^* = \frac{1}{n}\sum n_i\ u_i^2 = \frac{224}{100} = 2,24;$$

$$M_3^* = \frac{1}{n}\sum n_i\ u_i^3 = \frac{46}{100} = 0,46;$$

$$M_4^* = \frac{1}{n}\sum n_i\ u_i^4 = \frac{1280}{100} = 12,8;$$

$$\bar{x}_Т = M_1^* h + c = 0,1 \cdot 0,2 + 11,2 = 11,22;$$

$$D_Т = [M_2^* - (M_1^*)^2]\ h^2 = [2,24 - (0,1)^2] \cdot 0,04 = 0,0892;$$

$$\delta_Т = \sqrt{0,0892} \approx 0,29.$$

Учинчи ва тўртинчи тартибли марказий эмпирик моментларни топамиз:

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\,(M_1^*)^3]\ h^3 = -0,00168;$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1 M_3^* + 6\ (M_1^*)^2\ M_2^* - 3\ (M_1^*)^4]\ h^4 = 0,0204.$$

Асимметрия ва эксцессни топамиз:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_T^3} = -\frac{0600168}{0,02586} = -0,06;$$

$$l_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3 = \frac{0,0204}{0,0079} - 3 \approx +0,4.$$

▲

Бу топилганлардан қуйидагича хулоса чиқариш мумкин:

а) асимметрия ва эксцесс қийматлари нолга яқин (мос равишда 0,06 ва 0,4 тенг) бўлгани учун бош тўпламни нормал тақсимотга яқин деб қараш мумкин; б) асимметрия манфий сон бўлгани учун эгри чизиқнинг „узун қисми“ ўрта қийматдан чапда ётар экан; в) эксцесс мусбат бўлгани учун эгри чизиқ нормал эгри чизиққа қараганда „баландроқ“, „ўткирроқ“ учга эгадир.

□. Қуйидаги мисолларда эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцессини топинг.

14.

x_i	26	32	38	44	50	56	62
n_i	5	15	40	25	8	4	3

15.

x_i	12,4	16,4	20,4	24,4	28,4	32,4	36,4
n_i	5	15	40	25	8	4	3

16.

x_i	10,2	10,9	11,6	12,3	13	13,7	14,4
n_i	8	10	60	12	5	3	2

17.

x_i	100	115	120	125	130	135	140
n_i	5	10	30	25	15	10	5

18.

x_i	102	112	122	132	142	152	162
n_i	4	6	10	40	20	12	8

XIV БОБ

КОРРЕЛЯЦИЯ НАЗАРИЯСИ

1- §. Чизиқли корреляция

Математикада ва техникада функционал боғланиш тушунчасини кўп учратиш мумкин. Масалан, доира юзи радиусига боғлиқ ($S = \pi R^2$), газ босими ҳажм ва температурага боғлиқ ($p = R \cdot \frac{t}{v}$, p — газ босими, t — температура, v — ҳажм, R — ўзгармас коэффициент) ва ҳоказо. Функционал боғланиш тасодифий миқдорлар орасида ҳам бўлиши мумкин.

Статистик боғланиш деб шундай боғланишга айтиладики, унда миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг тақсимоти ўзгаришига олиб келади. Хусусан, статистик боғлиқлик миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг ўртача қийматини ўзгаришида кўринади; бу ҳолда статистик боғланиш *корреляцион боғланиш* деб аталади.

Масалан, бир неча майдонга бир хил миқдорда ўғит солсак ҳам олинган ҳосилдорлик ҳар хил миқдорда бўлади. Лекин ўртача ҳосилдорлик солинган ўғит миқдорига боғлиқ бўлади. Бу ерда ҳосилдорликни ўртача қиймати билан ўғит миқдори орасида корреляцион боғланиш мавжуд деб қараш мумкин.

Шартли ўртача қиймат $\overline{y}_x$ деб Y нинг $X = x$ қийматга мос қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Y нинг X га корреляцион боғлиқлиги деб, $\overline{y}_x$ шартли ўртача қийматнинг x га функционал боғлиқлигига айтилади:

$$\overline{y}_x = f(x). \tag{1}$$

(1) тенглама *Y нинг X га регрессия тенгламаси* дейилади;

$f(x)$ функция Y нинг X га регрессияси, унинг графиги эса Y нинг x га *регрессия чизиғи* дейилади.

$$\overline{X}_y = \varphi(y) \qquad (2)$$

тенглама x нинг y га *регрессия тенгламаси* дейилади. Корреляцион боғлиқлик икки хил бўлади: чизиқли ва эгри чизиқли.

Корреляцион боғлиқлик чизиқли бўлганда регрессия тенгламаси

$$\overline{y}_x = ax + b \qquad (3)$$

кўринишда бўлади.

Бу тенгламадаги a танланманинг *регрессия коэффициенти* дейилади. (3) даги a ва b ни энг кичик квадратлар методи ёрдамида қуйидаги нормал тенглама системасидан топамиз:

$$\left.\begin{array}{l} b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ nb + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_т \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) \qquad (5)$$

кўринишда бўлади, бу ерда $\overline{y}_x$ — шартли ўртача қиймат, $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ текширилаётган X ва Y белгиларнинг танланма ўртача қийматлари; σ_x, σ_y — танланма ўртача квадратик четланишлари, $r_т$ — танланма корреляция коэффициенти, у қуйидаги формула орқали топилади:

$$r_т = \frac{\sum n_{xy} \cdot XY - nXY}{n\sigma_x\sigma_y}. \qquad (6)$$

Чизиқли корреляцион боғланиш зичлигини баҳолаш учун танланма корреляцион коэффициенти $r_т$ — хизмат қилади; $|r_т|$ бирга қанча яқин бўлса, боғланиш шунча кучли бўлади.

Ҳисоблашларни соддалаштириш учун ҳисоблаш жадвалини тузиш қулай.

Агар X ва Y белгилар устидаги кузатиш маълумотлари тенг узоқликдаги вариантали корреляцион жадвал кўринишида берилган бўлса, у ҳолда қуйидаги

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}, \quad v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2}$$

шартли варианталарни киритамиз. c_1, c_2 лар мос равишда „сохта“ ноллар, h_1, h_2 лар эса мос равишдаги қадамлар.

Шартли варианталар орқали танланма корреляция коэффициенти қуйидагича топилади:

$$r_{т} = \frac{\sum n_{uv} uv - n \bar{u} \bar{v}}{n \sigma_u \sigma_v}, \qquad (7)$$

бу ердаги $\sum n_{uv} uv$ ни ҳисоблашни келгусида мисол орқали тушунтирамиз.

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n}, \quad \bar{v} = \frac{\sum nu^v}{n}, \quad \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2},$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2}$$

ифодалар кўпайтмалар методи орқали топилади. Уларни топгандан сўнг регрессия тенгламасидаги ифодаларни қуйидагича топамиз:

$$\bar{x} = \bar{u} h_1 + c_1, \quad \bar{y} = \bar{v} h_2 + c_2, \quad \delta_x = \delta_u h$$

$$\sigma_y = \sigma_v \cdot h_2.$$

1- мисол. Берилган майдонда ўғитни ҳосилдорликка таъсирини ўрганиш мақсадида ўтказилган 10 та тажриба натижаси қуйидагича:

x_i	6	11	11	7	8	10	12	6	10	9
y_i	27	32	33	30	30	33	34	29	31	32

бу ерда x ҳар бир гектар ерга солинган ўғит миқдори (тонна). y — ҳар бир гектар ердан олинган ҳосилдорлик. Y нинг X га тўғри чизиқли регрессия танланма тенгламасини топинг ва уни кузатиш натижалари билан таққосланг.

△. Ўғит миқдорининг оширилиши билан ҳосилдорлик ортишини кўрамиз. Бу икки миқдор ўзаро тўғри чизиқли боғланишга эга деб қараймиз:

$$\bar{y}_x = ax + b.$$

Бу ердаги параметрлар a ва b ни топиш учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

1- жадвал

Тажриба номери	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	27	6	36	162
2	32	11	121	352
3	33	11	121	363
4	30	7	49	210
5	30	8	64	240
6	33	10	100	330
7	34	12	144	408
8	28	6	36	168
9	31	10	100	310
10	32	9	81	288
$n = 10$	$\Sigma y_i = 310$	$\Sigma x_i = 90$	$\Sigma x_2^2 = 852$	$\Sigma x_i y_i = 2831$

a ва b параметрларни топиш учун (4) формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} 90b + 852\ a = 2831, \\ 10b + 90\ a = 310. \end{cases}$$

Иккинчи тенгликни 9 га кўпайтириб биринчи тенгликдан айирамиз:

$$42\ a = 41; \quad a = \frac{41}{42};$$

$$b = \frac{310 - 90\,a}{10} = 22\frac{5}{14}.$$

У ҳолда талаб қилинган регрессия тенгламаси

$$\overline{y}_x = \frac{41}{42}x + 22\,\frac{3}{14} \qquad (*)$$

кўринишда бўлади.

Энди бир хил миқдордаги ўғит солинганда (*) тенглик бўйича $\overline{y}_x$ кутиладиган ҳосилдорлик қийматларининг y_i танланма қиймати миқдорларидан оғишини 0,01 аниқликда топамиз:

2- жадвал

x_i	y_i	$\overline{y}_x$	$\overline{y}_x - y_i$
6	27	28,06	1,06
11	32	32,96	0,96
11	33	32,96	—0,04

x_i	y_i	$\bar{y}_x$	$\bar{y}_x - y_i$
7	30	29,04	—0,96
8	30	30,02	0,02
10	33	31,98	—1,02
12	34	33,94	—0,05
6	28	28,06	0,06
10	31	31,98	0,93
9	32	31	—1,00

$\bar{y}_x - y_i$ қийматларидан кўринадики кутиладиган ҳосилдорлик ўғит миқдорига жуда боғлиқ экан. ▲

Кузатишлар сони катта бўлганда x қийматнинг ўзи n_x марта, Y қийматнинг ўзи n_y марта, сон жуфти $(x; y)$ нинг ўзи n_{xy} марта учраши мумкин. Шу сабабли кузатиш маълумотлари группаланади, яъни n_x, n_y, n_{xy} частоталар ҳисобланади ва жадвал кўринишида ёзилади. Бундай ҳолатда қуйидаги мисолни ечиш схемасидан фойдаланган маъқул.

2- мисол. Бирорта ўсимлик оғирлигининг (бутун ўсимлик оғирлиги x грамм ҳисобида) экилган уруғ оғирлиги (y грамм ҳисобида) бўйича тақсимоти жадвал усулида берилган.

3- жадвал

x / y	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	n_x
25	3	2											5
35		6	4										11
45		1	13	5			—						19
55		1	2	4	8	1							16
65			1		4	4	2						11
75					2	6	6	1					15
85							1	5					6
95								1	4	1			6
105									2	4	1	1	8
115										1		1	2
125												1	1
n_y	3	10	20	9	14	11	9	7	6	6	1	3	100

Бу ерда ўсимлик оғирлиги ва уруғ оғирликлари синфларга ажратилган бўлиб, бу синфларнинг ўрталари x — 25, 35 ва ҳ. к. y — 13, 18 ва ҳ. к. деб олинган. 3 сони — умумий оғирлиги 25 г ҳамда уруғ оғирлиги 13 г дан бўлган уч ўсимлик борлигини кўрсатади ва ҳоказо. Сўнгги устунда умумий оғирликка мос ўсимликлар частотаси жойлашган. 100 ўсимликдан 5 тасининг умумий оғирлиги 25 грамм, 11 тасининг умумий оғирлиги 35 г ва ҳоказо. Сўнгги йўлда уруғ оғирлигига мос ўсимлик частоталари n_y жойлашган. Энди корреляция коэффициенти y нинг x га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини тузамиз.

△ x қийматлари ўзгармас айирма 10 га, y қийматлари эса ўзгармас айирма 5 га эга эканига диққатни жалб этиб, шартли варианталарни киритамиз. x ўрнига $u = \frac{x-15}{10}$ миқдорни ва y ўрнига $v = \frac{y-8}{5}$ миқдорни киритамиз.

Бу ҳолда $x = 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, 125$ қийматлар мос равишда

$$u = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

қийматлар билан, y нинг

$$y = 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68$$

қийматлари эса v нинг

$$v = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

қийматлари билан алмашади.

Натижада янги шартли варианталар бўйича қуйидаги корреляцион жадвални ҳосил қиламиз:

4- жадвал

u / v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	n_u
1	3	2											5
2		6	4					1					11
3		1	13	5									19
4		2	2	4	8	1							16
5			1		4	4	2						11
6					2	6	6	1					14
7							1	5					6
8								1	4	1			6
9									2	4	1	1	8
10										1		1	2
11												1	1
n_v	3	10	20	9	14	11	9	8	6	6	1	3	100

$\overline{u}$, $\overline{v}$ ларни ҳисоблаш учун тўрт майдон усулидан фойдаланиб қуйидаги 5- жадвални тузамиз.

5- жадва

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$Y = \sum nuV$	$u - V$
1	${}_{3}3^{3}$	${}_{2}2^{4}$											.7	7
2		${}_{12}6^{12}$	${}_{8}4^{12}$										32	64
3		${}_{3}1^{2}$	${}_{39}13^{39}$	${}_{15}5^{20}$									61	183
4		${}_{4}1^{2}$	${}_{8}2^{6}$	${}_{16}4^{16}$	${}_{32}8^{40}$	${}_{4}1^{6}$							70	280
5			${}_{5}1^{3}$		${}_{20}4^{20}$	${}_{20}4^{24}$	${}_{10}2^{14}$						61	305
6					${}_{12}2^{10}$	${}_{36}6^{36}$	${}_{36}6^{42}$	${}_{6}1^{8}$					96	576
7							${}_{7}1^{7}$	${}_{5}5^{40}$					47	326
8								${}_{8}1^{8}$	${}_{32}4^{36}$	${}_{8}1^{10}$			54	432
9									${}_{18}2^{18}$	${}_{36}4^{40}$	${}_{9}1^{11}$	${}_{9}1^{12}$	81	729
10										${}_{10}1^{10}$		${}_{10}1^{12}$	22	220
11												${}_{11}1^{12}$	12	132
$u = \sum_{uv} u$	3	21	60	31	64	60	53	51	50	54	9	30	543 486	3257
$v = u$	3	42	180	124	320	360	371	408	450	540	99	360	3257	

Ҳар бир катак ўнгдаги юқори ва пастки чап бурчакдаги рақамлар мос равишда *v* ва *u* шартли вариантлар қийматларини частотасига кўпайтириш билан ҳосил қилинади. Бу юқори ўнг (пастки чап) бурчакдаги рақамларни сатр (устун) бўйича йиғиб охирги аввалги устунга (сатрга) ёзамиз. Масалан, тўртинчи сатр ва бешинчи устундаги бу рақамлар йиғиндиси қуйидагича топилади:

$$70 = 1\cdot2 + 2\cdot3 + 4\cdot4 + 8\cdot5 + 1\cdot6 = 2 + 6 + 16 + 40 + 6$$
$$64 = 4\cdot8 + 4\cdot4 + 6\cdot2 — 32 + 20 + 12$$

Пастки чап бурчакдаги сонлар частотани *u* кўпайтиришдан ҳосил қилинади.

Охирги устун (сатр) катакларига $u\cdot v$ $(v\cdot u)$ қийматлари жойлаштирилиб, охирида улар йиғиндиси ёзилади.

Бу жадвалдан фойдаланиб қуйидаги ҳисоблашларни бажарамиз:

$$\bar{u} = \frac{\Sigma n_{uv}u}{n} = \frac{u}{n} = \frac{486}{100} = 4{,}86.$$

$$\bar{v} = \frac{\Sigma u_{uv}v}{u} = \frac{v}{n} = \frac{543}{100} = 5{,}43.$$

Энди қуйидаги ёрдамчи жадвалларни тузамиз:

6- жадвал

u	n_u	$n_u u$	$n_u u^2$
1	5	5	5
2	11	22	44
3	19	57	171
4	16	64	256
5	11	55	275
6	15	90	540
7	6	42	294
8	6	48	384
9	8	72	648
10	2	20	200
11	1	11	121
Σ	100	486	2938

7- жадвал

v	n_u	$n_v v$	$n_v v^2$
1	3	3	3
2	10	20	40
3	20	60	180
4	9	36	144
5	14	70	350
6	11	66	396
7	9	63	441
8	8	64	512
9	6	54	486
10	6	60	600
11	1	11	121
12	3	36	432
Σ	100	543	3705

$$\sigma_u^2 = \frac{\Sigma n_u u^2}{n} - (\bar{u})^2 = \frac{2938}{100} - (4{,}86)^2 = 5{,}7604.$$

$$\sigma_u = \sqrt{5{,}7604} = 2{,}400.$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\Sigma n_v v^2}{n} - (\overline{v})^2 = \frac{3705}{100} -$$

$$- 29,4849 = 7,5651;$$

$$\sigma_v = \sqrt{7,5651} = 2,750.$$

Энди $r_т$ ни ҳисоблаймиз:

$$r_т = \frac{\Sigma\, u_{uv}\, uv - n\, \bar{u}\, \bar{v}}{n\, \sigma_u \sigma_v} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_u \sigma_v} \left(\frac{\Sigma n_{uv}\, uv}{u} - \overline{u}\ \overline{v} \right) =$$

$$= \frac{1}{2,4 \cdot 2,75} \left(\frac{3,257}{\cdot 100} - 4,86 \cdot 5,43 \right) = \frac{6,1802}{6,600} = 0,936.$$

Маълумки, $r_т$ нинг қиймати ($\pm$ 1) га яқин чиқса биз қараётган x ва y миқдорлар орасидаги боғланишни чизиқли боғланиш деб қарашимиз мумкин.

x ва y лар учун қуйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$(\overline{x} = \overline{u}\, h_1 + C_1; \ \ \overline{y} = \overline{u}\, h_2 + C_2; \ \ \sigma_x = \sigma_u \cdot h; \ \ \ \sigma_y = \sigma_v\, h_2.$$

Бундан:

$$\overline{x} = 10\, \overline{u} + 5 = 63,50; \qquad \sigma_x = 10 \cdot \sigma_u = 24,00;$$

$$\overline{y} = 5\, \overline{v} + 8 = 35,15; \qquad \sigma_y = 5\, \sigma_v = 13,75;$$

$$C_{xy} = 50 \cdot C_{uv} = 50 \left(\frac{\Sigma_n uv}{n} - \overline{u}\ \ \overline{v} \right) = 50 \cdot 6,1802 = 309,01$$

келиб чиқади.

Регрессия тенгламасини келтириб чиқариш учун регрессия коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$\rho_{yx} = r_т \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,936 \cdot \frac{13,75}{24} = 0,536.$$

y нинг x га регрессия тенгламаси $\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_{yx}\, (x - x)$ га асосан $\overline{y}_x = 35,15 - 0,536\, (x - 63,50)$ ёки $y_x = 0,536x + 1,11$ келиб чиқади.

Энди x ўрнига унинг турли қийматларини қўйиб $\overline{y_x}$ қийматларини топамиз:

$$\overline{y_1} = 0,535 \cdot 25 + 1,11 = 14,51 = 14,5$$

$$\overline{y_2} = 0,536 \cdot 35 + 11,11 = 19,9 \text{ ва ҳоказо.}$$

Қуйидаги жадвални тузамиз:

8- жадвал

x	y'_x	y'_x	$\bar{y}'_x - y_x$	x	$\bar{y}'_x$	$\bar{y}_x$	$\bar{y}'_x - y_x$
25	14,5	15,0	— 0,5	75	41,3	40,0	1,3
35	19,9	22,6	— 2,7	85	46,7	47,2	—0,5
45	25,2	24,1	1,1	95	52,0	53,0	—1,0
55	30,6	29,9	0,7	105	57,4	58,6	—1,2
65	36,0	35,3	0,7	115	62,8	63,0	—0,2
				125	68,1	68,0	0,1

Жадвалдан кўринадики хусусий ўртача ҳақиқий ўртачага етарли яқин эканини кўрамиз.

Эслатма. Учинчи устундаги $\bar{y}_x$ нинг хусусий ўртача қийматлари қуйидагича топилади:

$$\bar{y}_1 = \frac{13\cdot 3 + 18\cdot 2}{3+2} = 15;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{18\;6 + 23 + 48\;1}{6+4+1} = 22{,}6$$

ва ҳоказо. ▲

3- мисол. Тупроқнинг нисбатан намгарчилиги (x) ва ёпишқоқлиги (y) тўғрисида аниқланган маълумотлар қуйидагича

x(%) 19,9 20,9 26,1 29,4 30,5 40,3 44,8
47,6 56,6 58,3 64,5 75,6
y(г/см²) 0,0 0,6 0,1 1,1 1,7 1,7 2,6 3,4
42 5,8 6,3 7,3

$$n = 12.$$

Маълумотларнинг корреляция коэффициентини ва регрессия чизиғининг танланма тенгламасини тузинг.

△. Ҳисоблаш жадвалини тўғридан-тўғри тузамиз:

9- жадвал

	X (x)	Y/см²	x^2	y^2	xy
2	19,9	0,0	396,01	0,00	0,00
2	20,9	0,6	436,81	0,36	12,54
3	26,1	1,1	681,21	1,21	28,71
4	29,4	1,2	864,36	1,44	35,28
5	30,5	1,7	930,25	2,89	51,85

	$X\ (x)$	$Y/см^2$	x^2	y^2	xy
6	40,3	1,7	1624,09	2,89	68,51
7	44,8	2,6	2007,64	6,76	116,48
8	47,8	3,4	2284,84	11,56	162,52
9	55,6	4,2	3091,36	17,64	233,52
10	58,3	5,8	3398,89	33,64	338,14
11	64,5	6,3	4160,25	39,69	406,35
12	76,6	7,3	5867,56	53,29	559,18
$\sum$	$\sum_x = 514{,}7$	$\sum_y = 35{,}9$	25742,67	171,37	2013,08

x ва y қийматлари бир мартадан такрорлангани учун тўғридан-тўғри формулалардан фойдаланамиз:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma_x}{н} = \frac{514}{12} = 42{,}89,\ \overline{x} = 42{,}89\,\%\,;$$

$$y = \frac{\Sigma_y}{n} = \frac{35{,}9}{12} = 2{,}99,\ \overline{y} = 2{,}99\ \text{г/см}^2.$$

$$\sum(X - x)^2 = \sum\nolimits_x^2 - (\sum\nolimits_x)^2 :\ n = 25742{,}67 - (514{,}7)^2 : 12 = \\ = 3666{,}33;$$

$$\sum(Y - \overline{y})^2 = \Sigma y^2 - (\sum y)^2 :\ n = \\ = 171{,}37 - (35{,}9)^2;\ 12 = 63{,}97;$$

$$\sum(X - x\overline{x})\ (Y - y) = 2013{,}08 - (514{,}7\ x\ 35{,}9) : 12 = \\ = 473{,}27.$$

Энди танланма корреляция коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$r_г = \frac{\Sigma\,(X - \overline{x})\,(Y - \overline{y})}{\sqrt{\Sigma\,(X - \overline{x})^2\,\Sigma\,(Y - \overline{y^2})^2}} = \frac{473{,}27}{\sqrt{3666{,}33 \cdot 63{,}97}} = 0{,}977\,.$$

Регрессия коэффициенти:

$$\rho_{yx} = r_г \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}977 \frac{\sqrt{63{,}97}}{\sqrt{3666{,}33}} = 0{,}1\,3\ \text{г/см}^2.$$

Демак регрессия тенгламаси:

$$Y_x - \overline{y} = \rho_{yx}(X - \overline{x})$$

ёки

$$Y_x = 2{,}99 + 0{,}13(x - 42{,}89) = 0{,}13x - 2{,}58.$$
$$Y_x = 0{,}13\,x - 2{,}38 \text{ бўлади. } \blacktriangle$$

X (1 га майдонга солинган ўғит миқдори, т.)	Y (1 га майдондан олинган ҳосил ц)
5,0	13,8
5,5	14,0
5,6	14,3
6,5	14,8
7,0	15,1
8,0	15,6
7,0	15,8
7,3	16,1
6,5	16,4
7,5	16,6
8,3	16,8
6,0	17,0
7,5	17,2
8,5	17,6
6,0	17,9
8,0	18,1
9,5	18,3
10,0	19,5
10,9	20,3

Қуйидаги мисолларда корреляция коэфффициенти, регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламасини юқоридаги усуллардан бирини қўлланиб топинг.

1. Ўғит миқдори (x) ва олинган буғдой ҳосилдорлиги (y) орасидаги боғланиш корреляция коэффициентини ва регрессия чизиғи танланма тенгламасини тузинг:

2. Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини, қуйидаги корреляцион жадваллар орқали келтирилган маълумотлар бўйича топинг.

y \ x	20	25	30	35	40	
16	4	6	—	—	—	10
26	—	8	10	—	—	18
36	—	—	32	3	9	44
46	—	—	4	12	6	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

Жавоб. $r_т = 0{,}76$; $\bar{y}_x = 1{,}45\,x - 10{,}36$.

3.

y \ x	18	23	28	33	38	43	48	
125	—	1	—	—	—	—	—	1
150	1	2	5	—	—	—	—	8
175	—	3	2	12	—	—	—	17
200	—	—	1	8	7	—	—	16
225	—	—	—	—	3	3	—	6
250	—	—	—	—	—	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n=50$

Жавоб. $Y_x = 4x + 57{,}8$.

4. Икки турдаги объектни мос равишда уларнинг x ва y аломатларининг берилган қийматлари бўйича регистрация қилишда бу аломатларнинг берилган қийматларини такрорланиш сонлари (частоталари) ҳосил қилинган:

y \ x	2	4	6	8
1	1	2	1	
3	2	4	4	2
5		1	2	1

Бу миқдорларнинг корреляция коэффициентини топинг.

5. Қуйидаги корреляцион жадвал орқали уч йиллик қарағайнинг баландлиги билан ундан чиққан навда узунлиги орасидаги боғланишнинг корреляция коэффициентини топинг.

Баландлиги (см)	Узунлиги çм							Σ	Ўртача узунлиги
	3	7	11	15	19	23	27		
6	5	3		2				8	4,50
16	7	15	1	2				25	6,68
26	2	21	17	20				42	8,81
36		15	37	26	4			75	11,59
46		1	31	27	12			62	13,13
56		2	8	9	24	1		50	15,16
66			2	4	7	4	2	41	18,51
76			1	1	—	6	2	20	19,80
86						3	—	4	21,00
96						1	2	3	25,67
96	4	57	97	91	50	15	6	330	13,12
Ўртача см	13,86		30,92	40,41	61,60	75,33	79,33		

$r_т = ?$ $\qquad \overline{y}_x = ?$

$r_т = 0{,}80.$

6. 2-мисолдаги корреляцион жадвал маълумотларига асосланиб, X нинг Y га тўғри чизиқли регрессия тенгламасини топинг.

Кўрсатма. Шартли вариантaларга ўтишда $u = \frac{x-75}{15}$; $v = \frac{y-38}{5}$ белгилашдан ($c_1 = 75$, $c_2 = 38$) фойдаланинг.

2- §. Эгри чизиқли корреляция

Агар регрессия графиги эгри чизиқли деб қаралса, корреляцион боғланиш *эгри чизиқли корреляция* дейилади. Иккинчи тартибли параболик корреляция бўлган ҳолда Y нинг X га регрессиясининг танланма тенгламаси

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c \qquad (*)$$

кўринишда бўлади (иккинчи тартибли параболик корреляция), a, b ва c параметрлар энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб қуйидаги нормал тенгламалар системасидан топилади:

$$(A) \begin{cases} a\,\Sigma x^4 + b\,\Sigma x^2 + c\,\Sigma x^2 = \Sigma x^2\,\overline{y}_x \\ a\,\Sigma x^2 + b\,\Sigma x^2 + c\,\Sigma x = \Sigma x\,\overline{y}_x \\ a\,\Sigma x^2 - b\,\Sigma x + c_n = \Sigma \overline{y}_x. \end{cases}$$

Бу X ва Y миқдорлар такрорланмай келган ҳолдир.

Агар X ва Y миқдорлар такрорланиб келса, яъни n_x ва n_y частоталарга эга бўлса, маълумотлар корреляцион жадвал орқали берилган бўлиб, нормал тенглама кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} (\sum n_x x^4)\,a + (\sum n_x x^3)\,b + (\sum n_x x^2)\,c = \sum n_x \overline{y}_x\, x^2, \\ (\sum n_x x^3)\,a + (\sum n_x x^2)\,b + (\sum n_x x)\,c = \sum n_x \overline{y}_x\, x, \\ (\sum n_x x^2)\,a + (\sum n_x x)\,b + nc + \sum n_x \overline{y}_x. \end{cases}$$

Бунда a, b ва c параметрлар топилиб (*) тенгламага қўйилади.

Худди шу йўл билан Y ни X га регрессиясининг танланма тенгламаси

$$x_y = a_1 y^2 + b_1 y + c_1 \qquad (**)$$

формула ёрдамида топилади.

Y нинг X га корреляциясининг зичлигини баҳолаш учун ушбу

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}x}}{\sigma_y} \qquad (C)$$

танланма корреляцион нисбат топилади. Бу ерда

$$\sigma_{\overline{y}x} = \sqrt{\frac{\Sigma n_x (\overline{y}_x - y)^2}{n}}, \qquad (D)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma n_y (y - \overline{y})^2}{n}}. \qquad (E)$$

x нинг y га корреляцион зичлигини топиш учун эса

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x} \qquad (F)$$

топилади.

1- мисол. Тажриба натижасида қуйидаги маълумотлар олинган:

x	2	4	6	8	10
y	9	6	5,5	6,5	11

x ва y

$$y = ax^2 + bx + c$$

кўринишдаги тенглама билан боғланган деб, a, b ва c ларни энг кичик квадратлар усули билан топинг.

△. Ҳисоблашларни соддалаштириш учун қуйидаги ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

x	2	4	6	8	10	$\Sigma_x = 30$
y	9	6	5,5	6,5	11	$\Sigma_y = 38$
xy	18	24	33	52	110	$\Sigma_{xy} = 237$
x^2	4	16	36	64	210	$\Sigma x^2 = 220$
x^2y	36	96	198	416	1100	$\Sigma x^2y = 1846$
x^3	8	64	216	512	1000	$\Sigma x^3 = 1800$
x^4	16	256	1296	4096	10000	$\Sigma x^4 = 15664$

Топилган қийматларни (A) нормал тенгламага келтириб қўямиз:

$$\left.\begin{array}{l} 15664\,a + 1800\,b + 220\,c = 1846 \\ 1800\,a + 220\,b + 30\,c = 237 \\ 220\,a + 30\,b + 5\,c = 38 \end{array}\right\}$$

Энди бу системани a, b, c ларга нисбатан ечамиз. Учинчи тенгламани 44 га кўпайтириб биринчи тенгламадан айирамиз:

$$\begin{array}{l} 15664\,a + 1800\,b + 220\,c = 1846 \\ \underline{9680\,a + 1320\,b + 220\,c = 1672} \\ 5984\,a + 480\,b = 174 \end{array}$$

Учинчи тенгламани 6 га кўпайтириб иккинчи тенгламадан айирамиз:

$$\begin{array}{r}1800\ a+220\,b+30\,c=237\\ 1320\ a+180\,b+30\,c=228\\ \hline 480\ a+40\ a=9.\end{array}$$

Шундай қилиб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}5984\ a+480\,b=174,\\ 480\,a+40b=9.\end{cases}$$

Бу системани a ва b га нисбатан ечсак:

$$a=\frac{33}{112}\approx 0{,}3,\qquad b=-\frac{927}{290}\approx -3{,}3$$

келиб чиқади. Булардан фойдаланиб c ни топамиз: $c\approx 14{,}5$ x ва y орасидаги боғланишни кўрсатувчи функция (*)

$$\bar{y}_x=0{,}3\,x^2-3{,}3\,x+14{,}5$$

кўринишда бўлади. ▲

2-мисол. Қуйидаги корреляцион жадвалда берилган маълумотлар орқали $\bar{y}_x=ax^2+bx+c$ танланма регрессия тенгламасини ва корреляцион нисбатни топинг.

x y	2	3	5	n_y
25	20	—	—	20
45	—	20	1	31
110	—	1	48	49
n_x	20	31	49	$n=100$

△. Параметрларни топиш учун қуйидаги ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x{}^{x}$	$n_x{}^{x^3}$	$n_x{}^{x^4}$	$n_x\bar{y}_x$	$n_x\bar{y}_x$	$n_x y x_x$	$n_x\bar{y}_x x$
2	20	25	40	80	160	320	500	1000	2000
3	31	47,1	93	279	837	2511	1460	4758	13141
5	49	108,7	245	1125	6125	30625	5325	26614	133121
	100	—	378	1548	7122	33456	728,5	32004	148262

$\bar{y}_x$ ни топиш усулуни тушунтирамиз:

$$\bar{y}_2 = \frac{20\ 25}{20} = 25,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{30\ 45 + 100}{31} = 47{,}1,$$

$$\bar{y}_5 = \frac{1\ 45 + 48\ 100}{49} = 108{,}7.$$

Жадвалдаги топилган қийматларни (В) формулага қўямиз:

$$\begin{cases} 33456\,a + 71226\,b + 1584\,c = 148262, \\ 7122\,a + 1584\,b + 378\,c = 32004, \\ 1584\,a + 378\,b + 100\,c = 7285. \end{cases}$$

Бу системани ечиб қуйидагиларни топамиз:

$$a = 2{,}94, \quad b = 7{,}27, \quad c = -1{,}25.$$

Шундай қилиб изланаётган танланма регрессия тенгламаси ушбу

$$\bar{y}_x = 2{,}94x^2 + 7{,}27\,x - 1{,}25$$

кўринишга эга экан.

Бу тенглама бўйича ҳисобланган шартли ўртача қийматлар ҳисоблаш жадвалидаги шартли ўртача қийматлардан сал фарқ қилиши мумкин, масалан $x = 2$ да жадвал бўйича $\bar{y}_1 = 25$ тенглама бўйича

$\bar{y} = 2{,}94\cdot4 + 7{,}27\cdot2 - 1{,}25 = 2515.$

Демак топилган тенглама кузатиш маълумотлари билан жуда мос келади. Энди корреляцион нисбатни топамиз. Бунинг учун аввал умумий ўртача қийматни топамиз:

$$\bar{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{20\ 25 + 31\cdot45 + 49\ 100}{100} = 72{,}35.$$

Сўнгра умумий квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y(y - \bar{y}^2)}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{20\cdot(25-72{,}35)^2 + 31\,(45-72{,}35)^2 + 49(110-72{,}35)^2}{100}} \approx 37{,}3.$$

Группалараро ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_{y_x} \sqrt{\frac{\sum n_x(\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25(25-72{,}35)^2 + 45\,(47{,}9-72\cdot35)^2 + 110\,(107-72{,}35)^2}{100}} = 35{,}9.$$

Демак, корреляцион нисбат тақрибан қуйидагига тенг:

$$\mu_{y_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y} = \underline{35,9} = 0,96$$ ▲

☐ 7. Қаралаётган 6 марта кузатиш натижаси объектнинг x ва y сифат белгилари учун қуйидаги жадвалда келтирилган. Уларнинг корреляция коэффициентини топинг.

x	28,9	20,4	17,8	15,0	7,1	6,3
y	6,86	5,92	5,38	4,40	2,30	2,32

Жавоб. $\eta_т = 0,98$.

8. Тупроқни анализ қилиш натижасида қуйидаги маълумотлар олинган:

y \ x	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	n_y
0,5	—	—	—	—	—	—	1	1	1
1,0	—	—	—	—	—	1	2	—	2
1,5	—	—	—	—	3	4	—	—	7
2,0	—	1	2	3	4	1	1	—	12
2,5	—	—	2	2	6	2	—	—	12
3,0		3	2	1	—	—	—	—	6
3,5	2	3	1	—	—	—	—	—	6
4,0	1	—	—	—	—	—	—	—	1
n_x	3	7	7	6	13	8	2	1	$m=17$

Жавоб. $r_т = 0,8$.

9. Ернинг ҳайдалиш чуқурлиги билан олинган ҳосилдорлик орасидаги боғлиқликни кузатиш натижалари қуйидагича:

Ҳайдалган ер чуқурлиги, см	7	8	8	10	11	12
Ўртача ҳосилдорлик 1 га олинган ц	8,1	8,3	8,2	9,1	10,3	10,8

Танланма корреляция коэффициенти ва тўғри чизиқли регрессия тенгламасини топинг.

Жавоб. $r_т = 0,94$, $\overline{y}_x = 0,583x + 3,615$.

10. Қуйидаги жадвалда балиқ узунлиги билан унинг оғирлиги тўғрисидаги маълумотлар мослиги берилган. Улар орасидаги боғланишни $y_x = ax^2 + bx + c$ параболик боғланиш деб қараб, a, b, c параметрларни энг кичик квадратлар усули билан топинг.

y \ x	145	155	175	185	195	205	215	225	235	245	n_y
50	2	2									4
70		2									2
90			9	2	1						12
110			2	12	17						21
130				3	11						16
150					2	1	1				10
170						8					3
190						1	2				1
210								1			3
230							2	1			1
250									1		—
270											—
390								1			1
310											—
330											1
n_x	2	4	11	17	21	10	5	2	2	1	$n = 75$

Кўрсатма. Сохта ноль сифатида 190 ва 195 қийматлар олинади ва мисол тўрт майдон усулида ечилади.

Жавоб. $\overline{y}_x = 0{,}0161x^2—3{,}6246x + 246{,}71$. $\eta_{yx} = 0{,}946$.

11.

x	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145
y	1,74	2,02	2,12	2,17	2,74	2,40	2,40	2,48	2,50	2,39

Жадвалда берилган маълумотлар бўйича x ва y орасидаги боғланиш $y - ax^2 + bx + c$ кўринишида берилган. a, b, c параметрларни топинг.

Жавоб. $\overline{y}_x = -0{,}0001x^2 + 0{,}0275x + 0{,}567$.

ИЛОВА

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ функция қийматлари

1- жадвал

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0009	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2- жадвал

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ Лаплас функция қийматлари жадвали

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4434
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3937	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,5591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974

Давоми

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ қийматлари

3- жадвал

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

$g = g(\gamma, n)$ қийматлари

4- жадвал

n γ	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

АБДАЛИМОВ БАЛТАШ,
АБДУГАППАРОВ АБДУСАМАД,
МУСАМУХАМЕДОВ МУХАММАТРАХИМ,
ТАШПУЛАТОВ САЙФИТДИН

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие для студентов сельскохозяйственных вузов

Ташкент „Ўқитувчи" 1985

Редактор *Р. Каримов.* Техредактор *Т. Грешникова*
Расмлар редактори *С. Соин* Корректор *З. Содиқова*

ИБ № 2588

Теришга берилди 27.11.84. Босишга рухсат этилди 9.07.85. Формат $84\times108/_{32}$. Тип. қоғози № 3. Литературная гарнитураси. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 23,94. Шартли кр.-отт. 23.94. Нашр. л. 20,57. Тиражи 5000. Зак. № 199. Баҳоси 1 с.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 9—265—84.

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети, Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасига қарашли 1-босмахонаси. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1985.

Типография № 1 ТППО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, ул. Хамзы, 21.