М. С. Яҳёев, Қ. Б. Мўминов

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

Ўзбекистон ССР Халқ таълими министрлиги педагогика институтларининг студентлари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ“ 1990

Ушбу ўқув қўлланма педагогика институтлари учун назарий механика бўйича белгиланган программа асосида ёзилган. Унда кинематика, статика, динамика ва аналитик механиканинг асосий тушунчалари, қонун-қоидалари баён этилган ва уларга доир мисол-масалалар ечилган. Қурснинг статика қисми қисқа, кинематика ва динамика бўлимлари эса батафсил баён этилган.

Ўқув қўлланмасидан университетларнинг физика ва геология, шунингдек, олий техника ўқув юртларининг электротехника, тоғ металлургияси ҳамда озиқ-овқат мутахассислиги бўйича таълим олувчи студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Махсус муҳаррир
Эркин Эргашев

$Я \frac{1603020000-173}{353(06)-60}$ 190—90

ISBN 5—645—00497

„Ўқитувчи" нашриёти, 1990

СЎЗБОШИ

Назарий механика педагогика институтларининг «Физика», «Физика ва астрономия», «Математика ва физика» ихтисосликларида назарий физиканинг биринчи бўлими сифатида, «Умумтехника фанлари ва физика» ихтисослигида эса бир томондан, назарий физиканинг бирнчи бўлими сифатида, иккинчи томондан эса, умумтехника фанларнинг назарий асоси сифатида ўқитилади. «Умумтехника фанлари ва меҳнат» ихтисослигида назарий механика умумтехника фанларининг назарий асоси сифатида ўқитилиб, у турли хил техник масалаларни ечиш учун пойдевор бўлади.

Бу ихтисосликларда ўқиётган студентлар учун ўзбек тилида назрий механикадан дарсликлар ёки ўқув қўлланмаси йўқлигини ҳамда унга бўлган эҳтиёжни эътиборга олиб, муаллифлар мазкур қўлланмани тайёрладилар. Ушбу қўлланма педагогика институтлари учун мўлжалланган программа асосида ёзилган бўлиб, унда назарий механиканинг кинематика ва динамика кисмлари кенгроқ, статика қисми эса қисқача баён этилди.

Қўлланма, асосан, педагогика институтларининг индустриал-педагогика ва физика-математика факультетлари студентларига мўлжалланган. Ундан олий техника ўқув юртларининг, шунингдек, университетларнинг физика, геология ихтисослиги бўйича таълим олувчи студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Мазкур ўқув қўлланмасини яратишда берган кўрсатма ва маслаҳатлари учун муаллифлар ЎзССР ФА ҳақиқий аъзоси, профессор Т. Рашидовга, ТошДУ назарий механика кафедрасининг доценти П. Шохайдаровага, қўлланма қўлёзмасини ўқиб, унинг сифатини оширишга доир берган фикр ва мулоҳазалари учун профессорлар Э. Б. Абуталиев ва Г. И. Болдинский, доцентлар, И. Исмоилов, Ж. Қамолов, Э. Тўхтасинов ўртоқларга, Ўзбекистон педагогика фанлари илмий текшириш институтининг катта илмий ходими Х. А. Валиевга ташаккур изҳор этадилар.

Педагогика институтлари студентлари учун ўзбек тилида ёзилган бу биринчи ўқув қўлланмаси камчиликлардан холи бўлмаслиги мумкин. Муаллифлар ўқувчилардан ушбу қўлланманинг ютуқ ва камчиликлари ҳақидаги ўзларининг фикр ва мулоҳазаларини «Ўқитувчи» нашриётига юборишларини сўрайдилар.

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА ПРЕДМЕТИ

Назарий механика моддий жисмларнинг мувозанати ва механик ҳаракати қонунларини ўрганувчи фандир.

Вақт ўтиши билан жисмларнинг фазода бир-бирига нисбатан ўрин алмаштириши механик ҳаракат дейилади.

Назарий механикада ҳаракат пайтида жисмларда содир бўлиши мумкин бўлган шакл ва сифат ўзгаришлари ҳисобга олинмайди.

Жисмнинг ҳар қандай ҳаракати қаердадир, бирон-бир фазода ва қачондир, бирон-бир вақтда содир бўлади. Фазо ҳам, вақт ҳам ҳаракат билан бир қаторда жисмнинг (кенг маънода материянинг) борлиқ шаклларидир. Назарий механикада фазо бир жинсли ва изотроп деб қабул қилинади, яъни механик ҳодисанинг ўтиши (кечиши) унинг қаерида ўтаётганлигига ҳам, фазодаги қайси йўналишда содир бўлаётганлигига ҳам боғлиқ эмас.

Жисмнинг фазода бошқа жисмга нисбатан ҳаракатини ўрганиш учун шу иккинчи жисм билан координаталар системаси (саноқ системаси) боғланади. У ҳолда жисмнинг текширилаётган ҳаракати жисм нуқталарининг танлаб олинган координаталар системасидаги фазо нуқталари билан кетма-кет уст-ма-уст тушиши орқали белгиланади.

Вақт тушунчаси ҳодисаларнинг навбатдаги кетма-кетлигини, уларнинг қанча давом этишини акс эттириб, у ўтмишдан келажакка томон боради ва орқага қайтмаслик хоссасига эга. Назарий механикада вақт фазонинг ҳар қандай қисмида ҳам бир меъёрда ўтади ва у фазо каби узлуксиз хамда бир жинсли деб қаралади. Вақт абадий ва чексиздир. Шунинг учун вақтни чексиз кўп элементлардан иборат тўплам дейиш мумкин. Бу тўпламнинг ҳар бир элементига вақтнинг маълум қиймати мос келади.

Шуни алоҳида таъкидлаб ўтиш керакки, фазовий ўлчашлар учун олинган узунлик бирлиги, воқеаларнинг ўтиш жараёнини қайд қилувчи вақт бирлиги, демак, соатнинг юриши физик шароитдан ташқари, ўзларининг бошқа жисмларга нисбатан ҳаракатига ҳам боғлиқдир, яъни улар нисбий характерга эга. Чунончи, фазо ва вақт материянинг борлиқ шакллари экан, демак, улар ҳаракатдаги материяга боғлиқ ҳолда ўзгаради. Бу ўзгаришлар ёруғлик тезлигига яқин тезликларда ҳаракат қилингандагина сезиларли бўлади. Назарий механикада улар эътиборга олинмайди.

Механикани ўрганишда реал объектларнинг абстракт образлари бўлган моддий нуқта, абсолют қаттиқ жисм тушунчалари, куч тушунчаси ва бошқа кўпгина тушунчалар киритилади. Шулардан баъзиларини кўриб чиқамиз. Қолганлари эса курснинг тегишли жойларида келтирилади.

Конкрет қаралаётган масала учун *улчамларининг аҳамияти бўлмаган, массаси бир геометрик нуқтага жойлашган деб тасаввур қилинадиган жисм моддий нуқта деб аталади.*

Ҳар бир нуқтасининг вазияти ва ҳаракати иккинчи бир нуқтасининг вазияти ва ҳаракатига боғлиқ бўлган моддий нуқталар тўплами механик система дейилади.

Ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофа ўзгармайдиган механик система абсолют каттиқ жисм дейилади. Жисмларни абсолют қаттиқ деб ҳисоблаганда, уларда бўладиган шакл ўзгаришлар назарга олинмайди. Бундай абстрактлаш жисмларнинг механик ҳаракатини ўрганишни бирмунча енгиллаштиради (келгусида жисм деганимизда абсолют қаттиқ жисмни назарда тутамиз).

Назарий мехника шартли равишда *кинематика, статика ва динамика* қисмларга бўлиб ўрганилади.

Кинематикада жисмларнинг механик ҳаракати уни вужудга келтирувчи сабабга боғламай, геометрик нуқтаи назардан ўрганилади.

Статика қисмида жисмга қўйилган кучлар системасини қўшиш, кучлар системасини унга эквивалент бўлган система билан алмаштириш, кучлар системаси таъсиридаги жисмнинг мувозанат шартларини, жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш масалалари кўрилади.

Динамикада моддий нуқта, механик система ва қаттиқ жисмнинг механик ҳаракати шу харакатни вужудга келтирувчи сабабларга боғлаб ўрганилади.

КИНЕМАТИКА

I боб. НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

1-§. Нуқта ҳаракатининг берилиш усуллари

Вақтнинг ихтиёрий пайтида нуқтанинг вазиятини бирор саноқ системасига нисбатан аниқлаш усули *нуқта ҳаракатининг берилиш усулини* ифодалайди. Бунда саноқ системаси сифатида Декарт, цилиндрик, сферик ва ҳ. координаталар системасини олиш мумкин. Кўпинча, ҳаракат тўғри бурчакли Декарт координаталари системасига нисбатан текширилади. Бу система бирмунча қулай бўлганлиги сабабли биз ҳам келгусида асосан шу системадан фойдаланамиз. Нуқта ҳаракати асосан уч усулда: *вектор, координаталар, табиий усулда* аниқланади.

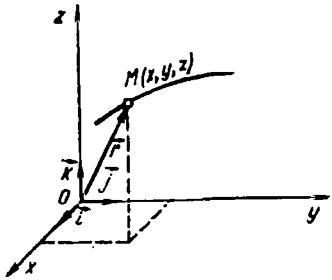
Ҳаракатнинг вектор усулида берилиши. Маълумки, ихтиёрий M нуқта вазиятини бирор координаталар системасига нисбатан, учи ушбу нуқтада бўлган, боши эса координаталар бошида булган битта $\vec{r}$ радиус-вектор билан бир қийматли равишда аниқлаш мумкин (1.1-расм). Агар текширилаётган нуқта ҳаракатда бўлса, вақт ўтиши билан унинг радиус-вектори ҳам мос равишда узининг узунлигини ва йуналишини узгартириб боради. Демак,

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1.1}$$

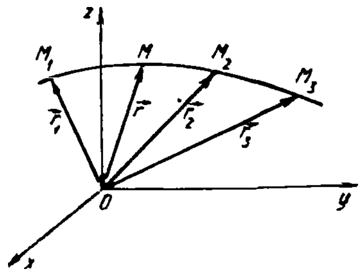
қонуниятининг берилиши вақтнинг ихтиёрий пайтида текширилаётган M нуқта вазиятини аниқлаш имкониятини беради, яъни нуқта ҳаракатини аниқлайди. (1.1) тенглама *нуқта ҳаракатининг вектор кўринишдаги кинематик тенгламаси* дейилади.

Вақтнинг t_1, t_2, t_3, ... қийматларида $\vec{r}$ вектор, мос равишда, $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$, $\vec{r}_3 = \vec{r}(t_3)$, ... катталикларга эга булсин (1.2-расм). Бу векторлар учларининг геометрик урни — $M_1MM_2M_3$ чизиқ *радиус-вектор годографи* дейилади.

Нуқта траекторияси деб, ҳаракат вақтида унинг фазода қолдирган изига айтилади. Ҳаракатдаги M нуқта ва $\vec{r}$ радиус-вектор учидаги нуқта устма-уст тушгани учун радиус-вектор годографи нуқта траекториясини ифодалайди.



1.1-расм.



1.2-расм.

Ҳаракатнинг координаталар усулида берилиши. Нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан вазиятини шу системадаги координаталари орқали ҳам аниқлаш мумкин. 1.1-расмда M нуқтанинг $Oxyz$ Декарт координаталари системасидаги вазияти кўрсатилган. Бунда $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — мос равишда Ox, Oy, Oz координата ўқларининг бирлик векторлари. Агар нуқта шу танланган системага нисбатан ҳаракат қилса, унинг x, y, z координаталари вақтнинг узлуксиз функциялари сифатида ўзгариб боради:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.2}$$

Шундай қилиб, (1.2) ҳам (1.1) га ўхшаш нуқта ҳаракатини аниқлайди. (1.2) тенгламалар *нуқта ҳаракатининг координаталар кўринишидаги кинематик тенгламалари* дейилади.

M нуқтанинг x, y, z координаталари шу нуқта радиус-векторининг координата ўқларидаги проекцияларидир. Бинобарин,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.3}$$

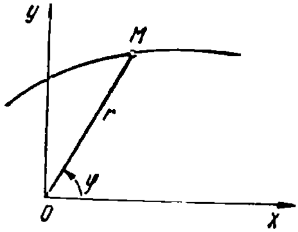
муносабат ўринли бўлади. (1.3) ифода нуқта ҳаракати берилишининг координаталар усулидан вектор усулига ва вектор усулидан координаталар усулига ўтишни белгилайди. (1.2) тенгламалар ўз мазмуни жиҳатидан *траекториянинг* t параметрга нисбатан *параметрик тенгламаларидир.* Улардан параметр t ни йўқотиб, траекториянинг

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(z, y) = 0 \tag{1.4}$$

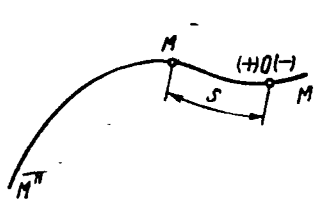
кўринишдаги тенгламаларини ҳосил қилиш мумкин.

Нуқта текисликда ҳаракатланса, унинг ҳаракатини *қутб координаталари системасида* аниқлаш кўп ҳолларда қулайлик туғдиради. 1.3-расмда M нуқтанинг текисликдаги вазиятини аниқловчи қутб радиуси r ва қутб бурчаги φ кўрсатилган, бунда φ бурчакнинг мусбат йўналиши сифатида соат стрелкаси йўналишига тескари бўлган йўналиш қабул қилинади. Ҳаракатдаги нуқта учун қутб радиуси ва қутб бурчаги вақтнинг бирор узлуксиз функцияларидир:

$$r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t) \tag{1.5}$$



1.3- расм.



1.4- расм.

Бу тенгламалар ҳам нуқта ҳаракатининг координаталар кўринишидаги тенгламаларидир. (1.5) дан t ни йўқотиб, траекториянинг қутб координаталари системасидаги

$$r = r(\varphi)$$

тенгламасини ҳосил қилиш мумкин.

Ҳаракатнинг табиий усулда берилиши. Баъзи пайтларда ҳаракати текширилаётган нуқтанинг траекторияси аввалдан маълум бўлиши мумкин. M нуқтанинг берилган $M'M''$ траекториясида бирор O нуқтани саноқ боши деб олиб, мусбат ва манфий йўналиш танлайлик (1.4-расм). Нуқтанинг саноқ бошига нисбатан ёй координатасини s орқали белгилайлик. У ҳолда нуқтанинг траектория бўйлаб ёй координатасининг ўзгариш қонуни:

$$s = s(t) \tag{1.6}$$

маълум бўлса, нуқтанинг ҳар ондаги ҳолати тўла аниқ бўлади. Шундай қилиб, агар: 1) нуқта траекторияси; 2) траекторияда саноқ боши сифатида қабул қилинган нуқта; 3) ҳаракатнинг мусбат ёки манфий йўналиши; 4) нуқтанинг траектория буйлаб ёй координатасининг ўзгариш қонуни, яъни (1.6) ифода берилса, ҳаракат тўлиқ аниқланади. Ҳаракатнинг шундай аниқланиши *ҳаракатнинг табиий усулда берилиши* дейилади

Ҳаракат берилишининг куриб ўтилган бир усулидан иккинчи бир усулига ўтиш мумкин. Масалан, ҳаракат (1.2) тенгламалар билан берилган бўлсин. Ҳаракат берилишининг табиий усулига ўтишни кўрайлик. (1.2) тенгламалардан t параметрни йўқотиб, траекторияни аниқловчи (1.4) тенгламалар ҳосил қилинади. Траекторияда саноқ бошини белгилаш учун (1.4) тенгламалардан бирор, масалан, x ўзгарувчига $x = x_0$ қиймат берилади. Қолган ўзгарувчиларнинг қийматлари y_0, z_0 эса мазкур тенгламалардан топилади. x_0, y_0, z_0 координаталар билан белгиланувчи O нуқта саноқ боши сифатида олиниши мумкин. $O(x_0, y_0, z_0)$ нуқта ҳаракатдаги нуқтанинг траекторияда вақтнинг бирор $t = t_0$ моментида эгаллаган ўрнига мос келади. (Умуман, траекторияда саноқ бошини танлаш ихтиёрийдир. Одатда, саноқ боши сифатида ҳаракатдаги нуқтанинг $t = 0$ вақтдаги траекторияда ётувчи ҳолати олинади. Бундай нуқта

(1.2) тенгламаларда $t=0$ деб олиб топилади. Равшанки, саноқ боши сифатида олинган бу нуқта учун $s=0$ бўлади.

Нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракат қонунини топайлик. $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ бўлганидан $ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt$. $t=0$ да $s=0$ деб олсак,

$$s=\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}_2+\dot{z}^2}\,dt \qquad (1.7)$$

бўлади. Бу ерда $x=\frac{dx}{dt}$, $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$, $\dot{z}=\frac{dz}{dt}$.

(1.7) интегрални ҳисоблаб, нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракатланиш қонуни топилади. Ҳаракатнинг йуналиши эса (1.7) ифодада илдиз олдидаги ишора билан белгиланади.

1-масала. M нуқта ҳаракати $\vec{r}=(2t+1)\vec{i}+(2-3t)\vec{j}$ тенглама билан ифодаланади (r—метрда, t—секундда ўлчанади). M нуқта траекторияси аниқлансин ҳамда ҳаракат бошлангандан сунг қанча вақт ўтгач, у абсцисса ўқида бўлиши топилсин.

Ечиш (1.3) муносабатга кўра, масала шартидан нуқта ҳаракатининг координата усулида

$$x=2t+1, \quad y=2-3t, \quad z=0 \qquad (1)$$

тенгламалар билан берилиши келиб чиқади. Нуқта траекториясини топиш учун (1) системадан вақт t ни йўқотиш керак. Бунинг учун (1) нинг биринчисини t га нисбатан ечамиз:

$$t=\frac{x-1}{2}. \qquad (2)$$

(2) ифодани (1) нинг иккинчи тенгламасига қуйсак,

$$2y+3x=7 \qquad (3)$$

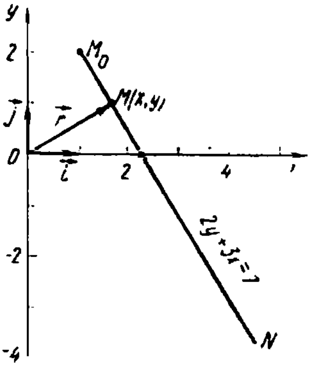
тўғри чизиқ тенгламаси ҳосил бўлади. $t\geqslant 0$ бўлиши шартидан (2) дан $x\geqslant 1$ келиб чиқади.

Шундай қилиб, M нуқта траекторияси $2y+3x=7$, $x\geqslant 1$ тенгламалар билан ифодаланувчи M_0N нурдан иборат (1.5-расм). Нуқта $t=0$ вақтда координаталари $x=1$, $y=2$ дан иборат M_0 ҳолатда булади.

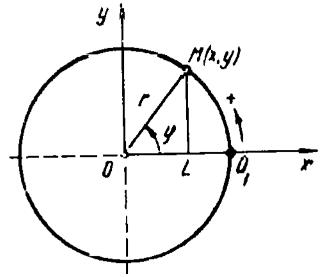
Нуқта абсцисса уқида бўлганида: $\bar{y}=0$. Бинобарин, $2-3t=0$ тенгликдан $t=\frac{2}{3}$с вақтда нуқта абсцисса ўқида бўлишини ва $x=2\frac{1}{3}$ *м* эканлигини топамиз.

2-масала. Нуқта радиуси r бўлган айлана бўйлаб соат стрелкаси йуналишига тескари йуналишда $s=kt$ қонунга кўра ҳаракатланади ($k=\text{const}$). Ox горизонтал ўқ нуқтанинг бошланғич ҳолатидан ўтади деб қараб, координата боши айлана марказидан ўтувчи xOy системага нисбатан нуқтанинг ҳаракат қонуни топилсин.

Ечиш. Координата бошини r радиусли айлана марказида



1.5-расм.



1.6-расм.

олиб, xOy координата системасини ўтказамиз (1.6-расм). Масала шартига кўра нуқта траекториясида саноқ боши учун O_1 нуқта мос келади. O_1 саноқ бошидан траектория бўйлаб соат стрелкаси ҳаракатига тескари йуналишни мусбат йўналиш деб оламиз.

$O_1M = s = kt$ қонун бўйича ҳаракатланувчи M нуқта координаталарини x, y билан белгилаймиз: $x = OL$, $y = LM$. M нуқта ҳаракатланганда унинг координаталари $\varphi = \widehat{O_1OM}$ бурчак функцияси сифатида узгаради. Тўғри бурчакли OLM учбурчакдан:

$$OL = OM\cos\varphi,\ LM = OM\sin\varphi \text{ ёки } x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Ёй узунлигини ҳисоблаш формуласига кўра $\overset{\frown}{O_1M} = r\varphi$; бундан

$$\varphi = \frac{\overset{\frown}{O_1M}}{r} = \frac{kt}{r}.$$

Шундай қилиб, M нуктанинг xOy координата системасига нисбатан ҳаракат қонуни $x = r\cos\frac{kt}{r}$, $y = r\sin\frac{kt}{r}$ тенгламалар билан аниқланади.

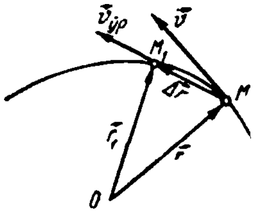
2-§. Нуқтанинг тезлик вектори

Нуқта ҳаракатини характерловчи муҳим катталиклардан бири унинг тезлигидир. Ҳаракат вектор, координата ва табиий усулларда берилганда тезлик қандай аниқланишини курайлик.

Нуқта ҳаракати (1.1) вектор тенглама:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

билан берилган бўлсин. Фараз қилайлик, ҳаракатдаги нуқта вақтнинг бирор t пайтида $\vec{r}$ радиус-вектор билан аниқланувчи



1.7- расм.

M вазиятда бўлсин (1.7- расм). $t_1 = t + \Delta t$ вақтда эса шу нуқта $\vec{r}_1 = r(t + \Delta t)$ радиус-вектор билан аниқланувчи M_1 вазиятни олсин. У ҳолда нуқта радиус-векторининг Δt вақт оралиғида ўзгариши $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ вектор билан белгиланади. $\Delta\vec{r}$ векторнинг Δt вақтга нисбати нуқтанинг шу вақт оралиғидаги *ўртача тезлик вектори* $\vec{v}_{ўр}$ дейилади, яъни

$$\vec{v}_{ўр} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.8)$$

(1.8) дан кўрамизки, Δt скаляр ифода бўлгани учун $v_{ўр}$ вектори $\Delta\vec{r}$ буйлаб йўналади.

Ўртача тезлик векторининг Δt нолга интилгандаги лимити нуқтанинг тезлик вектори дейилади. Тезлик векторини $\vec{v}$ билан белгиласак, таърифга кўра:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ ёки } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (1.9)$$

$\Delta t \to 0$ да M_1 нуқта M га интилиб, $\vec{v}_{ўр}$ вектори ҳаракат траекториясига M нуқтада ўтказилган уринма бўйича йўналишга интилади, бинобарин, *$\vec{v}$ тезлик вектори* ҳам *ҳаракат траекториясига M нуқтада ўтказилган уринма бўйича йўналади.*

(1.9) дан тезлик ўлчамини ҳосил қиламиз:

$$|v| = \frac{\text{узунлик}}{\text{вақт}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Нуқта ҳаракати координаталар усулида (1.2) тенгламалар:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

билан берилган бўлсин. (1.3) га асосан

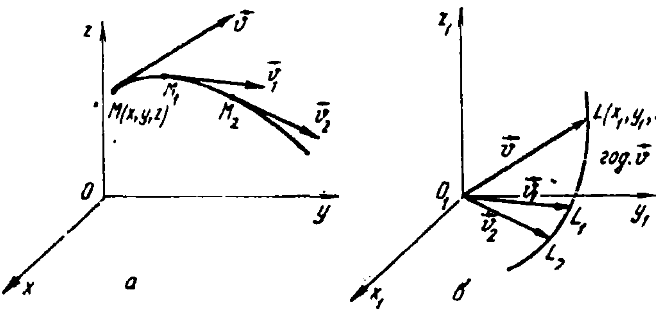
$$\vec{r} = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

бўлиб, (1.9) ни эътиборга олсак,

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (1.10)$$

келиб чиқади. $\vec{v}$ векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини v_x, v_y, v_z орқали белгиласак, (1.10) ифодани координата ўқларига проекциялаб,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \qquad (1.11)$$



1.8-расм.

ни ҳосил қиламиз. Демак, *нуқта тезлигининг бирор ўқдаги проекцияси нуқтанинг шу ўққа мос келувчи координатасининг ўзгариши қонунидан вақт буйича олинган биринчи ҳосилага тенг.* У ҳолда тезлик векторининг модули вн йўналиши қуйидаги тенгликлардан топилади:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \tag{1.12}$$

$$\cos\left(\vec{v}, \hat{\vec{i}}\right) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\left(\vec{v}, \hat{\vec{j}}\right) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\left(\vec{v}, \hat{\vec{k}}\right) = \frac{v_z}{v}. \tag{1.13}$$

Нуқтанинг турли пайтдаги тезлик векторларининг бошлари бир нуқтага келтирилганда, шу векторлар учларининг геометрик ўрнини туташтирувчи эгри чизиқ *тезлик вектори гоографи* дейилади.

M нуқта *Oxyz* координаталар системасига нисбатан ҳаракатланиб, t, t_1, t_2 пайтларда мос равишда $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ тезликларга эга бўлсин (1.8-расм, *a*) $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системаси олиб, бу тезлик векторлари бошларини O_1 нуқтага кўчирсак (1.8-расм, *б*), уларнинг учлари L, L_1, L_2 нинг геометрик урни тезлик вектори годографини ифодалайди. Таърифга кура, L нуқта координаталари (x_1, y_1, z_1) тезлик векторининг $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системаси ўқларидаги проекцияларини ифодалайди:

$$x_1 = v_x, \quad y_1 = v_{y_1}, \quad z_1 = v_z.$$

Агар *Oxyz* ва $O_1x_1y_1z_1$ координата системалари ўқларини мос равишда параллел қилиб олсак,

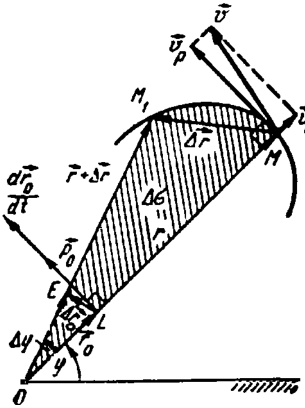
$$v_{x_1} = v_x = \dot{x}, \quad v_{y_1} = v_y = \dot{y}, \quad v_{z_1} = v_z = \dot{z}$$

булиб, тезлик вектори годографининг параметрик тенгламаларини

$$x_1 = \dot{x}, \quad y_1 = \dot{y}, \quad z_1 = \dot{z}$$

5055

куринишда ифодалаш мумкин.



1.9- расм.

Нуқта тезлигини қутб координаталари системасида аниқлашни кўрайлик. Нуқтанинг ҳаракати (1.5) тенгламалар:

$$r=r(t), \qquad \varphi=\varphi(t)$$

билан берилган бўлсин. $\vec{r}=r\cdot\vec{r}_0$ векторни киритамиз (1.9-расм) Бу ерда $\vec{r}_0$ билан r қутб радиуси йўналишини белгиловчи бирлик вектор белгиланган. У ҳолда

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\cdot\vec{r}_0)=$$

$$=\frac{dr}{dt}\vec{r}_0+r\cdot\frac{d\vec{r}_0}{dt}. \qquad (1.14)$$

(1.14) тенгламадаги $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ векторни аниқлаймиз. $\vec{r}_0$— бирлик вектор бўлгани учун $\vec{r}_0\cdot\vec{r}_0=1$. Охирги ифодани дифференциалласак, $2\frac{d\vec{r}_0}{dt}\cdot\vec{r}_0=0$. Бинобарин, $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ вектори $\vec{r}_0$ векторига перпендикуляр экан. У ҳолда φ бурчак ўсишига мос келувчи, $\vec{r}_0$ га перпендикуляр бўлган $\vec{p}_0$ бирлик вектор киритсак,

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt}=\left|\frac{d\vec{r}_0}{dt}\right|\cdot\vec{p}_0$$

ифода ўринли бўлади. Шунингдек,

$$\left|\frac{d\vec{r}_0}{dt}\right|=\frac{d\varphi}{dt}.$$

Ҳақиқатан, ELO тенг ёнли учбурчак бўлганидан

$$|\Delta\vec{r}_0|=2|\vec{r}_0|\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi/2}\cdot\Delta\varphi.$$

У ҳолда

$$\left|\frac{d\vec{r}_0}{dt}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}_0}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi/2}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}.$$

Демак,

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}_0. \qquad (1.15)$$

(1.15) га кўра (1.14) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{v}=\frac{dr}{dt}\cdot\vec{r}_0+r\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}_0. \qquad (1.16)$$

(1.16) дан кўринадики, $\vec{v}$ тезлик вектори иккита тезликнинг геометрик йиғиндисидан иборат экан. Улардан бири

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0$$

бўлиб *радиал тезлик* дейилади ва у *қутб радиусининг вақтга нисбатан ўзгариш тезлигини характерлайди.* Иккинчиси

$$\vec{v}_p = r\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}_0$$

бўлиб, *кўндаланг (трансверсал) тезлик* дейилади. Радиал ва кўндаланг тезликлар бир-бирига перпендикуляр бўлгани учун тўла тезликнинг катталиги қуйидагича аниқланади:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}. \qquad (1.17)$$

Механиканинг махсус бўлимларида, айниқса астрономияда муҳим аҳамиятга эга бўлган *секториал тезлик* тушунчасини киритамиз. Нуқтанинг Δt вақт оралиғида чизган OMM_1 сектори юзасини $\Delta\sigma$ орқали белгилаймиз. Тақрибан бу юза OMM_1 учбурчакнинг юзасига тенг, яъни

$$\Delta\sigma = |\Delta\vec{\sigma}| \approx \frac{1}{2}|\vec{r}\times\Delta\vec{r}|$$

$\Delta\vec{\sigma}$ вектор $\vec{r}$ ва $\Delta\vec{r}$ векторлар кўпайтмасининг ярмига тенг бўлиб, у *вектор юза* деб юритилади. Унинг йўналиши вектор кўпайтма қоидаси билан белгиланади. Вектор юзанинг Δt вақтга нисбатини тузиб, бу нисбатдан Δt ни нолга интилтириб лимит ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left(\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{r}\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v}).$$

Бу тенгликда $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ бўлгани учун, ундан

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v})$$

келиб чиқади. $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ катталикка секториал тезлик дейилади. Уни $\vec{v}_\sigma$ орқали белгилаймиз. Шундай қилиб

$$\vec{v}_\sigma = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v}). \qquad (1.18)$$

Секториал тезликнинг модули қуйидагича бўлади:

$$v_a = \frac{1}{2} r v \sin(\vec{r}, \hat{\vec{v}}) = \frac{1}{2} r v_p = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \omega, \quad (1.19)$$

бу ерда $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезлик векторини аниқлашни кўриб чиқамиз:

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0 \quad (1.20)$$

тенгламалар Декарт координаталари системасида нуқта траекториясини, $s = s(t)$ эса нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракат қонунини ифодаласин. Нуқтанинг $\vec{r}$ радиус-векторини s нинг функцияси дейиш мумкин. У ҳолда $\vec{r}$ векторни t вақтнинг мураккаб функцияси деб қарасак,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (\text{а})$$

бўлади. Бунда

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}. \quad (\text{б})$$

Лекин Δs ёйни туташтирувчи $\Delta\vec{r}$ векторнинг шу ёйга нисбатидан Δs ёйни нолга интилтириб олинган лимит траекторияга ўтказилган уринманинг бирлик векторини беради. Бу векторни $\vec{\tau}$ орқали белгилаймиз (1.10- расм):

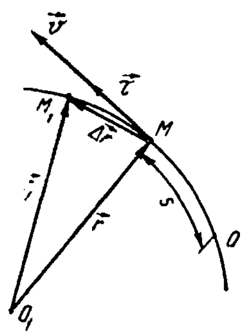
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau} \quad (1.21)$$

(б) ва (1.21) муносабатларни эътиборга олиб, (а) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau} = \dot{s}\,\vec{\tau}. \quad (1.22)$$

Бирлик вектор $\vec{\tau}$ доимо, ҳаракат йўналишидан қатъи назар, нуқта траекториясига ўтказилган уринма бўйича саноқ бошидан нуқтагача бўлган масофанинг ўсиши томон йўналади. Ҳақиқатан $ds > 0$ да $\vec{\tau}$ ва $d\vec{r}$ векторлар бир хил йўналган бўлиб, $d\vec{r}$ масофанинг ўсиши томон йўналади. Агар нуқта траектория бўйлаб саноқ боши томон ҳаракатланса $ds < 0$; шунинг учун $\vec{\tau}$ ва $d\vec{r}$ бир-бирига карама-қарши йўналиб, $d\vec{r}$ — масофанинг камайиши томон, $\vec{\tau}$ эса масофанинг усиши томон йўналади.

Шундай қилиб, $\dot{s} > 0$ да $\vec{v}$ вектори $\vec{\tau}$ бўйича, $\dot{s} < 0$ да эса $\vec{\tau}$ векторига тескари йўналар экан. 1.10- расмда $\dot{s} > 0$ ҳол учун $\vec{v}$ векторнинг йўналиши кўрсатилган.



1.10- расм.

$v = \dot{s}$ *нуқта тезлигининг алгебраик қиймати* дейилиб, тезликнинг ҳаракат траекториясига уринма ҳолда ўтказилган $\vec{\tau}$ вектор йўналишидаги проекцияси деб қаралиши мумкин. Демак, *нуқта тезлигининг алгебраик қиймати траектория бўйлаб ёй координатасининг ўзгариш қонунидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосилага тенг.*

3- масала. Нуқтанинг ҳаракати

$$x = \operatorname{tg} t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

тенгламалар билан ифодаланади (x, y — метрда, t — секундда ўлчанади). Нуқта траекторияси, $t = \frac{\pi}{4}$ c пайтдаги тезлиги ва тезлик годографининг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Нуқта траекториясини топиш учун (1) тенгламалар системасида вақт t ни йуқотиш керак. Маълумки, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ёки $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Шунинг учун (1) дан $y = \cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}$, ёки $y = \frac{1}{1+x^2}$ траектория тенгламаси келиб чиқади (1.11- расм).

Нуқта тезлигини (1.11) — (1.13) формулалардан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$v_x = \dot{x} = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad v_y = \dot{y} = -2\sin t \cdot \cos t = -\sin 2t. \qquad (3)$$

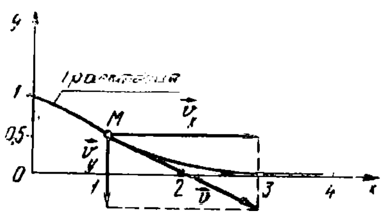
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{1}{\cos^4 t} + \sin^2 2t} = \frac{\sqrt{1+\sin^2 2t \cos^4 t}}{\cos^2 t}.$$

$t = \frac{\pi}{4}$ да: $v_x = 2$ м/с,

$v_y = -1$ м/с, $v = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ м/с;

$$\cos(\vec{v}, \vec{x}) = \frac{v_x}{v} = 0{,}8928,$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{y}) = \frac{v_y}{v} = -0{,}4464.$$



Бу вақтда нуқта расмда кўрсатилган M ҳолатда булади.

Тезлик годографи тенгламасини топиш учун (2) ни

$$x_1 = v_x = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y_1 = v_y = -2\sin t \cos t \qquad (3)$$

кўринишда ёзиб, улардан вақт t ни йўқотамиз.

(3) нинг биринчи тенгламасидан:

$$\cos^2 t = \frac{1}{x_1}. \qquad (4)$$

$0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$ да $\sin t > 0$ бўлгани учун $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$. Натижада (4) ни эътиборга олиб, (3) нинг иккинчисидан

$$y_1 = -2\sqrt{1 - \frac{1}{x_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}} \quad \text{ёки} \quad y_1 = -\frac{2}{x_1}\sqrt{x_1 - 1}$$

тезлик вектори годографи тенгламасини ҳосил қиламиз.

4-масала. Нуқта шундай ҳаракатланадики, унинг радиус-вектори буйича силжиш тезлиги ўзгармас v_0 га тенг, радиус-вектор эса O қутб атрофида ω_0 ўзгармас бурчак тезлик билан айланади: $t = 0$ да $r = 0$, $\varphi = 0$.

Нуқта траекторияси тенгламаси ва тезлигининг ўзгариш қонуни топилсин.

Ечиш. Масалани қутб координаталар системасида ечамиз. Масала шартига кўра, нуқта радиус-вектори миқдори $r = v_0 \cdot t$ тенгламага мувофиқ, йуналиши эса $\varphi = \omega_0 t$ қонунга кура ўзгаради.

Бу икки ифодадан t ни йўқотиб, нуқта траекториясини ҳосил қиламиз:

$$r = \frac{v_0}{\omega_0}\varphi. \qquad (1)$$

(1) тенглама Архимед спирали деб аталувчи чизиқни ифодалайди. Нуқта тезлигини (1.17) формуладан фойдаланиб аниқлаймиз:

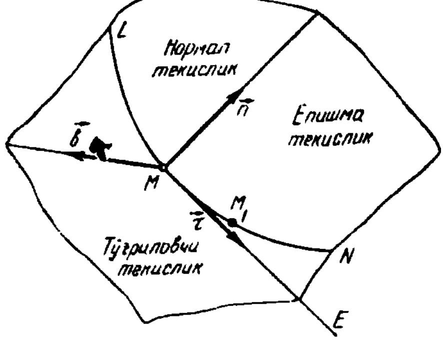
$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = v_0\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}. \qquad (2)$$

Шундай қилиб, кўрилаётган масалада нуқта тезлигининг вақт бўйича узгариш қонуни (2) формула билан аниқланади.

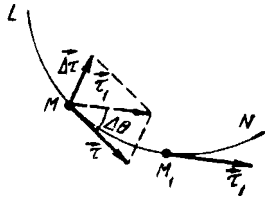
3-§. Дифференциал геометриядан баъзи тушунчалар

Нуқтанинг тезланишини аниқлашга ўтишдан аввал бунда қўлланиладиган дифференциал геометриянинг айрим тушунчаларини куриб чиқамиз.

LN фазовий эгри чизиқда бир-бирига қўшни M ва M_1 нуқталар олиб, M нуқтада берилган чизиққа ME уринма ўтказайлик (1.12-расм). ME уринмада олинган бирлик векторни $\vec{\tau}$ билан белгилаймиз. M_1 нуқта ва $\vec{\tau}$ орқали ўтказилган текис-



1.12- расм.



1.13- расм.

ликнинг M_1 нуқта M га интилгандаги вазияти *ёпишма текислик* ёки *эгрилик текислиги* дейилади.

M нуқтадан ўтувчи ва $\vec{\tau}$ уринмага перпендикуляр тўғри чизиқлар эгри чизиқнинг M нуқтасидаги нормаллар дейилади; бу нормаллар ётувчи текислик *нормал текислик* дейилади. Ёпишма текислигида ётувчи нормаль *бош нормаль* дейилади, бош нормалнинг бирлик векторини $\vec{n}$ билан белгилаймиз. Бош нормалга перпендикуляр бўлган нормаль *бинормаль* дейилади, бинормаль бирлик вектори, одатда, $\vec{b}$ билан белгиланади. $\vec{b}$ вектор шундай йўналтириладики, $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ ва $\vec{b}$ орқали ўтказилган система ўнг системани ташкил этсин; $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ орқали ўтказилган координата системаси *табиий координата системаси* дейилади. Эгри чизиқнинг бир нуқтасидан иккинчи нуқтасига утилганда табиий координата системаси ўз йўналишини ўзгартиради.

Нормал ва ёпишма текисликларнинг ҳар қайсисига перпендикуляр бўлган текислик, яъни $\vec{\tau}$ ва $\vec{b}$ орқали ўтказилган текислик *тўғриловчи текислик* дейилади.

LN эгри чизиқнинг ўзаро қўшни бўлган M ва M_1 нуқталарида шу чизиққа ўтказилган уринмалар бирлик векторлари $\vec{\tau}$ ва $\vec{\tau}_1$ бўлсин (1.13- расм). $\vec{\tau}$ ва $\vec{\tau}_1$ векторлар орасидаги бурчакни $\Delta\theta$ билан белгилаймиз. $\Delta\theta$ бурчак эгри чизиқнинг $\Delta s = \smile MM_1$ оралигида вектор йўналишининг ўзгаришини ифодалайди ва *оралиқ бурчаги* дейилади. $k_{ўр} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ эса MM_1 ёйнинг *уртача эгрилиги* дейилади. Ўртача эгриликнинг M_1 нуқта M га интилгандаги ($\Delta s \to 0$ даги) лимити *эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилиги* дейилади ва k билан белгиланади:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}. \tag{1.23}$$

Эгри чизиқнинг бирор нуқтасидаги эгрилигининг тескари миқдори *эгри чизиқнинг* шу нуқтасидаги *эгрилик радиуси* дейилади. Эгрилик радиусини ρ билан белгиласак, таърифга биноан

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

У ҳолда (1.23) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}. \qquad (1.24)$$

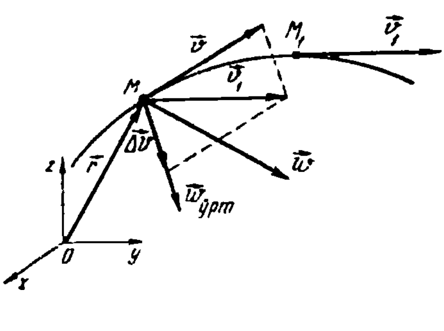
(1.24) формуладан фойдаланиб, айлана эгрилик радиуси айлана радиусига тенглигини, тўғри чизиқ учун $\rho = \infty$ булишини топиш мумкин.

4-§. Нуқтанинг тезланиш вектори

Ҳаракатдаги *нуқтанинг тезланиши* вектор катталик бўлиб, у *тезлик векторининг вақтга нисбатан ўзгариш тезлигини ифодалайди.* Ҳаракати вектор, координата ва табиий усулларда берилган нуқтанинг тезланиш векторини аниқлашни кўрайлик.

Нуқтанинг ҳаракати $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама билан *вектор усулда берилган* бўлсин. Вақтнинг бирор t пайтида ҳаракатдаги нуқта M вазиятда булиб, тезлиги $\vec{v}$ бўлсин. Δt вақт ўтгандан сўнг, у траекторияда M_1 вазиятга ўтиб, тезлиги $\vec{v}_1$ бўлсин. Тезликнинг Δt вақт оралиғида ўзгаришини ифодаловчи $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ векторни тузамиз (1.14-расм). Бунинг учун $\vec{v}_1$, векторни ўз-ўзига параллел равишда M нуқтага кўчириб, бир томони $\vec{v}$, диагонали эса $\vec{v}_1$ бўлган параллелограмм ясаймиз. Шу параллелограммнинг иккинчи томони $\Delta\vec{v}$ бўлади. $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ нисбат ҳаракатдаги нуқтанинг Δt вақт оралиғидаги *ўртача тезланиш вектори* дейилади, уни $\vec{w}_{ўр}$ билан белгилаймиз:

$$\vec{w}_{ўр} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$



1.14 расм.

Равшанки, ўртача тезланиш вектори $\Delta\vec{v}$ вектор бўйлаб йўналади. Ўртача тезланиш векторининг Δt нолга интилгандаги лимити *нуқтанинг тезланиш вектори* дейилади; уни $\vec{w}$ билан белгилайлик:

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

(1.9) ни эътиборга олсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.25)$$

$\vec{v}$ ва $\Delta\vec{v}$ векторлари орқали ўтказилган параллелограмм текислигининг $\Delta t \to 0$ даги вазияти M нуқтада утказилган ёпишма текислик билан устма-уст тушади. $\vec{w}_{\text{ўр}}$ вектор шу параллелограммда ётгани, $\vec{w}$ эса $\vec{w}_{\text{ўр}}$ нинг $\Delta t \to 0$ даги лимити булгани учун тезланиш вектори ёпишма текисликда ётади ва траекториянинг ботиқ томонига йўналади.

Нуқта ҳаракати координаталар усулида

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

тенгламалар билан берилган бўлсин.

Нуқта тезлигини унинг координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали ифодалаймиз:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Буни (1.25) га қўямиз:

$$\vec{w} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}.$$

Тезланишнинг координата уқларидаги проекцияларини w_x, w_y, w_z билан белгилаб, (1.11) формулаларни эътиборга олиб, охирги тенгликни координата ўқларига проекциялаймиз:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} \qquad (1.26)$$

Демак, *нуқта тезланишининг бирор ўқдаги проекцияси шу нуқта тезлигининг берилган уқдаги проекцияси ўзгариши қонунидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосилага ёки нуқтанинг тегишли координатасидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг* экан. Тезланиш векторининг модули ҳамда йўналиши қуйидаги муносабатлардан топилади:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \qquad (1.27)$$

$$\cos(\vec{w}, \hat{\vec{i}}) = \frac{w_x}{w}, \qquad \cos(\vec{w}, \hat{\vec{j}}) = \frac{w_y}{w}, \qquad \cos(\vec{w}, \hat{\vec{k}}) = \frac{w_z}{w}. \qquad (1.28)$$

Нуқта текисликда ҳаракатланиб, унинг *ҳаракати қутб координаталарида берилганда* тезланиш векторини аниқлашни кўрамиз (1.9-расм). $\vec{p}_0$ ва $\vec{r}_0$ векторларининг йўналишлари ўзгарувчи эканлигини эътиборга олиб, (1.16) формула билан аниқланувчи $\vec{v}$ тезлик векторидан вақт буйича ҳосила оламиз:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{r}_0 + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}_0 + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{p}_0 + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{p}_0}{dt}. \quad (1.29)$$

Маълумки, бирлик вектордан олинган ҳосила унга перпендикуляр бўлган векторни беради:

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{p}_0. \quad (1.30)$$

Бунда $\vec{p}_0$ вектор $\vec{r}_0$ векторга нисбатан соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда $\pi/2$ бурчакка бурилган булиб, бу бурчак φ нинг ўзгариши билан ўзгармайди. Демак, агар $\vec{p}_0$ вектордан ҳосила олсак, бу ҳосила $\vec{p}_0$ га перпендикуляр булган векторни ифодалайди:

$$\frac{d\vec{p}_0}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{r}_0. \quad (1.31)$$

(1.30) ва (1.31) ни назарда тутиб (1.29) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{w} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{r}_0 + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}_0 + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}_0 + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{p}_0 - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\vec{r}_0 =$$
$$= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{r}_0 + \left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{p}_0.$$

$\vec{w}$ вектор иккита векторнинг геометрик йиғиндисидан иборат буляпти. Уларни мос равишда $\vec{w}_r$ ва $\vec{w}_p$ орқали белгилаймиз:

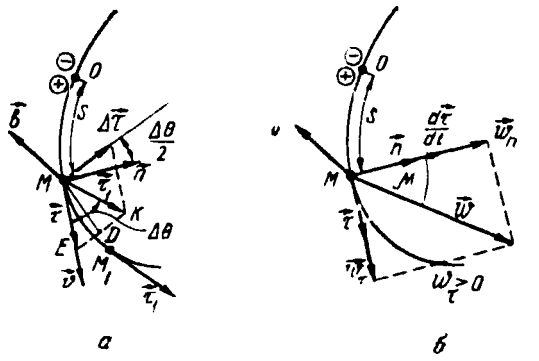
$$\vec{w}_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{r}_0, \qquad \vec{w}_p = \left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{p}_0. \quad (1.32)$$

У ҳолда

$$\vec{w} = \vec{w}_r = \vec{w}_p.$$

$\vec{w}_r$ *радиал тезланиш вектори*, $\vec{w}_p$ эса *кўндаланг (трансверсал) тезланиш вектори* дейилади. (1.32) дан $\vec{w}_r$ ва $\vec{w}_p$ векторлари мос равишда $\vec{r}_0$ ва $\vec{p}_0$ векторларига коллинеар эканлиги кўринади. $\vec{w}_r$ билан $\vec{w}_p$ ўзаро перпендикуляр бўлгани учун $\vec{w}$ тула тезланиш векторининг модули қуйидаги формуладан аниқланади:

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2} \quad (1.33)$$



1.15- расм.

Нуқта ҳаракати табиий усулда берилган бўлиб, у $s = f(t)$ тенглама билан ифодалансин (1.15- расм, *a*). *M* нуқтадан табиий координата ўқларини ўтказамиз. (1.22) формулага кура:

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = v \cdot \vec{\tau}.$$

Буни (1.25) га қўямиз:

$$\vec{w} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (1.34)$$

(1.34) даги $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}.$$

Аввал бу лимит модулини, сўнг йўналишини топамиз. Бунинг учун *M* нуқтада қурилган *EMK* учбурчакни қараймиз. $\widehat{EMK} = \Delta\theta$, $\smile MM_1 = \Delta s$ деб белгилаймиз: $ME = MK = 1$ бўлганидан $MD \perp EK$, $\widehat{EMD} = \frac{\Delta\theta}{2}$, $ED = \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{2}$. $\triangle EMD$ дан: $|\Delta\vec{\tau}| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$. У ҳолда

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t = 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta/2} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right|.$$

Маълумки, $\lim\limits_{\Delta\theta \to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta/2}\right| = 1$, $\quad \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = v$. (1.24) га биноан,

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \frac{1}{\rho}.$$

Демак, $\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{v}{\rho}$.

$\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ нинг йўналиши $\Delta\vec{\tau}$ нинг $\Delta t \to 0$ даги лимити вазиятига мос келади. $\vec{n} \perp \vec{\tau}$, $MD \perp \Delta\vec{\tau}$ бўлгани учун $\vec{n}, \Delta\vec{\tau} = \widehat{EMD} = \frac{\Delta\theta}{2}$; $\Delta t \to 0$ да $\frac{\Delta\theta}{2} \to 0$. Бинобарин, $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ нинг йўналиши $\vec{n}$ билан мос келади.

Натижада қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| \cdot \vec{n} = \frac{v}{\rho}\vec{n}.$$

Шундай қилиб, (1.34) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{w} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \qquad (1.35)$$

(1.35) ни табиий координата ўқларига проекциялаб, тезланишнинг шу ўқлардаги проекцияларини аниқлаш мумкин:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}, \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad w_b = 0. \qquad (1.36)$$

(1.35) нинг ўнг томонидаги биринчи ҳад *нуқтанинг уринма тезланиши* дейилади:

$$\vec{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}. \qquad (1.37)$$

Уринма тезланиш нуқта тезлиги миқдорининг ўзгаришини ифодалаб, $\frac{dv}{dt} > 0$ *да* $\vec{w}$ *нинг йўналиши* $\vec{\tau}$ *билан бир хил,* $\frac{dv}{dt} < 0$ *да* $\vec{w}_\tau$ *вектор* $\vec{\tau}$ *га қарама-қарши йўналади* (1.15-расм, *б*).

$$\vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \qquad (1.38)$$

нуқтанинг нормал тезланиши дейилади. *Нормал тезланиш тезлик йўналишининг ўзгаришини ифодалаб*, у бош нормал бирлик вектори $\vec{n}$ *билан бир хил йўналади.*

Уринма ва нормал тезланишлар миқдорлари (1.36) формулалардан топилади. (1.37) ва (1.38) га кўра (1.35) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n, \qquad (1.39)$$

яъни, *эгри чизиқли ҳаракатдаги нуқта тезланиши уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.*

$(\vec{w}_\tau, \hat{\ } \vec{w}_n) = 90^\circ$ бўлгани учун тезланиш миқдори қуйилаги формула билан топилади:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}. \tag{1.40}$$

Тезланиш йўналиши унинг бош нормал $\vec{n}$ билан ташкил қилган μ бурчаги орқали аниқланади:

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{|w_\tau}{w_n}. \tag{1.41}$$

Агар $w_\tau = 0$, $w_n = 0$ бўлса, нуқта тезлигининг миқдори ва йўналиши ўзгармай, у тўғри чизиқли текис ҳаракатда (хусусий ҳолда тинч ҳолатда) бўлади.

$w_\tau \neq 0$, $w_n = 0$ ҳолида нуқта тўғри чизиқли ўзгарувчан ҳаракатда бўлади, агар бир онда $w_n = 0$ бўлса, нуқта умуман эгри чизиқли ҳаракат қилиб, шу онда траекториянинг букилиш нуқтасида бўлади.

$w_\tau = 0$, $w_n \neq 0$ да нуқта $s = s_0 + v_0 t$ қонунга кўра текис ҳаракат қилади.

$w_\tau = \text{const}$, $w_n \neq 0$ да эса нуқта эгри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракатда бўлади; бу ҳолда $w_\tau = \frac{dv}{dt} = C$ ни интеграллаб, *эгри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракатда тезликни* ва *эгри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракат қонунини ифодаловчи тенгламаларни* ҳосил қиламиз:

$$v = v_0 + w_\tau t, \tag{1.42}$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{w_\tau t^2}{2}. \tag{1.42}$$

5-масала. Нуқта радиуси 800 м бўлган айлана ёйи бўйлаб текис ўзгарувчан ҳаракат қилади. Унинг бошланғич тезлиги $v_0 = 5$ м/с булиб, $s = 800$ м масофани ўтгандан кейинги тезлиги $v_T = 15$ м/с.

Нуқтанинг бошланғич тезланиши w_0, 800 м масофани ўтиш вақти T ва ҳаракат бошлангандан кейин T вақт утганда қандай w_T тезланишга эга бўлиши топилсин.

Ечиш. Нуқта эгри чизиқли ҳаракатда булгани учун унинг тезлиниши (1.39) формулага кўра топилади:

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n.$$

Масала шартига кўра нуқта текис ўзгарувчан ҳаракатда бўлгани учун (1.42) ва (1.43) формулалардан фойдаланамиз:

$$v = v_0 + w_\tau t, \tag{1}$$

$$s = s_0 + v_0 t + w_\tau \frac{t^2}{2}. \tag{2}$$

Саноқ бошини нуқтанинг бошланғич ҳолатида олсак, $s_0=0$; масала шартида берилганларни (1) ва (2) га қуямиз:

$$15=5+w_\tau\cdot T, \qquad 800=5T+w_\tau\cdot\frac{T^2}{2}.$$

Бу тенгламалар системасини ечсак, $T=80$ с; $w_\tau=0{,}125$ м/с^2 $=\mathrm{const}$ келиб чиқади.

Нуқтанинг бошланғич ва T пайтдаги нормал тезланишларини (1.36) формулаларнинг иккинчисидан топамиз. Нуқта траекторияси айлана бўлгани учун $\rho=R=800$ м.

$$w_{n0}=\frac{v_0^2}{\rho}=0{,}029\ \text{м/с}^2, \quad w_{nT}=\frac{v_T^2}{\rho}=0{,}281\ \text{м/с}^2.$$

Нуқтанинг тезланиши $w=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}$ формуладан топилади. Шунга кўра, $t=0$, $t=T$ вақтлар учун, мос равишда $w_0=$ $=0{,}129$ м/с^2, $w_T=0{,}308\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ келиб чиқади. Ҳар икки пайт учун тезланиш йўналишини (1.41) формула ёрдамида топамиз:

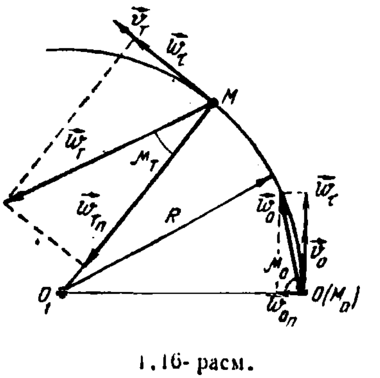
$$\mu_0=\operatorname{arctg}\frac{|w_\tau|}{w_{n0}}=\operatorname{arctg}4{,}310, \qquad \mu_0\approx 77°;$$

$$\mu_T=\operatorname{arctg}\frac{|w_\tau|}{w_{nT}}=\operatorname{arctg}0{,}444, \qquad \mu_T\approx 24°.$$

Тезланиш вектори йўналиши 1.16-расмда тасвирланган.

6-масала. Ҳаракати $\vec r=2\sin\frac{\pi t}{3}\vec i+\left(3\cos\frac{\pi t}{3}+4\right)\vec j$ тенглама билан ифодаланган нуқтанинг траекторияси ва $t=1$ с пайтдаги тезлиги, тезланиши ҳамда траекториянинг шу вақтга мос келувчи эгрилик радиуси топилсин (r — метрда, t — секундда ўлчанади).

Ечиш. (1.3) ифода билан нуқта ҳаракати тенгламасини таққослаб, координата усулида ҳаракатни қуйидагича ифодалаймиз:



1.16-расм.

$$x=2\sin\frac{\pi t}{3}, \quad y=3\cos\frac{\pi t}{3}+4. \qquad (1)$$

Бу (1) тенгламалар системаси нуқта траекториясининг параметрик тенгламалари бўлиб, улардан вақт t ни йўқотсак, траекториянинг қандай чизиқ бўлиши аниқланади. Бунинг учун (1) ни

$$\frac{x}{2}=\sin\frac{\pi t}{3}, \qquad \frac{y-4}{3}=\cos\frac{\pi t}{3}$$

кўринишда ёзиб, уларнинг ҳар

бирини квадратга ошириб, ҳадлаб қўшамиз:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{9}=1 \qquad (2)$$

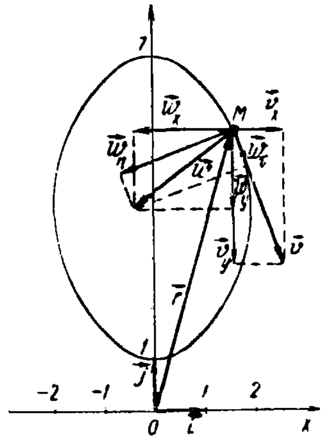
(2) дан кўриниб турибдики, нуқта траекторияси эллипс шаклида экан (1.17- расм).

$t=1$ с пайтда нуқта траекториянинг M нуқтасида бўлади.

Нуқта тезлигини (1.11) — (1.13) формулалар ёрдамида топамиз: $v_x = \dot{x} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3}$, $v_y = \dot{y} = -\pi\sin\frac{\pi t}{3}$,

$v = \pi\sqrt{\frac{4}{9}\cos^2\frac{\pi t}{3}+\sin^2\frac{\pi t}{3}}$ ёки

$$v = \frac{\pi}{3}\sqrt{4+5\sin^2\frac{\pi}{3}t}. \qquad (3)$$



1.17- расм.

$t=1$ с пайт учун $v_x = \frac{\pi}{3}\approx 1{,}05$ м/с, $v_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \approx -2{,}72$ м/с, $v = \frac{\pi}{6}\sqrt{31}\approx 2{,}92$ м/с, $\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v}\approx 0{,}3584$, $\cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v}\approx$ $\approx -0{,}9312$.

Бу катталикларни расмда тасвирлаб, $\vec{v}$ вектори траекторияга M нуқтада ўтказилган уринма бўйича йўналганига иқрор бўламиз.

Нуқтанинг тезланишини (1.26)—(1.28) формулалар воситасида топамиз:

$$w_x = \dot{v}_x = -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3}, \qquad w_y = \dot{v}_y = -\frac{\pi^2}{3}\cos\frac{\pi t}{3};$$

$$w = \frac{\pi^2}{3}\sqrt{\frac{4}{9}\sin^2\frac{\pi}{3}t+\cos^2\frac{\pi}{3}t} = \frac{\pi^2}{9}\sqrt{9-5\sin^2\frac{\pi}{3}t}.$$

$t=1$ с пайт учун:

$$w_x \approx -1{,}9 \text{ м/с}^2, \quad w_y \approx -1{,}65 \text{ м/с}^2, \quad w\approx 2{,}51 \text{ м/с}^2;$$

$$\cos(\vec{w}, \vec{i}) = \frac{w_x}{w}\approx -0{,}7570, \ \cos(\vec{w}, \vec{j}) = \frac{w_y}{w}\approx -0{,}6573.$$

Маълум масштаб танлаб олиб, бу катталикларни ҳам 1.17- расмда тасвирлаймиз.

Траекториянинг эгрилик радиусини аниқлашда $w_n = \frac{v^2}{\rho}$ формуладан фойдаланиш мумкин. Бунинг учун аввал уринма ва нормал тезланишларни топиш керак.

$w_\tau = \frac{dv}{dt}$ бўлгани учун (3) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$w_\tau = \dot{v} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\frac{10}{3}\pi \cos\frac{\pi}{3}t \cdot \sin\frac{\pi}{3}t}{2\sqrt{4 + 5\sin^2\frac{\pi}{3}t}} = \frac{5}{18}\pi^2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{3}t}{\sqrt{4 + 5\sin^2\frac{\pi}{3}t}}.$$

Бундан $t = 1$ с пайт учун $w_\tau \approx 0{,}85\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ келиб чиқади. Уринма тезланиш тезлик вектори бўйича йўналган. $w^2 = w_\tau^2 + w_n^2$ формуладан фойдаланиб, $t = 1$ с вақт учун нормал тезланишни аниқлаймиз:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} \approx 2{,}36 \text{ м/с}^2.$$

Нормал тезланиш $\vec{w}_\tau$ га перпендикуляр равишда траекториянинг ботиқ томонига йўналган.

$t = 1$ с пайтда нуқтанинг траекторияда эгалланган ҳолати учун эгрилик радиусини топамиз:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} \approx 2{,}69 \text{ м}.$$

5-§. Нуқтанинг эркин тебраниши

Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати ўрганилаётганда, кўп ҳолларда унинг эркин тебранма ҳаракатига дуч келинади. Нуқта

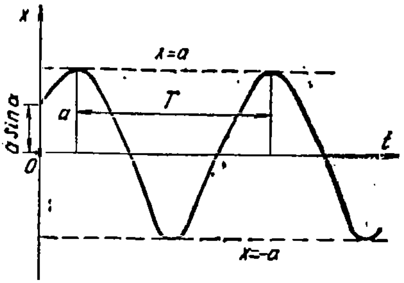
$$x = a\sin(kt + \alpha) \tag{1.44}$$

тенгламага биноан ҳаракатланса, бундай ҳаракат *эркин тебранма ҳаракат* дейилади. (1.44) дан эркин тебранма ҳаракат графиги синусоида бўлиши равшан (1.18- расм). Нуқтанинг саноқ бошидан энг катта четга чиқиши $x_{max} = a$ га тенг булиб, бу катталик *тебраниш амплитудаси* дейилади. Саноқ боши қилиб олинган O нуқта эса *тебраниш маркази* дейилади. Нуқтанинг бир марта тўла тебраниши учун кетган вақт *тебраниш даври* дейилади. T тебраниш даври $\sin[k(t + T) + \alpha] = \sin(kt + 2\pi + \alpha)$ бўлиш шартидан фойдаланиб топилади:

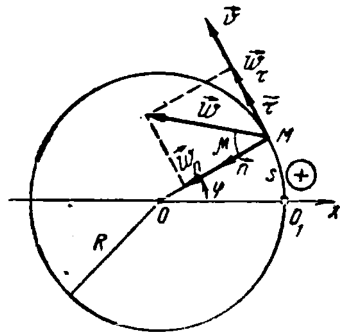
$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Тебраниш даврининг тескари қиймати $\nu = \frac{1}{T}$ *тебраниш такрорлиги* $kt + \alpha$ — *тебраниш фазаси*, α эса *бошланғич фаза* дейилади. $k = 2\pi\nu$ катталик *тебранишнинг циклик* ёки *доиравий такрорлиги* дейилади.

Агар $\alpha = 0$ ёки $\alpha = \frac{\pi}{2}$ булса, (1.44) га биноан нуқтанинг эр-



1.18- расм.



1.19- расм.

кин тебранишлари мос равишда $x = a\sin kt$ ёки $x = a\cos kt$ тенгламалар билан ифодаланади.

Туғри чизиқли ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги ва тезланиши (1.12) ва (1.27) ифодаларга биноан, мос равишда

$$v = v_x = \dot{x}, \quad w = w_x = \ddot{x}$$

формулалар билан аниқланади. Бинобарин, (1.44) дан вақт бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни ҳисоблаб, эркин тебранма ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги ва тезланишини аниқлаш мумкин:

$$v = ak\cos(kt + \alpha), \qquad w = -ak^2\sin(kt + \alpha) = -k^2x.$$

6-§. Нуқтанинг айлана бўйлаб ҳаракати

Нуқтанинг айлана бўйлаб ҳаракати амалда кўп учрайдиган ҳаракат турларидан биридир. M нуқта R радиусли айлана бўйлаб ҳаракатлансин (1.19- расм). Қўзғалмас координата ўқи, масалан, Ox ўқ билан айлана кесишган нуқта O_1 ни саноқ боши деб, нуқтанинг траектория бўйлаб соат стрелкаси айланишига тескари ҳаракатини мусбат йўналиш деб танлайлик. У ҳолда M нуқта ёй координатаси s нинг ўзгаришини $s = R\cdot\varphi$ формула билан ифодалаш мумкин; бунда φ орқали Ox ўқ билан $OM = R$ радиус орасидаги бурчак белгиланган бўлиб, у *OM радиуснинг айланиш бурчаги* дейилади.

Айлана бўйлаб ҳаракатдаги нуқта тезлигини аниқлаш учун (1.22) формуладан фойдаланамиз:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \frac{d(R\varphi)}{dt}\vec{\tau} = R\frac{d\varphi}{dt}\vec{\tau}, \tag{1.45}$$

бу ерда $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ катталик *OM радиус айланишининг бурчак тезлиги* дейилади.

У ҳолда (1.45) тенглик

$$\vec{v} = R\omega\vec{\tau} \tag{1.46}$$

кўринишда ёзилади. (1.46) дан $\omega > 0$ бўлса, $\vec{v}$ вектори $\vec{\tau}$ уринма бўйича, $\omega < 0$ да $\vec{\tau}$ га қарама-қарши йўналиши кўриниб турибди; тезликнинг миқдори

$$v = R\omega \tag{1.44}$$

формула бўйича аниқланади.

Айлана буйлаб ҳаракатдаги нуқтанинг уринма тезланишини (1.47) ни назарда тутиб (1.37) формулага асосан топамиз:

$$\vec{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{\tau}.$$

Бу ифодадаги $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ катталик *M нуқта радиуси айланишининг бурчак тезланиши* дейилади.

Шундай қилиб,

$$\vec{w}_\tau = R\varepsilon\vec{\tau}, \qquad w_\tau = R \cdot \varepsilon. \tag{1.48}$$

Айлананинг эгрилик радиуси айлана радиусига тенг бўлиши ҳамда (1.47) ни эътиборга олиб, (1.38) формула ёрдамида *айлана буйлаб ҳаракатдаги нуқтанинг нормал тезланишини* топамиз.

$$\vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \frac{R^2\omega^2}{R}\vec{n}$$

ёки

$$\vec{w}_n = R\omega^2\vec{n}, \qquad w_n = R\omega^2. \tag{1.49}$$

Айлана бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтанинг нормал тезланиши *марказга интилма тезланиш* деб ҳам аталади.

(1.48) ва (1.49) ни (1.40) ва (1.41) формулаларга қўйиб, *айлана бўйлаб ҳаракатдаги нуқта тезланишининг миқдори ва йўналишини* аниқловчи қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \tag{1.50}$$

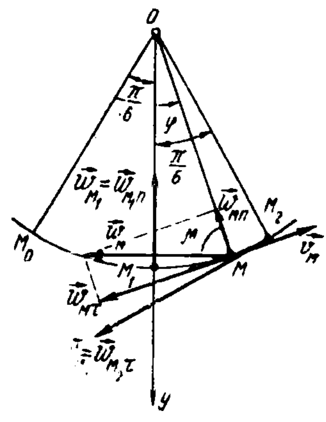
$$\mu = \operatorname{arctg}\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \tag{1.51}$$

7-масала. *M* шарча узунлиги $OM = l = 1{,}5$ м бўлган ипга осилган ва у вертикал текисликда *O* ўқ атрофида

$$\varphi = -\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}t \tag{1}$$

тенгламага мувофиқ айлана ёйи бўйлаб тебранади. Бунда φ

бурчак Oy вертикалдан бошлаб радианда ўлчаниб, соат стрелкаси айланишига тескари йўналиш мусбат деб олинган, t эса секундда ўлчанади. M шарчанинг $t=t_1=\frac{3}{2}$ с пайтдаги тезлиги ва тезланиши ҳамда ҳаракат бошлангандан кейин уринма тезланиши нолга тенг бўладиган энг яқин вақт $t=t_2$ ва нормал тезланиши нолга тенг бўладиган энг яқин вақт $t=t_3$ топилсин (1.20-расм).



1.20-расм

Ечиш. Бошланғич пайтда, яъни $t=0$ да (1) дан $\varphi_0=-\frac{\pi}{6}$ бўлишини кўрамиз; бу пайтда шарча расмда тасвирланган M_0 ҳолатда бўлади, $\left|\cos\frac{\pi}{2}t\right|\leqslant 1$ бўлгани учун (1) дан φ бурчак $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ оралиқдаги қийматларни қабул қилишини ҳосил қиламиз.

Аввал (1) дан вақт бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар ҳисоблаб, OM ип айланишининг бурчак тезлиги ω ва бурчак тезланиши ε ни аниқлаймиз:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\pi^2}{12}\sin\frac{\pi}{2}t,\quad \varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{\pi^3}{24}\cos\frac{\pi}{2}t.$$

(1.47) формулага биноан шарча тезлигини топамиз:

$$v=R\cdot\omega=l\cdot\frac{\pi^2}{12}\sin\frac{\pi}{2}t.$$

$t=t_1=\frac{3}{2}$ с пайтда $\varphi=-\frac{\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\sqrt{2}$ рад $\approx 21°$ бўлиб, шарча расмда тасвирланган M ҳолатни эгаллайди. Бу пайтда $v_M=1{,}5\frac{\pi^2}{12}\sin\frac{3\pi}{4}\approx 0{,}872\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ бўлиб, $\vec{v}_M$ вектор M нуқтада, ҳаракатнинг мусбат йўналишига мос равишда, айланага ўтказилган уринма бўйича йўналади.

Шарчанинг уринма тезланишини (1.48) формуладан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$w_\tau=R\cdot\varepsilon=l\cdot\frac{\pi^3}{24}\cos\frac{\pi}{2}t. \qquad (2)$$

$$t=t_1 \text{ пайтда } w_\tau=l\frac{\pi^3}{24}\cos\frac{3\pi}{4}\approx-1{,}37\ \text{м/с}^2.$$

Уринма тезланишнинг манфий ишорали чиқиши $t=t_1$ пайтда $\vec{w}_\tau$ вектор $\vec{v}_M$ га тескари йўналганини кўрсатади.

Шарчанинг нормал тезланишини (1.49) формулага кўра топамиз:

$$w_n = R\omega^2 = l \cdot \frac{\pi^4}{144} \sin^2 \frac{\pi}{2} t. \tag{3}$$

$t = t_1$ пайтда $w_{M_n} = l \cdot \frac{\pi^4}{144} \sin^2 \frac{3\pi}{4} \approx 0{,}51$ м/с².

$\vec{w}_{M_n}$ вектор M нуқтадан ип бўйлаб O марказга қараб йўналган.

(1.50) формулага кўра M нуқта тезланишини топамиз:

$$w_M = \sqrt{w_{M_\tau}^2 + w_{M_n}^2} \approx 1{,}46 \text{ м/с}^2.$$

Тезланиш вектори $\vec{w}$ нинг йуналишини μ бурчак орқали аниқлаймиз. (1.51) формулага биноан:

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \operatorname{arctg} 2{,}6863 \approx 69°35'.$$

Уринма тезланиш нолга тенг бўладиган вақтни топиш учун (2) да $t = t_2$, $w_\tau = 0$ деб оламиз:

$$l \frac{\pi^3}{24} \cos \frac{\pi}{2} t_2 = 0 \Longleftrightarrow \cos \frac{\pi}{2} t_2 = 0.$$

Бу тенглама ечими: $\frac{\pi}{2} t_2 = \frac{\pi}{2} n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ булади. Ҳаракат бошлангандан кейинги $w_\tau = 0$ бўладиган энг яқин вақт $n=1$ га тўғри келади. У ҳолда $t_2 = 1$ с келиб чиқади.

$t = t_2 = 1$ с пайтда $\varphi = -\frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{2} = 0$ бўлиб, шарча M_1 ҳолатни эгаллайди ва бу пайтда $\vec{w}_{M_1} = \vec{w}_{M_1n}$. M нуқтада уринма тезланиш йуналишини узгартиради. Нормал тезланиш нолга тенг буладиган вақтни топиш учун (3) да $t = t_3$, $w_n = 0$ деб оламиз:

$$l \frac{\pi^4}{144} \sin^2 \frac{\pi}{2} t_3 = 0 \Longleftrightarrow \sin \frac{\pi}{2} t_3 = 0.$$

Бу тенглама ечими: $\frac{\pi}{2} t_3 = \pi k$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. Нормал тезланиш нолга тенг бўладиган энг яқин вақт $k = 1$ га мос келади: $\frac{\pi}{2} t_3 = \pi$ ёки $t_3 = 2$ с. $t = t_3 = 2$ с пайтда $\varphi = -\frac{\pi}{6} \cos\pi = \frac{\pi}{6}$ бўлиб, шарча M_2 ҳолатни эгаллайди ва бунда $\vec{w}_{M_2} = \vec{w}_{M_{2\tau}}$.

Шарча M_2 ҳолатга келган пайтда тезлиги нолга тенг бўлади.

II боб. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ СОДДА ҲАРАКАТЛАРИ

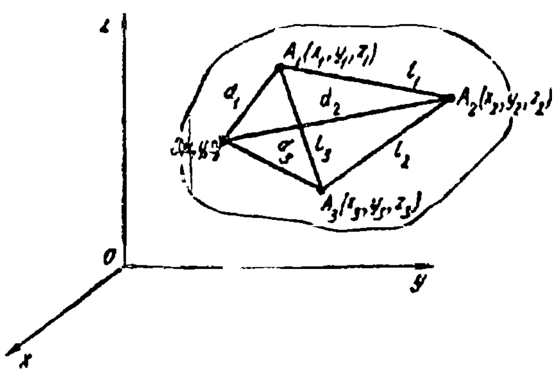
Жисм чексиз куп нуқталарнинг тўпламидан иборат булишига қарамасдан, унинг ҳаракатини аниқлаш учун, ундаги бир туғри чизиқда ётмаган учта нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш кифоядир. Жисм A_1, A_2, A_3 нуқталарининг вазияти x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 координаталар билан белгиланган булсин (2.1- расм). Шу жисмдаги ихтиёрий B нуқтанинг x, y, z координаталарини A_1, A_2, A_3 нуқталар координаталари орқали ифода этамиз. A_1B кесмани d_1 билан, A_2B кесмани d_2 билан, A_3B кесмани d_3 билан белгилайлик. d_1, d_2, d_3 кесмалар узгармасдир. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига асосан.

$$\left.\begin{aligned}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2&=d_1^2,\\(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2&=d_2^2,\\(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2&=d_3^2.\end{aligned}\right\}$$

бўлади. Бу системадан эса x, y, z ларни A_1, A_2, A_3 нуқталар координаталари орқали ифодалаш мумкин. Агар жисм ҳаракатда бўлса, бу координаталар вақтнинг бирор функциялари булиб, x, y, z координаталар ҳам вақтнинг функциялари сифатида улар орқали топилади. Демак, жисмнинг ҳаракати ундаги бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтасининг ҳаракати билан тўлиқ белгиланади. Бу учта нуқта 9 та координата билан аниқланади. Лекин бу координаталар ўзаро қуйидаги учта муносабат билан боғлангандир;

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2&=l_1^2,\\(x_2-x_3)^2+(x_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2&=l_2^2,\\(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2&=l_3^2.\end{aligned}$$

Бунда l_1, l_2, l_3 —мос равишда A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 кесмаларнинг узунлигидир. Бинобарин, жисм ҳаракатини аниқловчи 9 та



2.1- расм.

координаталарнинг фақат 6 таси мустақил экан. Шу маънода эркин жисмнинг ҳаракати 6 та мустақил тенгламалар билан ифода этилади, дейилади. Умуман, *жисм ҳаракатини тўлиқ аниқловчи, бир-бирига боғлиқ бўлмаган параметрларнинг сони жисмнинг эркинлик даражаси дейилади.*

Жисм ҳаракати баъзи йўналишларда қандайдир сабабларга кура чекланган бўлиши ҳам мумкин. Ҳаракатни чекловчи сабабларга *боғланишлар* дейилади. Улар жисм ҳаракатини ифодаловчи тенгламаларга маълум қўшимча шартлар қуяди ва натижада, жисмнинг эркинлик даражасини камайтиради. Боғланишлар қўйилган ҳаракатланувчи жисмларнинг эркинлик даражасини аниқлаш муҳим кинематик масаладир. Аввал боғланишдаги жисмлар ҳаракатларининг муҳим куринишларини, сўнгра эркин жисм ҳаракатини ўрганамиз.

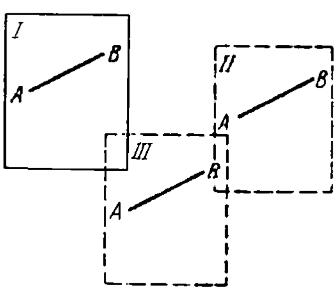
7-§. Жисмнинг илгарилама ҳаракати

Ҳаракати давомида жисмда олинган ҳар қандай кесма узига параллел қолса, жисмнинг бундай ҳаракатига илгарилама ҳаракат дейилади. 2.2-расмда илгарилама ҳаракат схематик равишда кўрсатилган; бунда жисм ҳаракат давомида кетма-кет I, II, III вазиятларни эгалласа, унда олинган AB кесма ўз параллеллигини сақлаб қолган. Жисмнинг туғри чизиқли ҳаракати, велосипед педалининг ҳаракати илгарилама ҳаракатга мисол була олади.

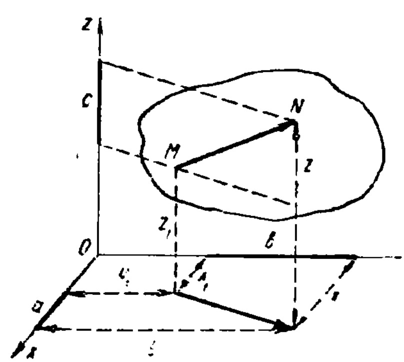
Илгарилама ҳаракат килувчи жисмнинг ҳаракати унинг бирор нуқтаси ҳаракатининг берилиши билан тулиқ аниқланади. Ҳақиқатан, жисм $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтасининг ҳаракати

$$x_1 = x_1(t),\ y_1 = (y_1 t),\ z_1 = z_1(t)$$

тенгламалар билан берилган булсин. $N(x, y, z)$ жисмнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (2.3-расм). $\overline{MN}$ вектор жисмнинг илгарилама ҳаракати давомида ўзига параллел қолади, яъни бу



2.2- расм.



2.3- расм.

вектор ўзгармас бўлади. $\overrightarrow{MN}$ векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини a, b, c десак, улар ҳам жисм ҳаракати давомида ўзгармайди. Шунинг учун N нуқта координаталарини

$$x = x_1(t) + a, \quad y = y_1(t) + b, \quad z = z_1(t) + c \tag{2.1}$$

тенгламалар билан ифодалаш мумкин. N нуқта ихтиёрий бўлганидан қолган барча нуқталар учун ҳам (2.1) га ўхшаш муносабатларни ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, жисмнинг илгарилама ҳаракати 3 та тенглама билан аниқланар экан. Бинобарин, бундай жисмнинг эркинлик даражаси 3 га тенг бўлади. (2.1) тенгламалардан илгарилама ҳаракатдаги жисм барча нуқталарининг траекториялари бир хил кўринишга эга эканлиги ҳақида хулоса чиқариш мумкин.

a, b ва c нинг ўзгармас эканлигини назарда тутиб (2.1) дан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила олсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$\dot{x} = \dot{x}_1, \quad \dot{y} = \dot{y}_1, \quad \dot{z} = \dot{z}_1$$

ёки

$$v_{N_x} = v_{M_x}, \quad v_{N_y} = v_{M_y}, \quad v_{N_z} = v_{M_z}. \tag{2.2}$$

У ҳолда N ва M нуқталарнинг ҳар ондаги тезлик векторлари бир хил бўлади:

$$\vec{v}_N = \vec{v}_M. \tag{2.3}$$

(2.2) дан вақт бўйича яна бир марта ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\dot{v}_{N_x} = \dot{v}_{M_x}, \quad \dot{v}_{N_y} = \dot{v}_{M_y}, \quad \dot{v}_{N_z} = \dot{v}_{M_z}$$

ёки

$$w_{N_x} = w_{M_x}, \quad w_{N_y} = w_{M_y}, \quad w_{N_z} = w_{M_z}. \tag{2.4}$$

(2.4) дан N ва M нуқталарнинг ҳар ондаги тезланишлари ҳам бир хил бўлиши аёндир:

$$\vec{w}_N = \vec{w}_M. \tag{2,5}$$

M ва N нуқталар жисмнинг ихтиёрий нуқталари бўлгани учун, (2.3) ва (2.5) ифодаларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_N &= \vec{v}_M = \vec{v}, \\ \vec{w}_N &= \vec{w}_M = \vec{w} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Шундай қилиб, қуйидаги *теорема* исботланди:

Илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталари *бир хил куринишдаги траектория чизиб, улар ҳар онда бир хил тезлик ва бир хил тезланишга эга булади.*

Бундан *жисмнинг илгарилама ҳаракатини ўрганиш ундаги ихтиёрий нуқтанинг ҳаракатини урганишга келтирилади*, деган хулоса чиқади. Хусусан илғарилама ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезлиги ёки тезланиши дейиш ўрнига жисмнинг тезлиги ёки тезланиши дейиш мумкин.

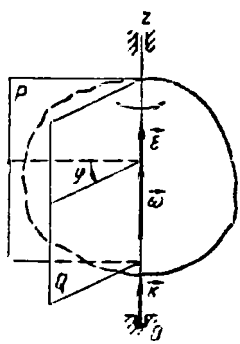
8- §. Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати. Бурчак тезлик ва бурчак тезланиш тушунчалари

Ҳаракат давомида жисмнинг иккита нуқтаси доимо қўзғалмай қолса, жисмнинг бундай ҳаракати қузғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат дейилади. Қўзғалмас нуқталардан ўтувчи ўқ *айланиш уқи* дейилади. *Айланиш уқининг мусбат йўналиши* сифатида шундай йуналиш қабул қилинадики, ўқнинг учидан қараганда айланма ҳаракат соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда кўринсин.

Фикран Oz айланиш уқи орқали қузғалмас P ярим текислик ва айланувчи жисм билан бириктирилган қузғалувчи Q ярим текисликлар утказайлик (2.4- расм). Бу текисликлар орасида ҳосил булган икки ёқли бурчакни φ билан белгилаймиз. Жисм айланма ҳаракат қилганида φ бурчак мос равишда узгариб боради. Айланиш ўқининг учидан қараганда φ бурчакнинг ортиши соат стрелкаси айланишига тескари кўринса, уни мусбат деб қараймиз. φ бурчак *бурилиш бурчаги* дейилади. φ бурчакнинг узгариши жисм барча нуқталари учун бир хилдир. Шунинг учун жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (2.7)$$

тенглама билан тўлиқ аниқланади. (2.7) ифсда *жисмнинг қузғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракати тенгламаси* дейилади.



2.4- расм.

Бурилиш бурчагининг вақт бирлигида ўзгаришига жисмнинг бурчак тезлиги дейилади. Бурчак тезликнинг миқдорини ω билан белгиласак, таърифга биноан у қуйидаги формуладан топилади:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (2.8)$$

Жисмнинг бурчак тезлиги шартли равишда айланиш ўқи буйича йўналган ва унинг мусбат учидан қараганда айланиш соат стрелкаси ҳаракатига тескари кўринадиган *вектор деб қаралади*

(2.4- расм). Айланиш ўқи бўйича йўналган бирлик $\vec{k}$ вектор киритсак, қуйидаги формула ўринли бўлади;

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}. \qquad (2.9)$$

Халқаро системада жисмнинг бурчак тезлиги рад/с да ўлчанади:

$$[\omega] = \frac{\text{бурчак}}{\text{вақт}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = c^{-1}$$

Жисмнинг бурчак тезлиги доимо ўзгармай қоладиган ҳаракат текис айланма ҳаракат дейилади. Жисм текис айланма ҳаракатда бўлса, (2.8) ни интеграллаб, шундай ҳаракат қонунини ҳосил қилиш мумкин:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \qquad (2.10)$$

бу ерда φ_0 — бошланғич вақтдаги бурилиш бурчаги.

Жисм текис айланма ҳаракатда бўлса, бурчак тезликни жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони — $n\ \frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ билан ўлчаш мумкин; бу бирликдан $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ га ўтиш учун

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \qquad (2.11)$$

формуладан фойдаланилади.

Бурчак тезликнинг вақт бирлиги ичида узгариши жисмнинг бурчак тезланиши дейилади. Бурчак тезланиш миқдори ε билан белгиланади:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}. \qquad (2.12)$$

(2.9) ифодада $\vec{k} = \overrightarrow{\text{const}}$ булгани учун қуйидаги ифода ўринлидир:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k},$$

яъни, бурчак тезланиш вектори ҳам айланиш ўқи бўйича йўналади. У $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$ ёки $\omega < 0$, $\varepsilon < 0$ бўлганда $\vec{\omega}$ вектори билан бир хил, $\omega > 0$, $\varepsilon < 0$ ёки $\omega < 0$, $\varepsilon > 0$ бўлганда эса $\vec{\omega}$ векторига қарама-қарши йўналади. Бурчак тезлик билан бурчак тезланиш бир хил ишорали бўлса, *ҳаракат тезланувчан*, турли ишорали булса, *секинланувчан айланма ҳаракат* дейилади. 2.4- расмда тезланувчан айланма ҳаракат ҳоли учун $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ йўналишлари кўрсатилган.

Текис айланма ҳаракатда $\omega = \text{const}$ бўлгани учун $\varepsilon = 0$ ўринлидир.

Халқаро системада жисмнинг бурчак тезланиши $\frac{рад}{с^2}$ да ўлчанади:

$$|\varepsilon| = \frac{бурчак}{(вақт)^2} = \frac{рад}{с^2} = с^{-2}.$$

Бурчак тезланиши ўзгармай қоладиган ҳаракатга *текис узгарувчан айланма ҳаракат* дейилади.

(2.12) кетма-кет икки марта интегралланса, текис узгарувчан ҳаракатда бурчак тезликнинг ўзгаришини ва ҳаракат қонунини ифодаловчи қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{2.13}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}. \tag{2.14}$$

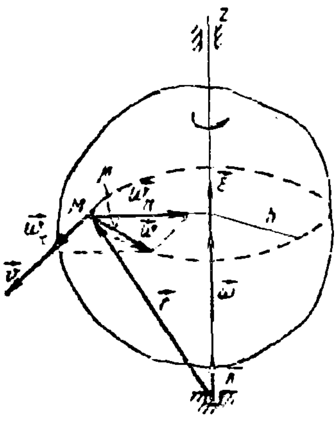
(2.13) ва (2.14) да φ_0 билан бошланғич бурилиш бурчаги, ω_0 билан бошланғич бурчак тезлик белгиланган.

9- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги ва тезланиши

Қузғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталари айланиш ўқига перпендикуляр текисликларда айланалар бўйлаб ҳаракатланади. Шунга кўра, жисмнинг ихтиёрий M нуқтасидан айланиш ўқигача бўлган масофани h билан белгиласак (2.5- расм), бу нуқта тезлигининг алгебраик қийматини (1.47) формулага биноан қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$v = h \cdot \omega. \tag{2.15}$$

Жисмнинг бирор нуқтасидан айланиш ўқигача бўлган масофа h шу нуқтанинг *айланиш радиуси* деб аталади.



2.5- расм.

(2.15) да ω жисмнинг бурчак тезлиги бўлиб, у жисм ҳамма нуқталари айланиш радиуслари учун бир хилдир.

(2.15) дан кўринадики, *қузғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг тезликлари шу нуқталар айланиш радиусларига тўғри пропорционалдир*; бунда жисмнинг бурчак тезлиги пропорционаллик коэффициентини ифодалайди. *Қузғалмас уқ атрофида айланувчи жисм ҳар бир нуқтасининг тезлик вектори шу нуқта траекторияси булмиш айланага уткизилган уринма буйича, айланиш уқи ҳамда айланиш* *радиусига перпендикуляр равишда, айланиш йўналишига мос йуналади.*

Айланиш ўқида олинган O координата бошига нисбатан M нуқтанинг радиус-векторини $\vec{r}$ билан белгилайлик. Жисм абсолют қаттиқ булгани учун $\vec{r}$ векторнинг миқдори узгармай, фақат йуналиши узгаради. Жисмнинг бурчак тезлиги ω бўлсин. Агар $r \cdot \sin(\omega, \vec{r}) = h$ бўлишини эътиборга олиб, $\omega \times \vec{r}$ купайтманинг миқдор ва йўналишини текширсак, бу вектор купайтма қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлигини ифодалашини курамиз. Бинобарин, қузғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлик векторини

$$v = \omega \times \vec{r} \tag{2.16}$$

формула билан ифодалаш мумкин.

Шундай қилиб, *қузғалмас уқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлик вектори* жисмнинг бурчак тезлиги вектори билан нуқта радиус-векторининг вектор купайтмасига тенг.

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ бўлгани учун (2.16) ни

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2.17}$$

куринишида ёзиш мумкин. (2.17) ифода фақат йўналиши ўзгарувчи вектор учининг тезлигини аниқловчи формуладир.

Қузғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланишини аниқлаш учун (1.48)÷(1.51) формулаларни қўллаб қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$w_\tau = h\varepsilon, \quad w_n = h\omega^2. \tag{2.18}$$

$$w = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \mu = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \tag{2.19}$$

Бу формулалардан кўрамизки, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг уринма, нормал (марказга интилма) ва тула тезланишлари нуқтанинг айланиш радиусига тўғри пропорционал экан.

Агар жисмнинг айланиши тезланувчан бўлса, $\vec{w}_\tau$ ва $\vec{v}$ йўналишлари бир хил, секинланувчан булганда $\vec{w}$- вектори $\vec{v}$ га қарама-қарши йўналади (2.5- расм тезланувчан ҳолига мос келади), нуқтанинг нормал-марказга интилма тезланиши нуқтадан айланиш радиуси бўйлаб айланиш ўқи томон йўналади.

Қузғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтаси тезланишини вектор усулда аниқлаш учун (2.16) дан вақт бўйича ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ёки

$$\vec{w}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (2.20)$$

(2.20) ифодадаги ҳар қайси қушилувчи векторларни (2.18) билан таққослаб, $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ нуқтанинг уринма тезланишини, $\vec{\omega}\times\vec{v}$ эса нормал тезланишини ифодалаши осонгина исботланади. Шундай қилиб,

$$\vec{w}_\tau=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}, \qquad (2.21)$$

$$\vec{w}_n=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad (2.22)$$

бўлиб, (2.20) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{w}=\vec{w}_\tau+\vec{w}_n. \qquad (2.23)$$

8-масала. Тинч ҳолатда бўлган вал текис тезланиш билан айлана бошлайди, биринчи 5 секундда у 12,5 марта айланади. Валнинг бурчак тезланиши ва 5 секунд охиридаги бурчак тезлиги топилсин.

Ечиш. *Вал текис тезланувчан ҳаракатда бўлгани учун* (2.13) ва (2.14) формулалардан фойдаланамиз.

Вал бошланғич пайтда тинч ҳолатда булгани учун $\varphi_0=0$, $\omega_0=0$. *У* ҳолда (2.13) ва (2.14) ифодалар қуйидагича ёзилади:

$$\omega=\varepsilon t, \quad \varphi=\frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Вал 5 секундда 12,5 марта айланса, бу вақтда бурилиш бурчаги қиймати $\varphi=2\pi\cdot12{,}5=25\pi$ рад булади.

Шунга кўра $\varepsilon=\frac{2\varphi}{t^2}=\frac{50\pi}{25}=2\pi c^{-2}$.

Валнинг 5 секунд ўтгандан кейинги бурчак тезлигини топамиз:

$$\omega=\varepsilon t=2\pi\cdot5=10\pi c^{-1}.$$

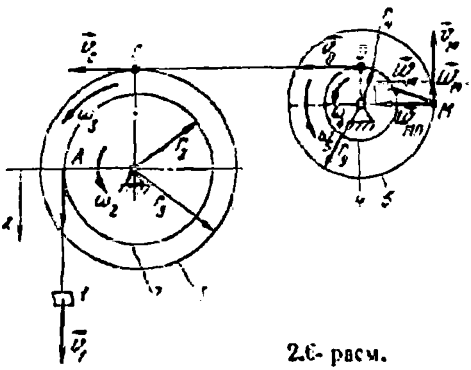
Шундай қилиб, $\omega=10\pi c^{-1}$, $\varepsilon=2\pi c^{-2}$.

9-масала. 2.6-расмда кўрсатилган 1-юкнинг ҳаракати $x=(0{,}18t^2+0{,}09t+0{,}05)$ м тенглама билан ифодаланади (t—секундда ўлчанади). 5-шкив M нуқтасининг $t=t_1$ пайтдаги тезлиги ва тезланиши топилсин. Қуйидагилар берилган: $r_2=0{,}3$ м, $r_3=0{,}4$ м, $r_4=0{,}3$ м, $r_5=0{,}15$ м, $t_1=1$ с.

Ечиш. 5-шкивга ҳаракат 1-юкдан узатилганидан унинг ҳаракат қонунидан вақт бўйича ҳосила ҳисоблаб, юк тезлигини аниқлаймиз:

$$v_1=\dot{x}=0{,}36t+0{,}09.$$

1-юк бириктирилган арқоннинг осилган қисми илгарилама ҳаракат қилгани учун $v_A=v_1$; иккинчи томондан A нуқта



2.6- расм.

қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи 2- шкивга тегишли бўлгани учун (2.15) формулага биноан: $v_A = \omega_2 \cdot r_2$.

Бу тенгликдан: $\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{0{,}36t+0{,}09}{r_2}$ с$^{-1}$.

2- ва 3- шкивлар бир ўқ атрофида айлангани учун

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{0{,}36t+0{,}09}{r_2} \text{ с}^{-1}.$$

CD трос илгарилама ҳаракат қилгани учун $v_C = v_D$; C ва D нуқталар, мос равишда, 3- ва 4- шкивларга тегишли булганидан

$$v_C = \omega_3 r_3, \quad v_D = \omega_4 \cdot r_4.$$

Демак, $\omega_3 r_3 = \omega_4 r_4$ ёки $\omega_4 = \frac{r_3}{r_4} \omega_3$.

4- ва 5- шкивлар бир ўқ атрофида айлангани учун $\omega_5 = \omega_4$. Натижада

$$\omega_5 = \frac{r_3}{r_4} \omega_3 = \frac{r_3}{r_2 r_4} (0{,}36t + 0{,}09)\text{с}^{-1}$$

ҳосил булади: бунга r_2, r_3, r_4 қийматларини қуйиб 5- шкив бурчак тезлигининг ўзгариш қонунини аниқлаймиз:

$$\omega_5 = 0{,}8(4t + 1)\text{с}^{-1}.$$

2—5- шкивларнинг айланиш йўналишлари 2.6- расмда кўрсатилган.

5- шкив бурчак тезланишини (2.12) формулага кура аниқлаймиз:

$$\varepsilon_5 = \dot{\omega}_5 = 3{,}2\text{с}^{-2}.$$

Энди (2.15) формула ёрдамида M нуқта тезлигини аниқлаймиз:

$$v_M = \omega_5 r_5 = 0{,}24(4t+1)\text{м/с}; \quad t = t_1 = 1\text{с да } v_M = 1{,}2 \text{ м/с}.$$

v_M вектори 5-шкив айланиши йўналишига мос равишда M нуқта траекториясига утказилган уринма бўйича йўналган.

M нуқтанинг уринма ва нормал тезланишлари (2.18) формулага биноан топилади:

$$w_{M\tau} = r_5 \cdot \varepsilon_5 = 0,96 \text{ м/с}^2, \quad w_{M_n} = r_5 \cdot \omega_5^2 = 0,192(4t+1)^2 \text{ м/с}^2.$$

Демак, M нуқтанинг уринма тезланиши вақтга боғлиқ эмас, нормал тезланиши эса вақт функциясидан иборат бўлиб, $t = t_1 = 1$с да $w_{M_n} = 4,8$ м/с^2. M нуқтанинг $t = t_1$ пайтдаги тўла тезланишини аниқлаймиз:

$$w_M = \sqrt{w_{M\tau}^2 + w_{M_n}^2} = \sqrt{(0,96)^2 + (4,8)^2} \approx 4,895 \text{ м/с}^2,$$

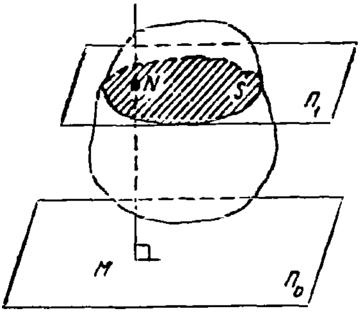
$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon_5|}{\omega_5} = \operatorname{arctg} \frac{3,2}{16} = \operatorname{arctg} 0,2 \approx 12,5°.$$

III боб. ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ

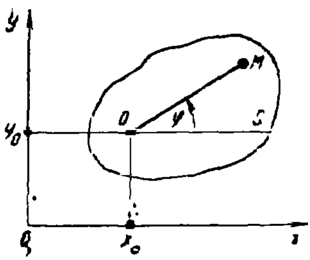
10-§. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини текис шакл ҳаракатига келтириш. Текис параллел ҳаракат тенгламалари

Жисмнинг ҳар бир нуқтаси бирор қўзғалмас текисликка нисбатан параллел текисликда ҳаракатланса, жисмнинг бундай ҳаракати текис параллел ҳаракат дейилади.

Жисм қўзғалмас Π_0 текисликка нисбатан текис параллел ҳаракат қилсин (3.1-расм). Шу жисмда Π_0 текисликка параллел равишда Π_1 текислик ўтказайлик. Π_1 текисликнинг жисмда ажратган кесимини S билан белгилайлик. S кесим нуқталари ҳаммаси бир текисликда ётгани учун уни *текис шакл* деб атаймиз. Жисм текис параллел ҳаракатда бўлса, S кесим ҳаракат давомида Π_0 текисликка параллел равишда харакатланади. S кесимнинг ихтиёрий N нуқтаси орқали Π_0 текисликка перпендикуляр қилиб NM чизиқ ўтказсак, текис параллел ҳаракат таърифига асосан, бу чизиқ жисмнинг ҳаракати давомида узига параллел кўчади, яъни NM чизиқ илгарилама ҳаракат қилади. Бинобарин, жисмнинг ушбу чизиқ устида ётувчи нуқталари бир хил қонун билан, масалан N нуқтанинг ҳаракат қонуни билан ҳаракатланади. Бундай фикрни S кесимнинг қолган барча нуқталари устида ҳам юритиб, кесим нуқталарининг ҳаракати жисм ҳаракатини белгилашини кўрамиз. Шундай қилиб, энди жисмнинг текис параллел ҳаракатини текшириш урнига унда олинган S текис шаклнинг харакатини текширсак булади. Шундай S шакл 3.2-расмда курсатилган. xO_1y текисликни S текис шаклнинг ҳаракат текислиги деб олайлик. S текис шаклнинг ҳолати унда олинган OM кесма ҳолати билан, бошқача айтганда *қутб деб аталувчи* O



3.1- расм.



3.2- расм.

нуқта координаталари x_O, y_O ҳамда OM кесманинг O_1x билан ташкил қилган φ бурчаги орқали тўлиқ аниқланади. Шундай қилиб, *текис шаклнинг ҳаракати*

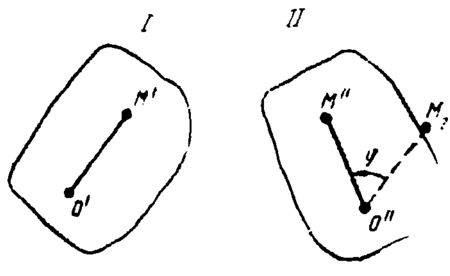
$$x_O = x_O(t), \quad y_O = y_O(t), \quad \varphi = \varphi(t) \qquad (3.1)$$

тенгламалар билан ифодаланади. Текис шаклнинг, бинобарин, текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг эркинлик даражаси 3 га тенг.

Текис шакл t_1 пайтда I вазиятда булиб (3.3- расм), унда олинган OM кесма $O'M'$ ҳолатни, t_2 пайтда эса II вазиятда бўлиб, OM кесма $O''M''$ ҳолатни эгалласин. Текис шаклга шундай илгарилама кўчиш берайликки, $O'M'$ кесма $O''M_2$ ҳолатни олсин, сунгра O'' нуқтадан ўтувчи уқ атрофида текис шаклга $\varphi = \widehat{M_2O''M''}$ айланма кўчиш берсак, текис шакл II вазиятга ўтади.

Демак, *текис шаклнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга кучишини қутб билан бирликда илгарилама кучиш ҳамда қутб атрофидаги айланма кучишдан ташкил топган деб қараш мумкин.* Бу хулосани текис шаклнинг кичик вақт оралиғидаги ҳаракати учун татбиқ этиб, қуйидаги теоремани ҳосил қиламиз: *текис шаклнинг ҳар ондаги ҳаракати унинг қутб билан биргаликда илгарилама ҳаракати ҳамда қутб атрофидаги айланма ҳаракатидан иборат.*

(3.1) ҳаракат тенгламаларининг биринчи иккитасини қутбнинг илга-



3.3- расм.

рилама ҳаракати тенгламалари, учинчисини эса қутб атрофида айланма ҳаракат тенгламалари деб қараш мумкин.

Текис параллел ҳаракатнинг илгарилама қисми қутбнинг танланишига боғлиқ, айланма қисми эса қутбнинг танланишига боғлиқ эмас. Шунинг учун $\omega = \dot{\varphi}$, $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ муносабатлардан аниқланувчи ω ва ε мос равишда *текис шаклнинг бурчак тезлигини* ва *бурчак тезланишини* ифодалайди. $\vec{\omega}$ ва $\vec{\varepsilon}$ векторлар (8-параграфга қаранг) текис шакл текислигига перпендикуляр равишда қутб орқали ўтказилган ўқ бўйлаб йўналган бўлади. Ҳаракатнинг айланма қисми тезланувчан бўлса $\vec{\omega}$ билан $\vec{\varepsilon}$ бир томонга, секинланувчан бўлса қарама-қарши томонга йўналган бўлади. Текис шакл ҳаракати бир текисликда содир бўлгани учун $\vec{\omega}$ ва $\vec{\varepsilon}$ векторлар чизмада айланиш йўналишларини кўрсатгич орқали тасвирланади.

11-§. Текис шакл нуқтасининг тезлиги

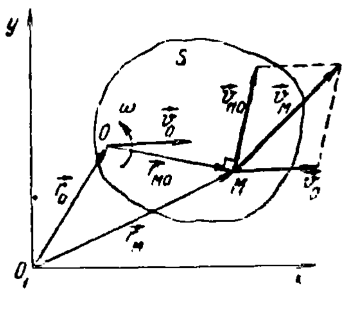
Теорема. Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезлиги қутб тезлиги билан мазкур нуқтанинг қутб атрофида айланишидаги чизиқли тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.

Исбот. M—текис шаклда олинган ихтиёрий нуқта, O эса қутб булсин (3.4-расм). M нуқтанинг O га нисбатан радиус-векторини $\vec{r}_{MO}$ билан белгилаймиз. O ва M нуқталарни шакл текислигида олинган қўзғалмас xO_1y координаталар системасининг боши билан $\vec{r}_O$ ва $\vec{r}_M$ радиус-векторлар ёрдамида туташтирамиз. Текис шаклнинг ҳаракати давомида

$$\vec{r}_M = \vec{r}_O + \vec{r}_{MO} \tag{3.2}$$

муносабат ўринли бўлади. (3.2) дан вақт буйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}_{MO}}{dt}. \tag{3.3}$$



3.4-расм.

Бунда $\frac{d\vec{r}_M}{dt}$ ҳосила M нуқтанинг $\vec{v}_M$ тезлигини, $\frac{d\vec{r}_O}{dt}$ эса O нуқтанинг $\vec{v}_O$ тезлигини ифодалайди. Жисм қаттиқ бўлгани учун текис шаклнинг ҳаракати давомида $\vec{r}_{MO}$ векторнинг фақат йўналиши ўзгаради. У ҳолда (2.17) га биноан $\frac{dr_{MO}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MO}$ бўлиб, у M нуқтанинг O қутб атрофида айлана бўйлаб ҳаракатидаги $\vec{v}_{MO}$ чизиқли тезлик векторидан иборат булади.

Натижада (3.3) тенглик

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{MO} \tag{3.4}$$

кўринишда ёзилиб, теореманинг ўринли эканлигини кўрсатади.

Шундай қилиб, текис шакл бирор нуқтасининг тезлиги билан жисмнинг оний бурчак тезлиги берилган булса, текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезлигини аниқлаш мумкин экан, (3.4) формулага биноан *текис шакл нуқтасининг тезлигини* аниқлашга *қутб усули билан аниқлаш* дейилади.

$$\vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MO} \tag{3.5}$$

белгилаш киритиб, (3.4) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} \tag{3.6}$$

(3.5) вектор купайтма модулини аниқлаймиз:

$$v_{MO} = \omega \cdot r_{MO} \cdot \sin 90^\circ = \omega \cdot OM. \tag{3.7}$$

$\vec{v}_{MO}$ вектори O атрофида айланиш радиуси OM га перпендикуляр равишда айланиш йўналишига мослаб йўналтирилади.

Исбот қилинган теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

1-натижа. Агар вақтнинг берилган пайтида бурчак тезлик нолга тенг бўлса, текис шакл барча нуқталарининг тезлиги шу пайтда бир-бирига геометрик равишда тенг бўлади.

Ҳақиқатан, агар $\omega = 0$ бўлса, $\vec{\omega} \times \vec{r}_{MO} = 0$ бўлиб, (3.4) формуладан $\vec{v}_M = \vec{v}_O$ келиб чиқади. Бунда M нуқта ихтиёрий булгани учун олинган натижа текис шаклнинг барча нуқталарига тааллуқлидир. Текис шаклнинг $\omega = 0$ бўлган пайтдаги ҳаракати *оний илгарилама ҳаракат* дейилади.

2-натижа. Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан утувчи ўқдаги проекциялари ўзаро тенгдир.

Бу натижани исботлаш учун (3.6) ифодани OM ўққа проекциялаймиз:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{OM}} \vec{v}_M = \text{пр}_{\overrightarrow{OM}} \vec{v}_O + \text{пр}_{\overrightarrow{OM}} \vec{v}_{MO}$$

Лекин $\vec{v}_{MO}$ вектор OM га перпендикуляр, бинобарин, $\text{пр}_{\overrightarrow{OM}} v_{MO} = 0$. Шундай қилиб;

$$\text{пр}_{\overrightarrow{OM}} v_M = \text{пр}_{\overrightarrow{OM}} \vec{v}_O \qquad (3.8)$$

(3.8) формула билан *текис шакл нуқтасининг тезлигини* аниқлаш, уни *проекция усули билан топиш* дейилади.

12-§. Тезликлар оний маркази ва ундан фойдаланиб текис шакл нуқтасининг тезлигини аниқлаш

Текис шакл нуқталарининг тезликлари ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, *бурчак тезлиги нолдан фарқли текис шакл учун мазкур шакл текислигида ётувчи ва тезлиги бир онда нолга тенг бўлган нуқтанинг мавжудлигини курсатиш мумкин*; бундай нуқтага *тезликлар оний маркази дейилади*. Бурчак тезлиги ω бўлган текис шакл O нуқтасининг тезлиги $\vec{v}_O$ берилган бўлсин. $\vec{v}_O$ векторни O атрофида айланиш йўналиши бўйича 90° га буришдан ҳосил бўлган OL тўғри чизиқда $OP = \frac{v_O}{\omega}$ тенглик бўйича аниқланувчи (3.5- расм) P нуқта танлаб, O нуқтани қутб деб олиб, P нуқта тезлигини аниқлайлик. (3.6) формулага кура

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO}.$$

(3.7) га асосан $v_{PO} = \omega \cdot OP = \omega \frac{v_O}{\omega} = v_O$ бўлиб, $\vec{v}_{PO}$ вектори OP га перпендикуляр ва $\vec{v}_O$ йуналишига қарама-қарши йўналган, яъни $\vec{v}_{PO} = -\vec{v}_O$. У ҳолда P нуқтанинг тезлиги

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO} = 0$$

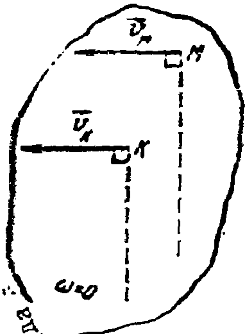
бўлади. Демак, P нуқта тезликлар оний маркази бўлар экан. Бундай нуқта текис шаклнинг узига тегишли булмасдан мазкур шакл жойлашган ва у билан боғланган текисликда бўлиши ҳам мумкин.

Энди бурчак тезлиги ω булган текис шакл ихтиёрий M нуқтасининг тезлигини топиш учун тезликлар оний маркази P ни қутб деб олайлик (3.6- расм). У ҳолда (3.6) формулага асосан:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP}.$$

P нуқта тезликлар оний маркази булгани учун $\vec{v}_P = 0$; бинобарин,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{MP}. \qquad (3.9)$$



(3.9) да ... см.
тезлиги ...
кази ат ... ... А криво-
фойдалан ... ... формула

ифодани ҳос ...

v_M вектор ...
да MP га пер ...
раллел ҳаракат ...
ондаги тезлиги ... *ка-*
зигача бўлган ке ... ... *бурчак*
тезлигининг кў ... ... *эса айланиш*
йуналишига мос р ... ... *пендикуляр булади.*

Текис шаклнинг ... хулосани қўлласак:

$$(3.11)$$

(3.10) ва (3.11) дан:

$$\frac{v_M}{v_K} = \frac{MP}{KP} \tag{3.12}$$

нисбатни ҳосил қилиш мумкин. (3.12) муносабат қуйидаги натижани ифодалайди: *текис шакл нуқталарининг тезликлари ту нуқталардан тезликлар оний марказигача булган масофага туғри пропорционалдир. Текис шакл нуқталарининг тезликларини* (3.10) ва (3.12) формулалар билан аниқлаш уни *тезликлар оний маркази ёрдамида топишдан* иборат. Текис шаклнинг тезликлар оний маркази ва бурчак тезлиги маълум булганда бу усулдан фойдаланиш қулайдир.

Тезликлар оний марказини аниқлаш мумкин бўлган ҳолларни кўриб чиқамиз:

1. Агар жисм бирор сирт устида сирпанмасдан думаласа, жисм билан сирт уриниш нуқтасининг тезлиги нолга тенг, бинобарин, бунда тезликлар оний маркази жисм билан сиртнинг уриниш нуқтасида бўлади (3.7-расм).

2. Агар текис шакл ихтиёрий икки M ва K нуқталарининг тезликлари йўналиши маълум бўлиб, $\vec{v}_M$ ва $\vec{v}_K$ тезлик векторлари узаро параллел булмаса, M ва K нуқталарда тезлик векторларига ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси тезликлар оний маркази булади (3.6- расм).

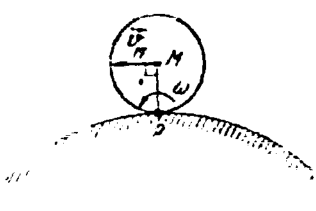
3. Текис шакл ихтиёрий M ва K нуқталарининг тезликлари $\vec{v}_M$ ва $\vec{v}_K$ узаро параллел, бир томонга йўналган, микдорлари эса турлича бўлган ҳолда (бунда K нуқта $\vec{v}_M$ га перпендикуляр тўғри чизиқда ётади, (3.8- расм) M ва K нуқталарни туташтирувчи туғри чизиқ билан $\vec{v}_M$ ва $\vec{v}_K$ векторлар учлари орқали ўтказилган туғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси тезликлар оний маркази булади.

4. Текис шакл ихтиёрий M ва Қ нуқталарининг тезликлари $\vec{v}_M$ ва $\vec{v}_K$ коллинеар, турли томонга йўналган ҳолда ҳам, тезликлар оний маркази M ва K нуқталарни туташтирувчи туғри чизиқ билан $\vec{v}_M$ ва $\vec{v}_K$ векторлар учлари орқали утказилган тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасида булади (3.9- расм).

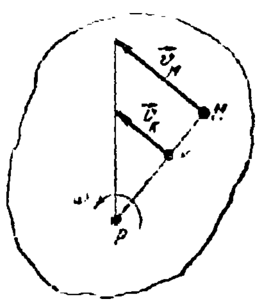
5. Текис шакл ихтиёрий M ва K нуқталарининг тезликлари бирор пайтда бир томонга йўналиб, узаро параллел ва миқдорлари тенг бўлса, жисм шу онда оний илгарилама ҳаракат қилади (3.10- расм); оний илгарилама ҳаракат пайтида жисм ҳамма нуқталарининг тезликлари бир хил, бурчак тезлиги нолга тенг бўлса да, умуман бу нуқталар траекториялари ҳар хил, тезланишлари турлича, бурчак тезланиши нолдан фарқли бўлади.

10-масала. Кривошип-шатун механизми AB шатунидаги A, B ва C нуқталарнинг тезликлари ҳамда шатуннинг бурчак тезлиги $\varphi = 60°$, $\varphi = 90°$ булган ҳоллар учун аниқлансин. Қуйидагилар берилган: $\omega_0 = 2c^{-1}$, $OA = r = 0{,}5$ м, $AC = CB$, $\varphi = 60°$ да $\widehat{OAB} = 90°$ (3.11- расм, *а*, *б*).

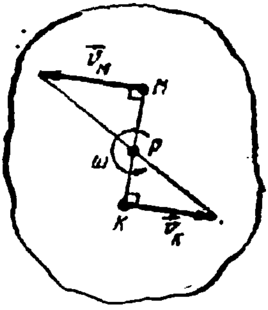
Ечиш. 1. Аввал $\varphi = 60°$ бўлган ҳолни кўрайлик (3.11-расм,



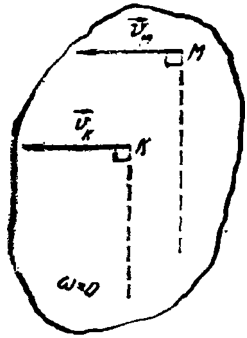
3.7- расм.



3.8- расм.



3.9- расм.



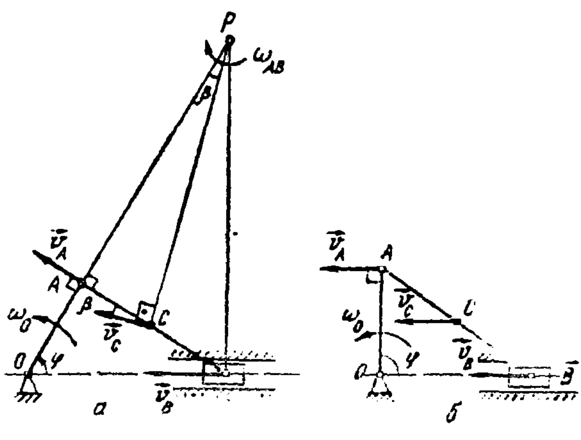
3.10- расм.

а). *А* нуқта *О* қузғалмас ўқ атрофида айланувчи *ОА* кривошипга тегишли бўлгани учун унинг тезлиги (2.15) формула ёрдамида топилади:

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = 1 \text{ м/с.}$$

$\vec{v}_B$ вектори кривошипнинг айланиш йўналишига мос равишда *ОА* га ўтказилган перпендикуляр буйича йўналади.

В ползун горизонтал буйича қайтарма-илгарилама ҳаракат қилади. Шунинг учун *В* нуқта тезлиги $\vec{v}_B$ горизонтал бўйича йўналган. Горизонтал бўйича қайси томонга қараб йўналишини топиш учун *АВ* шатуннинг тезликлар оний маркази *Р* ни аниқлаймиз ҳамда *А* нуқта тезлиги йўналишига мос *В* нуқта *Р* атрофида соат стрелкаси бўйича айланишини ҳосил қиламиз.



3.11- расм.

$\vec{v}_B$ миқдорини (3.12) формулага биноан аниқлаймиз: $\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}$ 3.11-расм, *а* дан: $\frac{BP}{AP} = \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ}$; шунинг учун

$$v_B = v_A \cdot \frac{BP}{AP} = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} \approx 1{,}15 \text{ м/с}.$$

AB шатун бурчак тезлигини аниқлаш учун A ни P атрофида айланади деб қараб, (3.10) формуладан фойдаланамиз: $v_A = \omega_{AB} \cdot AP$ ёки $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP}$. AP ни аниқлаш учун AB топилиши керак: $\triangle OAB$ дан: $AB = OA \operatorname{tg} 60^\circ = 0{,}866$ м. ΔAPB дан: $AP = AB \operatorname{tg} 60^\circ = 1{,}5$ м. Шундай қилиб, $\omega_{AB} \approx \frac{1}{1{,}5} = 0{,}67$ $с^{-1}$.

Тезликлар оний маркази P бўлган AB шатун C нуқтасининг тезлиги айланиш йўналишига мос равишда, CP кесмага перпендикуляр ва унинг миқдори (3.10)) га кўра $v_C = \omega_{AB} \cdot CP$ тенгликдан топилади. $AC = \frac{AB}{2}$ ни эътиборга олиб, CP ни ACP тўғри бурчакли учбурчакдан аниқлаймиз: $CP = \sqrt{(AP)^2 + (AC)^2} \approx 1{,}56$ м. Шундай қилиб, $v_C \approx 0{,}67 \cdot 1{,}56 = 1{,}05 \frac{м}{с}$. $\vec{v}_C$ векторнинг AB билан ташкил қилган бурчаги β ни аниқлаш учун APC учбурчакдан $\beta = \widehat{APC}$ ни топамиз:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{AP} = 0{,}2887; \quad \beta = 16^\circ.$$

2. Энди $\varphi = 90^\circ$ бўлган ҳолга ўтамиз (3.11-расм, *б*). A нуқта тезлиги аввалги ҳолдаги сингари топилади:

$$v_A = 1 \frac{м}{с}, \quad v_A \perp OA.$$

Горизонтал бўйича йўналган B нуқта тезлигини аниқлаш учун (3.8) формуладан — проекция усулидан фойдаланамиз:

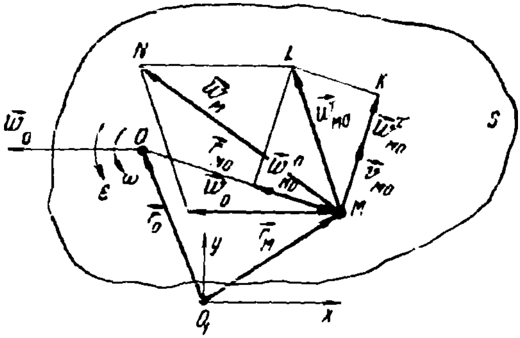
$$\text{пр}_{\overrightarrow{BA}} \vec{v}_B = \text{пр}_{\overrightarrow{BA}} \vec{v}_A.$$

Шунга кўра, $v_B \cos\gamma = v_A \cos\gamma$ ёки $v_B = v_A$.

$\vec{v}_B \parallel \vec{v}_A$, $v_B = v_A$ бўлгани учун бу онда AB оний илгарилама ҳаракат қилади, Бинобарин, бу ҳолда $\omega_{AB} = 0$, $v_C = v_A = v_B = 1 \frac{м}{с}$.

13-§. Текис шакл нуқтасининг тезланиши

Теорема. Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши қутбнинг тезланиши билан мазкур нуқтанинг қутб



3.12- расм.

атрофида айланишидаги чизиқли тезланишининг геометрик йиғиндисига тенг.

Исбот. Текис шаклда қутб сифатида танланган O нуқтанинг тезланиш вектори $\vec{w}_O$, мазкур шаклни қутб атрофидаги айланма ҳаракатидаги бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}$, бурчак тезланиш вектори $\vec{\varepsilon}$ бўлсин (3.12- расм). Фараз қилайлик, текис шаклнинг қутб атрофида оний айланма ҳаракати тезланувчан бўлсин. Текис шакл ихтиёрий M нуқтасининг тезланиш вектори $\vec{w}_M$ ни аниқлаймиз. (3.4) дан маълумки,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{MO},$$

бунда $\vec{r}_{MO}$ — M нуқтанинг O қутбга нисбатан радиус-вектори. Бу ифодадан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{MO} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{MO}}{dt}. \qquad (3.13)$$

(3.13) да $\dfrac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{w}_M$, $\dfrac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{w}_O$, $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ ва

$$\frac{d\vec{r}_{MO}}{dt} = \vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MO}$$

Демак,

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{MO} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{MO}. \qquad (3.14)$$

(2.21) ва (2.22) ифодаларга ўхшаш (3.14) даги $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{MO} = \vec{w}^{\tau}_{MO}$ — M нуқтанинг O қутб атрофида айлана бўйлаб ҳаракатидаги уринма-айланма тезланишини, $\vec{\omega} \times \vec{v}_{MO} = \vec{w}^{n}_{MO}$ эса M нуқтанинг

O қутбга нисбатан нормал—марказга интилма тезланишини ифодалайди. Бу белгилашларга кўра (3.14) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{w}^{\tau}_{MO} + \vec{w}^{n}_{MO}. \tag{3.15}$$

Бунда $\vec{w}^{\tau}_{MO} + \vec{w}^{n}_{MO} - \vec{w}_{MO}$ — M нуқтанинг O қутб атрофида айланишидаги чизиқли тезланишидан иборат. Шундай қилиб,

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{w}_{MO} \tag{3.16}$$

дан теореманинг исботи келиб чиқади.

(3.15) формулага биноан чизмада M нуқтада $\vec{w}_O$, $\vec{w}^{\tau}_{MO}$ ва $\vec{w}^{n}_{MO}$ векторларини қуйиб, геометрик қўшсак, $\vec{w}_M$ вектори ҳосил бўлади; шу қушишда ҳосил бўлган $MKLN$ кўпбурчак *тезланишлар кўпбурчаги* деб аталади (3.12-расм, M нуқтанинг O атрофида айланиши тезланувчан бўлган ҳол учун кўрсатилган).

M нуқтанинг O қутб атрофида айланишидаги уринма ва нормал тезланишлар миқдорларини аниқлаймиз:

$$w^{\tau}_{MO} = |\vec{w}^{\tau}_{MO}| = |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{MO}| = \varepsilon \cdot r_{MO} \cdot \sin 90^\circ = \varepsilon \cdot OM,$$

$$w^{n}_{MO} = |\vec{w}^{n}_{MO}| = |\vec{\omega} \times \vec{v}_{MO}| = \omega \cdot v_{MO} \sin 90^\circ = \omega \cdot \omega \cdot OM = \omega^2 \cdot OM.$$

Шундай қилиб,

$$w^{\tau}_{MO} = \varepsilon \cdot OM, \quad w^{n}_{MO} = \omega^2 \cdot OM. \tag{3.17}$$

$\vec{w}^{\tau}_{MO}$ ва $\vec{w}^{n}_{MO}$ ўзаро перпендикуляр бўлгани учун

$$w_{MO} = \sqrt{(w^{\tau}_{MO})^2 + (w^{n}_{MO})^2} = OM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{3.18}$$

$\vec{w}_{MO}$ векторнинг MO билан ташкил қилган μ бурчаги

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{|w^{\tau}_{MO}|}{w^{n}_{MO}} = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{3.19}$$

формуладан топилади.

(3.15) ёки (3.16) формула билан *текис шакл нуқтасининг тезланишини* аниқлаш уни *қутб усули билан топиш* дейилади.

Текис шаклда қутб деб олинадиган нуқтанинг тезланиши ҳамда жисмнинг оний бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши берилиб, шу шакл ихтиёрий M нуқтаси тезланишининг миқдори ва йўналишини аниқлашда бу тезланиш векторининг узаро перпендикуляр бўлган иккита $\xi \cdot \eta$ уқлардаги проекциялари орқали топиш қулайдир.

Бунинг учун (3.17)формулаларга кўра w_{MO}^{τ}, w_{MO}^{n} топилиб, расмда M нуқгада $\vec{w}_O$, $\vec{w}_{MO}^{\tau}$, $\vec{w}_{MO}^{n}$ йуналтирилади ва (3.15) формулага биноан $\vec{w}_M$ нинг ξ, η ўқлардаги проекциялари $w_{M\xi}$, $w_{M\eta}$ топилади:

$$w_{M\xi} = (w_O)_\xi + (w_{MO}^{\tau})_\xi + (w_{MO}^{n})_\xi,$$

$$w_{M\eta} = (w_O)_\eta + (w_{MO}^{\tau})_\eta + (w_{MO}^{n})_\eta.$$

У ҳолда тезланиш миқдори

$$w_M = \sqrt{w_{M\xi}^2 + w_{M\eta}^2} \qquad (3.20)$$

формуладан, йўналиши эса $\vec{w}_M$ нинг ξ, η ўқлар билан ташкил қилган бурчак косинуслари орқали аниқланади:

$$\cos(\vec{w}_M, \widehat{\vec{\xi}}) = \frac{w_{M\xi}}{w_M}, \quad \cos(\vec{w}_M, \widehat{\vec{\eta}}) = \frac{w_{M\eta}}{w_M}. \qquad (3.21)$$

Баъзан текис шакл бурчак тезланиши номаълум булиб, аниқланиши керак бўлган нуқта тезланишининг йуналиши маълум бўлади; бу ҳолда (3.15) формулани MO йуналишига проекциялаб, w_{MO}^{τ} қатнашмайдиган, w_M га нисбатан тенглама ҳосил қилиш мумкин.

Агар тезланиши топилиши керак бўлган M нуқта текис шаклга тегишли бўлиши билан бирга иккинчи томондан қўзғалмас O_1 уқ атрофида айланувчи жисмга ҳам тегишли булса, (3.15) формула

$$\vec{w}_{MO_1}^{\tau} + \vec{w}_{MO_1}^{n} = \vec{w}_O + \vec{w}_{MO}^{\tau} + \vec{w}_{MO}^{n} \qquad (3.22)$$

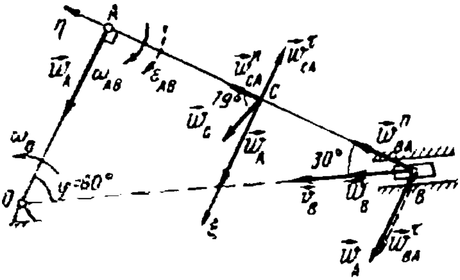
кўринишда ёзилади. Бунда (3.22) да қатнашувчи ҳамма векторларнинг йўналишлари маълум, лекин векторлардан иккитасининг миқдори номаълум бўлиши мумкин. У ҳолда (3.22) ифода иккита турлича йуналишга проекцияланишидан ҳосил бўладиган тенгламалар орқали номаълум миқдорлар топилади. $\vec{w}_M$ ни эса

$$w_M = \sqrt{(w_{MO_1}^{n})^2 + (w_{MO_1}^{\tau})^2} \qquad (3.23)$$

формуладан топиш мумкин.

11-масала. 10-масалада OA кривошип бурчак тезлиги ўзгармас деб олиниб, $\varphi = 60°$ ва $\varphi = 90°$ бўлган ҳоллар учун, A, B, C нуқталарнинг тезланишлари ҳамда AB шатуннинг бурчак тезланиши топилсин.

Ечиш. 10-масаладан маълумки $\omega_0 = 2c^{-1}$, $OA = 0{,}5$ м, $AB = 0{,}866$ м, $AC = 0{,}433$ м.



3.13- расм.

1. *Аввал* $\varphi = 60°$ *бўлган ҳолни* курайлик, бунда $\widehat{OAB} = 90°$, $\omega_{AB} = 0{,}67$ $с^{-1}$(3.13- расм).

A нуқта қўзғалмас O ўқ атрофида айланувчи OA кривошипга тегишли бўлгани учун, унинг тезланиши $\vec{w}_A = \vec{w}_A^n + \vec{w}_A^\tau$ формуладан аниқланади. Бироқ, $\omega_0 = \mathrm{const}$; бинобарин, $\varepsilon_0 = 0$ ва $w_A^\tau = 0$. $w_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = 2м/с^2$. Шундай қилиб, $\vec{w}_A = \vec{w}_A^n$; $w_A = 2/мс^2$. $\vec{w}_A$ вектор йўналиши 3.13- расмда кўрсатилган.

AB текис параллел ҳаракат қилади. A нуқтани қутб деб олсак, (3.15) формулага кўра B нуқта тезланиши учун

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^n + \vec{w}_{BA}^\tau \qquad (1)$$

вектор тенгламани ёзиш мумкин.

(1) ифодадаги $\vec{w}_{BA}^n$ нинг миқдорини (3.17) га асосан аниқлаймиз:

$$w_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot AB = 0{,}39 \text{ м/с}^2.$$

$\vec{w}_{BA}^n$ вектори AB бўйлаб B нуқтадан айланиш маркази A томон йўналган.

AB шатуннинг бурчак тезланиши номаълум бўлгани учун (3.17) формула билан w_{BA}^τ ни аниқлай олмаймиз. B нуқтанинг A атрофида айланишини тезланувчан деб фараз қилиб, AB нинг P атрофида айланишига мослаб, AB га перпендикуляр равишда $\vec{w}_{BA}^\tau$ ни йўналтирамиз.

Шунингдек, B нуқтанинг горизонтал буйича илгарилама ҳаракатини тезланувчан деб фараз қилиб, $\vec{w}_B$ ни нуқта тезлиги буйлаб йуналтирамиз.

(1) ни BA йўналишга проекциялаб, w_B га нисбатан тенглама ҳосил қиламиз:

$$w_B \cos 30° = w_{BA}^n$$

Бундан

$$w_B = \frac{w_{BA}^n}{\cos 30°} = 0{,}45 \text{ м/с}^2.$$

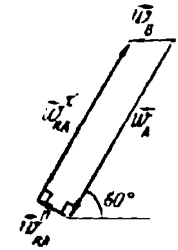
w_B ишорасининг мусбат чиқиши B нуқтанинг илгарилама ҳаракати тезланувчан эканлигини тасдиқлайди.

(1) ни AB га перпендикуляр булган йўналишга проекциялаб, w_{BA}^{τ} учун тенглама ҳосил қиламиз:

$$w_B \cos 30^\circ = w_A + w_{BA}^{\tau}.$$

Бу ифодадан:

$$w_{BA}^{\tau} = w_B \cos 60^\circ - w_A = -1{,}78 \text{ м/с}^2.$$



31.4- расм.

w_{BA}^{τ} нинг минус ишора билан чиқиши B нуқтанинг A атрофида айланиши секинланувчан эканлигини кўрсатади.

(3.17) формулага кўра

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w_{AB}^{\tau}}{AB} = -2{,}05 \text{ с}^{-2}.$$

Агар ихтиёрий B_1 нуқтадан ўз йўналишларига мос равишда тегишлича масштаб буйича олинган $\vec{w}_A$, $\vec{w}_{BA}^{n}$ ва $\vec{w}_{BA}^{\tau}$ векторларни кетма-кет қуйиб, охирги вектор учини B_1 билан туташтирсак, $\vec{w}_B$ га мос вектор келиб чиқади (3.14-расм).

Энди C нуқта тезланишини аниқлашга угамиз. A ни қутб деб олсак, (3.13) га асосан:

$$\vec{w}_C = \vec{w}_A + \vec{w}_{CA}^{n} + \vec{w}_{CA}^{\tau}. \tag{2}$$

(2) да $w_{CA}^{n} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0{,}19$ м/с², $|w_{CA}^{\tau}| = |\varepsilon_{AB}| \cdot AC = 0{,}89$ м/с²

бўлиб, $\vec{w}_{CA}^{n}$ — AC бўйлаб C дан A га томон, $\vec{w}_{CA}^{\tau}$ эса AC кесмага перпендикуляр йуналган (расмда C нинг A атрофида айланиши секинланувчанлиги ҳисобга олинган).

C нуқта тезланишининг ҳам миқдори, ҳам йўналиши номаълум. Шунинг учун узаро перпендикуляр $C\xi$, $C\eta$ уқлар олиб, (2) ни шу ўқларга проекциялаймиз:

$$w_{C\xi} = w_A - w_{CA}^{\tau} = 1{,}11 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{C\eta} = w_{CA}^{n} = 0{,}19 \text{ м/с}^2.$$

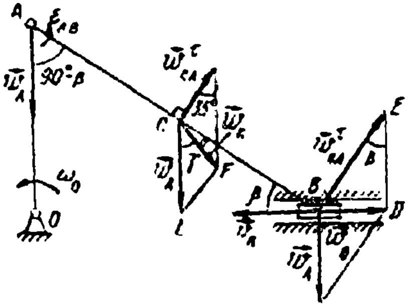
(3.20) га асосан w_C топилади:

$$w_C = \sqrt{w_{C\xi}^2 + w_{C\eta}^2} = 1{,}13 \text{ м/с}^2.$$

(3.21) ёрдамида $\vec{w}_C$ йўналишини аниқлаймиз:

$$\cos(\vec{w}_C, \hat{\vec{\xi}}) = \frac{w_{C\xi}}{w_C} = 0{,}982, \quad (\vec{w}_C, \hat{\vec{\xi}}) \approx 11^\circ;$$

$$\cos(\vec{w}_C, \vec{\eta}) = \frac{w_{C\eta}}{w_C} = 0{,}168, \quad (\vec{w}_C, \vec{\eta}) \approx 79^\circ.$$



3.15- расм.

2. Энди $\varphi = 90°$ булган ҳолни кўрамиз. A нуқта тезланишининг миқдори аввалги ҳолдагидек бўлади, йуналиши AO буйлаб йўналган. $\varphi = 90°$ да $\omega_{AB} = 0$ эди. Шунинг учун (1) формулада $\vec{w}^n_{AB} = 0$ бўлиб, у қуйидагича ёзилади:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}^{\tau}_{BA}. \qquad (3)$$

(3) да $\vec{w}_B$ вектори горизонтал бўйича, $\vec{w}^{\tau}_{BA}$ эса AB га утказилган перпендикуляр бўйича йўналган (3 15- расм).

(3) буйича $\vec{w}_A$ ва $\vec{w}^{\tau}_{BA}$ векторларга қурилган параллелограмм диагонали $\vec{w}_B$ бўлиши керак. Шундай қилиб, $\vec{w}_B$ вектори $\vec{v}_B$ векторга қарама-қарши йўналганлигини кўрамиз, бу B нуқта ҳаракати курилаётган пайтда секинланувчан бўлишини билдиради.

w_B миқдорини BED туғри бурчакли учбурчакнинг катети сифатида аниқлаймиз: $\beta = \widehat{BED} = \widehat{OBA}$ бурчакни AOB учбурчакдан топиш мумкин:

$$\sin\beta = \frac{OA}{AB} = 0{,}577;\ \beta \approx 35°.$$

У ҳолда BED учбурчакдан:

$$w_B = w_A \operatorname{tg} 35° = 1{,}4\ \frac{м}{с^2};\ w^{\tau}_{BA} = \frac{w_A}{\cos 35°} = 2{,}44\ м/с^2.$$

AB шатун бурчак тезланишини аниқлаймиз:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w^{\tau}_{BA}}{AB} = 2{,}82\ с^{-2}.$$

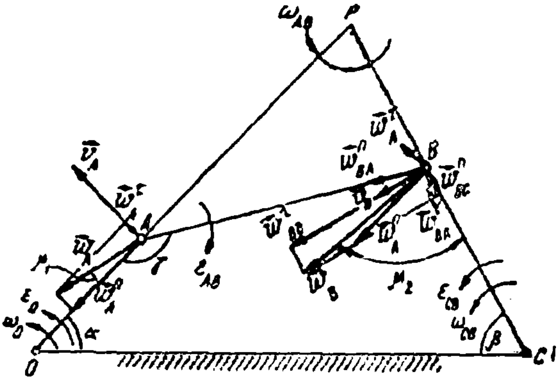
$\omega_{AB} = 0$ булгани учун (2) формула қуйидагича ёзилади:

$$\vec{w}_C = \vec{w}_A + \vec{w}^{\tau}_{CA},$$

бунда $w^{\tau}_{CA} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 1{,}22$ м/с^2.

$\vec{w}_A$ ва $\vec{w}^{\tau}_{CA}$ векторларга қурилган параллелограммнинг CF диагонали $\vec{w}_C$ ни ифодалайди. Косинуслар теоремасидан фойдалансак, CFL учбурчакдан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$w_C = \sqrt{w_A^2 + (w^{\tau}_{CA})^2 - 2w_A \cdot w^{\tau}_{CA} \cos 35°} \approx 1{,}22\ м/с^2.$$



3.16- расм.

$w_C = w^{\tau}_{CA}$ келиб чиққани учун CFL учбурчак тенг ёнлидир, демак, $\gamma = 35°$. У ҳолда $\vec{w}_C$ вектори AB билан $55° - 35° = 20°$ бурчак ташкил этади.

12- масала. 3.16- расмда тасвирланган тўрт шарнирли механизмда OA кривошип $\omega_0 = 2$ с$^{-1}$ бурчак тезлик ва $\varepsilon_0 = 1$ с$^{-2}$ бурчак тезланиш билан O шарнир атрофида айланади. Механизмнинг $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 150°$ бўлган ҳолатида A ва B нуқталарнинг тезликлари, тезланишлари ҳамда AB ва BC звеноларнинг бурчак тезликлари, бурчак тезланишлари аниқлансин. $OA = 1$ м, $AB = 2$ м, $BC = 1{,}41$ м, OC — қўзғалмас.

Ечиш. A нуқта O атрофида айлана бўйлаб ҳаракатлангани учун унинг тезлиги ва тезланиши қуйидагича аниқланади:

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = 2 \text{ м/с}; \quad \vec{v}_A \perp OA.$$

$$\vec{w}_A = \vec{w}^{n}_A + \vec{w}^{\tau}_A; \quad w^{n}_A = \omega_0^2 \cdot OA = 4 \text{ м/с}^2, \quad w^{\tau}_A = \varepsilon_0 \cdot OA = 1 \text{ м/с}^2.$$

$$w_A = \sqrt{(w^{n}_A)^2 + (w^{\tau}_A)^2} \approx 4{,}12 \text{ м/с}^2, \quad \mu_1 = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_0}{\omega_0^2} \approx 14°.$$

$\vec{v}_A$, $\vec{w}^{n}_A$, $\vec{w}^{\tau}_A$ йўналишлари 3.16- расмда кўрсатилган.

B нуқта ҳам текис параллел ҳаракатдаги AB звенога, ҳам қўзғалмас C ўқ атрофида айланувчи BC звенога тегишли; шунга кўра $\vec{v}_B \perp BC$ булиб, $\vec{v}_B$ нинг қайси томонга йуналганлиги AB нинг тезликлар оний маркази P атрофида айланиш йуналишига боғлиқ (3.16- расм).

$\vec{v}_B$ миқдорини (3.12) формулага биноан топамиз:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP} \text{ ёки } v_B = \frac{BP}{AP} v_A.$$

ABP учбурчакда $\widehat{PAB} = 30°$, $\widehat{ABP} = \widehat{APB} = 75°$; демак, $AP =$

$=AB=2$ м, $BP=\sqrt{(AB)^2+(AP)^2-2AB\cdot AP\cos 30^\circ}\approx 1{,}04$ м. Шундай қилиб, $v_B=\frac{BP}{AP}v_A\approx 1{,}04\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

AB нинг P атрофида, BC нинг C атрофида айланиш бурчак тезликларини аниқлаймиз:

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=1\ \text{с}^{-1};\ \omega_{BC}=\frac{v_B}{BC}\approx 0{,}74\ \text{с}^{-1}.$$

Энди B нуқта тезланишини аниқлашга ўтамиз. B нуқта C нуқта атрофида айлана бўйлаб ҳаракатланган учун:

$$\vec{w}_B=\vec{w}^n_{BC}+\vec{w}^\tau_{BC}. \tag{1}$$

ω_{BC} маълум, ε_{BC} номаълум бўлганидан (1) даги w^n_{BC} ни аввалдан аниқлаш мумкин, лекин w^τ_{BC} ни ҳозирча топиб бўлмайди. Шунинг учун B нуқтанинг текис параллел ҳаракатдаги AB га тегишли бўлганидан фойдаланамиз. A нуқтани қутб деб олсак, (3.15) га биноан:

$$\vec{w}_B=\vec{w}^n_A+\vec{w}^\tau_A+\vec{w}^n_{BA}+\vec{w}^\tau_{BA}. \tag{2}$$

(1) ва (2) дан

$$\vec{w}^n_{BC}+\vec{w}^\tau_{BC}=\vec{w}^n_A+\vec{w}^\tau_A+\vec{w}^n_{BA}+\vec{w}^\tau_{BA} \tag{3}$$

тенглама ҳосил бўлади. (3) тенглама (3.22) кўринишидаги тенгламадир.

(3) тенгламада қатнашувчи барча векторлар йўналишларини кўрсатиш мумкин; бунда $\vec{w}^\tau_{BC}$ ва $\vec{w}^\tau_{BA}$ ни йўналтиришда B нуқтанинг C ва A атрофида айланиши тезланувчан деб фараз қилинади. (3) да:

$$w^n_{BC}=\omega^2_{BC}\cdot BC=0{,}77\ \text{м/с}^2,\ w^n_{BA}=\omega^2_{AB}\cdot AB=2\ \text{м/с}^2,$$

$$w^n_A=4\ \text{м/с}^2,\ w^\tau_A=1\ \text{м/с}^2 \text{ бўлиши аниқ.}$$

w^τ_{BC} ва w^τ_{BA} ни аниқлаш учун (3) ни BA ва BC йуналишларга проекциялаймиз (BA ва BC йўналишлар олинганда бир номаълумли тенгламалар ҳосил бўлади):

$$w^n_{BC}\cos 75^\circ+w^\tau_{BC}\cos 15^\circ=w^n_A\cos 30^\circ+w^\tau_A\cos 60^\circ+w^n_{BA}, \tag{4}$$

$$w^n_{BC}=w^n_A\cos 75^\circ-w^\tau_A\cos 15^\circ-w^n_{BA}\cos 75^\circ+w^\tau_{BA}\cos 15^\circ. \tag{5}$$

(4) тенгламадан w^τ_{BC} ни, (5) дан w^τ_{BA} ни топамиз:

$$w^\tau_{BC}=\frac{w^n_A\cos 30^\circ+w^\tau_A\cos 60^\circ+w^n_{BA}+w^n_{BC}\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ}\approx 6{,}35\ \text{м/с}^2,$$

$$w^\tau_{BA}=\frac{w^n_{BC}-w^n_A\cos 75^\circ+w^\tau_A\cos 15^\circ+w^n_{BA}\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ}\approx 1{,}26\ \text{м/с}^2.$$

(1) га кура $\vec{w}_B$ миқдори ва йўналиши қуйидагича топилади:

$$w_B = \sqrt{(w^n_{BC})^2 + (w^\tau_{BC})^2} \approx 6,40 \text{ м/с}^2,$$

$$\mu_2 = \operatorname{arctg} \frac{|w^\tau_{BC}|}{w^n_{BC}} = \operatorname{arctg} 8,247 \approx 83°.$$

Энди AB ва BC звенолар бурчак тезланишларини аниқлаш мумкин:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w^\tau_{BA}}{AB} \approx 0,63 \text{ с}^{-2}, \quad \varepsilon_{BC} = \frac{w^\tau_{BC}}{BC} \approx 4,5 \text{ с}^{-2}.$$

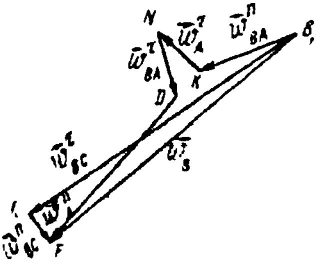
ε_{AB}, ε_{BC} нинг мусбат ишорали бўлиши юқорида AC ва BC нинг, мос равишда A ва C атрофида айланишини тезланувчан деб олганимизнинг ўринли эканини кўрсатади.

Ихтиёрий B_1 нуқтадан бошлаб (3.17- расм), тегишлича масштабда кетма-кет $\vec{w}^\tau_{BC}$ ва $\vec{w}^n_{BC}$ векторларини ёки $\vec{w}^n_{BA}$, $\vec{w}^\tau_A$, $\vec{w}^\tau_{BA}$ ва $\vec{w}^n_A$ векторларини қўйиб B_1LE тезланишлар учбурчагини ёки B_1KNDE тезланишлар кўпбурчагини қурсак, улардаги B_1E томон $\vec{w}_B$ ни ифодалайди. Бу билан ҳисоблашларнинг тўғрилигини текшириб кўриш мумкин.

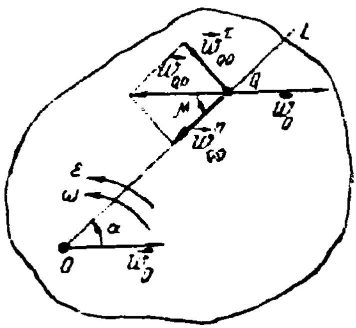
14-§. Тезланишлар оний маркази ва ундан фойдаланиб текис шакл нуқтасининг тезланишини аниқлаш

Текис шакл учун тезликларнинг оний марказига ухшаш, *текис шакл текислигида ётувчи ва бир онда тезланиши нолга тенг булган нуқта мавжуд; бундай нуқта тезланишлар оний маркази дейилади.*

Текис шаклда олинган бирор O нуқтанинг тезланиш вектори $\vec{w}_O$ (3.18- расм) ҳамда текис шаклнинг бурчак тезлиги ω



3.17- расм.



3.18- расм.

ва бурчак тезланиши ε берилган; қутб атрофидаги айланма ҳаракатни тезланувчан дейлик. $\vec{w}_O$ векторни айланма ҳаракатнинг йуналиши буйича $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ бурчакка буриб, OL нурни утказамиз. Бунда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} > 0$ булгани учун $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Ҳосил қилинган нурда O нуқтадан бошлаб улчанувчи

$$OQ = \frac{w_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \tag{3.24}$$

кесмани белгилайлик. O нуқтани қутб деб олиб, Q нуқтанинг тезланиш векторини топамиз. (3.16) формулага асосан:

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_O + \vec{w}_{QO} \tag{3.25}$$

(3.18) га кура Q нуқтанинг O қутб атрофида айланма ҳаракатидаги тезланишининг модули

$$w_{QO} = \sqrt{(w_{QO})^2 + (w^n_{QO})^2} = OQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

формула билан аниқланади. (3.24) муносабатни эътиборга олиб, сунгги формуладан

$$w_{QO} = \frac{w_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_O$$

ифодани ҳосил қиламиз. $\vec{w}_{QO}$ векторининг OQ кесма билан ҳосил қилган бурчагини μ десак, (3.19) га биноан $\alpha = \mu$ келиб чиқади. $\vec{w}^n_{QO}$ вектор Q нуқтадан O марказга қараб йуналган; $\vec{w}_{QO}$ вектор эса $\vec{w}^n_{QO}$ билан μ ($\mu < 90^\circ$) бурчак ташкил қилади. Демак, Q нуқтага кучирилган $\vec{w}_O$ ва $\vec{w}_{QO}$ векторлар бир тўғри чизиқда қарама-қарши томонга йуналган векторлар экан:

$$\vec{w}_{QO} = -\vec{w}_O.$$

У ҳолда (3.25) дан қуйидагига эришамиз: $\vec{w}_Q = 0$. Демак, Q нуқта тезланишлар оний маркази булади. Шундай қилиб, тезланишлар оний маркази O қутбдан утказилган ва $\vec{w}_O$ тезланиши билан бурчак тезланиш йуналишига мос равишда олинган $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқда (3.24) тенглик буйича аниқланувчи масофада ётади.

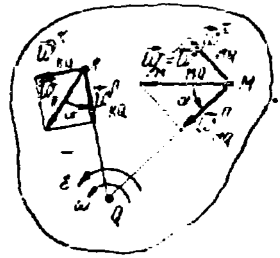
Энди *тезланишлар оний марказини қутб деб олиб, текис шакл ихтиёрий M ва K нуқталарининг шу ондаги тез-*

ланишларини аниқлайлик (3.19-расм). У ҳолда $\vec{w}_Q = 0$ бўлгани учун (3.16) дан

$$\vec{w}_M = \vec{w}_{MQ}, \quad \vec{w}_K = \vec{w}_{KQ} \tag{3.26}$$

ҳосил бўлиб, бу нуқталар тезланишларининг модуллари (3.18) га асосан

$$\left.\begin{aligned} w_M = w_{MQ} = QM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \\ w_K = w_{KQ} = QK\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$



3.19- расм.

тенгликлар билан аниқланади. (3.26) дан кўрамизки, *текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланишини тезланишлар оний марказидан ўтувчи уқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланиши каби аниқлаш мумкин экан.*

(3.27) муносабатлардан қуйидаги нисбатга эришиш мумкин:

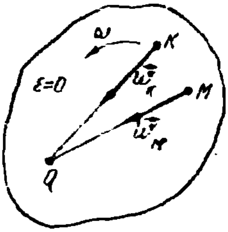
$$\frac{w_M}{w_K} = \frac{QM}{QK}. \tag{3.28}$$

Шундай қилиб, *текис шакл нуқталари тезланишларининг қийматлари вақтнинг ҳар бир пайтида шу нуқталардан тезланишлар оний марказигача бўлган масофаларга пропорционал булади, тезланиш векторлари мазкур нуқталарни тезланишлар оний марказига туташтирувчи кесмалар билан бир хил* $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ *бурчак ташкил қилади.* Агар бу бурчак тезланиш векторидан мазкур кесмага қараб улчанадиган бўлса, унинг мусбат йўналиши текис шакл бурчак тезланиши $\vec{\varepsilon}$ нинг йўналишига мос келади, яъни айланма ҳаракат тезланувчан бўлса, α нинг мусбат йўналиши айланма ҳаракат йуналиши бўйича, ҳаракатнинг секинланувчан ҳолида α бурчакнинг мусбат йўналиши ҳаракат йўналишига тескари бўлади.

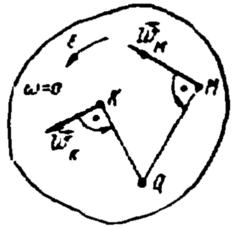
Шуни таъкидлаш керакки, текис параллел ҳаракатдаги текис шакл тезликлар оний маркази билан тезланишлар оний маркази умуман турли нуқталардир. Буни тўғри чизиқли изда сирпанмасдан думаловчи, симметрия марказининг тезлиги ўзгармас бўлган диск мисолида яққол кўриш мумкин; диск билан изнинг уриниш нуқтаси тезликлар оний маркази, диск маркази эса тезланишлар оний маркази булади.

Қуйидаги хусусий ҳолларни кўрайлик.

1) $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$ бўлсин (3.20-расм). Бунда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0$ ва $\alpha = 0$ булиб, текис шакл барча нуқталарининг тезланишлари тезланишлар оний марказига йўналган бўлади. Берилган нуқ-



3.20- расм.



3.21- расм.

тадан тезланишлар оний марказигача булган масофа эса (3.24) га биноан

$$MQ = \frac{w_M}{\omega^2}$$

формуладан топилади.

2) $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$. Бундай ҳол одатда айланма ҳаракатнинг йўналиши ўзгариши пайтида содир булади (3.21- расм). Бунда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \infty \text{ ва } \alpha = 90^\circ$$

бўлиб, текис шакл барча нуқталарининг тезланишлари уларни тезланишлар оний маркази билан туташтирувчи кесмаларга перпендикуляр йўналади. Демак, оний марказ Q ни топиш учун тезланиши берилган M нуқтадан $\vec{w}_M$ тезланиш векторига тегишли йўналишда (ε нинг ишорасига қараб) перпендикуляр нур чиқариб, бу нурда

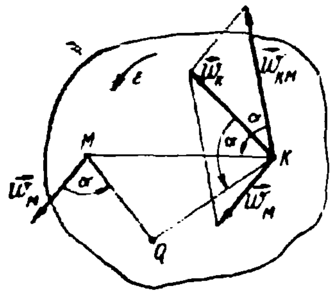
$$MQ = \frac{w_M}{\varepsilon}$$

масофа ажратилади.

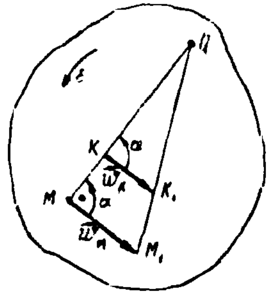
3) Текис шакл икки нуқтаси тезланишларининг модуллари ва йўналишлари берилган, масалан, M ва K нуқталарнинг тезланиш векторлари $\vec{w}_M$ ва $\vec{w}_K$ маълум бўлсин (3.22- расм) M нуқтани қутб деб олиб, (3.16) га асосан

$$\vec{w}_K = \vec{w}_M + \vec{w}_{KM}$$

деб ёзиш мумкин. Чизмада $\vec{w}_{KM}$ векторни ҳосил қилайлик. Бунинг учун K нуқтада диагонали $\vec{w}_K$ ва бир томони $\vec{w}_M$ бўлган параллелограмм ясаймиз. Маълумки, бу параллелограммнинг $\vec{w}_{KM}$ томони MK кесма билан $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ бурчак ҳосил қилиши керак. Бу бурчакнинг $\vec{w}_{KM}$ вектордан MK кесмага ай-



3.22-расм.

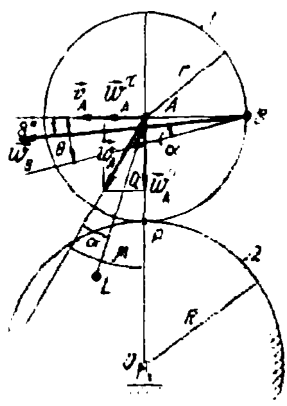


3.23-расм.

ланиш йўналиши $\vec{\varepsilon}$ векторнинг йўналишини белгилаб беради $\vec{\varepsilon}$ векторнинг йўналишини билган ҳолда берилганларга асосан тезланишлар оний маркази Q нуқтани аниқлаш қийин эмас. Чунончи, $\vec{w}_M$ ва $\vec{w}_K$ векторларни $\vec{\varepsilon}$ векторнинг йўналишига мос йўналишда топилган α бурчакка буришдан ҳосил қилинган нурларнинг кесишган нуқтаси тезланишлар оний маркази Q булади.

Агар берилган тезланиш векторлари $\vec{w}_M$ ва $\vec{w}_K$ узаро параллел, $MK \perp \vec{w}_M$ ва $w_M \neq w_K$ бўлса (3.23-расм), (3.28) муносабат ҳамда текис шакл нуқталари тезланишлари шу нуқталарни тезланишлар оний маркази билан туташтирувчи кесмалар билан бир хил бурчак ташкил қилишларидан фойдаланиб, тезланишлар оний маркази топилади. $\vec{w}_M$ вектор учини M_1 $\vec{w}_K$ вектор учини K_1 десак, $\triangle MQM_1$ нинг $\triangle KQK_1$ га ухшашлигидан фойдаланиб, Q нуктани аниқлаймиз. MK ва M_1K_1 кесмалар давомларининг кесишган нуқтаси изланган тезланишлар оний марказини ифодалайди.

13-масала. OA кривошип $\omega_0 = 2\ \text{с}^{-1}$ бурчак тезлик ва $\varepsilon_0 = 2{,}3\ \text{с}^{-2}$ бурчак тезланиш билан O ўқ атрофида айланиб, радиуси $r = 0{,}2$ м булган 1-ғилдиракни $R = 0{,}3$ м радиусли қузғалмас 2-диск устида сирпантирмай думалатади (3.24-расм). Механизмнинг расмда кўрсатилган ҳолатида ($OA \perp AB$) ғилдиракнинг тезланишлар оний маркази ва ундан фойдаланиб B нуқта тезланиши топилсин.



3.24-расм.

Ечиш. 1-ғилдиракнинг тезланишлар оний марказини аниқлаш учун ундаги бирор нуқтанинг тезланишини ва ғилдиракнинг бурчак тезлиги ω_1 ҳамда бурчак тезланиши ε_1 ни топиш керак. Шунга кура, аввал ғилдирак A нуқтасининг тезланишини аниқлаймиз. A нуқта OA кривошипга ҳам тегишли бўлгани учун $\vec{w}_A = \vec{w}^n + \vec{w}^\tau$. Бунда $w_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = \omega_0^2(R+r) = 2$ м/с^2, $w_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA = 1{,}15$ $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $w_A = \sqrt{(w_A^n)^2 + (w_A^\tau)^2} \approx$ $\approx 2{,}31$ м/с^2.

$\vec{w}_A^n$, $\vec{w}_A^\tau$ ва $\vec{w}_A$ векторлар йўналишлари 3.24-расмда кўрсатилган. $\vec{w}_A$ векторнинг AO билан ташкил қилган μ бурчагини аниқлаймиз:

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{w_A^\tau}{w_A^n} = \operatorname{arctg} 0{,}575 \approx 30°.$$

Ғилдиракнинг бурчак тезлигини аниқлаш учун уни тезликлар оний маркази P атрофида айланади деб қараймиз:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP} = \frac{AO}{AP}\omega_0. \qquad (1)$$

(1) дан $\omega_1 = \frac{0{,}5 \cdot 2}{0{,}2} = 5$ с$^{-1}$ ҳосил бўлади.

Ғилдиракнинг бурчак тезланишини аниқлаш учун (1) дан вақт буйича ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{AO}{AP}\frac{d\omega_0}{dt} \text{ ёки } \varepsilon_1 = \frac{AO}{AP} \cdot \varepsilon_0.$$

Бу тенгликдан $\varepsilon_1 = 5{,}75$ с$^{-2}$ келиб чиқади.

Энди (3.24) формулага биноан A нуқтадан тезланишлар оний маркази Q гача бўлган масофани аниқлаймиз:

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}} \approx 0{,}09 \text{ м}.$$

AQ кесма $\boldsymbol{w}_A$ векторини ε_1 йўналишига мос равишда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2} = \operatorname{arctg} 0{,}23 \approx 13°$$

бурчакка буришдан ҳосил бўлган AL нурда олиниши керак.

B нуқта тезланишининг миқдорини (3.28) формулага биноан топамиз:

$$\frac{\boldsymbol{w}_B}{\boldsymbol{w}_A} = \frac{BQ}{AQ} \text{ ёки } \boldsymbol{w}_B = \frac{BQ}{AQ} \cdot w_A. \qquad (2)$$

BQ кесмани ABQ учбурчакдан фойдаланиб аниқлаймиз; бунда $\widehat{BAQ} = (90° + \mu) - \alpha = 107°$. У ҳолда:

$$BQ = \sqrt{(AQ)^2 + (AB)^2 - 2 \cdot AQ \cdot AB \cdot \cos 107°} \approx 0{,}24 \text{ м}.$$

Бинобарин, (2) дан $w_B \approx 6{,}16 \frac{м}{с}$ келиб чиқади. $\vec{w}_B$ векторнинг йўналиши BQ ни B атрофида соат стрелкаси ҳаракати бўйича $\alpha = 13^\circ$ бурчакка буриш билан аниқланади (чунки ғилдиракнинг айланиши соат стрелкаси айланишига тескари).

ABQ учбурчакда $\widehat{ABQ} = \theta$ десак, синуслар теоремасига кўра $\sin\theta = \frac{AQ}{BQ}\sin 107^\circ$ ёки $\theta = 21^\circ$.

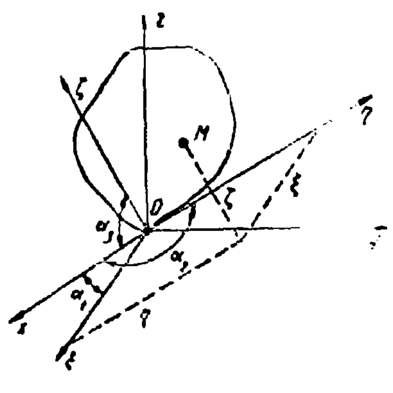
Демак, $\vec{w}_B$ вектори AB билан $\theta - \alpha = 8^\circ$ бурчак ташкил этади.

IV боб. ЖИСМНИНГ СФЕРИК ҲАРАКАТИ

15-§. Эйлер бурчаклари. Жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракати тенгламалари

Ҳаракат давомида жисмнинг бир нуқтаси қўзғалмай қолаверса, бундай ҳаракат қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракат ёки сферик ҳаракат дейилади. Бу ҳаракатни сферик дейилишига сабаб жисмнинг барча нуқталари марказлари қўзғалмас нуқтада бўлган, радиуслари эса шу нуқталардан қўзғалмас нуқтагача бўлган масофаларга тенг бўлган сфералар бўйлаб ҳаракат қилади.

Сферик ҳаракат қилувчи жисмнинг қўзғалмас нуқтасини қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасининг боши сифатида қабул қилиб, жисмнинг ушбу системага нисбатан ҳаракатини текширамиз. Бунинг учун боши $Oxyz$ координаталар системасининг бошида бўлган ҳамда жисм билан боғланган қўзғалувчи $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасини киритамиз (4.1-расм). Равшанки, агар қўзғалувчи системани қўзғалмас системага нисбатан ҳаракати аниқланса, жисмнинг ҳам қўзғалмас системага нисбатан ҳаракати аниқланган булади. Ҳақиқатан, сферик ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтасининг қўзғалувчан координаталар системасидаги координаталари ξ, η ва ζ булсин. Бу координаталар жисм ҳаракати давомида қўзғалувчи системага нисбатан ўзгармайди. Қўзғалувчан система ҳар бир ўқининг қўзғалмас системага нисбатан ҳаракати унинг бу система ўқлари билан ҳосил қилган учта бурчагининг вақт функцияси сифатида берилиши билан тўлиқ аниқланади. Бинобарин, $O\xi\eta\zeta$ системанинг $Oxyz$ системага нисбатан ҳаракати тўққизта бур-



4.1-расм.

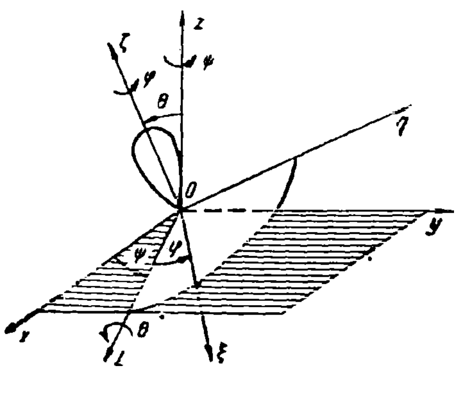
чакнинг берилиши билан тулиқ аниқланади. Агар мазкур туққизта бурчак берилган бўлса, M нуқтанинг $Oxyz$ системадаги ҳаракати ортогонал координаталар системасини алмаштириш формуласига асосан

$$\begin{cases} x = \xi \cos\alpha_1 + \eta\cos\alpha_2 + \zeta\cos\alpha_3, \\ y = \xi\cos\beta_1 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\beta_3, \\ z = \xi\cos\gamma_1 + \eta\cos\gamma_2 + \zeta\cos\gamma_3 \end{cases}$$

тенгламалар орқали топилади. Бу ерда ξ, η, ζ ўқларнинг Ox ўқ билан ташкил қилган бурчаклари α_i, Oy билан ҳосил қилган бурчаклари β_i, Oz билан ҳосил қилган бурчаклари γ_i орқали ($i = \overline{1,3}$) белгиланган. Бу тўққизта бурчак қуйидаги олти муносабат билан боғлангандир:

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1, \\ &\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1, \\ &\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1; \\ &\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2 = 0, \\ &\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_3 = 0, \\ &\cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cdot\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cdot\cos\gamma_3 = 0. \end{aligned}\right| \quad (4.1)$$

Демак, қузғалувчан системанинг қўзғалмас системага нисбатан ҳаракатини бир-бирига боғлиқ бўлмаган учта бурчакнинг ўзгариш қонунини бериш билан тўлиқ аниқлаш мумкин экан. Қолган олтита бурчак эса (4.1) муносабатлардан аниқланади. Шу нуқтаи назардан *сферик ҳаракат қилувчи жисмнинг эркинлик даражаси учга тенг* дейилади. Лекин қаралаётган туққизта бурчакдан учтасини билган ҳолда қолган 6 тасини (4.1) муносабатлардан аниқлаш мураккаб масала. Масалани осонлаштириш учун бу учта бир-бирига боғлиқ бўлмаган бурчак учун координаталар уқлари орасидаги бурчаклардан учтасини олмай. Эйлер томонидан тавсия этилган бошқа бурчакларни олиш қулайдир. *Эйлер бурчаклари* деб аталувчи бу бурчаклар орқали юқорида айтилган тўққизта бурчакни осонлик билан ифодалаш мумкин. Қўзғалувчи $\xi O\eta$ текислик билан қузғалмас xOy текислик кесишган чизиқни OL орқали белгилайлик (4.2-расм), бу чизиқ *тугунлар чизиғи* дейилади.



4.2- расм.

Эйлер бурчаклари қуйидагича олинади: 1) $(\widehat{Ox, OL})=\psi$, 2) $(\widehat{Oz, O\zeta})=\theta$, 3) $(\widehat{OL, O\xi})=\varphi$; ψ — *прецессия бурчаги*, θ — *нутация бурчаги*, φ — *соф айланиш бурчаги* дейилади.

Эйлер бурчаклари текисликларига тегишлича перпендикуляр бўлган Oz, OL, $O\zeta$ ўқларнинг учидан қараганда ψ, θ, φ бурчакларнинг мос равишда Ox, Oz, OL ўқлардан бошлаб ўзгариши соат стрелкаси айланишига тескари куринадиган йўналиш мусбат йўналиш деб олинади. Жисмнинг ҳаракати давомида у билан боғланган қузғалувчи система ҳам ҳаракат қилиб, ψ, θ, φ бурчаклар вақт функцияси сифатида узгаради:

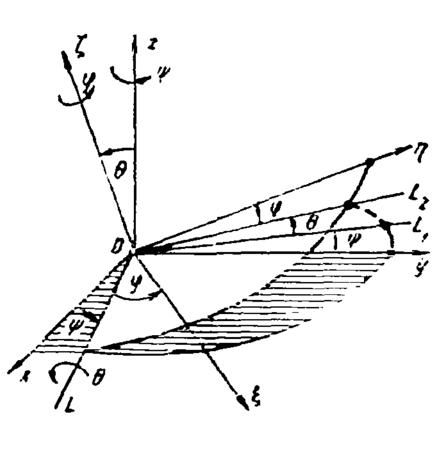
$$\left.\begin{aligned} \psi &= \psi(t), \\ \theta &= \theta(t), \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

(4.2) *тенгламалар жисмнинг сферик ҳаракати тенгламалари дейилади.*

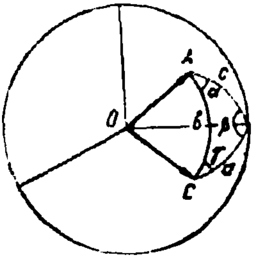
Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг чекли вақт ичида кўчгандан кейинги ҳолати $O\xi\eta\zeta$ координаталар системаси билан аниқлансин; бошланғич пайтда бу қўзғалувчи координаталар системаси қўзғалмас $Oxyz$ система билан устма-уст тушган бўлсин (4.3-расм). $O\xi\eta\zeta$ системанинг бошланғич пайтдан кейинги ҳолатга ўтишини қуйидагича бажариш мумкин: $O\xi\eta\zeta$ системани Oz уқ атрсфида соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда ψ бурчакка айлантирсак, у OLL_1z ҳолатни эгаллайди; кейин OLL_1z ни OL ўқ атрофида θ бурчакка кўрсатилган йўналиш бўйича айлантириб $OLL_2\xi$ ҳолатга утказамиз ва ниҳоят, $OLL_2\zeta$ ни $O\zeta$ ўқ атрофида φ бурчакка курсатилган йуналиш буйича бурчак, у $O\xi\eta\zeta$ ҳолатга утади. Демак, *қаттиқ жисмнинг қузғалмас нуқта атрофидаги ихтиёрий кўчишини (элементар ҳаракатини) шу қўзғалмас нуқтадан ўтувчи учта: Oz, OL, $O\zeta$ уқлар атрофида кетма-кет учта айлантириш билан бажариш мумкин экан,* бу *Эйлер теоремасини* ифодалайди.

Қузғалувчи система уқлари билан қузғалмас система ўқлари орасидаги бурчакларни Эйлер бурчаклари орқали ифодалаш учун, сферик тригонометриядан баъзи маълумотларни келтирамиз.

Радиуси бирга тенг бўлган сферада $OABC$ уч ёқли бурчак билан ажралувчи сферик ABC учбурчак олайлик (4.4-расм).



4.3- расм.



4.4- расм.

Бу учбурчакнинг бурчаклари α, β, γ, томонларининг узунликлари эса a, b ва c бўлсин. Сферанинг радиуси бирга тенг бўлгани учун BOC, AOC ва AOB текис бурчаклар мос равишда a, b ва c га тенг бўлади. Сферик учбурчакнинг α, β, γ бурчаклари билан a, b, c томонлари учун

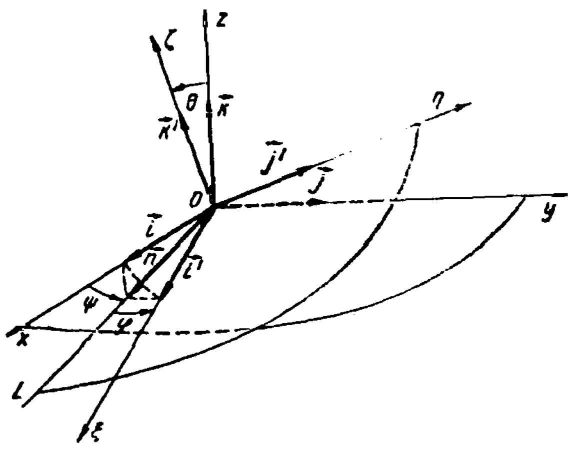
$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

муносабатлар ўринли бўлиб, бу формулалар *сферик учбурчак томонлари учун косинуслар теоремаси* дейилади.

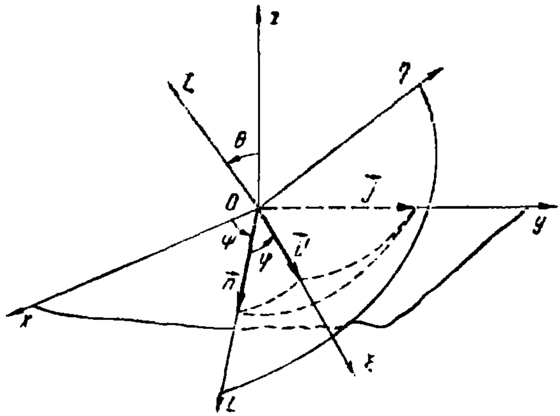
Энди $O\xi\eta\zeta$ ва $Oxyz$ координаталар системалари ўқлари орасидаги бурчакларни Эйлер бурчаклари орқали ифодалашни кўрамиз. $Oxyz$ система ўқлари бирлик векторларини $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ билан, $O\xi\eta\zeta$ система ўқлари бирлик векторларини $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ ва $\vec{k}'$ билан, тугунлар чизиғининг бирлик векторини $\vec{n}$ билан белгилайлик (4.5- расм). Тугунлар чизиғининг бирлик сферада ажратган сферик учбурчагидан (4.3) га асосан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\cos(\vec{i}', \wedge \vec{i}) = \cos \alpha_1 = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cos(\pi - \theta) =$$
$$= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta.$$

Навбатдаги — $\vec{j}$, $\vec{n}$ ва $\vec{i}'$ векторларнинг бирлик сферада аж-



4.5- расм.



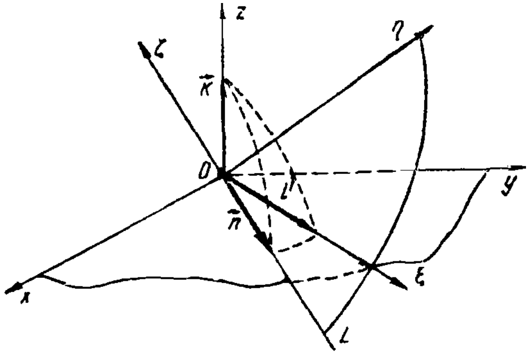
4.6- расм.

ратган сферик учбурчагидан (4.6- расм) қуйидагига эга бўламиз:

$$\cos(\vec{i}', \vec{j}) = \cos\beta_1 = \cos\varphi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \sin\varphi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)\cos\theta =$$
$$= \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta.$$

$O\xi$ ўқнинг Oz ўқ билан ҳосил қилган γ_1 бурчагини Эйлер бурчаклари орқали ифодалаш учун $\vec{i}'$, $\vec{n}$ ва $\vec{k}$ векторларнинг бирлик сферада ажратган сферик учбурчагини текширамиз (4.7- расм). Бу учбурчак учун (4.3) муносабатни қўллаб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\cos(\vec{i}', \widehat{\vec{k}}) = \cos\gamma_1 = \cos\varphi \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sin\varphi \cdot \sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$
$$= \sin\varphi \sin\theta.$$



4.7- расм.

Шундай қилиб, қузғалувчи система $O\xi$ ўқининг қўзғалмас система Ox, Oy, Oz уқлари билан ҳосил қилган бурчаклари косинусларини Эйлер бурчаклари орқали ифода этдик. Бу ерда шуни қайд қилиш керакки, қайси ўқлар орасидаги бурчак изланаётган бўлса, шу уқлар ва тугунлар чизиғи бирлик векторларини бирлик сферада ҳосил қилган сферик учбурчаги олинади; шу учбурчакка (4.3) формула тадбиқ қилиниб, изланаётган бурчак билан Эйлер бурчаклари орасидаги муносабат ўрнатилади. Шу қоидага амал қилиб $O\eta$ ва $O\xi$ уқларининг Ox, Oy, Oz уқлар билан ҳосил қилган бурчакларининг косинуслари ҳам Эйлер бурчаклари орқали аниқланиши мумкин. Уларни юқорида ҳосил қилинган муносабатлар билан биргаликда ёзамиз:

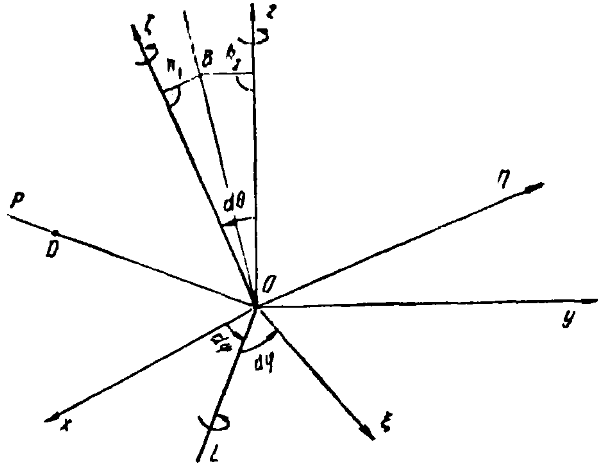
$$\begin{gathered}
\cos\alpha_1 = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta, \\
\cos\beta_1 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \\
\cos\gamma_1 = \sin\varphi\cdot\sin\theta, \\
\cos\alpha_2 = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta, \\
\cos\beta_2 = \cos\psi\cos\varphi\cos\theta - \sin\psi\sin\varphi, \\
\cos\gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \\
\cos\alpha_3 = \sin\varphi\sin\theta, \\
\cos\beta_3 = -\cos\psi\sin\theta, \\
\cos\gamma_3 = \cos\theta.
\end{gathered}$$

16-§ Эйлер — Даламбер теоремаси. Оний бурчак тезлик ва оний бурчак тезланиш векторлари

Теорема. *Қузғалмас нуқта атрофида айланувчи жисмнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга утишини шу нуқтадан утувчи бирор уқ атрофида бир айлантириш билан олиш мумкин.*

Исбот. Жисмнинг ҳаракати давомида φ, ψ, θ Эйлер бурчаклари ўзгариб боради. Эйлер теоремасига кура жисмнинг dt элементар вақт оралиғидаги сферик ҳаракати $O\xi$, Oz ва OL уқлар атрофида тегишли равишда $d\varphi$, $d\psi$ ва $d\theta$ бурчакларга айланишлардан ташкил топган (4.8-расм).

Аввало жисмнинг $O\zeta$ ва Oz ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларининг йиғиндиси қандай ҳаракатни беришини текширайлик. Жисмнинг ζOz текисликда ётувчи бирор нуқтасининг ҳаракатини текширамиз. Аниқлик учун бу нуқтани ζOz бурчак соҳасида олайлик. Танланган нуқта $O\zeta$ ўқ атрофида $d\varphi$ бурчакка бурилганда у ξOz текисликка тик бўлган йўналишда катталиги $h_1\cdot\frac{d\varphi}{dt} = h_1\dot\varphi$ га тенг булган тезлик олади, бунда h_1 — нуқтанинг $O\zeta$ уқдан узоқлиги. Айни пайтда мазкур нуқта Oz уқ атрофида айланиб, катталиги $h_2\frac{d\psi}{dt} = h_2\dot\psi$, йўналиши эса $h_1\dot\varphi$ тезликка қарама-қарши бўлган тезлик олади; бунда h_2 —



4.8- расм.

нуқтанинг Oz ўқдан узоқлиги. Энди ζOz текисликда шундай B нуқта топиш мумкинки, бу нуқта учун

$$h_1\dot{\varphi} = h_2\dot{\psi} \tag{4.4}$$

ўринли бўлиб, унинг тезлиги нолга тенг бўлади. Агар $O\zeta$ ва Oz ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатлардан бирортаси чизмада курсатилганга нисбатан тескари йуналишда булса, бундай нуқта ξOz бурчакнинг ташқи соҳасида бўлади. Демак, жисм ҳаракати давомида унинг қўзғалмас O нуқтасидан ташқари тезлиги айни пайтда нолга тенг булган B нуқтаси мавжуд. Бинобарин, унинг шу пайтдаги ҳаракатини бу нуқталардан утувчи OB ўқ атрофидаги айланма ҳаракат дейиш мумкин. Энди жисмнинг OB ва OL уқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини текширамиз. Юқоридаги каби мулоҳазалар юритиб, бу ҳаракатлар ҳам қушилиб қандайдир OP ўқ атрофидаги айланма ҳаракатни беришини кўрамиз. Шундай қилиб, *жисмнинг айни пайтдаги, учта уқ атрофидаги ҳаракатини унинг қўзғалмас нуқтасидан утувчи OP уқ атрофидаги айланма ҳаракат деб қараш мумкин.* Бу ўққа *айланиш оний ўқи* дейилади. OP уқда ётувчи барча нуқталарнинг айни пайтдаги тезликлари нолга тенг булади. Жисм айни вақтда бирор оний ўқ атрофида айланма ҳаракат қилса, вақтнинг келгуси пайтида бирор бошқа оний ўқ атрофида ҳаракат қилади. Шундай қилиб, *жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатини шу нуқтадан утувчи оний ўқлар атрофидаги кетма-кет элементар айланма ҳаракатларнинг йиғиндисидан иборат деб олиш мумкин.*

Жисмнинг бирор ондаги айланишининг жадаллиги аввалдаги каби бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}$ билан ифодаланади. Бу вектор айланиш оний ўқи буйлаб йўналган бўлиб, равшанки, вақт ўтиши билан уз катталиги ва йўналишини узгартириб боради, унга *оний бурчак тезлик вектори* дейилади. Юқорида кўрдикки, жисмнинг бирор ондаги оний ўқ атрофидаги ҳаракати аслида учта: $O\zeta$, Oz ва OL уқлар атрофидаги айланма ҳаракатларининг йиғиндисидан иборат. Шунга кура

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_\varphi+\vec{\omega}_\theta+\vec{\omega}_\psi \tag{4.5}$$

бўлади ((4.5) формуланинг ўринли бўлишини қаттиқ жисмнинг кесишувчи уқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшишни ўрганишда — 27-§ да кўрамиз). Бу ерда $\vec{\omega}_\varphi$, $\vec{\omega}_\theta$, $\vec{\omega}_\psi$ — мос равишда жисмнинг $O\zeta$, Oz ва OL ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатлари бурчак тезликлари векторларидир. Улар тегишли равишда $O\zeta$, Oz ва OL ўқлар буйлаб йўналган. Ушбу параграфнинг бошида келтирилган мулоҳазаларга асосан $\vec{\omega}_\varphi+\vec{\omega}_\theta+$ $+\vec{\omega}_\psi$ йиғиндидан иборат бўлган $\vec{\omega}$ вектор айланиш оний ўқи билан устма-уст тушишини курсатиш мумкин. Ҳақиқатан, (4.4) га асосан B нуқта учун

$$(\vec{\omega}_\varphi\times\overrightarrow{OB})=-(\vec{\omega}_\psi\times\overrightarrow{OB})$$

ёки

$$(\vec{\omega}_\varphi+\vec{\omega}_\psi)\times\overrightarrow{OB}=0$$

ўринли. Бунда $(\vec{\omega}_\varphi+\vec{\omega}_\psi)\neq 0$ ва $OB\neq 0$ бўлгани учун $\vec{\omega}_\varphi+\vec{\omega}_\psi$ вектор $\overline{OB}$ вектор билан бир тўғри чизиқда ётади деган хулоса чиқади. Худди шунга ўхшаш, агар айланиш оний ўқида бирор D нуқта олсак, энди бу нуқта учун:

$$(\vec{\omega}_\varphi+\vec{\omega}_\psi)\times\overrightarrow{OD}=-(\vec{\omega}_\theta\times\overrightarrow{OD})$$

ёки

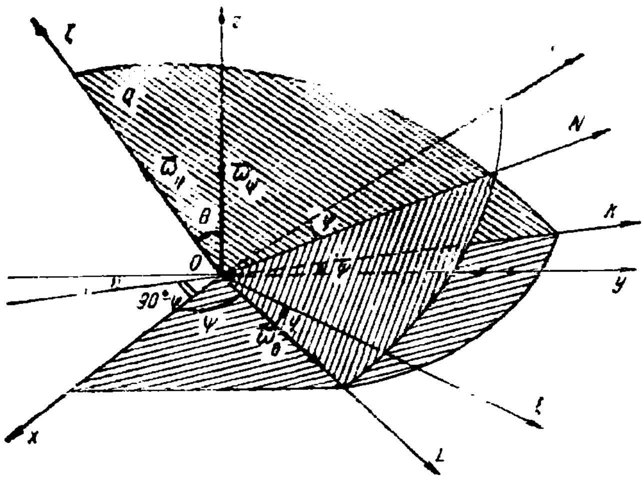
$$(\vec{\omega}_\varphi+\vec{\omega}_\psi+\vec{\omega}_\theta)\times\overrightarrow{OD}=0$$

ифодани ёза оламиз.

$(\vec{\omega}_\varphi+\vec{\omega}_\psi)\perp\vec{\omega}_\theta$, $\vec{\omega}_\varphi+\vec{\omega}_\psi+\vec{\omega}_\theta\neq 0$ ва $\overrightarrow{OD}\neq 0$ бўлгани учун $(\vec{\omega}_\varphi+$ $+\vec{\omega}_\psi+\vec{\omega}_\theta)$ вектор $\overline{OD}$ вектор билан бир чизиқда ётади, яъни $\vec{\omega}$ вектор айланиш оний уқи бўйлаб йўналади.

Оний бурчак тезликни Эйлер бурчаклари орқали ифодалаймиз. Аввало бу ишни қузғалмас Ox, Oy, Oz уқларга нисбатан бажарамиз. (4.5) тенгликни шу ўқларга проекциялаб

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\omega_{\varphi x}+\omega_{\psi x}+\omega_{\theta x},\\ \omega_y&=\omega_{\varphi y}+\omega_{\psi y}+\omega_{\theta y},\\ \omega_z&=\omega_{\varphi z}+\omega_{\psi z}+\omega_{\theta z}\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$



4.10- расм.

муносабатларни ҳосил қиламиз. 4.9- расмга мурожаат қилайлик. Ундаги OK чизиқ — қузғалмас $Oxyz$ ва қузғалувчи $O\xi\eta\zeta$ системалардаги Oz ва $O\zeta$ ўқлар орқали ўтказилган ёрдамчи Q текислик билан xOy текисликнинг кесишган чизиғи. OK чизиқнинг Oy уқ билан ҳосил қилган бурчаги ψ га тенг.

$\omega_{\varphi x}$ ни топиш учун аввало ω_φ векторнинг OK уқдаги проекциясини аниқлаймиз. У $\omega_\varphi \cdot \cos(90° - \theta)$ булади. Сўнгра, ҳосил булган бу ифоданинг Ox уқдаги проекцияси топилади. Шундай қилиб,

$$\omega_{\varphi x} = \omega_\varphi \cos(90° - \theta)\cos(90° - \psi) = \omega_\varphi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi \quad (4.7)$$

ифодага эришамиз. $\omega_{\varphi y}$ ни топиш учун $\omega_\varphi \cos(90° - \theta)$ ни Oy ўққа проекциялаймиз:

$$\omega_{\varphi y} = -\omega_\varphi \cos(90° - \theta) \cdot \cos\psi = -\omega_\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi \quad (4.8)$$

бўлади. $\omega_{\varphi z}$ ни эса $\vec{\omega}_\varphi$ векторни Oz ўққа бевосита проекциялаб топиш мумкин:

$$\omega_{\varphi z} = \omega_\varphi \cos\theta. \quad (4.9)$$

Расмдан бевосита $\omega_{\theta x}$, $\omega_{\theta y}$, $\omega_{\theta z}$, $\omega_{\psi x}$, $\omega_{\psi y}$, $\omega_{\psi z}$ катталиклар ҳам топилади:

$$\omega_{\theta x} = \omega_\theta \cos\psi, \ \omega_{\theta y} = \omega_\theta \sin\psi, \ \omega_{\theta z} = 0; \quad (4.10)$$

$$\omega_{\psi x} = 0, \ \omega_{\psi y} = 0, \ \omega_{\psi z} = \omega_\psi. \quad (4.11)$$

Шунингдек,

$$\omega_\varphi = \dot{\varphi}, \ \omega_\theta = \dot{\theta}, \ \omega_\psi = \dot{\psi} \quad (4.12)$$

эканлигини эътиборга олиб, (4.7) — (4.11) формулаларни (4.6) га қўямиз:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta\cos\psi, \\ \omega_y &= -\dot\varphi \sin\theta\cos\psi + \dot\theta\sin\psi, \\ \omega_z &= \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi. \end{aligned}\right\} \quad (4.13)$$

(4.13) га *Эйлернинг кинематик тенгламалари* дейилади.

$\vec\omega$ бурчак тезлик векторининг қўзғалувчи ўқлардаги проекцияларини топиш ҳам шунга ухшаш усул билан бажарилади. Аввало (4.5) муносабатларни қўзғалувчи ўқларга проекциялаб, ушбу

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \omega_{\varphi\xi} + \omega_{\theta\xi} + \omega_{\psi\xi}, \\ \omega_\eta &= \omega_{\varphi\eta} + \omega_{\theta\eta} + \omega_{\psi\eta}, \\ \omega_\zeta &= \omega_{\gamma\zeta} + \omega_{\theta\zeta} + \omega_{\psi\zeta} \end{aligned}\right\} \quad (4.14)$$

кўринишда ёзиб олайлик. Сўнгра Q текисликни $\xi O\eta$ текислик билан кесишгунча давом эттирамиз (4.9-расм). Уларнинг кесишган чизиғини ON билан белгилайлик. У ҳолда ηON бурчак φ бурчакка тенг бўлади. Энди расмдан фойдаланиб, қуйидаги муносабатларни ҳосил қилиш мумкин:

$$\omega_{\varphi\xi} = 0, \quad \omega_{\varphi\eta} = 0, \quad \omega_{\varphi\xi} = \omega_\varphi; \qquad (4.15)$$

$$\omega_{\theta\xi} = \omega_\theta\cos\varphi, \quad \omega_{\theta\eta} = -\omega_\theta\sin\varphi, \quad \omega_{\theta\zeta} = 0; \qquad (4.16)$$

$$\omega_{\psi\xi} = \omega_\psi\sin\theta\sin\varphi, \quad \omega_{\psi\eta} = \omega_\psi\sin\theta\cos\varphi, \quad \omega_{\psi\zeta} = \omega_\psi\cos\theta. \quad (4.17)$$

(4.2) ни назарда тутиб, (4.15) — (4.17) ифодаларни (4.14) га қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi, \\ \omega_\eta &= -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\sin\theta\cos\varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (4.18)$$

(4.13) ёки (4.18) формулаларга кўра бурчак тезлик модулини қуйидагича аниқлаш мумкин:

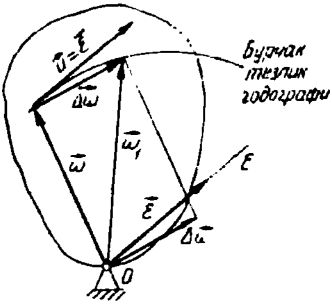
$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} =$$
$$= \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\varphi\,\dot\psi\cos\theta}. \qquad (4.19)$$

Бурчак тезлик векторининг йўналишини йўналтирувчи косинуслар орқали топиш мумкин.

Сферик ҳаракатдаги жисм бурчак тезланиши вектори тушунчасини киритишда Эйлер – Даламбер теоремасидан фойдаланамиз. Бу теоремага асосан жисмнинг ҳар ондаги ҳаракатини оний ўқ атрофида айланма ҳаракат деб олиш мумкин бўлгани учун, унинг шу ондаги бурчак тезланиши вектори қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм бурчак тезланишини аниқлаш формуласи сингари

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

формула билан ифодаланади. Бироқ сферик ҳаракатда $\vec{\omega}$ ва $\vec{\varepsilon}$



4.10- расм.

векторлар умуман олганда коллинеар векторлар бўлмайди. Ҳақиқатан, жисмнинг бирор t пайтдаги бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}$, $t+\Delta t$ пайтдаги бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}_1$ бўлсин (4.10-расм). У ҳолда жисмнинг Δt вақт оралиғидаги ўртача бурчак тезланиш вектори

$$\vec{\varepsilon}_{\text{ўр}} = \frac{\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

муносабатдан аниқланади. Δt ни нолга интилтириб, бу муносабатдан лимит олсак, $\vec{\varepsilon}$ *оний бурчак тезланиш векторини* ҳосил қиламиз, бу вектор *оний бурчак тезлик вектори учининг $\vec{u}$ тезлигини ифодалаб, унинг годографига уринма равишда йўналади* ва умуман олганда, $\vec{\omega}$ билан коллинеар булмайди. Бурчак тезланиш векторининг боши жисмнинг қўзғалмас нуқтасида олинади. Жисмнинг қўзғалмас нуқтасидан ўтиб, бурчак тезланиш вектори $\vec{\varepsilon}$ билан устма-уст тушувчи тўғри чизиқ, *бурчак тезланиш ўқи* дейилади, уни OE билан белгилайлик. Бурчак тезланиш векторининг ҳам қўзғалмас ва қўзғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш мумкин. Бунинг учун $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{u}$ вектор ифодани қўзғалмас ёки қўзғалувчи ўқларга проекциялаб

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x,\ \varepsilon_y = \dot{\omega}_y,\ \varepsilon_z = \dot{\omega}_z \text{ ва } \varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi,\ \varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta,\ \varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta \quad (4.20)$$

муносабатлар ҳосил қилинади. Бу ифодаларга тегишли равишда (4.13) ва (4.18) формулаларни қўллаб, $\vec{\varepsilon}$ векторнинг проекцияларини Эйлер бурчаклари орқали ёзиш мумкин.

Айланиш оний ўқи бўйича йўналган $\vec{\omega}_0$ бирлик векторни киритсак, $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\omega}_0$ ифода уринли бўлади. У ҳолда:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\vec{\omega}_0 + \omega\cdot\frac{d\vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 \qquad (4.21)$$

ҳосил бўлади; бунда $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0$ оний бурчак тезлиги миқдорининг узгаришини, $\vec{\varepsilon}_2 = \omega\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ эса оний бурчак тезлиги йуналишининг ўзгаришини ифодалайди. $\vec{\varepsilon}_1$ вектор $\vec{\omega}_0$ бўйича, $\vec{\varepsilon}_2$ эса $\vec{\omega}_0$ га перпендикуляр йуналгани учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

17-§. Сферик ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезлиги

Эйлер — Даламбер теоремасига асосан сферик ҳаракатдаги жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезлиги қўзғалмас уқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги каби

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (4.22)$$

формула билан аниқланади; бунда $\vec{r}$ билан жисм M нуқтасининг қўзғалмас нуқтага нисбатан радиус-вектори белгиланган (4.11-расм). Тезликнинг модули эса

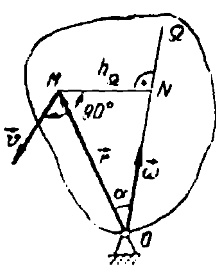
$$v = \omega r \sin\alpha = \omega\cdot h_\Omega \qquad (4.23)$$

бўлади. Бунда h_Ω орқали M нуқтадан айланиш оний ўқигача бўлган масофа белгиланган.

Агар $\vec{\omega}$ ва $\vec{r}$ векторларнинг қўзғалмас ва қўзғалувчи ўқлардаги проекцияларини тегишлича $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ ва x, y, z; ξ, η, ζ десак, v тезлик векторининг қузғалмас ва қўзғалувчи уқлардаги проекциялари, мос равишда, қуйидагича бўлади:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y,\ v_y = \omega_z x - \omega_x z,\ v_z = \omega_x y - \omega_y x; \qquad (4.24)$$

$$v_\xi = \omega_\eta\cdot\zeta - \omega_\zeta\cdot\eta,\ v_\eta = \omega_\zeta\xi - \omega_\xi\cdot\zeta,\ v_\zeta = \omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi. \qquad (4.25)$$



4.11-расм.

Бу ифодалардаги ω_x, ω_y, ω_z ва ω_ξ, ω_η, ω_ζ катталикларнинг ўрнига (4.13) ва (4.18) ифодаларни қўйиб, чизиқли тезликнинг проекцияларини Эйлер бурчаклари орқали аниқлаш мумкин.

Айланиш оний уқида ётувчи нуқталар учун $v_x = v_y = v_z = 0$ ҳамда $v_\xi = \quad = v_\zeta = 0$ бўлади. (4.24) ва (4.25) ифодаларда буни эътиборга олиб, қузғалмас ва қузғалувчи координата системаларига нисбатан айланиш оний ўқининг қуйидаги тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l}\omega_y z-\omega_z y=0,\\ \omega_z x-\omega_x z=0,\\ \omega_x y-\omega_y x=0,\end{array}\right\}\quad \text{ёки}\quad \frac{x}{\omega_x}=\frac{y}{\omega_y}=\frac{z}{\omega_z}, \tag{4.26}$$

$$\left.\begin{array}{l}\omega_\eta\zeta-\omega_\zeta\eta=0,\\ \omega_\zeta\xi-\omega_\xi\zeta=0,\\ \omega_\xi\eta-\omega_\eta\xi=0,\end{array}\right\}\quad \text{ёки}\quad \frac{\xi}{\omega_\xi}=\frac{\eta}{\omega_\eta}=\frac{\zeta}{\omega_\zeta}. \tag{4.27}$$

Бу ерда x, y, z — айланиш оний ўқи нуқталарининг қўзғалмас $Oxyz$ системадаги координаталари; ξ, η, ζ — айланиш оний ўқи нуқталарининг қузғалувчи $O\xi\eta\zeta$ системадаги координаталари.

18-§. Сферик ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланиши

Сферик ҳаракатдаги жисм бирор M нуқтасининг тезланишини аниқлаш учун (4.22) ифодадан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила оламиз:

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt},$$

бунда $\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{\varepsilon}$, $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ бўлгани учун

$$\vec{w}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v} \tag{4.28}$$

ёки

$$\vec{w}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{4.29}$$

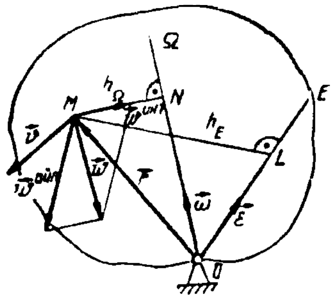
(4.28) ёки (4.29) ифодалардан кўрамизки, *сферик ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланиши вектори* иккита ташкил этувчидан иборат экан, $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ ташкил этувчи *айланма тезланиш вектори* дейилади. Уни $\vec{w}^{айл}$ орқали белгилаймиз. $\vec{\omega}\times\vec{v}$ ёки $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ташкил этувчи эса *ўққа интилма тезланиш вектори* дейилади, уни $\vec{w}^{инт}$ билан белгилаймиз.

$$\vec{w}^{айл}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r};\quad \vec{w}^{инт}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}). \tag{4.30}$$

Вектор кўпайтма таърифига кўра (4.30) дан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$|\vec{w}^{айл}|=w^{айл}=\varepsilon\cdot r\sin(\vec{\varepsilon},\vec{r}),\quad |\vec{w}^{инт}|=w^{инт}=\omega\cdot v\sin(\vec{\omega},\vec{v}).$$

4.12-расмда кўрсатилган OML учбурчакда $r\sin(\vec{\varepsilon},\vec{r})=$



4.12- расм.

$= ML = h_E$, $(\vec{\omega}, \vec{v}) = 90°$ булишини ҳамда (4.23) ни эътиборга олсак, айланма ва интилма тезланишлар миқдорларини аниқловчи қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$w^{айл} = \varepsilon \cdot h_E, \quad w^{инт} = \omega^2 \cdot h_\Omega. \qquad (4.31)$$

$\vec{w}^{айл}$ — айланма тезланиш вектори $\vec{\varepsilon}$ ва $\vec{r}$ орқали ўтказилган текисликка перпендикуляр йўналган ҳамда унинг мусбат учидан қараганда $\vec{\varepsilon}$ векторининг $\vec{r}$ га қараб энг кичик бурчакка бурилиши соат стрелкаси айланишига тескари кўриниши керак.

$\vec{w}^{инт}$ — ўққа интилма тезланиш вектори ҳам $\vec{\omega}$, ҳам $\vec{v}$ векторларга перпендикуляр бўлиб, унинг мусбат учидан қараганда M нуқтага фикран кўчирилган $\vec{\omega}$ векторнинг $\vec{v}$ векторга қараб энг кичик бурчакка бурилиши соат стрелкаси айланишига тескари кўриниши керак; бу йўналиш $\overrightarrow{MN}$ йўналишга мос келади.

(4.30) га биноан (4.29) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{w} = \vec{w}^{айл} + \vec{w}^{инт}. \qquad (4.32)$$

(4.32) формула *Ривальс теоремасини* ифодалайди: *сферик ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланиши айланма ва ўққа интилма тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.*

$\vec{w}^{айл}$ билан $\vec{w}^{инт}$ векторлари орасидаги бурчакни α десак, косинуслар теоремасига биноан

$$w = \sqrt{(w^{айл})^2 + (w^{инт})^2 + 2w^{айл} \cdot w^{инт} \cdot \cos\alpha} \qquad (4.33)$$

формула ҳосил бўлади. Бунга (4.31) ни қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$w = \sqrt{h_E^2\varepsilon^2 + h_\Omega^2 \cdot \omega^4 + 2h_E \cdot h_\Omega \cdot \varepsilon \cdot \omega^2 \cos\alpha}.$$

Сферик ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтасининг тезланиш вектори учун ҳосил қилинган (4.28) ёки (4.29) ифода кўриниш жиҳатидан қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтаси тезланиш векторининг ифодаси билан бир хил кўринишда ёзилса-да, $\vec{w}_\tau$ ва $\vec{w}_n$ векторлар, мос равишда $\vec{w}^{айл}$ ва $\vec{w}^{инт}$ дан фарқ қилади. Агар қўзғалмас ўқ атрофидаги ҳаракатда $\vec{\omega}$ ва $\vec{\varepsilon}$ векторлар ўзаро коллинеар бўлса, сферик ҳаракатда бу векторлар умумий ҳолда коллинеар эмас. Чунончи, $\vec{w}_\tau \perp \vec{w}_n$ бўлса, $\vec{w}^{\text{айл}} \not\parallel \vec{w}^{\text{инт}}$, қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда $\vec{v}$ ва $\vec{w}_\tau$ векторлари бир чизиқ бўйлаб йўналса, сферик ҳаракатда $\vec{v}$ ва $\vec{w}^{\text{айл}}$ бир чизиқда ётмайди; қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда $h_E = h_\Omega = h$ бўлади.

Энди M нуқта $\vec{w}$ тезланиш векторининг аввал қўзғалмас, сўнгра қўзғалувчи системалардаги проекцияларини ҳосил қиламиз. $\vec{r}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ ва $\vec{v}$ векторларнинг қўзғалмас ва қўзғалувчи система ўқларидаги проекцияларини аввалгидек белгилаймиз. У ҳолда (4.28) дан

$$\begin{aligned}
w_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_y v_z - \omega_z v_y,\\
w_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_z v_x - \omega_x v_z,\\
w_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_x v_y - \omega_y v_x;
\end{aligned}$$

ва

$$\begin{aligned}
w_\xi &= \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \eta + \omega_\eta v_\zeta - \omega_\zeta v_\eta,\\
w_\eta &= \varepsilon_\zeta \xi - \varepsilon_\xi \zeta + \omega_\zeta v_\xi - \omega_\xi v_\zeta,\\
w_\zeta &= \varepsilon_\xi \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\xi v_\eta - \omega_\eta v_\xi
\end{aligned}$$

бўлади ёки (4.24), (4.25) ларни эътиборга олиб, қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

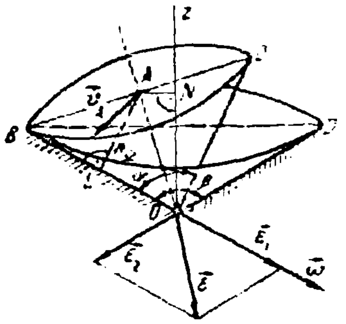
$$\left.\begin{aligned}
w_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - x\omega^2,\\
w_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - y\omega^2,\\
w_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - z\omega^2;
\end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

ва

$$\left.\begin{aligned}
w_\xi &= \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \eta + \omega_\xi (\xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta + \zeta\omega_\zeta) - \xi\omega^2,\\
w_\eta &= \varepsilon_\zeta \xi - \varepsilon_\xi \zeta + \omega_\eta (\xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta + \zeta\omega_\zeta) - \eta\omega^2,\\
w_\zeta &= \varepsilon_\xi \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\zeta (\xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta + \zeta\omega_\zeta) - \zeta\omega^2.
\end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

Тезланиш векторининг проекцияларини Эйлер бурчаклари орқали ҳам ифодалаш мумкин. Бунинг учун (4.34), (4.35) да $\vec{\omega}$ ва $\vec{\varepsilon}$ векторларнинг проекциялари уларнинг тегишлича (4.13), (4.18) ва (4.20) муносабатлардан аниқланувчи ифодалари билан алмаштирилиши керак.

14-масала. *BOC* доиравий конус *BOD* конус ичида сирпанмасдан шундай думалайдики, унинг *O* нуқтаси қўзғалмай қолади, *A* нуқтаси эса $v_A = \frac{t}{2}$ м/с тезликка эга бўлади. $t = 1$ с да конус 4.13-расмда кўрсатилган ҳолатни эгаллайди деб,



4.13- расм.

унинг шу вақт охиридаги бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши топилсин; бунда $AB = r = 0{,}5$ м, $\alpha = 90°$, $\beta = 120°$.

Ечиш. BOC конус сирпанмай думалагани учун OB чизиқда ётувчи барча нуқталарининг тезлиги нолга тенг; бинобарин, OB — оний айланиш ўқидан иборат. Қўзғалувчи конуснинг оний бурчак тезлиги вектори оний айланиш ўқи бўйича A нуқта тезлигига мос равишда BO бўйича йўналади. (4 23) формулага биноан

$$v_A = \omega \cdot h_k = \omega \cdot AL. \qquad (1)$$

Бундан

$$\omega = \frac{v_A}{AL} = \frac{v_A}{r\cos 45°} = \sqrt{2}\,t.$$

$$t = 1 \text{ с да } \omega = \sqrt{2} \approx 1{,}41 \text{ с}^{-1}.$$

Конус бурчак тезлиги ҳам миқдори, ҳам йўналиши бўйича ўзгаргани туфайли унинг бурчак тезланиши $\vec{\varepsilon}$ ни (4.21) формула асосида топамиз:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2. \qquad (2)$$

(2) да ε_1 бурчак тезлик миқдорининг ўзгаришини ифодалайди ва $\vec{\omega}$ бўйича йўналади:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{2} \text{ с}^{-2}.$$

$\vec{\varepsilon}_2$ эса бурчак тезлик вектори учининг Oz ўқ атрофида айланишидаги тезлиги сифатида аниқланади ва у $\vec{\omega}$ векторга перпендикуляр равишда қўзғалмас O нуқтага қўйилади:

$$\varepsilon_2 = \omega \cdot \omega_1 \sin 60°. \qquad (3)$$

ω_1 ни аниқлашда A нуқтани Oz атрофида айланади деб қараб, унинг тезлигидан фойдаланамиз:

$$v_A = \omega_1 \cdot AN;\; AN = OA\sin 15° = r\sin 15° \approx 0{,}13 \text{ м}.$$

$$\text{У ҳолда: } \omega_1 = \frac{v_A}{AN} \approx 3{,}85t.$$

Энди (3) га топилганларни қуямиз:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{2}\,t \cdot 3{,}85t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}72t^2.$$

$$t = 1 \text{ с да: } \varepsilon_2 \approx 4{,}72 \text{ с}^{-2}.$$

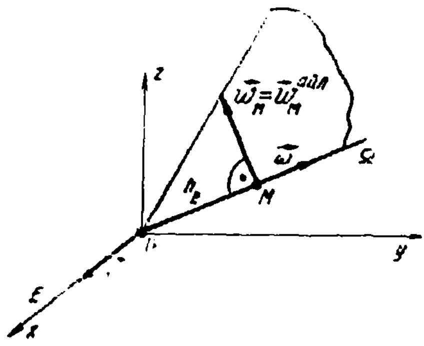
$\vec{\varepsilon}_1$ ва $\vec{\varepsilon}_2$ ўзаро перпендикуляр булгани учун

$$\varepsilon=\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\approx 4{,}93\ \text{c}^{-2}.$$

15-масала. O қўзғалмас нуқтага эга булган қаттиқ жисм ҳаракати

$$\psi=\frac{\pi}{2}t,\ \theta=\frac{\pi}{3},\ \varphi=\pi t$$

тенгламалар билан берилган. Жисмнинг айланиш оний уқида, O нуқтадан (4.14-расм) $OM=2\sqrt{3}$ м масофада ётувчи M нуқтасининг тезланиши топилсин. (ψ, θ, φ бурчаклар радианда, t секундда улчанади).



4.14- расм.

Ечиш. M нуқта тезланишини аниқлашдан аввал (4.13) ва (4.19) формулалар ёрдамида жисмнинг оний бурчак тезлигини, (4.20) дан фойдаланиб оний бурчак тезланишини аниқлаймиз.

Эйлернинг кинематик тенгламалари (4.13) ни тузайлик:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x&=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi=\pi\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{2}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\sin\frac{\pi}{2}t,\\
\omega_y&=-\dot\varphi\sin\theta\cos\psi+\dot\theta\sin\psi=-\pi\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2}t=-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2}t,\\
\omega_z&=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi=\pi\cos\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\pi.
\end{aligned}\right|\quad(1)$$

У ҳолда (4.19) га биноан

$$\omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}=\frac{\sqrt{7}\pi}{2}.\qquad(2)$$

(2) дан қўрамизки, жисмнинг оний бурчак тезлиги миқдор жиҳатдан узгармас экан. (4.20) га кўра жисм оний бурчак тезланишининг координата уқларидаги проекцияларини топиш учун (1) дан ҳосилалар ҳисоблаймиз:

$$\varepsilon_x=\dot\omega_x=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t,\ \varepsilon_y=\dot\omega_y=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t,\ \varepsilon_z=\dot\omega_z=0.$$

У ҳолда қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\varepsilon=\sqrt{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2\right)^2\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{2}t+\sin^2\frac{\pi}{2}t\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2\ \text{c}^{-2}.$$

Энди (4.32) дан фойдаланиб, айланиш оний ўқида ётувчи M нуқта тезланишини аниқлаймиз:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_M^{\,айл} + \vec{w}_M^{\,инт}. \qquad (4)$$

M нуқта айланиш оний ўқида ётганлиги туфайли

$$h_\Omega = 0; \text{ демак, } \vec{w}_M^{\,инт} = 0.$$

$\omega = \mathrm{const}$ бўлганидан (4.21) ифодада $\vec{\varepsilon}_1 = 0$; бинобарин $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2$ айланиш оний ўқига перпендикуляр равишда йўналиб, O нуқтага қўйилган. Шунинг учун (4.31) га кўра

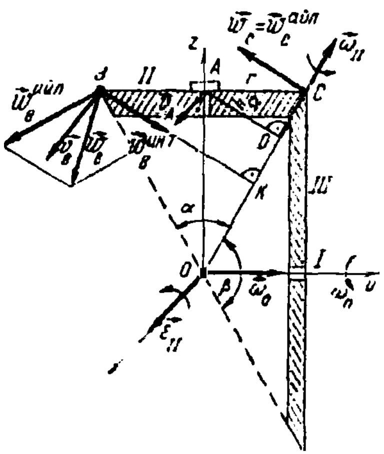
$$w_M^{айл} = \varepsilon \cdot h_\varepsilon = \varepsilon \cdot OM = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi^3 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{3}{2}\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

$\vec{w}_M^{\,айл}$ вектори $\vec{\varepsilon}$ йўналишига мос равишда OM га перпендикуляр йўналади. Шундай қилиб

$$w_M = w_M^{айл} = \frac{3}{2}\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

16-масала. Горизонтал ўқ атрофида $\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ с$^{-1}$ бурчак тезлик билан айланувчи I вал (4.15-расм) радиуси $r = 0{,}4$ м булган, қўзғалмас III шестерня билан илашган шестерня II ни ҳаракатга келтиради. $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$ деб олиб, II шестерня бурчак тезлиги, бурчак тезланиши ҳамда B ва C нуқталарининг тезлик, тезланишлари топилсин.

Ечиш. Қузғалмас O нуқтадан $Oxyz$ координата системасини шундай утказамизки, текширилаётган пайтда II шестерня орқали утказилган OBC кесим yOz текислиги билан устма-уст тушсин.



4.15-расм.

II шестерня оний бурчак тезлигини аниқлашда унинг A нуқтаси O ўқ атрофида ω_0 бурчак тезлик билан айланаётганидан фойдаланамиз:

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 \cdot AC \times$$
$$\times \mathrm{ctg}\, 30° = 0{,}4\ \frac{м}{с}.$$

II шестерня C нуқтаси қўзғалмас III шестерняга ҳам тегишли бўлгани учун $v_c = 0$, бинобарин, OC айланиш оний ўқидан иборат ва II шестерня бурчак тезлик вектори OC оний ўқ бўйлаб йўналган.

II шестерняни OC айланиш оний ўқи атрофида айланади деб қарасак, (4.23) га биноан

$$v_A = \omega_{II} h_2 = \omega_{II} \cdot AD.$$

Бундан

$$\omega_{II} = \frac{v_A}{AD} = \frac{v_A}{AC\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ \text{с}^{-1}.$$

B нуқта тезлигини (4.23) формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$v_B = \omega_{II} \cdot BK = 0{,}8 \text{ м/с ва } \vec{v}_B \parallel Ox.$$

II шестернянинг оний бурчак тезланиши ε_{II} ни топамиз. $\vec{v}_A$ тезлик миқдори ўзгармас бўлганидан $\vec{\omega}_{II}$ ҳам миқдор жиҳатдан ўзгармасдир. Шунинг учун ε_{II} ни $\vec{\omega}_{II}$ вектор учининг Oy ўқ атрофида ω_0 бурчак тезлиги билан айланишидаги тезлиги сифатида қараймиз:

$$\varepsilon_{II} = \omega_0 \cdot \omega_{II} \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{с}^{-2}.$$

Қўзғалмас O нуқтага қўйиладиган $\vec{\varepsilon}_{II}$ вектори йўналиши Ox ўқ йўналишига мос келади. Энди C ва B нуқталар тезланишларини аниқлашга ўтамиз. (4.32) формулага кўра:

$$\vec{w}_C = \vec{w}_C^{\,айл} + \vec{w}_C^{\,инт}.$$

C нуқта айланиш оний ўқида ётгани учун (4.31) формулага кўра қуйидагилар ҳосил бўлади.

$$w_C^{инт} = 0,\quad w_C^{айл} = \varepsilon_{II} \cdot OC = \varepsilon_{II} \cdot \frac{AC}{\cos 45^\circ} = 0{,}8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}46 \text{ м/с}^2.$$

Шундай қилиб, $\vec{w}_C = \vec{w}_C^{\,айл}$; $\vec{w}_C^{\,айл}$ вектори $\vec{\varepsilon}_{II}$ йўналишига мос равишда OC га перпендикуляр йўналган ва OBC текислигида ётади.

(4 32) га асосан

$$\vec{w}_B = \vec{w}_B^{\,инт} + \vec{w}_B^{\,айл}.$$

Бунда (4.31) га биноан

$$w_B^{инт} = \omega_{II}^2 \cdot BK = \omega_{II}^2 \cdot 2AC\cos 30^\circ = \frac{1{,}6\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}92 \text{ м/с}^2,$$

$$w_B^{айл} = \varepsilon_{II} \cdot OB = 0{,}8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}46 \text{ м/с}^2.$$

$\vec{w}_B^{\,инт}$ вектори BK бўйича айланиш ўқи томон, $\vec{w}_B^{\,айл}$ вектори OB га ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналган. $\vec{w}_B^{\,инт}$ ва $\vec{w}_B^{\,айл}$

векторлари орасидаги бурчак 120° булгани учун (4.33) формула қуйидагича ёзилади:

$$w_B = \sqrt{(w_B^{\text{ил}})^2 + (w_B^{\text{инт}})^2 + 2w_B^{\text{ил}} w_B^{\text{инт}} \cdot \cos 120^\circ} \approx 0{,}8 \text{ м/с}^2.$$

V боб. ЖИСМНИНГ ЭРКИН ҲАРАКАТИ

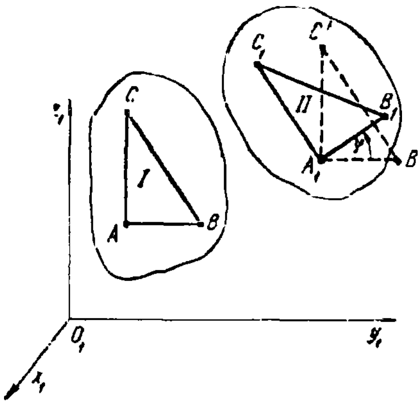
19 · §. Эркин жисм ҳаракатининг кинематик тенгламалари

Эркин жисм ҳолати бир бирига боғлиқ бўлмаган 6 та координаталар билан аниқланиши II бобда қайд этилган эди. Шу координаталарни қандай танлаш мумкинлиги, яъни эркин жисмнинг ҳаракат тенгламаларини аниқлаш масаласи қуйидаги *Шаль теоремаси* ёрдамида осон ҳал қилинади.

Теорема. *Эркин жисмнинг бир вазиятдан иккинчи вазиятга утишини унда қутб деб танланган нуқта билан бирликда илгарилама кўчиш ва қутб атрофидаги айланма кўчишдан ташкил топган деб қараш мумкин.*

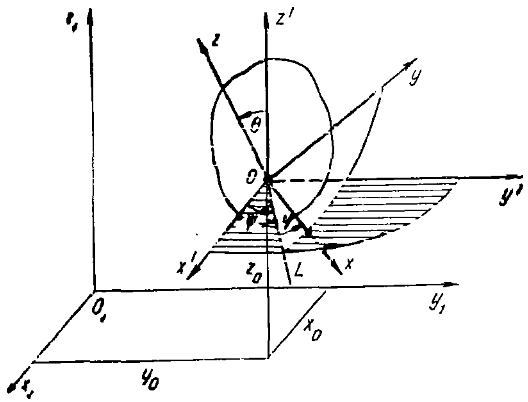
Исбот. Маълумки, жисмнинг ҳолати ундаги бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқта, бошқача айтганда, жисмда олинган учбурчак ҳолати билан тўлиқ аниқланади. ABC учбурчак жисм ҳолатини белгиловчи учбурчак булсин (5.1- расм). Жисм I вазиятдан II ҳолатга ўтганда ABC учбурчак $A_1B_1C_1$ учбурчак вазиятини эгалласин. Агар жисмга илгарилама кучиш берсак, ABC учбурчак $A_1B'C'$ ҳолатни эгаллайди; бунда ABC учбурчак томонлари билан $A_1B'C'$ учбурчак томонлари мос равишда ўзаро параллел бўлади. $A_1B'C'$ учбурчакнинг $A_1B_1C_1$ ҳолатга ўтиши эса Эйлер—Даламбер теоремасига кўра A_1 нуқта атрофида бирор бурчакка айлантириш билан бажарилади. Демак, теорема ўринли экан.

Жисмнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга утишини бундай икки кучиш йиғиндисидан иборат деб қараш унинг ҳақиқий ҳаракатини тасвирламайди. Бироқ жисмнинг I ва II вазиятлари бир-бирига жуда яқин қилиб олинса ва бу икки кучиш бир вақтнинг ўзида содир булади деб қаралса, у ҳақиқий ҳаракатни тасвирлайди. Бинобарин, *эркин жисмнинг ҳар ондаги ҳаракатини жисмда қутб деб танланган нуқтанинг шу ондаги илгарилама ҳаракати билан*



5.1- расм.

қутб атрофидаги сферик ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин.



5.2- расм.

Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, текис параллел ҳаракатдаги каби, ҳаракатнинг илгарилама қисми қутбнинг танланишига боғлиқ; ҳаракатнинг сферик қисми эса қутбнинг танланишига боғлиқ эмас.

Илгарилама ҳаракат жисмда олинган бирор нуқтанинг, масалан, қутбнинг, ҳаракат қонуни берилиши билан, сферик ҳаракат эса Эйлер бурчакларининг берилиши билан аниқланади. Шунга кўра эркин жисмнинг ҳаракати қуйидаги

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x_0(t),\ y_0 = y_0(t),\ z_0 = z_0(t), \\ \psi = \psi(t),\ \theta = \theta(t),\ \varphi = \varphi(t) \end{array}\right\} \qquad (5.1)$$

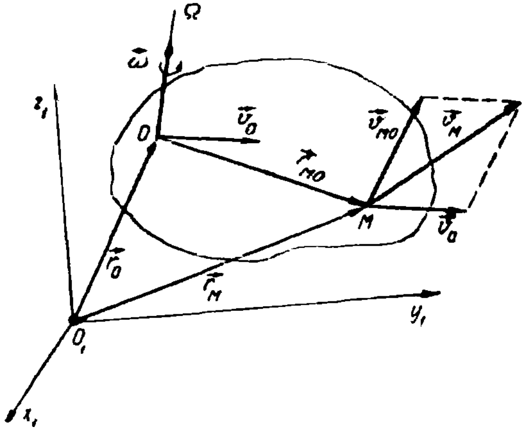
6 та тенгламалар билан ифодаланади, бунда x_0, y_0, z_0 — қутб сифатида танланган O нуқтанинг қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$ системадаги координаталари; ψ, θ, φ — Эйлер бурчаклари эса боши O нуқтада, ўқлари $O_1x_1y_1z_1$ система ўқларига мос равишда параллел ҳолда илгарилама ҳаракатланувчи $Ox'y'z'$ системага нисбатан олинади (5.2- расм). (5.1) тенгламалар *эркин жисм ҳаракатининг кинематик тенгламалари* дейилади.

20- §. Эркин жисм нуқтасининг чизиқли тезлиги

Теорема. *Эркин жисм ихтиёрий нуқтасининг чизиқли тезлиги қутбнинг тезлиги билан ушбу нуқтанинг қутбга нисбатан сферик ҳаракатидаги чизиқли тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Исбот. M — жисмнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. M нуқтани O қутб ва қузғалмас $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасининг боши O_1 билан туташтириб, мос равишда $\vec{r}_{MO}$ ва $\vec{r}_M$ векторларни ҳосил қиламиз (5.3- расм). O нуқтанинг қўзғалмас системага нисбатан радиус-вектори $\vec{r}_O$ бўлсин. У ҳолда жисмнинг ҳаракати давомида

$$\vec{r}_M = \vec{r}_O + \vec{r}_{MO} \qquad (5.2)$$



5.3- расм.

муносабат ўринлидир. (5.2) ифодадан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt}=\frac{d\vec{r}_O}{dt}+\frac{d\vec{r}_{MO}}{dt}.$$

Бу тенгликда $\frac{d\vec{r}_M}{dt}$ — M нуқтанинг $O_1x_1y_1z_1$ системага нисбатан тезлиги $\vec{v}_M$ ни, $\frac{d\vec{r}_O}{dt}$ — O қутбнинг $O_1x_1y_1z_1$ системага нисбатан тезлиги $\vec{v}_O$ ни, $\frac{d\vec{r}_{MO}}{dt}$ эса M нуқтанинг O қутб атрофида сферик ҳаракатдаги $\vec{v}_{MO}$ тезлигини ифодалайди. (4.22) га биноан, $\vec{v}_{MO}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{MO}$ бўлиб, $\vec{\omega}$ жисмнинг оний бурчак тезлик векторидан иборат. Шундай қилиб,

$$\vec{v}_M=\vec{v}_O+\vec{v}_{MO} \quad \text{ёки} \quad \vec{v}_M=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\vec{r}_{MO} \tag{5.3}$$

дан теореманинг ўринли эканлигини ҳосил қиламиз.

(5.2) ни эътиборга олиб (5.3) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{v}_M=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times(\vec{r}_M-\vec{r}_O).$$

Бу ифодани қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$ система ўқларига проекциялаймиз:

$$\left.\begin{aligned}
v_{x_1}&=v_{O_{x_1}}+\omega_{y_1}(z_1-z_O)-\omega_{z_1}(y_1-y_O),\\
v_{y_1}&=v_{O_{y_1}}+\omega_{z_1}(x_1-x)-\omega_{x_1}(z_1-z_O),\\
v_{z_1}&=v_{O_{z_1}}+\omega_{x_1}(y_1-y_O)-\omega_{y_1}(x_1-x_O),
\end{aligned}\right| \tag{5.4}$$

бу ерда x_1, y_1, z_1 — M нуқтанинг қузғалмас системадаги координаталари, x_O, y_O, z_O — O қутбнинг координаталари; ω_x, ω_y, ω_z — оний бурчак тезликнинг қўзғалмас ўқлардаги проекциялари бўлиб, улар Эйлер бурчаклари орқали (4.13) муносабатлардан аниқланиши мумкин; v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1} эса эркин жисм ихтиёрий нуқтаси тезлигининг қўзғалмас координата ўқларидаги проекцияларидан иборат.

21-§. Эркин жисм нуқтасининг чизиқли тезланиши

Теорема. *Эркин жисм ихтиёрий нуқтасининг чизиқли тезланиши қутбнинг тезланиши билан шу нуқтанинг қутбга нисбатан сферик ҳаракатидаги чизиқли тезланишининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Исбот. (5.3) ифодадан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{MO} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{MO}}{dt}$$

ёки

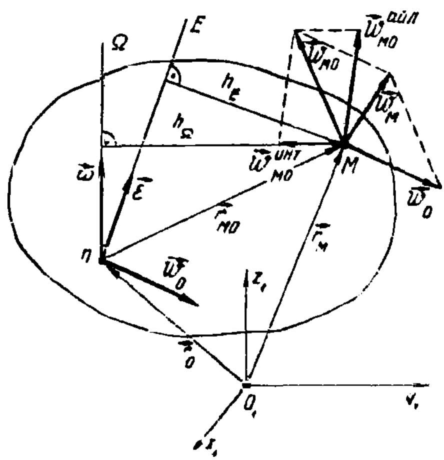
$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{MO} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{MO}). \qquad (5.5)$$

Бунда $\vec{w}_M$ — M нуқтанинг чизиқли тезланиш вектори, $\vec{w}_O$ — қутбнинг тезланиш вектори, $\vec{\varepsilon}$ — жисмнинг сферик ҳаракатдаги оний бурчак тезланиш векторидир. (4.29) га биноан $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{MO} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{MO})$ йиғинди M нуқтанинг қутбга нисбатан сферик ҳаракатидаги $\vec{w}_{MO}$ чизиқли тезланиш векторини ифодалайди (5.4-расм). Демак,

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{w}_{MO} \qquad (5.6)$$

бўлиб, теорема исбот бўлди.

(5.2) ни эътиборга олиб, (5.5) ни қўзғалмас система ўқларига проекциялаб, эркин жисм ихтиёрий нуқтаси тезланишининг бу ўқлардаги проекцияларини аниқловчи формулаларни ҳосил қиламиз:



5.4- расм

$$w_{x_1} = w_{O_{x_1}} + \varepsilon_{y_1}(z_1 - z_O) - \varepsilon_{z_1}(y_1 - y_O) + \omega_{x_1}[\omega_{x_1}(x_1 - x_O) + \omega_{y_1}(y_1 - y_O) + \omega_{z_1}(z_1 - z_O)] - \omega^2(x_1 - x_O),$$

$$w_{y_1} = w_{O_{y_1}} + \varepsilon_{z_1}(x_1 - x_O) - \varepsilon_{x_1}(z_1 - z_O) + \omega_{y_1}[\omega_{x_1}(x_1 - x_O) + \omega_{y_1}(y_1 - y_O) + \omega_{z_1}(z_1 - z_O)] - \omega^2(y_1 - y_O),$$

$$w_{z_1} = w_{O_{z_1}} + \varepsilon_{x_1}(y_1 - y_O) - \varepsilon_{y_1}(x_1 - x_O) + \omega_{z_1}[\omega_{x_1}(x_1 - x_O) + \omega_{y_1}(y_1 - y_O) + \omega_{z_1}(z_1 - z_O)] - \omega^2(z_1 - z_O).$$

Бунда ε_{x_1}, ε_{y_1}, ε_{z_1} билан оний бурчак тезланиш векторининг $O_1x_1y_1z_1$ система ўқларидаги проекциялари белгиланган.

VI боб. НУҚТАНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ

22-§. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва абсолют ҳаракати

Биз юқорида нуқтанинг ва жисмнинг ҳаракатини шартли равишда қузғалмас деб олинган координаталар системасига нисбатан текширдик. Энди нуқтанинг, кейинроқ эса жисмнинг, ҳам қузғалувчи, ҳам қузғалмас координаталар системаларига нисбатан ҳаракатини ўрганамиз.

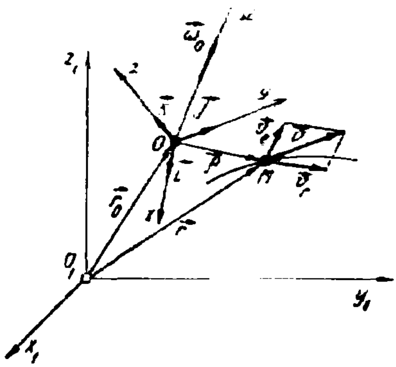
Агар нуқта бирор системага нисбатан ҳаракат қилиб, бу системанинг ўзи эса бошқа қузғалмас системага нисбатан ҳаракатланса, нуқтанинг ҳаракати мураккаб ҳисобланади. Дарёда кетаётган кемадаги одамнинг ҳаракати мураккаб ҳаракатга мисол була олади. Бунда одам кема полубасига, кема эса дарёга, дарё Ерга нисбатан ҳаракат қилади.

Нуқтанинг шартли равишда *қўзғалмас* қилиб олинган бирор *координаталар систетасига нисбатан ҳаракати абсолют ҳаракат, бу системага нисбатан олган тезлик ва тезланиши* мос равишда, *абсолют тезлик* ва *абсолют тезланиш дейилади*. Демак, биз шу пайтгача абсолют ҳаракат, абсолют тезлик ва тезланиш билан иш кўриб келган эканмиз. Шунга кура абсолют тезлик ва тезланишлар учун $\vec{v}$ ва $\vec{w}$ белгиларни сақлаймиз.

Нуқтанинг қузғалувчи системага нисбатан ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади. Нисбий тезлик ва нисбий тезланиш деб нуқтанинг қўзғалувчи системага нисбатан олган тезлиги ва тезланишига айтилади ва мос равишда $\vec{v}_r$, $\vec{w}_r$ орқали белгиланади.

Қўзғалувчи системанинг қузғалмас системага нисбатан ҳаракати кучирма ҳаракат дейилади. Нуқтанинг бирор ондаги кучирма тезлиги ва кучирма тезланиши деб, қузғалувчи координата системасининг айни пайтда шу нуқта билан устма-уст тушувчи нуқтасининг тезлиги ва тезланишига айтилади ҳамда мос равишда $\vec{v}_e$, $\vec{w}_e$ каби белгиланади.

Нуқтанинг нисбий ва мураккаб ҳаракатларини текшириш учун иккита координаталар системасини оламиз (6.1-расм). M нуқта бирор қузғалувчи $Oxyz$ системага нисбатан ҳаракат қилсин. $Oxyz$ система эса ўз навбатида қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$ системага нисбатан ҳаракатлансин. M нуқтанинг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан радиус-векторини $\vec{r}$, қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан радиус-векторини $\vec{\rho}$, қузғалувчи координаталар системаси боши O нуқтанинг қўзғалмас системага нисбатан радиус-векторини $\vec{r}_O$ билан белгилаймиз. У ҳолда



6.1- расм.

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho} \tag{6,1}$$

муносабат ўринли бўлади.

M нуқтанинг қузғалувчи координаталар системасига нисбатан координаталарини x, y, z, қўзғалувчи координата ўқларининг бирлик йўналтирувчи векторларини $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ билан белгиласак,

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{6.2}$$

деб ёзиш мумкин. Шунга кўра (6.1) ифода

$$\vec{r} = \vec{r}_O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{6.3}$$

кўринишни олади. (6.3) ифодада қатнашувчи барча катталиклар, шу жумладан $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ҳам вақт функцияси сифатида узгарувчи катталиклардир. Бунда $\vec{r}$ векторнинг ўзгариши нуқтанинг абсолют ҳаракатини, $\vec{r}_O$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторларнинг ўзгариши кўчирма ҳаракатни, x, y, z координаталарнинг ўзгариши нисбий ҳаракатни ифодалайди.

(6.3) *тенгламани нуқта мураккаб ҳаракатининг вектор куринишдаги тенгламаси деб аташ мумкин.* Бу тенгламани қузғалмас система ўқларига проекциялаб, мураккаб ҳаракатнинг координаталар куринишидаги тенгламалари ҳосил қилиниши мумкин.

23-§. Тезликларни қўшиш теоремаси

Теорема. *Нуқтанинг абсолют тезлиги унинг нисбий ва кучирма тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Исбот. (6.3) тенгламадан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}_O}{dt}+\left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\right)+$$
$$+\left(x\frac{d\vec{i}}{dt}+y\frac{d\vec{j}}{dt}+z\frac{d\vec{k}}{dt}\right), \qquad (6.4)$$

бу ерда $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$ — M нуқтанинг абсолют тезлигини, $\frac{d\vec{r}_O}{dt}=$ $=\vec{v}_O$ — O нуқтанинг абсолют тезлигини,

$$\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\vec{v}r- \qquad (6.5)$$

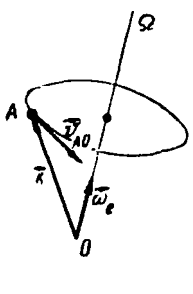
M нуқтанинг нисбий тезлигини ифодалайди.

Бирлик векторлар $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ дан олинган ҳосилаларни текширамиз. Масалан, $\frac{d\vec{k}}{dt}$ ҳосилани кўрайлик. Эркин жисм ҳаракати назариясидан маълумки, $Oxyz$ система ҳаракатини O нуқта билан биргаликда илгарилама ҳаракат ва O қутб атрофидаги сферик ҳаракатларнинг йиғиндисидан иборат деб қараш мумкин. У ҳолда, $\frac{d\vec{k}}{dt}$ радиус-вектори $\vec{k}$ бўлган A нуқтанинг O нуқта атрофида сферик ҳаракатидаги $\vec{v}_{AO}$ чизиқли тезлик векторини ифодалайди (6.2-расм). Аммо сферик ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезлигини ҳар онда қутб орқали утувчи айланиш оний ўқи атрофидаги айланма ҳаракатдаги тезлик деб олиниши мумкин бўлганидан

$$\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{v}_{AO}=\vec{\omega}_e\times\vec{k} \qquad (6.6)$$

бўлади. (6.6) ифодада ω_e сферик — кўчирма ҳаракатнинг оний бурчак тезлик векторидир. Шунга ўхшаш

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}_e\times\vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\omega}_e\times\vec{j} \qquad (6.7)$$



6,2-расм.

бўлади. (6.5) — (6.7) ифодаларни эътиборга олиб (6.4) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\vec{v}=\vec{v}_O+\vec{v}_r+x(\vec{\omega}_e\times\vec{i})+y(\vec{\omega}_e\times\vec{j})+z(\vec{\omega}_e\times\vec{k})=$$

$$=\vec{v}_O+\vec{v}_r+\vec{\omega}_e\times(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=\vec{v}_r+\vec{v}_O+\vec{\omega}_e\times\vec{\rho}.$$

(5.3) ни эътиборга олсак, кўчирма тезликнинг таърифига асосан $\vec{v}_O+\vec{\omega}_e\times\vec{\rho}$ йиғинди M нуқтанинг $\vec{v}_e$ кўчирма тезлигини ифодалайди. Шундай қилиб,

$$\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_e \tag{6.8}$$

бўлади. Теорема исботланди.

Агар кучирма ҳаракат илгарилама ҳаракат бўлса, $\vec{\omega}_e=0$, бинобарин, бу ҳолда кўчирма тезлик $\vec{v}_e=\vec{v}_O$ бўлади. Тезликларни қушиш теоремаси (6.8) ифода кўринишида ёзила беради.

24 §. Тезланишларни қўшиш (Кориолис) теоремаси

Теорема. *Нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Бу теоремани исбот қилиш учун (6.4) ифодадан вақт бўйича яна бир марта ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_O}{dt}+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}\right)+\left(x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}+y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}+\right.$$

$$\left.+z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right)+2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right). \tag{6.9}$$

(6.9) ифодада $\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{w}$ — M нуқтанинг абсолют тезланиши,

$\frac{d\vec{v}_O}{dt}=\vec{w}_O$ — O нуқтанинг тезланиши;

$$\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}=\vec{w}_r- \tag{6.10}$$

M нуқтанинг нисбий тезланиши эканлигини ва (6.6), (6.7) муносабатларни эътиборга олиб, (6.9) ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\vec{w}=\vec{w}_O+\vec{w}_r+\left[x\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_e\times\vec{i})+y\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_e\times\vec{j})+z\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_e\times\vec{k})\right]+$$

$$+2\left[\frac{dx}{dt}(\vec{\omega}_e\times\vec{i})+\frac{dz}{dt}(\vec{\omega}_e\times\vec{j})+\frac{dz}{dt}(\vec{\omega}_e\times\vec{k})\right]$$

ёки

$$\vec{w} = \vec{w}_O + \vec{w}_r + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + \vec{\omega}_e \times \left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + \right.$$

$$\left. + z\frac{d\vec{k}}{dt}\right) + 2\left[\vec{\omega}_e \times \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)\right],$$

бунда $\vec{\varepsilon}_e = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt}$ бўлиб, ε_e — кўчирма ҳаракат оний бурчак тезланиш векторини ифодалайди; (6.2), (6.5) — (6.7) ифодаларни эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_O + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) + 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \qquad (6.11)$$

(5.5) ифодани назарда тутсак, кўчирма тезланиш таърифига кўра $\vec{w}_O + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})$ йиғинди M нуқтанинг $\vec{w}_e$ кўчирма тезланишини ифодалайди. У ҳолда

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

бўлади. Бу ифоданинг ўнг томонидаги

$$\vec{w}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

вектор *қушимча* ёки *Кориолис тезланиши* деб аталади. Бу вектор кўпайтмани тезланиш деб олинишига асос шуки, унинг ўлчов бирлиги тезланиш бирлиги билан бир хилдир. Шундай қилиб,

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_k. \qquad (6.12)$$

Теорема исбот қилинди.

Нисбий ва кўчирма ҳаракатлар эгри чизиқли булса, нисбий ва кучирма тезланишларнинг ҳар бири уринма ва нормал ташкил этувчилардан иборат бўлади. У ҳолда (6.12) формула

$$\vec{w} = \vec{w}_r^n + \vec{w}_r^\tau + \vec{w}_e^n + \vec{w}_e^\tau + \vec{w}_k \qquad (6.13)$$

кўринишда ёзилади. (6.13) га биноан нуқта абсолют тезланишининг миқдори ва йўналишини аниқлашда аналитик усулдан фойдаланиш қулай. Бунинг учун тезланишнинг ўзаро перпендикуляр бўлган 3 та ўқлардаги проекциялари (6.13) ни шу ўқларга проекциялаш орқали топилади.

25-§. Кориолис тезланиши. Тезланишлар параллелограми теоремаси

Маълумки, Кориолис тезланиши

$$\vec{w}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r \qquad (6.14)$$

формула билан аниқланади. (6.14) да $\vec{\omega}_e$ кўчирма ҳаракатнинг оний бурчак тезлиги, $\vec{v}_r$ эса нуқтанинг нисбий тезлиги векторидир. Бинобарин, *Кориолис тезланиши кучирма ҳаракат бурчак тезлик вектори билан нуқтанинг нисбий тезлик векторининг иккиланган вектор купайтмасига тенг.*

Вектор кўпайтма таърифига кўра Кориолис тезланишининг миқдори

$$w_k = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) \tag{6.15}$$

формуладан аниқланиб, $\vec{\omega}_e$ ва $\vec{v}_r$ векторларга перпендикуляр равишда шундай йуналганки, w_k нинг мусбат учидан қараганда $\vec{\omega}_e$ векторнинг v_r га қараб энг кичик бурчакка айланиши соат стрелкаси ҳаракатига тескари кўриниши керак.

Кориолис тезланишининг йуналишини қуйидаги Жуковский қоидасидан фойдаланиб аниқлаш қулай:

1) $\vec{\omega}_e$ векторига перпендикуляр P текислик ўтказилади (6.3-расм);

2) $\vec{v}_r$ векторининг шу P текисликдаги проекцияси $\vec{v}_r'$ аниқланади;

3) $\vec{v}_r'$ вектори кучирма ҳаракат йўналишида 90° га бурилса, Кориолис тезланишининг йуналиши ҳосил булади.

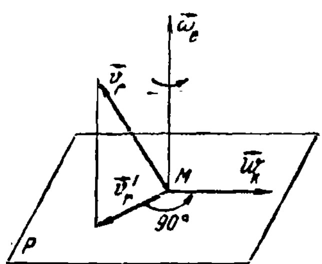
Кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракатдан иборат ҳолда $\omega_e = 0$ булгани туфайли Кориолис тезланиши ҳам нолга тенг бўлади. Унда (6.12) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e. \tag{6.16}$$

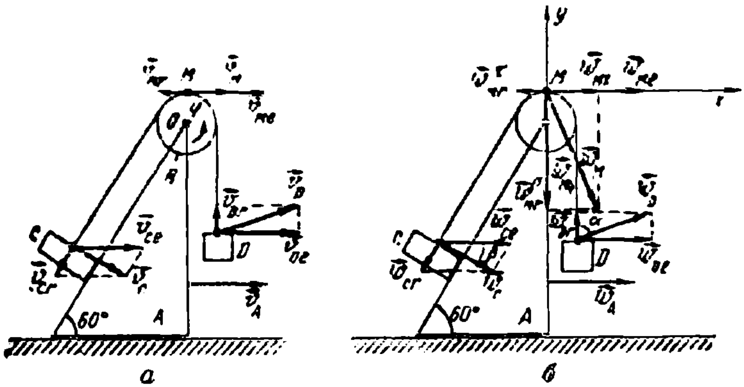
(6.16) *тезланишлар параллелограми теоремасини* ифодалайди: *кучирма ҳаракат илгарилама ҳаракат бўлганда, нуқтанинг абсолют тезланиши нисбий ва кучирма тезланишлар векторларига қурилган параллелограмм диагонали билан аниқланади.*

Бирор онда нуқтанинг нисбий тезлиги нолга тенг бўлган, шунингдек, кучирма ҳаракатнинг бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}_e$ билан нисбий тезлик вектори $\vec{v}_r$ коллинеар бўлган ҳолларда ҳам Кориолис тезланиши нолга тенг бўлади.

17-масала. A призма горизонтал текислик бўйлаб $v_A = 3t \frac{м}{с}$



6.3- расм.



6.4-расм.

тезлик билан ўнг томонга қараб ҳаракатланади (6.4-расм, *a*). Призмага ўрнатилган $r=0{,}1$ м радиусли *B* блокка учларига *C* ва *D* юклар бириктирилган арқон ташланган. *B* блок *O* ўқ атрофида $\varphi=2t^2$ қонунга кўра айланади. Арқон блокка нисбатан сирғанмайди деб қараб, $t=2$ с бўлганда *C*, *D* юклар ҳамда *B* блок *M* нуқтасининг тезликлари ва тезланишлари топилсин.

Ечиш. *A* призма қўзғалувчи системадан иборат. *M*, *C*, *D* нуқталарнинг призмага нисбатан ҳаракати нисбий ҳаракат, призма билан биргаликда $\vec{v}_A$ тезлик билан ҳаракатланиши кўчирма ҳаракат (кучирма ҳаракат бунда илгарилама ҳаракатдир), қўзғалмас горизонтал текисликка нисбатан ҳаракати абсолют ҳаракатдир.

Бу нуқталар тезликларини аниқлаш учун (6.8) формуладан, яъни тезликларни қўшиш теоремасидан фойдаланамиз:

$$\vec{v}=\vec{v}_e+\vec{v}_r.$$

Кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракат бўлгани учун *M*, *C*, *D* нуқталарнинг кўчирма тезликлари бир хил ва v_A га тенг бўлади:

$$v_{M_e}=v_{C_e}=v_{D_e}=v_A=3t \text{ м/с}.$$

Бу нуқталарнинг нисбий тезликлари миқдор жиҳатдан тенгдир, чунки арқоннинг барча нуқталари бир хил нисбий тезликка эга. *M* нуқта нисбий ҳаракати унинг *O* ўқ атрофидаги айланма ҳаракатидир; демак,

$$v_{M_r}=\omega_r\cdot r=\frac{d\varphi}{dt}\cdot r=4t\cdot 0{,}1=0{,}4t \text{ м/с}.$$

Шунингдек, $v_{C_r}=v_{D_r}=0{,}4t$.

Бунда $\vec{v}_{M_r}$ блокнинг айланиш йўналишига мос равишда, блок радиусига перпендикуляр, $\vec{v}_{C_r}$ қия текислик бўйича, $\vec{v}_{D_r}$ вертикал буйича йўналган.

M нуқтага қуйилган кўчирма ва нисбий тезлик векторлари бир туғри чизиқда ётгани туфайли, улар алгебраик қушилади.

$$v_M = v_{M_e} - v_{M_r} = 3t - 0{,}4t = 2{,}6t,$$

$$t = 2 \text{ с}; \qquad v_M = 5{,}2 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

D нуқтага қўйилган кўчирма ва нисбий тезлик векторлари ўзаро перпендикуляр бўлгани учун

$$v_D = \sqrt{v_{D_e}^2 + v_{D_r}^2} = \sqrt{9t^2 + 0{,}16t^2} \approx 3{,}03t \text{ м/с}.$$

$$t = 2 \text{ с}; \ v_D = 6{,}06 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

C нуқта абсолют тезлигини косинуслар теоремасидан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$v_C = \sqrt{v_{C_e}^2 + v_{C_r}^2 - 2v_{C_e}v_{C_r}\cos 60^\circ} = \sqrt{7{,}96\ t^2} = 2{,}6t.$$

$$t = 2 \text{ с}; \qquad v_C = 5{,}2 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Кучирма ҳаракат илгарилама ҳаракат бўлгани учун тезланишлар параллелограми теоремасидан фойдаланамиз:

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r.$$

Бунда барча нуқталарнинг кў чирма тезланишлари тенг:

$$w_{M_e} = w_{C_e} = w_{D_e} = \frac{dv_A}{dt} = 3 \text{ м/с}^2.$$

Кўчирма тезланиш вектори кўчирма тезлик бўйича йўналган.

C ва D нуқталарнинг нисбий ҳаракатлари тўғри чизиқли ҳаракатдир. Бинобарин,

$$w_{C_r} = w_{C_r}^{\tau} = \dot{v}_{C_r} = 0{,}4 \text{ м/с}^2, \ w_{D_r} = w_{D_r}^{\tau} = \dot{v}_{D_r} = 0{,}4 \text{ м/с}^2.$$

M нуқтанинг нисбий ҳаракати айлана бўйлаб ҳаракат булгани учун:

$$\vec{w}_{M_r} = \vec{w}_{M_r}^{n} + \vec{w}_{M_r}^{\tau},$$

бунда

$$w_{M_r}^{n} = \omega_r^2 \cdot r = 16t^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}6t^2 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{M_r}^{\tau} = \varepsilon_r \cdot r = \omega_r \cdot r = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4 \text{ м/с}^2.$$

M, C, D нуқталар тезланиш векторлари 6.4-расм, *б* да тасвирланган.

D нуқта тезланиши Пифагор теоремасидан, C нуқта тезланиши косинуслар теоремасидан фойдаланиб топилади:

$$w_D = \sqrt{w_{D_e}^2 + w_{D_r}^2} = \sqrt{9,16} \approx 3,03 \text{ м/с}^2,$$

$$w_C = \sqrt{w_{C_e}^2 + w_{C_r}^2 - 2w_{C_e} \cdot w_{C_r} \cos 60^\circ} = \sqrt{7,96} \approx 2,6 \text{ м/с}^2.$$

Расмдан фойдаланиб α, β бурчакларни аниқласак, $\vec{w}_D$ ва $\vec{w}_C$ векторлар йуналиши ҳосил бўлади:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_{D_e}}{w_{D_r}} = 7,5; \ \alpha \approx 82,5^\circ;$$

$$\frac{w_{C_r}}{\sin \beta} = \frac{w_C}{\sin 60^\circ}, \text{ бундан } \sin \beta = \frac{w_{C_r}}{w_C} \sin 60^\circ = 0,1332, \ \beta \approx 7,5^\circ.$$

M нуқта абсолют тезланишини аниқлаш формуласи

$$\vec{w}_M = \vec{w}_{M_e} + \vec{w}^n_{M_r} + \vec{w}^\tau_{M_r}$$

ни ўзаро перпендикуляр бўлган x, y ўқларга проекциялаймиз:

$$w_{M_x} = w_{M_e} = w^\tau_{M_r} = 2,6 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{M_y} = -w^n_{M_r} = -1,6t^2; \quad t = 2c; \quad w_{M_y} = -6,4 \text{ м/с}^2.$$

У ҳолда

$$w_M = \sqrt{w_{M_x}^2 + w_{M_y}^2} = \sqrt{7,96 + 40,96} = \sqrt{48,92} \approx 7 \text{ м/с}^2.$$

M нуқта тезланишининг йўналиши йўналтирувчи косинуслар орқали топилади:

$$\cos(\widehat{\vec{w}_M, \vec{x}}) = \frac{w_{M_x}}{w_M} = 0,3714; \quad (\widehat{\vec{w}_M, \vec{x}}) \approx 68^\circ$$

$$\cos(\widehat{\vec{w}_M, \vec{y}}) = \frac{w_{M_y}}{w_M} = -0,9143; \quad (\widehat{\vec{w}_M, \vec{y}}) \approx 202^\circ.$$

18-масала. M нуқтанинг xOy текисликдаги ҳаракати

$$x = r + r\cos kt, \quad y = r\sin kt \tag{1}$$

тенгламалар билан ифодаланади; xOy текислиги эса Oz ўқ атрофида соат стрелкаси бўйича ўзгармас $\omega = \pi c^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади (6.5- расм). M нуқтанинг тезлик ва тезланиши ихтиёрий вақт учун аниқлансин.

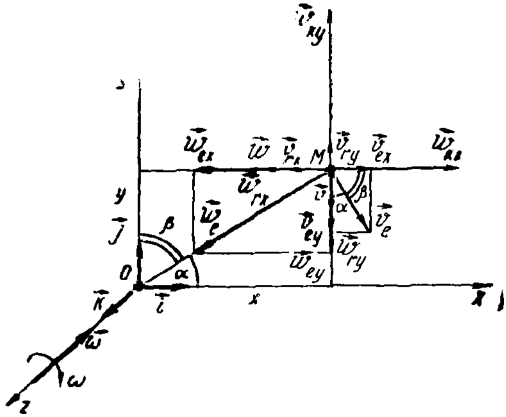
Ечиш. M нуқта мураккаб ҳаракат қилади. Унинг xOy текисликка нисбатан (1) тенглама бўйича ҳаракатланиши нисбий ҳаракат, xOy текислик билан Oz атрофида айланиши эса кўчирма ҳаракатдан иборат.

Тезликларни қўшиш теоремасига кура

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \qquad (2)$$

Нисбий ҳаракати координата усулида берилган нуқтанинг тезлигини (6.5) га кура аниқлаймиз:

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} =$$
$$= -r\pi \sin \pi t \vec{i} +$$
$$+ r\pi \cos \pi t \vec{j}. \qquad (3)$$



6.5- расм.

M нуқтанинг кўчирма тезлиги xOy текисликнинг берилган онда унга мос келувчи нуқтасининг тезлигини аниқлаш бўйича топилади. xOy текислиги айланма ҳаракатда бўлгани учун

$$v_e = \omega \cdot OM;$$

бунда

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 (1 + \cos \pi t)^2 + r^2 (\sin \pi t)^2} =$$
$$= r\sqrt{2)1 + \cos \pi t)} = 2r \cos \frac{\pi t}{2}. \qquad (4)$$

Шундай қилиб, $v_e = \omega \cdot OM = 2r\pi \cos \frac{\pi}{2} t$.

$\vec{v}_e$ вектори OM га перпендикуляр йўналган. $\vec{v}_e$ векторни Ox ва Oy ўқлар бўйича ташкил этувчиларга ажратиб ёзамиз:

$$\vec{v}_e = v_{ex}\vec{i} + v_{ey}\vec{j} = v_e \cos \beta \vec{i} - v_e \cos \alpha \cdot \vec{j}.$$

6.5- расмдан:

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \left(\widehat{\vec{OM}, \vec{i}}\right) = \frac{x}{OM} = \frac{r(1 + \cos \pi t)}{2r \cos \frac{\pi}{2} t} = \cos \frac{\pi}{2} t, \\ \cos \beta &= \cos \left(\widehat{\vec{OM}, \vec{j}}\right) = \frac{y}{OM} = \frac{r \sin \pi t}{2r \cos \frac{\pi}{2} t} = \sin \frac{\pi}{2} t. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Буни эътиборга олсак,

$$\vec{v}_e = 2\pi r \cos \frac{\pi t}{2} \sin \frac{\pi t}{2} \vec{i} - 2\pi r \cos \frac{\pi t}{2} \cdot \cos \frac{\pi t}{2} \vec{j}$$

ёки

$$\vec{v}_e = \pi r \sin \pi t \, \vec{i} - \pi r (1 + \cos \pi t) \, \vec{j} \tag{6}$$

ҳосил бўлади.

(3) ва (6) ни (2) га қўямиз:

$$\vec{v} = -\pi r \sin \pi t \cdot \vec{i} + \pi r \cos \pi t \cdot \vec{j} + \pi r \sin \pi t \cdot \vec{i} - \pi r \cdot \vec{j} -$$

$$- \pi r \cos \pi t \cdot \vec{j} = -\pi r \, \vec{j}.$$

Шундай қилиб, M нуқта тезлигининг модули $v = \pi r$ бўлиб, Oy ўққа параллел равишда унинг манфий йўналиши томон йўналган экан.

Кўчирма ҳаракат айлана бўйлаб ҳаракат бўлгани учун, M нуқтанинг абсолют тезланиши Кориолис теоремасидан фойдаланиб аниқланади:

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_k. \tag{7}$$

Бундаги нисбий тезланишни (6.10) формулага биноан аниқлаймиз:

$$\vec{w}_r = \ddot{x} \, \vec{i} + \ddot{y} \, \vec{j} = -\pi^2 r \cos \pi t \cdot \vec{i} - \pi^2 r \sin \pi t \cdot \vec{j}. \tag{8}$$

M нуқтанинг кўчирма ҳаракати ўзгармас бурчак тезлик билан содир бўлгани учун $\vec{w}_e = \vec{w}_e^n$ ва бу вектор M нуқтадан MO бўйлаб айланиш ўқи томон йўналган ҳамда $w_e^n = \omega^2 \cdot OM$. (4) ни эътиборга олсак,

$$w_e = w_e^n = 2\pi^2 r \cos \frac{\pi t}{2}.$$

$\vec{v}_e$ га ўхшаш $\vec{w}_e$ ни ҳам x, y ўқлар бўйича ташкил этувчиларга ажратамиз:

$$\vec{w}_e = w_{e_x} \vec{i} + w_{e_y} \vec{j} = -w_e \cos \alpha \cdot \vec{i} - w_e \cos \beta \cdot \vec{j}.$$

(5) ни эътиборга олсак,

$$\vec{w}_e = -2\pi^2 r \cos \frac{\pi t}{2} \cdot \cos \frac{\pi t}{2} \cdot \vec{i} - 2\pi^2 r \cos \frac{\pi t}{2} \cdot \sin \frac{\pi t}{2} \cdot \vec{j}$$

ёки

$$\vec{w}_e = -\pi^2 r (1 + \cos \pi t) \cdot \vec{i} - \pi^2 r \sin \cdot \pi t \, \vec{j} \tag{9}$$

ҳосил бўлади.

Кориолис тезланишини (6.14) формуладан аниқлаймиз. Кўчирма ҳаракат Oz атрофида соат стрелкаси айланишига мос келгани учун, $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}$ вектори шу ўқнинг йўналишига, яъни

$\vec{k}$ бирлик вектор йўналишига қарама-қарши йўналган; у ҳолда: $\vec{\omega}_e = -\omega \cdot \vec{k} = -\pi \vec{k}$.

Шунинг учун

$$\vec{w}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = -2\pi\vec{k} \times (-r\pi \sin \pi t \cdot \vec{i} + r\pi \cos \pi t \cdot \vec{j});$$

бунда $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ бўлганидан

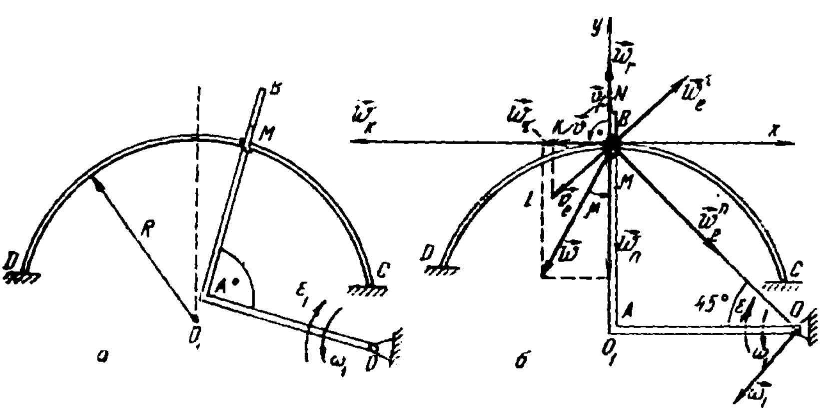
$$\vec{w}_k = 2\pi^2 r (\sin \pi t \vec{j} + \cos \pi t \cdot \vec{i}). \qquad (10)$$

(8), (9), (10) ифодаларни (7) га қўйиб, ҳосил бўлган муносабатни ихчамласак,

$$\vec{w} = -\pi^2 r \vec{i}$$

келиб чиқади. Демак, M нуқта тезланишининг модули $w = \pi^2 r$ га тенг булиб, $\vec{w}$ вектори Ox ўққа параллел равишда унинг бирлик векторига қарама-қарши йўналган экан.

19 масала. A нуқтасида тўғри бурчак билан эгилган OAB стержень расм текислигига перпендикуляр бўлган ва O нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида айланиб, $R = 0{,}4\sqrt{2}$ м радиусли ёй шаклида эгилган қузғалмас CD стержень бўйлаб M ҳалқани ҳаракатга келтиради (6.6-расм, a). OAB ва CD стерженлар бир текисликда жойлашган. OAB стерженнинг A нуқтаси O_1 устига тушган пайтда, бу стержень $\omega_1 = 2\,\text{с}^{-1}$ бурчак тезлик, $\varepsilon_1 = 2\,\text{с}^{-2}$ бурчак тезланиш билан соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда секинланувчан айланма ҳаракат қилади деб, M нуқтанинг шу пайтдаги абсолют тезлиги, абсолют тезланиши ҳамда OAB стерженга нисбатан нисбий тезлиги ва нисбий тезланиши топилсин.



6.6-расм.

Ечиш. A нуқта O_1 билан устма-уст тушган вазият 6.6-расм *б* да тасвирланган. M нуқтанинг қўзғалмас CD стерженга нисбатан ҳаракати абсолют, OAB стержень билан биргаликда айланиши кўчирма, OAB стержень бўйлаб ҳаракати нисбий ҳаракатдир.

Тезликларни қўшиш теоремасига кўра M нуқта тезлигини аниқлаймиз:

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

$\vec{v}$ абсолют тезлик вектори CD ёйга M нуқтада ўтказилган уринма бўйича, $\vec{v}_e$ кўчирма тезлик вектори O атрофида айланиш йўналишига мос равишда OM га утказилган перпендикуляр, $\vec{v}_r$ нисбий тезлик вектори эса AB стержень буйлаб йўналган. Буларни эътиборга олиб, томонлари $\vec{v}_e$ ва $\vec{v}_r$, диагонали $\vec{v}$ бўлган $KLMN$ параллелограмм қурамиз; бунда кўчирма тезлик миқдори

$$v_e = \omega_1 \cdot OM = \omega_1 \cdot \frac{R}{\cos 45^\circ} = 1{,}60 \text{ м/с га тенг.}$$

Тўғри бурчакли KLM учбурчакда $\widehat{KML} = 45^\circ$ бўлганидан:

$$v = v_e \cos 45^\circ = 1{,}60 \cdot 0{,}707 = 1{,}13 \text{ м/с}.$$

KLM тенг ёнли учбурчак бўлгани (бурчакларига кўра) учун

$$v_r = v = 1{,}13 \text{ м/с}.$$

Энди M нуқта тезланишларини аниқлашга ўтамиз.

M нуқтанинг абсолют ҳаракати O_1 марказли айлана бўйлаб ҳаракат бўлгани учун унинг абсолют тезланиши

$$\vec{w} = \vec{w}_n + \vec{w}_\tau \qquad (1)$$

формуладан аниқланади (6.6-расм, *б*). (1) да $w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = 2{,}24 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ва $\vec{w}_n$ вектор M дан айлана маркази O_1 томон йўналган; M нуқта абсолют тезлиги миқдорининг ўзгариш қонуни номаълум бўлгани учун $w_\tau = \frac{dv}{dt}$ формуладан фойдалана олмаймиз. M нуқтанинг ҳаракатини тезланувчан деб фараз қилиб, $\vec{w}_\tau$ векторни $\vec{v}$ бўйича йўналтирамиз. w_τ ни аниқлаш учун Кориолис теоремаси (6.13) дан фойдаланамиз:

$$\vec{w} = \vec{w}_r^\tau + \vec{w}_r^n + \vec{w}_e^\tau + \vec{w}_e^n + \vec{w}_K.$$

(1) ни эътиборга олсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\vec{w}_n + \vec{w}_\tau = \vec{w}_r^\tau + \vec{w}_r^n + \vec{w}_e^\tau + \vec{w}_e^n + \vec{w}_K. \qquad (2)$$

Нуқтанинг нисбий ҳаракати тўғри чизиқли бўлгани учун $\vec{w}_r^n = 0$; шунга кўра $\vec{w}_r = \vec{w}_r$ бўлиб, бу векторни нуқтанинг нисбий ҳаракатини тезланувчан деб фараз қилиб, нисбий тезлик вектори бўйича йўналтирамиз.

(2) даги $\vec{w}_e^n$ ва $\vec{w}_e^\tau$ қуйидагича топилади:

$$w_e^n = \omega_e^2 \cdot OM = \omega_1^2 \cdot \frac{R}{\cos 45^\circ} = 3{,}2 \text{ м/с}^2, \quad w_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM =$$
$$= \varepsilon_1 \cdot \frac{R}{\cos 45^\circ} = 1{,}6 \text{ м/с}^2.$$

$\vec{w}_e^n$ вектор M нуқтадан O айланиш марказига қараб йўналади; кучирма ҳаракат секинланувчан бўлгани туфайли $\vec{w}_e^\tau$ вектор $\vec{v}_e$ векторга қарши йўналади.

$\vec{w}_e$ вектор расм текислигига перпендикуляр равишда ўқувчи томонга қараб йўналади, $\vec{v}_r$ эса расм текислигида жойлашган; демак, $\vec{\omega}_e$ ва $\vec{v}_r$ векторлари орасидаги бурчак 90° га тенг. (6.15) формулага кўра Кориолис тезланишини аниқлаймиз:

$$w_к = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 4{,}52 \text{ м/с}^2.$$

(2) ифодадаги қолган икки вектор миқдорлари w_τ ва w_r ни M_x ва M_y ўқларга шу вектор тенгламани проекциялаш билан аниқлаймиз:

$$-w_\tau = w_e^n \cos 45^\circ + w_e^\tau \cos 45^\circ - w_к, \qquad (3)$$
$$-w_n = w_r - w_e^n \cos 45^\circ + w_e^\tau \cos 45^\circ. \qquad (4)$$

(3) тенгламадан $w_\tau = 1{,}13 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, (4) тенгламадан $w_r = -1{,}13 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ келиб чиқади.

Нисбий тезланишнинг манфий ишора билан чиқиши нисбий ҳаракатнинг тезланувчан эмас, балки секинланувчанлиги, $\vec{w}_r$ вектори расмда курсатилган йўналишга тескари йуналганини курсатади.

Энди (1) геометрик йиғиндига кўра $\vec{w}$ — абсолют тезланишни топа оламиз:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = 2{,}53 \text{ м/с}^2.$$

$\vec{w}$ вектор йўналишини μ бурчак орқали аниқлаймиз:

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{w_\tau}{w_n} = \operatorname{arctg} 0{,}5045 \approx 27^\circ.$$

VII боб ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ

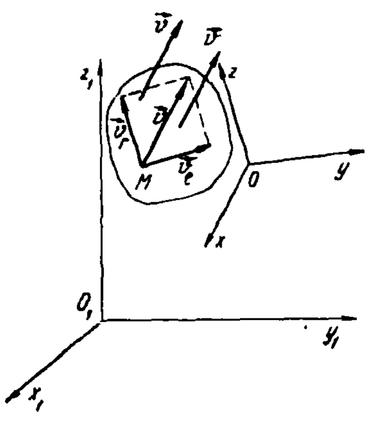
Қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракатини икки хил усулда ўрганиш мумкин. Биринчи усулда жисмнинг қўзғалувчи системага нисбатан ҳаракатини ҳамда қўзғалувчи системанинг қўзғалмас системага нисбатан ҳаракатини билган ҳолда жисм ихтиёрий нуқтасининг абсолют ҳаракати ва бу ҳаракатдаги тезлик, тезланиш (6.3), (6.8), (6.12) муносабатлар асосида топилади.

Иккинчи усул бирмунча қулай бўлиб, бунда жисмнинг кўчирма ва нисбий ҳаракатларини билган ҳолда унинг абсолют ҳаракати қандай бўлиши аниқланади. Абсолют ҳаракат маълум бўлгач, бу ҳаракат турига қараб жисм ихтиёрий нуқтасининг тезлиги, тезланишини аниқлаш мумкин булади, бунда абсолют ҳаракатнинг оний бурчак тезлиги ва оний бурчак тезланишини аниқлаш асосий масала булиб қолади, чунончи $\vec{\omega}$ ва $\vec{\varepsilon}$ маълум бўлганда жисм ихтиёрий нуқтасининг тезлиги, тезланишини аниқлаш масалалари 20, 21-§ лардан бизга аён.

Жисмнинг ҳам кўчирма, ҳам нисбий ҳаракати илгарилама ҳаракат, *шунингдек*, кўчирма ва нисбий ҳаракатлари ўзаро параллел ёки кесишувчи ўқлар атрофидаги айланма ҳаракат бўлган *ҳоллар амалда* кўп учрайдиган ҳоллардир. Ана шу ҳолларни кўриб чиқамиз.

26-§. Жисмнинг илгарилама ҳаракатларини қўшиш

Қаттиқ жисм $Oxyz$ қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан $\vec{v}_1$ тезлик билан илгарилама ҳаракатда бўлсин. Шу билан бир вақтда $Oxyz$ координаталар системаси $O_1x_1y_1z_1$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан $\vec{v}_2$ тезлик билан илгарилама ҳаракат қилсин (7.1-расм). У ҳолда жисмнинг илгарилама ҳаракатига оид теоремага биноан, жисм барча нуқталарининг, шу жумладан ихтиёрий M нуқтасининг кўчирма тезлиги $\vec{v}_e = \vec{v}_1$, нисбий тезлиги эса $\vec{v}_r = \vec{v}_2$ бўлади.



7.1-расм.

Тезликларни қушиш теоремасига кўра жисм M нуқтасининг абсолют тезлиги

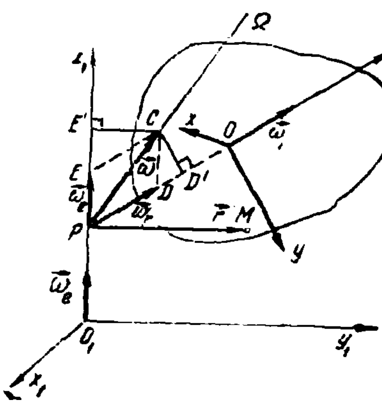
$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad (7.1)$$

тенглик билан аниқланади. M нуқта жисмнинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун, (7.1) дан кўрамизки, жисм барча нуқталари бир хил абсолют тезликка эга бўлади, яъни жисмнинг абсолют ҳаракати илгарилама ҳаракат булади.

Шундай қилиб, *кўчирма ва нисбий ҳаракатлари илгарилама ҳаракат бўлган жисмнинг абсолют ҳаракати ҳам илгарилама ҳаракат бўлиб, жисм ҳар бир нуқтасининг абсолют тезлиги кўчирма ва нисбий тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг.*

27-§. Жисмнинг кесишувчи ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш

Жисм $Oxyz$ системага нисбатан бирор Oz ўқ атрофида $\vec{\omega}_r$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракат қилсин (7.2-расм). $Oxyz$ системанинг ўзи эса бирор қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$ системага нисбатан O_1z_1 ўқ атрофида $\vec{\omega}_e$ бурчак тезлик билан айланиб, Oz ва O_1z_1 ўқлар бирор P нуқтада кесишсин (P нуқта текширилаётган жисмга тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин). Жисм бир йула икки айланма ҳаракатда иштирок этаяпти. Улардан бири Pz уқ атрофида $\vec{\omega}_r$ бурчак тезлик билан содир бўлаётган нисбий ҳаракат, иккинчиси эса Pz_1 ўқ атрофида $\vec{\omega}_e$ бурчак тезлик билан содир бўлаётган кўчирма ҳаракатдир. Ўз-ўзидан равшанки, P нуқтанинг тезлиги нолга тенг. Бу ҳолда *жисмнинг абсолют ҳаракати P нуқтадан утувчи бирор $P\Omega$ оний ўқ атрофидаги оний айланма ҳаракат эканлигини кўрсатамиз.* Бунинг учун жисмда тезлиги айни пайтда нолга тенг бўлган иккинчи бир нуқта мавжудлигини кўрсатиш кифоя. Бурчак тезлик вектори силжувчи вектор бўлгани учун $\vec{\omega}_r$ ва $\vec{\omega}_e$ векторларни P нуқтага кўчириб, бу векторларга $PDCE$ параллелограмм қурамиз. Ҳосил бўлган C нуқтанинг тезлиги айни пайтда нолга тенг бўлишини исботлаймиз. C нуқтанинг нисбий ҳаракатдаги чизиқли тезлик вектори $\vec{v}_{C_r}$ ва кўчирма ҳаракатдаги чизиқли тезлик вектори $\vec{v}_{C_e}$, $PDCE$ параллелограмм текислигига перпендикуляр равишда бир-бирига қарама-қарши йуналган бўлиб, модуллари мос равишда



7.2-расм.

$$v_{C_r} = CD' \cdot \omega_r = 2S_{\Delta PDC},$$

$$v_{C_e} = CE' \cdot \omega_e = 2S_{\Delta PEC}$$

тенгликлар билан ифодаланади. Бунда $S_{\Delta PDC}=S_{\Delta PEC}$ бўлгани учун $\vec{v}_{C_r}=-\vec{v}_{C_e}$ экан. Тезликларни қўшиш ҳақидаги теоремага асосан:

$$\vec{v}_C=\vec{v}_{C_r}+\vec{v}_{C_e}=0$$

бўлади. Демак, C нуқтанинг айни пайтдаги тезлиги ноль бўлади.

Шундай қилиб, P ва C нуқталар орқали ўтувчи $P\Omega$ ўқдаги барча нуқталарининг оний тезликлари нолга тенг ва $P\Omega$ ўқ жисмнинг айланиш оний ўқидан иборат.

Жисмнинг абсолют ҳаракатидаги абсолют бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}$ ни аниқлаймиз. M жисмнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. M нуқтани P нуқта билан туташтириб $\vec{r}$ векторни ҳосил қиламиз. M нуқтанинг абсолют тезлиги $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, нисбий тезлиги $\vec{v}_r=\vec{\omega}_r\times\vec{r}$ ва кўчирма тезлиги $\vec{v}_e=\vec{\omega}_e\times\vec{r}$ формулалардан аниқланади. Лекин $\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_e$ бўлгани учун

$$\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{\omega}_r\times\vec{r}+\vec{\omega}_e\times\vec{r}=(\vec{\omega}_r+\vec{\omega}_e)\times\vec{r}.$$

Бу тенгликдан қуйидаги келиб чиқади.

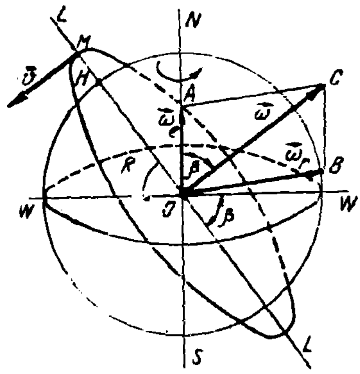
$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_r+\vec{\omega}_e. \qquad (7.2)$$

Шундай қилиб, *кесишувчи уқлар атрофидаги айланма ҳаракатларни қўшиш айланиш оний уқи атрофидаги оний айланма ҳаракатга келтирилиб, бу абсолют ҳаракатнинг бурчак тезлик вектори нисбий ва кучирма ҳаракатдаги бурчак тезлик векторларининг геометрик йиғиндисига тенг.* Умуман, жисм бир нуқтада кесишувчи n та уқлар атрофида $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, . . . , $\vec{\omega}_n$ бурчак тезликлар билан айланма ҳаракат қилса, абсолют бурчак тезлик вектори уларнинг йиғиндисига тенг бўлади:

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2+\ldots+\vec{\omega}_n.$$

20-масала. Сунъий йўлдош (Ер маркази билан бирга „қўзғалмас" юлдузларга нисбатан илгарилама ҳаракат қилувчи координаталар системасига нисбатан) $v=7{,}8$ км/с тезлик билан Ернинг айланиш йўналишида Ер атрофида доиравий орбита бўйлаб айланади (73-расм). Ер радиуси $R=6370$ км, орбита баландлиги $H=230$ км, орбита текислиги экватор текислиги билан $\beta=51°$ бурчак ташкил этади деб, йулдошнинг Ерга нисбатан бурчак тезлиги топилсин.

Ечиш. Сунъий йулдошнинг $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракати абсолют ҳаракат, Ер билан биргаликдаги айланиши кўчирма ҳаракат, Ерга нисбатан ҳаракати нисбий ҳаракатдан иборат деб қараймиз. У ҳолда кучирма ҳаракат бурчак тезлиги Ернинг ўз уқи атрофида айланишидаги бурчак тезликдан иборат:



7.3- расм.

$$\omega_e = \omega_\text{Ё} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\ \text{с}^{-1} =$$

$$= 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}. \qquad (1)$$

$\vec{\omega}_e$ вектори Ернинг SN айланиш уқи бўйлаб йуналган.

Йулдошнинг абсолют тезлиги $v = \omega(R + H)$ га тенг. Бундан абсолют ҳаракат бурчак тезлигини аниқлаймиз:

$$\omega = \frac{v}{R + H} = 118{,}18 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

Йулдошнинг LL орбита текислиги WW экватор текислиги билан β бурчак ташкил этгани учун абсолют ҳаракат бурчак тезлиги вектори $\vec{\omega}$ SN ўқ билан шу β бурчак ҳосил қилади. (7.2) формулага кура

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r.$$

Бундан фойдаланиб, аниқланган $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_e$ векторларга мос келувчи $OABC$ параллелограмм қурамиз ($\vec{\omega}$ —параллелограмм диагонали, $\vec{\omega}_e$ — унинг бир томони бўлиши керак).

$OABC$ параллелограммнинг OB томони $\vec{\omega}_r$ ни ифодалайди. Косинуслар теоремасига кўра OBC учбурчакдан $OB = \omega_r$ ни аниқлаймиз:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_e^2 + \omega^2 - 2\omega_e\omega\cos\beta} =$$

$$= \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{v}{R + H}\right)^2 - \frac{2\omega_0 v\cos\beta}{R + H}} = 113{,}75 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

$\vec{\omega}$ ва $\vec{\omega}_r$ векторларнинг экватор текислигидаги проекцияларининг тенглиги расмдан кўриниб турибди:

$$\omega\cos(90° - \beta) = \omega_r\cos(\widehat{\vec{\omega}_r, \overrightarrow{WW}}).$$

Бу тенгликдан $\vec{\omega}_r$ векторининг экватор текислиги билан ташкил қилган бурчагини аниқлаймиз:

$$\cos(\widehat{\vec{\omega}_r, \overrightarrow{WW}}) = \frac{\omega\sin\beta}{\omega_r} = 0{,}8074, \quad (\widehat{\vec{\omega}_r, \overrightarrow{WW}}) \approx 36°.$$

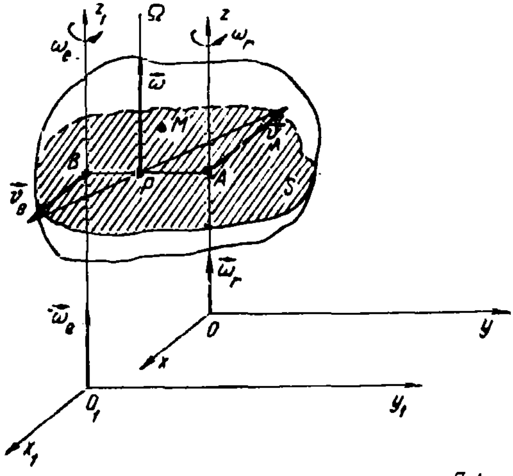
28-§. Жисмнинг параллел ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш

Жисм $Oxyz$ системага нисбатан Oz ўқ атрофида $\vec{\omega}_r$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда булсин (7.4-расм). $Oxyz$ система эса шу вақтнинг ўзида қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$ системага нисбатан Oz ўққа параллел бўлган O_1z_1 ўқ атрофида $\vec{\omega}_e$ бурчак тезлик билан айлансин. У ҳолда жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезлиги тезликларни қушиш теоремасига кўра қуйидагича аниқланади:

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Бунда нуқтанинг кўчирма ва нисбий тезликлари O_1z_1 ва Oz ўқларига перпендикуляр текисликда ётгани учун унинг абсолют тезлиги хам шу текисликда ётади. M — жисмнинг ихтиёрий нуқтасидир; демак, жисмнинг ҳамма нуқталари O_1z_1 ўққа перпендикуляр бўлган $O_1x_1y_1$ текисликка параллел текисликларда ҳаракатланади, яъни бу ҳолда жисмнинг абсолют ҳаракати текис параллел ҳаракатга келтирилади. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини тезликлар оний марказидан ўтувчи айланиш оний ўқи атрофида айланма ҳаракат деб қараш мумкин эди. Шундай қилиб, қўйилган масалани ҳал қилиш айланиш оний ўқининг ҳолатини аниқлаш ва шу оний уқ атрофидаги абсолют ҳаракатнинг оний бурчак тезлигини аниқлашга келтирилади. Айланиш оний ўқининг ҳолати албатта кўчирма ва нисбий ҳаракатларнинг айланиш йўналишига боғлиқ. Бунда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) $\vec{\omega}_e$ ва $\vec{\omega}_r$ векторлари бир хил йўналишга эга, яъни кўчирма ва нисбий ҳаракатларнинг айланиш йўналишлари бир хил;



7.4-расм.

2) $\vec{\omega}_e$ ва $\vec{\omega}_r$ векторлари қарама-қарши томонга йўналган бўлиб, миқдорлари тенг эмас;

3) ω_e ва ω_r миқдорлари тенг ва антипараллел йўналган ҳол.

Ҳар учала ҳолни алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз.

1. *Параллел ўқлар атрофида бир хил йўналишдаги айланма ҳаракатларни қўшиш.*

Кўчирма ва нисбий ҳаракатлар мос равишда O_1z_1 ва Oz ўқларнинг мусбат учидан қараганда соат стрелкаси айланишига тескари йўналишдаги айланма ҳаракатлардан иборат бўлсин. Айланиш оний уқи $P\Omega$ нинг O_1z_1 ёки Oz ўқларга параллел бўлиши равшан; шунинг учун P нуқта ҳолатини топиш кифоя.

Жисмда $O_1x_1y_1$ текисликка параллел текислик ўтказиш натижасида унда ҳосил бўлган текис шаклни S, бу текис шакл билан Oz ва O_1z_1 ўқларнинг кесишиш нуқталари мос равишда A ва B бўлсин (7.4-расм). У ҳолда A ва B нуқталарнинг тезлиги

$$v_A = \omega_e \cdot AB, \tag{7.3}$$

$$v_B = \omega_r \cdot AB \tag{7.4}$$

тенгликлар билан аниқланиб, $\vec{v}_A$ ва $\vec{v}_B$ векторлар ўзаро параллел, қарама-қарши томонга йўналган. Тезликлар оний марказини аниқлаш қоидасига кўра, бу ҳолда P нуқта AB кесма билан $\vec{v}_A$ ва $\vec{v}_B$ векторлар учларини туташтирувчи CD тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасида бўлади. Абсолют ҳаракат оний бурчак тезлигини $\vec{\omega}$ десак,

$$v_A = \omega \cdot PA, \quad v_B = \omega \cdot PB$$

ўринли бўлади. Буларни (7.3) ва (7.4) га қўямиз:

$$\omega \cdot PA = \omega_e \cdot AB, \tag{7.5}$$

$$\omega \cdot PB = \omega_r \cdot AB. \tag{7.6}$$

(7.5) ва (7.6) ифодаларни ҳадма-ҳад бўлсак,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\omega_e}{\omega_r} \tag{7.7}$$

келиб чиқади. (7.7) дан P нуқта ҳолати аниқланади.

(7.5) ва (7.6) ни ҳадма-ҳад қўшайлик:

$$\omega(PA + PB) = (\omega_e + \omega_r) \cdot AB$$

ёки

$$\omega = \omega_e + \omega_r. \tag{7.8}$$

(7.8) дан абсолют ҳаракатнинг оний бурчак тезлиги аниқланади.

Шундай қилиб, *параллел уқлар атрофида жисмнинг бир хил йўналишдаги айланма ҳаракатлари шу ўқларга парал-*

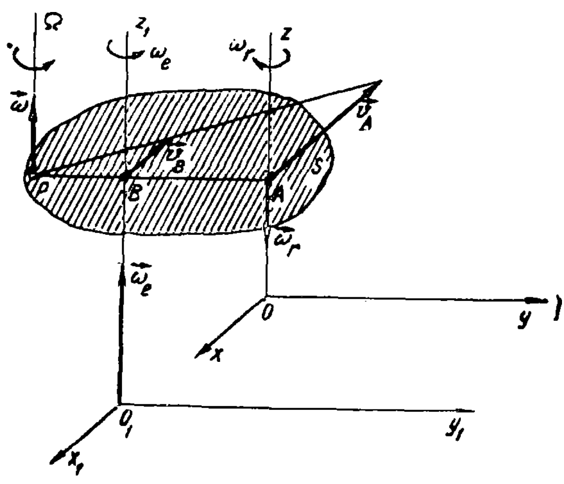
лел бўлган, ҳолати (7.7) тенглик билан аниқланувчи айланиш оний ўқи атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат; бу абсолют ҳаракатнинг оний бурчак тезлиги кучирма ва нисбий ҳаракатлар бурчак тезликларининг арифметик йиғиндисига тенг.

Агар жисм n та параллел ўқлар атрофида бир томонга йўналган $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n$ бурчак тезликлар билан айланма ҳаракатда бўлса, абсолют ҳаракатнинг оний бурчак тезлиги уларнинг йиғиндисига тенг бўлади:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n.$$

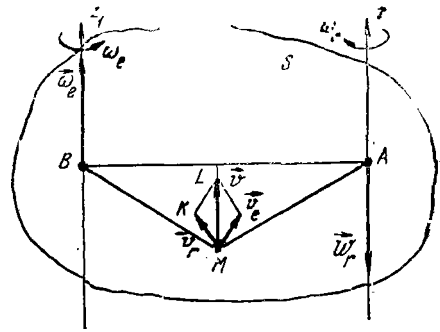
2. *Бурчак тезликлари миқдор жиҳатдан тенг бўлмай, қарама-қарши томонга йўналган айланма ҳаракатларни қўшиш.* Жисмнинг нисбий ҳаракати Oz ўқнинг мусбат учидан қараганда соат стрелкаси айланиши бўйича, кучирма ҳаракат эса O_1z_1 ўқнинг мусбат учидан қараганда соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда ҳамда $\omega_e > \omega_r$ бўлсин (7.5-расм).

Бу ҳолда ҳам аввалги 1-ҳолдаги сингари мулоҳазалар юритиб, *жисмнинг абсолют ҳаракати P нуқтадан ўтувчи $P\Omega$ айланиш оний ўқи атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат бўлишини, бу оний айланма ҳаракат бурчак тезлиги кучирма ва нисбий ҳаракатлар бурчак тезликларининг алгебраик йиғиндисига тенглигини*, яъни $\omega = \omega_e - \omega_r$ эканлигини *исбот қилиш мумкин; айланиш оний ўқининг ҳолати* (7) *тенглик билан аниқланиб, P нуқта AB оралиқда эмас, балки қайси ҳаракатнинг бурчак тезлиги катта бўлса, шу томонда AB кесма ташқарисида жойлашади.* Абсолют ҳаракатнинг бурчак тезлиги, *берилган айланиш ўқларига параллел* равишда, бурчак тезлиги катта бўлган ҳаракатнинг бурчак тезлиги векторига мос йўналади.



7.5- расм.

3. *Бурчак тезликлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналишлари параллел, қарама-қарши томонга айланувчи ҳаракатларни қўшиш.* Бу ҳолда жисмнинг абсолют ҳаракатини аниқлаш учун S текис шаклдаги ихтиёрий M нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз (7.6-расм). Тезликларни қўшиш теоремасига кўра $\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.



7.6- расм

$\vec{v}_e$ кўчирма тезлик миқдори

$$v_e = MB \cdot \omega_e \tag{7.9}$$

тенглик билан аниқланиб, S текис шакл текислигида MB га перпендикуляр йўналган. $\vec{v}_r$ нисбий тезлик миқдори

$$v_r = MA \cdot \omega_r \tag{7.10}$$

га тенг ва $\vec{v}_r \perp MA$.

$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ тенгликка кўра қурилган MKL учбурчак билан BMA учбурчак ўхшашдир; чунки $KL \perp BM$, $KM \perp MA$ ва $\widehat{MKL} = BMA$. (7.9), (7.10) ифодаларни ҳамда MKL ва BMA учбурчакларнинг ухшашлигини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

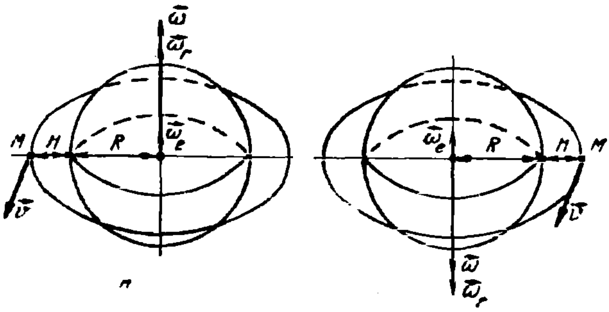
$$\frac{v}{AB} = \frac{v_e}{BM} = \frac{v_r}{MA} = \omega_e.$$

Бундан

$$v = \omega_e \cdot AB. \tag{7.11}$$

MKL ва BMA ўхшаш учбурчакларнинг иккитадан томонлари мос равишда ўзаро перпендикуляр бўлгани учун AB ва ML томонлари ҳам ўзаро перпендикулярдир. Демак, $\vec{v}$ абсолют тезлик вектори AB кесмага перпендикуляр. M — текис шаклнинг ихтиёрий нуқтаси булганидан бу шакл барча нуқталарининг абсолют тезликлари AB га перпендикуляр ва миқдорлари узаро тенг. Демак, S кесимнинг, ўз навбатида жисмнинг абсолют ҳаракати илгарилама ҳаракатдан иборат экан.

Параллел ўқлар атрофида қарама-қарши йўналишда бир хил бурчак тезлик билан содир бўлувчи икки айланма ҳаракат жуфт айланиш деб ҳам аталади; (7.11) тенглик би-



7.7- расм.

лан аниқланувчи v миқдор эса *жуфт айланиш моменти* дейилади. Шундай қилиб, жуфт айланиш илгарилама ҳаракатга эквивалент бўлиб, *бундай ҳаракатдага жисм нуқтасининг тезлиги жуфт айланиш моментига тенг.*

21- масала. 20- масалада Сунъий йўлдош доиравий орбита буйлаб экватор текислигида ҳаракатланади деб олиб, у ғарбдан шарққа томон (7.7- расм, *а*) ва шарқдан ғарбга томон (7.7- расм, *б*) учаётган ҳоллар учун Сунъий йулдошнинг Ерга нисбатан бурчак тезлиги аниқлансин.

Ечиш. Ер ғарбдан шарққа қараб ўз уқи атрофида айланади; бунда кучирма ҳаракат бурчак тезлиги $\omega_e = 7,27 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, абсолют ҳаракат бурчак тезлиги $\omega = \dfrac{v}{R+H} = 118,18 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ эканлиги 20- масаладан бизга аён.

Агар Сунъий йўлдош ғарбдан шарққа қараб экватор текислигида ҳаракатланса, $\vec{\omega}_e$, $\vec{\omega}$ ва шу билан бирга ω_r векторларининг йуналишлари бир хил булади. Бу ҳолда бир хил йўналишдаги ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларни қушишда ҳосил қилинган (7.8) формуладан фойдаланамиз:

$$\omega = \omega_e + \omega_r.$$

Бу тенгликдан $\omega_r = \omega - \omega_e = 110,91 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ ҳосил бўлади.

Сунъий йўлдош экватор текислигида шарқдан ғарбга қараб учса, абсолют ҳаракат бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}$ билан нисбий ҳаракат бурчак тезлиги вектори $\vec{\omega}_r$ кўчирма ҳаракат бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}_e$ га карама- қарши йўналади.

Бу ҳолда кўчирма ва нисбий ҳаракатлар қарама- қарши йўналишда бўлгани учун абсолют ҳаракат бурчак тезлиги қуйидагича аниқланади:

$$\omega = \omega_r - \omega_e$$

Бундан $\omega_r = \omega + \omega_e = 125,45 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ келиб чиқади.

СТАТИКА

VIII боб. СТАТИКА АСОСЛАРИ

29-§. Статиканинг асосий тушунчалари

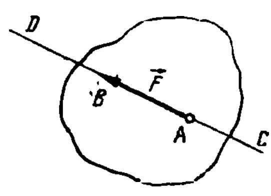
Статиканинг асосий тушунчаларидан бири кучдир. *Механикада икки ёки ундан ортиқ жисмлар узаро таъсирининг миқдорий улчовини белгиловчи катталик куч дейилади.* Кучнинг жисмга таъсири *кучнинг йўналиши, миқдори ва қуйилиш нуқтаси* билан аниқланади. Тинч ҳолатда турган эркин жисм куч таъсирида олган ҳаракатининг йўналиши кучнинг йўналишини белгилайди. Кучнинг миқдорини аниқлашда уни куч бирлиги учун қабул қилинган бирор катталик билан таққосланади. Куч жисмнинг қайси нуқтасига таъсир этса, шу нуқта кучнинг қўйилиш нуқтаси бўлади.

Шундай қилиб, куч вектор катталик бўлиб, унинг узунлиги чизмада маълум масштабда кучнинг миқдорини, стрелканинг йўналиши эса кучнинг йўналишини ифодалайди ва $\vec{F}=\vec{AB}$ вектор орқали тасвирланади. *Куч вектори бўйича уткизилган тўғри чизиқ (CD) кучнинг таъсир чизиғи дейилади* (8.1-расм). Куч, одатда, лотин алифбесидаги бош ҳарфлар билан белгиланади.

Жисмга бир неча $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ кучлар таъсир этса, бу кучлар тўплами *кучлар системаси* дейилади ва $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ тарзида белгиланади.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ ва $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \ldots, \vec{Q}_k)$ кучлар системаларининг ҳар бири жисмга бир хил таъсир кўрсатса, улар *ўзаро эквивалент кучлар системаси* дейилади. Кучлар системасининг ўзаро эквивалентлигини қуйидаги куринишда ёзамиз:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \backsim (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \ldots, \vec{Q}_k).$$



8.1- расм.

Агар кучлар системаси битта кучга эквивалент бўлса, бу куч берилган кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси дейилади. Масалан,

$(\vec{F}_1)$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n) \propto \vec{R}$ бўлса, $\vec{R}$ — тенг таъсир этувчи, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ эса тенг таъсир этувчининг *ташкил этувчиларидир.*

Бирор кучлар системаси таъсирида жисм тинч ҳолатда турса ёки унинг барча нуқталари узгармас ва бир хил тезлик билан ҳаракатланса, бундай кучлар системаси *мувозанатлашган* ёки *нолга эквивалент кучлар системаси* дейилади ҳамда қуйидаги куринишда ёзилади:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \propto 0.$$

Мувозанатлашган кучлар системасини ташкил этувчи кучлардан бири қолган ташкил этувчиларини *мувозанатловчи куч* бўлади.

Бир неча жисмдан ташкил топган системага таъсир этувчи кучларни *ички* ва *ташқи кучларга* ажратиш мумкин. *Системани ташкил этувчи жисмларнинг узаро таъсир кучлари ички кучлар дейилади. Системага таъсир этувчи кучлар шу система таркибига кирмайдиган жисмлар орқали қуйилган бўлса, улар ташқи кучлар дейилади.*

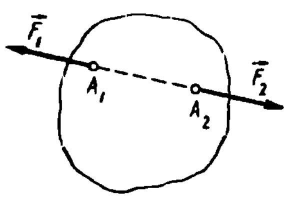
Статикада асосан икки хил масала ҳал қилинади. Кучлар системасини содда ҳолга келтириш *статиканинг биринчи асосий масаласидан* иборат. Жисмнинг кучлар системаси таъсиридаги мувозанат шартларини аниқлаш эса *статиканинг иккинчи асосий масаласидир.*

30-§. Статика аксиомалари

Статика бир неча аксиомаларга асосланган.

1-аксиома (икки кучнинг мувозанати ҳақидаги аксиома): *жисм икки куч таъсирида мувозанатда булиши учун бу кучлар миқдор жиҳатдан тенг, бир тўғри чизиқ буйлаб қарама-қарши йўналган бўлиши зарур ва етарлидир* (8.2-расм).

2-аксиома (мувозанатлашувчи кучларни қўшиш ёки айириш ҳақидаги аксиома): *жисмга қўйилган кучлар системасига мувозанатлашган кучлар системасини қўшиш ёки ундан айириш билан ҳосил қилинган система берилган кучлар системасига эквивалент бўлади.* Масалан, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ — берилган кучлар системаси, $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \ldots, \vec{Q}_k)$ система эса мувозанатлашган кучлар системаси бўлсин. У ҳолда $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \propto (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \ldots, \vec{Q}_k)$.



8.2-расм.

Биринчи ва иккинчи аксиомадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1-натижа. *Кучнинг миқдор ва йуналишини ўзгартирмай ўзининг таъсир чизиғи бўйлаб жисмнинг бошқа нуқтасига кўчириш билан кучнинг жисмга таъсири ўзгармайди.*

Исбот. Жисмнинг бирор A нуқтасига $\vec{F}$ куч қўйилган булсин (8.3- расм). Жисмда олинган ва $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғида ётувчи B нуқтага шундай $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ мувозанатлашган кучлар системасини қўямизки, бу системани ташкил қилувчи $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларнинг миқдорлари $\vec{F}$ кучнинг миқдорига тенг, таъсир чизиқлари эса $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғи билан умумий бўлсин. У ҳолда 2-аксиомага асосан: $\vec{F} \backsim (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Биринчи аксиомага кура $\vec{F}$ ва $\vec{F}_2$ кучлар мувозанатлашган кучлар системасини ташкил қилади. Уларни ташлаб юборамиз. Натижада жисмга таъсир этувчи битта, $\vec{F}$ кучга эквивалент бўлган ва B нуқтага қўйилган $\vec{F}_1$ куч қолади. Натижа исботланди.

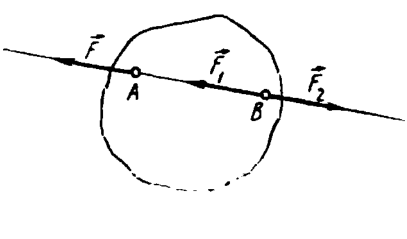
3-аксиома (кучлар параллелограми ҳақидаги аксиома): *жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган ва бир тўғри чизиқда ётмайдиган икки кучнинг тенг таъсир этувчиси, миқдор ва йўналиш жиҳатдан шу кучларга қурилган параллелограммнинг кучлар қўйилган нуқтадан ўтувчи диагонали билан ифодаланади* (8.4- расм).

Элементар физика курсидан маълум бўлган бу қоида қуйидаги геометрик тенглик билан ифода этилади:

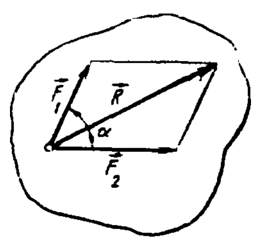
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{8.1}$$

$\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар йўналишлари орасидаги бурчакни α билан белгиласак, тенг таъсир этувчининг модулини косинуслар теоремасига асосан топишимиз мумкин:

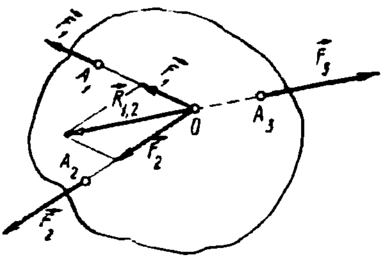
$$R = \sqrt{F_1^2 + {}_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \tag{8.2}$$



8.3- расм.



8.4- расм.



8.5- расм.

4-аксиома (таъсир ва акс таъсир ҳақидаги аксиома): *ҳар қандай таъсирга унга тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қаши томонга йўналган акс таъсир мос келади.* Бу ерда шуни таъкидлаб ўтиш кераккй, умуман олганда, таъсир ва акс таъсирни белгиловчи кучлар бошқа-бошқа жисмларга қўйилган бўлгани учун улар мувозанатлашган кучлар системасини ташкил қилмайди.

2-натижа. *Мувозанатдаги жисмнинг ихтиёрий икки нуқтаси бир-бирига ўзаро тенг ва қарама-қарши йўналган икки куч билан таъсир қилиб, бу кучлар мувозанатлашган системани ташкил қилади.* Ҳақиқатан, 4-аксиомага асосан жисм ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги таъсир кучлар ўзаро тенг бўлиб, қарама-қарши йўналган бўлади. 1-аксиомага асосан эса, жисм мувозанатда бўлгани учун бу кучлар мувозанатлашган бўлади.

3-натижа. *Жисмнинг мувозанати фақат ташқи кучлар билангина белгиланади.* Ҳақиқатан, мувозанати текширилаётган жисм нуқталари орасидаги ўзаро таъсир кучлар (ички кучлар) 2-натижага асосан мувозанатлашувчи кучлар системасини ташкил қилади. 2-аксиомага асосан бу системани тушириб қолдириш мумкин. У ҳолда жисмга таъсир қилувчи ташқи кучларгина қолади.

4-натижа. *Бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган учта куч ўзаро мувозанатлашса, уларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишади.*

Исбот. A_1, A_2, A_3 нуқталарга қўйилган $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ кучлар бир текисликда жойлашиб, уларнинг таъсир чизиқлари ўзаро параллел бўлмасин (8.5-расм) ва

$$(\vec{F}_1), \vec{F}_2, \vec{F}_3) \backsim 0 \qquad (8.3)$$

шарт бажарилсин. Бу учта кучнинг таъсир чизиқлари битта нуқтада кесишишини исботлаймиз. $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар бир текисликдаги параллел бўлмаган кучлар бўлганидан, уларнинг таъсир чизиқларини давом эттирсак, албатта бирор нуқтада кесишади; бу кесишиш нуқтаси O бўлсин. 1-натижага биноан $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларни A_1 ва A_2 нуқталардан O нуқтага кўчириб, кучлар параллелограми аксиомасига кўра қўшсак, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \backsim$ $\backsim \vec{R}_{1\,2}$ ҳосил бўлади. У ҳолда (8.3) ифода

$$(\vec{R}_{1,2}, \vec{F}_3) \propto 0$$

кўринишни олади. Бунда $\vec{R}_{1,2}$ куч O нуқтага қўйилгани учун 1-аксиомага кура $\vec{F}_3$ кучнинг таъсир чизиғи ҳам албатта O нуқтадан утиши шарт. Демак, берилган учта кучнинг таъсир чизиқлари битта O нуқтада кесишади. Бу 4-натижа *уч кучнинг мувозанати ҳақидаги теорема* деб аталади.

31-§. Боғланишлар. Боғланиш турлари ва реакция кучлари

Жисмнинг фазодаги ҳаракати бирор йуналишда чекланган булса, у боғланишдаги ёки эркин булмаган жисм дейилади.

Ҳаракатни чекловчи сабаб боғланиш дейилади.

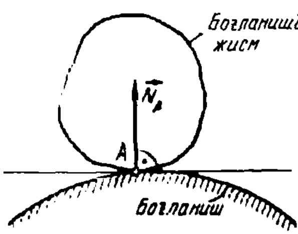
Боғланишнинг жисмга кўрсатадиган механик таъсирини ифодаловчи кучга боғланиш реакция кучи дейилади. Боғланиш жисм ҳаракатига қайси йўналишда тусқинлик қилса, реакция кучи шу йўналишга тескари томон йуналган бўлади.

Статиканинг қонун ва қоидалари асосан эркин жисм учун берилади. Боғланишдаги жисмга бу қонун-қоидалар қўлланилишидан аввал, у эркин жисм кўринишига келтирилиши керак. Бунда қуйидаги *боғланиш аксиомасидан* фойдаланилади: *боғланишдаги жисмни эркин жисм ҳолига келтириш учун унга таъсир этувчи кучлар қаторига боғланиш реакция кучини қўшиб олиш кифоя.*

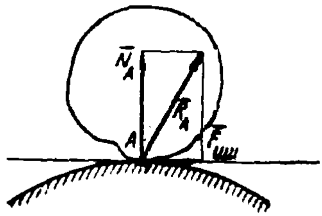
Табиатда кўпинча боғланишдаги жисмларга дуч келамиз. Уларни эркин ҳолга келтиришда боғланиш турига қараб, реакция кучлари қандай йўналганини аввалдан кўрсата билиш муҳим аҳамиятга эга. Боғланишлар қаттиқ ва эластик жисмлар воситасида қўйилган булиши мумкин. Шулардан айрим боғланиш турларини ва бу боғланишда реакция кучлари қандай йуналтирилиши билан танишамиз.

1. Жисм силлиқ сиртнинг A нуқтасига таянган бўлсин (8.6-расм). Бу ҳолда сирт, жисмнинг сиртга ўтказилган нормал бўйича ҳаракатини чеклагани сабабли, реакция кучи A нуқтада сиртга утказилган нормал бўйича йўналади ва *нормал реакция кучи* дейилиб, $\vec{N}_A$ каби белгиланади. Агар силлиқ сирт ўрнида жисм силлиқ текисликка бир нуқтада таянган бўлса, реакция кучи шу текисликка таянч нуқтасида утказилган перпендикуляр бўйлаб йўналади.

2. Агар жисм таянган сирт ғадир-будир бўлса (8.7-расм), $\vec{N}_A$ нормал реакция кучидан ташқари сиртга A нуқтада ўтказилган уринма бўйича йўналган реакция кучини ҳам қўшиш керак. $\vec{R}_A$ реакция кучининг сиртга ўтказилган уринма бўйича



8.6 расм.



8.7- расм.

йўналган $\vec{F}_{иш}$ ташкил этувчиси ишқаланиш кучи дейилади. Ишқаланиш кучи билан нормал реакция кучи узаро

$$F_{иш} = f \cdot N_A$$

тенгликка кўра боғланган; бунда f — *ишқаланиш коэффициенти* дейилади.

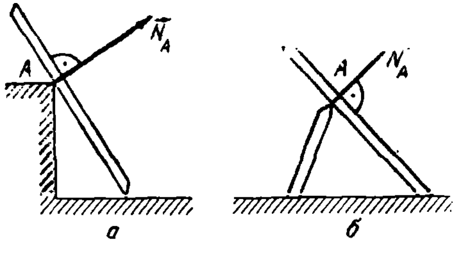
3. Жисм (балка) икки ёқли бурчакнинг қиррасига ёки стерженнинг ўткир учига A нуқтада таянган бўлиб, жисм ва боғланиш орасида ишқаланиш бўлмаса, реакция кучи A нуқтада жисмга ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади (8.8- расм, *а*, *б*).

4. Жисм эластик жисмлар (ип, занжир ва ҳ. қ.) орқали боғланган булса (8.9- расм), боғланиш реакция кучи боғланиш буйлаб йўналади.

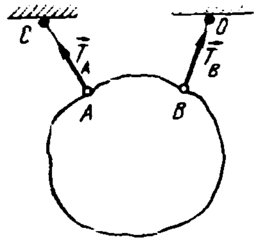
5. Жисм шарнир воситасида боғланган. Агар жисм бириктирилган иккинчи жисмга нисбатан бирор ўқ ёки нуқта атрофида айланиши мумкин бўлса, бундай боғланиш *шарнирли боғланиш* дейилади.

Шарнир ўқи ҳаракатланиши мумкин бўлса, у *қўзғалувчи шарнирли боғланиш* дейилади. Қўзғалувчи шарнирли боғланиш реакция кучи шарнирнинг таянч текислигига утказилган перпендикуляр бўйлаб йуналади. Қўзғалувчи шарнирли боғланиш 8.10- расмдаги каби тасвирланади.

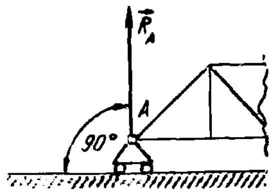
Шарнир ўқи бириктирилган жисм қўзғалмас бўлган ҳолда боғланиш *қўзғалмас шарнирли боғланиш* дейилади. Қўзғалмас



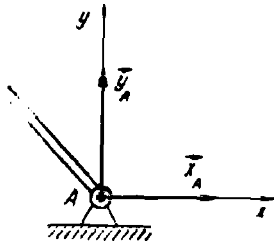
8.8- расм.



8.9- расм.



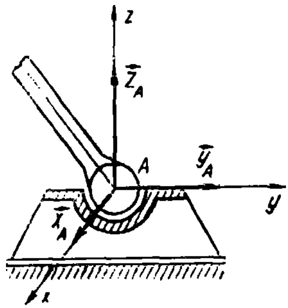
8.10- расм.



8.11- расм.

шарнирли бошланиш цилиндрик ёки сферик шарнир бўлиши мумкин.

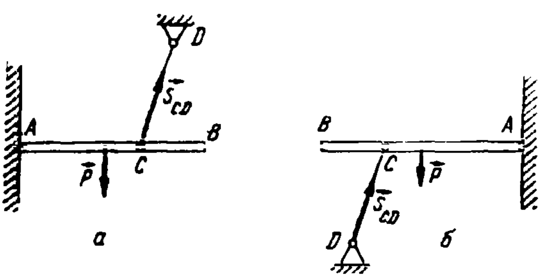
Цилиндрик шарнирли (8.11-расм) боғланишнинг реакция кучи шарнир ўқига перпендикуляр текисликда жойлашади, лекин унинг йўналишини аввалдан кўрсатиб бўлмайди. Бу ҳолда реакция кучининг ўзаро ҳамда шарнир ўқига перпендикуляр бўлган иккита ўқ бўйича ташкил этувчилари ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$) олинади.



8.12- расм.

Сферик шарнирли боғланиш (8.12-расм) реакция кучининг йўналишини ҳам аввалдан кўрсатиб бўлмайди; бу ҳолда реакция кучининг ўзаро перпендикуляр бўлган учта ўқдаги ташкил этувчилари ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$) олинади.

6. Жисм вазнсиз стержень воситасида шарнирли боғланган бўлсин. Жисмни боғловчи стерженнинг оғирлиги жисм оғирлигига нисбатан жуда кичик булиб, стержень учларидан бошқа нуқталарига ҳеч қандай куч таъсир этмаса, у *вазнсиз стержень* дейилади. Вазнсиз стержень реакция кучи боғланиш бўйича йўналади. Бунда стержень чузиладиган бўлса, реакция кучи жисмдан стержень бўйлаб ташқарига (8.13-расм, *а*),



8.13- расм.

қисиладиган бўлса, стержень бўйлаб жисмга қараб (8.13-расм, б) йўналади.

Боғланишларнинг колган турлари билан кейинроқ, конкрет масалалар ечишда танишамиз.

32-§. Бир нуқтага қўйилган кучлар системаси

Бир нуқтага қўйилган ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, . . . , $\vec{F}_n$) кучлар системаси учун статиканинг биринчи ва иккинчи масалалари қандай ҳал қилиниши билан танишамиз. Аниқлик учун $n=4$ булсин, яъни A нуқтага қўйилган $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ кучлар системаси берилганида (8.14-расм, a), аввал бу кучларни қўшиш, яъни содда ҳолга келтириш билан шуғулланамиз. Бунинг учун $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларни параллелограмм аксиомаси буйича қўшиб, уларга эквивалент бўлган $\vec{R}_{1,2}$ кучни ҳосил қиламиз:

$$\vec{R}_{1,2}=\vec{F}_1+\vec{F}_2.$$

Сўнгра $\vec{R}_{1,2}$ куч билан $\vec{F}_3$ кучга параллелограмм қуриб, $\vec{R}_{1,2,3}$ ни аниқлаймиз:

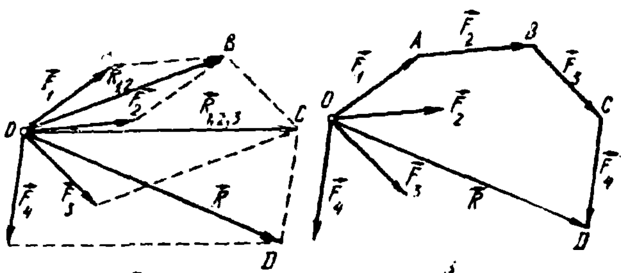
$$\vec{R}_{1,2,3}=\vec{R}_{1,2}+\vec{F}_3=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$$

Ниҳоят, $\vec{R}_{1,2,3}$ билан $\vec{F}_4$ ни қўшамиз:

$$\vec{R}=\vec{R}_{1,2,3}+\vec{F}_4=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4.$$

Агар бир нуқтага қўйилган n та кучлар берилган бўлса, охирги тенглик қуйидаги қўринишда ёзилади:

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \qquad (8.4)$$



8.14-расм.

Шундай қилиб, *бир нуқтага қўйилган кучлар системасини қўшиш натижасида бу кучлар битта куч — тенг таъсир этувчига келтирилар экан:*

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \backsim \vec{R}$$

(8.4) га биноан, *бир нуқтага қўйилган кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси ташкил этувчи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлиб, у мазкур кучлар қўйилган нуқтага қўйилган бўлади.*

Бир нуқтага қўйилган кучлар системасини қўшишда параллелограмм усули ўрнига векторларни қўшишдаги учбурчак усулидан ҳам фойдаланиш мумкин. Бунинг учун O нуқтага қўйилган $\vec{F}_1$ кучнинг A учига (8.14- расм, *б*) $\vec{F}_2$ кучни ўзига тенг ва параллел қилиб қўямиз, сўнгра бу куч учи B нуқтага $\vec{F}_3$ кучни, ниҳоят, $\vec{F}_3$ кучнинг C учига $\vec{F}_4$ кучни қўйиб, бошланғич O нуқтани $\vec{F}_4$ кучнинг D учи билан туташтириш натижасида $\vec{R}$ тенг таъсир этувчини ҳосил қиламиз. Кучларни учбурчак усули билан қўшишда ҳосил бўлган $OABC$ кўпбурчак *куч кўпбурчаги* дейилади. Агар куч кўпбурчагида куч стрелкалари кетма-кет йўналган бўлса, у *ёпиқ куч кўпбурчаги* дейилади.

(8.4) ифодани Декарт координата ўқларига проекциялайлик:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \tag{8.5}$$

Агар бир нуқтага қўйилган кучларнинг координата ўқларидаги проекциялари F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} аниқ бўлса, бундай кучлар системаси тенг таъсир этувчисининг координата ўқларидаги проекциялари R_x, R_y, R_z (8.5) формулалар билан аниқланиши мумкин. У ҳолда тенг таъсир этувчи модули

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2} \tag{8.6}$$

формуладан, йўналиши эса

$$\cos(\vec{R}, \widehat{\ \vec{i}}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \widehat{\ \vec{j}}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \widehat{\ \vec{k}}) = \frac{R_z}{R} \tag{8.7}$$

йўналтирувчи косинуслар орқали аниқланади. Кучни координата ўқларидаги проекцияларига кўра аниқлашга *кучни аналитик усулда аниқлаш* дейилади. *Бир нуқтага қўйилган кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини* (8.6) ва (8.7) формулалар асосида аниқлаш уни *аналитик усулда аниқлаш* дейилади.

Агар бир нуқтага қуйилган кучлар системаси таъсиридаги жисм мувозанатда бўлса, бу кучларни қушсак, $\vec{R}=0$ келиб чиқади ва аксинча, $\vec{R}=0$ бўлса, берилган кучлар системаси мувозанатлашувчи кучлар системасини ташкил этади. Бу ҳолда (8.4) дан

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0 \tag{8.8}$$

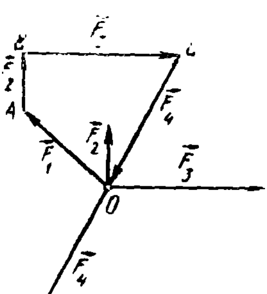
келиб чиқади. (8.8) бир нуқтага қўйилган кучлар системаси мувозанатининг зарурий ва етарли шартларини ифодалайди: *бир нуқтага қуйилган кучлар системаси мувозанатда булиши учун ташкил этувчи кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.*

Агар кучлар системасининг мувозанат ҳолатида берилган кучларга куч кўпбурчагини қурсак, у $OABCO$ ёпиқ купбурчакдан иборат булади (8.15-расм). Шунга кўра, *бир нуқтага қуйилган кучлар системаси мувозанатда булиши учун ташкил этувчи кучларга қурилган куч купбурчагининг ёпиқ булиши зарур ва етарлидир. Бу бир нуқтага қуйилган кучлар системаси мувозанати шартларининг геометрик усулда ифодаланишидир.*

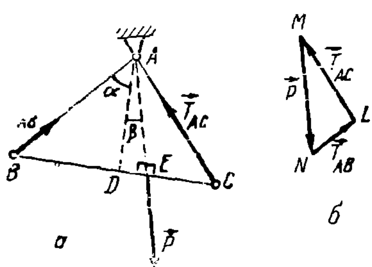
$\vec{R}=0$ булганда (8.6) тенгликдан

$$\sum_{i=1}^{n}F_{ix}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}F_{iy}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}F_{iz}=0 \tag{8.9}$$

келиб чиқади; аксинча, (8.9) ўринли бўлса, $R=0$ келиб чиқади. (8.9) муносабатлар *бир нуқтага қуйилган кучлар системаси мувозанати зарурий ва етарли шартларининг аналитик усулда ифодаланишидир.* Бинобарин, *бир нуқтага қўйилган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун ташкил этувчи кучларнинг узаро перпендикуляр учта уқдаги про-*



8.15- расм.



8.16- расм.

екцияларининг алгебраик йиғиндилари алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Изоҳ. Ташкил этувчиларининг таъсир чизиқлари битта нуқтада кесишадиган кучлар системаси *кесишувчи кучлар системаси* дейилади. Кесишувчи кучлар системаси ташкил этувчиларини 30-§ даги 1-натижага кура таъсир чизиқларининг кесишиш нуқтасига кўчирилса, бир нуқтага қуйилган кучлар системаси ҳосил булади. Бинобарин, кесишувчи кучлар системасини қушиш бир нуқтага қуйилган кучлар системасини қушишга келтирилиб, кесишувчи кучлар системаси таъсиридаги жисмнинг мувозанат шартлари бир нуқтага қуйилган кучлар системасининг мувозанат шартлари билан бир хил булади.

22-масала. Ўзаро шарнирлар билан бириктирилган стерженлардан қурилган ABC учбурчак A нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида айланиши мумкин (8.16-расм, *а*). BC стерженга оғирлиги P бўлган E юк маҳкамланган; бунда $AB=AC$, $AD\perp BC$, $\widehat{BAC}=2\alpha$. Стерженлар оғирликларини ҳисобга олмай, системанинг мувозанат ҳолатида AD билан AE вертикал орасидаги бурчак $\widehat{DAE}=\beta$ деб олиб, шу ҳолат учун AB ва AC стерженлардаги зўриқишлар аниқлансин

Ечиш. BC стержень мувозанатини текширамиз. Унинг E нуқтасидаги юкнинг оғирлиги — $\vec{P}$ кучни расмда тасвирлаймиз:

BC стерженга қўйилган AB ва AC боғланишларнинг таъсирини T_{AB}, T_{AC} реакция кучлари билан алмаштирамиз.

$\vec{P}$ куч AE вертикал билан бир тўғри чизиқда ётгани учун $\vec{P}$, $\vec{T}_{AB}$, $\vec{T}_{AC}$ кучларнинг таъсир чизиқлари A нуқтада кесишади, яъни BC стержень кесишувчи кучлар системаси таъсирида мувозанатда бўлади. Бундай кучлар системасининг мувозанат шартига кура $\vec{P}$, $\vec{T}_{AB}$, $\vec{T}_{AC}$ кучларга қурилган куч кўпбурчаги (учбурчаги) ёпиқ бўлиши керак. Куч кўпбурчаги қуриш учун ихтиёрий M нуқтага миқдор ва йўналиши бўйича берилган $\vec{P}$ кучни қўямиз (8.16-расм, *б*). $\vec{P}$ куч векторининг боши M ва учи N нуқталардан, мос равишда $\vec{T}_{AC}$ ва $\vec{T}_{AB}$ кучлар (AC ва AB стерженлар) га параллел ML ва NL тўғри чизиқлар ўтказамиз. Натижада NL томони $\vec{T}_{AB}$ кучни, LM томони эса $\vec{T}_{AC}$ кучни ифодаловчи MNL ёпиқ куч учбурчаги ҳосил бўлади.

MNL учбурчакда $\widehat{MNL}=\alpha+\beta$, $\widehat{NML}=\alpha-\beta$ бўлгани учун $\widehat{NLM}=180^\circ-2\alpha$; у ҳолда синуслар теоремасига кўра:

$$\frac{T_{AB}}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{T_{AC}}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{P}{\sin(180^\circ-2\alpha)}$$

$\sin(180° - 2\alpha) = \sin 2\alpha$ бўлишини эътиборга олиб, бу тенгликлардан

$$T_{AB} = \frac{P \sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha}, \quad T_{AC} = \frac{P \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha}$$

муносабатларни ҳосил қиламиз.

AB, *AC* стерженлардаги зўриқишлар миқдор жиҳатдан шу стерженларнинг реакция кучларига тенг булали.

23-масала. Оғирлиги $P = 150$ кН, симметрия уқи *BD* булган бир жинсли *ABC* ферманинг (8.17-расм, *а*) *A* ва *C* нуқталаридаги таянч реакциялари аниқлансин; $\alpha = 30°$, $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 60°$ деб олинсин.

Ечиш. *ABC* ферма бир жинсли булгани учун унинг оғирлик кучи $\vec{P}$ симметрия уқи *BD* бўйича йуналган. *C* қузғалувчи шарнир реакция кучи $\vec{R}_C$ таянч текислигига ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналган. *A* қўзғалмас шарнирнинг реакция кучи $\vec{R}_A$ йўналишини аниқлашда уч кучнинг мувозанати ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. $\vec{P}$ ва $\vec{R}_C$ кучларнинг таъсир чизиқлари *B* нуқтада кесишгани ва ферма бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган учта куч $\vec{R}_A$, $\vec{R}_C$, $\vec{P}$ таъсирида мувозанатда бўлгани учун *A* нуқтага қўйилган $\vec{R}_A$ кучнинг таъсир чизиғи ҳам *B* нуқтадан ўтиши керак. Шундай қилиб, кесишувчи кучлар системаси ҳосил бўлди. Мувозанат шартига кўра $\vec{P}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_C$ кучлардан *MLN* ёпиқ куч учбурчагини ясаймиз (8.17-расм, *б*). Бу куч учбурчагида $\widehat{NML} = \widehat{MNL} = 30°$ бўлгани учун у тенг ёнли учбурчакдир. Бинобарин, $R_A = R_C$.

$LK \perp MN$ ўтказсак, $KN = \frac{MN}{2} = \frac{P}{2}$. **У ҳолда *KLN* тўғри** бурчакли учбурчакдан:

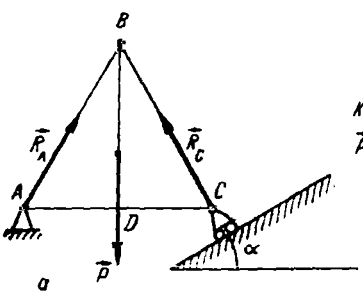
$$\frac{KN}{NL} = \cos 30° \text{ ёки } NL = \frac{KN}{\cos 30°}; \text{ бунда } NL = R_A$$

булганидан

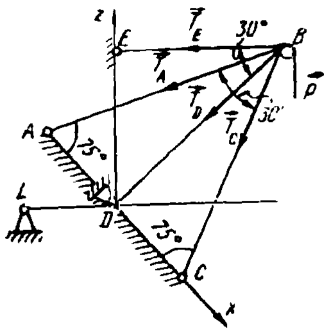
$$R_A = \frac{P}{2 \cdot \cos 30°} \approx 86{,}6 \text{ кН}.$$

Шундай қилиб, $R_A = R_C \approx 86{,}6$ кН.

24-масала. Оғирлиги $P = 10$ кН бўлган *K* юк *ABC* кранга урнатилган *B* ва *D* блоклар орқали ўтказилган тросс ёрдамида кўтарилиши мумкин. *AB* ва *BC* вазнсиз стерженлар ва *BE* горизонтал троссдаги зуриқишлар аниқлансин (8.18-расм). *B* ва *D* блокларнинг ўлчамлари, шунингдек, *B* блокдаги ишқаланиш



8.17- расм.



8.18- расм.

эътиборга олинмасин. Қуйидагилар берилган: $\widehat{ABC} = \widehat{DBE} = 30°$, $AD = DC$, $AB = BC$.

Ечиш. B нуқтага осилган K юкнинг мувозанатини текширамиз. B нуқтага қўйилган $\vec{P}$ кучни расмда тасвирлаймиз. BE, BD тросслар ва AB, CB стерженлар орқали қуйилган боғланишларни реакция кучлари билан алмаштириб, уларни мос равишда, $\vec{T}_E$, $\vec{T}_D$, $\vec{T}_A$, $\vec{T}_C$ билан белгилаймиз; стерженларни ҳозирча чўзилади деб фараз қиламиз. Натижада бир нуқтага қўйилган кучлар системаси ҳосил бўлади.

Координата бошини D нуқтада олиб, Декарт координата ўқларини утказамиз ва бир нуқтага қуйилган кучлар системасининг (8.9) кўринишдаги мувозанат шартларини тузамиз:

$$\sum F_{ix} = 0: T_C \cos 75° - T_A \cos 75° = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0: -T_D \cos 30° - T_E - T_C \cos 15° \cdot \cos 30° - T_A \cos 15° \cdot \cos 30° = 0, \qquad (2)$$

$$\sum F_{iz} = 0: -P - T_C \cos 15° \cdot \cos 60° - T_A \cos 15° \cdot \cos 60° - T_D \cos 60° = 0 \qquad (3)$$

((2) ва (3) тенгламаларни тузишда $\vec{T}_A$ ва $\vec{T}_C$ аввал yDz текислигига, сўнгра координата ўқларига проекцияланади).

(1) тенгламадан $T_A = T_C$ келиб чиқади.

B блокдаги ишқаланиш эътиборга олинмагани учун $T_D = P = 10$ кН.

(3) тенгламадан T_A ни аниқлаймиз:

$$T_A = -\frac{P + T_D \cos 60°}{2 \cos 15° \cos 60°} \approx -15{,}6 \text{ кН}.$$

Шундай қилиб, $T_A = T_C \approx -15{,}6$ кН; бундаги манфий ишора AB ва CB стерженлар K юк таъсирида чўзилмай, балки сиқилишини кўрсатади.

(2) тенгламадан T_E ни аниқлаймиз:

$$T_E = -T_D \cos 30° - 2T_A \cos 15° \cdot \cos 30° \approx 17{,}3 \text{ кН}.$$

Тросс ва стерженлардаги зўриқиш кучлари миқдор жиҳатдан уларнинг тегишлича реакция кучларига тенг бўлади.

33-§. Кучнинг нуқтага нисбатан моменти

Куч таъсирида жисм бирор нуқта атрофида айланишга интилса, бунда *кучнинг* жисмга таъсири унинг *нуқтага* (*марказга*) *нисбатан моменти* билан белгиланади. Кучнинг қайси нуқтага иисбатан моменти ҳисобланадиган бўлса, шу нуқта *момент маркази* дейилади.

Куч қўйилган нуқтанинг момент марказига нисбатан радиус-вектори билан куч векторининг вектор купайтмаси кучнинг нуқтага (марказга) нисбатан моменти дейилади.

F куч қуйилган A нуқтанинг O момент марказига нисбатан радиус-вектори $\vec{r}$ булсин (8 19-расм). У ҳолда, $\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбаган моментини $\vec{m}_O(\vec{F})$ билан белгиласак, таърифга биноан:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{8.10}$$

Вектор кўпайтма таърифига асосан, $\vec{m}_O(\vec{F})$ вектори ўнг винт коидаси буйича $\vec{r}$ ва $\vec{F}$ векторларга перпендикуляр йўналган ва момент марказига қўйилади; $\vec{m}_O(\vec{F})$ вектор модули эса

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}, \widehat{\vec{F}}) \tag{8.11}$$

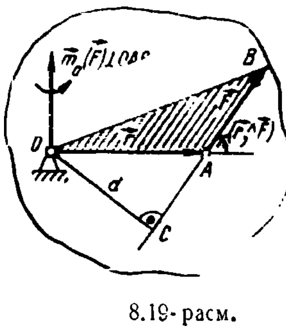
тенгликдан аниқланади.

Момент марказидан $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғига туширилган OC перпендикулярни *куч елкаси* деб атаб, уни d билан белгиласак, 8 19-расмдан $r \cdot \sin(\vec{r}, \widehat{\vec{F}}) = d$ булгани учун, (8.11) ифода

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = F \cdot d \tag{8.12}$$

кўринишда ёзилади.

Демак, *кучнинг нуқтага нисбатан моментининг модули куч миқдори билан куч елкасининг купайтмасига тенг.*



8.19-расм.

Агар жисмга таъсир этувчи кучлар ҳаммаси бир текисликда жойлашган бўлса, кучнинг нуқтага нисбатан моменти вектори урнига *кучнинг нуқтага нисбатан алгебраик моментини* киритиш мумкин:

$$m_O(\vec{F}) = \pm F \cdot d, \tag{8.13}$$

бунда ўнг винт қоидасига кўра, куч жисмни момент маркази атрофида соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилса мусбат ишора, акс ҳолда манфий ишора олиниши керак.

Агар кучнинг таъсир чизиғи момент марказидан ўтса, $\vec{r}$ ва $\vec{F}$ векторлари бир тўғри чизиқда ётувчи векторлар бўлади; у ҳолда $\vec{r} \times \vec{F} = 0$. Демак, *кучнинг таъсир чизиғи момент марказидан ўтса, унинг шу марказга нисбатан моменти нолга тенг.*

Координата бошини момент марказида олиб, Декарт координата ўқларининг бирлик йўналтирувчи векторларини $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ десак, $\vec{F}$ кучнинг бу ўқлардаги проекциялари F_x, F_y, F_z, куч қўйилган нуқтанинг координаталари x, y, z бўлса, (8.10) ифодани қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Бу ифодани координата ўқларига проекциялаcак, *кучнинг нуқтага нисбатан моментининг координата уқларидаги проекцияларини аниқлаш формуласи* ҳосил булади:

$$m_{O_x}(\vec{F}) = yF_z - zF_y, \quad m_{O_y}(\vec{F})\, zF_x - xF_z,$$

$$m_{O_z}(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \tag{8.14}$$

(8.14) да $m_{O_x}(\vec{F})$, $m_{O_y}(\vec{F})$, $m_{O_z}(\vec{F})$ орқали $\vec{m}_O(\vec{F})$ векторнинг координата уқларидаги проекциялари белгиланган.

Куч қуйилган нуқта координаталари ва кучнинг координата уқларидаги проекциялари берилган бўлса, кучнинг нуқтага нисбатан моменти модули ва йўналишини аналитик усулда

$$m_O(F) = \sqrt{(m_{O_x}(\vec{F}))^2 + (m_{O_y}(\vec{F}))^2 + (m_{O_z}(\vec{F}))^2}, \tag{8.15}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(\vec{m}_O(\vec{F}),\widehat{\vec{i}}) &= \frac{m_{O_x}(\vec{F})}{m_O(\vec{F})},\\ \cos(\vec{m}_O(\vec{F}),\widehat{\vec{j}}) &= \frac{m_{O_y}(\vec{F})}{m_O(\vec{F})},\\ \cos(\vec{m}_O(\vec{F}),\widehat{\vec{k}}) &= \frac{m_{O_z}(\vec{F})}{m_O(\vec{F})}\end{aligned}\right| \tag{8.16}$$

формулалар билан аниқлаш мумкин; (8.15) ва (8.16) даги $m_{O_x}(\vec{F})$, $m_{O_y}(\vec{F})$, $m_{O_z}(\vec{F})$ (8 14) муносабатлардан топилади.

34-§. Кучнинг ўққа нисбатан моменти

Кучнинг бирор ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан моментининг мазкур ўқдаги проекцияси кучнинг берилган ўққа нисбатан моменти дейилади. $\vec{F}$ кучнинг z ўққа нисбатан моментини $m_z(\vec{F})$ билан белгиласак, у таърифга биноан

$$m_z(\vec{F}) = np_z(\vec{m}_O(\vec{F})) = np_z(\vec{r}\times\vec{F}) \tag{8.17}$$

формула билан аниқланади.

(8.17) да O нуқта z ўқнинг исталган нуқтаси булиши мумкинлигини, яъни *кучнинг ўққа нисбатан моменти O нуқта z уқнинг қайси нуқтасида олинишига боғлиқ* эмаслигини исботлаш мумкин. Ҳақиқатан, агар z укда O дан ташқари O_1 нуқта олсак, $\vec{F}$ куч қуйилган нуқтанинг O_1 га нисбатан радиус-вектори r_1 ни қуйидагича ёзиш мумкин (8.20-расм)

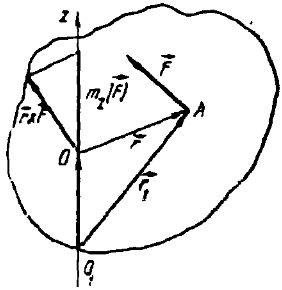
$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \overline{O_1O}$$

У ҳолда

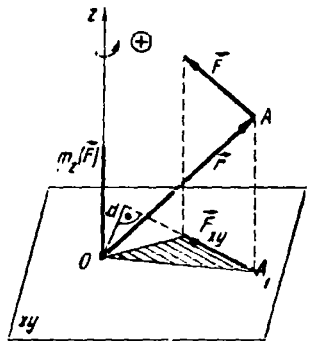
$$\vec{r}_1\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F} + \overline{O_1O}\times\vec{F},$$

бунда O_1O вектор z ўқда ётгани учун $\overline{O_1O}\times\vec{F}$ вектор z ўққа перпендикуляр йўналган ва бу вектор кўпайтманинг z ўқдаги проекцияси нолга тенг. Бинобарин, $\vec{r}_1\times\vec{F}$ билан $\vec{r}\times\vec{F}$ нинг z укдаги проекциялари бир хил бўлади.

Кучнинг ўққа нисбатан моменти учун аввалги таърифга эквивалент қуйидаги таърифни бериш мумкин: *кучнинг бирор уққа нисбатан моменти деб, шу кучнинг уққа перпендикуляр текисликдаги проекциясининг берилган уқ билан маз-*



8.20- расм.



8.21- расм.

кур текислик кесишган нуқтага нисбатан моментининг алгебраик қийматига айтилади.

z ўққа перпендикуляр текисликни xy текислиги (8.21- расм) десак:

$$m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot d, \qquad (8.18)$$

бунда z ўқнинг мусбат учидан қараганда $\vec{E}_{xy}$ таъсиридаги айланиш соат стрелкаси ҳаракатига қарама-қарши кўринса — мусбат, акс ҳолда манфий ишора олинади.

Таърифдан кўрамизки, кучнинг ўққа нисбатан моменти скаляр катталикдир. (8.14) ни эътиборга олсак, кучнинг ўққа нисбатан моменти таърифини ифодаловчи (8.17) га кўра, $\vec{F}$ кучнинг Декарт координата ўқларига нисбатан моментларини аниқлаш учун

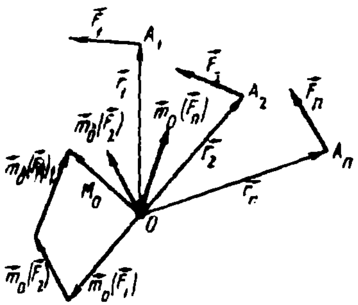
$$m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y, \quad m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z,$$
$$m_z(F) = xF_y - yF_x \qquad (8.14,\ a)$$

формулаларни ёзиш мумкин.

Агар *куч таъсир чизиғи ўқни кесиб ўтса ёки ўққа параллел булса, унинг шу ўққа нисбатан моменти нолга тенг булади,* чунки биринчи ҳолда куч елкаси, иккинчи ҳолда кучнинг ўққа перпендикуляр текисликдаги проекцияси нолга тенгдир.

35- §. Кучлар системасининг нуқтага нисбатан бош моменти

Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ кучлар системаси берилган булса (8.22- расм), бу кучлар системасини ташкил этувчи кучларнинг



8.22- расм.

ихтиёрий O нуқтага нисбатан моментлари шу нуқтага қўйилган

$$\vec m_O(\vec F_1) = \vec r_1 \times \vec F_1,$$
$$\vec m_O(\vec F_2) = \vec r_2 \times \vec F_2, \ \ldots,$$
$$\ldots, \ \vec m_O(\vec F_n) = \vec r_n \times \vec F_n$$

векторларни ифодалайди. Бир нуқтага қўйилган кучларни қўшиш сингари, O нуқтага қўйилган $\vec m_O(\vec F_1)$, $\vec m_O(\vec F_2)$, ..., $\vec m_O(\vec F_n)$ кучлар моментлари векторларини қўшиб, *кучлар системасининг O марказга нисбатан бош моменти* деб аталувчи $\vec M_O$ векторни ҳосил қиламиз:

$$\vec M_O = \sum_{i=1}^{n} \vec m_O(\vec F_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec r_i \times \vec F_i. \tag{8.19}$$

Шундай қилиб, *кучлар системасининг бирор марказга нисбатан бош моменти ташкил этувчи кучларнинг берилган марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисини ифодалайди.*

$\vec F_i$ кучнинг Декарт координата ўқларидаги проекциялари F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, шу куч қуйилган нуқта координаталари x_i, y_i, z_i бўлса, кучлар системаси бош моментининг шу ўқлардаги проекцияларини M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} десак, (8.14) ни эътиборга олиб, (8.19) дан

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}), \\ M_{Oy} &= \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}), \\ M_{Oz} &= \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \end{aligned}\right| \tag{8.20}$$

формулаларни ҳосил қиламиз. Демак, кучлар қўйилган нуқталарнинг координаталари ва кучларнинг координата уқларидаги проекциялари маълум бўлса, кучлар системасининг бош моментини $\vec M_{Ox}$, $\vec M_{Oy}$ ва $\vec M_{Oz}$ га қурилган параллелепипед диагонали каби аниқлаш мумкин:

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} =$$

$$= \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(y_iF_{iz} - z_iF_{iy})\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n}(z_iF_{ix} - x_iF_{iz})\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{iy} - y_iF_{ix})\right]^2}. \quad (8.21)$$

(8.21) формула *кучлар системаси бош моментининг аналитик ифодаси* дейилади. Бу ҳолда бош момент йўналиши йўналтирувчи косинуслар орқали топилади:

$$\cos(\vec{M}_O, \hat{\vec{i}}) = \frac{M_{Ox}}{M_O}, \quad \cos(\vec{M}_O, \hat{\vec{j}}) = \frac{M_{Oy}}{M_O},$$

$$\cos(\vec{M}_O, \hat{\vec{k}}) = \frac{M_{Oz}}{M_O}. \quad (8.22)$$

Изоҳлар. 1. Агар кучлар системасининг ташкил этувчилари бир текисликда жойлашган бўлса, бу кучларнинг бирор марказга нисбатан моментлари кучлар ётган текисликка перпендикуляр йўналган бўлади, яъни уларнинг момент векторлари бир туғри чизиқда ётади. Бинобарин, бу ҳолда кучлар системасининг бош моментини алгебраик йиғинди билан ифодалаш мумкин:

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} m_O(\vec{F}_i). \quad (8.23)$$

2. Кучнинг ўққа нисбатан моменти таърифига кўра (8.19) дан қуйидаги формулаларни ёзиш мумкин:

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} m_{Ox}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i),$$

$$M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} m_{Oy}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i), \quad (8.24)$$

$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m_{Oz}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i),$$

яъни *кучлар системасининг ихтиёрий марказга нисбатан моментининг шу марказдан утувчи бирор ўқдаги проекцияси ташкил этувчи кучларнинг шу ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

3. Агар $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ кучлар бир нуқтага қўйилган кучлар системаси бўлса. (8.19) ифодада $\vec{r}_i = \vec{r}$ бўлиб, у

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

кўринишни олади. (8.4) га биноан, $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\vec{R}$. У ҳолда:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{m}_O(\vec{F}_i) = \vec{r}\times\vec{R} = \vec{m}_O(\vec{R}).$$

Шундай қилиб,

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n}\vec{m}_O(\vec{F}_i), \tag{8.25}$$

яъни *бир нуқтага қўйилган кучлар системаси тенг таъсир этувчисининг ихтиёрий марказга нисбатан моменти ташкил этувчи кучларнинг шу марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.* Бу бир нуқтага қўйилган кучлар системаси учун *Вариньон теоремасидан* иборат.

36-§. Жуфт куч ва унинг моменти

Миқдор жиҳатдан тенг, қарама-қарши йўналган, бир тўғри чизиқда ётмайдиган иккита параллел кучлар системаси жуфт куч (қисқача, *жуфт*) дейилади.

Жуфт ташкил этувчи кучларнинг таъсир чизиқлари орасидаги энг қисқа масофа *жуфт елкаси* дейилади. Жуфт елкасини d билан белгилаймиз. Жуфт тузувчилари ётган текислик *жуфт текислиги* дейилади.

Биринчи аксиомага биноан ёлғиз жуфт таъсиридаги жисм мувозанатда була олмайди, шунингдек, жуфт битта кучга, яъни тенг таъсир этувчига келтирилмайди. Жуфт таъсиридаги жисм бирор нукта ёки ўқ атрофида айланма ҳаракат қилади. Бинобарин, жуфтнинг жисмга таъсири жуфт ташкил этувчиларининг моменти билан белгиланади.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфтнинг $\vec{F}_1$ ташкил этувчиси A нуқтага, $\vec{F}_2$ ташкил этувчиси B нуқтага қўйилган бўлсин (8.23- расм). Жуфт ташкил этувчиларининг ихтиёрий O нуқтага нисбатан бош моментини аниқлайлик:

$$\vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{F}_1(+\vec{m}_O)\vec{F}_2) = \vec{OA}\times\vec{F}_1 + \vec{OB}\times\vec{F}_2.$$

Бунда $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ булгани учун:

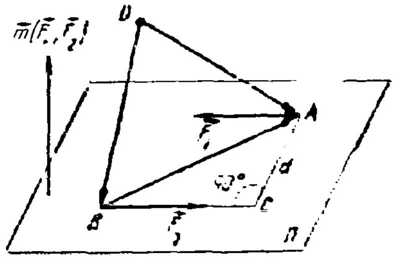
$$\vec{M}_O = \vec{OA}\times\vec{F}_1 - \vec{OB}\times\vec{F}_1 = (\vec{OA}-\vec{OB})\times\vec{F}_1.$$

Расмдан: $\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{BA}$.

Шундай қилиб,

$$\vec{M}_O = \vec{BA}\times\vec{F}_1 = \vec{AB}\times\vec{F}_2 \tag{8.26}$$

(8.26) дан кўрамизки, *жуфт ташкил этувчиларининг бирор* *марказга нисбатан бош моменти шу марказнинг танланишига боғлиқ эмас.*



8.23- расм.

(8.26) вектор купайтма билан аниқланувчи вектор *жуфт моменти* дейилади ва $\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ билан белгиланади:

$$\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{BA} \times \vec{F}_1 = \\ = \vec{AB} \times \vec{F}_2. \quad (8.28)$$

Вектор кўпайтма хоссасига биноан жуфт моменти $\vec{BA}$ ва $\vec{F}_1$ векторларга, бошқача айтганда жуфт текислиги II га перпендикуляр равишда ўнг винт қоидасига мос йўналади; жуфт моменти O марказ танланишига боғлиқ бўлмагани учун уни II жуфт текислигига перпендикуляр равишда ихтиёрий нуқтага қўйиш мумкин, яъни *жуфт моменти эркин вектор* экан.

Жуфт моменти модулини ҳисоблайлик:

$$|\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)| = BA \cdot F_1 \sin(\vec{BA}, \vec{F}),$$

бироқ $BA \cdot \sin(\vec{BA}, \vec{F}_1) = d$; шунинг учун

$$|\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)| = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d \quad (8.28)$$

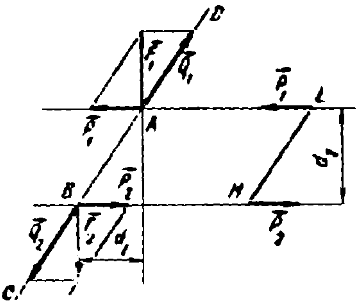
(8.28) дан курамизки, *жуфт моменти модули жуфт ташкил этувчи кучлардан бирининг жуфт елкасига купайтмасига тенг* экан. (8.27) ни (8.10) билан таққослаб, жуфт моментининг қуйидаги хоссасига эга буламиз: *жуфт моменти жуфт ташкил этувчи кучлардан бирининг иккинчиси қуйилган нуқтага нисбатан моментига тенг,* яъни

$$\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{m}_B(\vec{F}_1) = \vec{m}_A(\vec{F}_2). \quad (8.29)$$

Бир текисликда жойлашган жуфтларнинг жисмга таъсири ўрганилаётганда жуфтнинг алгебраик моментидан фойдаланиш мумкин: *мусбат ёки манфий ишора билан олинган жуфт ташкил этувчи кучлардан бирининг жуфт елкасига кўпайтмаси жуфтнинг алгебраик моменти дейилади*:

$$m(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm F_1 \cdot d = \pm F_2 \cdot d, \quad (8.30)$$

бунда жуфт таъсиридаги айланиш соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда булса мусбат, акс ҳолда манфий ишора олинади (ишорани бундай танлаш ўнг винт қоидасига мос келади).



8.24- расм.

37-§. Жуфтларнинг эквивалентлиги ҳақида теорема ва натижалар

Теорема. *Бирор жуфтнинг жисмга таъсирини шу жуфт текислигида ётувчи, моменти берилган жуфт моментига тенг иккинчи жуфт билан алмаштириш мумкин.*

Исбот. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфт берилган (8.24- расм). $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларнинг қўйилиш нуқталари A ва B дан ўзаро параллел AL ва BM тўғри чизиқлар, шунингдек, A ва B нуқталар орқали CD туғри чизиқ ўтказамиз. $\vec{F}_1$ кучни AL ва BA бўйича, $\vec{F}_2$ кучни BM ва AB бўйича ташкил этувчиларга ажратамиз: $\vec{F}_1 \backsim (\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$, $\vec{F}_2 \backsim (\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$.

Натижада

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \backsim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \tag{8.31}$$

келиб чиқади. Бунда $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ бўлгани учун, ясашга биноан $\vec{P}_1 \parallel \vec{P}_2$, $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$, $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_2$; демак, $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфтни, $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ эса мувозанатлашувчи системани ташкил этади. У ҳолда 2-аксиомага асосан кучлар системаси қаторидан $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \backsim 0$ системани айирсак, (8.31) ифода

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \backsim (\vec{P}_1, \vec{P}_2) \tag{8.32}$$

кўринишни олади; яъни $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфт иккинчи $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфт билан алмаштирилади. Бу жуфтлар моментларининг тенглигини исботлаймиз.

$\vec{P}_1$ ва $\vec{Q}_1$ бир нуқтага қўйилган ва уларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}_1$ бўлгани учун Вариньон теоремасига асосан:

$$\vec{m}_B(\vec{F}_1) = \vec{m}_B(\vec{P}_1) + \vec{m}_B(\vec{Q}_1).$$

$\vec{Q}_1$ кучнинг таъсир чизиғи B нуқтадан ўтгани учун $\vec{m}_B(\vec{Q}_1) = 0$. Демак,

$$\vec{m}_B(\vec{F}_1) = \vec{m}_B(\vec{P}_1) \tag{8.33}$$

(8.29) ифодага биноан (8.33) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{m}(\vec{P}_1, \vec{P}_2). \qquad (8.34)$$

Шундай қилиб, теорема тулиқ исботланди.

Жуфтларнинг эквивалентлиги ҳақидаги бу теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

1. *Айланиш йўналишини ўзгартирмай жуфтни узининг текислигида ихтиёрий жойга кучириш ва буриш мумкин.* Ҳақиқатан, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ кучларни таъсир чизиқлари буйлаб L ва M нуқталарга кучирсак, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфт ўрнига унга эквивалент бўлган, берилган жуфтга нисбатан буриб кўчирилган $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфт ҳосил бўлади.

2. *Жуфт моментини ўзгартирмай, жуфтни ташкил этувчи кучлар модулини ёки елкасини узгартириш билан жуфтнинг жисмга таъсири узгармайди.* $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфт елкасини d_1, $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфт елкасини d_2 десак: $m(\vec{F}_1, \vec{F}_2)=F_1\cdot d_1$, $m(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = P_1\cdot d_2$.

У ҳолда (8.34) га асосан:

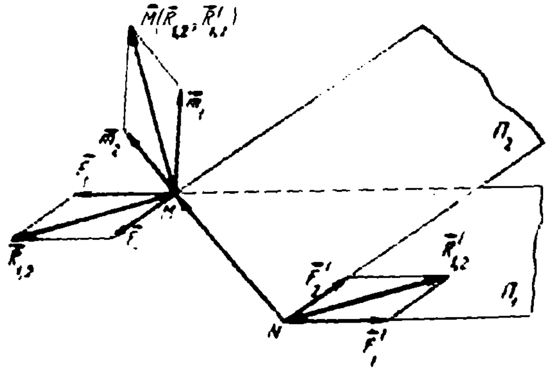
$$F_1\cdot d_1 = P_1\cdot d_2. \qquad (8.35)$$

(8.35) формула ёрдамида жуфт елкасини ёки жуфт ташкил этувчисини танлаш мумкин.

3. *Моментлари тенг бўлган жуфтлар узаро эквивалентдир.* Бу учинчи натижанинг бир текисликдаги жуфтлар учун ўринли бўлиши яққол кўриниб турибди. Жуфт моменти эркин вектор ва уни жуфт текислигига перпендикуляр равишда ихтиёрий нуқтага қуйиш мумкин булганидан жуфт моментини ўзгартирмай таъсир текислигига параллел текисликка кучирилса ҳам жуфтнинг жисмга таъсири ўзгармайди. Шундай қилиб, жуфт ўрнига унинг моментини бериш кифоя экан.

38-§. Жуфтлар системасини қўшиш. Жуфтлар системасининг мувозанати

$(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ ва $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ жуфтлар текисликлари ўзаро кесишувчи Π_1 ва Π_2 текисликлар, моментлари эса мос равишда $\vec{m}_1$ ва $\vec{m}_2$ бўлсин (8.25- расм). Жуфтларнинг эквивалентлиги ҳақидаги теорема ва натижаларга асосан бу жуфтлар умумий MN елкага келтирилган деб қарайлик. M нуқтага қўйилган $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларни, шунингдек, N нуқтадаги $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$ кучларни қушамиз: $\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $\vec{R}_{1,2}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'$. Ўз-ўзидан равшанки $\vec{R}_{1,2} =$



8.25- расм.

$= -\vec{R}'_{1,2}$, $\vec{R}_{1,2} \parallel \vec{R}'_{1,2}$, яъни $(\vec{R}_{1,2}, \vec{R}'_{1,2})$ жуфтдан иборат. Ҳосил булган жуфт моментини (8.27) га биноан ҳисоблаймиз:

$$\vec{M}(\vec{R}_{1,2}, \vec{R}'_{1,2}) = \vec{NM} \times \vec{R}_{1,2} = \vec{NM} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{NM} \times \vec{F}_1 +$$
$$+ \vec{NM} \times \vec{F}_2 = \vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) + \vec{m}(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) = \vec{m}_1 + \vec{m}_2.$$

Шундай қилиб, *кесишувчи текисликларда ётувчи икки жуфтни қўшиш натижасида битта жуфт ҳосил булиб, бу натижаловчи жуфт моменти берилган жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Агар n та жуфтлар системаси $\{(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \ldots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)\}$ берилган бўлса, бу жуфтларни аввалгидек кетма-кет қўшиш натижасида битта $(\vec{R}, \vec{R}')$ — натижаловчи жуфт ҳосил бўлиб, унинг моменти

$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \ldots + \vec{m}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i \qquad (8.36)$$

формула билан ифодаланади,

Шундай қилиб, *жуфтлар системаси ёлғиз натижаловчи жуфтга келтирилиб, натижаловчи жуфт моменти берилган жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Агар жуфтлар системаси бир текисликда ёки параллел текисликларда жойлашган бўлса, уларнинг моментларини бир туғри чизиқда ётувчи векторлар деб қараш мумкин: шунинг учун бу ҳолда (8.36) геометрик йиғинди ўрнига алгебраик йиғинди олиш мумкин:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i. \qquad (8.37)$$

Жуфтлар системаси орасида бирор жуфт қолган жуфтларни мувозанатловчи бўлиб қолса, уларни қўшиш натижасида $\vec{R} = \vec{R}' = 0$ ёки $\vec{M} = 0$ ҳосил бўлади. Бу ҳолда, (3.36) ифода

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = 0 \tag{8.38}$$

куринишни олади.

Аксинча, (8.38) ўринли булса, жуфтлар системаси мувозанатда бўлади.

Бинобарин, (8.38) *жуфтлар системаси таъсиридаги жисм мувозанатининг зарурий ва етарли шартини* ифодалайди: *жуфтлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

IX боб. ИХТИЁРИЙ КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИ БИР МАРКАЗГА КЕЛТИРИШ. ИХТИЁРИЙ КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ МУВОЗАНАТИ

39-§. Пуансо теоремаси

Жисмнинг бирор нуқтасига қуйилган кучни ўзининг таъсир чизиғида ётувчи бошқа нуқтага кўчириш масаласини аввал (30-§) курган эдик. Энди кучни унинг таъсир чизиғида ётмайдиган нуқтага кучириш масаласини куриб чиқамиз. Куч кўчириладиган нуқта *келтириш маркази* дейилади.

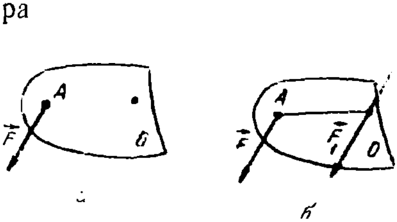
Жисмнинг A нуқтасига $\vec{F}$ куч қуйилган, O нуқта келтириш маркази бўлсин (9.1-расм, *а*). Иккинчи аксиомага биноан O нуқтага $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \backsim 0$ кучлар системасини қуямиз (9.1-расм, *б*). $\vec{F}_1$ кучни миқдор ва йўналиш бўйича берилган $\vec{F}$ га тенг қилиб оламиз: $\vec{F}_1 = \vec{F}$. У ҳолда

$$\vec{F} \backsim \left\{\vec{F}_1, (\vec{F}_1, \vec{F}_2)\right\} \tag{9.1}$$

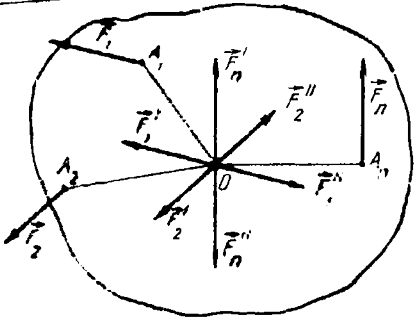
ҳосил бўлади. (9.1) да $\vec{F}$ кучни O нуқтага кўчирилган куч, $(\vec{F}, \vec{F}_2)$ ни эса жуфт деб қараш мумкин; $(\vec{F}, \vec{F}_2)$ *қўшилган жуфт* дейилади. (8.29) га кура

$$\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}_2) = \vec{m}_O(\vec{F}), \tag{9.2}$$

яъни қушилган жуфт моменти берилган кучнинг келтириш марказига нисбатан моментига тенг. (9.1) ва (9.2) қуйидаги *Пуансо теоремасини* ифодалайди:



9.1-расм.



кучни жисмнинг бир нуқтасидан бошқа нуқтасига ўзига параллел равишда кучиришни кучирилган куч қаторига моменти берилган кучнинг келтириш марказига нисбатан моментига тенг жуфтни қўшиш билан бажариш мумкин.

9.2- расм.

40- §. Ихтиёрий кучлар системасини бир марказга келтириш

Жисмнинг A_1, A_2, ...,A_n нуқталарига қўйилган ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ...,$\vec{F}_n$) ихтиёрий кучлар системасини қўшишга утамиз (9.2-расм). Жисмда бирор O нуқтани келтириш маркази сифатида танлаб, барча кучларни Пуансо теоремасидан фойдаланиб узига параллел равишда ушбу нуқтага кўчирамиз. У ҳолда, берилган кучлар системаси ўрнига ($\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, ..., $\vec{F}_n'$) бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси ва моментлари мос равишда

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1), \quad \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2), \ \ldots, \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n) \qquad (9.3)$$

бўлган $[(\vec{F}_1, \vec{F}_1''), (\vec{F}_2, \vec{F}_2''), \ldots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n'')]$ қўшилган жуфтлар системасидан иборат системага эга бўламиз.

O нуқтага қуйилган кучлар системасини қушиб, шу нуқтага қуйилган битта $\vec{R}'$ кучни ҳосил қиламиз:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i',$$

бунда $\vec{F}_i' = \vec{F}_i$ бўлгани учун:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad (9.4)$$

Берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлган $\vec{R}'$ куч, кучлар системасининг бош вектори дейилади. Қўшилган жуфтлар системасини қўшиб, уларни моменти (8.36) тенгликка кўра аниқланувчи битта жуфт билан алмаштириш мумкин:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

(9.3) га асосан, бу тенгликни

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_0(\vec{F}_i) \qquad (9.5)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (8.19) дан маълумки, (9.5) ифода *кучлар системасининг О марказга нисбатан бош моментидир.* Шундай қилиб, *ихтиёрий кучлар системаси келтириш марказига қўйилган ва берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлган битта бош вектор билан моменти ташкил этувчи кучларнинг шу марказга нисбатан бош моментига тенг бўлган битта жуфтга келтирилар экан.*

Шуни алоҳида таъкидлаб ўтиш зарурки, бош вектор келтириш марказининг танланишига боғлиқ эмас (яъни келтириш марказига нисбатан инвариант), бош момент эса келтириш марказининг танланишига боғлиқ (келтириш марказига нисбатан ноинвариантдир). Бош моментнинг келтириш марказига нисбатан ноинвариантлиги ўз-ўзидан равшан, чунки умумий ҳолда келтириш маркази ўзгарганда система кучларининг бу марказга нисбатан моментлари ҳам ўзгаради.

Кучлар системасининг бош моменти аналитик усулда (8.21), (8.22) формулалар билан аниқланиши бизга маълум.

Кучлар системасининг бош векторини аниқловчи (9.4) ифода билан бир нуқтага қўйилган кучлар системаси тенг таъсир этувчиси учун берилган (8.4) формула кўриниши жиҳатидан бир хил бўлганидан, *бош векторни аналитик усулда ҳисоблаш формулалари* ҳам (8.6) ва (8.7) каби бўлади:

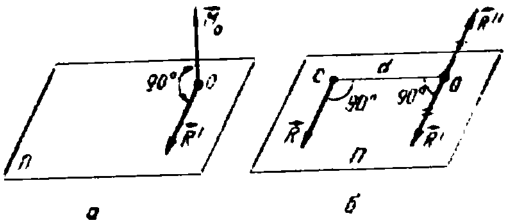
$$R' = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}, \qquad (9.6)$$

$$\cos(\vec{R}', \hat{\vec{i}}) = \frac{R'_x}{R'}, \quad \cos(\vec{R}', \hat{\vec{j}}) = \frac{R'_y}{R'}, \quad \cos(\vec{R}', \hat{\vec{k}}) = \frac{R'_z}{R'}. \qquad (9.7)$$

41-§. Ихтиёрий кучлар системасини келтирилиши мумкин бўлган хусусий ҳоллар. Вариньон теоремаси

Маълумки, ихтиёрий кучлар системаси умумий ҳолда бош вектор $\vec{R}'$ билан моменти кучлар системасининг келтириш марказига нисбатан бош моменти $\vec{M}_O$ га тенг бўлган жуфтга келтирилади. Бунда қуйидаги хусусий ҳоллар учраши мумкин.

1. $\vec{R}' = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, яъни кучлар системасининг бош вектори нолга тенг, бирор марказга нисбатан бош моменти эса нолдан фарқ қилади. Бу ҳолда кучлар системаси ёлғиз жуфтга келтирилади. Жуфт моменти момент марказининг танланишига боғлиқ бўлмагани учун бу ҳолда бош момент ҳам келтириш марказининг олинишига боғлиқ бўлмайди.



9.3- расм.

2. $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_O = 0$. Бу ҳолда қўшилган жуфтлар системаси ўзаро мувозанатлашиб, берилган кучлар системаси O келтириш марказидан ўтувчи биргина куч — бош вектор $\vec{R}'$ га келтирилгани учун бу $\vec{R}'$ кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси бўлади.

3. $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, $\vec{R}' \perp \vec{M}_O$, яъни бош вектор ва бош момент нолдан фарқли бўлиб, улар ўзаро перпендикуляр бўлиши мумкин (9.3- расм, *а*). Бу ҳолда кучлар системаси таъсир чизиғи O келтириш марказидан ўнг винт қоидасига мослаб олинган

$$OC = \frac{|\vec{M}_O|}{R'} \tag{9.8}$$

масофада ётувчи тенг таъсир этувчига келтирилишини исботлаймиз.

Моменти $\vec{M}_O$ бўлган жуфт текислигини П билан белгиласак (9.3- расм, *б*), $\vec{M}_O \perp \vec{R}'$ ҳолида $\vec{R}'$ вектор шу П текисликда ётади. $\vec{M}_O$ бош момент ўрнига $(\vec{R}, \vec{R}'')$ жуфтни шундай танлаймизки, $\vec{R} = \vec{R}'$ бўлиб, бу жуфтнинг айланиш йўналиши $\vec{M}_O$ йўналишига мос тушсин; бунда $(\vec{R}, \vec{R}'')$ жуфт елкасини $d = OC$ десак,

$$|\vec{M}_O| = |\vec{m}(\vec{R}, \vec{R}'')| = R \cdot OC \text{ ёки } OC = \frac{|\vec{M}_O|}{R} = \frac{|\vec{M}_O|}{R'}$$

ўринли бўлиши керак.

Жуфтларнинг эквивалентлиги ҳақидаги натижаларга асосан, $\vec{R}''$ ни бош вектор $\vec{R}'$ билан бир тўғри чизиққа тушириш мумкин. У ҳолда $(\vec{R}', \vec{R}'') \backsim 0$ бўлиб, кучлар системаси C нуқтага қўйилган битта $\vec{R}$ кучга, яъни тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади.

Таъсир чизиқлари бир текисликда ётувчи кучлар системаси *текисликдаги кучлар системаси* дейилади.

Текисликдаги кучлар системаси учун $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ ҳолда $\vec{M}_O$ ва $\vec{R}'$ векторлар ўзаро перпендикулярдир. Шунинг учун бош вектори ва бош моменти нолдан фарқли бўлган текисликдаги кучлар системаси доимо тенг таъсир этувчига келтирилади.

Теорема. *Кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилса, тенг таъсир этувчининг бирор марказга нисбатан моменти ташкил этувчи кучларнинг шу марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг:*

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_i). \tag{9.9}$$

Исбот. $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ бўлган умумий ҳолни қарайлик. Бунда кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилиши учун $\vec{R}' \perp \vec{M}_O$ бўлиши (9.3-расм, *б*), $\vec{R} = \vec{R}'$ эса (9.8) тенглик билан аниқланувчи C нуқтадан ўтиши керак. Тенг таъсир этувчининг O марказга нисбатан монентини ҳисоблаймиз:

$$|\vec{m}_O(\vec{R})| = R \cdot OC = R \cdot \frac{|\vec{M}_O|}{R} = |\vec{M}_O|,$$

яъни тенг таъсир этувчининг O марказга нисбатан моментининг модули кучлар системасининг шу марказга нисбатан бош моменти модулига тенг. $\vec{m}_O(\vec{R})$ йўналиши ўнг винт қоидасига мос равишда П текисликка перпендикуляр йуналгани туфайли $\vec{M}_O$ вектор йўналишига мос тушади. Шундай қилиб, (8.19) ни эътиборга олиб,

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_i)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу исботланган теорема *ихтиёрий кучлар системаси учун Вариньон теоремаси* дейилади.

(9.9) ифодани бирор z ўққа проекциялайлик:

$$m_{Oz}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_{Oz}(\vec{F}_i).$$

Бу ифодада кучнинг ўққа нисбатан моменти таърифига кура $m_{Oz}(\vec{R})$ ни тенг таъсир этувчининг z ўққа нисбатан моменти деб қараш мумкин. Демак,

$$m_z(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i), \tag{9.10}$$

яъни *тенг таъсир этувчининг бирор ўққа нисбатан моменти ташкил этувчи кучларнинг мазкур ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Кучлар системасининг бош вектори ва бош моменти нолдан фарқли булиб, улар ўзаро перпендикуляр булмаса, бундай кучлар системаси таъсирида жисм винт ҳаракатига келтирилишини исботлаш мумкин.

4. $\vec{R}'=0$, $\vec{M}_O=0$ ҳолда кучлар системаси нолга эквивалент, яъни мувозанатдаги системани ташкил этади:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \backsim 0.$$

42-§. Кучлар системасининг мувозанат шартлари

1. *Ихтиёрий кучлар системасининг мувозанат шартлари.* Юқорида $\vec{R}'=0$, $\vec{M}_O=0$ булганда кучлар системаси мувозанатда булишини кўрсатиб ўтдик. Бу шартлар ихтиёрий кучлар системаси мувозанатининиг зарурий ва етарли шартларидан иборат.

Кучлар системаси мувозанатда булиши учун бош вектор ва бош моментнинг нолга тенг бўлиши зарурлиги шундаки, агар $M_O=0$ бўлиб, $\vec{R}'$ нолдан фарқли бўлса, кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилади; агар $\vec{R}'=0$ бўлиб, $\vec{M}_O$ нолдан фарқли бўлса, кучлар системаси жуфтга келтирилади ва жисм ҳаракатда булади.

Бу шартларнинг етарли эканлиги шундаки, $\vec{R}'=0$, $\vec{M}_O=0$ бўлса, кучлар системаси нолга эквивалент, яъни мувозанатдаги системани тащкил этади.

$\vec{R}'=0$ ҳолида бош момент келтириш марказининг танланишига боғлиқ бўлмаслигини аввал уқтириб утган эдик. Бинобарин, моменг маркази учун ихтиёрий нуқта олиниши мумкин.

Демак, *ихтиёрий кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучлар системасининг бош вектори ва ихтиёрий нуқтага нисбатан бош моменти нолга тенг булиши зарур ва етарлидир*:

$$\vec{R}'=0, \quad \vec{M}_O=0. \tag{9.11}$$

(9.11) ифодалар *ихтиёрий кучлар системаси мувозанати шартларининг вектор усулида* берилишидир. Мувозанат шартларининг аналитик усулда ифодаланишини аниқлаш учун (9.6) ва (8.21) га (9.11) ни қўямиз.

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}=0, \\ &\sqrt{M_{Ox}^2+M_{Oy}^2+M_{Oz}^2}=0. \end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

Бунда

$$M_{Ox}=\sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i), \qquad M_{Oy}=\sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i), \qquad M_{Oz}=\sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i)$$

тенгликларни эътиборга олсак, (9.12) ифодалардан

$$\left.\begin{array}{lll}\sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix}=0, & \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy}=0, & \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iz}=0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i)=0, & \sum\limits_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i)=0, & \sum\limits_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i)=0\end{array}\right| \qquad (9.13)$$

келиб чиқади. (9.13) *ихтиёрий кучлар системаси мувозанат шартларининг аналитик усулда* ифодаланишидир. Шундай қилиб, *ихтиёрий кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг учта координата ўқларидаги проекцияларининг алгебраик йиғиндилари ва учта координата ўқларига нисбатан моментлари алгебраик йиғиндиларининг ҳар бири алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

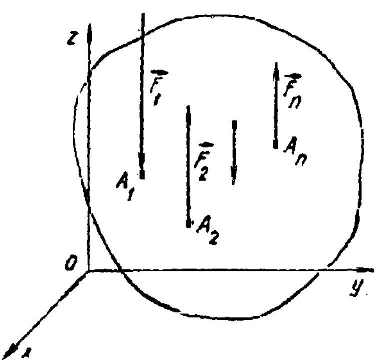
2. *Фазода ўзаро параллел жойлашган кучлар системасининг мувозанати.* $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \backsim 0$ кучлар системаси ташкил этувчиларининг таъсир чизиқлари ўзаро параллел бўлсин (9.4-расм). Координата ўқларидан бирини, масалан, z ўқни кучлар таъсир чизиқларига параллел равишда ўтказиб, (9.13) муносабатларни тузамиз. У ҳолда, кучлар x ва y ўқларига перпендикуляр бўлгани учун (9.13) нинг биринчи ва иккинчи тенгламалари айниятга айланади. Шунингдек, кучлар таъсир чизиқлари z ўққа параллел бўлганидан, (9.13) нинг охирги тенгламаси ҳам айниятга айланади. Демак, фазода ўзаро параллел жойлашган кучлар системасининг мувозанат шартлари қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i)=0. \qquad (9.14)$$

3. *Кесишувчи кучлар системасининг мувозанати.* Кесишувчи кучлар системасининг мувозанат шартлари (8.9) тенгламалар билан ифодаланиши бизга маълум:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0.$$



9.4- расм.

Келтириш маркази учун кучлар таъсир чизиқларининг кесишиш нуқтасини олсак, (9.11) ифоданинг иккинчиси, бинобарин (9.13) нинг охирги учта тенгламаси айниятга айланади ва (9.13) дан (8.9) куринишдаги муносабатлар ҳосил булади.

Агар мувозанатдаги кесишувчи кучлар системаси битта xOy текислигида жойлашган булса, мувозанат тенгламалари иккита булади:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0.$$

4. *Текисликдаги кучлар системасининг мувозанати.* Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \infty 0$ кучлар системаси текисликдаги кучлар системасидан иборат бўлса, кучлар ётган текисликни Oxy текислиги деб қарасак, кучлар Oz ўққа перпендикуляр булгани учун (9.13) тенгламаларнинг учинчиси айниятга айланади. Шунингдек, кучлар Oxy текислигида ётгани учун уларнинг таъсир чизиқлари Ox, Oy уқларни ёки кесиб ўтади, ёки уларга параллел бўлади. Натижада (9.13) нинг туртинчи ва бешинчи тенгламалари ҳам айнан нолга тенг булади; кучлар системасининг Oz ўққа нисбатан моменти эса уларнинг O нуқтага нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг булади. Шундай қилиб, (9.13) текисликдаги узаро мувозанатлашувчи кучлар системаси учун қуйидаги куринишда ёзилади:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_O(\vec{F}_i)=0, \tag{9.15}$$

яъни *текисликдаги кучлар системаси мувозанатда булиши учун ташкил этувчи кучларнинг узаро перпендикуляр икки уқдаги проекциялари алгебраик йиғиндиларининг ҳар бири ҳамда ихтиёрий нуқтага нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.*

(9-15) ифодалар *текисликдаги кучлар системаси мувозанат шартларининг биринчи—асосий куринишидан* иборат.

Текисликдаги кучлар системаси мувозанат шартларининг иккинчи ва учинчи кўринишлари ҳам мавжуд.

Теорема. *Текисликдаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтага нисбатан моментлари алгебраик йиғиндиларининг ҳар бири нолга тенг булиши зарур ва етарлидир:*

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_C(\vec{F}_i)=0, \tag{9.16}$$

(9.16) да A, B, C бир тўғри чизиқда ётмайдиган нуқталардир.

Исбот. Кучлар системаси мувозанатда булиши учун (9.16) ифодаларнинг зарурлиги бундай кучлар системаси учун ихтиёрий марказга нисбатан бош моментнинг нолга тенг булиши зарурлигидан келиб чиқади. (9.16) шартларнинг етарли эканини, яъни (9.16) бажарилганда, текисликдаги кучлар системасинииг мувозанатда бўлишини исботлаймиз. (9.16) шартлар бажарилса ҳам кучлар системаси мувозанатда бўлмайди деб фараз қилайлик. У ҳолда, кучлар системаси тенг таъсир этувчи $\vec{R}$ га келтирилиши керак. Агар $\vec{R}$ кучнинг таъсир чизиғи A ва B нуқталардан утса, унинг шу нуқталарга нисбатан моментлари нолга тенг ва Вариньон теоремасига биноан (9.16) нинг биринчи иккитаси ўринли, бироқ $\vec{R}$ нинг таъсир чизиғи C нуқтадан ута олмайди (A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди). Натижада $\vec{m}_C(\vec{R}) \neq 0$ бўлиб, Вариньон теоремасига кўра $\vec{m}_C(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_C(\vec{F}_i) \neq 0$ келиб чиқади. Бу (9.16) шартларга зиддир. Бу зиддият қилинган фараз нотўғрилигини, кучлар системаси мувозанатда бўлишини кўрсатади.

(9.16) муносабатлар *текисликдаги кучлар системаси мувозанат шартларининг иккинчи кўриниши* дейилади.

Текисликдаги кучлар системаси мувозанат шартларининг учинчи куриниши қуйидагича:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0. \tag{9.17}$$

Бунда Ox уқ AB туғри чизиққа перпендикуляр булмаслиги керак, яъни *текисликдаги кучлар системаси мувозанатда булиши учун барча кучларнинг ихтиёрий икки A ва B нуқтага нисбатан моментлари йиғиндиларининг ҳар бири ҳамда AB туғри чизиққа перпендикуляр бўлмаган уқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.*

Бу теорема ҳам аввалги теорема сингари исботланади; теорема исботини укувчига ҳавола этамиз.

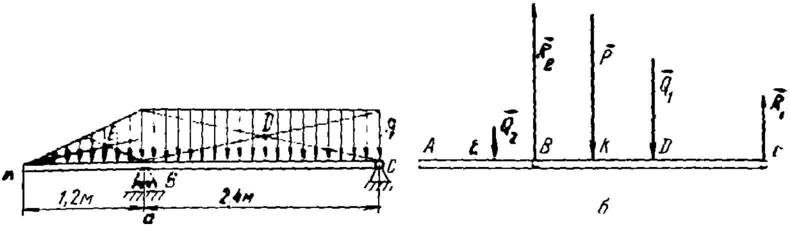
5. *Текисликдаги параллел кучлар системасининг мувозанати.* $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \backsim 0$ кучлар системаси таъсир чизиклари узаро параллел ва бир текисликда жойлашган булсин. Oy ўқни шу кучларга параллел йуналтириб, (9.15) муносабатларни тузсак,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_O(\vec{F}_i) = 0 \tag{9.18}$$

келиб чиқади. (9.18) *текисликдаги параллел кучларнинг мувозанат шартларини* ифодалайди. Агар (9.15) урнига (9.16) дан фойдалансак,

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = 0 \tag{9.19}$$

куринишдаги мувозанат шартларини ҳосил қилиш мумкин.



9.5- расм.

25- масала. $P = 12$ Н оғирликдаги бир жинсли AC балканинг (9.5- расм, a) BC қисмига интенсивлиги $q = 3$ Н/м булган текис тақсимланган, AB қисмига эса интенсивлиги чизиқли қонун асосида нолдан q гача ортадиган куч қўйилган. B ва C таянчлардаги реакция кучлари аниқлансин. Балка ўлчамлари расмда кўрсатилган.

Ечиш. AC балка мувозанатини текширамиз. Аввал балканинг BC ва AB бўлакларига қўйилган тақсимланган кучларни нуқтага қўйилган $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ кучлар билан алмаштирамиз. Бу кучларнинг миқдорлари улар эгаллаб турган „юзалар" миқдорига тенг бўлади ва мазкур юзалар оғирлик марказларидан утувчи вертикал чизиқларнинг балка билан кесишиш нуқталарига (D ва E) қўйилади (9.5- расм, $б$), яъни

$$Q_1 = BC \cdot q = 7{,}2 \text{ Н}, \quad Q_2 = \frac{1}{2} AB \cdot q = 1{,}8 \text{ Н};$$

$$BD = \frac{BC}{2} = 1{,}2 \text{ м}, \qquad BE = \frac{1}{3} AB = 0{,}4 \text{ м}.$$

AC балкага қўйилган $\vec{P}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ кучларни расмда тасвирлаймиз.

Боғланишларни реакция кучлари билан алмаштирамиз. B— қўзғалувчи шарнирли боғланиш реакция кучи $\vec{R}_B$ таянч текислигига ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади. $\vec{P}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$, $\vec{R}_B$ кучлар ўзаро параллел бўлгани учун C қўзғалмас шарнир реакцияси $\vec{R}_C$ таъсир чизиғи ҳам шу кучларга параллел бўлади.

Шундай қилиб, AC балка текисликдаги параллел кучлар системаси таъсирида мувозанатда экан. (9.18) кўринишдаги мувозанат шартларини тузамиз:

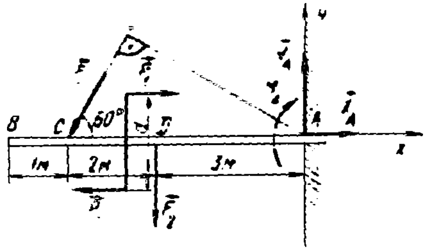
$$\sum F_{iy} = 0: \; R_C - Q_1 + R_B - P - Q_2 = 0, \tag{1}$$

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = 0: \; Q_2 \cdot BE - P \cdot BK - Q_1 \cdot BD + R_C \cdot BC = 0. \tag{2}$$

Расмдан BK ни аниқлаймиз: $BK = \frac{AB + BC}{2} - AB =$ $= 0{,}6$ м.

(2) тенгламадан: $R_C = \frac{P \cdot BK + Q_1 \cdot BD - Q_2 \cdot BE}{BC} =$ $= 6{,}3$ Н.

(1) тенгламадан: $R_B = P + Q_1 + Q_2 - R_C = 14{,}7$ Н.



9.6- расм.

26- масала. AB балка A нуқтада деворга қисиб маҳкамланган булиб, унга 9.6- расмда кўрсатилгандек $F_1 = 2$ Н, $F_2 = 3$ Н кучлар ҳамда елкаси $d = 2$ м бўлган $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфт таъсир этади: $P_1 = P_2 = 1{,}5$ Н. A таянч реакциялари аниқлансин.

Ечиш. AB балка мувозанатини текширамиз. Балкага таъсир этувчи $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ кучлар, $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфт қаторига A таянч реакцияларини қушиб, AB балкани эркин ҳолга келтирамиз. A нуқтада балка қисиб маҳкамлангани учун бу боғланиш балканинг кучлар таъсирида горизонтал ва вертикал бўйлаб ҳаракатига ҳамда балканинг A нуқта атрофида айланишига тусқинлик қилади. Шунинг учун A таянч реакцияси $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ реакция кучлари ҳамда M_A реакция моменти билан ифодаланади. M_A момент балканинг айланишига тўсқинлик қилади.

Шундай қилиб, AB балка текисликдаги кучлар системаси таъсирида мувозанатда экан, (9.15) мувозанат тенгламаларидан фойдаланишимиз мумкин. (9.15) куринишдаги тенгламаларни тузишда $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфт, M_A реакция моментининг Ax, Ay ўқлардаги проекциялари нолга тенг бўлишини, $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфт моменти момент марказининг анланишига боғлиқ эмаслигини эътиборга оламиз:

$$\sum F_{ix} = 0: \; X_A - F_1 \cos 60^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \; Y_A - F_2 - F_1 \cos 30^\circ = 0, \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0: \; F_2 \cdot AD - P_1 \cdot d + F_1 \cdot AL - M_A = 0, \qquad (3)$$

A нуқтани момент маркази учун олишнинг боиси шундаки, A нуқтага қўйилган $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ кучларнинг шу марказга нисбатан моментлари нолга тенг бўлиб, (3) тенгламада бу номаълумлар қатнашмайди.

$\vec{F}_1$ кучнинг A нуқтага нисбатан елкаси AL ни ACL учбурчакдан аниқлаймиз:

$$\frac{AL}{AC} = \sin 60^\circ \text{ ёки } AL = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{ м}.$$

(1) тенгламадан: $X_A = F_1 \cos 60^\circ = 1$ Н.

(2) тенгламадан: $Y_A = F_2 + F_1 \cos 30^\circ \approx 4{,}73$ Н.

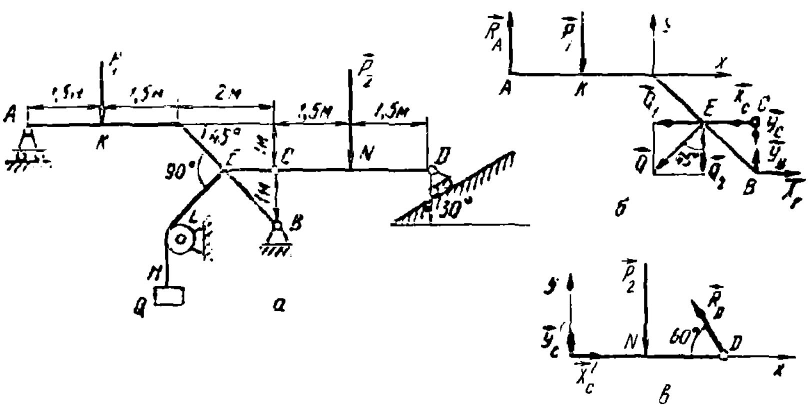
(3) тенгламадан: $M_A = F_3 \cdot AD - P_1 \cdot d + F_1 \cdot AL \approx 14{,}65$ Н·м

X_A, Y_A, M_A катталикларнинг мусбат ишора билан чиқиши уларнинг йуналишлари 9.6- расмда курсатилганидек булишини тасдиқлайди.

27- масала. 9.7- расм, *а* да тасвирланган, узаро C шарнир билан бириктирилган, AC ва CD бўлаклардан тузилган системага $P_1 = 6$ Н, $P_2 = 8$ Н кучлар таъсир этади. Системанинг E нуқтасига L блок орқали утказилган ипнинг бир учи бириктирилган бўлиб, иккинчи H учига $Q = 10$'Н юк осилган. Ишқаланишларни эътиборга олмай A, B, D таянчлардаги реакция кучлари ҳамда системанинг AC ва CD қисмлари орасидаги ўзаро таъсир кучлари аниқлансин. Керакли ўлчамлар расмда курсатилган.

Ечиш. ELH ипга осилган Q юкнинг системага таъсири EL бўйича содир булиб, L блокдаги ишқаланиш эътиборга олинмагани туфайли бу таъсир миқдори Q га тенг. Системани эркин ҳолга келтириш учун A ва D қузғалувчи шарнирлардаги $\vec{R}_A$, $\vec{R}_D$ реакция кучларини таянч текисликларига ўтказилган перпендикулярлар бўйича йўналтирамиз; B қўзғалмас шарнир реакция кучи эса узаро перпендикуляр $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ ташкил этувчилар орқали ифодаланади. Натижада бир текисликда ётувчи $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}, \vec{R}_A, \vec{R}_D, \vec{X}_B, \vec{Y}_B)$ кучлар системаси ҳосил бўлади.

Маълумки текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанат шартларини қўллаб учта тенглама тузиш мумкин. Ҳосил бўлган номаълумлар сони эса туртта. Учта тенгламалар системасидан тўртта номаълумни топиб бўлмайди.



9.7- расм.

Шунинг учун берилган системани C нуқтада икки қисмга ажратиб, ҳар қайси булакнинг мувозанатини алоҳида-алоҳида текширамиз. CD булакнинг AC қисмга таъсирини $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ кучлар билан, AC нинг CD га таъсирини $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ кучлар билан алмаштирамиз (9.7- расм, *б*, *в*). Таъсир акс таъсир қонунига кура $\vec{X}_C = -\vec{X}'_C$, $\vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C$. ABC қисм мувозанатини текширамиз. (9.7- расм, *б*). (9.15) кўринишдаги тенгламалар тузамиз. $\vec{Q}$ кучнинг C нуқтага нисбатан моментини ҳисоблашда Вариньон теоремасидан фойдаланамиз, яъни $\vec{Q}$ куч моменти ўрнига унинг $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ ташкил этувчиларининг моментларини ҳисоблаймиз. $\vec{Q}_1$ таъсир чизиғи C нуқтадан утгани учун унинг бу нуқтага нисбатан моменти нолга тенг.

$$\sum F_{ix} = 0:\ X_B - X_C - Q\cdot\cos 45° = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0:\ Y_B - Y_C - Q\cos 45° - P_1 + R_A = 0, \qquad (2)$$

$$\sum m_C(\vec{F}_i) = 0:\ X_B\cdot 1 - Q\cos 45°\cdot 1 + P_1\cdot 3{,}5 - R_A\cdot 5 = 0. \qquad (3)$$

CD булакнинг мувозанатини текширишда (9.17) куринишдаги мувозанат шартларидан фойдаланамиз:

$$\sum m_D(\vec{F}_i) = 0:\ P_2\cdot 1{,}5 - Y_C\cdot 3 = 0, \qquad (4)$$

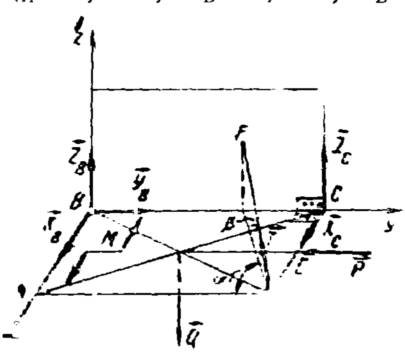
$$\sum m_C(\vec{F}_i) = 0:\ -P_2\cdot 1{,}5 + R_D\cdot 3\sin 60° = 0, \qquad (5)$$

$$\sum F_{ix} = 0:\ X'_C - R_D\cos 60° = 0, \qquad (6)$$

(1)—(6) тенгламалар системасини ечиб, номаълумларни аниқлаймиз:

$R_A = 4{,}66$ Н, $X_B = 9{,}38$ Н, $Y_B = 12{,}41$ Н, $X_C = 2{,}31$ Н, $Y_C = 4$ Н, $R_D = 4{,}62$ Н.

Топилган натижаларни қуйидагича текшириш мумкин: бутун система учун $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$ тенгламаларни тузиб, топилган қийматларни шу тенгламаларга қўйганда айният ҳосил бўлиши керак.



9.8- расм

28- масала. Оғирлиги $Q = 10$ Н булган туғри туртбурчак шаклидаги $ABCD$ плита (9.8- расм) сферик шарнир B, цилиндрик шарнир C ёрдамида деворга маҳкамланган ва у бир учи деворга, иккинчи учи плитага бириктирилган DF ип воситасида горизонтал ҳолда ушлаб турилади. Плитага моменти $M = 20$ Н·м булган жуфт ҳамда E нуқтада горизонтал бўйича йуналган $P = 5$ Н куч таъсир этади. $DE = EC = 0{,}5$ м, $BC = 2$ м, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ деб олиб, таянч реакциялари ва ипнинг таранглик кучи аниқлансин. Координата ўқлари расмда кўрсатилгандек олинсин.

Ечиш. $ABCD$ плита мувозанатини текширамиз. Унга таъсир этувчи $\vec{P}$, $\vec{Q}$ кучлар ва M моментли жуфтни расмда тасвирлаймиз. B сферик шарнирли боғланишни $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{Z}_B$ реакция кучлари билан, C цилиндрик шарнирли боғланишни $\vec{X}_C$ $\vec{Y}_C$ реакция кучлари билан ҳамда DF ип воситасидаги боғланишни унинг таранглик кучи $\vec{T}$ билан алмаштирамиз.

Натижада фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси ҳосил булади. Бинобарин, ихтиёрий кучлар системасининг мувозанат шартлари бўлмиш (9.13) муносабатларни тузамиз.

$\vec{T}$ кучнинг x ва y уқлардаги проекцияларини ҳисоблашда аввал уни Bxy текислигига, сўнгра ўқларга проекциялаймиз. $\vec{T}$ кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларини ҳисоблашда кучниг координата ўқларига нисбатан моментини аналитик усулда аниқлаш формуласи (8.14, a) формулалардан фойдаланиш қулай; бунда D нуқта координаталари (CD, BC, 0) булади.

$$\sum F_{ix} = 0:\ X_B + X_C - T\cos\beta\cdot\cos(90° - \alpha) = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0:\ Y_B - T\cos\beta\cdot\cos\alpha - P = 0, \tag{2}$$

$$\sum F_{iz} = 0:\ Z_B + Z_C - Q + T\sin\beta = 0, \tag{3}$$

$$\sum m_x(\vec{F}_i) = 0:\ -Q\cdot\frac{BC}{2} + T\sin\beta\cdot BC + Z_C\cdot BC = 0, \tag{4}$$

$$\sum m_y(\vec{F}_i) = 0:\ Q\cdot\frac{CD}{2} - T\sin\beta\cdot CD = 0, \tag{5}$$

$$\sum m_z(\vec{F}_i) = 0:\ M - X_C\cdot BC - P\cdot CE - T\cos\beta\cos\alpha\cdot CD + T\cos\beta\cdot\cos(90° - \alpha)\cdot BC = 0. \tag{6}$$

Бу олтита тенгламалар системасини ечиб, номаълумларни аниқлаймиз:

$$T = 5{,}77\ \text{Н},\ X_C = 10{,}53\ \text{Н},\ Z_C = 0,\ Z_B = 5\ \text{Н},$$
$$Y_B = 3{,}56\ \text{Н},\ X_B = -8{,}03\ \text{Н}.$$

X_B нинг манфий ишорали чиқиши бу куч расмда кўрсатилганига тескари йўналганлигини билдиради.

Боғланиш турлари курилаётганда агар жисм ғадир-будур сирт воситасида боғланишда булса, нормал реакция кучи билан бирликда ишқаланиш кучи ҳам мавжуд бўлиши ҳақида қисқача тўхталган эдик. Жисмларнинг бир-бирига нисбатан ҳолати ёки ҳаракатининг характерига қараб ишқаланишлар ҳам турлича бўлади. Бир жисм иккинчи жисм сирти буйича ҳаракати вақтида ёки ҳаракатга келтирилмоқчи бўлганда бу жисмлар сиртларининг бир-бирига тегиб турган уринма текисликларида ҳосил бўладиган ишқаланишлар *сирпанишдаги ишқаланишлар* дейилади.

Жисм иккинчи жисм устида думалаётганида ёки думалашга интилаётганда (масалан, цилиндр текислик устида думалаши ёки думалаши олдида) сирпанишдаги ишқаланишдан ташқари бу жисмлар сиртларининг деформацияланиши натижасида жисмнинг думалашига қарши таъсир этувчи жуфт ҳосил бўлади; бундай ишқаланиш *думалашдаги ишқаланиш* дейилади.

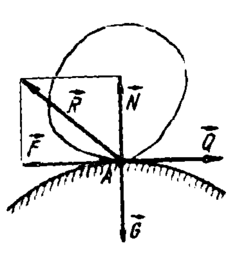
Бирор сиртда тинч турувчи жисмга (масалан, шарга) моменти ушбу сиртга тик бўлган жуфт таъсир қилишида ҳосил бўлган ишқаланиш *буралишдаги ишқаланиш* дейилади.

Ишқаланишлар фақатгина қаттиқ жисмлар орасидагина эмас, балки қаттиқ жисм билан суюқлик ёки газлар орасида ҳам бўлиши мумкин. Қаттиқ жисм билан суюқлик ёки газлар орасидаги ишқаланиш жисм уларга нисбатан ҳаракатда бўлгандагина содир бўлади.

Назарий механикада фақат қаттиқ жисмлар орасида содир бўладиган ишқаланишлар — қуруқ ишқаланишлар ўрганилади.

43-§. Сирпанишдағи ишқаланиш

Оғирлиги $\vec{G}$ булган жисм қўзғалмас сирт устига қўйилган бўлсин. Қўзғалмас сиртнинг нормал реакциясини $\vec{N}$ десак (10.1-расм), $\vec{G}$ ва $\vec{N}$ ўзаро мувозанатлашиб, жисм тинч ҳолатда туради. Жисмнинг сирт билан уриниш нуқтасига, сиртга ўтказилган уринма текисликда ётувчи бирор $\vec{Q}$ куч қўяйлик. Агар жисм ва сирт идеал силлиқ бўлса, бу қўйилган $\vec{Q}$ куч ҳар қандай кичик бўлмасин, жисм ҳаракатга келиши керак. Тажриба кўрсатадики, кучнинг маълум бирор Q_{max} миқдоригача жисм сирт устида сирпанмай тураверади. $\vec{Q}$ кучни ошира бориш натижасида жисм сирт устида сирғана бошлайди. Бу эса $\vec{N}$ нормал реакция кучидан ташқари боғланиш сиртига ут-



10.1-расм.

казилган уринма текисликда ётувчи бирор $\vec{F}$ реакция кучи ҳам таъсир этишини билдиради, яъни реакция кучи $\vec{N}$ ва $\vec{F}$ ташкил этувчилардан иборат булади. Реакция кучининг $\vec{F}$ ташкил этувчиси *сирпанишдаги ишқаланиш кучи* дейилади.

Сирпаниш бошлангунча $\vec{F}$ ва $\vec{Q}$ кучлар узаро мувозанатлашади: $\vec{F} = -\vec{Q}$; бундан курамизки, $\vec{Q}$ кучнинг ортиши билан $\vec{F}$ ишқаланиш кучи ҳам орта боради, яъни $\vec{F}$ куч ҳам нолдан $\vec{Q}_{max}$ га мос келувчи бирор $\vec{F}_{max}$ гача ўзгаради:

$$0 \leqslant F \leqslant F_{max}. \qquad (10.1)$$

Шу нуқтаи назардан ишқаланиш кучи ноаниқ ҳисобланади. Шунинг учун жисмнинг нисбий мувозанати ҳолатида ишқаланиш кучининг ўлчови сифатида унинг максимал қиймати олинади ва у *сирпанишдаги статик ишқаланиш кучи* дейилади. Бир-бирига нисбатан ҳаракатдаги жисмлар орасида содир буладиган ишқаланиш кучлари *динамик ишқаланиш кучлари* дейилади.

Ишқаланиш купгина механик жараёнларда содир булишига қарамасдан, унинг аниқ қонунлари ўрнатилмаган. Бу ерда биз *Кулон* (1736 — 1806) томонидан жуда куп тажрибалар асосида урнатилган ва практик талабларни қондирувчи қуйидаги *ишқаланиш қонунларини* келтирамиз.

1. *Ишқаланиш кучи жисмларнинг бир-бирига тегиб турувчи нуқталаридан жисмлар сиртларига утказилган уринма текислик буйлаб таъсир қилиб, унинг максимал қиймати нормал реакцияга пропорционал булади:*

$$F_{max} = f \cdot N, \qquad (10.2)$$

бунда f — *сирпанишдаги статик ишқаланиш коэффициенти* дейилади. У ҳар хил жисмлар учун турлича булиб, тажрибадан аниқланади; f ўлчов бирлигига эга эмас.

2. *Ишқаланиш кучининг қиймати ишқаланувчи сиртларнинг улчамига боғлиқ эмас.*

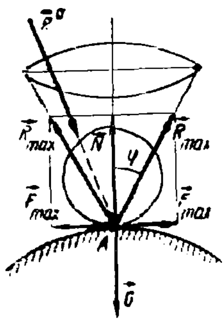
3. *Ишқаланиш коэффициенти ишқаланувчи жисмлар сиртларининг ишланишига, уларнинг физик хоссалари ва ҳолатларига* (намлик, температура ва ҳ. к.) *боғлиқ.*

4. *Динамик ишқаланиш кучлари статик ишқаланиш кучидан кичик булади.*

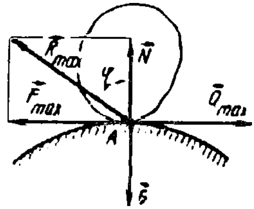
Шундай қилиб, бирор сиртга тегиб турган жисм сирпаниш олдида (мувозанат чегарасида) булса, сиртнинг тўла реакция кучи узининг максимал қийматига эришади:

$$\vec{R}_{max} = \vec{N} + \vec{F}_{max}.$$

Максимал тўла реакция кучи $\vec{R}_{max}$ билан нормал реакция ку-



10.2- расм.



10.3- расм.

чи N ташкил қилган φ бурчак *ишқаланиш бурчаги* дейилади. 10.2- расмдан:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{max}}{N}.$$

(10.2) га кўра бу тенгликдан

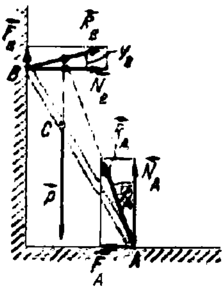
$$\operatorname{tg} \varphi = f \qquad (10.3)$$

келиб чиқади, яъни ишқаланиш бурчагининг тангенси ишқаланиш коэффициентига тенг.

Жисмни сирпантирувчи кучлар боғланиш сиртига утказилган уринма текислик бўйича турлича йўналишларда қуйилиши мумкин; шунга мос равишда максимал ишқаланиш кучлари ҳам уринма текисликда турлича йўналиши мумкин. Нормал реакция кучига нисбатан ҳар бир максимал ишқаланиш кучига мос келувчи тула реакция кучини утказсак (10.3- расм), унинг геометрик ўрни конус сиртни ифодалайди; бу конус *ишқаланиш конуси* дейилади. Агар барча йуналишлар буйича ишқаланиш коэффициенти бир хил бўлса, ишқаланиш конуси доиравий конусдан иборат булади.

Ғадир-будур сирт воситасида боғланишдаги жисмга қуйилган кучлар системаси мувозанатда бўлса, бу кучлар қаторида ишқаланиш кучи ҳам иштирок этади. Умуман, ишқаланиш кучи (10.1) муносабатга кўра ўзгариши мумкин булгани туфайли, бундай кучлар системасининг мувозанат шартлари тенглама ва тенгсизликлар орқали ифодаланади.

Баъзи мувозанат масалаларини ҳал қилишда ишқаланиш конусидан фойдаланиш мумкин. Агар жисмни ҳаракатлантириши мумкин бўлган кучлар — актив кучлар $\vec{R}^a$ тенг таъсир этувчига келтирилса, икки куч мувозанати ҳақидаги аксиомага асосан, жисмнинг мувозанат ҳолатида бу $\vec{R}^a$ куч тўла реакция кучи $\vec{R}$ билан бир туғри чизиқда ётиши ва унинг таъсир чизиғи ишқаланиш конуси учидан утиши керак. Мувоза-



10.4- расм.

нат чегарасида актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси ишқаланиш конусининг ясовчиси буйлаб йўналади. Бинобарин, *ғадир-будур сирт устидаги жисмнинг мувозанатда булиши учун унга қўйилган актив кучлар тенг таъсир этувчисининг таъсир чизиғи ишқаланиш конуси учидан утиб, шу конус ичида ёки конус ясовчиси буйлаб йуналган бўлиши етарлидир.*

29- масала. Деворга 30° бурчак билан тираб қўйилган узунлиги l бўлган AB нарвон (10.4- расм) бўйича $\vec{G}$ оғирликдаги киши кўтарилади. Нарвон билан пол ва девор орасидаги ишқаланиш коэффициенти мос равишда $f_A = \operatorname{tg} 20°$, $f_B = \operatorname{tg} 10°$. Киши нарвон бўйича қанча масофага кўтарилгунча нарвон сирпаниб кетмайди. Нарвоннинг оғирлиги ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Нарвон мувозанат ҳолатининг бузилиши олдидаги чегаравий ҳолни кўрайлик. Нарвонга таъсир этувчи актив куч кишининг оғирлиги $\vec{G}$ дан иборат. Нарвоннинг A ва B нуқталаридаги тўла реакция кучлари $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ ни $\vec{G}$ куч қаторига қўшиб, уни эркин ҳолга келтирамиз. $\vec{R}_A$ ва $\vec{R}_B$ йўналишлари (10.3) муносабатга кура аниқланиши мумкин: $\varphi_A = 20°$, $\varphi_B = 10°$.

Мувозанат чегарасида кучлар системасининг мувозанат тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\sum F_{ix} = 0: R_B \cos 10° - R_A \cos 70° = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0: R_B \sin 10° + R_A \sin 70° - P = 0, \qquad (2)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0: P \cdot AC \cos 60° - R_B \cdot AB \cdot \sin 70° = 0. \qquad (3)$$

Аниқланиши керак бўлган AC масофани (3) тенгламадан топиш мумкин. Бироқ бунинг учун аввал $\vec{R}_B$ ни билиш лозим. R_B ни (1) ва (2) тенгламалар системасидан топамиз. (1) дан:

$$R_A = \frac{\cos 10°}{\cos 70°} \cdot R_B.$$

Буни (2) га қўямиз:

$$R_B \sin 10° + R_B \cdot \frac{\cos 10°}{\cos 70°} \cdot \sin 70° = P.$$

Бундан $R_B = \dfrac{P \cos 70°}{\sin 80°}$.

R_B нинг топилган қийматини (3) га қўйиб, AC ни аниқлаймиз:

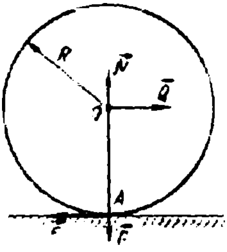
$$AC=\frac{AB\cdot\cos 70^\circ\cdot\sin 70^\circ}{\cos 60^\circ\cdot\sin 80^\circ}\approx 0{,}65l.$$

Агар киши нарвон бўйича $0{,}65l$ дан катта масофага кўтарилса, $\vec{P}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ нинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишмайди ва уч куч мувозанатининг зарурий шарти бажарилмайди. Агар киши нарвон бўйлаб $0{,}65l$ дан кичик масофада турган бўлса, тўла реакция кучларининг тегишлича нормал реакция кучи билан ташкил қилган ишқаланиш бурчаклари максимал қийматига эришади. Бу ҳолда $F_A\leqslant f\cdot N_A$, $F_B\leqslant f\cdot N_B$ бўлиб, $\vec{P}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишади ва уч куч мувозанатининг зарурий шарти бажарилади. Шундай қилиб, киши нарвон бўйлаб $0{,}65l$ масофагача кўтарилганда нарвон сирпаниб кетмайди.

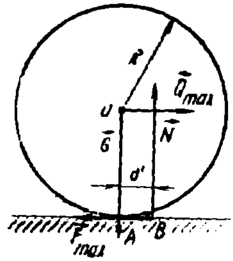
44-§. Думалашдаги ишқаланиш

Радиуси R, оғирлиги $\vec{G}$ бўлган доиравий цилиндр шаклидаги ғалтак горизонтал текисликда жойлашган бўлсин (10.5-расм). Ғилдирак маркази C нуқтага максимал ишқаланиш кучи $\vec{F}_{\max}$ дан кичик $\vec{Q}$ кучни қўяйлик. У ҳолда ғалтак билан горизонтал текисликнинг A уриниш нуқтасида миқдор жиҳатдан $\vec{Q}$ га тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлган F ишқаланиш кучи ҳосил бўлади ва у ғалтакнинг горизонтал текислик бўйлаб сирпанишига қаршилик кўрсатади. A нуқтадаги нормал реакция кучини $\vec{N}$ десак, у ғалтак оғирлиги $\vec{G}$ билан мувозанатлашади. Шунга кўра $\vec{F}$ ва $\vec{Q}$ кучлардан тузилган $(\vec{F}, \vec{Q})$ жуфт таъсирида ғалтак думалаши керак.

Бироқ, тажрибаларнинг кўрсатишича, $\vec{Q}$ кучнинг бирор $Q_{\max}$ миқдоригача ғалтак думаламасдан тураверади ва $\vec{Q}$ куч миқдори $Q_{\max}$ дан катта бўлгандагина ғалтакнинг думалаши бошланади. Бунинг сабаби шундаки, жисмларнинг деформацияси туфайли, бу жисмлар битта нуқтада эмас, балки бирор AB оралиқда бир-бирига уринади (10.6-расм). Оқибатда, $\vec{Q}$ кучнинг таъсирида A нуқтадаги босим B нуқтадаги босимга нисбатан кичик бўлади. Натижада $\vec{N}$ реакция кучи A нуқтадан $\vec{Q}$ куч таъсир этаётган томонга қараб бироз силжиган бўлади. $\vec{Q}$ кучнинг бирор $Q_{\max}$ қийматигача бу оралиқ ҳам ортиб боради; $Q=Q_{\max}$ учун бу оралиқ δ га тенг дейлик. Шундай қи-



10.5 расм.



10.6- расм.

либ, ғалтакнинг думалаши олдидаги чегаравий ҳолатида унга иккита жуфт таъсир этар экан. Бу жуфтларнинг бири моменти $Q_{max} \cdot R$ бўлган $(\vec{Q}_{max}, \vec{F}_{max})$ жуфтдан, иккинчиси эса моменти $N \cdot \delta$ бўлган $(\vec{N}, \vec{G})$ жуфтдан иборат. Мувозанат чегарасида бу жуфтларнинг моментлари узаро тенгдир:

$$Q_{max} \cdot R = N \cdot \delta. \qquad (10.4)$$

Ғалтакнинг думалашига қаршилик курсатувчи $(\vec{G}, \vec{N})$ жуфт *думалашдаги ишқаланиш жуфти*, бу жуфт моменти *думалашдаги ишқаланиш моменти* дейилади. Думалашдаги ишқаланиш моменти $M\,[O, M_{max}]$ оралиқда узгариши мумкин; бунда M_{max} ғалтакнинг думалашдан олдинги — мувозанат чегарасидаги моментдир:

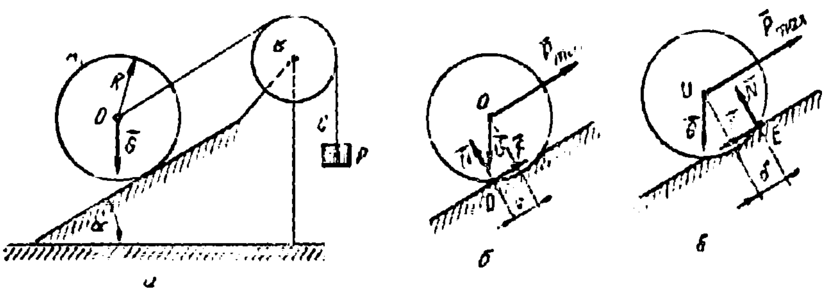
$$M_{max} = N \cdot \delta \qquad (10.5)$$

(10.5) ифодадаги δ — *думалашдаги ишқаланиш коэффициенти* дейилади ва у узунлик бирлигида улчанади.
(10.4) муносабатдан

$$Q_{max} = \frac{\delta}{R} N.$$

Тажрибаларнинг кўрсатишича $\frac{\delta}{R}$ катталик думалайдиган жисмлар учун ишқаланиш коэффициенти f га қараганда анча кичик бўлади. Шунга кўра баъзи жисмларни сирпантириб ҳаракатга келтиришга қараганда думалатиш учун кам куч сарф қилинади.

30- масала. Оғирлиги $G = 80$ Н, радиуси $R = 1$ м бўлган A цилиндрик ғалтак горизонт билан $\alpha = 30°$ бурчак ташкил этувчи қия текисликда, бир учига P юк осилган ва B блок орқали утказилган ип воситасида, мувозанат ҳолатда туради (10.7- расм, *а*). Думалашдаги ишқаланиш коэффициенти $\delta = 0{,}08$ м. Ғалтак мувозанатда булиши учун осилиши керак булган P юкнинг энг кичик ва энг катта қиймати топилсин. B блокдаги ишқаланиш ҳисобга олинмасин.



10.7- расм.

Ечиш. Аввал ғалтак мувозанатда бўлиши учун қўйилиши керак бўлган P юкнинг энг кичик қиймати P_{min} ни топамиз. Бу ҳолда ғалтак қия текислик бўйлаб пастга ҳаракатланиши мумкин. Шунинг учун тула реакция кучининг қўйилиш нуқтаси ғалтакнинг O марказдан қия текисликка туширилган перпендикулярнинг чап томонида $\delta = 0{,}08$ м масофада олинган нуқтада булади (10.7- расм, *б*).

Ғалтакка таъсир этувчи оғирлик кучи $\vec{G}$ ва ипдаги таранглик кучи $\vec{P}_{min}$ қаторига реакция кучининг ташкил этувчилари $\vec{F}$ ва $\vec{N}$ ни қўйиб, ғалтакни эркин ҳолга келтирамиз.

Ҳосил бўлган бир текисликда ётувчи ($\vec{G}$, $\vec{P}_{min}$, $\vec{F}$, $\vec{N}$) кучлар системасининг мувозанат тенгламаларидан бирини — бу кучларнинг D нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндисини тузамиз; момент марказини D нуқтада олсак, $\vec{F}$, $\vec{N}$ номаълум кучлар тенгламада қатнашмайди. $\vec{G}$ кучнинг моментини ҳисоблашда уни ўзаро перпендикуляр икки ташкил этувчига ($G_1 = G\cos\alpha$, $G_2 = G\sin\alpha$) ажратиб, Вариньон теоремасидан фойдаланамиз; шунингдек, $\vec{P}_{min}$ ва $\vec{G}_2$ кучлар моментларини ҳисоблашда ғилдиракнинг кичик деформациясини ҳисобга олмаймиз.

Шундай қилиб, $\sum m_D(\vec{F}_i) = 0$ тенглама қуйидагича булади:

$$-G \cdot \cos\alpha \cdot \delta + G \cdot \sin\alpha \cdot R - P_{min} \cdot R = 0.$$

Бу тенгламадан

$$P_{min} = \frac{G(\sin\alpha \cdot R - \cos\alpha \cdot \delta)}{R}.$$

Масала шартига кўра берилганларни бу тенгламага қўйсак, $P_{min} = 35{,}2$ Н келиб чиқади.

Энди ғалтак мувозанатда бўлиши учун қўйилиши керак булган юкнинг энг катта қийматини аниқлаймиз. Бу ҳолда реакция кучларининг қуйилиши 10.7-расм, *в* да курсатилган.

Аввалгига ўхшаш $\sum m_E(\vec{F}_i)=0$ тенглама тузамиз:

$$G\cos\alpha\cdot\delta+G\sin\alpha\cdot R-P_{\max}\cdot R=0,$$

$$P_{\max}=\frac{G(\cos\alpha\cdot\delta+\sin\alpha\cdot R)}{R}=44{,}80\ \text{Н}.$$

Демак, ғалтак мувозанатда булиши учун P юк миқдори 35,2 Н дан кичик булмаслиги, 44,80 Н дан катта бўлмаслиги керак.

XI боб. ФЕРМА

45-§. Ферма ҳақида тушунчалар

Стерженларнинг шарнирлар ёрдамида ўзгармас қилиб туташтирилишидан ҳосил булган иншоот ферма дейилади. Стерженларнинг учларини туташтирувчи нуқта *тугун* деб аталади. Фермалар фазовий ва текисликда жойлашган булиши мумкин. Фермалар стерженларининг уқлари битта текисликда ётса, у *текис ферма* дейилади. Биз асосан текис фермаларни урганамиз.

Фермалар турли хил иншоотлар қуришда, кутарувчи машина ва механизмлар яратишда кенг қулланилади. Фермага қўйиладиган кучлар ферма текислигида жойлашган булиб, улар фақат тугунларга қуйилган деб фараз қилинади ва ферма стерженларининг оғирликлари, шарнирлардаги ишқаланишлар ҳисобга олинмайди. Бунда стерженларда улар бўйлаб йўналган фақат чузувчи ёки сиқувчи зуриқиш кучлари пайдо бўлади.

Ферма геометрик узгармас бўлиши учун қандай шарт бажарилишини топамиз. Тугунларининг сони n та булган фермани қарайлик. Равшанки, бундай фермада биринчи 3 та тугунни ҳосил қилиш учун 3 та стержень керак. Навбатдаги ҳар бир тугунни ҳосил қилиш учун камида яна иккита стержень олиниши керак. Шундай қилиб, биринчи 3 та тугундан кейинги қолган $(n-3)$ та тугунларни ҳосил қилиш учун камида $2(n-3)$ стержень бўлиши керак. У ҳолда ҳамма стерженларнинг сони камида

$$N=3+2(n-3)=2n-3, \qquad (11.1)$$

бўлади. (11.1) га *ферманинг геометрик мустаҳкамлик шарти* дейилади. Агар $N>2n-3$ булса, ферма *ортиқча стерженли ферма* **дейилади.** Агар $N=2n-3$ бўлса, фермада ортиқча стерженлар бўлмайди. $N<2n-3$ бўлганда стерженларнинг сони ферманинг геометрик мустаҳкамлигини таъминламайди.

Берилган кучлар таъсирида ферма стерженларида пайдо бўладиган зўриқишларни ва ферманинг таянч реакцияларини аниқлашга *фермани ҳисоблаш* дейилади. Берилган кучлар ва таянч реакциялари ферма учун ташқи кучлар, стерженлардаги зуриқишлар эса ички кучлар ҳисобланади. Агар берилган фермани ҳисоблашда таянч реакцияларини ва стерженлардаги зўриқишларни қаттиқ жисм статикаси усуллари билан аниқлаш мумкин булса, бундай ферма *статик аниқ ферма* бўлади. Акс ҳолда ферма *статик аниқмас* булади. Ферма статик аниқ бўлиши учун қандай шартга бўйсунишини топамиз. Аввало шуни таъкидлаш керакки, қаралаётган ферма учун номаълум таянч реакцияларининг сони учтадан ортиқ булмаслиги керак, чунки текисликдаги кучлар системаси мувозанат шартлари учта тенглама билан ифодаланади. Акс ҳолда ферма учун таянч реакцияларини аниқлаш масаласи статик аниқмас масала бўлади. Номаълум таянч реакцияларининг сонини 3 та десак, яна N та стерженлардаги зуриқишлар ҳам номаълумдир. Демак ҳаммаси булиб $N+3$ номаълум бўлади. Ферма тугунларининг сони n та бўлсин. Ҳар бир тугунни ажратиб олиб, унинг мувозанатини алоҳида текширса бўлади. Тугунларга таъсир қилувчи кучлар текисликда бир нуқтага қўйилган кучлар булгани учун ҳар бир тугунга 2 тадан мувозанат тенгламасини тузиш мумкин. Шундай қилиб, барча тугунлар учун тузилган мувозанат тенгламаларининг сони $2n$ та булади. Ферма статик аниқ булиши учун номаълумларнинг сони тенгламаларнинг сонига тенг булиши керак, яъни

$$N+3=2n;$$

бундан $N=2n-3$ ҳосил бўлади. Бинобарин, ферма статик аниқ булиши учун стерженларнинг сони $(2n-3)$ та булиши керак экан. Лекин бундай шарт ортиқча стерженларсиз ферма учун уринли эди. Демак, ортиқча стерженларсиз ферма статик аниқ ферма бўлади.

46-§. Тугунни кесиш усули билан фермани ҳисоблаш

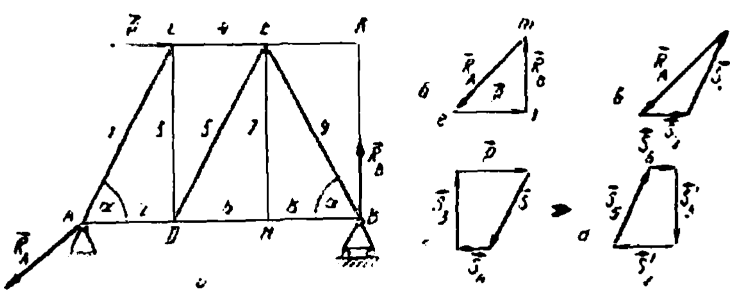
Ферма стерженларидаги зуриқишларни аниқлашнинг турли усуллари мавжуд. Ҳар қандай усулда ҳам аввало номаълум таянч реакциялари аниқланади. Сунгра ферма стерженларидаги зўриқишларни аниқлашга утилади. Бунда тугунларни кесиш усули билан стерженлардаги зуриқишларни топиш учун ферма тугунлари бирин-кетин ёпиқ контур ёрдами билан кесилади. *Кесишни шундай тугундан бошлаш керакки, ўтказилган контур фақат номаълум зўриқишли иккитадан кўп бўлмаган стерженнигина кесиб ўтсин.* Кесилган тугун мувозанатда бўлгани учун унга қўйилган кучлар кўпбурчаги ёпиқ булиши керак. Бу тугун кучлари учун кучлар кўпбурчагини тузиб ундан график усулда стерженлардаги номаълум зўриқишлар аниқланади. Кесиш учун навбатдаги тугунни танлашда кесувчи контур яна номаълум зўриқиши иккитадан кўп булмаган стерженларнигина кесадиган бўлиши керак.

Тугунни кесиш усули билан ферма стерженларидаги зуриқишларни аналитик усулда ҳам аниқлаш мумкин. Бунда ҳар бир кесиб ажратилган тугунга таъсир қилувчи кучлар учун бир нуқтага қуйилган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари тузилади ва бу тенгламалардан номаълум кучлар аниқланади.

Мисол тариқасида фермани тузувчи стерженларнинг узунликлари, α, бурчак ҳамда C нуқтага қўйилган горизонтал $\vec{P}$ куч берилган деб, 11.1-расм, *а* да курсатилган фермани график усулда ҳисоблашни курамиз.

Агар кесиб олиниб мувозанати текширилаётган тугундаги кучлар учун тузилган кучлар купбурчаги ёрдамида топилган куч (стерженнинг реакцияси) мос стержень буйлаб тугунга қараб йуналган булса, у стерженнинг қисилишини ифодалайди, акс ҳолда стержень чузилади. Бир тугун мувозанати курилгандан кейин иккинчи тугунга ўтилаётганда бу тугунларни бирлаштирувчи стержендаги зуриқиш кучи таъсир, акс таъсир қонунига кура ҳисобланишини эътиборга олиш керак.

Ферманинг стерженларини 1, 2, . . ., 8, 9 рақамлар билан белгилаймиз. Аввало таянч реакцияларини аниқлаймиз. *В* нуқтадаги таянч ғилдиракка урнатилган булгани учун реакция кучи вертикал равишда юқорига йуналади. Лекин унинг модули номаълум. *А* таянчдаги $\vec{R}_A$ реакциянинг модули ҳам, йўналиши ҳам номаълум. Берилган ферма учта $\vec{P}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ кучлар таъсирида мувозанатда турибди. Демак, бу кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишиши керак. $\vec{P}$ кучнинг таъсир чизиғини $\vec{R}_B$ реакция кучининг таъсир чизиғи билан бирор *К* нуқтада кесишгунча давом эттирамиз. $\vec{R}_A$ реакция кучининг таъсир чизиғи ҳам шу *К* нуқтадан ўтиши керак. $\vec{P}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ кучлар учбурчагини чизамиз. Учбурчак чизишни миқдор ва йуналиши маълум кучдан бошлаймиз. Берилган *Р*



11.1-расм.

кучнинг модули ва йўналишига мос $\vec{el}=\vec{P}$ векторни e нуқтага қуямиз (11.1-расм, *б*), сўнгра унинг e ва l нуқталаридан мос равишда AK ва BK чизиқларга параллел қилиб чизиқлар утказамиз. Ҳосил булган elm учбурчак кучлар учбурчаги бўлади. У ёпиқ булиши керак. Бинобарин, бу учбурчакни $\vec{P}$ вектор йуналишида периметр буйлаб айланиб чиқиб $\vec{R}_A$ ва $\vec{R}_B$ реакцияларнинг йуналишларини белгилаймиз. Бу учбурчак me ва lm томонларининг узунликлари мос равишда $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ реакция кучларининг модулларини ифодалайди. $\vec{R}_A$ векторнинг AB билан ташкил қилган бурчагини транспортир ёрдамида $\widehat{KAB}$ бурчакни улчаш билан аниқлаш ёки ABK учбурчакка синуслар теоремасини қуллаб топиш мумкин. Асосий расмда $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ реакция кучларини кучлар кўпбурчагидаги модуллари ва йуналишларига мос равишда курсатиб қўямиз.

Энди тугунни кесиш усулини қўллаб стерженлардаги зўриқишларни аниқлашга утамиз. Кесишни шундай тугундан бошлаш кераккки, унда фақат иккита стержень бириккан бўлсин. Бундай тугун ёки A, ёки B тугун булади. A тугунни кесайлик. Бу тугунга учта куч қўйилган: маълум $\vec{R}_A$ куч ва кесилган *1* ва *2* стерженларнинг $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ реакциялари. Бу реакциялар мос стерженлар буйлаб йуналган, шунинг учун уларнинг таъсир чизиқлари маълум ҳисобланади. Уларнинг модулларини аниқлаш мақсадида шу учта куч учун ёпиқ купбурчак чизамиз (11.1-расм, *в*: ихтиёрий нуқтадан бошлаб $\vec{R}_A$ кучни ифодаловчи вектор утказамиз. Бу векторнинг бошидан ва охиридан *1* ва *2* стерженларга параллел қилиб чизиқлар утказамиз, бу чизиқларнинг кесишган нуқтаси кучлар учбурчагининг учинчи учини беради. Учбурчакнинг *1* ва *2* стерженларга параллел бўлган томонлари эса мазкур стерженлардаги изланаётган зуриқишларга тенг булган $\vec{S}_1$ ва $\vec{S}_2$ реакциялар модулини ифодалайди. Кучлар учбурчагида $\vec{S}_1$ ва $\vec{S}_2$ кучларнинг йўналишларини аниқлаш учун бу учбурчакни маълум $\vec{R}_A$ куч йуналишида периметр буйлаб айланиб чиқиш керак Кучлар учбурчагидан $\vec{S}_1$ ва $\vec{S}_2$ кучларни ферма стерженларига кучириб, $\vec{S}_1$ куч ҳам, $\vec{S}_2$ куч ҳам A тугундан чиқаётганини кўрамиз. Демак, *1* ва *2* стерженлар чўзилишга ишлайди. A тугундан кейин C тугунни кесиш керак. Бу тугунга тўртта куч қуйилган; улардан $\vec{P}$ куч берилган, *1* стерженнинг реакцияси аниқланган, *3* ва *4* стерженларнинг реакциялари эса номаълум. *C* тугунга таъсир қилувчи кучлар учун кучлар купбурчагини ясашни маълум кучларни жойлаштиришдан бошлаш керак. Бунда *1* стерженнинг *C* тугунига қуйилган $\vec{S}_1'$ реакция кучи ушбу стерженнинг *A* тугунига қўйилган $\vec{S}_1$ реакциясига тескари йўналганлигига, яъни $\vec{S}_1' = -\vec{S}_1$ эканлигига эътибор бериш зарур (11.1-расм, *г*). *C* тугунга нисбатан кучлар купбурчагини ясаш учун ихтиёрий нуқтадан $\vec{P}$ кучни ифодаловчи векторни утказамиз, бу векторнинг учидан бошлаб $\vec{S}_1'$ векторни жойлаштирамиз, сўнгра эса *P* векторнинг бошидан ва $\vec{S}_1'$ векторнинг учидан *3* ва *4* стерженларга параллел қилиб чизиқлар утказамиз. Ҳосил бўлган ёпиқ тўртбурчакнинг *3* ва *4* стерженларга параллел булган томонларининг узунлиги бу стерженлардаги изланаётган зуриқишларнинг S_3, S_4 сон қийматларини ифодалайди. Маълум $\vec{P}$ ёки $\vec{S}_1'$ кучларнинг йўналишида бу тўртбурчакнинг периметри бўйлаб айланиб чиқиб, $\vec{S}_3$, $\vec{S}_4$ кучларнинг йўналишларини ҳам аниқлаймиз. $\vec{S}_3$, $\vec{S}_4$ кучларни ферманинг *3* ва *4* стерженларига кўчириб кўрамизки, бу кучлар *C* тугунга томон йўналганлигидан *3* ва *4* стерженлар қуйилган кучлар таъсирида қисилар экан.

Энди *D* тугунни кесиш керак, чунки бу тугунга қўйилган тўртта кучдан иккитаси (*2* ва *3* стерженлардаги реакциялар) аниқланган, *5* ва *6* стерженлардаги реакцияларгина номаълум. Бу кучларни $\vec{S}_5$ ва $\vec{S}_6$ орқали белгилайлик. *D* тугун учун кучлар кўпбурчагини қуришда *2* ва *3* стерженларнинг *D* тугунга қўйилган $\vec{S}_2'$ ва $\vec{S}_3'$ реакциялари уларнинг *A* ва *C* тугунларга қўйилган реакцияларига модуль жиҳатдан тенг, йўналиш жиҳатидан қарама-қарши эканини, яъни $\vec{S}_2' = -\vec{S}_2$ ва $\vec{S}_3' = -\vec{S}_3$ ни эътиборга олиш керак. Бу кучлар кўпбурчаги 11.1-расм, *д* да кўрсатилган. $\vec{S}_5$ ва $\vec{S}_6$ кучларнинг йўналишидан кўрамизки *5* стерженда ҳам, *6* стерженда ҳам зўриқиш чўзилишдан иборат.

Навбатдаги тугунни қирқишда бу тугунда зўриқиши ҳали аниқланмаган иккитадан ортиқ бўлмаган стержень бириккан бўлишига эътибор бериш керак. Шунинг учун *D* тугундан кейин энди *H* тугунни ёки *E* тугунни, ҳатто *B* тугунни кесиб қараш мумкин.

Албатта, ферма стерженларидаги зўриқишларни аниқлашни *B* тугундан бошласа ҳам бўлади. Бунда *B* тугунни, сўнгра *E* тугунни, кейин эса *D*, *C*, *A* тугунлардан бирини кесиб қараш керак бўлади.

47-§. Риттер усули билан фермани ҳисоблаш

Фермани ҳисоблашда унинг барча стерженларидаги зуриқишларни аниқлаш керак булса, албатта, тугунни кесиш усули қўл келади. Агар унинг баъзи стерженларидаги зўриқишларнигина аниқлаш керак бўлса, Риттер усулидан фойдаланиш қулай. Бу усул аналитик усул булиб, ферма зуриқиши аниқланадиган стерженни кесиб утувчи бирор контур билан фикран икки қисмга ажратилади ва бир қисмининг мувозанати текширилади. Фермани кесишдан аввал унинг таянч реакцияларини аниқлаб олиш керак. Фермани кесишда зўриқишлари номаълум бўлган стерженларнинг сони учтадан ошмаслиги шарт, акс ҳолда зўриқишларнинг сони кўпайиб, масала статик аниқмас бўлиб қолади. Кесилган стерженлардаги номаълум зўриқишларнинг йўналишини ихтиёрий қабул қилиш мумкин. Одатда кесилган стерженлар чўзилади деб, зўриқишларферманинг ташлаб юборилган қисми томон йўналтирилади. Масала ечилганда зўриқишлардан бирортаси манфий ишорали чиқса, бу ишора унинг ҳақиқий йўналиши қабул қилинган йўналишга қарама-қарши бўлишини кўрсатади. Ажратилган қисмдаги учта номаълум зўриқиш текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламаларидан аниқланади.

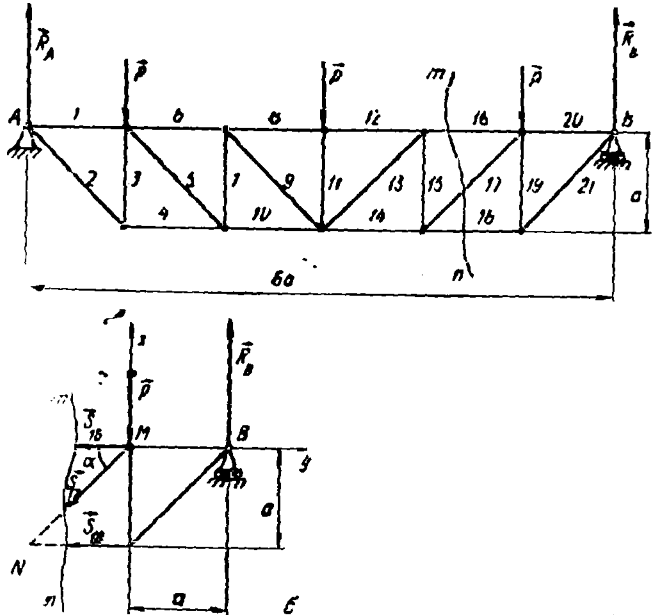
Тенгламалар тузишда имкони бўлса, ҳар бир тенгламада биттадан номаълум иштирок этадиган қилиб олиш мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун текисликдаги кучлар системаси мувозанат шартларининг иккинчи ва учинчи формаларидан, яъни (9.16) ёки (9.17) шартлардан фойдаланиш қулай. (9.16) куринишдаги тенгламаларни тузишда момент марказлари учун иккитадан номаълум реакция кучларининг таъсир чизиқлари кесишадиган нуқталарни олиш тавсия этилади. Агар реакция кучлари номаълум стерженлардан иккитаси ўзаро параллел бўлса, (9.17) куринишдаги тенгламалардан фойдаланиш яхши; бунда иккита момент маркази учун нуқталар аввалги қоида бўйича танланади, x ўқ эса параллел стерженларга перпендикуляр равишда олинади.

Масалан, 11.2-расм a да кўрсатилган ферманинг учта тугунларига бир хилдаги $\vec{P}$ кучлар қўйилиб, 16, 17, 18 стерженлардаги $\vec{S}_{16}$, $\vec{S}_{17}$, $\vec{S}_{18}$ зўриқишларни аниқлаш талаб қилинсин.

Аввало таянч реакцияларини аниқлаймиз, қўрамизки,

$$R_A = R_B = \frac{3}{2}P$$

бўлиб, улар вертикал равишда тик йўналади. Энди фермани 16, 17, 18 стерженларни кесадиган қилиб mn контур билан икки қисмга ажратамиз ва ўнгдаги қисмининг мувозанатини текширамиз. Бу қисмга қўйилган P куч ва $\vec{R}_B$ реакция кучи қаторига ташлаб юборилган бўлакнинг таъсирини ифодаловчи реакция кучларини қушиб оламиз. Бу реакция кучлари аниқ-



11.2- расм.

ланиши зарур бўлган $\vec{S}_{16}$, $\vec{S}_{17}$, $\vec{S}_{18}$ зўриқиш кучларига тенг (11.2- расм, б).

(9.17) кўринишдаги тенгламалар тузамиз. x ўқ учун вертикал йўналишни оламиз. $\sum F_{ix} = 0$ тенгламани тузамиз:

$$R_B - P - S_{17}\sin\alpha = 0.$$

Бундан,

$$S_{17} = \frac{R_B - P}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}P.$$

Кучларнинг N ва M нуқталарга нисбатан моментларининг йиғиндиларини ҳисобласак, тенгламаларда биттадан номаълум қатнашади:

$$\sum m_N(\vec{F}_i) = 0: S_{16}\cdot a - P\cdot a + R_B\cdot 2a = 0,$$

$$\sum m_M(\vec{F}_i) = 0: -S_{18}\cdot a + R_B\cdot a = 0.$$

Бу тенгламалардан S_{16} ва S_{18} аниқланади: $S_{16} = -2R_B = -2P$, $S_{18} = \frac{3}{2}P$. S_{16} нинг манфий ишорали чиққани, ташқи кучлар таъсиридан 16 – 17- стержень қисилишга ишлашини билдиради.

XII боб. ОҒИРЛИК МАРКАЗИ

48-§. Ўзаро параллел иккита кучни қўшиш

Бир томонга йўналган, ўзаро параллел $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар мос равишда A, B нуқталарга қўйилган бўлсин (12.1-расм). Бу кучларни қўшиш учун улар қаторига $(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \backsim 0$ кучлар системасини киритиб, $\vec{P}_1$ ни A нуқтага, $\vec{P}_2$ ни эса B нуқтага қўямиз. Сўнгра $\vec{F}_1$ билан $\vec{P}_1$ ни, $\vec{F}_2$ билан $\vec{P}_2$ ни қўшамиз:

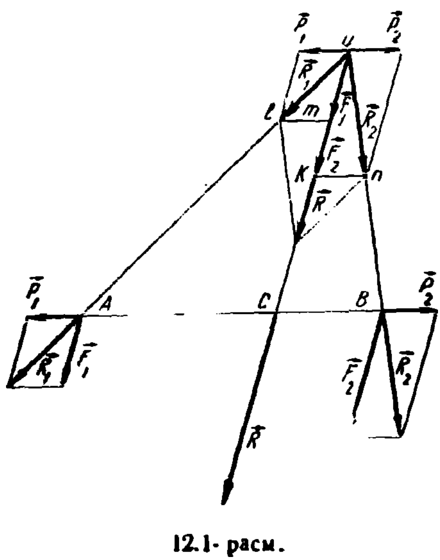
$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{P}_1, \quad \vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{P}_2.$$

$\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ кучлар таъсир чизиқларини давом эттириб, уларнинг кесишиш нуқтаси бўлмиш O нуқтага шу кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб кўчирамиз. O нуқтадаги $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ кучларни қайтадан $(\vec{F}_1, \vec{P}_1)$, $(\vec{F}_2, \vec{P}_2)$ ташкил этувчиларга ажратамиз ва $(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \backsim 0$ системани айириб ташлаймиз. Натижада O нуқтага қўйилган ва бир тўғри чизиқда ётувчи $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ кучлар қолади. Бу кучларни (арифметик) қўшиб, битта $\vec{R}$ кучни ҳосил қиламиз:

$$R = F_1 + F_2. \tag{12.1}$$

Ҳосил бўлган $\vec{R}$ куч ҳам берилган кучларга параллел ва улар билан бир хил йўналган бўлади. R кучни, миқдор ва йўналишини ўзгартирмай, унинг таъсир чизиғи билан AB кесманинг кесишиш нуқтаси C га кўчириб қўямиз. C нуқта ҳолатини аниқлаймиз. OAC ва Olm учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{AC}{OC} = \frac{lm}{Om}$ нисбатни, OBC ва Onk учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{BC}{OC} = \frac{nk}{Ok}$ нисбатни ёзиш мумкин. Бу пропорцияларда $lm = kn = P_1$, $Om = F_1$, $Ok = F_2$ бўлишини эътиборга олсак, улардан

$$AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2$$



12.1-расм.

ёки

$$\frac{CB}{F_1} = \frac{AC}{F_2} \qquad (12.2)$$

келиб чиқади.

$AC + CB = AB$, $F_1 + F_2 = R$ бўлгани учун пропорция хоссасига кура (12.2) дан

$$\frac{CB}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R} \qquad (12.3)$$

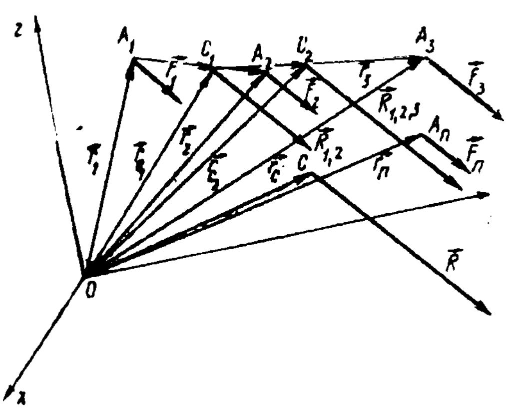
ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, *бир томонга йўналган икки кучнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг арифметик йиғиндисига тенг ва унинг йўналиши берилган кучлар йўналишида булади; тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи кучлар қуйилган оралиқни мазкур кучларга тескари пропорционал булакларга ажратади.*

Агар $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ ўзаро параллел кучлар миқдорлари турлича булиб, қарама-қарши томонга йўналган булса, уларнинг тенг таъсир этувчиси берилган кучларнинг алгебраик йиғиндисига тенг ва йўналиши катта куч йўналишида бўлишини ҳамда унинг таъсир чизиғи (12.3) пропорцияга мос равишда кучлар қўйилган оралиқни ташқаридан шу кучларга тескари пропорционал бўлакларга ажратишини, бунда C нуқта катта куч томонида ётишини исботлаш мумкин.

49-§. Параллел кучлар маркази

Жисмга таъсир чизиқлари ўзаро параллел ва бир томонга йўналган ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$) кучлар системаси қўйилганида (12.2-расм) уларни қўшишни қараб чиқайлик. Бу кучларни икки параллел кучни қўшиш қоидасига биноан кетма-кет қў-



12.1- расм.

шиб борсак, берилган кучлар системаси битта $\vec{R}$ тенг таъсир этувчига келтирилади ва у

$$R=\sum_{i=1}^{n} F_i \tag{12.4}$$

тенгликдан аниқланади

Параллел кучлар тенг таъсир этувчисининг қўйилиш нуқтаси *параллел кучлар маркази* дейилади. $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ параллел кучлар қуйилган $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарнинг радиус-векторлари $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ маълум бўлганда параллел кучлар марказининг радиус-вектори $\vec{r}_c$ ни аниқловчи формулани келтириб чиқарамиз. Агар $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар тенг таъсир этувчиси $\vec{R}_{1,2}$ қуйилган нуқтани C_1 билан белгиласак, (12.3) га кура

$$\frac{\overrightarrow{C_1A_2}}{F_1}=\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{F_2} \tag{12.5}$$

пропорцияни ёзиш мумкин. C_1 нуқта радиус-векторини $\vec{r}_{C_1}$ десак, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1A_2}$ векторларни $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_{C_1}$ орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\overrightarrow{A_1C_1}=\vec{r}_{C_1}-\vec{r}_1,\quad \overrightarrow{C_1A_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_{C_1}.$$

Бу ифодаларни (12.5) га қўйиб, $\vec{r}_{C_1}$ ни топамиз:

$$\vec{r}_{C_1}=\frac{F_1\vec{r}_1+F_2\vec{r}_2}{F_1+F_2}. \tag{12.6}$$

Энди $\vec{R}_{1,2}$ билан $\vec{F}_3$ ни қўшиб, уларнинг $\vec{R}_{1,2,3}$ тенг таъсир этувчиси қўйилиш нуқтаси C_2 нинг радиус-векторини $\vec{r}_{C_2}$ десак, (12.6) га биноан

$$\vec{r}_{C_2}=\frac{R_{1,2}\cdot\vec{r}_{C_1}+F_3\vec{r}_3}{R_{1,2}+F_3}=\frac{F_1\vec{r}_1+F_2\vec{r}_2+F_3\vec{r}_3}{F_1+F_2+F_3}$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, берилган барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта C нинг радиус-вектори учун

$$\vec{r}_C=\frac{F_1\vec{r}_1+F_2\vec{r}_2+\ldots+F_n\vec{r}_n}{F_1+F_2+\ldots+F_n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}F_i\vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}F_i} \tag{12.7}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, параллел кучлар марказининг радиус-вектори (12.7) формула билан аниқланар экан.

(12.7) ни координата ўқларига проекциялаб, параллел кучлар марказининг координаталарини аниқловчи:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}, \quad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}, \quad z_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i} \qquad (12.8)$$

формулаларга эга бўламиз. (12.8) да x_C, y_C, z_C параллел кучлар марказининг координаталарини, x_i, y_i, z_i эса $\vec{F}_i$ куч қўйилган A_i нуқта координаталарини ифодалайди.

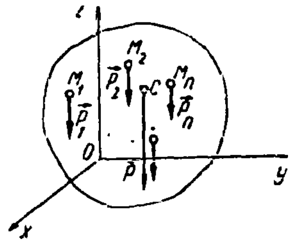
Шуни таъкидлаб ўтамизки, $\vec{R} \neq 0$ ҳолда ёки $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_{n-1}$ кучлар тенг таъсир этувчиси билан $\vec{F}_n$ жуфт кучни ташкил этмаган ҳолда турли томонга йўналган параллел кучлар системаси учун ҳам (12.4), (12.7), (12.8) формулалар ўринли бўлаверади, фақат бу ҳолда $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ ни алгебраик йиғинди деб қараш керак.

50-§. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази

Ер сиртида ҳамда Ер сиртидан унча узоқ бўлмаган ҳар қандай моддий нуқтага, механик система ёки қаттиқ жисмга Ер марказига йўналган тортиш кучи таъсир қилади. Бу куч мазкур объектларнинг *оғирлик кучлари* деб юритилади. Масалан, M_1, M_2, ..., M_n моддий нуқталардан — бўлакчалардан иборат қаттиқ жисмни қарайдиган бўлсак, унинг оғирлиги бу нуқталар оғирликларининг йиғиндисидан иборат бўлади. Одатда текшириладиган жисмнинг ўлчамлари Ернинг ўлчамларидан анчагина кичик бўлганидан, M_1, M_2, ..., M_n нуқталар оғирлик кучларини ифодаловчи векторлар параллел кучлар системасини ташкил қилади. Бу кучларнинг маркази, текширилаётган жисмнинг оғирлик марказини ифодалайди. Оғирлик кучлари мос равишда $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ параллел векторлар билан ифодаланувчи M_1, M_2, ..., M_n нуқталардан иборат жисмнинг оғирлик марказини топайлик (12.3-расм). Агар бу марказни C орқали белгиласак, у ҳолда (12.7) га асосан C нуқтанинг радиус-вектори

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i \vec{r}_i}{P}, \qquad (12.9)$$

формула билан топилади; бунда $\vec{r}_i$ билан M_i бўлакчанинг радиус-вектори белгиланган, P эса жисмнинг оғирлик кучидир. (12.9) вектор ифодани координата ўқларига проекциялаб, қаттиқ жисм оғирлик марказининг координаталари учун формулалар ҳосил қиламиз:



12.4- расм.

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{P},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{P}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i z_i}{P}. \tag{12.10}$$

Жисмларнинг оғирлик марказларини аниқлашда жисмни ташкил этувчи бўлакларнинг ҳажми, юзаси ёки узунлигидан фойдаланиш ҳам мумкин. Масалан, жисмнинг оғирлик марказини унинг ҳажмига қараб топиш учун уни n та кичик ΔV_i ($i=1, 2, \ldots, n$) ҳажмга эга бўлган бўлакчаларга бўламиз Бу бўлакчаларнинг ҳар бирининг вазияти мос равишда биттадан радиус-вектор $\vec{r}_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$) билан аниқлансин. Ҳар бир бўлакчанинг оғирлиги $\Delta P_i = \gamma_i \Delta V_i$ бўлиб (бунда γ_i билан i — бўлакчанинг солиштирма оғирлиги белгиланган), бир-бирига параллел векторлар билан ифодаланади. Жисмнинг оғирлик маркази $\vec{r}_C$ радиус-вектор билан аниқланувчи бирор C нуқтада бўлсин. (12.9) формулани қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta V_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta V_i}. \tag{12.11}$$

Жисмни заррачаларнинг узлуксиз тўпламидан иборат деб қараб, (12.11) да Δv_i ҳажмни нолга интилтириб лимит ҳисобласак, у қуйидаги интеграл кўринишини олади:

$$\vec{r}^{1}_C = \frac{\int\limits_{(V)} \gamma \vec{r} dV}{\int\limits_{(V)} \gamma dV}.$$

Оғирлик марказининг координаталари эса

$$x_C = \frac{\int\limits_{(V)} \gamma x dV}{\int\limits_{(V)} \gamma dV}, \quad y_C = \frac{\int\limits_{(V)} \gamma y dV}{\int\limits_{(V)} \gamma dV}, \quad z_C = \frac{\int\limits_{(V)} \gamma z dV}{\int\limits_{(V)} \gamma dV} \tag{12.12}$$

формулалар ёрдамида топилади. Бунда интеграл жисмнинг тўла ҳажми бўйича олинади. Агар жисмнинг солиштирма оғирлиги унинг барча қисмида бир хил, яъни жисм бир жинсли булса, (12.11) ва (12.12) ифодалардан

$$\vec{r}_C = \frac{\int\limits_{(V)} \vec{r}\, dV}{V}, \qquad (12.13)$$

$$x_C = \frac{\int\limits_{(V)} x\, dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int\limits_{(V)} y\, dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int\limits_{(V)} z\, dV}{V} \qquad (12.14)$$

келиб чиқади.

Бир жинсли юза (ясси жисм) ёки чизиқнинг оғирлик марказини топиш учун (12.11) — (12.14) формулаларда ҳажм ўрнига юза ёки узунликни олиш ва (12.13) ёки (12.14) формулаларда интеграллашни тегишли юза ёки чизиқ бўйича амалга ошириш керак. Масалан, бир жинсли текис юза учун (12.11) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta s_i x_i}{S}, \quad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta s_i y_i}{S}. \qquad (12.15)$$

51-§. Оғирлик марказини аниқлаш усуллари

1. *Симметрия усули. Агар бир жинсли жисм симметрия текислиги, уқи ёки марказига эга бўлса, унинг оғирлик маркази мос равишда ё симметрия текислигида, ё симметрия ўқида, ё симметрия марказида ётади.*

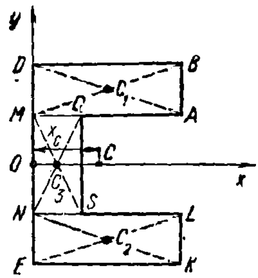
Масалан, бир жинсли жисм симметрия текислигига эга бўлса, бу текислик жисмни оғирликлари $P_1 = P_2$ бўлган иккита бўлакка ажратади. У ҳолда жисмнинг оғирлик марказини бир томонга йўналган, миқдор жиҳатдан тенг икки $\vec{P}_1$ ва $\vec{P}_2$ параллел кучлар маркази деб қарасак, у ҳақиқатан симметрия текислигида ётишига ишонч ҳосил қиламиз. Мисол тариқасида симметрия марказига эга бўлган бир жинсли ҳалқа ёки дискнинг оғирлик маркази унинг геометрик (симметрия) марказида ётишини кўрсатиш мумкин.

2. *Бўлаклаш усули.* Жисмни оғирлик марказлари маълум бўлган бўлакларга бўлиш мумкин булсин. Булакларнинг оғирликларини уларнинг оғирлик марказларини ифодаловчи нуқталарда тўпланган деб фараз қилиб, берилган жисмни ана шундай нуқталар тўпламидан иборат деб қаралади ва унинг оғирлик маркази (12.10) — (12.15) формулаларнинг биридан фойдаланиб аниқланади.

31-масала. 12.4-расмда кўрсатилган бир жинсли пластинанинг C оғирлик маркази аниқлансин.

Ечиш. Пластина симметрия ўқига эга эканлигини кўрамиз.

Шу симметрия ўқи буйлаб Ox ўқни, унга перпендикуляр қилиб Oy ни ўтказамиз. Пластинанинг оғирлик маркази симметрия ўқида, яъни Ox уқда ётгани учун $y_C=0$ бўлади; x_C ни аниқлаймиз. MQ, NS чизиқлар билан берилган пластина юзасини учта туғри туртбурчакли юзаларга ажратамиз. $MDBA$ тўғри туртбурчакни 1-номер билан, $ENLK$ туғри тўртбурчакни 2-номер билан, $NMQS$ тўғри тўртбурчакни эса 3 билан белгилайлик. У ҳолда (12.15) га кўра



12.4-расм.

$$x_C=\frac{x_1\cdot\Delta s_1+x_2\cdot\Delta s_2+x_3\cdot\Delta s_3}{\Delta s_1+\Delta s_2+\Delta s_3} \qquad (1)$$

бўлади. 1, 2, 3 тўғри тўртбурчакларнинг C_1, C_2, C_3 оғирлик марказлари уларнинг диагоналлари кесишган нуқтада бўлгани учун:

$$x_1=x_2=15 \text{ см}; \; x_3=5 \text{ см}. \qquad (2)$$

Бу тўғри бурчакли тўртбурчакларнинг юзалари эса

$$\Delta s_1=\Delta s_2=300 \text{ см}^2; \; \Delta s_3=200 \text{ см}^2. \qquad (3)$$

(2) ва (3) ни (1) га қўйсак, $x_C=0{,}125$ м келиб чиқади

Демак, танланган координата системасига нисбатан берилган пластина оғирлик марказининг координаталари $x_C=0{,}125$ м, $y_C=0$ экан.

3. *Манфий оғирликлар (юзалар) усули.* Фараз қилайлик, n та ғоваклари булган ва оғирлиги P бўлган бир жинсли жисм берилсин Бу жисмнинг оғирлик маркази $\vec{r}_C$ радиус-вектор билан ифодалансин. Ғовакларни фикран моддалар билан тўлдирайлик. Уларнинг оғирликлари мос равишда $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, ..., $\vec{q}_n$ ва оғирлик марказлари эса мос равишда $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_n$ векторлар билан ифодалансин. У ҳолда бўлаклаш усулига асосан, ғоваклари тўлдирилган жисм оғирлик марказининг радиус-вектори

$$\vec{r}_{C_1}=\frac{\vec{r}_C\cdot P+\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{r}_i q_i}{Q}$$

муносабат билан аниқланади. Бу ерда Q — берилган жисмнинг ғоваклари тўлдирилгандаги оғирлиги. Бу муносабатдан

$$\vec{r}_C = \frac{Q \cdot \vec{r}_{C_1} - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i q_i}{P}$$

келиб чиқади. Бу формулада $P = Q - \sum_{i=1}^{n} q_i$ бўлгани учун

$$\vec{r}_C = \frac{Q \cdot \vec{r}_{C_1} - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i q_i}{Q - \sum_{i=1}^{n} q_i}.$$

Ҳосил бўлган формуладан кўрамизки, ғоваклари бўлган жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш учун аввал фикран унинг ғоваклари жисмни ташкил этувчи модда билан тўлдирилади. Ҳосил бўлган жисмнинг оғирлик маркази аниқланади. Сўнгра ғовакларнинг оғирлик марказлари аниқланади. Ғоваклар оғирликларини манфий деб ҳисоблаб, бўлаклаш усули асосида берилган жисмнинг оғирлик маркази аниқланади. Жисм бир жинсли бўлганда унинг ғовакларини ҳам шу жисмни ташкил қилувчи ва солиштирма оғирлиги берилган жисм солиштирма оғирлигидаги модда билан тўлдирилади. Бунда оғирлик марказини ҳисоблаш формулаларида фақат геометрик катталикларнинг ўзигина қатнашади. Бинобарин, жисмнинг ҳажмига кўра оғирлик марказини аниқлаш формуласи қуйидагича бўлади:

$$\vec{r}_C = \frac{V\vec{r}_{C_1} - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot v_i}{V - \sum_{i=1}^{n} v_i}$$

бунда V — ғоваклари тўлдирилган жисмнинг ҳажми, V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — i-ғовакнинг ҳажми

Қаралаётган жисм ясси юзадан иборат бўлса, бундай жисм оғирлик марказининг радиус-вектори.

$$\vec{r}_C = \frac{S\vec{r}_{C_1} - \sum_{i=1}^{n} s_i \vec{r}_i}{S - \sum_{i=1}^{n} s_i} \qquad (12.16)$$

формула ёрдамида топилади; бунда S — ясси жисмнинг яхлитлангандаги юзаси, s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — i-кесимнинг юзаси.

Оғирлик марказининг координаталарини топиш учун, аёнки, юқоридаги вектор ифодаларни координата ўқларига проекциялаш керак.

31-масалани манфий юзалар усули билан ечамиз (12.5-расм). Бунда жисмни яхлит $BDEK$ тўғри тўртбурчак ва „манфий юзали“ $AQSL$ тўғри тўртбурчакдан иборат деб қараймиз. $BDEK$ ва $AQSL$ тўғри тўртбурчакларнинг оғирлик марказла-

рини мос равишда C_1, C_2, юзаларини эса Δs_1, Δs_2 десак
$= 15$ см, $x_1 = 20$ см, $\Delta s_1 = 1200$ см^2, $\Delta s_2 = 400$ см^2. У
(12.16) га биноан, пластинка оғирлик марказини аниклаш

$$x_C = \frac{\Delta s_1 \cdot x_{C_1} - \Delta s_2 \cdot x_{C_2}}{\Delta s_1 - \Delta s_2}$$

формуладан фойдаланиш мумкин. Бу формула бўйича х
лашларни бажариб, $x_C = 0{,}125$ м, яъни аввалги жавобни х
қиламиз.

Бу усуллардан ташқари оғирлик марказини аниқлашда
фик усул, тажриба усуллари ҳам мавжуд.

Купинча яхлит жисмларнинг оғирлик марказини аниқла
интеграл кўринишдаги формулалардан фойдаланиш ҳам қу
булади.

32-масала. Марказий бурчаги 2α, радиуси R бўлган с
жинсли AB ёй кўринишидаги жисмнинг оғирлик маркази ан
лансин (12.6-расм), бунда α — радианда, R — узунлик бирл
гида ўлчанади.

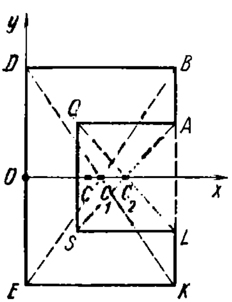
Ечиш. Ox ўқни ёйнинг симметрия ўқи бўйлаб ўтказами
AB ёйда $dl = R \cdot d\varphi$ узунликдаги бўлакча ажратамиз; бу бў
лакча Ox ўққа нисбатан φ бурчак орқали аниқлансин. У ҳо
да φ бурчак $(-\alpha)$ дан $(+\alpha)$ гача қийматларни қабул қилади
AB ёй узунлигини L билан белгиласак: $L = 2R \cdot \alpha$. (12.14) ин
теграл куринишдаги формула AB чизиқ учун

$$x_C = \frac{\int\limits_{(L)} x\,dl}{L} \tag{1}$$

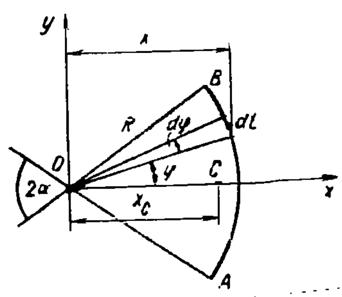
орқали ифодаланади. Бунда x билан dl ёйнинг координатаси
белгиланган. Расмдан: $x = R\cos\varphi$. (1) формулани тузамиз:

$$x_C = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi\, R \cdot d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R}{2\alpha}\sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

Шундай қилиб, AB ёй шаклидаги бир жинсли жисмнинг
олинган координата системасига нисбатан оғирлик маркази
$x_C = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$ формула билан аниқланади.



12.5- расм.



ДИНАМИКА

А. Моддий нуқта динамикаси

XIII боб. МОДДИЙ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

52-§. Динамика аксиомалари. Динамиканинг икки асосий масаласи

Динамиканинг асосини италиялик машҳур олим Г. Галилей (1564—1642) ва инглиз олими И. Ньютон (1643—1727) томонидан кашф қилинган ва Галилей—Ньютон қонунлари деб юритиладиган қуйидаги аксиомалар ташкил қилади.

1-аксиома. *Ташқи муҳит таъсирида булмаган моддий нуқта ўзининг тинч ҳолатини ёки туғри чизиқли текис ҳаракатини сақлашга интилади.*

Моддий нуқтага куч таъсир этмагунча ўзининг тинч ҳолатини ёки туғри чизиқли текис ҳаракатини сақлаши унинг *инерцияси* дейилади, аксиоманинг ўзи эса, одатда механиканинг *инерция қонуни* деб юритилади.

2-аксиома (динамиканинг асосий қонуни). *Моддий нуқтанинг бирор куч таъсирида олган тезланиши шу куч йўналиши билан бир хил ва миқдори мазкур куч миқдорига туғри пропорционалдир*, яъни

$$m\vec{w} = \vec{F}. \tag{13.1}$$

Бунда $\vec{F}$ — нуқтага таъсир қилувчи куч, $\vec{w}$ — нуқтанинг тезланиши, m — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, нуқтанинг маълум физик хусусиятларини белгилайди; у *моддий нуқтанинг массаси* деб аталади ва ҳаракатнинг ҳар қандай узгаришига нуқтанинг кўрсатадиган **қаршилигини**—*моддий нуқтанинг инертлик хусусиятини* ифодалайди. (13.1) муносабатдан массани ўлчаш усули келиб чиқади:

$$m = \frac{F}{w}.$$

Чунончи, моддий нуқтага таъсир қилувчи кучни ва бу куч таъсирида нуқтанинг олган тезланишини била туриб, нуқта массасини аниқлаш мумкин. Бу усул билан аниқланган массага *инерт масса* дейилади.

Агар нуқта массаси Ньютоннинг бутун олам тортишиш қонуни асосида топиладиган булса, уни Ернинг тортиш кучи $\vec{P}$

ва эркин тушиш тезланиши g орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$m = \frac{P}{g} \tag{13.2}$$

(13.2) билан ачиқланадиган масса *гравитацион масса* дейилади.

3-аксиома (таъсир ва акс таъсир қонуни). *Ҳар қандай таъсирга унга тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналган акс таъсир мос келади.*

Статикада **ҳам** шундай аксиомани келтирган эдик. У ерда таъсир ва акс таъсир мувозанатдаги жисмларга нисбатан келтирилган эди. Бу ерда эса учинчи аксиома кенгроқ маънода — ихтиёрий ҳаракатдаги жисм ёки нуқталарга нисбатан келтирилган. Шуни таъкидлаш керакки, таъсир ва акс таъсирни белгиловчи кучлар ўзаро тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлишига қарамасдан, улар мувозанатлашган системани ташкил қилмайди, демак, бу кучларни тушириб қолдириш мумкин эмас.

4-аксиома. *Моддий нуқтанинг бир неча куч таъсирида олган тезланиши ҳар қайси куч таъсирида мазкур нуқта олган тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ кучлар таъсирида моддий нуқтанинг олган тезланишини $\vec{w}$, бу кучларнинг ҳар бири туфайли ҳосил бўлган тезланишларни мос равишда $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n$ десак, 4-аксиомани $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \ldots + \vec{w}_n$ кўринишда ёзиш мумкин.

4-аксиомага биноан, моддий нуқтага бир қанча кучлар қўйилган бўлса, (13.1) ни

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{13.3}$$

муносабат билан алмаштириш мумкин. (13.3) ифода *моддий нуқта динамикасининг асосий тенгламаси* дейилади.

Биринчи икки аксиома ўринли бўлган координаталар системаси ***инерциал саноқ системаси*** дейилади. Кейинроқ, бир-бирига нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракат қилувчи системалар ҳам инерциал саноқ системаларини ташкил қилишини кўрсатамиз. Тажриба ва кузатишлар шуни кўрсатадики, техниканинг купгина масалаларини ечишда Ер билан боғланган системани инерциал система деб қабул қилса бўлади. Ернинг ўз ўқи атрофида айланишини ҳам ҳисобга олиш зарур бўлган масалаларда эса инерциал система сифатида геоцентрик система қабул қилиниши мумкин. Бундай системанинг боши Ер марказида, ўқлари эса „қўзғалмас“ деб олинган учта юлдузга йўналган бўлади. Ҳисоблашлар катта аниқлик талаб қилган тақдирда инерциал система сифатида маркази Қуёш марказида бўлган, ўқлари эса „қўзғалмас“ юлдузларга томон йўналтирилган гелиоцентрик система қўлланилади. Учинчи аксиоманинг баёнида кинематик элементлар (ҳаракат, тезлик, тезланиш ва ҳ.к) йўқ. Шунинг учун у ҳар қандай координаталар системасида ўринли.

Динамикада ечиладиган масалаларни икки турга ажратиш мумкин:

1. *Берилган ҳаракат бўйича бу ҳаракатни келтириб чиқарувчи кучларни аниқлаш.*

2. *Берилган кучлар бўйича бу кучлар ҳосил қилувчи ҳаракатни аниқлаш.*

Бу масалалар, мос равишда *динамиканинг биринчи ва иккинчи асосий масалалари* дейилади.

53-§. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

m массали моддий нуқтанинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ бўлган кучлар таъсиридаги ҳаракатини текширамиз. Иккинчи аксиомага асосан: $m\vec{w} = \vec{F}$; бунда $\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ($\vec{r}$—нуқтанинг радиус-вектори) бўлгани учун

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt_2} = \vec{F} \tag{13.4}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (13.4)—*эркин моддий нуқта ҳаракатининг вектор кўринишдаги дифференциал тенгламаси* дейилади.

(13.4) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, *эркин моддий нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг координата усулда ифодаланишини* ҳосил қиламиз. Чунончи, x, y, z — $\vec{r}$ векторнинг, F_x, F_y, F_z—$\vec{F}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари бўлсин. У ҳолда:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \tag{13.5}$$

Динамиканинг баъзи масалаларини ечишда табиий координаталар системасидан фойдаланиш қулай бўлади. Бундай системага нисбатан моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузамиз. Тезланиш векторининг бинормалдаги проекцияси нолга тенглигини ҳисобга олиб, (13.2) ни $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ табиий координата ўқларига проекциялаб,

$$mw_\tau = F_\tau,\quad mw_n = F_n,\quad 0 = F_b$$

тенгламаларга эга бўламиз. Бунда $w_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}$, $w_n = \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ бўлгани учун, уни

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_\tau,\quad \frac{m}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=F_n,\quad 0=F_b \tag{13.6}$$

кўринишда ёза оламиз. (13.6)—*эркин моддий нуқта ҳаракатининг табиий координаталар системасига нисбатан дифференциал тенгламалари* дейилади. (13.6) да $s=s(t)$—нуқтанинг берилган траектория бўйлаб ҳаракат қонунини, ρ эса траекториянинг ҳаракатдаги моддий нуқта билан устма-уст тушувчи нуқтасининг эгрилик радиусини ифодалайди.

54-§. Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласини ечиш

Массаси m бўлган моддий нуқта Декарт координаталар системасига нисбатан

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t) \tag{13.7}$$

қонунга кўра ҳаракатда бўлсин. Моддий нуқтани (13.7) қонун бўйича ҳаракатлантирувчи кучни аниқлаш сўралади.

Моддий нуқта динамикасининг бу биринчи асосий масаласини ечиш учун моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларидан фойдаланамиз. (13.7) дан вақт буйича иккинчи тартибли ҳосилалар ҳисоблаб, (13.5) га қўйсак, моддий нуқтани ҳаракатлантирувчи кучнинг координата ўқларидаги проекциялари F_x, F_y, F_z ҳосил бўлади. У ҳолда $\vec{F}$ куч миқдори

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=m\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} \tag{13.8}$$

формуладан, йўналиши эса йўналтирувчи косинуслар орқали аниқланади:

$$\cos(\vec{F},\hat{\ }\vec{x})=\frac{F_x}{F},\quad \cos(\vec{F},\hat{\ }\vec{y})=\frac{F_y}{F},\quad \cos(\vec{F},\hat{\ }\vec{z})\ \frac{F_z}{F} \tag{13.9}$$

Агар моддий нуқта ҳаракати вектор усулда ёки табиий усулда берилган бўлса, (13.5) дифференциал тенгламалар ўрнига (13.4) ёки (13.6) тенгламалардан фойдаланилади.

Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи нуқтанинг берилган ҳаракат қонунини дифференциаллаш ёрдамида ечилгани туфайли *динамиканинг тўғри масаласи* деб ҳам аталади.

33-масала. m массали моддий нуқтанинг Ox уқ буйича тўғри чизиқли ҳаракати

$$x=a\ln\left(1+\frac{v_0}{a}t\right) \tag{1}$$

тенглама билан ифодаланади, бунда a ва v_0—ўзгармас миқдорлар, x—метр ҳисобида ўлчанади. Нуқтага таъсир этувчи куч вақт функцияси ва тезлик функцияси сифатида аниқлансин.

Ечиш. Моддий нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилгани учун, унинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m\ddot{x} = F_x.$$

(1) дан вақт бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар ҳисоблаймиз:

$$\dot{x} = \frac{av_0}{a+v_0t}, \qquad \ddot{x} = -\frac{av^2}{(a+v_0t)^2}.$$

У ҳолда:

$$F_x = -\frac{mav_0^2}{(a+v_0t)^2}.$$

Бунда $\dot{x} = v = \frac{av_0}{a+v_0t}$ бўлишини эътиборга олсак,

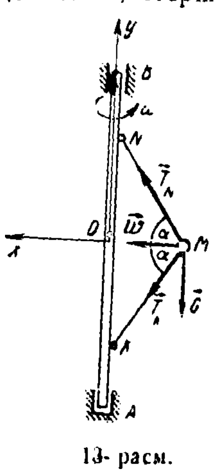
$$F_x = -\frac{mv^2}{a}$$

келиб чиқади. Ox ўқнинг бирлик йўналтирувчи векторини $\vec{i}$ билан белгиласак, нуқтага таъсир этувчи $\vec{F}$ куч векторини аниқловчи

$$\vec{F} = -\frac{mav_0^2}{(a+v_0t)^2}\vec{i} = -\frac{mv^2}{a}\vec{i}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

34-масала. m массали M шарча ҳар бирининг узунлиги l бўлган MN ва MK вазнсиз стерженлар билан шарнир воситасида бириктирилган (13.1-расм). Бу система вертикал AB ўқ атрофида ω ўзгармас бурчак тезлик билан айланади. $KN = 2a$ деб олиб, стерженлардаги зўриқишлар аниқлансин.



13- расм.

Ечиш. Координата бошини O нуқтада олиб, 13.1-расмда курсатилгандек, Oxy координаталар системасини ўтказамиз; бунда MK ва MN стерженлар ётган текислик Oxy текислик билан устма-уст тушсин.

Шарчага таъсир этувчи $\vec{G} = m\vec{g}$ оғирлик кучи қаторига вазнсиз стерженлар реакция кучлари $\vec{T}_K$ ва $\vec{T}_N$ ни қўшиб олиб, шарчани эркин ҳолга келтирамиз ва унинг

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{iy} \tag{1}$$

кўринишдаги ҳаракати дифференциал тенгламаларини тузамиз.

KMN учбурчак тенг ёнли ва $ON = OK = a$ бўлгани учун $\widehat{OMN} = \widehat{OMK} = \alpha$ ўринлидир. M шарчага таъсир этувчи кучларнинг x ва y ўқлардаги проекцияларининг йиғиндисини ҳисоблаймиз;

$$\left.\begin{aligned} \sum F_{ix} &= T_N\cos\alpha + T_K\cos\alpha, \\ \sum F_{iy} &= T_N\sin\alpha - T_K\sin\alpha - G \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

M шарчанинг ҳаракати AB вертикал ўқ атрофида ω ўзгармас бурчак тезлик билан содир бўлгани учун унинг тезланиши қуйидагича аниқланади:

$$w = w_n = \omega^2 \cdot OM = \omega^2\sqrt{l^2 - a^2}.$$

$\vec{w}$ вектор йўналиши Ox ўқ йўналишига мос келади, демак,

$$\ddot{x} = w = \omega^2\sqrt{l^2 - a^2}, \quad \ddot{y} = 0.$$

Буларни эътиборга олиб, (2) ни (1 га) қўямиз:

$$\left.\begin{aligned} m\omega^2\sqrt{l^2 - a^2} &= (T_N + T_K)\cos\alpha \\ 0 &= (T_N - T_K)\sin\alpha - G. \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

OMN учбурчакдан:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{l}.$$

Бинобарин, (3) тенгламалар

$$m\omega^2 l = T_N + T_K,$$
$$mgl = (T_N - T_K) \cdot a$$

куринишга келтирилади. Бу тенгламалардан T_N ва T_K аниқланади;

$$T_N = \frac{ml}{2a}(\omega^2 a + g), \quad T_K = \frac{ml}{2a}(\omega^2 a - g). \qquad (4)$$

(4) тенглик билан аниқланувчи T_N доимо мусбат бўлгани учун MN стерженлаги зўриқиш таъсирида бу стержень чўзилади; агар $\omega^2 a - g > 0$ ёки $\omega > \sqrt{\frac{g}{a}}$ бўлса, $T_K > 0$ ва бу ҳолда MK ҳам чўзилади. M шарчанинг мувозанат ҳолатида $\omega = 0$ бўлиб, T_N ва T_K модуль жиҳатдан тенг, лекин $T_N > 0$, $T_K < 0$:

$$T_N^0 = \frac{mgl}{2a}, \quad T_K^0 = -\frac{mgl}{2a}.$$

Буларни (4) билан таққослаб, шарчанинг мувозанат ва ҳаракат ҳолларида стерженлардаги зўриқишлар турлича бўлишини кўрамиз.

55- §. Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласини ечиш ҳақида маълумотлар. Бошланғич шартларнинг қўлланилиши

Моддий нуқтага таъсир этувчи кучлар ва нуқта массаси берилганда унинг ҳаракатини аниқлаш масаласи билан танишамиз. Моддий нуқта динамикасининг бу иккинчи масаласини ечишда моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари тузилади ва улар интегралланади. Функцияни интеграллаш масаласи уни дифференциаллашга қараганда мураккаб бўлишини эътиборга олганда, динамиканинг иккинчи масаласини ечиш биринчи масалани ҳал этишга қараганда қийинроқ эканини олдиндан тасаввур этиш мумкин. Бу моддий нуқтага таъсир этувчи куч қандай ўзгарувчиларнинг функцияси бўлишига ҳам боғлиқ. Нуқтага таъсир этувчи куч ўзгармас ($\vec{F} = \overrightarrow{\text{const}}$) ёки куч фақат вақт функцияси ($\vec{F} = (\vec{F})t$), ёки нуқта координаталарининг функцияси ($\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$), ёки нуқта тезлигининг функцияси ($\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$) бўлган ҳолларда моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи нисбатан осонроқ ҳал қилинади.

Масалан, электростатик майдонда зарядланган заррачанинг ҳаракати текширилганда унга таъсир этувчи куч шу заррачанинг майдондаги ўрнига, яъни координаталарига боғлиқ. Шунингдек, муҳитнинг қаршилик кучи таъсиридаги моддий нуқта ҳаракати урганилганда, бу қаршилик кучи нуқтанинг тезлигига боғлиқ бўлади.

Умуман, нуқтага таъсир қилувчи куч бир пайтда вақтнинг, нуқта координаталарининг ва тезлигининг функцияси булиши мумкин, яъни

$$\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Кучларнинг келтириб ўтилган турларидан бошқа турлари ҳам учраши мумкин. Масалан, нуқтага таъсир қилувчи куч унинг тезланишига боғлиқ бўлиши ёки нуқтанинг айни пайтдаги координаталари ва тезлигигагина боғлиқ бўлмасдан, унинг бошланғич пайтдаги координаталари ва тезлигига ҳам боғлиқ булиши мумкин. Одатда, кейинги икки турдаги кучлар механикада қаралмайди

Шундай қилиб, $\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ҳолда $F_x = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ $F_y = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z},)$ ва $F_z = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z},)$ бўлиб, эркин моддий нуқта ҳаракатининг Декарт координаталар системасидаги (13.5) дифференциал тенгламалари

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) \end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

кўринишда ёзилади. Бу иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни интеграллаш хусусида умумий курсатмаларни келтирамиз.

Агар (13.10) ни

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[f_1(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})\right] &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left[f_2(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})\right] &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left[f_3(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})\right] &= 0 \end{aligned}\right\}$$

кўринишда ифода этиш мумкин бўлса, бу тенгламаларни бир марта интеграллаб

$$\begin{aligned} f_1(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) &= C_1, \\ f_2(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) &= C_2, \\ f_3(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) &= C_3 \end{aligned} \tag{13.11}$$

кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бунда C_1, C_2, C_3—ихтиёрий ўзгармас сонлар. Вақтни, нуқта координаталарини, тезликни ва ўзгармас сонларни боғловчи (13.11) муносабатга (13.10) *дифференциал тенгламаларнинг биринчи интеграли* дейилади. Агар (13.11) ни

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\varphi_1(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3)\right] &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left[\varphi_2(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3)\right] &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left[\varphi_3(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3)\right] &= 0 \end{aligned}$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3) &= C_4, \\ \varphi_2(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3) &= C_5, \\ \varphi_3(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3) &= C_6, \end{aligned}\right\} \tag{13.12}$$

ўринли бўлиб, бунда ҳам C_4, C_5, C_6—ихтиёрий ўзгармас сонлардир. Вақтни, нуқта координаталарини ва ўзгармас сонларни боғловчи (13.12) муносабатга (13.10) нинг *иккинчи интеграли* дейилади. Агар (13.12) ни

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t,\ C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_6), \\ y &= y(t,\ C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_6) \\ z &= z(t,\ C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_6) \end{aligned}\right\} \tag{13.13}$$

кўринишда ифода қилиш мумкин бўлса, у ҳолда (13.13) га (13.10) нинг умумий ечими, C_1, C_2, $\dots$, C_6 ўзгармас сонлар эса интеграл доимийлари дейилади.

(13.13) даги интеграл доимийлари ҳар қандай ўзгармас бўлганда ҳам (13.13) муносабатлар (13.10) дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимлари бўлаверади, яъни бир хил кўринишдаги дифференциал тенгламалар системаси турли кўринишдаги ечимларга эга булади. Агар моддий нуқтанинг ҳаракат бошланиши олдидаги ёки бирор t_0 пайтдаги координаталари x_0, y_0, z_0 ҳамда бошланғич тезлиги $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ берилган булса, бу шартлар асосида интеграл доимийларини аниқлаб, (13.13) ифодага қўйилса, биргина ечим ҳосил бўлади. *Бошланғич пайтда моддий нуқта координаталари ва тезлигининг берилиши бошланғич шартларнинг берилиши дейилади.*

Шундай қилиб, бошланғич шартлар қуйидагича ифодаланади:

$$t = t_0:\quad \left.\begin{aligned} x &= x_0, & y &= y_0, & z &= z_0; \\ \dot{x} &= \dot{x}_0, & \dot{y} &= \dot{y}_0, & \dot{z} &= \dot{z}_0. \end{aligned}\right| \tag{13.14}$$

(13.14) бошланғич шартларни (13.11) ва (13.11) га қўйиб, C_1, C_2, $\dots$, C_6 ўзгармасларнинг қийматларини топсак, улар x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ орқали ифодаланади.

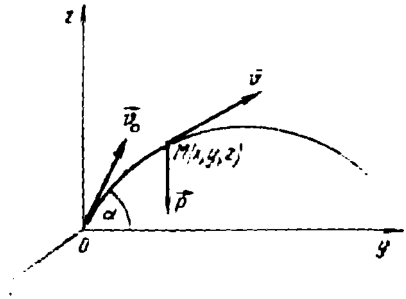
C_1, C_2, $\dots$, C_6 ўзгармасларнинг бу қийматларини (13.13) га қўйиб, (13.10) дифференциал тенгламалар системасининг берилган шартларга мос ечими—*моддий нуқтанинг кинематик ҳаракат тенгламалари* ҳосил қилинади:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ y &= y_1(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ z &= z_1(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0). \end{aligned}\right\}$$

56-§. Моддий нуқтанинг оғирлик майдонидаги ҳаракати

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласини ечиш учун мисол тариқасида горизонтга α бурчак остида $\vec{v}_0$ бошланғич тезлик билан отилган m массали M моддий нуқтанинг ўзгармас оғирлик майдонидаги ҳаракатини Декарт координаталари системасига нисбатан текширамиз. Муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмаймиз. Координаталар бошини нуқтанинг $t=0$ пайтда эгаллаган ўрнида оламиз. Координата текисликларини $\vec{v}_0$ тезлик вектори yOz вертикал текисликда ётадиган қилиб жойлаштирамиз. (13.2-расм). У ҳолда бошланғич шартлар қуйидагича ёзилади:

$$t=0: \begin{cases} x=0,\ y=0,\ z=0; \\ \dot{x}=0,\ \dot{y}=v_0\cos\alpha,\ \dot{z}= \\ =v_0\sin\alpha. \end{cases}$$



13.2- расм

Нуқта фақат $\vec{P}$ оғирлик кучи таъсирида ҳаракат қилади. Бу кучнинг координата ўқларидаги проекциялари $P_x=0$, $P_y=0$, $P_z=-mg$ бўлгани учун нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари қуйидагича ифодаланади:

$$m\ddot{x}=0,\ m\ddot{y}=0,\ m\ddot{z}=-mg, \tag{13.15}$$

(13.15) ни бир марта интеграллаб,

$$\dot{x}=C_1,\ \dot{y}=C_2,\ \dot{z}=C_3-gt \tag{13.16}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган (13.16) система (13.15) нинг биринчи интегралидир. Бундаги C_1, C_2, C_3—интеграл доимийлари бошланғич шартлардан топилади. Бошланғич $t=0$ пайтдаги $\dot{x}=0$, $\dot{y}=v_0\cos\alpha$, $\dot{z}=v_0\sin\alpha$ шартларни (13.16) тенгламаларга қўйиб, $C_1=0$, $C_2=v_0\cos\alpha$, $C_3=v_0\sin\alpha$ ҳосил қилинади. Шундай қилиб:

$$\dot{x}=0,\ \dot{y}=v_0\cos\alpha,\ \dot{z}=-gt+v_0\sin\alpha. \tag{13.17}$$

(13.17) ни интеграллаб, (13.15) нинг иккинчи интегралини топамиз:

$$x=C_4,\ y=v_0\cos\alpha\cdot t+C_5,\ z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha\cdot t+C_6.$$

Бошланғич шартлардан фойдаланиб C_4, C_5, C_6 интеграл доимийларини топсак, $C_4=C_5=C_6=0$ келиб чиқади. Натижада нуқта ҳаракатининг тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$x=0,\ y=v_0\cos\alpha\cdot t,\ z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha\cdot t. \tag{13.18}$$

Ҳаракат давомида нуқта абциссасининг қиймати нолга тенглигича қолавериши ҳаракатнинг yOz текислигида бўлишини тасдиқлайди. (13.18) ифодадан вақт t ни йуқотиб, моддий нуқта траекториясини ҳосил қиламиз:

$$z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}y^2 + \mathrm{tg}\alpha \cdot y.$$

57-§. Моддий нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламаси ва уни баъзи содда ҳоллар учун ечиш

Массаси m бўлган M моддий нуқта бирор $\vec{F}$ куч таъсирида Ox ўқ бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилсин (13.3-расм) Бошланғич $t = 0$ пайтда

$$x = x_0, \ v = v_0 \tag{13.19}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи M нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш масаласини кўриб чиқамиз.

Бунинг учун моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузиб, уни интеграллаш керак. Ҳаракат туғри чизиқли бўлгани учун (13.5) дифференциал тенгламалардан фақат биринчисигина қолади. Қолган тенгламалар эса нолга айланади:

$$m\ddot{x} = F_x.$$

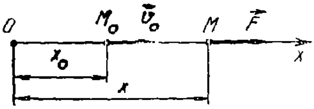
$F_x = F$ бўлганидан, бу тенгламани қуйидаги куринишда ёзамиз:

$$m\ddot{x} = F. \tag{13.20}$$

(13.20) *моддий нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламасини* ифодалайди. Агар нуқтага бир неча кучлар қўйилган бўлса, (13.20) тенгламада F ни шу кучлар системаси тенг таъсир этувчисининг Ox ўқдаги проекцияси деб қараш керак. Аввал қайд қилинганидек, (13.20) тенгламада $\vec{F}$ куч бир вақтнинг ўзида вақт, нуқта координатаси ва тезлигининг функцияси бўлиши мумкин:

$$F = F(t, \ x, \ \dot{x}).$$

Биз $F = F(t)$, $F = F(x)$, $F = F(\dot{x})$ бўлган энг содда ҳолларда, кейинроқ, конкрет масалаларда $F = F(x, \dot{x})$, $F = F(t, \ x, \ \dot{x})$ ҳолларда (13.20) дифференциал тенгламани ечишни қараб чиқамиз. $F=\text{const}$ бўлган ҳолда дифференциал тенгламани ечиш аввалги параграфдан бизга маълум.



13.3- расм.

1. $F = F(t)$ — *куч вақт функцияси бўлган ҳол.* Бу ҳолда (13.20) дифференциал тенглама

$$mx = F(t)$$

ёки $v=\dot{x}$ ўзгарувчи киритсак, қуйидаги кўринишни олади:

$$m\frac{dv}{dt}=F(t),$$

Бу дифференциал тенгламанинг икки томонини dt га кўпайтириб, узгарувчилари ажралган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$mdv=F(t)\cdot dt. \tag{13.21}$$

(13.21) тенгламанинг ечими

$$v=\psi(t,\ C_1) \tag{13.22}$$

кўринишда бўлади; бунда $v=\frac{dx}{dt}$ бўлгани учун

$$\frac{dx}{dt}=\psi(t,\ C_1)$$

ёки

$$dx=\psi(t,\ C_1)\cdot dt$$

ўринли. Ўзгарувчилари ажралган бу тенгламани яна бир марта интеграллаймиз:

$$x=\varphi(t,\ C_1,\ C_2). \tag{13.23}$$

(13.19) бошланғич шартларни (13.22) ва (13.23) га қўйишдан ҳосил бўлган тенгламалардан C_1, C_2 топилади. Бу аниқланган C_1 ва C_2 қийматларини (13.23) га қўйиш билан моддий нуқтанинг ҳаракат қонуни келиб чиқади.

35-масала. Массаси m бўлган моддий нуқта $F_x=-\frac{mav_0^2}{(a+v_0t)^2}$ куч таъсирида Ox ўқ бўйлаб ҳаракатланади, бунда a—исмли ўзгармас сон. Бошланғич пайтда нуқта координата бошида бўлиб, v_0 тезликка эга. Нуқтанинг ҳаракати аниқлансин.

Ечиш. Моддий нуқта бошланғич пайтда координата бошида булгани учун, бошланғич шартлар қуйидагича ёзилади:

$$t=0,\ x=0,\ v=v_0. \tag{1}$$

Моддий нуқтанинг (13.20) кўринишдаги дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x}=-\frac{mav_0^2}{(a+v_0t)^2} \tag{2}$$

(2) дифференциал тенгламадан нуқтага таъсир этувчи куч вақт функцияси эканлиги кўриниб турибди.

$v=\dot{x}$ белгилаш киритиб, иккинчи тартибли (2) дифференциал тенгламани биринчи тартибли дифференциал тенглама кўринишига келтирамиз:

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{av_0^2}{(a+v_0t)^2}.$$

Унинг ҳар икки томонини dt га купайтириб, ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенглама оламиз:

$$dv = -\frac{av_0^2}{(a+v_0t)^2}\,dt.$$

Ҳосил бўлган тенгламани интеграллаймиз:

$$v = -av_0^2\frac{1}{-v_0(a+v_0t)}+C_1$$

ёки

$$v = \frac{av_0}{a+v_0t}+C_1, \tag{3}$$

$t=0$, $v=v_0$ шартни (3) га қўямиз:

$$v_0=\frac{av_0}{a}+C_1, \text{ яъни } C_1=0.$$

Шундай қилиб (3) қуйидагича ёзилади:

$$v=\frac{av_0}{a+v_0t}. \tag{4}$$

Энди (4) да $v=\dot{x}$ бўлишини эътиборга олсак, ундан

$$dx=\frac{av_0}{a+v_0t}\,dt$$

келиб чиқади. Бу тенгламани яна интеграллаймиз:

$$x=a\ln(a+v_0t)+C_2, \tag{5}$$

(5) га (1) ни, яъни $t=0$, $x=0$ шартни қўямиз,

$$0=a\ln a+C_2 \text{ ёки } C_2=-a\ln a.$$

У ҳолда (5) дан

$$x=a\ln(a+v_0t)-a\ln a$$

ёки

$$x=a\ln\left(1+\frac{v_0}{a}t\right) \tag{6}$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб берилган F_x куч таъсиридаги нуқтанинг (1) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ҳаракати (6) тенглама билан ифодаланади.

2. $F=F(v)$ — *куч нуқта тезлигининг функцияси бўлган ҳол.* Бу ҳолда (13.20) дифференциал тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m\ddot{x}=F(v) \text{ ёки } m\frac{dv}{dt}=F(v). \tag{13.24}$$

(13.24) тенгламанинг ҳар икки томонини $\frac{dt}{F(v)}$ га кўпайтириб, ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$m \frac{dv}{F(v)} = dt.$$

Бу тенгламани интеграллаб, сўнгра v га нисбатан ечсак, (13.22) кўринишдаги тенгламага келамиз. Сўнгра масала ечимининг давоми 1-ҳолдагига ўхшаш бўлади.

36-масала. Массаси m бўлган моддий нуқта Ox ўқ бўйлаб $F_1 = -\frac{mv^2}{a}$ куч таъсирида (a — ўзгармас сон) ҳаракатланади. Бошланғич пайтда нуқта координата бошида бўлиб v_0 тезликка эга деб олиб, унинг ҳаракат қонуни топилсин.

Ечиш. 35-масаладаги каби бошланғич шартлар қуйидагича ёзилади:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad v = v_0.$$

Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = -\frac{mv^2}{a}.$$

$v = \dot{x}$ деб олиб, тенгламанинг икки томонини $\frac{dt}{v^2}$ га кўпайтириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{a}\, dt.$$

Бу тенгламани интеграллаймиз:

$$-\frac{1}{v} = -\frac{1}{a}\, t + C_1.$$

Бошланғич шарт: $t = 0$ да $v = v_0$ га кўра C_1 ни аниқлаймиз: $C_1 = -\frac{1}{v_0}$. Шундай қилиб, $\frac{1}{v} = \frac{1}{a}\, t + \frac{1}{v_0}$.

Бу тенгламани v га нисбатан ечамиз:

$$v = \frac{av_0}{a + v_0 t}.$$

Ҳосил бўлган ифода 35-масаладаги (4) муносабатнинг ўзгинасидир. Бинобарин, нуқтанинг ҳаракати қуйидаги қонун бўйича кечади:

$$x = a \ln\left(1 + \frac{v_0 t}{a}\right).$$

3. *$F = F(x)$ — куч нуқта координатасининг функцияси бўлган ҳол.*

Бунда (13.20) дифференциал тенглама

$$m\ddot{x} = F(x) \tag{13.25}$$

кўринишда ёзилади. (13.25) типидаги дифференциал тенгламаларни кўпинча характеристикалар методи билан ечиш қулай булади. Агар $F(x)$ жуда мураккаб функция бўлмаса, (13.25) кўринишдаги дифференциал тенгламани ҳам ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириш мумкин.

$v=\dot{x}$ деб олиб, (13.25) ни қуйидагича ёзамиз:

$$m\frac{dv}{dt}=F(x). \tag{13.26}$$

Энди қуйидагича шакл алмаштириш бажарамиз:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot v$$

Бунга кўра (13.26)

$$m\frac{dv}{dx}\cdot v=F(x)$$

ёки

$$mvdv=F(x)dx \tag{13.27}$$

кўринишга келтирилади.(13.27)—ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенгламадир. (13.27) дифференциал тенгламани ечиб, моддий нуқта тезлиги ва координаталари орасидаги боғланиш аниқланади:

$$v=\varphi(x,\ C_1), \tag{13.28}$$

(13.28) да $v=\frac{dx}{dt}$ бўлишини эътиборга олсак, уни

$$\frac{dx}{\varphi(x,\ C_1)}=dt \tag{13.29}$$

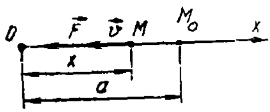
кўринишда ёзиш мумкин. (13.29) ўзгарувчилари ажралган тенгламани яна бир интеграллаб, нуқта координатасининг вақт бўйича узгаришини ҳосил қиламиз:

$$x=f(t,\ C_1,\ C_2),$$

бундаги C_1 ва C_2 бошланғич шартлардан фойдаланиб аниқланади.

Шуни таъкидлаш керакки, $F=F(x)$ бўлганда дифференциал тенгламани ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга келтириб ечиш усули доим қўл келавермайди, бунда (13.29) тенгламанинг чап томони анчагина мураккаб функция бўлиши мумкин.

37-масала. Массаси m бўлган M моддий нуқта Ox йўналишига тескари йўналган $F_x=-cx$ куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилади, бунда c—ўзгармас коэффициент (13.4-расм). Бошланғич пайтда нуқта координата бошидан a ма-



13.4- расм.

софада бошланғич тезликсиз ҳаракатга келтирилган деб олиб, унинг ҳаракати аниқлансин. Оғирлик кучи эътиборга олинмасин.

Ечиш. Масала шартига кўра бошланғич шартлар қуйидагича ёзилади:

$$t=0,\ x=a,\ v=0.$$

M нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x}=-cx.$$

$v=\dot{x}$, $\frac{c}{m}=k^2$ белгилашлар киритсак, бу тенглама

$$\frac{dv}{dt}=-k^2x \tag{1}$$

кўринишни олади. $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot v$ шакл алмаштириш билан (1) ни қайтадан ёзамиз:

$$v\frac{dv}{dx}=-k^2x.$$

Энди ҳосил бўлган тенглама ўзгарувчилари ажралган тенглама кўринишида ёзилиши мумкин:

$$vdv=-k^2xdx. \tag{2}$$

(2) тенгламани интеграллаймиз:

$$\frac{v^2}{2}=-k^2\cdot\frac{x^2}{2}+C_1. \tag{3}$$

Бошланғич шартга асосан (3) дан $C_1=k^2\cdot\frac{a^2}{2}$ келиб чиқади. Топилган C_1 қийматини (3) га қўямиз:

$$v^2=k^2(a^2-x^2)\ \text{ёки}\ v=\pm k\sqrt{a^2-x^2}. \tag{4}$$

Тезлик вектори Ox ўққа тескари йўналгани учун (4) да манфий ишорани оламиз. $v=\frac{dx}{dt}$ бўлганидан (4)

$$\frac{dx}{dt}=-k\sqrt{a^2-x^2}\ \text{ёки}\ -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=kdt \tag{5}$$

шаклда ёзилади. (5) дифференциал тенгламани интеграллаймиз:

$$\arccos\frac{x}{a}=kt+C_2. \tag{6}$$

(6) га $t=0$, $x=a$ ни қўйиб, $\arccos 1=0$ бўлишини эътиборга олсак, $C_2=0$ ҳосил бўлади. Бинобарин, (6) тенглама

$$\arccos\frac{x}{a}=kt\ \text{ёки}\ x=a\cos kt \tag{7}$$

куринишни олади. Шундай қилиб, $F_x=-cx$ куч таъсиридаги моддий нуқта (7) қонунга асосан ҳаракатланади. (7) дан кўрамизки, моддий нуқта эркин тебранма ҳаракат қилар экан.

Куч нуқта координатасининг функцияси сифатида ўзгарганда дифференциал тенгламани характеристикалар методи билан ечишни кейинроқ, моддий нуқтанинг тебранма ҳаракатини ўрганишда куриб чиқамиз.

58-§. Боғланишлар. Боғланишдаги моддий нуқтанинг ҳаракати

Моддий нуқтанинг ҳаракатига маълум йуналишда чек қўйилган бўлиши мумкин. Маълумки, нуқта ҳаракатини бирор йўналишда чекловчи сабабга *боғланиш* дейилади. Боғланиш сирт, текислик, эгри чизиқ ёки тўғри чизиқ бўлиши мумкин. Боғланишлар, чунончи сиртлар, текисликлар, эгри чизиқлар, туғри чизиқлар, тенгламалар билан берилади. Моддий нуқта боғланишлар таъсирида ёки боғланишлар бўйлаб ҳаракат қилар экан, унинг координаталари боғланишлар тенгламасини қаноатлантириши керак. Масалан, моддий нуқта бирон f сирт бўйлаб ҳаракатлансин, у ҳолда боғланишнинг тенгламаси

$$f(x,\ y,\ z)=0$$

куринишда бўлади. Агар моддий нуқта бирор фазовий эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, бундай эгри чизиқ иккита, $f_1(x,$ $y,\ z)=0$ ва $f_2(x,\ y,\ z)=0$ сиртларнинг кесишиш чизиғи сифатида олиниши мумкин. Бинобарин, бу икки тенглама фазовий эгри чизиқнинг тенгламаси — боғланиш тенгламасини ифодалайди.

Моддий нуқтанинг координаталари боғланишлар тенгламасини қаноатлантириши керак булгани каби, бошланғич шартлар ҳам энди ихтиёрий була олмайди. Улар ҳам боғланишлар тенгламасини қаноатлантириши керак.

Бир мисол келтирамиз: M моддий нуқта узунлиги R бўлган стерженнинг бир учига маҳкамланган бўлсин. Стерженнинг иккинчи учи қўзғалмас O нуқтага сферик шарнир билан бириктирилган, O нуқта координаталар бошида олинган. У ҳолда нуқта, тенгламаси $x^2+y^2+z^2=R^2$ бўлган сфера бўйлаб ҳаракат қилади. Нуқта бошланғич пайтда қандай вазиятни эгалламасин ва бошланғич тезлиги қандай бўлмасин, унинг бу пайтдаги координаталари сфера тенгламасини қаноатлантириши, тезлиги эса сфера сиртига уринма бўлиши керак.

Боғланишлар фақат тенгламалар билангина эмас, тенгсизликлар билан ҳам берилиши мумкин. Масалан, $M(x,\ y)$ моддий нуқта узунлиги l бўлган ипнинг бир учига бириктирилган бўлсин. Ипнинг иккинчи учини қўлда ушлаб моддий нуқтани вертикал текисликда айлантирайлик. Нуқтанинг тезлиги егарли катта бўлганда, у $x^2+y^2-l^2=0$ айлана буйлаб ҳаракатланади. Ёзилган тенглама боғланишнинг тенгламаси бўлади. Агар нуқтанинг тезлиги камайса, нуқта айлананинг юқоридаги қисмида бўлганда ип „букилиб" нуқта траекториядан „тушиб" кетиши мумкин. Бу ҳолда нуқтага қуйилган боғланишнинг тенгламаси $x^2+y^2-l^2<0$ бўлади. Шундай қилиб, боғланиш тенгсизлик билан ҳам берилиши мумкин Тенглик ишораси билан берилган боғланишлар *бўшатмайдиган боғланишлар* дейилади. Тенгсизлик билан ифодаланадиган боғланишлар *бушатадиган* дейилади.

Курилган боғланишлар тенгламасига фақат нуқта координаталари кирган. Улар нуқта координаталарини маълум шартлар билан боғлайди. Бундай боғланишлар *голоном* (ёки *геометрик*) *боғланишлар* дейилади. Лекин боғланишлар фақат нуқта координаталаринигина эмас, балки координаталарнинг вақт буйича ҳосилаларини ҳам маълум шартлар билан боғлаши мумкин. Боғланишлар тенгламаларига нуқта координаталарининг ҳосилалари ҳам кириб, бу боғланишлар интеграллан-майдиган бўлса, уларга *беголоном* (ёки *кинематик*) *боғланишлар* дейилади.

Голоном боғланишлар ҳам, беголоном боғланишлар ҳам *стационар* ва *ностационар боғланиш*ларга бўлинади. Вақтга боғлиқ булмаган боғланишлар *стационар боғланишлар* дейилади. Агар боғланиш вақтга боғлиқ булса, у *ностационар боғланиш* дейилади. Стационар ва ностационар богланишлар ҳам бушатмайдиган ва бўшатадиган бўлиши мумкин.

Боғланишдаги нуқтанинг ҳаракати боғланишга мос равишда содир булар экан, бундай нуқтага нисбатан боғланишлар сонининг учтадан ортиқ бўлиши маънога эга эмас.

Айтилганларга мос равишда боғланишлар тенгламаларини қуйидагича классификациялаш мумкин:

1. Стационар бўшатмайдиган, голоном боғланишлар:

$$f_j(x,\ y,\ z)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant 3.$$

2. Ностационар бўшатмайдиган, голоном боғланишлар:

$$f_j(x,\ y,\ z,\ t)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant 3.$$

3. Бушатадиган стационар, голоном боғланишлар:

$$f_j(x,\ y,\ z)\leqslant 0,\quad 1\leqslant j\leqslant 3.$$

4. Бўшатадиган ностационар голоном боғланишлар:

$$f_j(x,\ y,\ z,\ t)\leqslant 0,\quad 1\leqslant j\leqslant 3.$$

5. Беголоном стационар, бўшатмайдиган боғланишлар;

$$f_j(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})=0\quad 1\leqslant j\leqslant 3.$$

6. Беголоном ностационар, бўшатмайдиган боғланишлар:

$$f_j(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant 3.$$

7. Беголоном стационар, бўшатадиган боғланишлар:

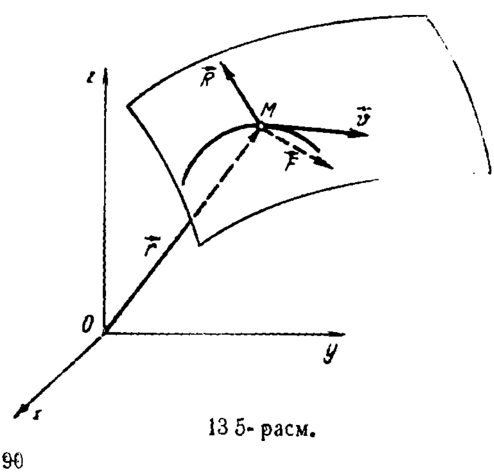
$$f_j(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3.$$

8. Беголоном ностационар, бўшатадиган боғланишлар:

$$f_j(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3.$$

Боғланишдаги моддий нуқта ҳаракатини ўрганишда унга қўйилган кучлар қаторига боғланиш таъсирини бера оладиган реакция кучини ҳам қўшиб олиш керак. Боғланиш реакция кучи эса номаълум катталиклар қаторига киради. Бинобарин, боғланишдаги моддий нуқта динамикасининг биринчи ёка иккинчи асосий масаласини ечишда реакция кучларини аниқлаш ёки уларни масалани ҳал қилишда тузиладаган тенгламалардан чиқариб ташлаш муаммосига дуч келинади. Бу муаммо доимо осонликча ҳал бўлавермайди; уни ҳал қилишда боғланишга нисбатан баъзи чеклашлар қабул қилишга тўғри келади. Масалан, берилган $\vec{F}$ куч таъсирида моддий нуқтанинг бирор $f(x, y, z) = 0$ сирт бўйлаб ҳаракатини аниқлашда Декарт координаталари системасида яна учта дифференциал тенглама тузиш мумкин. Натижада тўртта тенгламага эга буламиз. Бирок, $\vec{R}$ реакция кучининг ҳам миқдори, ҳам йўналиши номаълум бўлганидан унинг координата ўқларидаги проекциялари R_x, R_y, R_z олиниши керак. Шунга кўра номаълумлар сони олтита (x, y, z, R_x, R_y, R_z) булади. Тўртта тенгламадан олтита номаълумни аниқлаш мумкин эмас. Агар боғланишни идеал силлиқ сирт деб қарасак, реакция кучи сиртга утказилган нормал бўйича йўналиши маълум бўлганидан фақат унинг миқдорини аниқлаш керак бўлиб, номаълумлар сони билан тенгламалар сони тенглашади. Бундай масалаларни ечишнинг айрим ҳоллари билан танишамиз.

59-§. Моддий нуқтанинг силлиқ сирт бўйлаб ҳаракати



13.5- расм.

M моддий нуқта тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ булган актив кучлар таъсирида бирор силлиқ $f(x, y, z) = 0$ сирт бўйлаб ҳаракат қилсин. Сиртнинг реакциясини $\vec{R}$ орқали белгилаймиз (13.5- расм). $\vec{R}$ берилган сиртга тик йўналади. Нуқта ҳаракатининг вектор кўринишдаги дифференциал тенгламаси

$$m\ddot{\vec r}=\vec F+\vec R \tag{1}$$

кўринишда бўлади. Уни координата ўқларига проекциял

$$\left.\begin{aligned} m\ddot x &= F_x + R_x, \\ m\ddot y &= F_y + R_y, \\ m\ddot z &= F_z + R_z \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу ерда F_x, F_y, F_z—$\vec F$ кучни Ox, Oy, Oz координата ўқларидаги проекциялари, R_x, R_y, R_z $\vec R$ реакция кучининг проекциялари, чунончи

$$R_x = R\cos(\vec R, \hat{\ } \vec i),\ R_y = R\cos(\vec R, \hat{\ } \vec j),\ R_z = R\cos(\vec R, \hat{\ } \vec k). \tag{13.32}$$

Бунда $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ — Ox, Oy, Oz ўқларнинг бирлик векторлари. $\vec R$ вектор f сиртга ўтказилган нормал бўйлаб йўналгани учун унинг йўналтирувчи косинуслари, дифференциал геометриядан маълум бўлган

$$\cos(\vec R, \hat{\ } \vec i) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f},\ \cos(\vec R, \hat{\ } \vec j) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f},\ \cos(\vec R, \hat{\ } \vec k) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f} \tag{13.33}$$

формулалардан топилади. Бу ерда

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

(13.33) муносабатларни эътиборга олиб, (13.31) тенгламаларни

$$\left.\begin{aligned} m\ddot x &= F_x + \frac{R}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot y &= F_y + \frac{R}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \\ mz &= F_z + \frac{R}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

кўринишда ёзиб оламиз. $\frac{R}{\Delta f} = \lambda$ белгилаш киритамиз. λ га *Лагранж кўпайтувчиси* дейилади. У ҳолда

$$\left.\begin{aligned} m\ddot x &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot y &= F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot z &= F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{13.34}$$

ҳосил бўлади. (13.34) дифференциал тенгламалар системаси *боғланишдаги моддий нуқта ҳаракати—Лагранж дифференциал тенгламалари* дейилади. (13.34) тенгламалар боғланиш тенгламаси билан биргаликда нуқтанинг кинематик ҳаракат тенгламаларини ва λ кўпайтувчини аниқлаш имконини беради. (13.34) система тенгламаларининг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчилар боғланиш реакциясининг проекцияларини ифодалайди. λ купайтувчини билган ҳолда бу проекцияларни аниқлаш мумкин.

60- §. Моддий нуқтанинг ғадир-будир сирт бўйлаб ҳаракати

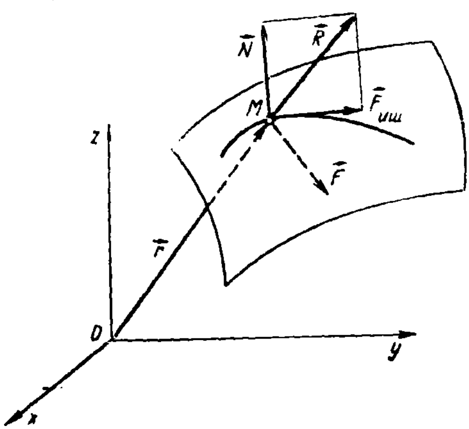
M моддий нуқтанинг ҳаракатини чекловчи боғланиш ғадир-будир $f(x, y, z) = 0$ сиртдан иборат бўлсин. Нуқтага таъсир қилувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчисини, аввалгидек, $\vec{F}$ орқали белгилаймиз. Боғланишнинг $\vec{R}$ реакция кучи бу ҳолда, маълумки, $\vec{N}$ нормал реакциядан ва $\vec{F}_{иш}$ ишқаланиш кучидан ташкил топади (13.6-расм). $\vec{F}_{иш}$ кучнинг миқдори қуйидаги ифодадан топилади;

$$F_{иш} = f_{иш} \cdot N \tag{13.35}$$

Бунда $f_{иш}$—сиртнинг ишқаланиш коэффициенти. Нуқта ҳаракатининг скаляр дифференциал тенгламалари

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + (F_{иш})_x, \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + (F_{иш})_y, \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + (F_{иш})_z \end{aligned}\right\} \tag{13.36}$$

кўринишда бўлади. Ишқаланиш кучи нуқта тезлиги векторига қарама-қарши йўналгани учун, бу кучнинг проекцияларини қуйидагича ифодалаш мумкин:



$(F_{иш})_x = F_{иш} \times \cos(\widehat{\vec{F}_{иш}, \vec{i}}) = -F_{иш} \times \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{i}}) = -F_{иш} \times \frac{v_x}{v} = -\frac{F_{иш}}{v} \cdot \dot{x}$.

Шунингдек, $(F_{иш})_y = -\frac{F_{иш}}{v} \cdot \dot{y}$, $(F_{иш})_z = -\frac{F_{иш}}{v} \cdot \dot{z}$ бўлади.

Нормал реакциянинг N_x, N_y, N_z проекциялари (аввалги параграфда келтирилган мулоҳазаларга асосан):

$$N_x = \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad N_y = \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad N_z = \frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Шундай қилиб, (13.36) қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F_{иш}}{v}\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F_{иш}}{v}\dot{y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{F_{иш}}{v}\dot{z}. \end{aligned}\right|$$

(13.35) ни эътиборга олсак, нуқтанинг ғадир-будир сирт бўйлаб ҳаракатининг қуйидаги дифференциал тенгламалари ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{f_{иш}\cdot\Delta f}{v}\dot{x}\right), \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{f_{иш}\cdot\Delta f}{v}\cdot\dot{y}\right), \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{f_{иш}\cdot\Delta f}{v}\cdot\dot{z}\right). \end{aligned}\right| \qquad (13\ 37)$$

Бу ерда номаълумлар: x, y, z ва λ. Уларни аниқлаш учун (13.37) тенгламаларга боғланиш тенгламасини қўшиб, тўртта тенгламадан иборат система ҳосил қилинади. Бу тўрта тенгламадан тўртта номаълумни умуман олганда топиш мумкин. λ аниқлангандан сўнг нормал реакция N, сўнгра (13.35) га асосан ишқаланиш кучи ҳам аниқланиши мумкин.

61-§. Моддий нуқтанинг силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракати

M моддий нуқтанинг силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракати иккита $f_1(x, y, z) = 0$ ва $f_2(x, y, z) = 0$ силлиқ сиртларнинг кесишган чизиғи бўйлаб ҳаракатдан иборат деб тасаввур қилинади. Бу сиртларнинг реакцияларини $\vec{R}_1$ ва $\vec{R}_2$ орқали белгилайлик. У ҳолда эгри чизиқнинг реакцияси $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ бўлади. Моддий нуқтага таъсир қилувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ бўлсин. Боғланишдаги нуқтанинг Декарт координаталар системасига нисбатан ҳаракати, дифференциал тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + R_{1x} + R_{2x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + R_{1y} + R_{2y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + R_{1z} + R_{2z}. \end{aligned}\right| \qquad (13.38)$$

$\vec{R}_1$ ва $\vec{R}_2$ реакциялар мос равишда f_1 ва f_2 сиртларга перпендикуляр бўлгани учун 59-параграфда кўрилгани каби уларнинг проекциялари

$$\left.\begin{aligned} R_{1x} &= \frac{R_1}{\Delta f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad R_{1y} = \frac{R_1}{\Delta f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad R_{1z} = \frac{R_1}{\Delta f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial z}; \\ R_{2x} &= \frac{R_2}{\Delta f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad R_{2y} = \frac{R_2}{\Delta f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad R_{2z} = \frac{R_2}{\Delta f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{13.39}$$

тенгликлар билан ифодаланади. Бунда

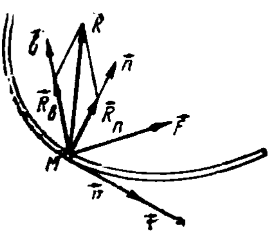
$$\Delta f_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2}, \quad \Delta f_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}.$$

$\frac{R_1}{\Delta f_1} = \lambda_1$ ҳамда $\frac{R_2}{\Delta f_2} = \lambda_2$ белгилашлар киритиб, (13.38) ни қуйидагича ёзамиз:

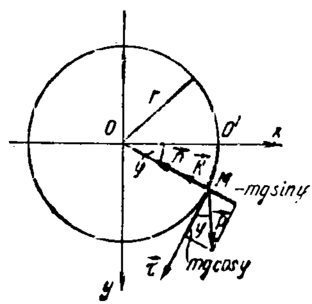
$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{13.40}$$

Бу тенгламалар *нуқтанинг силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатининг дифференциал тенгламаларидир.* Берилган актив кучларга кўра топилиши лозим бўлган номаълумлар x, y, z, λ_1 ва λ_2 лардир. Бу бешта номаълумни топиш учун (13.40), тенгламалар қаторига иккита боғланишлар тенгламаларини қўшиб олиб, 5 та тенглама биргаликда ечилади. λ_1 вл λ_2 кўпайтувчилар аниқлангандан сўнг f_1 ҳамда f_2 сиртлар реакцияларининг проекциялари R_{1x}, R_{1y}, R_{1z} ва R_{2x}, R_{2y}, R_{2z} (13.39) муносабатлардан топилади.

Эгри чизиқли боғланиш силлиқ ҳамда қўзғалмас (стационар) бўлса, нуқта ҳаракатини аниқлаш учун унинг табиий



13.7- расм.



13.8- расм.

координаталар системасидаги дифференциал тенгламаларидан фойдаланиш қулай. Нуқтага таъсир қилувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ булсин. Силлиқ чизиқнинг реакциясини $\vec{R}$ десак, у nb текисликда ётади (13.7-расм). Бинобарин, нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

$$m\ddot{s}=F_\tau,\ m\dot{s}^2\cdot\frac{1}{\rho}=F_n+R_n,\ 0=F_b+R_b \qquad (13.41)$$

кўринишда ёзилади. (13.41) — *моддий нуқтанинг силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатининг табиий координаталар системасидаги дифференциал тенгламаларидир.* Бу системанинг ажойиблиги шундаки, унинг биринчи тенгламасига номаълум реакция кучи кирмайди, бинобарин, ундан нуқтанинг берилган траектория бўйлаб буладиган ҳаракатини бевосита аниқлаш мумкин. Боғланиш реакциясининг $\vec{R}_b$ ташкил этувчиси (13.41) системанинг учинчи тенгламасидан аниқланади. $\vec{R}_n$ ташкил этувчини топиш учун (13.41) иккинчи тенгламасининг чап томонига нуқта ҳаракати тенгламаси $s=s(t)$ нинг ҳосиласини ва боғланишнинг ρ эгрилик радиусини қўямиз. Бу эгрилик радиуси боғланиш тенгламасидан дифференциал геометрия усуллари билан аниқланади.

38-масала. Массаси m булган M нуқта (13.8-расм) вертикал текисликда жойлашган r радиусли силлиқ айлана бўйлаб $\vec{P}$ оғирлик кучи таъсирида ҳаракатланади. M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари Декарт ва табиий координаталар системасида тузилсин.

Ечиш. Айлана марказини (O нуқтани) Декарт координаталар темасининг боши сифатида олиб, Ox ва Oy ўқларни айлана текислигида расмдагидек йўналгирамиз. Оғирлик кучининг проекциялари $P_x=0$, $P_y=mg$ эканлигини назарда тутиб, (13.40) тенгламаларни тузамиз:

$$m\ddot{x}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\ m\ddot{y}=mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (1)$$

Боғланишнинг тенгламаси

$$f(x,\ y)=x^2+y^2-r^2=0$$

бўлгани учун $\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y$ ва (1) система

$$m\ddot{x}=2\lambda x,\quad m\ddot{y}=mg+2\lambda y$$

кўринишга келади. Бу тенгламалар боғланиш тенгламаси билан биргаликда ечилиб, x, y, λ номаълумлар аниқланади. x ва y нуқтанинг ҳаракат тенгламасини ифодаласа, λ кўпайтувчи боғланишнинг реакциясини белгилайди, бинобарин:

$$R=\lambda\cdot\Delta f=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=2\lambda r.$$

Энди нуқтанинг дифференциал тенгламасини табиий координаталар системасига нисбатан аниқлаймиз. Табиий ўқларнинг йўналишлари ҳам 13.8 расмда кўрсатилган. Уринма ўқнинг мусбат йўналиши φ марказий бурчакнинг ўсиш йўналишига мос, бош нормаль эса айлана марказига қараб йўналган. $\vec{P}$ оғирлик кучининг бу ўқлардаги проекциялари: $P_\tau = mg\cos\varphi$, $P_n = -mg\sin\varphi$. Айлана силлиқ бўлгани учун унинг реакцияси $\vec{R}$ бош нормаль бўйлаб йўналган. У ҳолда M нуқта ҳаракатининг табиий координаталардаги дифференциал тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$m\ddot{s}=mg\cos\varphi,\quad \frac{m}{\rho}\dot{s}^2 = -mg\sin\varphi + R. \tag{2}$$

Агар O' орқали M нуқтанинг бошланғич пайтда траекторияда эгаллаган вазиятини белгиласак, у ҳолда (2) даги s ни $O'M$ ёй координатаси деб қараш керак. Бунда $s=r\cdot\varphi$ эканлиги эътиборга олинса, (2) нинг биринчи тенгламаси

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{r}\cos\varphi$$

кўринишга келтирилиши мумкин. Охирги тенгламани ечиб, φ бурчакни вақт t нинг функцияси сифатида аниқлаш мумкин. Бу эса M ҳалқа ҳаракатининг тенгламаси бўлади. (2) нинг иккинчи тенгламасидан $\rho=r$, $s=r\cdot\varphi$ эканлигини назарда тутиб $\vec{R}$ реакцияни аниқловчи

$$R = mg\sin\varphi + mr\cdot\dot{\varphi}^2$$

муносабат ҳосил қилинади.

62-§. Моддий нуқта учун Даламбер принципи

Эркин бўлмаган нуқта динамикасининг биринчи ва иккинчи масалаларини ҳал қилишда кўриб чиқилган усуллар билан бир қаторда *кинетостатика усули* ҳам муҳим ҳисобланади. Айниқса, актив кучлар ва нуқтанинг ҳаракатланиш қонуни берилиб, боғланишнинг реакциясини аниқлаш талаб қилинганда бу усул жуда қулай бўлади. (13.30) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{w}) = 0. \tag{13.42}$$

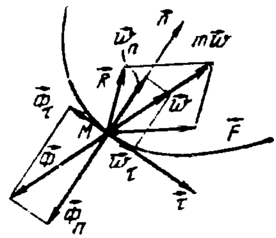
$$\vec{\Phi} = -m\vec{w} \tag{13.43}$$

белгилаш киритсак, (13.42)

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0 \tag{13.44}$$

кўринишни олади. *Миқдор жиҳатдан моддий нуқта массаси* *билгн тезланишининг кўпайтмасига-тенг, йўналиши эса шу тезланиш вектoрига қарама-қарши йўналган* $\vec{\Phi}$ *вектор инерция кучи дейилади.*

(13.44) тенглама бир нуқтага қўйилган кучлар системасининг мувозанат шартини эслатади. Кучларнинг мувозанат шарти куринишида ифодаланган (13.44) муносабат аслида моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасидир. Бироқ унга қуйидагича маъно бериш мумкин: ***моддий нуқтага таъсир этувчи актив куч ва боғланиш реакция кучи ҳар онда шу нуқта инерция кучи билан мувозанатлашади*** (13.9-расм). ***Моддий нуқта учун Даламбер принципи*** ана шундан иборат.



13.9- расм.

Даламбер принципи ёрдамида ҳаракат масаласи мувозанат масаласига келтирилиб ҳал қилингани учун бу принцип билан динамиканинг асосий масалаларини ечиш усули *кинетостатик усул* дейилади.

(13.43) ни эътиборга олиб, (13.44) ни Декарт координата ўқларига проекцияласак, бу вектор кўринишдаги тенглама қуйидаги скаляр тенгламалар билан алмашади:

$$\left.\begin{aligned} F_x + R_x - m\ddot{x} &= 0, \\ F_y + R_y - m\ddot{y} &= 0, \\ F_z + R_z - m\ddot{z} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.45)$$

Агар нуқта эгри чизиқли ҳаракатда бўлса, унинг тезланиши уринма ва нормал тезланишларнинг йиғиндисидан иборат: $\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$. Шунинг учун моддий нуқта инерция кучини ҳам уринма ва нормал инерция кучларидан ташкил топади дейишимиз мумкин:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n, \qquad (13.46)$$

бунда $\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{w}_\tau$, $\vec{\Phi}_n = -m\vec{w}_n$ бўлиб, уринма ва нормал тезланишлар миқдорини аниқлаш формулаларига кўра инерция кучининг ташкил этувчилари миқдорларини қуйидаги формулалар билан аниқлаймиз:

$$\Phi_\tau = mw_\tau = m\dot{v}, \quad \Phi_n = mw_n = \frac{m}{\rho}v^2. \qquad (13.47)$$

(13.47) ифодада ρ билан нуқта ҳаракати траекториясининг эгрилик радиуси белгиланган. (13.46) ва (13.47) ни эътиборга олиб, (13.44) ни табиий координата ўқларига проекциялаб, Даламбер принципининг табиий координаталар системасига нисбатан ифодаланишини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} F_\tau + R_\tau - m\dot{v} &= 0, \\ F_n + R_n - m\frac{v^2}{\rho} &= 0, \\ F_b + R_b &= 0. \end{aligned}\right| \qquad (13.48)$$

39-масала. Массаси m булган M юк B чиғир ёрдамида горизонт билан α бурчак ташкил этувчи қия текислик бўйлаб кутарилади (13.10-расм). Чиғир барабанининг радиуси r га тенг бўлиб, у $\varphi = \frac{1}{2}at^2$ (t — секундда, φ — радианда улчанади, a — ўзгармас) қонун бўйича айланади. Юк билан қия текислик орасидаги ишқаланиш коэффициентини f деб олиб, юк боғланган симдаги таранглик кучи аниқлансин.

Ечиш. M юкни моддий нуқта деб қараб, унинг қия текислик бўйлаб ҳаракатини текширамиз. M нуқтага оғирлик кучи $\vec{G} = m\vec{g}$, $\vec{g}$ унинг қия текислик билан ишқаланишидан ҳосил бўлган $\vec{F}_{иш}$ куч, қия текисликнинг нормал реакция кучи $\vec{N}$ таъсир этади. Юк боғланган ипни қирқиб чиғирнинг унга берган таъсирини $\vec{T}$ реакция кучи билан алмаштирамиз. Симдаги таранглик кучи T реакция кучига миқдор жиҳатдан тенг ва унга қарама-қарши йўналган. Бу кучлар қаторига M нуқта тезланишига қарама-қарши йўналган, миқдори $\Phi = mw$ бўлган инерция кучини қўшамиз. У ҳолда (13.44) ифода қуйидагича тузилади:

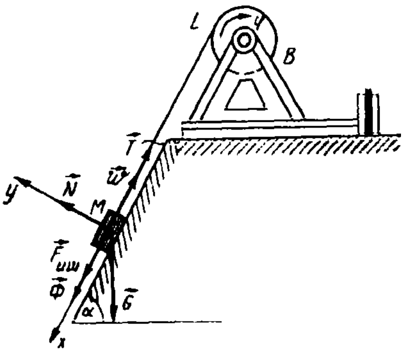
$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{иш} + \vec{\Phi} = 0.$$

Бу тенгликни x ва y ўқларга проекциялаймиз:

$$T - F_{иш} - mg\sin\alpha - mw = 0, \qquad (1)$$
$$N - mg\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

(2) тенгламадан: $N = mg\cos\alpha$. $F_{иш} = f\cdot N = mgf\cos\alpha$ бўлишини эътиборга олиб, (1) дан T ни аниқлаш мумкин:

$$T = mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) + mw. \qquad (3)$$



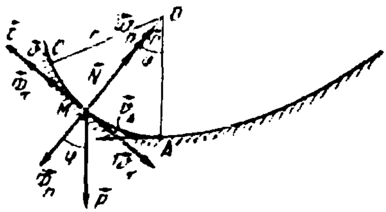
13.10-расм.

Масаланинг тўла ечилиши учун (3) даги w ни топиш керак. Бунинг учун M нуқта тезланиши чиғир барабани гардишидаги L нуқтанинг уринма тезланишига тенг бўлишидан фойдаланамиз:

$$w = w_{L\tau} = \varepsilon\cdot r = \ddot{\varphi} r = ar.$$

Буни (3) га қўйиб, ипдаги таранглик кучини аниқлаймиз:

$$T = mg\left(\sin\alpha + f\cos\alpha + \frac{ar}{g}\right).$$



13.11-расм.

40-масала. Оғирлиги P бўлган чанғичи тепаликдан тушаётиб йўлнинг пастки A нуқтасида $\vec{v}_A$ тезликка эришади ва яна радиуси $OC = r$ бўлган айлана ёйи бўйлаб ҳаракатланади (13.11-расм). AO вертикал билан OM орасидаги бурчак φ бўлганда, чанғичининг тезлиги $v = \sqrt{v_A^2 - 2gr(1 - \cos\varphi)}$ га тенг. Чанғичини моддий нуқта деб қараб, ишқаланиш ва қаршилик кучларини ҳисобга олмай, чанғичининг AC участкада қорга берган босим кучи аниқлансин.

Ечиш. Чанғичи билан бирга қўзғалувчи τMn табиий координата системасини утказамиз. Чанғичига ўзининг оғирлик кучи $\vec{P}$, қорнинг нормал реакция кучи $\vec{N}$ таъсир қилади. $\vec{N}$ куч AC ёй M нуқтасининг радиуси бўйлаб O марказ томон йўналади. M нуқтага унинг $\vec{w}_n$ ва $\vec{w}_\tau$ тезланишларига мос равишда қарама-қарши йўналган $\vec{\Phi}_n = -m\vec{w}_n$, $\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{w}_\tau$ инерция кучларини қўйиб, Даламбер принципини ёзамиз:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau = 0. \qquad (1)$$

AC участкадаги ҳаракат секинланувчан бўлиши керак, шунинг учун $\vec{w}_\tau$ вектор $\vec{r}$ га тескари йўналтирилди.

(1) ни $\vec{n}$ бош нормаль бирлик вектори йўналишига проекциялаймиз:

$$-P\cos\varphi + N - \Phi_n = 0.$$

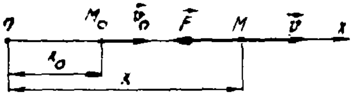
Бунда $\Phi_n = m\frac{v^2}{\rho} = \frac{P}{g}\cdot\frac{v^2}{r}$ бўлишини назарда тутиб, N ни аниқлаймиз:

$$N = P\cos\varphi + \Phi_n = P\cos\varphi + \frac{P}{g}\cdot\frac{v^2}{r}. \qquad (2)$$

Масала шартида берилган $v = \sqrt{v_A^2 - (2gr\,1 - \cos\varphi)}$ ни (2) га қуямиз:

$$N = P\left[\cos\varphi + \frac{v_A^2 - 2gr(1 - \cos\varphi)}{gr}\right].$$

Сўнги ифодадан кўриниб турибдики, нормал реакция куч $\varphi = 0$ да $(\cos 0 = 1)$ энг катта қийматга эришади:



14.1- расм.

$$N_{max} = P\left(1 + \frac{v_A^2}{gr}\right).$$

Чанғичининг қорга берган босим кучи миқдор жиҳатдан N га тенг бўлиб, унга қарама-қарши йўналади.

XIV боб. МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ

63- §. Моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати

Кундалик турмушимизда тебранма ҳаракат куп учраб туради. Бу бобда қандай кучлар таъсирида тебранма ҳаракат рўй беришини, тебранма ҳаракат турларини ва уларнинг ҳаракат қонунларини аниқлаш устида шуғулланамиз.

Массаси m бўлган M моддий нуқта *қайтарувчи куч* деб аталувчи ва $F_x = -cx$ қонуният буйича аниқланувчи куч таъсирида Ox ўқ бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракат килади (14.1-расм), бунда c — ўзгармас коэффициент (қайтарувчи кучга пружинанинг эластиклик кучи мисол була олади).

Бошланғич пайтда моддий нуқта M_0 ҳолатда бўлиб, x_0 координатага ва v_0 бошланғич тезликка эга дейлик. Яъни қуйидаги бошланғич шартлар берилган:

$$t = 0,\ x = x_0,\ v = v_0. \tag{14.1}$$

Бу нуқта ҳаракат қонунини аниқлаймиз. Бунинг учун моддий нуқтанинг Ox уқ буйлаб тўғри чизиқли ҳаракати дифференциал тенгламасини тузамиз: $m\ddot{x} = -cx$. Бунда

$$k^2 = \frac{c}{m} \tag{14.2}$$

белгилаш киритсак, дифференциал тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \tag{14.3}$$

(14.3) ўзгармас коэффициентли, иккинчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламадан иборат. Уни характеристикалар усули билан ечамиз. (14.3) нинг ечимини

$$x = Ce^{lt} \tag{14.4}$$

кўринишда излаймиз; бунда C ва l аниқланиши керак бўлган ифодалар. (14.4) ни (14.3) га қуйиб, $l^2 + k^2 = 0$ характеристик тенгламани ҳосил қиламиз. Бу характеристик тенглама ечимлари $l_{1,2} = \pm ki$ мавҳум сонлар бўлади. Бинобарин, (14.3) нинг умумий ечими

$$x = C_1e^{kit} + C_2e^{-kit} \tag{14.5}$$

бўлади. Эйлер формуласига кўра

$$e^{kit} = \cos kt + i \sin kt, \quad e^{-kit} = \cos kt - i \sin kt$$

бўлгани учун (14.5) ни

$$x = (C_1 + C_2) \cos kt + (C_1 - C_2)\, i \sin kt$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламада

$$C_1 + C_2 = A, \quad (C_1 - C_2) \cdot i = B$$

белгилаш киритиб, қуйидаги куринишда ёзамиз:

$$x = A \cos kt + B \sin kt. \tag{14.6}$$

(14.6) тенглама (14.3) дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир. (14.6) даги интеграл доимийлари A ва B ни (14.1) бошланғич шартлардан фойдаланиб аниқлаймиз. (14.6) дан вақт буйича биринчи тартибли ҳосила ҳисоблаймиз:

$$v = \dot{x} = -Ak \sin kt + B\, k \cos kt.$$

Бу ифодага ва (14.6) га (14.1) ни қўямиз:

$$x_0 = A \cos 0 + B \sin 0, \quad v_0 = -Ak \sin 0 + Bk \cos 0.$$

Бу системадан $A = x_0$, $B = \dfrac{v_0}{k}$ (14.7)

ҳосил булади (14.7) ни (14.6) га қўйиб, нуқтанинг кинематик ҳаракат конунини ҳосил қиламиз:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \tag{14.8}$$

Косинус ва синус функцияларининг бирини иккинчиси орқали ифодалаш ва (14.8) ни соддароқ куринишга келтириш мумкин. Бунинг учун A ва B узгармаслар ўрнига a, α узгармаслар қабул қиламиз:

$$A = a \sin \alpha, \quad B = a \cos \alpha \tag{14.9}$$

(14.9) ва (14.7) ни биргаликда ечсак,

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{v_0} \tag{14.10}$$

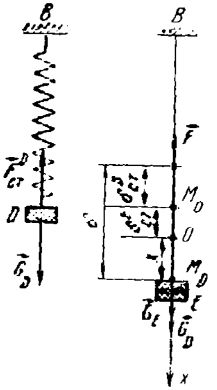
ҳосил булади. (14.6) эса a, α ўзгармаслар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$x = a\,(\cos kt \sin \alpha + \sin kt \cdot \cos \alpha)$$

ёки

$$x = a \sin (kt + \alpha). \tag{14.11}$$

Шундай қилиб, қайтарувчи куч таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳаракати (14.8) ёки (14.11) тенгламалар билан ифодаланади. (14.11) даги a ва α (14.10) тенгламалардан топилади. (14.11) дан кўриниб турибдики, 5-§ да тасвирланган ҳаракат моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатидан иборат экан. Шунинг



14.2- расм.

учун (14.3) ифода *эркин тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси*, (14.8) ёки (14.11) *эркин тебранма ҳаракат қонуни* дейилади. Эркин тебранма ҳаракат графиги 1.18-расмда курсатилган эди. (14.10) тенгликлар бўйича аниқланувчи a ва α мос равишда, *эркин тебраниш амплитудаси* ва *эркин тебранишнинг бошланғич фазаси* дейилади. Маълумки, эркин тебраниш даври

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \qquad (14.12)$$

формула билан аниқланади.

41-масала. Бикирлиги $c=98\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ бўлган пружинага осилган, мувозанат ҳолатида турувчи $m_1=2$ кг массали D юк қаторига массаси $m_2=0{,}8$ кг бўлган E юк уланади (14.2-расм). D ва E юклар системасининг тебранишлари ва тебраниш даври аниқлансин. Координата боши D ва E юкларнинг статик мувозанат ҳолатида олинсин.

Ечиш. Пружинанинг D юк таъсиридаги статик деформациясини $\delta_D^{\text{ст}}$, E юк таъсиридаги статик деформациясини $\delta_E^{\text{ст}}$ билан белгилаймиз. Пружина $\delta_D^{\text{ст}}+\delta_E^{\text{ст}}$ деформация олганда D ва E юклар оғирликлари пружинанинг эластиклик кучи билан мувозанатлашади. Ана шу ҳолат *статик мувозанат ҳолат* дейилади. D ва E юклар системасини битта M нуқта деб қарасак, унга юкларнинг оғирлик кучлари $\vec{G}_D$, $\vec{G}_E$ ва пружинанинг эластиклик кучи $\vec{F}$ таъсир этади. Ихтиёрий вақт учун пружина деформациясини δ билан белгилаймиз. У ҳолда Гук қонунига кура $F=c\cdot\delta$ бўлади.

Координата бошини M нуқтанинг O статик мувозанат ҳолатида олиб, Ox ўқни ҳаракат йуналиши бўйича ўтказамиз. У ҳолда бошланғич шартлар қуйидагича булади:

$$t=0,\quad x=x_0=-\delta_E^{\text{ст}},\quad v=v_0=0. \qquad (1)$$

M нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$(m_D+m_E)\ddot{x}=G_D+G_E-F. \qquad (2)$$

Расмдан: $\delta=\delta_D^{\text{ст}}+\delta_E^{\text{ст}}+x$; шунинг учун $F=c\,(\delta_D^{\text{ст}}+\delta_E^{\text{ст}}+x)$. Буни (2) га қўямиз:

$$(m_D+m_E)\ddot{x}=G_D+G_E-c\delta_D^{\text{ст}}-c\delta_E^{\text{ст}}-cx. \qquad (3)$$

M нуқтанинг статик мувозанат ҳолатида $G_D+G_E-c\delta_D^{\text{ст}}-$

$-c\delta_E^{ст}=0$ бўлгани учун (3) тенглама қуйидаги куринишни олади:

$$(m_D+m_E)\ddot{x}=-cx. \tag{4}$$

$$k^2=\frac{c}{m_D+m_E} \tag{5}$$

белгилаш киритамиз; у ҳолда (4) тенглама қуйидагича бўлади:

$$\ddot{x}+k^2x=0. \tag{6}$$

Бу эркин тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламасидир. Шунинг учун (6) нинг ечими (14 8) билан аниқланади:

$$x=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt. \tag{7}$$

Энди k, x_0 ни ҳисоблаймиз.

(5) дан: $k=\sqrt{\dfrac{c}{m_D+m_E}}=\sqrt{\dfrac{98}{2+0{,}8}}\approx 5{,}92\ c^{-1}$.

$c\cdot\delta_E^{ст}=G_E$ шартдан:

$$\delta_E^{ст}=\frac{G_E}{c}=\frac{m_E g}{c} \text{ ёки } x_0=-\delta_E^{ст}\approx-0{,}08 \text{ м}.$$

$v_0=0$ ни эътиборга олиб, топилган k ва x_0 қийматларини (7) га қўямиз:

$$x\approx-0{,}08\ \cos 5{,}92t \text{ м}. \tag{8}$$

(8) ни (14.11) ечимдан фойдаланиб ҳам келтириб чиқариш мумкин. Бунинг учун аввал (14.10) тенгликлардан a ва α ни аниқлаймиз:

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}}\approx 0{,}08 \text{ м}; \quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{x_0k}{v_0}=\operatorname{arctg}\infty,$$

$$\sin\alpha=-1, \quad \alpha=\frac{3\pi}{2}.$$

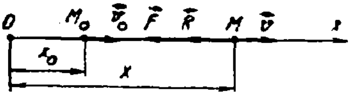
У ҳолда (14.11) қуйидагича бўлади:

$$x=a\sin(kt+\alpha)\approx 0{,}08\sin\left(5{,}92t+\frac{3\pi}{2}\right)=-0{,}08\cos 5{,}92t \text{ м}.$$

Энди тебраниш даврини (14.12) формула билан аниқлаймиз: $T=\dfrac{2\pi}{k}\approx 1{,}06$ с.

64-§. Муҳит қаршилик кучи таъсиридаги моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати

Массаси m бўлган, Ox ўқ бўйлаб ҳаракатланувчи M моддий нуқтага $F_x=-cx$ қайтарувчи кучдан ташқари шу нуқта



14.3- расм.

тезлигига пропорционал ва тезлик векторига қарама-қарши йўналган муҳитнинг қаршилик кучи $\vec{R}$ таъсир қилсин, яъни

$$\vec{R} = -\mu\vec{v}$$

бунда $\vec{v}$ — нуқтанинг тезлиги, μ — муҳитнинг физик хусусиятларига боғлиқ бўлган коэффициент. Бошланғич пайтда $x = x_0$, $v = v_0$ деб олиб, M нуқтанинг ҳаракатини аниқлаймиз (14.3-расм). Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}.$$

$\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{\mu}{m} = 2b$ белгилашлар киритиб, бу тенгламани

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (14.13)$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенглама бир жинсли, иккинчи тартибли дифференциал тенгламадир. Унинг ечими ҳам $x = Ce^{lt}$ кўринишда изланади. Изланаётган ечимни (14.13) га қўйиб номаълум коэффициент l га нисбатан

$$l^2 + 2bl + k^2 = 0$$

характеристик тенглама ҳосил қилинади. Унинг ечими

$$l_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2} \qquad (14.14)$$

бўлади. У ҳолда (14.13) нинг умумий ечими

$$x = C_1 e^{l_1 t} + C_2 e^{l_2 t} \qquad (14.15)$$

бўлади. (14.14) ифодадаги b ва k нинг миқдорларига қараб (14.15) ечим турли кўринишда бўлиши мумкин. Бунда қуйидаги уч ҳолни алоҳида-алоҳида қараб чиқамиз:

1) $b < k$ — кичик қаршиликлар ҳоли дейилади;
2) $b > k$ — катта қаршиликлар ҳоли;
3) $b = k$ — тенг қаршиликлар ҳоли.

1. $b < k$ бўлсин. Қисқалик учун $\sqrt{k^2 - b^2} = k_1$ белгилаш киритамиз. Бу ҳолда характеристик тенгламанинг l_1 ва l_2 илдизлари мавҳум сонлар бўлади, чунончи $l_{1,2} = -b \pm ik_1$. (14.15) га асосан умумий ечим

$$x = C_1 e^{(-b+ik_1)t} + C_2 e^{(-b-ik_1)t} = e^{-bt}\left(C_1 e^{ik_1 t} + C_2 e^{-ik_1 t}\right)$$

бўлади. Қавс ичидаги ифодани аввалги параграфдаги каби шакл ўзгартириб, қуйидаги кўринишлардан бирига келтириш мумкин:

$$x = e^{-bt}(A_1 \cos k_1 t + B_1 \sin k_1 t) \qquad (14.16)$$

ёки

$$x = e^{-bt} \cdot a_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) \qquad (14.17)$$

Бунда A_1 ва B_1 ёки a_1 ва α_1 ўзгармаслар бошланғич шартлардан аниқланади. Уларни аниқлаш учун (14.16) ёки (14.17) ифодаларга ҳамда уларнинг вақт бўйича биринчи тартибли хосилаларига $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$ ни қўямиз. Натижада қуйидагилар ҳосил бўлади.

$$A_1 = x_0, \quad B_1 = \frac{v_0 + bx_0}{\sqrt{k^2 - b^2}} \qquad (14.18)$$

ёки

$$a_1 = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + bx_0)^2}{k^2 - b^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{x_0 \sqrt{k^2 - b^2}}{v_0 + bx_0} \qquad (14.19)$$

Шундай қилиб, кичик қаршиликлар ҳолида қайтарувчи ва муҳитнинг қаршилик кучи таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳаракати (14.16) ёки (14.17) тенглама билан ифодаланиб, бу тенгламалардаги интеграл ўзгармаслари (14.18) ёки (14.19) формулалардан аниқланади.

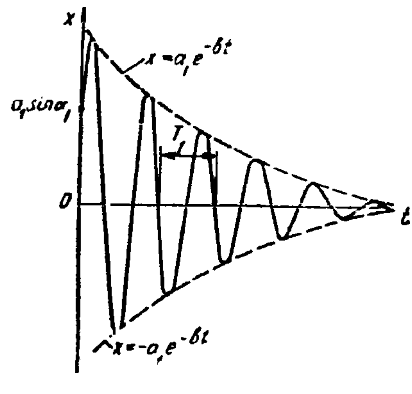
(14.17) дан кўрамизки, моддий нуқтанинг текширилаётган ҳаракати даврий тебранма ҳаракатдан иборат экан. Лекин (14.17) тенгламадаги e^{-bt} кўпайтувчи туфайли бу тебранма ҳаракат секин-аста сўнувчи бўлади. Бундаги тебранишлар амплитудаси вақт ўтиши билан қисқариб нолга интилиб боради. Сўнувчи тебранишларнинг графиги 14.4-расмда кўрсатилган. Сўнувчи тебранма ҳаракатда нуқта ўзининг аввалги ҳолатига бутунлай қайтмайди. Шунинг учун сўнувчи тебранишлар даврини шартли равишда киритиб, уни T_1 билан белгилаб, қуйидагини топамиз:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}} \qquad (14.20)$$

ёки

$$T_1 = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\sqrt{1 - (b/k)^2}} = T \cdot \left|1 - \left(\frac{b}{k}\right)^2\right|^{-\frac{1}{2}},$$

бунда T—муҳитнинг қаршилиги бўлмагандаги эркин тебранишларнинг даври. Ўрта қавс ичидаги ифодани Ньютон биномига ёямиз ва $b \ll k$ эканлигини эътиборга олиб, ёйилмада дастлабки икки ҳад билан чегараланамиз:



14.4- расм.

$$T_1 = T\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{k^2}\right).$$

Шундай қилиб, муҳитнинг қаршилиги таъсир этганда тебраниш даври қаршилик таъсир этмаган ҳолга қараганда катта бўлар экан.

Тебранишлар амплитудасининг камайиш қонунини топайлик. t_1 пайтда мувозанат ҳолатдан энг катта оғишни x_1 билан, x_2 орқали эса $t_1 + T_1$ вақтга мос келувчи оғишни белгилайлик. У ҳолда

$$x_1 = e^{-bt_1}a_1$$

ва

$$x_2 = e^{-b(t_1+T_1)} \cdot a_1 = e^{-bT_1} \cdot x_1.$$

Умуман,

$$x_{n+1} = e^{-bT_1} \cdot x_n$$

бўлади. Шундай қилиб, тебранишлар амплитудаси геометрик прогрессия қонуни билан камаяр экан Бу геометрик прогрессия махражи $q = e^{-bT_1}$ *сўниш декременти* дейилади.

$$D = |\ln e^{-bT_1}| = bT_1 \tag{14.21}$$

га *логарифмик декремент* дейилади.

2. $b > k$ — *катта қаршиликлар ҳолига* ўтамиз. Бу ҳолда характеристик тенгламанинг илдизлари $l_1 = -b + \sqrt{b^2 - k^2}$ ва $l_2 = -b - \sqrt{b^2 - k^2}$ ҳақиқий, $b \geqslant \sqrt{b^2 - k^2}$ бўлгани учун l_1 ва l_2 манфий сонлар. Бу ҳолда (14.13) тенгламанинг умумий ечими

$$x = e^{-bt}(C_1 e^{\sqrt{b^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-k^2}\,t}) \tag{14.22}$$

бўлади. C_1 ва C_2 ўзгармас сонлар бошланғич шартлардан топилади. Агар

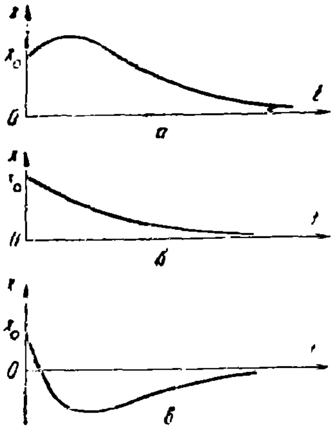
$$\dot{x} = -b \cdot e^{-bt}(C_1 e^{\sqrt{b^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-k^2}\,t}) +$$
$$+ e^{-bt}\sqrt{b^2 - k^2}\,(C_1 e^{\sqrt{b^2-k^2}\,t} - C_2 e^{\sqrt{b^2-k^2}\,t})$$

ифодани назарда тутиб, бошланғич шартлар: $t = 0$ да $x = x_0$ $v = v_0$ дан фойдалансак, C_1 ва C_2 ни аниқловчи қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

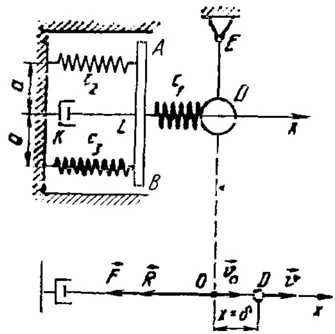
$$C_1 = \frac{v_0 + x_0(b + \sqrt{b^2 - k^2})}{2\sqrt{b^2 - k^2}}, \quad C_2 = \frac{v_0 + x_0(b - \sqrt{b^2 - k^2})}{2\sqrt{b^2 - k^2}}.$$

(14.22) билан аниқланувчи ҳаракат даврий бўлмайди. l_1, l_2 манфий бўлгани учун x вақтнинг ўтиши билан камайиб, нолга интилиб боради. Бошланғич шартларнинг қандай булишига қараб ҳаракат графиги 14.5-расм, *а*, *б*, *в* да тасвирланган бирорга кўринишда булади.

3. $b = k$ булган *тенг қаршиликлар ҳолига* ўтамиз. Бунда характеристик тенгламанинг илдизлари $l_1 = l_2 = -b$ ҳақиқий ва



14.5- расм.



14.6- расм.

каррали бўлиб, (14.13) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2 t).$$

$$\dot{x} = -be^{-bt}(C_1 + C_2 t) + e^{-bt} \cdot C_2$$

булишини эътиборга олиб, бошланғич шартлардан фойдалансак,

$$C_1 = x_0 \quad \text{ва} \quad C_2 = v_0 + bx_0$$

келиб чиқади. Демак, $k = b$ ҳолда (14.13) дифференциал тенгламанинг ечими

$$x = e^{-bt}[x_0 + (v_0 + bx_0)t] \tag{14.23}$$

тенглама билан ифодаланади.

(14.23) формуладан кўринадики, бу ҳолда нуқтанинг ҳаракати даврий бўлмайди. Вақт t нинг ўсишига нисбатан e^{-bt} нинг камайиши тезроқ, бинобарин, x камаювчи функция бўлади ва (14.23) сўнувчи, даврий бўлмаган ҳаракатни ифодалайди. Бу ҳол учун ҳам ҳаракат графиги, бошланғич шартларнинг қандай олинишига қараб, 14.5-расм, *а*, *б*, *в* лардан бирига ўхшаш бўлади.

42-масала. Горизонтал текисликда E ўқ атрофида айлана оладиган вазнсиз DE стерженга бириктирилган 1 кг массали D юкка бикирлиги $c_1 = 1200\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$ бўлган пружина уланган (14.6-расм). Пружинанинг иккинчи L учига AB брус, AB брусга эса бикирликлари $c_2 = c_3 = 300\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$ бўлган ўзаро параллел пружиналар бириктирилган; L нуқта бу пружиналар ўқларидан бир хил a масофада жойлашган DE стерженнинг расмда курсатилган мувозанат ҳолатида D юкка ўнг томонга йўналган $v_0 = 0{,}5\ \frac{м}{с}$ тезлик берилиб, юк ҳаракатга келтирилади. Юкнинг ҳаракатига унинг тезлигига қарши йўналган, миқдори $R = 12v$ бўлган қаршилик кучи таъсир этади. Демпфернинг KL штоки вазнсиз AB брусдаги тешик орқали ўтказилиб, D юкка бириктирилган. D юкни тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи моддий нуқта деб фараз қилиб ва координата бошини юкнинг мувозанат ҳолатида олиб, юкнинг ҳаракати аниқлансин. Юкнинг горизонтал текислик бўйлаб сирпанишидаги ишқаланиш ҳисобга олинмасин.

Ечиш. D юк ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузишдан аввал бикирликлари c_1, c_2, c_3 булган учта пружинани бикирлиги c бўлган битта пружина билан алмаштирамиз. Бунинг учун биринчи навбатда ўзаро параллел 2 ва 3 пружиналарни бикирлиги c_{23} бўлган битта пружинага келтирамиз. Агар AB брусни ўнг томонга бирор δ_{23} масофага силжитсак, иккала пружина бир хил $\delta_2 = \delta_3 = \delta_{23}$ катталикка чўзилади. Бунда пружиналарда $\vec{F}_2$ ва $\vec{F}_3$ эластиклик кучлари ҳосил бўлади. Иккита параллел пружинани алмаштирувчи битта пружинанинг $\vec{F}_{23}$ эластиклик кучи $\vec{F}_2$ ва $\vec{F}_3$ кучларнинг йиғиндисига тенг бўлиши керак:

$$F_{23} = F_2 + F_3.$$

Бу тенгликни ҳадма-ҳад $\delta_{23} = \delta_2 = \delta_3$ га бўламиз:

$$\frac{F_{23}}{\delta_{23}} = \frac{F_2}{\delta_2} + \frac{F_3}{\delta_3}.$$

Бунда $\frac{F_{23}}{\delta_{23}} = c_{23}$, $\frac{F_2}{\delta_2} = c_2$, $\frac{F_3}{\delta_3} = c_3$ бўлганидан

$$c_{23} = c_2 + c_3$$

келиб чиқади. Бинобарин, *параллел пружиналарга эквивалент бўлган пружина бикирлиги ҳар қайси пружина бикирлигининг йиғиндисига тенг экан.*

Энди кетма-кет уланган, бикирликлари c_{23} ва c_1 бўлган пружиналарни битта пружина билан алмаштирамиз.

D юкни ўнг томонга қараб бирор δ масофага силжитсак, пружиналарнинг умумий чўзилиши шу δ га тенг бўлади:

$$\delta = \delta_{23} + \delta_1.$$

Бунда ҳар қайси пружинанинг F эластиклик кучи таъсиридаги деформациялари

$$\delta = \frac{F}{c}, \quad \delta_{23} = \frac{F}{c_{23}}, \quad \delta_1 = \frac{F}{c_1}$$

га тенг. Бу ифодаларни аввалги тенгликка қўйсак,

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_{23}} + \frac{1}{c_1} \text{ ёки } c = \frac{c_1 \cdot c_{23}}{c_1 + c_{23}}$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, берилган учта пружинага эквивалент битта пружина бикирлиги қуйидагига тенг бўлади:

$$c = \frac{c_1 \cdot (c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3} = 400 \ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Координата бошини D юкнинг O мувозанат ҳолатида олиб, унинг ҳаракати бўйича Ox ўқни йўналтирамиз. У ҳолда бошланғич шартлар қуйидагича ифодаланади:

$$t = 0, \quad x = x_0 = 0, \quad v = v_0. \tag{1}$$

D юк ҳаракатига берилган пружиналарга эквивалент пружинанинг $\vec{F}$ эластиклик кучи, муҳитнинг $\vec{R}$ қаршилик кучи таъсир этади (юкнинг оғирлик кучи, горизонтал текисликнинг нормал реакцияси ва DE вазнсиз стерженнинг реакция кучи Ox га перпендикуляр бўлгани учун расмда кўрсатилмаган). D моддий нуқтанинг Ox ўқ буйлаб ҳаракати дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = -F - R. \tag{2}$$

Бунда D нуқта координатасини x десак, эквивалент пружина деформацияси ҳам x бўлади. Шунинг учун $F = cx$; шунингдек, $R = 12v = 12\dot{x}$. Натижада (2) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$m\ddot{x} = -cx - 12\dot{x}.$$

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{12}{m} = 2b \tag{3}$$

белгилашлар киритамиз. У ҳолда D юк ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{4}$$

(4) дифференциал тенглама ечимини ёзиш учун (3) дан фойдаланиб k, b коэффициентларни аниқлаймиз:

$$k = \sqrt{400} = 20c^{-1}, \quad b = 6c^{-1}. \tag{5}$$

Шундай қилиб, $b < k$; бу кичик қаршиликлар ҳолида (4) дифференциал тенгламанинг ечими (14.16) ёки (14.17) кўринишда бўлиб, ундаги интеграл ўзгармаслари (14.18) ёки (14.19) формулалар билан аниқланади. (14.16) ва (14.18) ни биргаликда ёзамиз:

$$x = e^{-bt}\left(x_0 \cos\sqrt{k^2 - b^2}\, t + \frac{v_0 + b x_0}{\sqrt{k^2 - b^2}} \sin\sqrt{k^2 - b^2}\, t\right). \tag{6}$$

(6) га (1) ва (5) ни қўйиб, юкнинг ҳаракат қонунини ҳосил қиламиз:

$$x \approx e^{-6t} \cdot \frac{0,5}{19,08} \sin 19,08t = 0,026e^{-6t} \sin 19,08t \text{ м};$$

демак, D юк сўнувчи тебранма ҳаракатда бўлади.

65-§. Қаршилик курсатмайдиган муҳитда моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати

Моддий нуқтанинг $F_x = -cx$ қайтарувчи куч ҳамда вақтга боғлиқ равишда ўзгарувчи ва *уйғотувчи куч деб аталувчи* $\vec{Q}$ куч таъсирида Ox ўқ бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракатини текширамиз (14.7- расм). Умуман олганда уйғотувчи куч вақтнинг ихтиёрий функцияси бўлиши мумкин. Биз уйғотувчи куч вақтнинг даврий функцияси бўлган ҳолни кўриб чиқамиз. Уйғотувчи кучнинг Ox уқдаги проекцияси $H \sin(pt + \beta)$ бўлсин. Бунда H ва p, мос равишда, уйғотувчи кучнинг амплитудаси ва частотаси, β эса бошланғич фазасидир. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = -cx + H \mathrm{stn}(pt + \beta).$$

$k^2 = c/m$, $h = H/m$ белгилашларга кўра бу тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{k} + k^2x = h \sin(pt + \beta). \tag{14.24}$$

(14.24) иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламадир. Унинг умумий ечими бир жинсли

$$\ddot{x} + k^2x = 0 \tag{14.25}$$

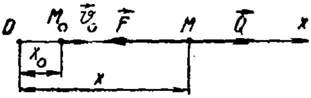
тенгламанинг умумий ечими x_1 ва (14.24) нинг хусусий ечими йиғиндисига тенг булади. (14.25) тенгламанинг умумий ечими 66-§ га асосан

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \text{ ёки } x_1 = a \sin(kt + \alpha)$$

кўринишда бўлади. (14.24) нинг хусусий ечимини $k \neq p$ ҳол учун

$$x_2 = A \sin(pt + \beta) \tag{14.26}$$

кўринишда излаймиз. A — аниқланиши лозим бўлган ўзгармас сон. Агар (14.26) хусусий ечим бўлса, у (14.24) ни қаноатлантириши керак. Бу шартдан фойдаланиб, $A = \frac{h}{k^2 - p^2}$ булишини курамиз.



14.7- расм.

Демак,

$$x_2 = \frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\beta), \tag{14.27}$$

экан. Шундай қилиб (14.24) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$x = a\sin(kt+\alpha) + \frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\beta),\ k \neq p \tag{14.28}$$

(14.28) дан кўрамизки, моддий нуқтанинг қайтарувчи ва гармоник уйғотувчи куч таъсиридаги ҳаракати хусусий ҳамда уйғотувчи куч таъсиридан буладиган гармоник тебранма ҳаракатларнинг йиғиндисидан иборат экан. (14.28) формула таркибига кирувчи, (14.27) *тенглама билан ифодаланувчи* ҳамда уйғотувчи куч частотаси билан буладиган гармоник *ҳаракат моддий нуқтанинг мажбурий тебранма* ҳаракати дейилади. Бу ҳаракат бошланғич шартларга боғлиқ эмас. (14.27) тенгламадаги $\frac{h}{k^2-p^2}$ *мажбурий тебраниш амплитудаси, р* эса *мажбурий тебранишнинг доиравий такрорлиги* дейилади.

(14.24) дифференциал тенгламага *мажбурий тебранишларнинг дифференциал тенгламаси* дейилади.

(14.28) тенгламани

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\beta) \tag{14.29}$$

кўринишда ёзиб олиб, C_1, C_2 ўзгармасларни аниқлаймиз. Бунинг учун $t=0$ да $x=x_0$, $\dot{x}=v_0$ бўлиш шартидан фойдаланамиз. У ҳолда

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2-p^2}\sin\beta \text{ ва } C_2 = \frac{v_0}{k} - \frac{h}{k^2-p^2}\cdot\frac{p}{k}\cos\beta$$

келиб чиқади. Топилган C_1 ва C_2 ни (14.29) га қўйсак, нуқта ҳаракатининг тенгламаси

$$x = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt - \frac{h}{k^2-p^2}\left(\sin\beta\cos kt + \frac{p}{k}\cos\beta\sin kt\right) +$$
$$+\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\beta) \tag{14.30}$$

куринишга келади. Шундай қилиб, нуқтанинг ҳаракати учта ҳаракатнинг йиғиндисидан иборат булади:

1. Тенгламаси

$$x^* = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt$$

бўлган *хусусий тебранишлар*. Улар уйғотувчи кучга боғлиқсиз хусусий такрорлик билан кечаверади.

2. *Уйғотувчи куч таъсирида вужудга келган,* лекин *хусусий такрорлик билан буладиган тебранишлар.* Бу тебранишларнинг тенгламаси қуйидаги куринишга эга:

$$x^{**} = -\frac{h}{k^2-l^2}\left(\sin \cdot \cos kt + \frac{p}{k}\cos\beta\sin kt\right).$$

Бу тебранишлар бошланғич шартлар $t=0$ да $x=0$, $\dot{x}=0$ бўлганда ҳам вужудга келади, яъни бу тебранишларнинг амплитудаси бошланғич шартларга боғлиқ эмас.

3. Уйғотувчи куч таъсирида вужудга келган ва такрорлиги шу куч такрорлигига тенг бўлган *мажбурий тебранишлар*. Бу тебранишларнинг тенгламаси қуйидагича:

$$x_2 = x^{***} = \frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\beta).$$

(14.30) кўринишдаги тенглама бошланғич шартлар $x=0$, $\dot{x}=0$ дан иборат ва уйғотувчи кучнинг такрорлиги хусусий тебранишлар такрорлигига яқин $\left(\frac{p}{k}\approx 1\right)$ бўлганда нуқта ҳаракатининг характерини аниқлаш имконини беради Бу ҳолда (14.30)

$$x \approx \frac{h}{k^2-p^2}\left[\sin(pt+\beta)-\sin(kt+\beta)\right]$$

ёки

$$x \approx 2\frac{h}{k^2-p^2}\sin\frac{p-k}{2}t\cdot\cos(pt+\beta) \qquad (14.31)$$

кўринишга келади. (14.31) билан ифодаланувчи ҳаракат амплитудаси

$$2\frac{h}{k^2-p^2}\sin\frac{p-k}{2}t$$

қонун билан ўзгарувчи, частотаси p бўлган тебранишларни ифодалайди. Унга „тепиш“ ҳодисаси дейилади.

$p=k$ ҳолни, яъни мажбурий тебраниш билан эркин тебраниш такрорликлари бир хил бўлган ҳолни текширайлик. Бунга *резонанс ҳоли* дейилади. Резонанс ҳолида (14.24) дифференциал тенглама хусусий ечимини (14.27) кўринишда олиб бўлмайди, чунки ифода махражи нолга тенг булиб, аниқмаслик келиб чиқади Шунинг учун (14.24) нинг хусусий ечимини

$$x_2 = Bt\cos(kt+\beta) \qquad (14.32)$$

кўринишда излаймиз. Уни (14.24) га қўйиб $B=-\frac{h}{2k}$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, *резонанс ҳолида моддий нуқтанинг мажбурий тебранишлари*

$$x_2 = -\frac{h}{2k}t\cos(kt+\beta) \qquad (14.33)$$

тенглама билан ифодаланади. (14.33) дан резонанс ҳолида мажбурий тебраниш амплитудаси вақт ўтиши билан $\frac{h}{2k}t$ қонунга мувофиқ ортиб бориши кўриниб турибди. (14.34) тенглама билан ифодаланувчи ҳаракат графиги 14.8-расмда тасвирланган.

Резонанс ҳолида (14.24) дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos (kt + \beta) \qquad (14.34)$$

кўринишда бўлади. $t=0$ да $x = x_0$, $v = v_0$ бошланғич шартлардан фойдаланиб C_1, C_2 ўзгармасларни аниқлаймиз. (14.34) да $t = 0$, $x = x_0$ десак, ундан $C_1 = x_0$ ҳосил бўлади.

(14.34) дан вақт бўйича ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\dot{x} = - C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt - \frac{h}{2k} \cos (kt + \beta) +$$
$$+ \frac{h}{2} t \sin (kt + \beta).$$

Бу ифодага $t = 0$, $\dot{x} = v_0$ ни қўйсак,

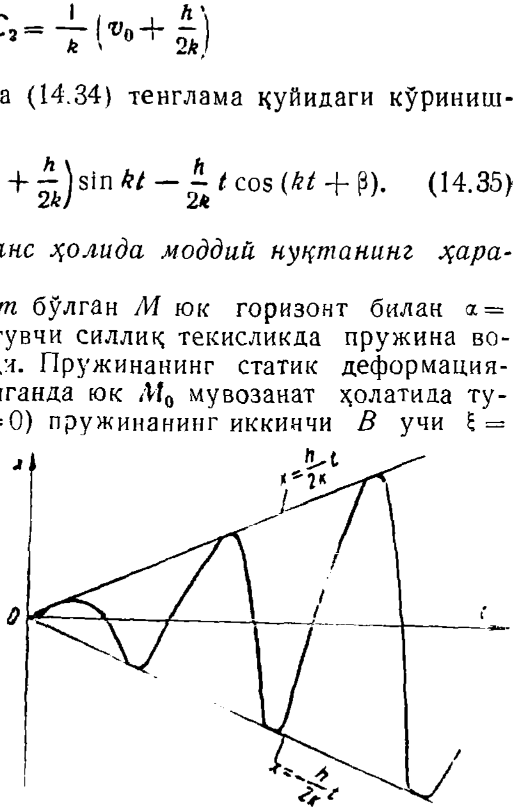
$$C_2 = \frac{1}{k} \left(v_0 + \frac{h}{2k} \right)$$

келиб чиқади. Натижада (14.34) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{1}{k} \left(v_0 + \frac{h}{2k} \right) \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos (kt + \beta). \qquad (14.35)$$

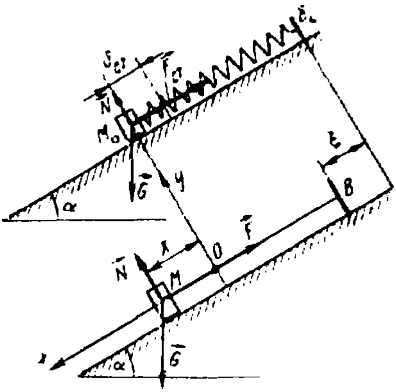
(14.35) *ифода резонанс ҳолида моддий нуқтанинг ҳаракатини аниқлайди.*

43-масала. Массаси m бўлган M юк горизонт билан $\alpha = 30^\circ$ бурчак ташкил этувчи силлиқ текисликда пружина воситасида ушлаб турилади. Пружинанинг статик деформацияси $\delta_{ст} = 2$ см га тенг бўлганда юк M_0 мувозанат ҳолатида туради. Бирор пайтда ($t = 0$) пружинанинг иккинчи B учи $\xi = 0{,}01 \sin 10t$ м қонунга кўра ҳаракатга келса, M нуқтанинг ҳаракат қонуни қандай бўлиши аниқлансин. O саноқ бошини юкнинг статик мувозанат ҳолатида, Ox, координата ўқи эса юкнинг ҳаракати бўйича олинсин (14.9-расм).



14.8-расм.

Ечиш. M юкни моддий нуқта деб қараймиз. Унга ўзининг



14.9- расм.

оғирлик кучи $\vec{G}=m\vec{g}$, қия текисликнинг нормал реакцияси $\vec{N}$ ва пружинанинг эластиклик кучи $\vec{F}$ таъсир этади. M нуқтанинг Ox ўқ бўйлаб ҳаракати дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x}=G\sin\alpha-F. \quad (1)$$

Кўрилаётган ҳолда пружина деформацияси $\delta=\delta_{cm}+x-\xi$ бўлгани учун $F=c\cdot\delta=c(\delta_{cm}+x-\xi)$ тенглик билан аниқланади. У ҳолда (1) тенглама

$$m\ddot{x}=mg\sin\alpha-c(\delta_{cm}+x-0{,}01\sin 10t) \quad (2)$$

кўринишни олади.

M юкнинг статик мувозанат ҳолатида

$$mg\sin\alpha-c\cdot\delta_{cm}=0 \quad (3)$$

бўлишини ҳисобга олсак, (2) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m\ddot{x}=-cx+0{,}01c\cdot\sin 10t. \quad (4)$$

Пружина бикирлиги c (3) тенгликдан аниқланиши мумкин:

$$c=\frac{mg\sin\alpha}{\delta_{cm}} \quad (5)$$

(5) ни (4) га қўйиб, ҳосил бўлган ифодани m га бўлиб,

$$\ddot{x}+\frac{g\sin\alpha}{\delta_{cm}}x=\frac{0.01\,g\sin\alpha}{\delta_{cm}}\cdot\sin 10t \quad (6)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (6) га қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$k^2=\frac{g\sin\alpha}{\delta_{cm}},\quad h=\frac{0{,}01g\sin\alpha}{\delta_{cm}},\quad p=10\text{ c}^{-1}; \quad (7)$$

Унда қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\ddot{x}+k^2x=h\sin pt. \quad (8)$$

(8) дифференциал тенглама (14.24) дифференциал тенгламанинг $\beta=0$ булгандаги кўринишидир. Нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш учун бошланғич шартларни билиш керак. Бошланғич пайтда юк ўзининг статик мувозанат ҳолатида бўлгани учун бошланғич шартлар

$$t = 0,\ x_0 = 0,\ v_0 = 0 \tag{9}$$

дан иборат. (8) дифференциал тенглама ечими (14.30) кўринишда бўлади; унга (9) бошланғич шартларни ва $\beta = 0$ қийматни қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$x = -\frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \frac{p}{k} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{10}$$

(7) ифодалар ва масала шартини эътиборга олиб,

$$k \approx 15{,}65\ \text{с}^{-1},\ \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \frac{p}{k} \approx 0{,}011\ \text{м},\ \frac{h}{k^2 - p^2} \approx 0{,}017\ \text{м}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу топилганларни (10) га қўйиб, нуқтанинг ҳаракат қонунини ҳосил қиламиз:

$$x \approx (-0{,}011 \sin 15{,}65t + 0{,}107 \sin 10t)\ \text{м}.$$

Шундай қилиб M юк доиравий частотаси 15,65 с^{-1} бўлган хусусий тебранишлар билан доиравий частотаси 10 с^{-1} бўлган мажбурий тебранишлардан ташкил топган қонунга кўра ҳаракатланар экан.

44-масала. Бикирлиги $c = 631{,}655\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ бўлган AB пружинага $m = 1$ кг массали M магнит стержени осилган (14.10-расм). Магнитнинг пастки учи $i = 20 \sin 8\pi t$ ампер ўзгарувчи ток оқувчи ғалтакдан ўтади. $t = 0$ пайтдан бошлаб стерженни соленоидга тортувчи ток ўта бошлайди; шу пайтга қадар магнит стержени пружинада қузғалмай осилиб турган. Магнит билан ғалтак орасидаги ўзаро таъсир кучи $Q = 0{,}01\pi i$ Н тенглик билан аниқланади. Магнитнинг мажбурий тебранишлари аниқлансин.

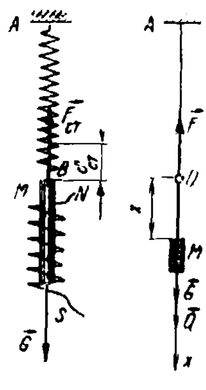
Ечиш. M магнит стерженини моддий нуқта деб қараб, унинг ҳаракатини текширамиз. Бу нуқтага оғирлик кучи $\vec{G} = m\vec{g}$, магнит билан ғалтак орасидаги ўзаро таъсир кучи $Q = 0{,}01\pi i = 0{,}2\pi \sin 8\pi t$ H ва пружинанинг эластиклик кучи $\vec{F}$ таъсир этади. Саноқ бошини стерженнинг статик мувозанат ҳолатида олиб, ҳаракат йўналиши бўйича Ox ўқни ўтказамиз ва нуқтанинг шу ўққа нисбатан ҳаракати дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = G - F + Q. \tag{1}$$

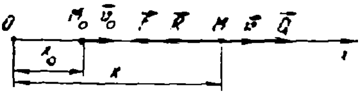
Пружина деформацияси $\delta = x + \delta_{cm}$ тенглик билан аниқлангани учун $F = c \cdot (x + \delta_{cm})$ бўлади.

Шундай қилиб (1) тенглама

$$m\ddot{x} = mg - c(x + \delta_{cm}) + 0{,}2\pi \sin 8\pi t \tag{2}$$



14.10- расм.



14.11-расм.

кўринишни олади. Стерженнинг мувозанат ҳолатида $mg - c\delta_{cm} = 0$ бўлганини ҳисобга олиб, (2) тенгламани ёзамиз:

$$m\ddot{x} + cx = 0{,}2\pi \sin 8\pi t \qquad (3)$$

$k^2 = \frac{c}{m}$, $h = \frac{0{,}2\pi}{m}$, $p = 8\pi$ белгилашлар киритсак, (3) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt. \qquad (4)$$

Бу мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасидир. Мажбурий тебраниш қонунини ёзишдан аввал p ва k ни ҳисоблаймиз:

$$p = 8\pi \approx 25{,}13 \text{ с}^{-1}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} \approx 25{,}13 \text{ с}^{-1},$$

яъни $k = p$ — резонанс ҳоли келиб чиқди.

Резонанс ҳолида (4) дифференциал тенгламанинг хусусий ечими — нуқтанинг мажбурий тебранишлари (14 33) га кўра қуйидагича бўлади:

$$x = -\frac{h}{2k} t \cos kt.$$

Бунда ҳисоблаш ишларини бажарсак, нуқтанинг қуйидаги мажбурий тебранма ҳаракати тенгламаси келиб чиқади: $x = -0{,}013 t \cos 25{,}13 t$ м.

66-§. Қаршилик кўрсатувчи муҳитда моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати

Моддий нуқта $\vec{F}$ қайтарувчи куч, миқдори нуқтанинг тезлигига пропорционал, йўналиши эса нуқта ҳаракатига қарама-қарши бўлган муҳитнинг $\vec{R}$ қаршилик кучи ва уйғотувчи $\vec{Q}$ куч таъсирида тўғри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракат қилсин (14·11-расм). Траектория бўйлаб Ox ўқни йўналтирамиз. $\vec{F}$, $\vec{R}$ ва $\vec{Q}$ кучларнинг бу ўқдаги проекцияси мос равишда $F_x = -cx$, $R_x = -\mu\dot{x}$ ва $Q_x = H \sin(pt + \beta)$ бўлсин. У ҳолда моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \beta) \qquad (14.36)$$

булади, бу ерда $\frac{\mu}{m} = 2b$, $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{H}{m} = h$ белгилашлар киритилган. (14.36) ҳам, (14.24) каби иккинчи тартибли, бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламадир. Унинг умумий ечими иккита ечимнинг йиғиндисидан иборат:

$$x = x_1 + x_2, \tag{14.37}$$

бунда x_1 билан $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0$ тенгламанинг умумий ечими белгиланган. Маълумки, бу ечим қуйидагича ифодаланади:

$$k > b \text{ да } x_1 = e^{-bt} \cdot a_1 \sin(\sqrt{k^2 - b^2}\, t + \alpha_1),$$

$$k < b \text{ да } x_1 = C_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - k^2})t} + C_2 e^{-(b + \sqrt{b^2 - k^2})t},$$

$$k = b \text{ да } x_1 = e^{-bt}(C_1 + C_2 t).$$

(14.37) даги x_2 — (14.36) тенгламанинг хусусий ечимини

$$x_2 = A \sin(pt + \beta - \gamma) \tag{14.38}$$

кўринишда излаймиз. A ва γ — аниқланиши лозим бўлган ўзгармас сонлар. (14.38) ни (14.36) га қўйиб,

$$A[(k^2 - p^2)\cos\gamma + 2bp\sin\gamma]\sin(pt + \beta) + A[-(k^2 - p^2)\sin\gamma + 2bp\cos\gamma]\cos(pt + \beta) = h\sin(pt + \beta)$$

муносабатга эришамиз. Бу тенглик ўринли бўлиши учун

$$\left.\begin{aligned} &A[(k^2 - p^2)\cos\gamma + 2bp\sin\gamma] = h, \\ &A[-(k^2 - p^2)\sin\gamma + 2bp\cos\gamma] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14.39}$$

бўлиши керак. (14.39) дан A ва γ аниқланади:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}} \quad \text{ва} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{2bp}{k^2 - p^2} \tag{14.40}$$

Шундай қилиб, (14.36) нинг хусусий ечими

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}} \sin\left(pt + \beta - \operatorname{arctg}\frac{2bp}{k^2 - p^2}\right) \tag{14.41}$$

бўлар экан. У ҳолда (14.36) нинг *умумий ечими* $k > b$ *ҳол учун:*

$$x = [e^{-bt} a_1 \sin(\sqrt{k^2 - b^2}\, t + \alpha_1)] + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}} \sin\left(pt + \beta - \operatorname{arctg}\frac{2bp}{k^2 - p^2}\right), \tag{14.42}$$

$k < b$ *ҳол учун:*

$$x = [C_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - k^2})t} + C_2 e^{-(b + \sqrt{b^2 - k^2})t}] + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}} \sin\left(pt + \beta - \operatorname{arctg}\frac{2bp}{k^2 - p^2}\right), \tag{14.43}$$

ва $k = b$ *ҳол учун*

$$x = [e^{-bt}(C_1 + C_2 t)] + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}} \sin\left(pt + \beta - \operatorname{arctg}\frac{2bp}{k^2 - p^2}\right) \tag{14.44}$$

тенгламалар билан ифодаланади.

(14.42) тенгламадаги a_1 ва α_1 шунингдек, (14.43) ва (14.44) тенгламалардаги C_1, C_2 ўзгармас сонлар, яъни интеграл доимийлари ҳар бир ҳол учун бошланғич шартлардан фойдаланиб алоҳида-алоҳида топилади.

Энди (14.42) — (14.44) тенгламаларни текширишга утайлик. Бу учала тенгламага хос умумий хусусият шундан иборатки, уларнинг ўнг томонларидаги ўрта қавсдаги купҳадлар вақтнинг камаювчи функциясидир. Бу қўшилувчилар $k > b$ ҳолда частотаси хусусий тебраниш частотасига тенг булган сунувчи эркин тебранма ҳаракатни, $k < b$ ва $k = b$ ҳолларда эса апериодик (даврий бўлмаган) сўнувчи ҳаракатни ифодалайди. (14.42) — (14.44) тенгламалар билан ифодаланувчи ҳаракатлар вақт утиши билан асосан ўнг томондаги иккинчи қушилувчилар — (14.41) тенглама билан белгиланади. Улар эса частотаси уйғотувчи куч частотаси билан буладиган мажбурий тебранма ҳаракатларни ифодалайди. Бинобарин, (14.41) *тенглама билан аниқланувчи тебранма ҳаракат—мажбурий тебранма ҳаракат*, (14.36) *эса мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаси* дейилади.

Мажбурий тебранишлар амплитудаси $A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}}$ ҳамда уйғотувчи куч фазаси билан мажбурий тебранишлар фазасининг айирмасини ифодаловчи $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2bp}{k^2 - p^2}$ қийматлар бошланғич шартларга боғлиқ эмас. Мажбурий тебранишлар амплитудасини

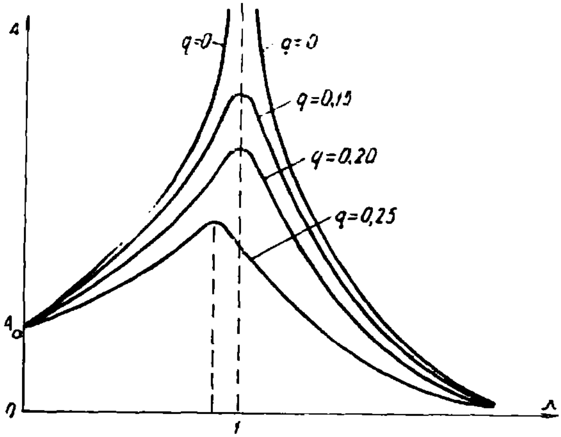
$$A = \frac{h/k^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{b}{k}\right)^2 \cdot \left(\frac{p}{k}\right)^2}}$$

куринишда ёзиб оламиз ва қуйидаги белгилашлар киритамиз: $\frac{h}{k^2} = \frac{H}{c} = A_0$, $\frac{p}{k} = \lambda$, $\frac{b}{k} = q$. Бунда A_0 — уйғотувчи куч $\vec{Q}$ нинг максимал қиймати H таъсирида нуқтанинг координаталар бошидан статик оғишини ифодалайди, q — муҳитнинг қаршилигини ифодаловчи коэффициент. Бу белгилашларда амплитуда

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4q^2\lambda^2}} \tag{14.45}$$

кўринишда ифодаланади. A амплитуданинг q коэффициент ва мажбурий тебраниш частотасининг хусусий тебранишлар частотасига нисбатини ифодаловчи λ сонларга боғлиқ ҳолда ўзгаришини текширамиз. Агар $q \neq 0$ бўлса, λ нинг қандай бўлишидан қатъи назар A чекли қийматга эга булади. Фақат $q = 0$ ҳамда $\lambda = 1$ бараварига ўринли бўлганида A чексиз қийматга эришади.

q нинг нолдан фарқли бирор ўзгармас қийматида A нинг максимал, лекин чекли қийматини таъминлайдиган λ ни топа-



14.12- расм.

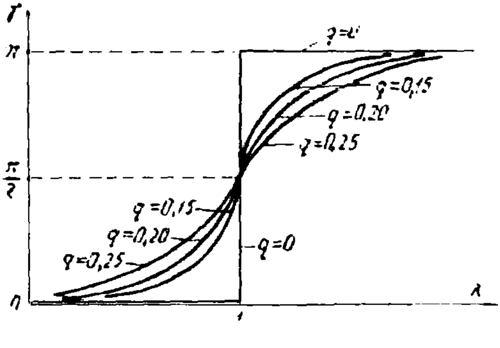
миз. Маълумки, (14.45) ифоданинг ўнг томонидаги махраж минимумга эга бўлганда, A максимумга эришади. Бу махражни минимумга эриштирадиган λ ни дифференциал ҳисоб усули билан аниқлаймиз. Бунинг учун

$$z=(1-\lambda^2)^2+4q\,\lambda^2 \qquad (14.46)$$

белгилаш киритиб, (14.46) дан λ бўйича биринчи тартибли ҳосила оламиз ва бу ҳосилани нолга тенглаймиз:

$$\frac{dz}{d\lambda}=4\left[(\lambda^2-1)\cdot\lambda+2q\,\lambda\right]=0$$

Бу тенгламани λ га нисбатан ечиб $\lambda_1=0$ ва $\lambda_2=\sqrt{1-2q^2}$ илдизларни ҳосил қиламиз. Биринчи илдиз масаланинг қуйилишига кўра маънога эга эмас. Чунки берилишига кўра уйғотувчи кучнинг такрорлиги $p\neq 0$ ҳамда хусусий такрорлик $k\neq\infty$. Демак, $\lambda_2=0$ ҳол текширишдан мустасно. Энди иккинчи илдиз $\lambda_2=\sqrt{1-2q^2}$ (14.46) минимумга айлантириш учун $\left(\frac{d^2z}{d^2\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_2}>0$ ёки $1-2q^2>0$ ёки $q<\sqrt{0,5}$ бўлиши керак. Демак, $0<q<\sqrt{0,5}$ бўлган тақдирдагина A максимумга эришиши мумкин. Шундай қилиб $0<q<\sqrt{0,5}$ ва $\lambda=\sqrt{1-2q^2}$ бўлганда мажбурий тебраниш амплитудаси максимумга эришади. 14.12-расмда мажбурий тебранишлар амплитудасининг λ га нисбатан ўзгариш графиги $q=0$, $q=0{,}15$, $q=0{,}20$, $q=0{,}20$, $q=0{,}25$ ҳоллар учун келтирилган. Расмдан курамизки, A нинг $q=0{,}15$, $q=0{,}20$, $q=0{,}25$ ҳоллар учун аниқланган максимал қийматлари унинг $\lambda=1$ бўлгандаги қийматларидан чапга томон силжиган. q нолга интилгани сари бу фарқ камайиб боради ва аксинча, q нинг қиймати $\sqrt{0,5}$ га яқинлашгани сари бу фарқ ошиб боради. Муҳитнинг қаршилигини белгиловчи q коэффициентни ҳамда



14.13-расм.

хусусий тебранишлар частотаси билан уйғотувчи куч частотаси нисбатини тегишлича олиб, уйғотувчи куч амплитудаси кичик бўлган тақдирда ҳам, мажбурий тебранишлар амплитудасини жуда ошириб юбориш мумкин. Ва аксинча, ушбу коэффициентларни шундай танлаш мумкинки, уйғотувчи кучнинг амплитудаси катта бўлса ҳам, мажбурий тебранишлар амплитудаси кичик бўлади.

Мажбурий тебранишлар фазасини текширамиз. Бу тебранишларнинг частотаси p ва даври $\tau=\frac{2\pi}{p}$, мос равишда, уйғотувчи кучнинг частотаси ва даврига тенг бўлиб, муҳитнинг қаршилиги уларга таъсир қилмайди. *Фазалар айирмаси* γ ни куриб чиқамиз. Бу бурчак (14.40) нинг иккинчи формуласи билан аниқланади. Уни

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{2h\lambda}{1-\lambda^2} \tag{14.47}$$

кўринишда ёзамиз. Бундаги λ умуман олганда 0 дан $+\infty$ гача қийматлар қабул қилиши мумкин. Агар пружинанинг эластиклик коэффициенти c жуда катта булса, $k^2=c/m$ дан курамизки, k ҳам катта, бинобарин λ нолга яқин, пружина эса абсолют узгармас системага яқин бўлади. (14.47) га асосан бу ҳолда фазалар айирмаси γ нолга айланади. Пружинанинг эластиклик коэффициенти 0 га яқин булганида эса λ жуда ҳам катта қийматга эришади ва $\operatorname{tg}\gamma$,(14.47) га асосан 0 га чап томондан яқинлашади, демак γ бурчак π га айланади. Шундай қилиб, λ коэффициент 0 дан $+\infty$ гача ўзгарганда, γ бурчак 0 дан π гача узгаради. $\lambda=1$ ҳолида (резонансга яқин соҳа) $\gamma=\frac{\pi}{2}$ бўлади. 14.13-расмда γ бурчакнинг λ га нисбатан ўзгариши графиги $q=0$, $q=0{,}15$, $q=0{,}20$, $q=0{,}25$ ҳоллар учун келтирилган.

45-масала. Бикирлиги c бўлган пружинага m массали юк осилган. Юкка Oz вертикал бўйича йўналган ва $Q_z=H\times\times\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t$ тенглик билан ифодаланувчи уйғотувчи куч ҳамда муҳитнинг қаршилик кучи $\vec{R}=-\mu\vec{v}$ таъсир этади. Мажбурий тебранишлар амплитудаси аниқлансин.

Ечиш. Юкнинг Oz ўқ бўйича ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз. Юкнинг статик мувозанат ҳолатида унинг оғирлик кучи пружинанинг статик деформациясидаги эластиклик кучи билан мувозанатлашишини эътиборга олсак, дифференциал тенглама қуйидагича булади:

$$m\ddot{z} = -cz - \mu v + H \sin \sqrt{\frac{c}{m}}\, t. \tag{1}$$

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad b = \frac{\mu}{2m}, \quad h = \frac{H}{m}, \quad p = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{2}$$

белгилашлар киритсак, (1) тенглама

$$\ddot{z} + 2bz + kz = h \sin pt \tag{3}$$

кўринишни олади, яъни мажбурий тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси ҳосил бўлади.

У ҳолда, мажбурий тебраниш амплитудаси (14.40) формула билан аниқланади:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}}. \tag{4}$$

(2) ифодаларни (4) га қўйиб, масала ечимини ҳосил қиламиз:

$$A = \frac{H}{\mu}\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

XV боб МОДДИЙ НУҚТАНИНГ НИСБИЙ ҲАРАКАТИ

67-§. Моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламалари. Галилейнинг нисбийлик принципи

Шу пайтгача биз ҳаракатни инерциал саноқ системаларига нисбатан ўрганиб келдик. Маълумки, моддий нуқтага ҳеч қандай куч таъсир қилмаса, у бундай системаларда тўғри чизиқли текис ҳаракат қилади ёки тинч ҳолатини сақлайди. Шартли равишда қўзғалмас деб олинган саноқ системалари ҳам инерциал ҳисобланади (қузғалмас ва бир-бирига нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракат қилувчи системаларнинг эквивалентлиги ҳақида сўз ушбу параграфнинг охирида боради). Моддий нуқта динамикасининг асосий дифференциал тенгламаси

$$m\vec{w} = \vec{F}$$

ана шундай системаларда ўринли. Демак, бу тенгламадаги $\vec{w}$ тезланиш абсолют тезланиш булади.

Энди моддий нуқта шартли равишда қўзғалмас деб олинган системага нисбатан ҳаракатланувчи системадаги ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузишни кўрамиз. Фараз қилайлик, $O_1x_1y_1z_1$ система шартли равишда қўзғалмас бўлсин

(15.1-расм). $Oxyz$ эса $O_1x_1y_1z_1$ системага нисбатан ихтиёрий ҳаракат қилувчи система булсин. m массали M моддий нуқта, тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ бўлган кучлар таъсирида $Oxyz$ системага нисбатан ҳаракат қилсин. $\vec{F}$ куч ташкил этувчилари орасида боғланиш реакция кучлари ҳам булиши мумкин. Маълумки, нуқтанинг $Oxyz$ системага нисбатан ҳаракати нисбий ҳаракат бўлади. $\vec{F}$ куч $Oxyz$ системанинг қузғалувчи ёки қўзғалмас булишига боғлиқ эмас. Моддий нуқтанинг $O_1x_1y_1z_1$ системага нисбатан ҳаракати абсолют ҳаракат булиб, бу ҳаракат Ньютоннинг иккинчи қонуни:

$$m\vec{w}_a = \vec{F} \tag{15.1}$$

асосида бўлади. (15.1) да $\vec{w}_a$ вектор M нуқтанинг абсолют тезланишидир. Кориолис теоремасини қўллаб, (15.1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$m(\vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_k) = \vec{F}.$$

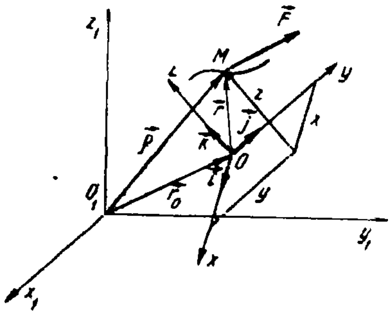
Тенгламанинг чап томонида нисбий ҳаракатни белгиловчи кўпайтмани қолдириб, уни қуйидагича ифодалаймиз:

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + (-m\vec{w}_e) + (-m\vec{w}_k). \tag{15.2}$$

$\vec{\Phi}_e = -m\vec{w}_e$, $\vec{\Phi}_k = -m\vec{w}_k$ белгилашлар киритамиз. Φ_e — *кўчирма инерция кучи*, $\vec{\Phi}_k$ эса *Кориолис инерция кучи* дейилади. Бу белгилашларни назарда тутиб, (15.2) ни қуйидагича ёзамиз:

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k. \tag{15.3}$$

(15.3) тенглама *моддий нуқтанинг ноинерциал системага нисбатан ҳаракат қонунининг вектор кўринишдаги динамик тенгламаси* ёки *нисбий ҳаракатнинг асосий тенгламаси* дейилади. Шундай қилиб, моддий нуқта нисбий ҳаракатининг асосий тенгламаси ҳам Ньютон тенгламаси каби тузилар экан; бунда нуқтага таъсир қилувчи кучлар қаторида кўчирма ва Кориолис инерция кучларини ҳам биргаликда олиш керак бўлади. Лекин Ньютон тенгламаси билан нисбий ҳаракат тенгламасининг ўхшашлиги формал характерга эга. Қўзғалув-



15.1-расм.

чи системада турган кузатувчи учун кўчирма ва Кориолис инерция кучлари одатдаги кучлар сифатида қабул қилинади. У бу кучларни ҳам улчаши мумкин. Бу кучлар $\vec{F}$ куч билан бир қаторда нуқтанинг нисбий ҳаракатини белгилайди. Лекин бу кузатувчи инерция кучларининг манбаини курсатиб бера олмайди. Бинобарин, кучирма ва Кориолис инерция кучлари учун Ньютоннинг 3-аксиомасини қуллаб булмайди. Равшанки, қўзғалмас система билан боғланган иккинчи бир кузатувчи учун ҳеч қандай кучирма ва Кориолис инерция кучлари мавжуд эмас. Бу кучлар туфайли содир булаётган ва биринчи кузатувчи томонидан кузатилаётган механик процессларни иккинчи кузатувчи механика инерция қонунининг натижаси сифатида тушунтиради. Масалан, вагонни тусатдан юриши натижасида пассажирнинг „қалқиб“ кетишини вагондаги кузатувчи кучирма ёки Кориолис инерция кучи туфайли деб тушунтирса, Ердаги кузатувчи эса пассажирнинг бундай қалқишини материя узининг тинчлик ҳолатини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатини сақлашга интилиши орқали, яъни механиканинг инерция қонуни орқали тушунтиради.

M нуқтанинг қўзғалувчи системага нисбатан координаталарини x, y, z десак, (15.3) тенгламани $Oxyz$ система уқларига проекциялаб, нисбий ҳаракатнинг қуйидаги скаляр дифференциал тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned}\right| \qquad (15.4)$$

Баъзи хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз:

1. *Қузғалувчи система туғри чизиқли текис ҳаракат қилсин* ($\vec{v}_e = \overrightarrow{\text{const}}$ ва $\omega_e = 0$). У ҳолда $\vec{w}_e = 0$ ва $\vec{w}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = 0$ бўлганидан, $\Phi_e = 0$ ва $\Phi_k = 0$ келиб чиқади. Нуқта нисбий ҳаракатининг асосий тенгламаси

$$m\vec{w}_r = \vec{F}$$

кўринишга келади. Бундан қуйидаги муҳим хулоса чиқади: *нуқтанинг ҳаракати қўзғалмас ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат қилувчи системаларда куриниши бир хил булган дифференциал тенгламалар билан ифодаланади.* Бинобарин, бошланғич шартлар бир хил булганда бу тенгламаларнинг ечимлари ҳам бир хил бўлади. Бошқача қилиб айтганда, нуқтанинг муайян ҳаракати қўзғалмас системага нисбатан қандай тенглама билан ифодаланса, унинг тўғри чизиқли текис ҳаракат қилувчи системага нисбатан ҳаракати ҳам ана шундай тенглама билан ифода этилади. Ёки *қузғалмас система билан унга нисбатан туғри чизиқли текис ҳаракат қилувчи* *ҳар қандай система узаро эквивалент* бўлади. Шунинг учун қузғалмас ва бир-бирига нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракат қилувчи барча системалар бир хил исм билан—*инерциал системалар* деб юритилади.

Шундай қилиб моддий нуқтанинг тўғри чизиқли текис ҳаракат қилувчи системага нисбатан маълум бошланғич шартлар билан бўладиган ҳаракатини унинг қўзғалмас системага нисбатан ушбу бошланғич шартлар билан буладиган ҳаракатидан фарқ қилиб бўлмайди. Бу хулосалар *классик механиканинг нисбийлик принципи* ёки *Галилейнинг нисбийлик принципи* моҳиятини ташкил этади: *берк системада туриб системанинг тўғри чизиқли текис ҳаракатини ҳар қандай механик эксперимент билан ҳам аниқлаб бўлмайди.*

2. Нуқта қузғалувчи системага нисбатан тинч ҳолатда бўлсин. Бу ҳолда: $\vec{v}_r = 0$, демак, $\vec{w}_r = 0$ ҳамда $\vec{\Phi}_к = 2m\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = 0$. Натижада (15.3) тенглама

$$\vec{F} + \vec{\Phi}_e = 0 \tag{15.5}$$

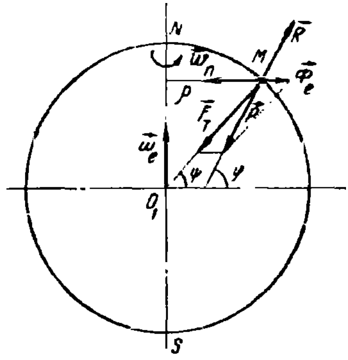
кўринишга келади. (15.5) — *моддий нуқтанинг нисбий мувозанати тенгламаси* дейилади. Ундан кўрамизки, нуқта ноинерциал системага нисбатан тинч ҳолатда туриши учун унга таъсир қилаётган куч билан кўчирма инерция кучининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак. Маълумки, нуқта инерциал системага нисбатан тинч ҳолатда туриши учун унга таъсир қилувчи кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлиши етарли эди.

68-§. Нуқтанинг Ер сиртидаги мувозанатига ва ҳаракатига Ер айланишининг таъсири

Ер билан боғланган координаталар системасини олайлик. Ер Қуёш билан боғланган координаталар системасига нисбатан Қуёш атрофида ва ўз ўқи атрофида айланиши туфайли Ер билан боғланган система ноинерциал бўлади. Бу ноинерциаллик асосан Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши билан белгиланади. Чунончи, Ернинг Қуёш атрофида айланиш даври бир йилга тенг ва амалда кўриладиган механик процесслар бу даврга нисбатан жуда қисқа вақт оралиғида утади. Бу вақт ичида Ер ўзининг Қуёш атрофидаги траекторияси — эллипснинг бирор кичик қисми бўйлаб ўзгармас тезлик билан ҳаракат қилади. Бу қисмини тўғри чизиқ сифатида олиб, Ернинг Қуёш атрофида айланиши туфайли ҳосил бўладиган ноинерциалликни ҳисобга олмаслик мумкин. Ернинг ўз ўқи атрофида айланиш даври тахминан 24 соат бўлиб, унинг бурчак тезлиги 0,0000729 $с^{-1}$ бўлади. Агар Ер билан боғланган система инерциал деб қабул қилинса, бунда асосан Ернинг ўз ўқи атрофида айланишидан вужудга келадиган кўчирма ва Кориолис инерция кучлари ҳисобга олинмаган бўлади. Ер ўз ўқи атрофидаги айланишнинг Ер сиртидаги нуқта мувозанатига ва ушбу сирт буйлаб ҳаракатига таъсирини текширамиз.

Массаси m га тенг бирор M моддий нуқта Ер сиртида тинч турган бўлсин. Сиртни силлиқ деб фараз қиламиз. Нуқта нисбий тинчлик ҳолатининг тенгламаси (15 5) га асосан

$$\vec{F}_T + \vec{R} + \vec{\Phi}_e = 0 \qquad (15.6)$$



15.2- расм.

бўлади. Бунда $\vec{F}_T$ — Ернинг тортиш кучи, у Ер марказига томон йўналган; $\vec{R}$ — Ер сиртининг реакцияси, $\vec{\Phi}_e$ — кўчирма инерция кучи. Ер ўз ўқи атрофида ўзгармас бурчак тезлик билан айлангани учун M нуқтанинг тезланиши фақат нормал тезланишдан иборат ва у айланиш ўқига перпендикуляр йўналади. $\vec{\Phi}_e$ вектор эса бу нормал тезланиш векторига қарама-қарши йўналган (15.2- расм).

$$\vec{F}_T + \vec{\Phi}_e = \vec{P} \qquad (15.7)$$

белгилаш киритамиз. У ҳолда (15.6) $\vec{P} + \vec{R} = 0$ каби ёзилади. $\vec{P}$ векторга *моддий нуқтанинг оғирлик кучи* дейилади. Бу кучнинг йўналиши Ернинг шу куч ўлчанаётган жойидаги вертикалнинг йўналишини белгилайди. Вертикалга тик қилиб ўтказилган текисликка эса горизонтал текислик дейилади. 15.2-расмда ψ орқали геоцентрик кенглик, φ орқали эса географик кенглик белгиланган. Оғирлик кучи бу куч қаерда улчанаётганига боғлиқ. Қутбда у Ернинг тортиш кучига тенг бўлади. Бутун олам тортишиш қонунига асосан:

$$F_T = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Бунда γ — гравитацион доимий, M — Ернинг массаси, r — Ер радиуси. $g_0 = \gamma \frac{M}{r^2}$ деб белгилаймиз. $g_0 = 9{,}82$ м/с^2 *гравитацион тезланиш* дейилади. Шундай қилиб тортиш кучи $\vec{F}_T = m\vec{g}_0$.

Маълумки, Ернинг бирор географик кенгликка мос келувчи жойида оғирлик кучи масса билан ушбу жойдаги эркин тушиш тезланишининг кўпайтмасига тенг: $\vec{P} = m\vec{g}$. Буни назарда тутиб (15.7) ифодани $\vec{P}$ вектор йўналишига проекциялаймиз:

$$mg = F_T \cos\Theta - \Phi_e \cos\varphi$$

ёки

$$mg = F_T \cos\Theta - \Phi_e \cos(\psi + \Theta).$$

Θ бурчак эътиборга олмаса бўладиган даражада кичик бўлгани учун бу тенгликни

$$mg = m(g_0 - \omega_e^2 \rho \cos\psi)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда ρ — географик параллелнинг эгрилик радиуси. Бу ифодадан Ер сиртидаги эркин тушиш тезланишини геоцентрик кенгликнинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин бўлади:

$$g = g_0\left(1 - \frac{\omega_e^2 \rho}{g_0} \cos\psi\right). \qquad (15.8)$$

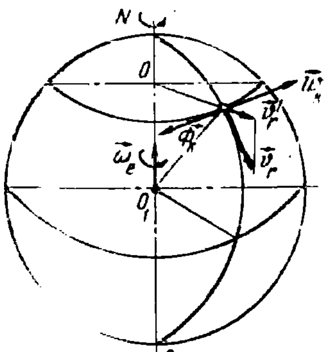
(15.8) дан g ўзининг энг кичик қийматига экваторда ($\psi = 0$) эга бўлишини кўриш мумкин. Бу қиймат $g_{эк} = 9{,}78$ м/с^2 бўлади. Тошкент параллели учун ($\psi = 41°20'$) $g_{Тошк.} = 9{,}801$ м/с^2.

Моддий нуқтанинг Ер сирти бўйлаб қиладиган ҳаракатига Ер айланишининг таъсирини ўрганамиз. Агар моддий нуқта $\vec{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) кучлар таъсирида бўлса, нисбий ҳаракатнинг асосий тенгламаси (15.3) ифода

$$m\vec{w}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_к$$

кўринишда ёзилади. Ернинг бурчак тезлиги кичик бўлгани учун кучирма инерция кучининг қиймати $m\omega_e^2\rho$ ни эътиборга олмаслик мумкин.

Бунинг устига, одатда, бу куч оғирлик кучини киритиш билан ҳисобга олинади. Бундай ҳолда у ҳаракат тенгламаларида ошкор равишда қатнашмайди. Шу тарзда нуқтанинг ҳаракатига Ер айланишининг таъсири асосан Кориолис инерция кучи билан белгиланади, деган хулосага келамиз.



15.3- расм.

Нуқта Шимолий ярим шарда меридиан бўйлаб Шимолдан Жанубга томон ҳаракат қилсин (15.3- расм). Унинг нисбий тезлик вектори меридианга уринма булади. Маълумки, Кориолис тезланиш вектори

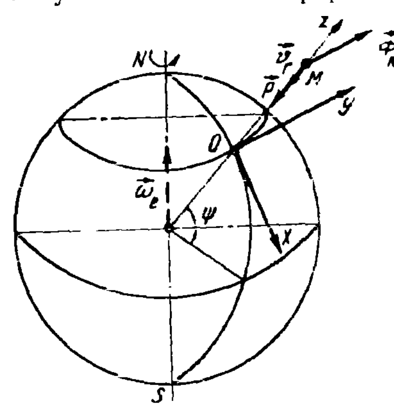
$$\vec{w}_к = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r \qquad (15.9)$$

муносабатдан аниқланади. Бу ерда $\vec{\omega}_e$ — Ернинг бурчак тезлик вектори. $\vec{w}_к$ вектор параллелга уринма равишда моддий нуқта ҳаракати йуналишига нисбатан чапга, Кориолис инерция кучи $\vec{Ф}_к$ эса ўнгга йўналган. (15.9) вектор кўпайтмада кўпайтувчи векторлардан бирининг йўналиши қарама-қаршига ўзгарса, купайтмани ифодаловчи векторнинг йўналиши ҳам қарама-қаршига узгаради. Шунинг учун ҳам нуқта Шимолий ярим шарда меридиан буйлаб Жанубдан Шимолга ҳаракат қилса, Кориолис инерция кучи Ғарбга—нуқта ҳаракати йуналишига нисбатан ўнгга йуналади. Бундан кўрамизки, Кориолис инерция кучи Шимолий ярим шарда меридиан буйича ҳаракатланувчи жисмни унинг тезлиги йўналишига нисбатан ўнг томонга оғдиришга ҳаракат қилади; умуман, нисбий тезлик векторининг Ер айланиш уқига перпендикуляр текисликдаги проекцияси нолдан фарқли бўлганда, жисм Шимолий ярим шарда ҳар қандай йўналишда ҳаракатланганда ҳам Кориолис иерция кучи жисмга шундай таъсир қилишини курсатиш мумкин. Экваторга нисбатан Шимолроқда жойлашган дарёлар ўнг қирғоқларининг чап қирғоқларига нисбатан кўпроқ емирилиши Ернинг ўз ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган Кориолис инерция кучининг таъсиридандир.

Худди юқоридагидек мулоҳазалар юритиб, Жанубий ярим шарда Ер сирти буйлаб ҳаракат қилувчи нуқтага таъсир қилувчи Кориолис инерция кучи нуқта ҳаракати йўналишига нисбатан чап томонга йуналган бўлишини кўрсатиш мумкин.

69 §. Оғирлик кучи таъсирида эркин тушувчи жисмнинг Шарққа оғиши

Ер айланишининг Ер билан боғланган координаталар системасидаги ҳаракатга таъсирини аниқлашда мисол тариқасида унча баланд бўлмаган масофадан оғирлик кучи таъсирида эркин тушувчи жасмнинг Ер айланиши йўналиши бўйича Шарқ томонга оғиб тушишини кўрсатиш мумкин. M жисм Ер радиусидан анча кичик бўлган $OM = H$ масофадан тушсин. Бу ҳолда оғирлик кучини ўзгармас деб олиш мумкин. Ер билан боғланган координаталар системасини 15.4- расмдагидек қилиб оламиз. Бунда координаталар боши бўлган O нуқта жисм билан бир вертикалда ётади; Ox ҳамда Oy ўқлар мос равишда O нуқтадан утувчи меридиан ва параллелга уринма бўйлаб йўналган. Oz уқ аслида Ер марказидан утувчи радиал чизиқ бўйлаб йўна-



15.4- расм

лади. Лекин Oz ўқнинг нуқта турган жойдаги вертикалдан оғиши эътиборсиз даражада кичик бўлгани учун Oz ўқни вертикал бўйлаб йўналган деб фараз қиламиз. Тушаётган жисм нисбий ҳаракатининг асосий тенгламасини ёзамиз·

$$m\vec{w}_r = \vec{P} + \vec{\Phi}_\kappa. \tag{15.10}$$

Бунда кўчирма инерция кучи оғирлик кучи $\vec{P}$ ни киритиш билан ҳисобга олинган. $\vec{P} = m\vec{g}$ ва $\vec{\Phi}_\kappa = -2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$ эканлигини эътиборга олиб, (15.10) ни $Oxyz$ система ўқларига проекциялаймиз:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2m(\omega_{ey}\dot{z} - \omega_{e}z\dot{y}),\\ m\ddot{y} &= -2m(\omega_{ez}\dot{x} - \omega_{e}x\dot{z}),\\ m\ddot{z} &= -mg - 2m(\omega_{ex}\dot{y} - \omega_{ey}\dot{x}), \end{aligned}\right\} \tag{15.11}$$

Расмдан $\omega_{ex} = \omega_e \cos\psi$, $\omega_{ey} = 0$, $\omega_{ez} = \omega_e \cdot \sin\psi$. Бунда ψ — жойнинг геоцентрик кенглиги. Юқорида қабул қилинган шартларга асосан уни жойнинг географик кенглигига тенг деб ҳисоблаймиз. Шундай қилиб (15.11) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega_e\dot{y}\sin\psi,\\ \ddot{y} &= -2\omega_e(\dot{x}\sin\psi + \dot{z}\cos\psi),\\ \ddot{z} &= -g + 2\omega_e\dot{y}\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{15.12}$$

Жисм ҳаракати давомида унинг $\vec{v}_r$ нисбий тезлик вектори горизонтга перпендикулярлигича қолади деб фараз қилиб, (15.12) тенгламаларни бирмунча соддалаштирамиз. У ҳолда $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = -v_r = -gt$ (аниғини олганда, жисм эркин тушиши давомида бир оз Жанубга, кўпроқ Шарққа оғади ва $x \neq 0$, $y \neq 0$) ва (15.12) қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 2\omega_e gt\cos\psi, \quad \ddot{z} = -g. \tag{15.13}$$

(15.13) ни интеграллаб,

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1t + C_4,\\ y &= \frac{1}{3}\omega_e gt^3\cos\psi + C_2t + C_5,\\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + C_6 \end{aligned}\right\} \tag{15.14}$$

тенгламалар ҳосил қилинади. (15.14) тенгламалардаги $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_6$ интеграл доимийлари

$$t = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = H,\ \dot{x}_0 = 0,\ \dot{y}_0 = 0,\ \dot{z}_0 = 0$$

бошланғич шартларни қўллаб аниқланади: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$ ва $C_6 = H$. Шундай қилиб, жисм ҳаракатининг тенгламалари

$$x = 0,\ y = \frac{1}{3}\omega_e g t^3 \cos\psi,\ z = H - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (15.15)$$

кўринишни олади. (15.15) дан кўринадики, жисмнинг ҳаракати текисликда бўлади. Хусусан (15.15) тенгламаларнинг иккинчисидан эркин тушаётган жисм ҳар вақт Шарққа оғишини кўрамиз. Бу оғиш фақат $\psi = \pi/2$ ҳолида, яъни жисм Қутбда эркин тушгандагина бўлмайди. Экваторда эса $(\psi = 0)$ жисмнинг вертикалдан оғиши максимал булади.

Ҳар бир геоцентрик кенгликда маълум баландликдан эркин тушувчи жисмнинг Ерга тушгандаги оғиш масофасини ҳисоблаб топиш мумкин. Бунинг учун (15.15) тенгламаларнинг учинчисида $z = 0$ деб, тушиш вақти t_1 топилади:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

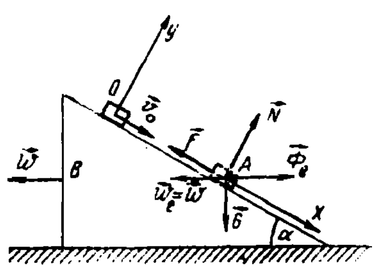
Топилган t_1 ни (15.15) тенгламаларнинг иккинчисига қўйиб оғиш масофаси l аниқланади:

$$l = y_{t=t_1} = \frac{1}{3}\omega_e g t_1^3 \cdot \cos\psi = \frac{2}{3} H\omega_e \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos\psi.$$

Масалан, Тошкентда $(\psi = 41°20')$ $H = 100$ м баландликдан эркин тушувчи жисм Шарққа томон $l = 16$ мм га оғади.

Агар жисм вертикал йўналишда юқорига отилса, нисбий тезлик векторининг йуналиши горизонтал текисликка тик равишда юқорига йўналган бўлади, қолган барча шартлар эса уз ўрнида қолади. Кориолис инерция кучининг йўналиши қарама-қаршига узгариши туфайли жисм бу ҳолда Шарққа эмас, Ғарбга оғади.

46-масала. Массаси $m = 2$ кг бўлган A жисм B призманинг горизонт билан $\alpha = 30°$ бурчак ташкил этувчи ён ёғи бўйлаб призмага нисбатан $v_0 = 2$ м/с тезлик билан пастга сирпана бошлайди. Шу пайтда призма силлиқ горизонтал текислик бўйлаб чап томонга узгармас $w = 3$ м/с^2 тезланиш билан ҳаракатланади (15.5- расм). A жисм билан призма ён ёғи орасидаги ишқаланиш коэффициенти $f=0{,}1$ деб олиб, жисмнинг призмага нисбатан ҳаракати ва призма ён ёғига курсатадиган босими аниқлансин.



15.5- расм.

Ечиш. Қўзғалувчи координата бошини моддий нуқта деб қаралувчи жисмнинг бошланғич ҳолатидан олиб, Ox ўқни призманинг ён ёғи бўйлаб пастга томон йўналтирамиз. A

жисмнинг призмага нисбатан ҳаракати нисбий ҳаракатдан, призма билан бирликда $\vec{w}$ тезланиш билан илгарилама ҳаракати эса кўчирма ҳаракатдан иборат. A жисмга унинг оғирлик кучи $\vec{G}=m\vec{g}$, ишқаланиш кучи $\vec{F}$, призма ён ёғининг нормал реакция кучи $\vec{N}$ таъсир этади. A нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузиш учун бу кучлар қаторига кўчирма ҳаракат инерция кучи $\vec{\Phi}=-m\vec{w}$ билан Кориолис инерция кучи $\vec{\Phi}_k$ ни қўшиб олиш керак. Кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракат бўлгани учун Кориолис тезланиши нолга тенг, бинобарин, Кориолис инерция кучи ҳам нолга тенг.

Жисм ва призма бир текисликда ҳаракатлангани учун (15.4) кўринишидаги нисбий ҳаракат дифференциал тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$m\ddot{x}=G\sin\alpha-F+mw\cos\alpha, \tag{1}$$

$$m\ddot{y}=-G\cos\alpha+N+mw\sin\alpha. \tag{2}$$

Нисбий ҳаракат Ox ўқ бўйлаб содир бўлгани учун $\ddot{y}=0$, шунга кўра (2) дан

$$N=m(g\cos\alpha-w\sin\alpha) \tag{3}$$

ҳосил бўлади. Ишқаланиш кучи нормал реакция кучига пропорционал бўлгани учун, у қуйидагича аниқланади:

$$F=f\cdot N=fm(g\cos\alpha-w\sin\alpha).$$

Буни (1) га қўйиб,

$$\ddot{x}=g(\sin\alpha-f\cos\alpha)+w(\cos\alpha+f\sin\alpha) \tag{4}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Масала шартида берилганларни инобатга олсак, (3) ва (4) дан қуйидагилар келиб чиқади:

$$N=13{,}98\ \text{Н},\qquad \ddot{x}=6{,}80\ \text{м/с}^2. \tag{5}$$

Жисмнинг призма ён ёғига кўрсатган босими миқдор жиҳатдан $\vec{N}$ нормал реакция кучига тенг, йўналиши эса унга қарама-қарши бўлади.

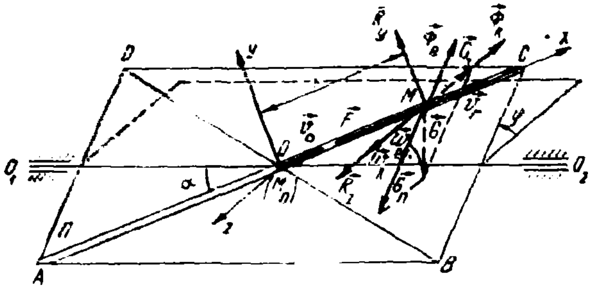
(5) нинг иккинчи тенгламасини

$$t=0 \text{ да } x=0,\ v=v_0 \tag{6}$$

бошланғич шартларга кура икки марта интеграллаймиз:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=6{,}80t+C_1,\\ x&=3{,}4t^2+C_1t+C_2. \end{aligned}\right| \tag{7}$$

(6) ни (7) га қўйсак, $C_1=v_0$, $C_2=0$ келиб чиқади. Шундай қилиб A жисмнинг призмага нисбатан нисбий ҳаракати



15.6- расм.

$$x = 3{,}4t^2 + 2t = 2t(1{,}7t + 1) \text{ м}$$

тенглама билан ифодаланади.

47-масала. $ABCD$ тўғри тўртбурчак шаклидаги жисм ён томонларининг ўрталаридан ўтувчи O_1O_2 горизонтал ўқ атрофида соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда $\varphi = \frac{\pi}{2}t$ (φ—радианда, t—секундда ўлчанади) қонунга кўра ҳаракатланади (15.6-расм). AC диагонал бўйлаб ўрнатилган ингичка силлиқ найча ичидаги $m = 1$ кг массали M шарчага уни қўзғалмас O нуқтага тортувчи ҳамда шарча билан O нуқта орасидаги масофага тўғри пропорционал $F = cx$ куч таъсир қилади, бунда $c = \frac{5}{8}\pi^2$ Н/м. Ҳаракат бошланиши олдида $ABCD$ жисм горизонтал ҳолда, M шарча эса O нуқтада бўлиб, унга OC бўйича йўналган $v_0 = 1$ м/с нисбий тезлик берилади. AC найча айланиш ўқи билан 30° бурчак ташкил этади. Шарчани моддий нуқта деб қараб, унинг найча бўйлаб нисбий ҳаракати ҳамда $t = 1$ с пайтда шарчанинг найча деворига кўрсатадиган босим кучи аниқлансин.

Ечиш. Жисм билан бирга қузғалувчи $Oxyz$ координата системасининг Ox уқини найча бўйича, Oy ўқини унга перпендикуляр қилиб $ABCD$ текислигида Oz ўқни эса $ABCD$ текисликка перпендикуляр равишда ўтказамиз.

M нуқтанинг Ox уқ бўйлаб ҳаракати нисбий ҳаракат бўлади.

M шарчага унинг оғирлик кучи $\vec{G} = m\vec{g}$ билан $F_x = -cx$ куч таъсир этади. Найча девори орқали шарчага қуйилган боғланиш реакция кучини y ва z ўқлар бўйича ташкил этувчилари $\vec{R}_y$, $\vec{R}_z$ орқали ифодалаймиз ($R_x = 0$).

Шарчанинг найча деворига кўрсатадиган босим кучининг ташкил этувчилари миқдор жиҳатдан R_y, R_z га тенг, йўналиши эса бу кучларга қарама-қарши бўлади.

Шарчага таъсир этувчи кучлар қаторига $\vec{\Phi}_e = -m\vec{w}_e$ кўчирма инерция кучи билан $\vec{\Phi}_к = -m\vec{w}_к$. Кориолис инерция кучини қўшиб оламиз. Бунда

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{2}c^{-1}. \quad \varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 0$$

бўлганидан, $w_e = w_e^n = \omega^2 x \sin 30°$, шунингдек, $w_к = 2\omega_e v_r \sin 30° = \frac{\pi}{2}\dot{x}$ келиб чиқади.

$\vec{w}_e = \vec{w}_e^n$ вектори M нуқтадан айланиш ўқи томон, $\vec{w}_k$ эса Oz ўққа параллел йуналади. У ҳолда:

$$\Phi_e = \Phi_e^n = m\frac{\pi^2}{8}x\ \text{H}, \quad \Phi_к = m\frac{\pi}{2}\dot{x}\ \text{H}.$$

(15.4) кўринишдаги дифференциал тенгламаларни тузамиз:

$$m\ddot{x} = -F + \Phi_e \cos 60° - G\sin\varphi \cdot \cos 60°,$$
$$m\ddot{y} = R_y - G\sin\varphi \sin 60° + \Phi_e \cos 30°,$$
$$m\ddot{z} = R_z - G\cos\varphi - \Phi_к.$$

Бу тенгламаларда қатнашувчи кучларнинг миқдорларини ҳамда $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = 0$ бўлишини эътиборга олсак, қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади:

$$m\ddot{x} = -cx + \frac{m\pi^2}{16}x - \frac{mg}{2}\sin\frac{\pi}{2}t, \tag{1}$$

$$0 = R_y - \frac{mg\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{16}m\pi^2 x, \tag{2}$$

$$0 = R_z - mg\cos\frac{\pi}{2}t - m\frac{\pi}{2}\dot{x}. \tag{3}$$

(1) дифференциал тенгламани ечиб, шарчанинг нисбий ҳаракатини, (2) ва (3) дан R_y, R_z ни топиш мумкин. (1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m} - \frac{\pi^2}{16}\right)x = -\frac{g}{2}\sin\frac{\pi}{2}t. \tag{4}$$

(4) тенгламада x олдидаги коэффициентни ҳисоблаймиз:

$$\frac{c}{m} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{5}{8}\pi^2 - \frac{\pi^2}{16} = \frac{9\pi^2}{16} > 0.$$

Бинобарин, $k^2 = \frac{c}{m} - \frac{\pi^2}{16}$ $\left(k = \frac{3\pi}{4}\right)$ ҳамда $h = -\frac{g}{2}$, $p = \frac{\pi}{2}$ белгилашлар киритсак, (4) тенглама

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt \tag{5}$$

кўринишга келади. (5) тенглама қаршилик кўрсатмайдиган муҳитда моддий нуқта мажбурий тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (14.24) дир. (14.24) да $\beta = 0$ деб олинса, (5) ҳосил бўлади.

Шунинг учун (14.30) га кўра (5) дифференциал тенгламанинг ечими қуйидагича булади:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \frac{p}{k} \cos kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{6}$$

Бошланғич пайтда $x_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с бўлишини эътиборга олиб, (6) тенгламада ҳисоблаш ишларини бажарсак,

$$x = \left(0{,}424 \sin \frac{3\pi}{4} t + 2{,}11 \cos \frac{3\pi}{4} t - 3{,}17 \sin \frac{\pi}{2} t \right) \text{м} \tag{7}$$

ҳосил булади. Шундай қилиб, шарчанинг найча бўйича нисбий ҳаракати (7) тенглама билан ифодаланади.

Энди R_y, R_z ни аниқлашга ўтамиз. (2) дан:

$$R_y = \frac{\sqrt{3}}{2} mg \sin \frac{\pi}{2} t - \frac{m\pi^2}{16} \sqrt{3} x. \tag{8}$$

$t = 1$ с учун (7) дан $x = -1{,}66$ м эканлигини аниқлаймиз. (8) да $t = 1$ с, $x = -1{,}66$ м, $m = 1$ кг, $g = 9{,}8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ деб олсак, $R_y = 10{,}25$ Н келиб чиқади. (3) дан:

$$R_z = m \left(g \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2} \dot{x} \right). \tag{9}$$

(7) дан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\dot{x} = 0{,}424 \cdot \frac{3\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} t - 2{,}11 \cdot \frac{3\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4} t - 3{,}17 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t,$$

бундан $t = 1$ с бўлганда $\dot{x} = -4{,}22 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Бу пайт учун (9) дан $R_z = -6{,}63$ Н ҳосил бўлади.

Б. Механик система ва қаттиқ жисм динамикаси

XVI боб. МАССАЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

70-§. Массалар маркази

Механик система массалари мос равишда $m_1, m_2, \ldots, m_n$ бўлган $M_1, M_2, \ldots, M_n$ моддий нуқталардан ташкил топган бўлсин. *Механик системани ташкил этувчи моддий нуқталар массаларининг йиғиндиси система массаси дейилади.* Механик система массасини M билин белгиласак, таърифга биноан:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{16.1}$$

Системани ташкил этувчи нуқталарнинг бирор O нуқтага нисбатан радиус-векторлари $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ бўлсин.

Радиус-вектори

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} \qquad (16.2)$$

муносабат билан аниқланувчи C геометрик нуқта механик системанинг массалар маркази (инерция маркази) дейилади.

Шуни таъкидлаш керакки, системанинг инерция маркази моддий нуқта эмас, балки геометрик нуқтадир. Яъни, масса маркази системанинг бирор моддий нуқтаси билан устма-уст тушиши шарт эмас (масалан, ҳалқанинг инерция маркази ҳалқага тегишли бўлмаган нуқтададир).

Механик системани ташкил этувчи M_i моддий нуқталарнинг Декарт системасига нисбатан координаталарини x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ билан белгилаб, (16.2) ни шу ўқларга проекцияласак, инерция марказининг координаталарини аниқловчи формулалар ҳосил бўлади:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}. \qquad (16.3)$$

Системанинг массалар маркази шу системадаги массалар тақсимотини характерлайди.

$\vec{S}_O = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$ ифода билан аниқланувчи $\vec{S}_O$ вектор *система массасининг O марказга нисбатан статик моменти* дейилади. Шунингдек, *система массасининг координата текисликларига нисбатан статик моментлари*

$$S_{Oxy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \quad S_{Oyz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad S_{Oxz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

формулалар билан ифодаланади.

71-§. Механик система ва қаттиқ жисмнинг инерция моментлари

Бирор нуқта ёки ўқ атрофида айланма ҳаракат қилувчи жисм ва системанинг масса тақсимотини характерлаш учун уларнинг *марказ (қутб) га* ёки *ўққа нисбатан инерция моментлари* тушунчаларидан фойдаланилади.

Механик системанинг O қутбга, u ўққа, π текисликка нисбатан инерция моментлари деб, мос равишда, қуйидаги ифодалардан аниқланувчи I_O, I_u, I_π катталикларга айтилади:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \qquad (16.4)$$

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2, \qquad (16.5)$$

$$I_\pi = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2. \qquad (16.6)$$

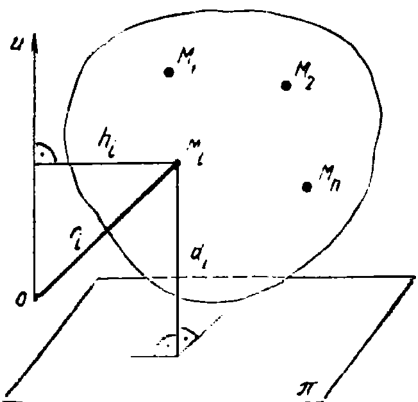
Бу муносабатларда r_i, h_i, d_i билан системани ташкил этувчи ҳар бир M_i нуқтадан, мос равишда, O қутбгача, u ўққача ва π текисликкача бўлган масофалар белгиланган (16.1-расм). $Oxyz$ саноқ системасини киритамиз. Қуйидаги муносабатларни тузамиз:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i, \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i. \qquad (16.7)$$

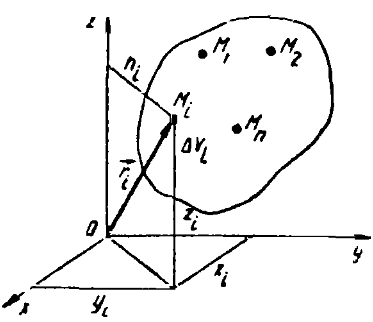
Бунда x_i, y_i, z_i билан M_i нуқтанинг координаталари белгиланган. I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} катталикларга *механик системанинг марказдан қочувчи инерция моментлари* дейилади. Бу катталиклар мусбат, манфий ва ноль қийматларни қабул қилиши мумкин.

Қаттиқ жисмнинг инерция моментини ҳисоблашда уни массаларни Δm_1, Δm_2, ..., Δm_n бўлган M_1, M_2, ..., M_n бўлакчалардан ташкил топган (16.2-расм) ва ҳар бир M_i бўлакчадан O координаталар бошигача бўлган масофалар r_i га тенг, координаталари эса (x_i, y_i z_i) деб олсак, (16.4—16.6) формулаларга асосан, жисмнинг O марказга нисбатан инерция моменти

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \qquad (16.8)$$



16.1-расм.



16.2-расм.

ифодадан, координата уқларига нисбатан инерция моментлари

$$I_{Ox}=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i(y_i^2+z_i^2),\quad I_{Oy}=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i(x_i^2+z_i^2),$$

$$I_{Oz}=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i(x_i^2+y_i^2) \qquad (16.9)$$

муносабатлардан, координата текисликларига нисбатан инерция моментлари эса

$$I_{xOy}=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i z_i^2,\quad I_{xOz}=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i y_i^2,\quad I_{yOz}=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i x_i^2 \qquad (16.10)$$

тенгликлардан аниқланади.

Қаттиқ жисмни зичлиги $\rho=\text{const}$ бўлган бир жинсли деб қараб, M_i бўлакча ҳажмини Δv_i десак, $\Delta m=\rho\Delta v_i$ бўлади. Буни (16.8)—(16.10) формулаларга қўйиб, Δv_i ҳажмни нолга интилтириб лимит ҳисобласак, жисм инерция моментлари учун қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$I_O=\int_{(M)} r^2dm=\int_{(V)}\rho r^2dV; \qquad (16.11)$$

$$I_{Ox}=\int_{(M)}(y^2+z^2)dm=\int_{(V)}(y\rho^2+z^2)dV,$$

$$I_{Oy}=\int_{(M)}(x^2+y^2)dm=\int_{(V)}(x\rho^1+z^2)dV,$$

$$I_{Oz}=\int_{(M)}(x^2+y^2)dm=\int_{(V)}(x\rho^2+y^2)dV; \qquad (16.12)$$

$$I_{xOy}=\int_{(M)}z^2dm=\int_{(V)}\rho z^2dV,\quad I_{xOz}=\int_{(M)}y^2dm=\int_{(V)}\rho y^2dV,$$

$$I_{yOz}=\int_{(M)}x^2dm=\int_{(V)}\rho x^2dV. \qquad (16.13)$$

(16.7)—(16.9) формулалардан фойдаланиб $I_{Ox}+I_{Oy}+I_{Oz}=2I_O$ ва $I_{xOy}+I_{xOz}+I_{yOz}=I_O$ муносабатлар ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин. Шунингдек, қаттиқ жисмнинг марказдан қочувчи инерция моментлари қуйидаги формулалар билан аниқланади:

$$I_{xy}=\int_{(V)}\rho xydV,\quad I_{xz}=\int_{(V)}\rho xzdV,\quad I_{yz}=\int_{(V)}yzdV.$$

Турли материалдан бир хил кўринишда ясалган бир жинсли жисмларнинг инерция моментлари бир-биридан фарқ қилади. Материал массасига боғлиқ бўлмаган характеристика сифатида жисмнинг инерция радиуси ρ_u ни олиш мумкин. Жисмнинг Ou ўққа нисбатан инерция радиуси қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\rho_u=\sqrt{I_u/M}.$$

Агар жисмнинг бирор ўққа нисбатан инерция радиуси берилган булса, унинг шу ўққа нисбатан инерция моментини қуйидаги ифодадан топиш мумкин:

$$I_u = M\rho_u^2. \qquad (16.14)$$

Халқаро бирликлар системаси (СИ) да инерция моментининг ўлчов бирлиги кг·м^2 дан иборат.

72-§. Штейнер теоремаси

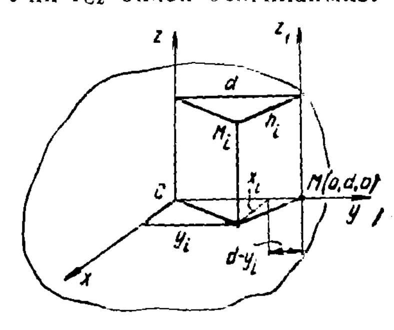
Теорема. *Қаттиқ жисмнинг бирор уққа нисбатан инерция моменти жисмнинг массалар марказидан берилган уққа параллел равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментига жисм массасининг ушбу уқлар орасидаги масофа квадратига купайтмасининг қушилганига тенг.*

Исбот. C нуқта берилган қаттиқ жисмнинг массалар маркази булсин. Берилган ўқни z_1 оркали белгилаймиз. C нуқтани координаталар боши сифатида қабул қиламиз. Cz координаталар уқини z_1 ўққа параллел қилиб, Cy координаталар ўқини эса z_1 ўқни бирор M нуқтада кесадиган қилиб утказамиз (16.3-расм). Берилган жисм ихтиёрий M_i (бунда $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$) бўлакчасининг Cx ва Cy ўқлар бўйича координаталарини x_i ва y_i орқали, унинг z_1 ўқдан узоқлигини эса h_i орқали белгилайлик. Cz ва Mz_1 ўқлар орасидаги масофа d бўлсин. Берилган жисмнинг Mz_1 ўққа нисбатан инерция моменти (16.9) га биноан:

$$I_{z_1} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i [x_i^2 + (-y_i + d)^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2d \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i y_i + d^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i. \qquad (16.15)$$

(16.15) да $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2)$ йиғинди жисмнинг Cz ўққа нисбатан инерция моментидан иборат. Уни I_{Cz} билан белгилаймиз. $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = M$ — жисмнинг массаси; (16.3) формулага асосан $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i y_i = My_C$; бироқ, $y_C = 0$ булгани учун $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i y_i = 0$. Шундай қилиб исботланиши керак булган



16.3-расм.

$$I_{z_1} = I_{C_z} + Md^2 \qquad (16.16)$$

ифода келиб чиқади.

73-§. Бир жинсли баъзи жисмларнинг ўққа нисбатан инерция моментларини ҳисоблаш

1. Стерженнинг инерция моменти. Кўндаланг кесимининг ўлчамлари жуда кичик бўлган ингичка бир жинсли стерженнинг унга перпендикуляр бўлган Oz ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаймиз (16.4-расм). Массаси M, узунлиги l бўлган стерженнинг Oz ўқдан x масофада жойлашган dx булагининг массасини dm, зичлигини ρ билан белгилайлик. У ҳолда: $dm = \rho dx$. Натижада (16.12) га кура:

$$I_{Oz} = \int_0^l \rho x^2 dx = \frac{\rho l^3}{3}$$

ҳосил бўлади. Стержень массаси $M = \rho l$ бўлишини эътиборга олсак,

$$I_{Oz} = \frac{Ml^2}{3} \qquad (16.17)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Стерженнинг масса марказидан унга перпендикуляр равишда ўтувчи C_{z_1} ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаш учун Штейнер теоремасидан фойдаланамиз.

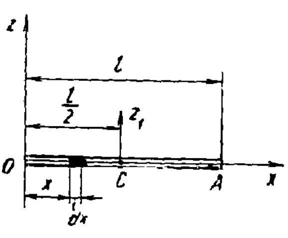
(16.16) ва (16.17) ни эътиборга олсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$I_{C_{z_1}} = I_{Oz} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12}.$$

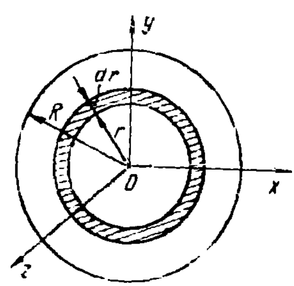
Шундай қилиб,

$$I_{C_{z_1}} = \frac{Ml^2}{12}.$$

2. Доиравий дискнинг инерция моменти. Массаси M, радиуси R булган бир жинсли юпқа дискнинг O марказга нисбатан инерция моменти I_O ни ҳисоблаймиз (16.5-расм). Дискни



16.4-расм.



16.5-расм.

кенглиги dr бўлган бир неча концентрик ҳалқаларга ажратамиз. Бу ҳалқанинг юзи $2\pi r dr$, массаси эса $dm = \rho \cdot 2\pi r dr$ билан ифодаланади. У ҳолда, (16.11) формулага кўра

$$I_O = \int_{(M)} r^2 dm = \rho \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

ҳосил булади. Шундай қилиб,

$$I_O = \frac{MR^2}{2}.$$

Агар Oz ўқни диск текислигига перпендикуляр равишда, Ox ва Oy ўқларни эса диск текислиги орқали утказсак, $I_z = I_O = \frac{MR^2}{2}$ бўлиши равшан.

Диск симметрияга эга булганидан $I_x = I_y$; I_x ни ҳисоблашда $2I_O = I_x + I_y + I_z$ формуладан фойдаланамиз:

$$2I_x = 2I_O - I_z = I_O \quad \text{ёки} \quad I_x = \frac{I_O}{2} = \frac{MR^2}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}.$$

Шунга ухшаш, радиуси R га тенг булган ингичка доиравий ҳалқанинг O марказга нисбатан инерция моменти учун

$$I_O = MR^2,$$

юпқа тўғри туртбурчак шаклидаги пластинканинг (16.6-расм) расмда кўрсатилган координата ўқларига нисбатан инерция моментлари учун

$$I_x = \frac{Mb^2}{12}, \quad I_y = \frac{Ma^2}{3}, \quad I_z = M \cdot \frac{b^2 + 4a^2}{12},$$

R радиусли бир жинсли доиравий цилиндрнинг симметрия ўқига нисбатан инерция моменти учун

$$I_z = \frac{MR^2}{2},$$

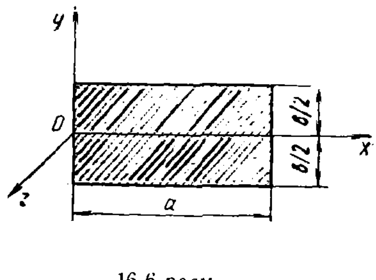
бир жинсли шарнинг O марказига нисбатан инерция моменти учун

$$I_O = 0{,}6MR^2,$$

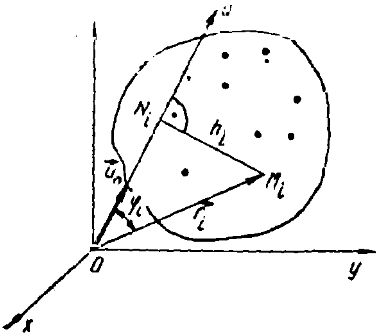
O марказдан ўтувчи координата ўқларига нисбатан эса

$$I_x = I_y = I_z = 0{,}4MR^2$$

формулаларни ҳосил қилиш мумкин.



16.6-расм.



16.7-расм.

74-§. Жисмнинг берилган нуқтадан ўтувчи ихтиёрий ўққа нисбатан инерция моменти

Қаттиқ жисмни массалари $\Delta m_1, \Delta m_2, \ldots, \Delta m_n$ бўлган $M_1, M_2, \ldots, M_n$ бўлакчалар—моддий нуқталардан ташкил топган деб қараб, унинг берилган O координата бошидан ўтувчи Ou ўққа нисбатан инерция моментини аниқлашни кўриб чиқамиз. Ou ўқнинг йўналтирувчи косинусларини α, β, γ билан белгилаймиз (16.7-расм). У ҳолда (16.5) га кўра

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot h_i^2.$$

Бунда h_i билан M_i нуқтанинг u ўқдан узоқлиги белгиланган M_i нуқтанинг координаталари x_i, y_i, z_i, унинг O координаталар бошига нисбатан радиус-вектори $\vec{r}_i$ ва u ўқнинг бирлик йўналтирувчи вектори $\vec{u}_0$ бўлсин. Расмдан $h_i^2 = (OM_i)^2 - (ON_i)^2$. Агар $\vec{r}_i$ билан $\vec{u}_0$ орасидаги бурчакни φ_i билан белгиласак, $ON_i = r_i \cos\varphi_i = \vec{r}_i \vec{u}_0$; демак, $h_i^2 = r_i^2 - (\vec{r}_i \vec{u}_0)^2$ деб ёзиш мумкин. У ҳолда

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i [r_i^2 - (\vec{r}_i \vec{u}_0)^2]$$

келиб чиқади. Бунда $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ ва $\vec{r}_i \vec{u}_0 = x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma$ эканлигини эътиборга олсак,

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i [x_i^2(1-\alpha^2) + y_i^2(1-\beta^2) + z_i^2(1-\gamma^2) - \\ - 2\alpha\beta x_i y_i - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\beta\gamma y_i z_i]$$

ҳосил бўлади. Маълумки, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Шунинг учун

$$I_u = \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2) + \gamma^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\ -2\alpha\beta \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i y_i - 2\alpha\gamma \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i z_i - 2\beta\gamma \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i y_i z_i \qquad (16.18)$$

муносабат келиб чиқади. (16.7) ва (16.9) формулаларни эътиборга олсак, (16.18) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$I_u = I_x\alpha^2 + I_y\beta^2 + I_z\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{xz}\alpha\gamma - 2I_{yz}\beta\gamma \qquad (16.19)$$

(16.19) ифодада I_x, I_y, I_z жисмнинг координата уқларига нисбатан инерция моментлари, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} эса жисмнинг марказдан қочувчи инерция моментларидир.

75-§. Инерция эллипсоиди

Бирор қаттиқ жисм ва маркази ихтиёрий O нуқтада бўлган u_1, u_2, ... ,u_n уқлар дастаси берилган. Жисмнинг даста уқларига нисбатан инерция моментлари мос равишда I_{u_1}, I_{u_2}, ... ,I_{u_n} бўлсин. Инерция моментларидан иборат ушбу сонлар тўпламининг геометрик образини излаймиз. Даста марказини координаталар системасининг боши деб қабул қиламиз. Дастанинг ихтиёрий ўқини олиб уни u орқали белгилаймиз. Жисмнинг ушбу уққа нисбатан инерция моменти I_u бўлсин. u уқда координаталар бошидан бошлаб $OM = \frac{1}{\sqrt{I_u}}$ кесма ажратамиз (16.8-расм). Агар дастанинг барча ўқлари устида хам мос инерция моментларидан тузилган шундай кесмалар ажратилса, кесмаларнинг учлари қандайдир сиртни ташкил қилади. Ушбу сиртни аниқлайлик. M нуқтанинг координаталарини x, y, z орқали белгилаймиз. u ўқнинг йўналтирувчи косинуслари α, β, γ бўлсин. У ҳолда

$$\alpha = \frac{x}{OM} = x\sqrt{I_u}, \quad = \frac{y}{OM} = y\sqrt{I_u}, \quad \gamma = \frac{z}{OM} = z\sqrt{I_u}$$

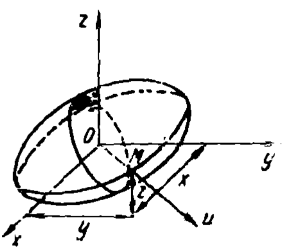
бўлади. Бу ифодаларни (16.19) формулага қуямиз:

$$I_u = I_x I_u x^2 + I_y I_u y^2 + I_z I_u z^2 - 2I_{xy} I_u xy - 2I_{xz} I_u xz - 2I_{yz} I_u yz.$$

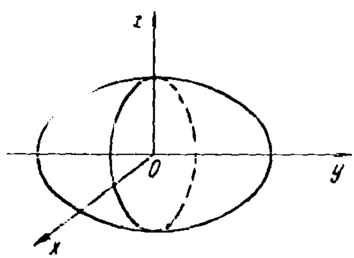
Бу тенгликни I_u га қисқартириб,

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz = 1 \qquad (16.20)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (16.20) тенглама иккинчи тартибли сиртнинг, хусусан *эллипсоиднинг* тенгламасидир. (16.20) билан



16.8-расм.



16.9-расм.

ифодаланувчи эллипсоиднинг маркази координаталар бошида бўлади. Бу эллипсоидга *инерция эллипсоиди* дейилади.

Агар координата ўқлари эллипсоиднинг бош ўқларидан иборат бўлса, инерция эллипсоидининг тенгламаси

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$$

кўринишда бўлади (16.9 расм). Бу ҳолда инерция эллипсоидининг бош ўқлари *жисмнинг инерция бош ўқлари* дейилади. Жисмнинг инерция бош ўқларига нисбатан I_x, I_y, I_z инерция моментлари *инерция бош моментлари* дейилади. Курамизки, жисмнинг инерция бош ўқларига нисбатан марказдан қочувчи инерция моментлари нолга тенг экан. Агар жисмнинг инерция бош ўқлари жисмнинг массалар марказидан ўтса, у ўққа *инерция марказий бош ўқи* дейилади.

Инерция бош ўқларининг қуйидаги хоссалари мавжуд:

1. *Инерция марказий бош ўқи ушбу ўқнинг ихтиёрий нуқтасига нисбатан бош инерция ўқи бўлади.*

2. *Жисмнинг симметрия ўқи унинг инерция марказий бош ўқи бўлади.*

3. *Жисмнинг симметрия текислигига тик бўлган ҳар қандай ўқ ушбу текислик билан кесишиш нуқтасига нисбатан инерция бош ўқидан иборат.*

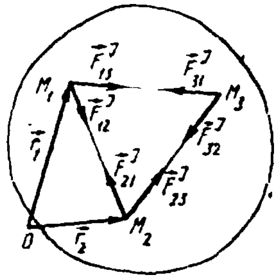
XVII боб. МЕХАНИК СИСТЕМА ҲАРАКАТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ. ДИНАМИКАНИНГ УМУМИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

76-§. Ички кучларнинг хоссалари

Статика қисмида системага таъсир этувчи кучларни ташқи ва ички кучларга ажратиш тўғрисида қисқача тўхталган эдик. Маълумки, механик системага таъсир этувчи кучлар шу система таркибига кирмайдиган жисмлар орқали қўйилган бўлса, ундай кучлар *ташқи кучлар*, система нуқталарининг ўзаро таъсир кучлари эса *ички кучлар* дейилади. Ташқи кучларни юқори индексда „E“ ҳарфни, ички кучларни эса юқори индексда „I“ ҳарфни (французча *extérieur*—ташқи ва *interieur*—ички сўзларнинг бошланғич ҳарфлари) қўйиш билан белгилаймиз: $\vec{F}^E$—ташқи куч, $\vec{F}^I$—ички куч.

Масалан, Қуёш системасига кирувчи планеталарнинг ўзаро тортишиш кучлари шу система учун ички кучларга мисол бўла олади. Агар Қуёш системасидаги бирор планетанинг ҳаракати ўрганилаётган бўлса, юлдузларнинг тортиши туфайли шу планетага қўйилган кучлар ташқи кучлар бўлади. Кучларни ташқи ва ички кучларга ажратиш нисбий характерга эга, яъни бирор система учун ички куч деб ҳисобланган куч бошқа система учун ташқи куч бўлиши мумкин. Масалан, Қуёш системасининг ҳаракати текширилаётганда Ернинг Қуёшга тортилиш кучи ички куч булса, Ернинг ўз орбитаси бўйлаб Қуёшга нисбатан ҳаракати курилганда бу тортилиш кучи ташқи кучдан иборат.

Курсимизнинг давомида M_1, M_2, ..., M_n моддий нуқталардан ташкил топган механик системанинг ҳар бир M_i нуқтасига қўйилган ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F}_i^E$, шу нуқтадаги ички кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F}_i^I$ билан белгилаймиз.



17.1-расм.

Ички кучлар қуйидаги хоссаларга эга.

1. *Механик система ички кучларининг бош вектори нолга тенг*, яъни

$$\vec{R}^I = \sum \vec{F}_i^I = 0. \qquad (17.1)$$

Ҳақиқатан, системанинг ҳар қандай икки нуқтаси таъсир ва акс таъсир қонунига кўра бир-бирига миқдор жиҳатдан тенг, бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган куч билан таъсир этади. Масалан, M_1 ва M_2 моддий нуқталарнинг (17.1-расм) узаро таъсир кучларини $\vec{F}_{12}^I$ ва $\vec{F}_{21}^I$ десак, $\vec{F}_{12}^I = -\vec{F}_{21}^I$ ва $\vec{F}_{12}^I + \vec{F}_{21}^I = 0$. Натижада $\sum \vec{F}_i^I$ йиғинди таркибига кирувчи барча ички кучлар жуфт-жуфт булиб қўшилиб, бу йиғинди нолга айланади.

2. *Ички кучларнинг бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг*, яъни

$$\vec{M}_O^I = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_i^I) = 0. \qquad (17.2)$$

Ички кучларнинг бу хоссасини исботлаш учун яна M_1 ва M_2 нуқталарнинг ўзаро таъсир кучлари бўлмиш $\vec{F}_{12}$ ва $\vec{F}_{21}$ кучларнинг O марказга нисбатан моментларининг йиғиндисини ҳисоблайлик. M_1 ва M_2 нуқталарнинг O нуқтага нисбатан радиус-векторлари $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ бўлсин. У ҳолда:

$$\vec{m}_O(\vec{F}_{12}^I) + \vec{m}_O(\vec{F}_{21}^I) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^I + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}^I =$$
$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}^I = \overrightarrow{M_2M_1} \times \vec{F}_{12}^I.$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ ва $\vec{F}_{12}^I$ векторлар коллинеар бўлгани учун уларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенг. Шундай қилиб,

$$\vec{m}_O(\vec{F}_{12}^I) + \vec{m}_O(\vec{F}_{21}^I) = 0. \qquad (17.3)$$

Механик системанинг ҳар бир моддий нуқтаси билан мазкур системанинг бошқа нуқталари орасида пайдо бўладиган ўзаро таъсир кучлари учун (17.3) га ухшаш муносабатлар ёзиш мумкин. Шунга биноан (17.2) ўринли булади.

Ички кучлар системанинг турли нуқталарига қуйилганлиги учун гарчи уларнинг бош вектори ва бош моменти нолга тенг бўлса-да, умуман, ички кучлар узаро мувозанатлашувчи системани ташкил этмайди. Система абсолют қаттиқ жисмдан иборат бўлганда, унинг нуқталари бир-бирига нисбатан урин алмаштира олмайди, бинобарин, абсолют қаттиқ жисм ички кучлари мувозанатлашувчи системани ташкил этади.

Механик системанинг моддий нуқталарига таъсир этувчи кучларни ҳам *актив* ва *реакция кучларига* ажратиш мумкин. Системага қўйилган боғланишлар таъсирини ифодаловчи кучлар реакция кучларидан иборат; реакция кучларидан ташқари барча кучлар актив кучларга киради. Системанинг ҳар бир M_i нуқтасига таъсир этувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F}_i^a$, реакция кучларининг тенг таъсир этувчисини эса $\vec{F}_i^r$ билан белгилаймиз.

77- §. Механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Механик система $M_1, M_2, \ldots, M_n$ моддий нуқталардан ташкил топган булсин. Системанинг ҳар бир M_i нуқтасига қўйилган кучларни ташқи ва ички кучларга ажратиб, уларнинг тенг таъсир этувчиларини, мос равишда $\vec{F}_i^E$ ва $\vec{F}_i^I$ деб олиб, бу нуқталар учун динамиканинг асосий тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m_i\vec{w}_i = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

M_i нуқта радиус-вектори $\vec{r}_i$, Декарт ўқларидаги координаталари x_i, y_i, z_i бўлсин. У ҳолда, охирги ифода

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.4}$$

кўринишда ёзилади. (17.4) тенгламалар системаси *механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини вектор усулда ифодалаш* дейилади.

(17.4) тенгламаларни Декарт координата ўқларига проекциялаймиз:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= F_{ix}^E + F_{ix}^I, \\ m_i\ddot{y}_i &= F_{iy}^E + F_{iy}^I. \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ m_i\ddot{z}_i &= F_{iz}^E + F_{iz}^I. \end{aligned}\right| \tag{17.5}$$

(17.5) тенгламалар системаси *механик система ҳаракати дифференциал тенгламаларининг координата усулида ифодаланиши* дейилади.

Умуман, (17.4) ёки (17.5) дифференциал тенгламалар системасини маълум бошланғич шартлар асосида ечиб, система ҳар бир нуқтасининг ҳаракатини аниқлаш мумкин. (17.4) ва (17.5) дан кўрамизки, n та моддий нуқтадан иборат системанинг ҳаракати вектор усулда n та, координата усулида эса $3n$ та дифференциал тенгламалар билан ифодаланиб, бу тенгламалар системани ташкил этувчи моддий нуқталар сонига боғлиқ экан. Системани тузувчи моддий нуқталар сони ортиши билан мазкур тенгламалардан фойдаланиш мураккаблашиши табиий ҳолдир. Шунинг учун бу тенгламаларни система динамикасининг биринчи ёки иккинчи масаласини ечишга татбиқ этишдан аввал, уларнинг шакли ўзгартирилиб, динамиканинг умумий теоремалари ёки принципларига келтирилади.

78-§. Икки жисм масаласи

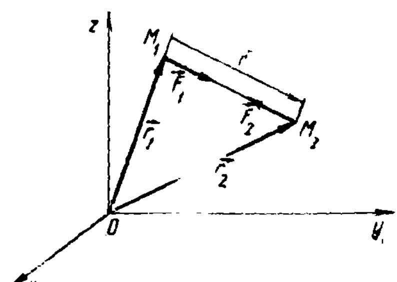
Массалари m_1 ва m_2 бўлган ва бутун олам тортишиш қонуни асосида аниқланувчи кучлар таъсиридаги иккита M_1, M_2 моддий нуқталардан иборат механик система ҳаракатига (17.4) дифференциал тенгламаларни татбиқ этишни кўрайлик. Бу нуқталарнинг бир-бирига нисбатан ҳамда система массалар маркази C нуқтага нисбатан ҳаракатини ўрганамиз. Бу масалага *икки жисм масаласи* дейилади.

Бирор $Oxyz$ инерциал системага нисбатан m_1 массали M_1 нуқтанинг радиус-вектори $\vec{r}_1$, m_2 массали M_2 нуқтанинг радиус-вектори $\vec{r}_2$ бўлсин (17.2- расм). $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ векторни $\vec{r}$ орқали белгилаймиз. $\vec{r}$ векторни M_2 нуқтанинг M_1 га нисбатан радиус-вектори ҳам дейиш мумкин.

M_1 ва M_2 моддий нуқталар бир-бирига миқдор жиҳатдан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар таъсирида бўлади. Бутун олам тортишиш қонунига кўра

$$F_1 = F_2 = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (17.6)$$

бўлиб (γ — гравитацион доимий), $\vec{F}_1$ кучнинг йўналиши $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$ бирлик вектор билан, $\vec{F}_2$ кучнинг йўналиши эса



17.2-расм.

$-\vec{r}' = -\frac{\vec{r}}{r}$ билан ифодаланади. Бинобарин, (17.4) дифференциал тенгламалар мазкур система учун қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned}\right| \qquad (17.7)$$

(17.7) системанинг биринчи тенгламасини m_2 га, иккинчи тенгламасини эса m_1 га кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган тенгламаларнинг иккинчисидан биринчисини айирамиз:

$$m_1 m_2(\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = -\gamma\cdot\frac{m_1 m_2(m_1+m_2)}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

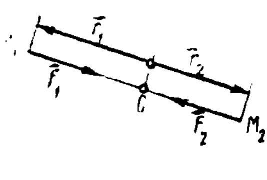
Бу ифоданинг ҳар икки томонини m_1 га булиб ва $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$ эканлигини эътиборга олиб, уни

$$m_2\ddot{\vec{r}} = -\gamma\cdot\frac{m_2(m_1+m_2)}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad (17.8)$$

куринишда ёзамиз. (17.8) тенгламадан M_2 нуқтанинг M_1 нуқтага нисбатан ҳаракатини массаси m_1+m_2 бўлган қўзғалмас нуқтага нисбатан ҳаракат деб қараш мумкинлиги кўриниб турибди.

Энди M_1, M_2 нуқталарнинг система массалар маркази C га нисбатан ҳаракатини куриб чиқамиз. Албатта, C массалар маркази M_1M_2 кесмада ётади (17.3-расм). M_1 ва M_2 нуқталарнинг C нуқтага нисбатан радиус-векторларини $\overrightarrow{CM_1} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{CM_2} = \vec{r}_2$ десак, система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= -\gamma\frac{m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2}\cdot\frac{\vec{r}_1}{r_1}, \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -\gamma\frac{m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2}\cdot\frac{\vec{r}_2}{r_2}. \end{aligned}\right| \qquad (17.9)$$



17.3-расм.

C нуқта M_1M_2 кесмани M_1 ва M_2 нуқталар массаларига тескари пропорционал бўлакларга ажратади:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ ёки } \frac{r_2}{r_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Бу тенгликлар ҳар бирининг икки томонига бирни қўшиб,

$$\frac{r_1+r_2}{r_2} = \frac{m_1+m_2}{m_1} \text{ ва } \frac{r_1+r_2}{r_1} = \frac{m_1+m_2}{m_2}$$

муносабатларни ҳосил қилиш мумкин. Булардан

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} r_2 \text{ ва } r_1 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1$$

бўлади.

Бу ифодаларни (17.9) га қўйиб,

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= -\gamma \cdot \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1}, \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -\gamma \cdot \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2} \end{aligned}\right| \qquad (17.10)$$

тенгламаларга эга буламиз. (17.10) системанинг биринчи тенгламасидан куриниб турибдики, M_1 нуқтанинг система массалар марказига нисбатан ҳаракатини массаси $\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$ га тенг бўлган қўзғалмас марказга нисбатан ҳаракат деб қараш мумкин. Худди шунингдек, иккинчи тенгламадан эса M_2 нуқтанинг массалар марказига нисбатан ҳаракатини массаси $\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$ булган кузғалмас марказга нисбатан тортишиш кучи таъсирида буладиган ҳаракат каби қараш мумкин. (17.10) система тенгламаларини алоҳида-алоҳида интеграллаб, бу ҳаракатларни аниқлаш мумкин.

79-§. Моддий нуқта ва механик системанинг ҳаракат миқдори. Куч импульси

Моддий нуқтанинг ҳаракат миқдори деб, унинг m массаси ва $\vec{v}$ тезлик векторларининг купайтмаси билан аниқланадиган $m\vec{v}$ векторга айтилади (ҳаракат миқдори баъзида *импульс деб ҳам юритилади).*

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ моддий нуқталардан тузилган механик система олайлик. Бу нуқталарнинг тезликлари, мос равишда $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, массалари эса $m_1, m_2, \ldots, m_n$ булсин. *Механик системани тузувчи нуқталар ҳаракат миқдорларининг геометрик йиғиндисига система ҳаракат миқдори (импульси) дейилади.* Система ҳаракат миқдорини $\vec{K}$ орқали белгиласак, у ҳолда:

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i. \qquad (17.11)$$

Механик система ҳаракат миқдорини система массалар марказининг тезлиги $\vec{v}_i$ орқали ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан, (16.2) формулани эътиборга олсак,

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_C\right) = M\vec{v}_C$$

келиб чиқали; бунда M—система массасини, $\vec{v}_i$. эса массалар марказининг тезлигини ифодалайди. Шундай қилиб

$$\vec{K} = M\vec{v}_C, \tag{17.12}$$

яъни *система ҳаракат миқдори вектори унинг массаси билан массалар маркази тезлигининг купайтмасига тенг бўлиб, массалар марказининг тезлиги бўйича йўналади.*

Ҳаракат миқдори халқаро бирликлар системасида $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ да ўлчанади.

Кучнинг система ёки моддий нуқтага таъсир эффекти система ёки нуқта массаси ва куч модулигагина боғлиқ бўлмай, кучнинг қанча вақт оралигида таъсир қилишига ҳам боғлиқдир. Бундай характеристика сифатида *кучнинг элементар импульси* ёки *чекли вақт оралигидаги импульси* олинади.

$\vec{F}$ куч dt элементар вақт оралигида таъсир этганда $\vec{F} \cdot dt$ купайгма орқали ифодаланувчи $d\vec{S}$ вектор *кучнинг элементар импульси* дейилади:

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt \tag{17.13}$$

Кучнинг элементар импульси куч вектори бўйлаб йўналади.

Кучнинг бирор $[t_0, t]$ чекли вақт оралигидаги импульсини аниқлаш учун (17.13) ифоданинг шу вақт оралигидаги интеграли ҳисобланади:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt. \tag{17.14}$$

(17.14) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, куч импульсининг шу ўқлардаги проекцияларини ҳосил қиламиз:

$$S_x = \int_{t_0}^{t} F_x dt,\ S_y = \int_{t_0}^{t} F_y dt,\ S_z = \int_{t_0}^{t} F_z \cdot dt.$$

Куч импульси $\text{Н} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ билан ўлчанади.

80-§. Механик система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақида теорема

Теорема. *Механик система ҳаракат миқдорининг вақт бўйича биринчи тартибли ҳосиласи системага таъсир қилувчи ташқи кучларнинг бош векторига тенг.*

Исбот. Механик система ҳаракати дифференциал тенгламалари (17.4) нинг чап ва унг томонларини мос равишда қўшиб

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^E + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^J \qquad (17.15)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Ички кучларнинг хоссасига кўра $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,\prime} = 0$. (17.15) да $\vec{R}^F = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^E$ — механик системага таъсир қилувчи ташқи кучларнинг бош векторини ифодалайди. m_i — ўзгармас, $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ бўлгани учун $\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$. Натижада, (17.15) ифода қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{R}^E.$$

Бунда (17.11) эътиборга олинса, уни

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}^E \qquad (17.16)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шу билан теорема исбот бўлди.

Моддий нуқтага таъсир қилувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F}$ десак, моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема қуйидагича бўлади:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

(17.16) ни $d\vec{K} = \vec{R}^E dt$ кўринишда ёзиб, бу тенгламанинг иккала томонини $[t_0, t]$ вақт оралигида интеграллаймиз:

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{R}^E dt,$$

бунда $\vec{K}_0$, $\vec{K}$—системанинг мос равишда, t_0, t пайтлардаги ҳаракат миқдорлари, $\int_{t_0}^{t} \vec{R}^E dt = \vec{S}^E$ эса ташқи кучлар бош векторининг $t - t_0$ вақт оралигидаги импульсини ифодалайди. Шундай қилиб

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{S}^E. \qquad (17.17)$$

(17.17) ифода *импульслар теоремасини* ифодалайди: *механик система ҳаракат миқдорининг чекли вақт оралиғида ўзгариши унга қўйилган ташқи кучлар бош векторининг шу вақт ичидаги импульсига тенг.*

(17.16) ва (17.17) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, мос равишда, ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг скаляр кўриниши:

$$\frac{dK_x}{dt} = R_x^E, \quad \frac{dK_y}{dt} = R_y^E, \quad \frac{dK_z}{dt} = R_z^E \tag{17.18}$$

ва импульслар теоремасининг шу ўқлардаги проекциялари орқали ифодаланиши:

$$K_x - K_{ox} = S_x^E, \; K_y - K_{oy} = S_y^E, \; K_z - K_{oz} = S_z^E \tag{17.19}$$

ҳосил қилинади.

Хусусий ҳолда, $\vec{R}^E = 0$ бўлса, (17.16) дан

$$\vec{K} = \vec{K}_0 = \overrightarrow{\text{const}} \tag{17.20}$$

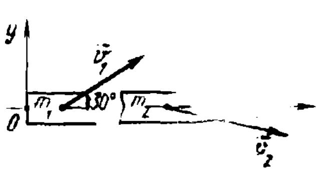
келиб чиқади. (17.20) муносабат *система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини* ифодалайди: *механик системага таъсир қилувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдори ўзгармас бўлади.* Яъни *ташқи кучларсиз, фақат ички кучлар билангина система ҳаракат миқдорини ўзгартириб бўлмас экан.*

Шунингдек, $R_x^E = 0$ ҳолида (17.18) дан $K_x = K_{ox} = \text{const}$ бўлиши келиб чиқади.

48- масала. 20 кг массали снаряд ўз траекториясининг энг юқори нуқтасида 600 $\frac{м}{с}$ тезликка эга бўлганда портлаб, 2 га бўлинди (17.4- расм). Портлашдан сўнг массаси 8 кг бўлган биринчи парчанинг тезлиги 500 $\frac{м}{с}$ бўлиб, горизонт билан 30° бурчак ташкил этди. Оғирлик кучларини ва снаряднинг портлаш вақтидаги кучишини эътиборга олмай, снаряд иккинчи парчаси тезлигининг миқдори ва йўналиши аниқлансин.

Ечиш. Қўзғалмас координата бошини снаряднинг портлаш олдидаги ҳолатида олиб, Ox ва Oy ўқларни ўтказамиз. (17.18) кўринишдаги

$$\frac{dK_x}{dt} = R_x^E, \quad \frac{dK_y}{dt} = R_y^E$$



17.4-расм.

тенгламаларни тузамиз. Бунда $R_x^E = 0$ бўлиши равшан. Оғирлик кучи эътиборга олинмагани учун $R_y^E = 0$ келиб чиқади.

Бинобарин,

$$K_x = K_{ox}, \quad K_y = K_{oy} \qquad (1)$$

ҳосил бўлади; бунда K_x, K_y билан икки бўлакка парчаланган снаряд ҳаракат миқдорининг проекциялари, K_{ox}, K_{oy} билан парчаланишдан аввалги снаряд ҳаракат миқдорининг проекциялари белгиланган.

Снаряд траекториянинг энг юқори нуқтасида булганида тезлиги горизонтал бўйича йуналади; шунинг учун $v_x = v = 600$ м/с, $v_y = 0$.

Бинобарин,

$$K_{ox} = mv, \quad K_{oy} = 0. \qquad (2)$$

Снаряд биринчи парчасининг тезлигини $\vec{v}_1$, иккинчи парчасининг тезлигини $\vec{v}_2$, унинг горизонтал билан ташкил қилган бурчагини α десак,

$$\left.\begin{aligned} K_x &= m_1 v_1 \cos 30^\circ + m_2 v_2 \cos\alpha, \\ K_y &= m_1 v_1 \cos 60^\circ + m_2 v_2 \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(3) да m_1 ва m_2 билан мос равишда биринчи ва иккинчи парчаларнинг массалари белгиланган.

(2) ва (3) ни (1) га қўямиз:

$$m_1 v_1 \cos 30^\circ + m_2 v_2 \cos\alpha = mv, \qquad (4)$$

$$m_1 v_1 \cos 60^\circ + m_2 v_2 \sin\alpha = 0. \qquad (5)$$

(4) ва (5) дан v_2 билан α ни аниқлаш мумкин. (4), (5) ни қуйидагича ёзамиз:

$$m_2 v_2 \cos\alpha = mv - m_1 v_1 \cos 30^\circ, \qquad (6)$$

$$m_2 v_2 \sin\alpha = -m_1 v_1 \cos 60^\circ, \qquad (7)$$

Бу тенгликларнинг чап ва ўнг томонларини мос равишда бир-бирига ҳадма-ҳад бўлсак.

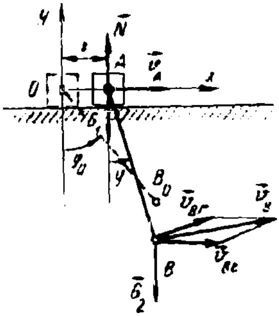
$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{m_1 v_1 \cos 60^\circ}{mv - m_1 v_1 \cos 30^\circ} = -0{,}2343 \text{ ёки } \alpha \approx -13{,}5^\circ$$

келиб чиқади. У ҳолда (6) дан:

$$v_2 = \frac{mv - m_1 v_1 \cos 30^\circ}{m_2 \cos\alpha}.$$

Бунда $m_2 = 12$ кг бўлишини эътиборга олиб, ҳисоблашларни бажарсак, $v_2 \approx 730 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ҳосил бўлади.

49-масала. Эллиптик маятник силлиқ горизонтал текислик буйлаб ҳаракатланувчи массаси m_1 бўлган A жисм ва бу жисм билан l узунликдаги стержень воситасида боғланган m_2 массали B юкдан иборат (17.5-расм). Бошланғич пайтда стержень вертикалдан φ_0 бурчакка оғдирилган бўлиб, бошланғич тезликсиз қуйиб юборилган. Стержень оғирлигини эътиборга



17.5-расм.

олмай, A жисмнинг силжишини стерженнинг вертикалдан оғиш бурчаги φ орқали ифодаланг.

Ечиш. O координата бошини A жисмнинг бошланғич пайтдаги ҳолатида оламиз. Моддий нуқталар деб қаралувчи A ва B жисмлардан иборат системага огирлик кучлари $\vec{G}_1$ ва $\vec{G}_2$ ҳамда силлиқ текисликнинг нормал реакцияси $\vec{N}$ таъсир этади.

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремага биноан

$$\frac{dK_x}{dt} = R_x^E.$$

$\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{N}$ ташқи кучлар вертикал бўйлаб йўналгани учун $R_x^E = 0$. Демак, $dK_x = 0$ ёки $K_x = K_{Ox}$, яъни система ҳаракат миқдори ўзгармас экан. Бошланғич пайтда система тинч ҳолатда бўлганидан $K_{Ox} = 0$; бинобарин, $K_x = 0$ келиб чиқади.

Стержень вертикалдан φ бурчакка огганда A жисмнинг силжишини x, тезлигини $\vec{v}_A$ деб оламиз. φ бурчакнинг вертикалдан соат стрелкаси ҳаракатига нисбатан тескари томонга узгаришини мусбат йўналиш деб қараймиз. Бу пайтдаги B нуқта тезлигини $\vec{v}_B$ десак, у

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Be} + \vec{v}_{Br}$$

формуладан аниқланади. Бунда AB стерженнинг A атрофида айланиш бурчак тезлигини ω билан белгиласак, $v_{Be} = v_A$, $v_{Br} = l \cdot \omega$ бўлади. Кейинги пайт учун система ҳаракат миқдорини ҳисоблаймиз.

$$\vec{K} = m_1\vec{v}_A + m_2\vec{v}_B = m_1\vec{v}_A + m_2(\vec{v}_{Be} + \vec{v}_{Br}).$$

Бу ифодани Ox ўққа проекциялаймиз:

$$K_x = m_1 v_A + m_2 (v_A + l\omega \cos \varphi). \tag{1}$$

(1) да $K_x = 0$, $v_A = \frac{dx}{dt}$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ бўлишини эътиборга олсак,

$$(m_1 + m_2)\frac{dx}{dt} + m_2 l \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

ҳосил бўлади. Охирги ифодани

$$(m_1 + m_2)\, dx = -m_2 l \cos \varphi\, d\varphi \tag{2}$$

кўринишда ёзиб, (2) ни $x=0$ да $\varphi=\varphi_0$ булишини эътиборга олиб интеграллаймиз:

$$(m_1+m_2)\int_0^x dx = -m_2 l \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos\varphi\, d\varphi.$$

Бундан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$x = \frac{m_2}{m_1+m_2}\, l\,(\sin\varphi_0 - \sin\varphi).$$

81-§. Ўзгарувчан массали жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

Назарий механикада асосан массаси ўзгармас бўлган моддий нуқта, қаттиқ жисм ёки механик системаларнинг ҳаракатлари ўрганилади. Лекин ҳаракат давомида заррачаларнинг қўшилиши ёки ажралиши туфайли массалари ўзгариб борувчи моддий нуқталар ёки жисмлардан кўплаб мисол келтириш мумкин. Масалан, тўйинган атмосферада ҳаракатланувчи сув томчисининг массаси ортиб боради. Ракетанинг ҳаракати вақтида ёниш маҳсулотлари ундан ажралиб чиқади, ракетанинг массаси эса камайиб боради. Бундай ҳолларда ҳаракатни ўзгармас массали нуқта ёки жисм ҳаракатининг тенгламалари билан ўрганиш нотўғри булади. Шунинг учун ўзгарувчан массали жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини келтириб чиқарамиз. Бу масалани ҳал қилишда аввалда баён қилинган ўзгармас массали механик система ёки жисм ҳаракатининг қонунларига асосланамиз. Чунончи, массаси ўзгарувчан жисм ҳаракатини текширишда жисмдан ажралиб чиқувчи ёки унга қушилувчи зарраларни жисм билан биргаликда ҳаракатланувчи система деб қаралади. Бу ҳолда умумий масса ўзгармасдан қолаверади ҳамда жисм ва заррачадан иборат бундай система учун массаси ўзгармас бўлган система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема татбиқ қилиниши мумкин.

Қуйида биз ажралаётган ёки қўшилаётган зарраларнинг массалари кичик ва ажралишдаги ёки қўшилишдаги вақтлар ҳам жуда кичик бўлган ҳолларнигина қараймиз. Масалага шу тарзда ёндошилганда қаралаётган жисм массасини ва тезлигини вақтнинг узлуксиз ва дифференциалланувчи функциялари сифатида олиш мумкин. Бундан ташқари заррача жисмга қўшилмасдан аввал ёки қўшилгандан сўнг у жисм билан ўзаро таъсирлашмайди, деб қабул қиламиз.

Вақтнинг бирор t пайтида жисмнинг массаси m, абсолют тезлиги $\vec{v}$, қўшиладиган заррачанинг шу пайтдаги массаси Δm, абсолют тезлиги эса $\vec{u}$ бўлсин. Шундай жисм ва заррачадан иборат системанинг t пайтдаги ҳаракат миқдори

$$\vec{K} = m\vec{v} + \Delta m\vec{u}$$

бўлади. Бирор Δt вақт оралигида заррача жисмга қўшилсин ва унинг тезлигини бирор $\Delta\vec{v}$ миқдорга ўзгартирсин. У ҳолда бундай системанинг $t+\Delta t$ моментдаги ҳаракат миқдори

$$\vec{K}+\Delta\vec{K}=(m+\Delta m)\left(\vec{v}+\Delta\vec{v}\right)$$

бўлади. Бундан

$$\Delta\vec{K}=m\Delta\vec{v}+\Delta m\left(\vec{v}-\vec{u}\right)+\Delta m\cdot\Delta\vec{v}.$$

Бу ифоданинг иккала томонини Δt га бўлиб ва Δt ни нолга интилтириб лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{K}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m\left(\vec{v}-\vec{u}\right)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m\cdot\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta m\cdot\Delta\vec{v}}{\Delta t}=0$ бўлгани учун охирги муносабатдан

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\frac{dm}{dt}$$

бўлади. Ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан $\dfrac{d\vec{K}}{dt}$ ифода ўрганилаётган системага таъсир қилувчи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Бу йиғиндини $\vec{F}$ орқали белгиласак,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}+\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\frac{dm}{dt}=\vec{F}\qquad(17.21)$$

ҳосил бўлади. $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}_0$ белгилаб, (17.21) тенгламани

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\vec{u}_0\frac{dm}{dt}\qquad(17.22)$$

куринишда ёзамиз. Бунда $\vec{u}_0$ — заррачанинг жисмга нисбатан тезлигини билдиради. $\vec{u}_0\cdot\dfrac{dm}{dt}$ кўпайтманинг бирлиги куч бирлиги билан бир хилдир. У *реактив куч* дейилади. Реактив кучни $\vec{R}$ орқали белгилаб, (17.22) тенгламани

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\vec{R}\qquad(17.23)$$

кўринишда ёзамиз. (17.23) тенглама *ўзгарувчан массали жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаси* ёки *Мешчерский тенгламаси* дейилади. (17.23) да $\vec{u}_0=0$ ва $\dfrac{dm}{dt}=0$ (яъни $m=\text{const}$)

деб олсак, ундан ўзгармас массали моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (Ньютон тенгламаси) келиб чиқади. Агар $\frac{dm}{dt} > 0$ бўлса, нуқтанинг массаси ортиб боради (заррачалар қўшилади), $\frac{dm}{dt} < 0$ бўлса, нуқтанинг массаси камайиб боради (заррачалар ажралади).

Мешчерский тенгламасидан ташқи кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлганда ҳам ўзгарувчан массали нуқта тезланиш билан ҳаракат қилиши мумкинлиги куриниб турибди. Ҳақиқатда $\vec{F} = 0$ бўлса, (17.23) дан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R}.$$

Ўзгармас ва ўзгарувчан массали жисмлар—моддий нуқталар ҳаракатларининг бир-биридан принципиал фарқланишини курсатиш учун бир мисол келтирамиз. Ракетанинг ташқи кучлар таъсири бўлмаган пайтдаги ҳаракатини олайлик. Ёниш маҳсулотларининг ракета соплосидан ажралиб чиқаётгандаги тезлиги нолга тенг бўлсин. Бунда қўзғалмас системадаги кузатувчига ёниш маҳсулотлари соплодан ажралган жойда қолиб кетаётгандек кўринади. (17.22) га кўра бу ҳолда

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = 0, \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = 0 \text{ ёки } m\vec{v} = \overrightarrow{\text{const}}$$

булади. Фараз қилайлик, $t = 0$ да $m = m_0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ бўлсин. У ҳолда

$$m\vec{v} = m_0\vec{v}_0 \text{ ёки } \vec{v} = \frac{m_0}{m}\vec{v}_0$$

ҳосил бўлади. Кўрамизки, ёқилғининг сарфланиши ҳисобига ёки бошқа сабабларга кўра ракетанинг массаси камайиб борса, унинг тезлиги ошиб боради ва аксинча, ракетанинг массаси ошиб борса, унинг тезлиги камайиб боради. Ракетага катта тезликлар бериш учун уни кўп босқичли қилиб ясалади. Ракетанинг ҳар бир босқичи ўзидаги ёнилғи тамом бўлгач автоматик равишда ракетадан ажралади. Бундай ажраш натижасида ракета яна қўшимча тезлик олади.

82-§. Механик система массалар марказининг ҳаракати ҳақида теорема

Механик система ҳаракат миқдорини система массалар марказининг тезлиги орқали $\vec{K} = M\vec{v}_C$ тенглик билан ифодалаш мумкин эди. Буни (17.16) га қўяйлик;

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_C) = \vec{R}^E.$$

Бунда $\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{w}_C$ — масса марказининг тезланиши эканлигини эътиборга олсак,

$$M\vec{w}_C = \vec{R}^E \tag{17.24}$$

ҳосил бўлади. (17.24) муносабат *система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани* ифодалайди. (17.24) ни моддий нуқта динамикасининг асосий тенгламаси билан таққослаб, массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани қуйидагича ўқиш мумкин: *системанинг массалар маркази массаси система массасига тенг ва система нуқталарига қўйилган ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридаги моддий нуқта каби харакатда булади.* Система массалар марказининг радиус-векторини $\vec{r}_C$ билан белгиласак, (17.24) ифода

$$M\ddot{\vec{r}}_C = \vec{R}^E \tag{17.25}$$

кўринишда ёзилади. Бу *механик система массалар маркази ҳаракатининг дифференциал тенгламасидир.* (17.25) вектор тенгламани координата уқларига проекциялаб, система массалар маркази ҳаракатининг скаляр тенгламаларини ҳосил қилиш мумкин:

$$M\ddot{x}_C = R_x^E, \quad M\ddot{y}_C = R_y^E, \quad M\ddot{z}_C = R_z^E. \tag{17.26}$$

Бунда x_C, y_C, z_C — массалар марказининг коррдинаталари, R_x^E R_y^E, R_z^E эса ташқи кучлар бош векторининг координата ўқларидаги проекцияларидир. Агар $\vec{R}F = 0$ бўлса, (17.25) тенгламадан

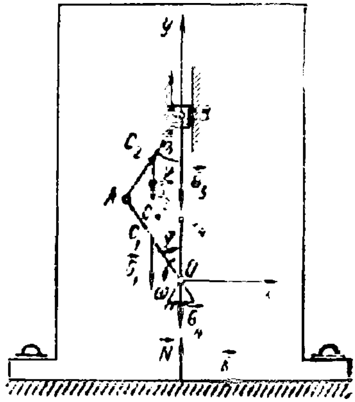
$$M\vec{v}_C = \overrightarrow{\text{const}}$$

ёки $R_x^E = 0$ ҳолида

$$Mv_{C_x} = \text{const}$$

келиб чиқади. Демак, *ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг булганда система массалар марказининг тезлиги ўзгармас бўлади.* Шунингдек, *ташқи кучлар бош векторининг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг булса, массалар маркази тезлигининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади.* Хусусан, вақтнинг бошланғич пайтида массалар марказининг тезлиги нолга тенг бўлса, массалар маркази олинган координата системасига нисбатан ўз ҳолатини ўзгартирмайди. Ташқи кучларсиз ички кучлар билан тинч ҳолатдаги система массалар марказини ҳаракатга келтириб бўлмайди.

50-масала. Кривошип-шатун механизмининг корпуси фундамент асосига болтлар воситасида бириктирилган. *OA* кривошип (17.6-расм) узгармас $\omega = 14\,c^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади. $OA = AB = l = 0{,}5$ м, бир жинсли кривошип ва шатун массалари $m_1 = m_2 = 1$ кг. B ползун массаси $m_3 = 2$ кг ва корпус массаси $m_4 = 5$ кг деб олиб, корпуснинг фундамент асосига берган умумий босим кучи ҳамда ҳаракат вақтида болтларга тушадиган умумий горизонтал зуриқиш кучи аниқлансин.



17.6-расм.

Ечиш. Фундамент асосининг корпусга кўрсатган умумий таъсири — реакция кучини $\vec{N}$ билан, болтлар орқали қуйилган умумий боғланиш реакция кучларининг горизонтал тузувчисини $\vec{R}$ билан белгилаймиз. Системага бу кучлардан ташқари $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$, $\vec{G}_4$ ташқи кучлар (мос равишда кривошип, шатун, ползун ва корпуснинг оғирлик кучлари) таъсир этади. Қўзғалмас O нуқтада координата бошини олиб, Ox, Oy ўқларни ўтказамиз. Массалар маркази ҳаракатини аниқловчи (17.23) тенгламаларнинг биринчи иккитасидан фойдаланамиз:

$$M\ddot{x}_C = R_x^E, \quad M\ddot{y}_C = R_y^E. \tag{1}$$

Бунда

$$R_x^E = R, \quad R_y^E = N - G_1 - G_2 - G_3 - G_4. \tag{2}$$

OA кривошип, AB шатун массаларини мос равишда уларнинг оғирлик марказлари C_1, C_2 нуқталарга, ползун массасини B нуқтага, корпус массасини C_4 нуқтага қўйилган деб қараб, (16.3) формулага кура система массалар марказининг координаталарини аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \\ y_C &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

бунда (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) билан мос равишда C_1, C_2, B, C_4 нуқталарнинг координаталари белгиланган.

Расмдан фойдаланиб қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$x_1 = -\frac{l}{2}\sin\varphi, \; y_1 = \frac{l}{2}\cos\varphi, \; x_2 = -\frac{l}{2}\sin\varphi, \; y_2 = \frac{3}{2}\,l\cos\varphi,$$

$$x_3 = 0, \; y_3 = 2l\cos\varphi, \; x_4 = 0, \; y_4 = OC_4 = \text{const}.$$

Буларни, $\varphi = \omega t$ булишини эътиборга олиб, (3) га қўямиз:

$$x_C = -\frac{(m_1+m_2)l\sin\omega t}{m_1+m_2+m_3+m_4},\ y_C = \frac{(m_1+3m_2+4m_3)l\cos\omega t+2m_4OC}{2(m_1+m_2+m_3+m_4)}. \quad (4)$$

(4) дан вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\ddot{x}_C = \frac{(m_1+m_2)l\,\omega^2\sin\omega t}{m_1+m_2+m_3+m_4},\quad \ddot{y}_C = -\frac{(m_1+3m_2+4m_3)l\omega^2\cos\omega t}{2(m_1+m_2+m_3+m_4)} \quad (5)$$

$M = m_1+m_2+m_3+m_4$ бўлишини назарда тутиб, (2) ва (5) ни (1) га қўямиз:

$$\left.\begin{aligned}&(m_1+m_2)l\omega^2\sin\omega t = R,\\ &-\frac{(m_1+3m_2+4m_3)l\omega^2\cos\omega t}{2} = N-G_1-G_2-G_3-G_4\end{aligned}\right| \quad (6)$$

$G = mg$ ни эътиборга олиб, берилганларни (6) га қуйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$R = 98\sin 14t \text{ Н},\quad N = (88{,}2-528\cos 14t) \text{ Н}.$$

Корпуснинг фундамент асосига берган умумий босим кучи миқдор жиҳатдан N га, болтлардаги умумий горизонтал зўриқиш кучи R га тенг, уларнинг йўналишлари эса, мос равишда $\vec{N}$ ва $\vec{R}$ га қарама-қарши йўналган.

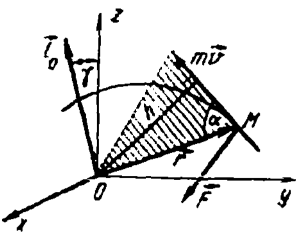
83-§. Моддий нуқта ва механик система ҳаракат миқдорининг моменти

Тезлиги $\vec{v}$, массаси m бўлган *моддий нуқта ҳаракат миқдорининг* бирор *O нуқтага нисбатан моменти (кинетик моменти)* деб,

$$\vec{l}_O = \vec{r}\times m\vec{v} \quad (17.27)$$

вектор кўпайтма билан аниқланувчи $\vec{l}_O$ векторга айтилади. Бунда $\vec{r}$—ҳаракатдаги нуқтани O нуқта билан туташтирувчи вектор (17.7-расм). O нуқтадан тезлик вектори йўналишига туширилган перпендикулярнинг узунлигини h десак, $\vec{l}_O$ векторнинг модули

$$l_O = r\cdot mv\sin\alpha = mvh$$



17.7-расм.

формула билан аниқланади. $\vec{l}_O$ вектор $\vec{r}$ ва $m\vec{v}$ га перпендикуляр йўналган бўлиб, унинг мусбат учидан қараганда $\vec{r}$ векторнинг $m\vec{v}$ га қараб энг кичик бурчакка айланиши соат стрелкаси ҳаракатига тескари кўриниши керак.

Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўққа нисбатан моменти деб шу нуқта ҳаракат миқдорининг берилган ўқдаги нуқтага нисбатан моментининг мазкур ўққа проекциясига айтилади. $\vec{l}_O$ ва z ўқ орасидаги бурчакни γ билан белгиласак, ҳаракат миқдорининг ўққа нисбатан моменти:

$$l_z = m_z(m\vec{v}) = l_O \cos\gamma.$$

Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўққа нисбатан моментини ҳисоблашда кучнинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблаш қоидасидан фойдаланиш мумкин, бунда куч вектори ўрнида ҳаракат миқдори олинади.

Шунингдек, ҳаракат миқдорининг ўққа нисбатан моментини аналитик усулда ҳам аниқлаш мумкин. Масалан, нуқта координаталарини x, y, z, тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларини v_x, v_y, v_z десак, қуйидаги тенглик ўринли булади:

$$l_z = m(xv_y - yv_x).$$

Массалари $m_1, m_2, \ldots, m_n$, тезликлари эса мос равишда $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ булган нуқталардан иборат механик системани олайлик. O – бирор белгиланган нуқта булсин. *Система ҳаракат миқдорининг O нуқтага нисбатан бош моменти (ёки кинетик моменти) $\vec{L}_O$ деб, система нуқталари ҳаракат миқдорларининг шу нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига айтилади*, яъни

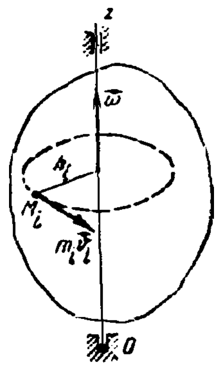
$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i, \tag{17.28}$$

бунда $\vec{r}_i$ билан система M_i нуқтасининг O марказга нисбатан радиус-вектори белгиланган.

Шунингдек, системанинг ўққа нисбатан кинетик моменти тушунчасини киритиш мумкин:

$$L_z = \text{пр}_z\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} m_z(m_i\vec{v}_i). \tag{17.29}$$

Механик система қўзғалмас ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айланувчи қаттиқ жисмдан иборат бўлсин(17.8- расм). Бу жисмнинг айланиш ўқига нисбатан кинетик моментини аниқлаймиз. Жисм ҳар бир M_i нуқтасининг тезлигини $\vec{v}_i$, шу нуқтадан айланиш ўқигача булган масофани



17.8-расм.

h_i билан белгилаймиз. Жисм ҳар бир нуқтасининг тезлик вектори айланиш уқига перпендикуляр текисликда ётиши ва $v_i = h_i\omega$ булиши бизга аён Бинобарин, (17.29) формулага кўра:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \cdot h_i = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2\omega.$$

Бунда $\sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = J_z$ бўлишини ҳисобга олсак,

$$L_z = J_z \cdot \omega \tag{17.30}$$

ҳосил булади. Шундай қилиб, *қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш ўқига нисбатан кинетик моменти унинг мазкур ўққа нисбатан инерция моменти билан бурчак тезлигининг кўпайтмасига тенг.*

Моддий нуқта ёки системанинг кинетик моменти кг·м $с^{-1}$ да ўлчанади.

84-§. Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақида теорема

Теорема. *Механик системанинг бирор нуқтага нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила системага таъсир қилувчи ташқи кучларнинг шу марказга нисбатан бош моментига тенг,* яъни

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^E.$$

Исбот. Система ҳаракати дифференциал тенгламалари (17.4) нинг чап ва ўнг томонларини $\vec{r}_i$ радиус-векторга векториал кўпайтирамиз.

$$r_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I, \quad (i = 1,2, \ldots ,n).$$

Бу тенгламалар системасини ҳадлаб қўшамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I. \tag{17.31}$$

(17.31) тенгликнинг чап томонини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} r_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i). \tag{17.32}$$

Ҳақиқатан,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt};$$

бироқ, коллинеар векторларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенг, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i = 0.$$

У ҳолда (17.32) да дифференциал билан йиғинди ўрнини алмаштириб ёзиш мумкинлигини эътиборга олиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \frac{d\vec{L}_O}{dt}.$$

(17.31) да

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E = \vec{M}_O^E$$

ташқи кучларнинг O марказга нисбатан бош моментидан иборат; ички кучларнинг хоссаларига кўра

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I = \vec{M}_O^I = 0.$$

Натижада, (17.31) ифодадан

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^E \tag{17.33}$$

бўлиб, теореманинг исботи келиб чиқади. (17.33) ни координата ўқларига проекциялаб,

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^E, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^E, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^E \tag{17.34}$$

тенгламаларни ҳосил қилиш мумкин. Демак, *механик системанинг бирор ўққа нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила системага таъсир қилувчи ташқи кучларнинг шу ўққа нисбатан бош моментига тенг.*

Алоҳида олинган моддий нуқта учун (17.33) ва (17.34) тенгламалар, мос равишда

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{m}_O(\vec{F}) \tag{17.35}$$

ва

$$\frac{dl_x}{dt} = m_x(\vec{F}), \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(\vec{F}), \quad \frac{dl_z}{dt} = m_z(\vec{F}) \tag{17.36}$$

кўринишда ёзилади. Бунда $\vec{m}_O(\vec{F})$, $m_x(\vec{F})$, $m_y(\vec{F})$, $m_z(F)$ билан мос равишда моддий нуқтага таъсир қилувчи кучлар тенг таъсир этувчисининг O марказга, x, y, z ўқларга нисбатан моментлари белгиланган.

Хусусий ҳолда, агар ташқи кучларнинг бирор нуқтага ёки ўққа нисбатан бош моментлари нолга тенг, яъни $\vec{M}_O^E = 0$, $M_z^E = 0$ булса, (17.33) ва (17.34) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{\mathrm{const}} \tag{17.37}$$

ва

$$L_z = \mathrm{const}. \tag{17.38}$$

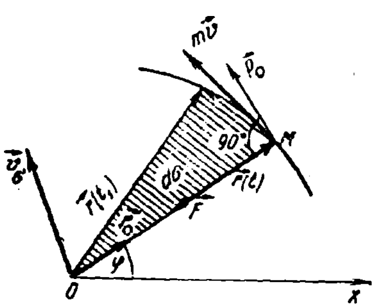
(17.37) (ва 17.38) ифодалар *механик система ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунини* ифодалайди: *агар механик системага таъсир қилувчи ташқи кучларнинг бирор нуқтага (уққа) нисбатан бош моменти нолга тенг булса, системанинг шу марказга (ўққа) нисбатан кинетик моменти ўзгармас бўлади.*

Изоҳ. Биз системанинг 0 қузғалмас марказга нисбатан кинетик моментининг узгариши ҳақидаги теоремани (17.33) формула билан ифодаладик. Агар системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти ўрнига ўзининг C масса марказига нисбатан нисбий ҳаракатидаги кинетик моментининг ўзгаришини ҳисобласак, бу ҳолда ҳам (17.33) куринишдаги

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^E \tag{17.33 a}$$

муносабат ҳосил булишини кўриш мумкин. Бинобарин, системанинг абсолют ҳаракатдаги кинетик моментининг узгариши билан унинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракатидаги кинетик моментининг ўзгариши бир хил куринишда ифодаланади.

85- § Моддий нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракати. Юзалар қонуни. Бинэ формуласи



17,9-расм.

Таъсир чизиғи доимо битта қўзғалмас нуқтадан ўтувчи кучга *марказий куч* дейилади, бу нуқта эса одатда *куч маркази* деб юритилади.

Моддий нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракати фақат битта текисликда содир бўлади. Ҳақиқатан, бу ҳолда моддий нуқтанинг O қутбга нисбатан радиус-вектори $\vec{r}$ билан $\vec{F}$ куч вектори коллинеар векторлар бўлиб (17.9- расм), $\vec{r}\times\vec{F}$ кўпайтма нолга тенг булади ва (17.35) дан $\vec{l}_O=\overrightarrow{\mathrm{const}}$ ёки

$$\vec{r}\times m\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{const}} \tag{17.39}$$

келиб чиқади. Вектор кўпайтманинг қоидасига кўра $\vec{r}$ ва $\vec{v}$ векторлар тузган текислик доимо $\vec{r}\times m\vec{v}$ векторга перпендикуляр бўлади. Аммо (17.39) дан кўрамизки, бу кўпайтма узгармас векторни беради, бинобарин, унга перпендикуляр булган текислик ҳам биттаю битталигича қолади. Бу текисликда эса $\vec{r}$ ва $\vec{v}$ векторлар ётади, яъни нуқтанинг ҳаракати фақат шу текисликда содир бўлади.

Моддий нуқтани қутб билан туташтирувчи радиус-вектор-нинг нуқта ҳаракати давомида чизган юзаси вақтга пропорционал равишда узгаради. Ҳақиқатан, секториал тезликни ифодаловчи (1.18) формула

$$v_\sigma=\frac{d\vec{\sigma}}{dt}=\frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v})$$

ни эътиборга олсак, (17.39) дан

$$\vec{r}\times m\vec{v}=2m\vec{v}_\sigma=\overrightarrow{\mathrm{const}} \tag{17.40}$$

ҳосил бўлади.

(17.40) дан: $\vec{v}_\sigma=\overrightarrow{\mathrm{const}}$ ёки

$$|v_\sigma|=\left|\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right|=|\vec{C}|=|\overrightarrow{\mathrm{const}}|; \tag{17.41}$$

бунда σ — куч маркази билан ҳаракатдаги нуқтани туташтирувчи радиус-векторнинг нуқта ҳаракати давомида чизган юзаси. Охирги муносабатни интеграллаш натижасида

$$|\vec{\sigma}|=\sigma=Ct+\sigma_0$$

келиб чиқади. Демак, *куч маркази билан ҳаракатдаги нуқтани туташтирувчи радиус-векторнинг ҳаракат давомида чизган юзаси вақтга пропорционал равишда узгарар экан;* бу хосса *юзалар қонуни* деб юритилади.

(1.15) формулага биноан

$$v_\sigma=\frac{1}{2}r^2\omega=\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}$$

бўлади; бунда r, φ—нуқтанинг қутб координаталари. (17.41) ни эътиборга олсак,

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=c=\mathrm{const} \tag{17.42}$$

бўлади. Бу тенгламага *юзалар интеграли* дейилади. Юзалар интегралидан фойдаланиб нуқта траекториясини унга таъсир қилувчи марказий куч билан боғлайдиган дифференциал тенгламани тузишни курайлик. Қутб координаталарининг боши O сифатида куч марказини олайлик. (17.9- расм). Марказий куч ёки ҳаракатдаги нуқтадан куч маркази томон, ёки O марказдан ҳаракатдаги нуқта томон йўналган булиши мумкин.

Нуқта ҳаракатининг $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ асосий тенгламасини (1.32) ни назарда тутиб ўзаро перпендикуляр бўлган $\vec{r}_0$, $\vec{p}_0$ йуналишларга проекциялаймиз:

$$m(\ddot{r} - r\cdot\dot{\varphi}^2) = \pm F, \tag{17.43}$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0. \tag{17.44}$$

$\vec{F}$ куч O марказдан M га қараб йуналганда (17.43) тенгламанинг ўнг томонида мусбат ишора, акс ҳолда манфий ишора олинади. (17.42) тенгламани

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \tag{17.45}$$

куринишда ёзиб,

$$u = \frac{1}{r} \tag{17.46}$$

ўзгарувчи киритсак,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{c}{r^2} = -c\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -c\,\frac{du}{d\varphi}$$

ва

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt} = -c\,\frac{d^2u}{d\varphi^2}\cdot\frac{c}{r^2} = -c^2u^2\,\frac{d^2u}{d\varphi^2} \tag{17.47}$$

ҳосил булади. (17.45) ва (17.47) ифодаларни (17.43) тенгламага қуямиз ҳамда (17.46) ни эътиборга олиб,

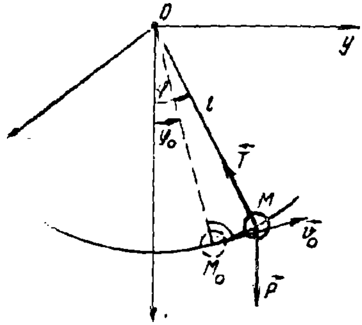
$$mc^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = \pm F \tag{17.48}$$

кўринишга келтирамиз. (17.48) га *Бинэ формуласи* дейилади. Бу тенглама берилган марказий куч орқали ушбу куч таъсиридаги ҳаракатнинг траекториясини ва аксинча, берилган траектория орқали ушбу кучни аниқлаш имкониятини беради.

86- § Математик тебрангичнинг кичик тебранишлари

Моддий нуқта ҳаракат миқдори моментининг узгариши ҳақидаги теоремани қуллаб, узунлиги l бўлган, бир учи горизонтал қўзғалмас O уққа бириктирилған, иккинчи учига m

массали M моддий нуқта жойлашган математик тебрангичнинг вертикал текисликдаги ҳаракатини аниқлашни куриб чиқамиз (17.10-расм).



17.10-расм.

Ип оғирлигини ва муҳит қаршилик кучини ҳисобга олмаймиз Координата бошини қузғалмас O нуқтада олиб, x, y уқларини расмда курсатилгандек йўналтирамиз. Маятник вертикал текисликда ҳаракатлангани учун, бу ҳаракат ип билан Ox уқ орасидаги φ бурчакнинг узгариши билан тўлиқ аниқланади. Бу бурчакнинг мусбат орттирмаси сифатида Oz уқнинг учидан қараганда нуқта соат стрелкаси ҳаракатига тескари йуналишда айланганда олган орттирмаси қабул қилинади. Маятникни мувозанат ҳолат ($\varphi = 0$) дан бирор $\varphi = \varphi_0$ ҳолатга чиқариб, унга нуқта ҳаракати траекториясига уринма буйича йўналган $\vec{v} = \vec{v}_0$ бошланғич тезлик берилганда у қандай ҳаракатланишини аниқлаймиз Тебрангич ҳаракатига вертикал равишда пастга йуналган $\vec{P}$ оғирлик кучи ва ипдаги $\vec{T}$ реакция кучи таъсир этади.

(17.36) га биноан,

$$\frac{dl_z}{dt} = m_z(\vec{P}) + m_z(\vec{T}) \qquad (a)$$

деб ёзиш мумкин. Тебрангич ҳаракат микдорининг Oz уққа нисбатан моменти қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$l_z = mvl = m\omega l^2 = ml^2\dot{\varphi}.$$

$\vec{T}$ кучнинг таъсир чизиғи Oz ўқни кесиб ўтгани учун $m_z(\vec{T}) = 0$; $m_z(\vec{P}) = -Pl\sin\varphi$. У ҳолда ($a$) ифода қуйидагича ёзилади:

$$ml^2\ddot{z} = -Pl\sin\varphi.$$

Бунда $P = mg$ эканлигини эътиборга олиб, тенгламанинг иккала томонини ml^2 га бўлиш ва барча ҳадларни тенгликнинг чап томонига утказиш натижасида қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \qquad (17.49)$$

(17.49) *математик маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламасини* ифодалайди. Бу чизиқли булмаган дифференциал тенгламадир. Агар маятникнинг кичик тебранишларини текширадиган бўлсак, $\sin\varphi \approx \varphi$ деб олиш мумкин. Бу ҳолда тенглама

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad (17.50)$$

кўринишга келади. (17.50) бир жинсли, иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама бўлиб, у математик маятник кичик тебранишларини тақрибан ифодалайди. (14.11) га кўра (17.50) тенгламанинг умумий ечими

$$\varphi = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \alpha\right)$$

кўринишда бўлади. Ўзгармас A—математик маятник кичик тебранишларининг амплитудаси, α — бошланғич фаза. (14.10) формулага асосан A ва α бошланғич шартлар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{v_0^2}{gl}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{gl}\cdot\frac{\varphi_0}{v_0}.$$

Шундай қилиб математик тебрангичнинг кичик тебранишлари эркин тебранма ҳаракатдан иборат бўлиб, у

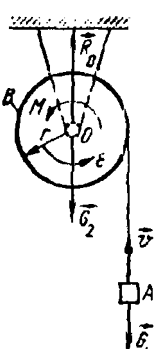
$$\varphi = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{v_0^2}{gl}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi_0}{v_0}\sqrt{gl}\right)\right)$$

тенглама билан ифодаланади.

(14.12) га асосан, математик тебрангичнинг кичик тебранишлари даври қуйидагича бўлади:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (17.51)$$

51-масала. Чўзилмайдиган ипнинг бир учига $m_1 = \frac{m}{2}$ массали A юк осилган бўлиб, иккинчи учи массаси $m_2 = m$, радиуси r бўлган бир жинсли цилиндрдан иборат B блокка бириктирилган (17.11-расм). B блокка қўйилган M ўзгармас момент таъсирида A юк юқорига кўтарилади. Ипнинг массасини ва блок ўқидаги ишқаланишларни эътиборга олмай, блокнинг бурчак тезланиши аниқлансин.



17.11-расм.

Ечиш. Блокнинг айланиш ўқини Ox ўқ деб олиб, системанинг шу ўққа нисбатан кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. (17.34) га кура:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^E \qquad (1)$$

A юк ва B блокдан иборат системага блокни айлантирувчи M момент, A юкнинг оғирлик кучи $G_1 = m_1 g = \frac{m}{2} g$, блокнинг оғирлик кучи $G_2 = m_2 g = mg$ таъсир этади. Системага қўйилган O шарнирли боғланиш реакция кучини $\vec{R}_O$ билан белгилаймиз. Бу ташқи кучларнинг Ox уққа нисбатан бош моментини ҳисоблаймиз:

$$M_x^E = M - G_1 r = \frac{2M - mgr}{2}. \qquad (2)$$

Энди системанинг Ox ўққа нисбатан кинетик моментини ҳисоблаймиз. Айланма ҳаракатдаги блокнинг бурчак тезлигини ω, илгарилама ҳаракатдаги A юкнинг тезлигини $\bar{v}$ билан белгилайлик. У ҳолда

$$L_x = L_{1x} + L_{2x} = m_1 v \cdot r + J_x \omega.$$

Бу тенгликда $v = \omega \cdot r$, $J_x = \frac{1}{2} m_2 r^2$ бўлишини эътиборга олсак, у қуйидаги куринишга келади:

$$L_x = \frac{m}{2} r^2 \omega + \frac{1}{2} m r^2 \omega = m r^2 \omega.$$

Охирги тенгликдан вақт бўйича ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\frac{dL_x}{dt} = m r^2 \frac{d\omega}{dt} = m r^2 \varepsilon. \qquad (3)$$

(2) ва (3) ифодаларни (1) га қўямиз:

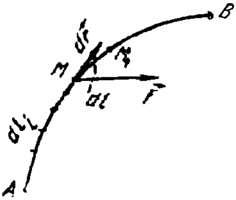
$$m r^2 \varepsilon = \frac{2M - mgr}{2}.$$

Бу тенгламадан блокнинг бурчак тезланиши аниқланади:

$$\varepsilon = \frac{2M - mgr}{2mr^2}.$$

87-§. Кучнинг иши. Қувват

Механикада икки хил улчов мавжуд булиб, биринчиси моддий нуқта ёки механик системанинг механик ҳаракати ўлчовини ифодалайди. Бу ўлчов қаторига ҳаракат миқдори, ҳаракат миқдори моменти, кинетик энергия каби катталикларни киритиш мумкин. Иккинчи хил улчов эса узаро механик таъсирни ифодалайди. Бу улчов жумласига куч, куч моменти, куч импульси, кучнинг иши ва ҳоказоларни киритиш мумкин. Бу икки хил ўлчов бир-бири билан маълум муносабатлар орқали боғланган. Масалан, моддий нуқта ҳаракат миқдорининг узгариши унга таъсир қилувчи кучнинг импульси билан улчаниб, ҳаракат миқдори узгаришининг ўлчови бўлади. Бунда ҳаракатнинг формаси узгармайди—механик ҳаракат бошқача шундай ҳаракатга айланади (ҳаракат миқдори ошади ёки ка-



17.22- расм.

маяди). Механик ҳаракатнинг узгаришида ҳаракат бир турдан бошқа турга айланиши ҳам мумкин: механик ҳаракатнинг улчови бўлган кинетик энергия узгариши билан механик ҳаракат бошқа турдаги ҳаракатга, кинетик энергия эса бошқа турдаги энергияга айланиши мумкин. Масалан, қаршилик курсатувчи муҳитда ҳаракатланувчи жисмнинг ҳаракат давомида тезлиги, пировард натижада кинетик энергияси ҳам камайиб боради. Кинетик энергия қанчалик камайиб борса, ишқаланиш туфайли содир бўлган иссиқлик энергияси шунчалик ошиб боради. Курамизки, бу ерда механик ҳаракат узгариб, ҳаракатнинг бошқа турига—иссиқлик билан характерланувчи физик ҳаракатга айланди. Бу ҳолда кучнинг иши ҳаракат ўзгаришининг улчови бўлиб хизмат қилади, яъни механик ҳаракатнинг бошқа бир шаклдаги ҳаракатга айланишининг миқдорий улчови сифатида иш тушунчасини киритиш мумкин.

Ф. Энгельс ўзининг „Табиат диалектикаси" асарида механик ҳаракатнинг икки улчови ҳақида фикр юритиб, жумладан, иш ҳақида „Агар механик ҳаракат шунчаки йуқолмаса, агар у ҳаракатнинг бирон-бир бошқа формасига айланмаса, ҳеч қачон ва ҳеч қаерда у ишни келтириб чиқармайди" деб кўрсатган эди.

Механик ҳаракатнинг механик бўлмаган ҳаракатга айланиши ёки, аксинча, механик бўлмаган ҳаракатнинг механик ҳаракатга айланиши маълум йўл оралигида содир булиб, бу жараён таъсир қилувчи кучларга боғлиқ.

Ихтиёрий $\vec{F}$ кучнинг бирор чекли оралиқдаги ишини аниқлашда кучнинг элементар иши тушунчасидан фойдаланамиз.

M моддий нуқта $\vec{F}$ куч таъсирида $d\vec{r}$ элементар векторга тенг кўчиш олсин (17.12-расм). $\vec{F}$ куч билан $d\vec{r}$ кўчиш векторининг скаляр купайтмаси *$\vec{F}$ кучнинг $d\vec{r}$ кучишдаги элементар иши* дейилади. Кучнинг элементар ишини dA билан белгиласак, таърифга биноан,

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (17.52)$$

$\vec{F}$ ва $d\vec{r}$ векторлар орасидаги бурчакни α билан белгиласак, (17.52) ни қуйидаги куринишда ёзиш мумкин:

$$dA = F \cdot dr\cos\alpha \qquad (17.53)$$

$dr = dl$ деб олиб, (17.53) ни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$dA = F \cdot dl \cdot \cos\alpha. \qquad (17.54)$$

(17.54) да dl билан M нуқтанинг траектория буйлаб элементар кучиши белгиланган.

$\vec{F}$ ва $d\vec{r}$ векторларни мос равишда уларнинг Декарт ўқларидаги проекциялари F_x, F_y, F_z ва dx, dy, dz орқали ифодаласак, (17.52) дан

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (17.55)$$

ҳосил булади. (17.55) кучнинг элементар ишини аналитик усулда ифодалашдан иборат.

$d\vec{r} = \vec{v}dt$ бўлишини назарда тутсак, (17.52) тенгликни

$$dA = \vec{F}\vec{v}dt = Fv\cos\alpha \cdot dt \qquad (17.56)$$

формулага келтириш мумкин.

M моддий нуқтага қўйилган $\vec{F}$ кучнинг $AB = l$ чекли оралиқдаги ишини ҳисоблашда шу оралиқни бир неча элементар бўлакча (dl_i) ларга ажратиб, мазкур оралиқдаги элементар ишларнинг йиғиндиси каби аниқлаш мумкин:

$$A = \lim_{dl_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} dA_i.$$

(17.52)—(17.55) ифодаларни эътиборга олиб, охирги тенгликни интеграл орқали қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$A = \int_{(A)}^{(B)} dA = \int_{(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(A)}^{(B)} F\cos\alpha\, dl \qquad (17.57)$$

ёки

$$A = \int_{(A)}^{(B)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (17.58)$$

M нуқта *A* ҳолатда бўлган пайтида $t = 0$, *B* ҳолатга ўтган пайтни *t* билан белгилаб, (17.56) га асосан чекли оралиқдаги *иш формуласини*

$$A = \int_0^t \vec{F}\vec{v}dt = \int_0^t (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z)dt \qquad (17.59)$$

кўринишда ҳам ифодалаш мумкин.

Бирор куч ишининг вақт бирлиги ичида ўзгариши шу *кучнинг қувватини* ифодалайди. Куч қувватини *W* билан белгиласак, таърифга биноан,

$$W = \frac{dA}{dt}. \qquad (17.60)$$

(17.52)—(17.56) ифодаларни эътиборга олиб, қувватни аниқловчи қуйидаги муносабатларни ёзиш мумкин;

$$W = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\alpha. \qquad (17.61)$$

(17.61) га кура (17.59) ифода

$$A = \int_0^t W dt \qquad (17.62)$$

кўринишни олади.

$\vec{F}$ куч ўзгармас булган хусусий ҳолда унинг $AB = l$ оралиқдаги иши (17.57) формулага биноан қуйидагича аниқланади:

$$A = F \cdot l \cdot \cos\alpha, \qquad (17.63)$$

(17.63) дан кўрамизки, $\alpha < \frac{\pi}{2}$ да $A > 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ да $A = 0$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$ да $A < 0$ булади.

Кучнинг иши халқаро бирликлар системаси (СИ) да 1Ж $=$ $=$ 1 Н·м да, қувват эса 1 Вт $= 1\,\frac{\text{Ж}}{\text{с}} = 1\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{с}}$ билан улчанади.

Агар M моддий нуқтага тенг таъсир этувчиси $\vec{R} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ бўлган $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ кучлар системаси қўйилса, *тенг таъсир этувчининг* $d\vec{r}$ *элементар кўчишдаги элементар иши ташкил этувчи кучларнинг шу кўчишдаги элементар ишлари йиғиндисига тенг* бўлади, яъни

$$dA(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} dA(\vec{F}_i). \qquad (17.64)$$

Ҳақиқатан,

$$\vec{R} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n)\, d\vec{r} = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \ldots + \vec{F}_n d\vec{r}$$

ёки

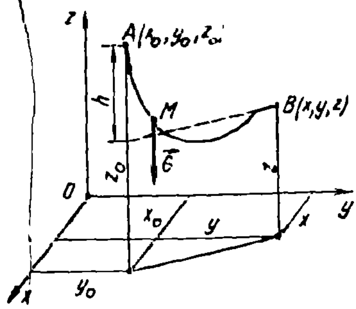
$$\vec{R} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} dA(\vec{F}_i).$$

(17.64) га биноан, тенг таъсир этувчининг чекли оралиқдаги иши учун қуйидаги формулани ёзиш мумкин:

$$A(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} A(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i. \qquad (17.65)$$

88- §. Баъзи кучларнинг ишини ҳисоблаш

1. **Моддий нуқта оғирлик кучининг иши.** Оғирлиги $G = mg$ бўлган M моддий нуқта $A(x_0, y_0, z_0)$ ҳолатдан $B(x, y, z)$ ҳолатга ўтганидаги $\vec{G}$ кучнинг ишини ҳисоблаймиз (17.13)-расм). $G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = -mg$ булишини эътиборга олиб, (17.58) формуладан фойдаланамиз:



17.13· расм.

$$A(\vec{G}) = \int_{(A)}^{(B)} (G_x dx + G_y dy + G_z dz) = -\int_{z_0}^{z} mgdz.$$

Бундан қуйидаги келиб чиқади:

$$A(\vec{G}) = mg(z_0 - z). \qquad (17.66)$$

$|z_0 - z| = h$ белгилаш киритсак,

$$A(\vec{G}) = \begin{cases} mgh, & z_0 > z, \\ -mgh, & z_0 < z \end{cases} \qquad (17.67)$$

формула ҳосил бўлади.

(17.67) дан кўрамизки, *оғирлик кучининг иши нуқтанинг траектория бўйлаб ўтган йўлига боғлиқ булмай, фақат нуқтанинг бошланғич ва охирги пайтдаги координаталаригина боғлиқ* экан.

2. Моддий нуқталар системаси оғирлик кучларининг иши. $M_1, M_2, \ldots, M_n$ моддий нуқталарининг оғирликлари мос равишда $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \ldots, \vec{G}_n$ бўлган механик система берилсин. Маълумки оғирлик кучлари бу ҳолда параллел кучлар системасини ташкил қилади. Механик системанинг массалар маркази бошланғич C_0 вазиятдан кейинги C вазиятга ўтганда, шу кучлар системасининг ишини аниқлаймиз. $\vec{G}_i$ кучнинг ($i = 1, 2, \ldots, n$) иши (17.66) га асосан

$$A_i = G_i z_i^0 - z_i)$$

бўлади. Бунда z_i^0 ва z_i билан M_i нуқтанинг бошланғич ва кейинги вазиятларига мос аппликаталари белгиланган.

Агар системанинг барча нуқталари оғирлик кучларининг кўрсатилган оралиқдаги ишини A деб белгилисак,

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} G_i(z_i^0 - z_i) = \sum_{i=1}^{n} G_i z_i^0 - \sum_{i=1}^{n} G_i z_i$$

бўлади. C_0 нуқтанинг аппликатасини z_{C_0}, C нуқтанинг аппликатасини эса z_C десак, масса маркази координаталарини аниқлаш формуласига асосан

$$\sum_{i=1}^{n} G_i z_i^0 = G \cdot z_{C_0}, \quad \sum_{i=1}^{n} G_i z_i = G z_C.$$

бўлади, бунда G механик системанинг оғирлигидир. У ҳолда

$$A = G(z_{C_0} - z_C) = Mg(z_{C_0} - z_C)$$

келиб чиқади. Механик система массалар марказининг вертикал бўйича координатасининг узгаришини ифодаловчи $|z_{C_0} - z_C|$ айирмани H_C деб белгиласак, охирги формулани

$$A = \pm G \cdot H_C = \pm MgH_C$$

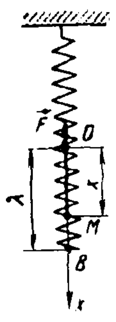
куринишда ёзиш мумкин. Бунда массалар маркази юқоридан пастга кўчганида мусбат, акс ҳолда манфий ишора олинади.

3. Эластиклик кучининг иши. Эластиклик кучининг тўғри чизиқли йулдаги ишини аниқлашни куриб чиқамиз. Координата боши учун пружина деформацияланмаган ҳолатдаги M нуқтага мос келувчи O нуқтани олиб (17.14-расм), Ox уқни йуналтирамиз. Маълумки, эластиклик кучининг ушбу уқдаги проекцияси $F_x = -cx$ булади; бунда c— пружинанинг бикирлиги, x—нуқтанинг мувозанат ҳолатдан Ox уқ бўйлаб четга чиқиши—пружина деформациясидан иборат. Эластиклик кучининг йуналиши билан нуқтанинг кўчиш йўналиши қарама-қарши булганда бу кучнинг $\lambda = OB$ оралиқдаги иши (17.58) формулага кура қуйидагича топилади:

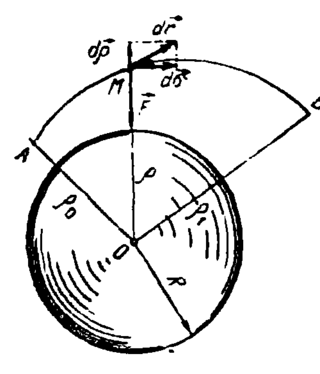
$$A = -c\int_0^\lambda x dx = -c\frac{\lambda^2}{2}. \quad (17.68)$$

Агар эластиклик кучининг йўналиши билан нуқтанинг кучиш йуналиши бир хил булса, (17.68) ифодада мусбат ишора олиниши керак.

4. Тортишиш кучининг иши. Моддий нуқтанинг Ер марказидан ρ_0 масофа билан аниқланувчи A нуқтадан ρ_1 масофа билан аниқланувчи B нуқтага кучишида Ернинг $\vec{F}$ тортиш кучининг ишини аниқлаймиз (17.15-расм). Нуқтанинг AB траекто-



17.14-расм.



17.15-расм.

рияда ρ масофа билан аниқланувчи бирон M ҳолатини олайлик. Нуқтанинг бу ҳолатдан элементар кучишини ифодаловчи $d\vec{r}$ векторни расмдагидек $d\rho$ ва унга перпендикуляр бўлган $d\sigma$ ташкил этувчиларга ажратамиз. Равшанки, $\vec{F}$ кучнинг $d\sigma$ кўчишдаги иши 0 га тенг. У ҳолда тортишиш кучининг AB йўлдаги иши

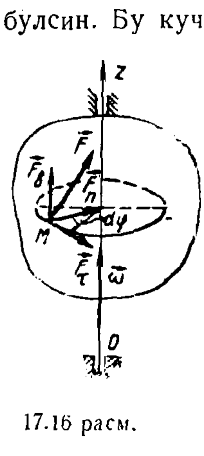
$$A = \int_{\rho_0}^{\rho_1} -Fd\rho$$

ифода билан аниқланади, бунда F—тортишиш кучининг модули. У моддий нуқтанинг массасига тўғри пропорционал, нуқтанинг Ер марказидан узоқлиги квадратига тескари пропорционал, яъни $F = k\frac{m}{\rho^2}$, k — пропорционаллик коэффициенти. Уни аниқлашда моддий нуқта Ер сиртида бўлганда (яъни $\rho = R$, бунда R—Ер радиуси) тортишиш кучи нуқтанинг оғирлиги mg га тенглигидан фойдаланилади. Шундай қилиб, $mg = k\frac{m}{R^2}$ ифодадан $k = gR^2$ ва $F = gR^2 \cdot \frac{m}{\rho^2}$. Натижада:

$$A = -\int_{\rho_0}^{\rho_1} gR^2 \frac{m}{\rho^2}\, d\rho = gR^2 m \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = gR^2 m\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0}\right). \quad (17.69)$$

Ҳосил қилинган ифодадан кўрамизки, тортишиш кучининг иши мусбат ҳам, манфий ҳам булиши мумкин экан. Агар $\rho_1 > \rho_0$ бўлса, яъни нуқта Ер сиртидан узоқлашса, тортишиш кучининг иши манфий, $\rho_1 < \rho_0$ бўлганда, яъни нуқта Ер сиртига яқинлашса, тортишиш кучининг иши мусбат бўлади.

5. Айланувчи жисмга қўйилган кучнинг иши. Қузғалмас Oz ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш уқидан h масофада ётувчи M нуқтасига $\vec{F}$ куч қўйилган бўлсин. Бу кучнинг жисмнинг бирор чекли бурчакка айланишидаги ишини ҳисоблаймиз (17.16-расм). M нуқтанинг траекторияси айланиш ўқига перпендикуляр текисликдаги айланадан иборат. $\vec{F}$ кучнинг табиий координата уқларидаги ташкил этувчиларини $\vec{F}_\tau$, $\vec{F}_n$, $\vec{F}_b$ десак, $\vec{F}_n$ ва $\vec{F}_b$ ташкил этувчилар M нуқтанинг кўчишига перпендикуляр йуналгани учун уларнинг ишлари нолга тенг. Бинобарин, $\vec{F}$ кучнинг ишини ҳисоблаш ўрнига $\vec{F}_\tau$ нинг ишини ҳисоблаш



17.16 расм.

кифоя. M нуқтанинг $dl = hd\varphi$ элементар кучишидаги $\vec{F}_\tau$ кучнинг элементар иши (17.54) га кура қуйидагича булади:

$$dA = F_\tau dl = F_\tau \cdot hd\varphi.$$

Бу тенгликда $F_\tau \cdot h$ катталик $\vec{F}$ кучнинг Oz ўққа нисбатан моментини ифодалайди:

$$m_z(\vec{F}) = F_\tau \cdot h.$$

Бинобарин,

$$dA = m_z(\vec{F}) \cdot d\varphi, \qquad (17.70)$$

яъни, *қўзғалмас уқ атрофида айланувчи жисмга қўйилган кучнинг жисмнинг $d\varphi$ элементар бурчакка айланишидаги элементар иши мазкур кучнинг айланиш уқига нисбатан моменти билан элементар айланиш бурчагининг купайтмасига тенг.*

$\vec{F}$ кучнинг жисм чекли φ бурчакка айлангандаги иши (17.70) ни интеграллаш билан аниқланади:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} m_z(\vec{F}) \cdot d\varphi, \qquad (17.71)$$

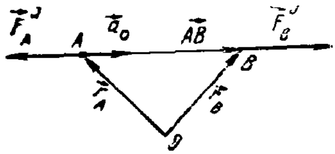
бунда φ_0 ва φ жисмнинг бошланғич ва охирги пайтдаги ҳолатини аниқловчи бурчаклардир. Агар $m_z(F) = \text{const}$ бўлса, (17.71) дан

$$A = m_z(\vec{F})(\varphi - \varphi_0) \qquad (17.72)$$

келиб чиқади.

6. Система ички кучларининг иши. Системанинг икки ихтиёрий A ва B нуқталарига $\vec{F}_A^I$ ва $\vec{F}_B^I$ ички кучлар таъсир этсин (17.17-расм). Маълумки, $\vec{F}_A^I = -\vec{F}_B^I$. Бу икки кучнинг системанинг бирор кўчишидаги элементар ишлари йиғиндиси (17.56) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$\sum dA^I = \vec{F}_A^I \vec{v}_B dt + \vec{F}_B^I \vec{v}_B dt = \\ = \vec{F}_B^I (\vec{v}_B - \vec{v}_A) dt.$$



17·17-расм.

Расмдан $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}$; $\overline{AB}$ вектор йуналишини $\vec{a}_0$ бирлик вектор билан аниқласак, $\vec{r}_B = \vec{r}_A + AB \cdot \vec{a}_0$ ифодага эга бўламиз. У ҳолда:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(AB)}{dt}\cdot\vec{a}_0 + AB\cdot\frac{d\vec{a}_0}{dt}.$$

Бундан

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \frac{d(AB)}{dt}\vec{a}_0 + AB\cdot\frac{d\vec{a}_0}{dt}.$$

Натижада

$$\sum dA^i = \vec{F}_B^i\cdot\left(\frac{d(AB)}{dt}\vec{a}_0 + AB\cdot\frac{d\vec{a}_0}{dt}\right)\cdot dt \qquad (17.73)$$

ҳосил бўлади. $\vec{a}_0$ бирлик вектор бўлгани учун $\frac{d\vec{a}_0}{dt}$ вектор $\vec{a}_0$ га бинобарин, $\vec{F}_B^i$ га перпендикуляр бўлади. Шунинг учун

$$\vec{F}_B^i\cdot\frac{d\vec{a}_0}{dt} = 0.$$

Буни эътиборга олиб, (17.73) дан қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\sum dA^i = F_B^i\cdot d(AB). \qquad (17.74)$$

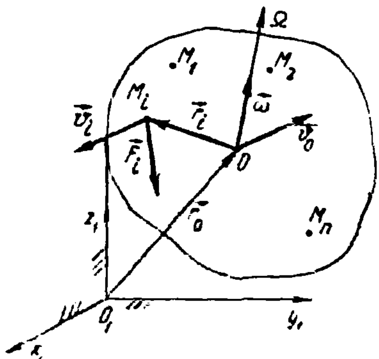
(17.74) дан кўрамизки, ҳаракат вақтида системанинг A ва B нуқталари орасидаги масофа ўзгарувчи бўлса, ички кучлар ишларининг йиғиндиси нолдан фарқли, AB масофа ўзгармас бўлганда (бундай система ўзгармас система дейилади) ички кучлар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

89- §. Ихтиёрий кучлар системасининг иши

Эркин қаттиқ жисмнинг $M_1, M_2, \ldots, M_n$ нуқталарига мос равишда $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ кучлар системаси қўйилган бўлсин (17.18-расм). Бу кучларнинг бирор $[t_0, t]$ вақт оралиғидаги ишларининг йиғиндисини ҳисоблаймиз. (17.59) формулага асосан $\vec{F}_i$ кучнинг иши A_i ни аниқлаймиз:

$$A_i = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i\cdot\vec{v}_i\cdot dt.$$

Бунда $\vec{v}_i$ билан M_i нуқтанинг тезлиги белгиланган. Қутб сифатида жисмнинг инерция маркази O нуқтани олсак, эр-



17.18-расм.

кин жисм нуқтасининг тезлигини аниқлаш формуласига кўра $\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ булади. Бунда $\vec{v}_O$ — жисм инерция марказининг тезлиги, ω — жисмнинг қутбга нисбатан сферик ҳаракатининг оний бурчак тезлик вектори, $\vec{r}_i$ — O нуқтани M_i нуқта билан туташтирувчи вектор. У ҳолда

$$A_i = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)dt = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i \vec{v}_O dt + \int_{t_0}^{t} \vec{\omega}(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)dt$$

бўлади. Берилган кучлар системасининг $t - t_0$ вақт оралигидаги иши система кучларининг ушбу вақт оралигидаги ишларининг йиғиндисига тенг. Чунончи, бу ишни A орқали белгиласак,

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i \vec{v}_0 dt + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \omega(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)dt = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_O \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \right) dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \vec{\omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) dt$$

булади. $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R}$ — берилган кучлар системасининг бош вектори, $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = M_O$ — берилган кучлар системасининг O нуқтага нисбатан бош моментидан иборат. У ҳолда

$$A = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_O \vec{R} dt + \int_{t_0}^{t} \vec{\omega} \vec{M}_O dt \qquad (17.75)$$

ҳосил булади. (17.75) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи жисмнинг унда олинган қутб билан бирликда илгарилама кўчишида жисмга қўйилган кучлар бош векторининг ишини, иккинчи қушилувчи эса, жисмнинг қутб атрофида айланма кўчишидаги барча кучлардан қутбга нисбатан олинган бош моментнинг ишини ифодалайди.

(17.75) ифодадан фойдаланиб, хусусий ҳол сифатида, жисмнинг илгарилама ($\omega = 0$), O нуқта атрофида ёки O нуқтадан утувчи ўқ атрофида айланма ҳаракатларида унга қўйилган кучларнинг ишини хисоблаш формулаларини ҳосил қилиш мумкин.

90-§. Моддий нуқта, механик система ва қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси

Моддий нуқта массасининг нуқта тезлиги квадратига кўпайтмасининг ярми билан ўлчанувчи скаляр катталик моддий нуқта кинетик энергияси дейилади. Таърифга биноан, моддий нуқта кинетик энергияси $T = \frac{mv^2}{2}$ муносабат билан ифодаланади.

Механик системани ташкил этувчи моддий нуқталар кинетик энергияларининг йиғиндиси система кинетик энергияси дейилади.

Система ҳар бир M_i нуқтасининг массасини m_i, тезлигини $\vec{v}_i$ десак, таърифга биноан, унинг кинетик энергияси

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} \qquad (17.76)$$

формула билан аниқланади.

Қаттиқ жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда уни бир неча моддий нуқталардан ташкил топган деб қараб, (17.76) формуладан фойдаланиш мумкин.

Агар жисм илгарилама ҳаракатда булса, унинг ҳамма нуқталари бир хил тезликка эга бўлади. Илгарилама ҳаракатдаги жисм массалар маркази бўлмиш C нуқта тезлигини $\vec{v}_C$ десак, $\vec{v}_i = \vec{v}_C$. У ҳолда, (17.76) дан қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$T_{илг} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_C^2}{2} = M\frac{v_C^2}{2}. \qquad (17.77)$$

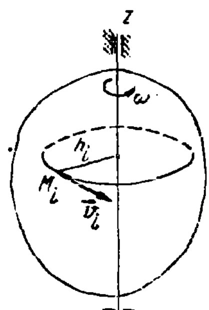
Қаттиқ жисм қўзғалмас Oz ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлсин. Жисм M_i нуқтасидан (17.19-расм) айланиш ўқигача бўлган масофани h_i билан белгиласак, $v_i = h_i\omega$ уринлидир Шунга кўра (17.76)

$$T_{айл} = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 \cdot \frac{\omega^2}{2}$$

кўринишда ёзилади. Бунда $\sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = I_z$; бинобарин,

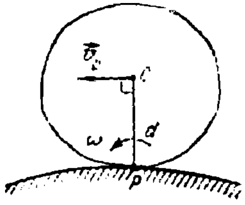
$$T_{айл} = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \qquad (17.78)$$

яъни *қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг кинетик энергияси унинг айланиш уқига нисбатан инерция моментининг ярмини жисм бурчак тезлиги квадратига кўпайтирилганига тенг.*



17.19-расм.

Маълумки, жисмнинг текис параллел ҳаракатини тезликлар оний марказидан



17.20-расм.

утувчи ўқ атрофида оний айланма ҳаракат деб қараш мумкин. Текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг тезликлар оний марказини P, бу нуқтадан ўтувчи уққа нисбатан инерция моментини J_{Pz} билан белгиласак (17.20-расм), (17.78) га асосан:

$$T_{т.п} = \frac{1}{2} I_{Pz} \cdot \omega^2.$$

Штейнер теоремасиға кўра

$$I_{Pz} = I_{Cz} + Md^2,$$

бунда I_{Cz} — жисмнинг масса марказидан ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини, M — жисм массасини, $d = PC$ — уқлар орасидаги масофани ифодалайди.

У ҳолда, текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблаш учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$T_{т.п.} = \frac{1}{2} I_{Cz}\omega^2 + \frac{1}{2} Md^2\omega^2$$

ёки

$$T_{т.п} = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \cdot \omega^2. \qquad (17.79)$$

(17.79) дан кўрамизки, *текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини жисм массалар марказининг кинетик энергияси билан жисмнинг массалар марказидан утувчи ўқ атрофида айланма ҳаракатидаги кинетик энергиясининг йиғиндиси деб қараш мумкин.*

Халқаро бирликлар системаси (СИ) да кинетик энергия $\frac{кг \cdot м^2}{с^2} = Н \cdot м$ да ўлчанади.

91-§. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси

Жисмнинг сферик ҳаракатини ҳар онда қузғалмас нуқтадан утувчи оний ўқ атрофида айланма ҳаракат деб қараш мумкин. Бинобарин, оний ўқни l, жисмнинг оний ўққа нисбатан инерция моментини I_l десак, (17.78) формулага биноан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$T_{сф} = \frac{1}{2} I_l\omega^2. \qquad (17.80)$$

Сферик ҳаракатдаги жисм бурчак тезлиги векторининг O қўзғалмас нуқтадан ўтувчи x, y, z уқлардаги проекцияларига кўра унинг кинетик энергиясини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарайлик. Жисмни массалари Δm_i бўлган бўлакчаларга ажратиб, унинг кинетик энергиясини

$$T = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \int\limits_{(M)} v^2 dm$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бунда $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ ўринли булганидан

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{(M)} \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot dm \tag{17.81}$$

формулани ёзиш мумкин. (17.81) да интеграл бутун жисм массаси M бўйича олинган.

Сферик ҳаракатдаги жисм нуқтасининг O қўзғалмас нуқтага нисбатан радиус-векторини $\vec{r}$ десак, Эйлер формуласига кўра: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Буни (17.81) га қўямиз:

$$T_{c\phi} = \frac{1}{2} \int\limits_{(M)} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm.$$

Бунда $(\vec{\omega} \times \vec{r})(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}\, [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] = \vec{\omega}\, [\vec{\omega} r^2 - \vec{r}\, (\vec{\omega}\vec{r})] =$
$= \omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\vec{r})^2$ бўлишини эътиборга олиб,

$$T_{c\phi} = \frac{1}{2} \int\limits_{(M)} [\omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\vec{r})^2]\, dm \tag{17.82}$$

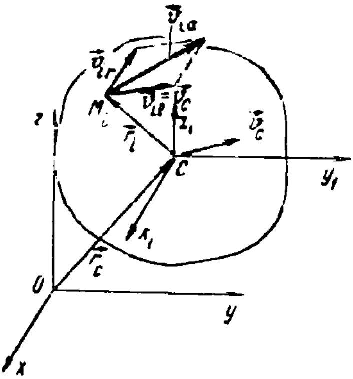
ифодани ҳосил қиламиз. Жисмнинг қўзғалмас O нуқтасини координаталар боши деб олиб, қўзғалмас ортогонал $Oxyz$ саноқ системасини киритамиз ва (17.82) ифодани ушбу системага нисбатан ёзсак:

$$T_{c\phi} = \frac{1}{2} \int\limits_{(M)} [(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x^2 + y^2 + z^2) -$$
$$- (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)^2]\, dm$$

ёки

$$2 \cdot T_{c\phi} = \int\limits_{(M)} \omega_x^2 (y^2 + z^2)\, dm + \int\limits_{(M)} \omega_y^2 (x^2 + z^2)\, dm +$$
$$+ \int\limits_{(M)} \omega_z^2 (x^2 + y^2)\, dm - 2 \int\limits_{(M)} \omega_x \omega_y xy dm - 2 \int\limits_{(M)} \omega_x \omega_z xz dm -$$
$$- 2 \int\limits_{(M)} \omega_y \omega_z yz dm.$$

Буни жисмнинг координата ўқларига нисбатан инерция моментлари I_x, I_y, I_z ва марказдан қочувчи инерция моментлари I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} орқали ифодалаймиз:



17.21-расм.

$$T_{сф} = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{xz}\omega_x\omega_z - 2I_{yz}\omega_y\omega_z). \tag{17.83}$$

92-§. Кёниг теоремаси

Механик системанинг қўзғалмас $Oxyz$ системага нисбатан ҳаракатидаги кинетик энергиясини аниқлайлик.

C нуқта берилган механик системанинг массалар маркази булсин (17.21-расм) C нуқтада $Oxyz$ системага нисбатан илгарилама ҳаракат қилувчи ёрдамчи $Cx_1y_1z_1$ координаталар системасини оламиз. У ҳолда берилган механик системанинг $Oxyz$ системага нисбатан абсолют ҳаракатини массалар маркази билан бирликда кучирма ҳаракат ва C нуқтадан ўтувчи $Cx_1y_1z_1$ системага нисбатан нисбий ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин. Системанинг кинетик энергиясини ифодаловчи (17.76) ифодани

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{ia} \cdot \vec{v}_{ia}$$

кўринишда ёзамиз. Бунда $\vec{v}_{ia}$ — M_i нуқтанинг абсолют тезлиги. Агар ушбу нуқтанинг нисбий ва кучирма тезликларини мос равишда $\vec{v}_{ir}$, $\vec{v}_{ie}$ орқали белгиласак, маълумки $\vec{v}_{ia} = \vec{v}_{ir} + \vec{v}_{ie}$ бўлади. Шунинг учун

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{ir} + \vec{v}_{ie})(\vec{v}_{ir} + \vec{v}_{ie}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{ir} \cdot \vec{v}_{ir} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{ie} \vec{v}_{ie} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ir} \vec{v}_{ie}$$

ифодани ёзиш мумкин. $Cx_1y_1z_1$ система илгарилама ҳаракат қилгани учун унинг барча нуқталари тезликлари C нуқтанинг $\vec{v}_C$ тезлигига тенг: $\vec{v}_{ie} = \vec{v}_C$. Натижада

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{ir} \vec{v}_{ir} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ir} \cdot \vec{v}_C$$

ҳосил бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи йиғинди берилган механик системанинг $Cx_1y_1z_1$ ўқларга нисбатан га қўйилган ташқи ва ички кучлар қувватлари орқали ифодалаш мумкин:

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{n} W_i^E+\sum_{i=1}^{n} W_i^I. \qquad (17.87)$$

Ўзгармас система ёки қаттиқ жисм учун ички кучлар ишларининг йиғиндиси нолга тенг булади. Бинобарин, узгармас система ва қаттиқ жисм кинетик энергиясининг узгариши ҳақидаги теоремани (17.85) — (17.87) га кура қуйидаги куринишларда ёзиш мумкин:

$$dT=\sum_{i=1}^{n} dA_i^E, \qquad (17.85\ а)$$

$$T-T_0=\sum_{i=1}^{n} A_i^E, \qquad (17.86\ а)$$

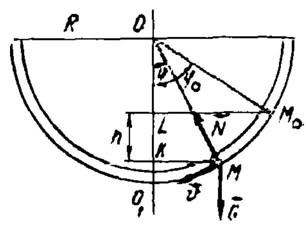
$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{n} W_i^E, \qquad (17.87\ а)$$

Шунингдек, моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема (17.86) га биноан қуйидагича ифодаланади:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum_{i=1}^{n} A_i. \qquad (17.88)$$

Система ҳаракат миқдори ва кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремаларни таҳлил қилиб кўрамизки, ҳаракат улчови сифатида киритилган ҳаракат миқдори ва кинетик энергия тушунчалари бир-биридан принципиал фарқ қилади: фақат ички кучлар ҳисобига система ҳаракат миқдорини узгартириб бўлмайди, унинг кинетик энергиясини узгартириш мумкин.

52-масала. Вертикал текисликда жойлашган, радиуси R бўлган, айлана шаклида эгилган най ичида силлиқ оғир M шарча ҳаракатланади (17.22-расм). Бошланғич пайтда шарча M_0 ҳолатда бўлиб, уни айлана маркази билан туташтирувчи радиус ва вертикал чизиқ орасидаги бурчак φ_0 га тенг. Шарча шу ҳолатдан бошланғич тезликсиз қўйиб юборилса, $O_1\widehat{OM}=\varphi$ булган пайтда шарча қандай тезликка эга бўлади? Шарча моддий нуқта деб қаралсин.



17.22-расм.

Ечиш. Моддий нуқта кинетик энергиясининг узгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (17.88) кўринишдаги тенгламадан фойдаланамиз:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_i. \qquad (1)$$

M нуқтага оғирлик кучи $\vec{G} = m\vec{g}$ ва найнинг нормал реакцияси $\vec{N}$ таъсир этади. Шарча M_0 ҳолатдан M га ўтганда унга қўйилган кучлар ишларининг йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\sum A_i = A_G + A_N.$$

Бунда $\vec{N} \perp \vec{v}$ бўлгани учун $A_N = 0$. $\vec{G}$ оғирлик кучининг ишини (17.67) формула билан аниқлаймиз:

$$A_G = mgh = mg\,(OK - OL) = mgR\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Шундай қилиб

$$\sum A_i = mgR\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Масала шартига кура $v_0 = 0$ эканлигини эътиборга олиб, топилган иш қийматини (1) га қуямиз:

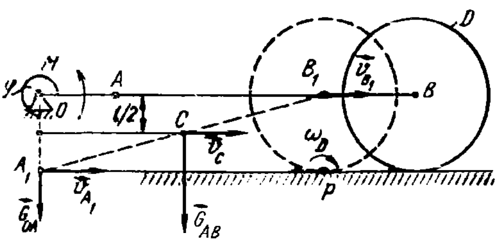
$$\frac{mv^2}{2} = mgR\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Бу ифодадан v тезлик миқдорини аниқлаймиз:

$$v = \sqrt{2gR\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}.$$

Бу ифода $\cos\varphi > \cos\varphi_0$ бўлганда маънога эга.

53- масала. OA кривошипга қўйилган узгармас M момент таъсирида 17.23- расмда курсатилган тинч ҳолатда турган механизм ҳаракатга келтирилади. Кривошип соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда $\varphi = 3\pi/2$ радиан бурчакка айланган пайтда бурчак тезлиги қандай булади? OA ва AB кривошип массалари $m_{OA} = m$, $m_{AB} = 4m$ бўлган бир жинсли стержень. сирпанмасдан думаловчи D ғилдирак эса $m_D = 8m$ массали бир жинсли диск деб қаралсин. Ишқаланишлар эътиборга олинмасин. Қуйидагилар берилган: $OA = l$, $AB = 4l$, $r = l$, $M = 3mgl$.



17.23- расм.

Ечиш. OA кривошип $\varphi=3\pi/2$ рад. бурчакка айланганда механизм расмда пунктир чизиқ билан кўрсатилган ҳолатни эгаллайди; бунда A ва B нуқталар, мос равишда A_1 ва B_1 га ўтади. OA кривошип, AB шатун ва D ғилдиракдан иборат ўзгармас системанинг бошланғич ҳолатдан кейинги ҳолатга ўтишида кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг (17.86 а) кўринишдаги ифодасидан фойдаланамиз:

$$T-T_0=\sum_{i=1}^{n} A_i^E. \tag{1}$$

Бошланғич пайтда система тинч ҳолатда бўлгани учун унинг бошланғич кинетик энергияси нолга тенг: $T_0=0$.

Системанинг кривошип $\varphi=3\pi/2$ бурчакка бурилган ҳолатдаги кинетик энергиясини ҳисоблаймиз. (17.76) га кўра

$$T=T_{OA}+T_{AB}+T_D, \tag{2}$$

бунда T_{OA}, T_{AB}, T_D орқали OA кривошип, AB шатун ва D ғилдирак кинетик энергиялари белгиланган.

OA кривошип қўзғалмас O ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун T_{OA} ни ҳисоблашда (17.78) формуладан фойдаланамиз:

$$T_{OA}=\frac{1}{2}I_O\omega^2,$$

бу ерда ω — кривошипнинг кейинги пайтдаги бурчак тезлиги.

Маълумки, $I_O=\frac{1}{3}ml^2$. Шунинг учун

$$T_{OA}=\frac{1}{6}ml^2\omega^2. \tag{3}$$

AB шатун умуман текис параллел ҳаракат қилади. Бироқ $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ ҳолатда AB шатун оний илгарилама ҳаракатда бўлади, чунки $v_{A_1}=v_{B_1}=v_C$. Бинобарин, T_{AB} (17.77) га кўра аниқланади:

$$T_{AB}=\frac{1}{3}m_{AB}\cdot v_C^2,$$

бунда $v_{A_1}=\omega\cdot OA_1=\omega l$, $v_C=v_{A_1}$, $m_{AB}=4m$ бўлишини ҳисобга олсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$T_{AB}=2ml^2\omega^2. \tag{4}$$

Текис параллел ҳаракатдаги D диск кинетик энергиясини (17.79) формула билан аниқлаймиз:

$$T_D=\frac{1}{2}m_Dv_{B_1}^2+\frac{1}{2}I_B\omega_D=\frac{1}{2}m_Dv_{B_1}^2+\frac{1}{4}m_Dr^2\omega_D^2=$$
$$=\frac{1}{2}m_Dv_{B_1}^2+\frac{1}{4}m_Dv_{B_1}=\frac{3}{4}m_Dv_{B_1}^2.$$

Бунда $m_D = 8m$, $v_{B_1} = v_{A_1} = \omega l$ бўлганидан

$$T_D = 6ml^2\omega^2. \qquad (5)$$

(3) — (5) ни (2) га қўямиз:

$$T = \frac{1}{6} ml^2\omega^2 + 2ml^2\omega^2 + 6ml^2\omega^2 = \frac{49}{6} ml^2\omega^2. \qquad (6)$$

Системага қуйилган ташқи кучлардан M момент, кривошип ва шатун оғирлик кучлари $\vec{G}_{OA}$, $\vec{G}_{AB}$ нинг иши нолдан фарқли; қолган кучларнинг ишлари эса нолга тенг.

Бинобарин,

$$\sum A_i = A_M + A_{G_{OA}} + A_{G_{AB}},$$

Бунда $A_M = M \cdot \varphi = 3mgl\varphi$, $A_{G_{OA}} = G_{OA} \cdot \frac{l}{2} = mg\frac{l}{2}$,

$$A_{G_{AB}} = G_{AB} \cdot \frac{l}{2} = 4mg \cdot \frac{l}{2} = 2mgl$$

бўлганидан узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

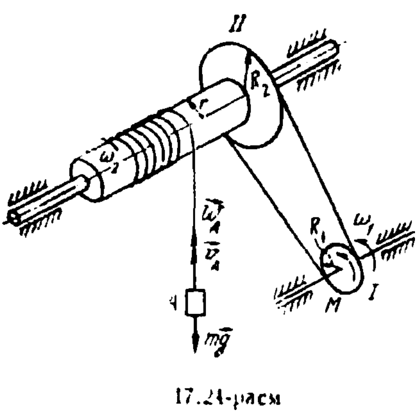
$$\sum A_i = 3mgl \cdot \frac{3\pi}{2} + mg\frac{l}{2} + 2mgl = 16{,}63mgl. \qquad (7)$$

(6) ва (7) ни (1) га қўямиз:

$$\frac{49}{6} ml^2\omega^2 = 16{,}63mgl.$$

Бу тенгликдан қуйидаги келиб чиқади: $\omega \approx 1{,}42\sqrt{\frac{g}{l}}$.

54-масала. Массаси m бўлган A юк чиғириқ воситасида кўтарилади (17.24-расм). Чиғириқ тасмали узатма ёрдамида ҳаракатга келтирилади; бу узатма чиғириқ валига ўрнатилган II шкив билан мотор валидаги шкив I ни бирлаштиради. I шкивга ўзгармас M айлантирувчи момент қуйилган. Чиғириқ барабанининг радиуси r, I шкив радиуси R_1, II шкив радиуси R_2, мотор айланувчи қисмларининг инерция моменти I_1, чиғир ва барабаннинг биргаликдаги инерция моменти I_2 деб олиб, A юкнинг тезланиши топилсин. Тасманинг оғирлиги ва валлар ўқларидаги ишқаланишлар ҳисобга олинмасин.



17.24-расм

Ечиш. Ўзгармас система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг (17.87 *а*) кўринишдаги ифодасидан фойдаланамиз:

$$\frac{dT}{dt}=\sum W_i^E. \tag{1}$$

Система кинетик энергиясини ҳисоблаймиз:

$$T=T_1+T_2+T_A,$$

бу ерда $T_1 - I$ валнинг (шкиви билан) кинетик энергияси, T_2 — чиғириқ ва барабаннинг кинетик энергияси, $T_A - A$ юкнинг кинетик энергияси.

A юк илгарилама ҳаракатда бўлгани учун: $T_A=\frac{1}{2}mv_A^2$. T_1 ва T_2 (17.78) формулага биноан топилади:

$$T_1=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2,\quad T_2=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2.$$

Бунда тасма ҳамма нуқталарининг тезликлари миқдор жиҳатдан тенг булгани учун $\omega_1R_1=\omega_2R_2$ ўринлидир. Шунингдек, $v_A=\omega_2r$. Бу тенгликлардан $\omega_2=\frac{v_A}{r}$, $\omega_1=\frac{R_2}{R_1}\omega_2=\frac{R_2}{r\cdot R_1}v_A$ келиб чиқади. Натижада

$$T=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2+\frac{1}{2}mv_A^2$$

ёки

$$T=\frac{1}{2}\frac{I_1R_2^2+I_2R_1^2+mr^2R_1^2}{r^2R_1^2}v_A^2$$

ҳосил бўлади. Охирги ифодадан v_A ни ўзгарувчи деб, вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{I_1R_2^2+I_2R_1^2+mr^2R_1^2}{r^2\cdot R_1^2}\cdot v_A\cdot w_A. \tag{2}$$

Системага қўйилган ташқи кучлар орасида фақат M момент билан A юк оғирлик кучи $G=mg$ нинг қуввати нолдан фарқли, қолган кучларнинг қуввати нолга тенг.
Бинобарин,

$$\sum W_i^E=M\omega_1-mgv_A=\left(M\cdot\frac{R_2}{rR_1}-mg\right)v_A$$

ёки

$$\sum W_i^E=\frac{MR_2-mgrR_1}{r\cdot R_1}v_A. \tag{3}$$

(2) ва (3) ни (1) га қўямиз:

$$\frac{I_1R_2^2+I_2R_1^2+mr^2R_1^2}{r^2\cdot R_1^2}v_Aw_A=\frac{MR_2-mgrR_1}{r\cdot R_1}\cdot v_A.$$

Бу тенгликдан A юк тезланиши аниқланади:

$$w_A = \frac{(MR_2 - mgrR_1)rR_1}{I_1R_2^2 + I_2R_1^2 + mr^2R_1^2}.$$

94-§. Куч майдони. Куч функцияси. Потенциал кучлар ва уларнинг хоссалари

Моддий нуқта ва механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузишда таъсир қилувчи кучлар вақтга, координаталарга, тезликка боғлиқ бўлиши мумкинлиги курсагилган эди. Кучлар қандай ўзгарувчиларга боғлиқ булмасин, фазонинг улар таъсири мавжуд қисми *куч майдонини* ҳосил қилади. Куч майдонига киритилган моддий нуқта ёки механик системага таъсир қилувчи кучлар қандай ўзгарувчиларнинг функцияси эканлигига қараб куч майдонлари фарқланади. Масалан, гравитацион кучлар майдонини олайлик. Ҳар бир жисм фазода шундай хусусият уйғотадики, бундай фазога киритилган иккинчи бир жисмга унинг координаталарига боғлиқ бўлган куч — гравитацион куч таъсир қила бошлайди Бундай ҳолларда биринчи жисм гравитацион кучлар майдонини ҳосил килди, дейилади. Иккинчи жисм эса гравитацион кучлар майдонида ҳаракати ўрганилаётган жисм бўлади. Иккинчи мисол сифатида магнит майдонни олайлик. Маълумки, токли ўтказгич фазода шундай хусусият уйғотадики, бундай фазода ҳаракатланувчи зарядланган ҳар қандай жисмга куч таъсир қила бошлайди. Бу куч жисмнинг тезлигига боғлиқ бўлади. Токли ўтказгич ҳосил қилган куч майдони магнит майдонни ифодалайди.

Куч майдонлари стационар ва ностационар бўлиши мумкин. Агар майдон кучлари, бу майдонга киритилган жисмларга боғлиқсиз равишда вақтнинг бирор функцияси сифатида ўзгарса, бундай майдон *ностационар майдон* бўлади. Ностационар майдон кучлари вақтнинг бирор функцияси сифатида ифодаланади. *Стационар майдон* кучлари эса вақтга боғлиқ бўлмайди.

Назарий механикада фақат координаталаргагина боғлиқ бўлган кучлар майдони муҳим аҳамиятга эга. Бундай кучлар учун *куч функцияси* тушунчаси киритилади. Проекциялари F_x, F_y, F_z бўлган ва бирор $M(x, y, z)$ нуқтага таъсир қилувчи $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ кучнинг куч функцияси деб қуйидаги

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_z \tag{17.89}$$

тенгламалардан аниқланувчи $U = U(x, y, z)$ функцияга айтилади. Агар берилган куч учун куч функцияси мавжуд бўлса, бундай кучлар майдони *потенциал майдон* дейилади, кучларнинг ўзига эса *потенциал кучлар* дейилади. Равшанки, ҳар қандай $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ куч потенциал куч, унинг майдони потенциал майдон булавермайди. *Берилган $\vec{F}=\vec{F}(x, y, z)$ куч потенциал куч бўлиши учун*

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y},\quad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z} \tag{17.90}$$

тенгламаларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир. Зарурлигини исботлайлик. $\vec{F}=\vec{F}(x, y, z)$ потенциал куч булиб, $U=U(x, y, z)$ функция унинг учун куч функцияси бўлсин. У ҳолда бу функция (17.89) муносабатларни қаноатлантиради. (17.89) тенгламаларни дифференциаллаб,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F_x}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}=\frac{\partial F_z}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}=\frac{\partial F_x}{\partial z},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}=\frac{\partial F_y}{\partial z},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}=\frac{\partial F_z}{\partial y}$$

ифодаларни ҳосил қиламиз. Бунда $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}$ бўлгани учун

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\quad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z},\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}$$

ҳосил бўлади, яъни берилган кучнинг потенциал куч бўлишидан (17.90) муносабатнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. (17.90) муносабатнинг етарли шарт эканлигини ҳам исбот қилиш мумкин.

U функция дифференциал тенгламаларнинг ечими сифатида аниқланганидан, у ўзгармас сон аниқлигида топилади.

Механик система ва бу системага таъсир қилувчи $\vec{F}=\vec{F}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{F}_2=\vec{F}_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $\vec{F}_n=\vec{F}_n(x_n, y_n, z_n)$ кучлар системаси берилсин. Бу *кучлар системасининг куч функцияси* деб қуйидаги тенгламалардан аниқланувчи $U=U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ функцияга айтилади:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=F_{ix},\quad \frac{\partial U}{\partial y_i}=F_{iy},\quad \frac{\partial U}{\partial z_i}=F_{iz}\quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Берилган кучлар системаси учун куч функцияси мавжуд бўлса, система *потенциал кучлар системасини*, улар ҳосил қилган майдон эса *потенциал майдонни* ташкил қилади. Берилган кучлар системаси потенциал майдон ҳосил қилиши учун

$$\frac{\partial F_{ix}}{\partial y_i}=\frac{\partial F_{iy}}{\partial x_i},\quad \frac{\partial F_{iy}}{\partial z_i}=\frac{\partial F_{iz}}{\partial y_i},\quad \frac{\partial F_{iz}}{\partial z_i}=\frac{\partial F_{iz}}{\partial x_i},\quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

муносабатларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Стационар потенциал майдонни ташкил қилувчи кучлар таъсиридаги механик система *консерватив система* дейилади.

Потенциал кучларнинг қуйидаги *хоссалари* мавжуд:

1-хосса. Проекциялари F_x, F_y, F_z бўлган $\vec{F}(x, y, z)$ *куч потенциал куч булити учун*

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (17.91$$

ифода куч функциясининг тулиқ дифференциали бўлиши зарур ва етарлидир. Ҳақиқатан, $\vec{F}$ куч потенциал куч бўлса, унинг учун куч функцияси $U(x, y, z)$ мавжуд бўлиб,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_z$$

булади. Буни эътиборга олиб, (17.91) нинг тулиқ дифференциал эканлигини кўрсатамиз:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU.$$

Аксинча, агар (17.91) бирор $U(x, y, z)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни $F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU$ булса,

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

ёзиш мумкин. dx, dy, dz дифференциаллар бир-бирига боғлиқ бўлмаганидан охирги тенгликдан

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

келиб чиқади, яъни берилган $\vec{F}$ куч потенциал куч бўлади.

2-хосса. *Потенциал кучнинг бирор оралиқдаги иши бу куч қўйилган нуқта траекториясининг шаклига боғлиқ бўлмай, нуқтанинг бошланғич ва сунгги вазиятларигагина боғлиқ.*

Ҳақиқатан, $F(x, y, z)$ потенциал кучнинг бирор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ва $M(x, y, z)$ нуқталар оралигидаги иши (17.58) формулага асосан

$$A = \int\limits_{\smile M_0 M} (E_x dx + E_y dy + F_z dz)$$

тенглик билан аниқланади. Потенциал кучларнинг 1-хоссасига асосан, $\vec{F}$ куч потенциал куч бўлгани учун қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A = \int\limits_{\smile M_0 M} dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$$

ёки қисқача

$$A = U - U_0. \qquad (17.92)$$

Бундан кўринадики, A ишнинг қиймати U функциянинг M_0 ва M нуқталардаги қийматларигагина боғлиқ, нуқта траекториясининг M_0 ва M орасидаги шаклига боғлиқ эмас.

95-§. Потенциал энергия. Механик энергия ва унинг сақланиш қонуни

$\vec{F}$ потенциал куч майдонида ҳаракатланувчи нуқта бирор M_0 ҳолатдан M ҳолатга утишида бу кучнинг иши (17.92) га кўра $A = U - U_0$ формула билан аниқланиши мумкин. Агар координата бошини нуқтанинг бошланғич M_0 нуқтасида олсак, бу нуқтада $U_0 = 0$ деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда (17.92) ифода

$$A = U(x, y, z) = U$$

кўринишни олади. Бундан курамизки, *куч функцияси майдон кучининг нуқта координаталар бошидан майдоннинг берилган нуқтасигача кучгандаги ишини характерлайди.*

Потенциал куч майдонида куч функцияси билан бир қаторда куч майдонининг берилган бирор нуқтасида моддий нуқтадаги энергия запасини ифодаловчи потенциал энергия тушунчаси ҳам киритилади.

Куч майдонининг M нуқтасидаги потенциал энергия деб, майдон кучининг нуқта M ҳолатдан бошланғич M_0 ҳолатга кучишидаги ишини ифодаловчи катталикка айтилади. Потенциал энергияни П билан белгиласак, таърифга биноан

$$\Pi = \int_{M}^{M_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_0 - U.$$

Агар координаталар боши нуқтанинг бошланғич ҳолатида олинса,

$$\Pi = -U \tag{17.93}$$

келиб чиқади, яъни *потенциал куч майдонининг бирор нуқтасидаги потенциал энергия шу нуқтадаги куч функциясининг тескари ишора билан олинган қийматига тенг.*

Потенциал кучлар таъсиридаги механик система учун ҳам потенциал энергия тушунчаси шунга ухшаш киритилади. Агар $U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ функция берилган потенциал кучлар учун куч функцияси бўлса, механик системанинг потенциал энергияси

$$\Pi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = -U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$$

муносабат билан ифодаланади.

Потенциал куч майдонида ҳаракатланувчи моддий нуқта ёки механик система ҳам потенциал, ҳам кинетик энергияга эга бўлиши мумкин. Кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндиси $T + \Pi$ *тўлиқ механик энергия* қисқача, ***механик*** *энергия* деб юритилади. Механик энергия учун қуйидаги теоремалар ўринли булади.

1-теорема. *Потенциал куч майдонида ҳаракатланувчи моддий нуқтанинг механик энергияси узгармас булади,* яъни

$$T + \Pi = \text{const}.$$

Ҳақиқатан, фараз қилайлик, моддий нуқта $\vec{F}$ потенциал куч таъсирида ҳаракатлансин. Нуқтанинг $d\vec{r}$ элементар силжишида $\vec{F}$ кучнинг dA элементар иши қуйидагича булади:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU.$$

Моддий нуқта кинетик энергиясининг узгариши ҳақидаги теоремага асосан $dA = dT$. У ҳолда $dT = dU$ ва $d(T - U) = 0$ ёки $T - U = \text{const}$, ёки $T + \Pi = \text{const}$ ҳосил бўлади.

2-теорема. *Потенциал кучлар майдонида ҳаракатланувчи системанинг механик энергияси ўзгармас бўлади.* Бу теоремани яна бундай баён этиш мумкин: *консерватив системанинг механик энергияси ўзгармас булади.* Бу теореманинг исботи ҳам 1-теореманинг исботига ўхшаш.

Консерватив булмаган моддий нуқта ёки механик системалар учун бу теоремалар ўринли булмайди. Масалан, ҳавода оғирлик кучи таъсирида ҳаракат қилувчи жисмни олайлик. Ҳавонинг жисм ҳаракатига кўрсатадиган қаршилик кучи жисм тезлигига боғлиқ. Бундай жисм кинетик энергиясининг ўзгариши, масалан камайиши, жисм потенциал энергиясининг шу миқдорга ортишига тенг бўлмайди. Бунда кинетик энергиянинг маълум бир қисми иссиқлик энергиясига айланади.

Бу ерда кўриб ўтилган механик энергиянинг сақланиш қонуни энергиянинг сақланиши ҳақидаги табиат умумий қонунининг хусусий ҳоли сифатида, консерватив системаларги нисбатан намоён булаяпти.

Юқорида қараб чиқилган ҳаракат миқдорининг, ҳаракат миқдори моментининг, механик энергиянинг сақланиш қонунлари орасида механик энергиянинг сақланиш қонуни алоҳида урин тутади. Ҳаракат миқдори ва ҳаракат миқдори моменти — булар соф механик катталиклар. Иш, қувват, энергия эса умуман физик катталиклар ҳисобланади. Бу катталикларнинг киритилиши механикани физиканинг бошқа соҳалари билан боғлайди. Бинобарин, ҳаракатнинг ўлчови булмиш механик энергия механик ҳаракатнинг бошқа турдаги ҳаракат формаларига ўтишининг миқдорий томонларини аниқлаш имкониятини беради. Фикримизнинг далили сифатида қуйидаги бир мисолни келтирайлик. Массалари m бўлган икки жисм уларнинг масса марказларини туташтирувчи чизиқ бўйлаб илгарилама, узгармас $\vec{v}$ ва $-\vec{v}$ тезлик билан бир-бирига томон ҳаракатлансин. Бу икки жисмдан иборат системанинг ҳаракат миқдори ва ҳаракат миқдори моменти векторлари

$$\vec{K} = m\vec{v} + (-m\vec{v}) = 0, \quad \vec{L}_0 = \vec{m}_0(m\vec{v}) + \vec{m}_0(-m\vec{v}) = 0$$

бўлади. Бу ҳолда ҳаракат миқдори ва ҳаракат миқдори моменти катталиклари системанинг ҳаракатини характерлай олмайди. Агар бу системанинг кинетик энергиясини оладиган булсак, унинг формуласига тезликнинг квадрати кириб, $T = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} = mv^2$ катталик жисмлар ҳаракатини характерлайди, у система эга булган механик энергияни ифодалайди. Умумий энергиянинг сақланиш қонунига асосан ушбу механик энергия бошқа турдаги энергияга утадиган булса, бу турдаги энергия ана шу mv^2 энергия миқдори билан характерланади.

96-§. Моддий нуқтанинг марказий куч майдонидаги ҳаракати

Маълумки, (85-§) нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракати битта текисликда содир бўлиб, сектор тезлик узгармас булади ва у ҳаракат миқдори моментининг бошланғич қиймати билан аниқланади. Моддий нуқта марказий куч таъсирида ҳаракатланганида ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонуни билан бир қаторда механик энергиянинг сақланиш қонуни ҳам уринли булади. Ҳақиқатан, марказий кучни $\vec{F}(r) = F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ куринишда ёзиб, бу кучнинг элементар ишини аниқлайлик:

$$dA = \vec{F}(r)\,d\vec{r} = \frac{F(r)}{2r} \cdot d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{F(r)}{r}\,dr^2 = F(r)\,dr.$$

$dA = dU$ бўлганидан $dU = F(r)\,dr$ деб ёза оламиз, ундан

$$U = \int F(r)\,dr + \text{const}$$

келиб чиқади. Бундай куч функциясига эга бўлган куч майдони *марказий майдон* дейилади. Марказий майдон учун механик энергиянинг сақланиш қонуни ўринлидир. Бу қонунга кура

$$E = T + \Pi = \frac{mv^2}{2} + \Pi(r) =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \Pi(r) = \text{const} = E_0 \qquad (17.94)$$

ифодани ёзиш мумкин. Бунда E — тулиқ механик энергия, E_0 — тўлиқ механик энергиянинг бошланғич қиймати, T ва Π — мос равишда кинетик ва потенциал энергиялар.

Моддий нуқта ҳаракат миқдори моментини қутб координаталарида ифодалаймиз:

$$l_0 = mrv\sin\alpha = mr^2\dot{\varphi}.$$

Бундан

$$r\dot{\varphi}=\frac{l_0}{mr}. \qquad (17.95)$$

(17.95) ни (17.94) га қўямиз:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{l_0^2}{2mr^2}+\Pi(r)=E_0.$$

Бундан

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0-\Pi(r)\right]-\frac{l_0^2}{m^2r^2}}. \qquad (17.96)$$

Илдиз олдидаги ишора $t=0$ бошланғич пайтда нуқта радиал тезлигининг қутбга томон йўналишига ёки қутбдан бу йўналишга тескари йўналганлигига боғлиқ равишда олинади. Ҳосил қилинган (17.96) тенглама *моддий нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракатининг қутб координаталарига нисбатан дифференциал тенгламасидир.* Уни

$$\frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0-\Pi(r)\right]-\frac{l_0^2}{m^2r^2}}}=dt \qquad (17.97)$$

кўринишда ёзамиз ва интеграллаб,

$$t=\int\frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0-\Pi(r)\right]-\frac{l_0^2}{m^2r^2}}}+C_1 \qquad (17.98)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда C_1 — интеграл доимийси. Шундай қилиб t ни r нинг функцияси сифатида ифодаладик.

Энди (17.95) тенгламага (17.98) дан аниқланувчи $r=r(t)$ муносабатни қўйиб ва бир марта интеграллаб, қутб бурчаги φ ни вақт t нинг функцияси сифатида топиш мумкин. Бунда яна битта C_2 интеграл доимийси пайдо бўлади. Ҳосил бўладиган тенглама (17.98) билан биргаликда нуқта ҳаракатининг қутб координаталаридаги тенгламалари бўлади. Бу тенгламаларда ҳаммаси бўлиб 4 та l_0, E_0, C_1, C_2 ихтиёрий ўзгармас сонлар иштирок этади. Улар бошланғич шартлар асосида аниқланади. Бошланғич шартлар қуйидагича берилиши мумкин:

$$t=0,\ r=r_0,\ \varphi=\varphi_0,\ \dot{r}=\dot{r}_0,\ \dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0.$$

Нуқтанинг қутб координаталаридаги тенгламалари $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ аниқлангандан кейин улардан t ни йўқотиб, траекториянинг қутб координаталаридаги тенгламасини ҳам аниқлаш мумкин.

Умуман, траекториянинг тенгламасини бевосита, $r=r(t)$ ва $\varphi=\varphi(t)$ тенгламаларни топмасдан туриб ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун (17.95) тенгламани

$$d\varphi = \frac{l_0}{mr^2}dt$$

кўринишда ёзиб ва (17.97) ни эътиборга олиб,

$$d\varphi = \frac{l_0}{mr^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - \Pi(r)] - \frac{l_0^2}{m^2r^2}}}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаб,

$$\varphi = \int \frac{\frac{l_0}{r^2}}{\sqrt{2m[E_0 - \Pi(r)] - \frac{l_0^2}{r^2}}} dr + C \qquad (17.99)$$

натижага эришамиз. Нуқтага таъсир қилувчи марказий кучнинг қандай булишига қараб потенциал энергия $\Pi(r)$ аниқланади. Сунгра бу потенциал энергиянинг ифодаси (17.99) га қўйилади. Бир марта интеграллаш натижасида нуқта траекториясининг қутб координаталаридаги тенгламаси ҳосил қилинади. Траекториянинг ифодасидаги 3 та узгармас доимийлар, юқорида айтилганидек, бошланғич шартлар асосида топилади.

97-§. Моддий нуқтанинг Ньютон тортишиш кучи таъсирида ҳаракати

Массаси m бўлган моддий нуқтанинг Ернинг тортиш кучи (марказий куч) таъсиридаги ҳаракатини қараймиз. Бутун олам тортишиш қонунидан фойдаланамиз. $\sigma = \gamma m M$ белгилаш киритиб (бунда M — Ернинг массаси, γ — гравитацион доимий), нуқтага таъсир қилувчи марказий кучни

$$F = -\frac{\sigma}{r^2}$$

куринишда ёзамиз. Бу кучнинг куч функцияси

$$U(r) = \int F(r)\,dr + C = -\int \frac{\sigma}{r^2}dr + C = \frac{\sigma}{r} + C,$$

потенциал энергия эса

$$\Pi(r) = -\frac{\sigma}{r} - C$$

бўлади. $r = \infty$ да $\Pi(r) = 0$ бўлсин. У ҳолда охирги тенгликдан $C = 0$ келиб чиқиб,

$$\Pi(r) = -\frac{\sigma}{r}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Потенциал энергиянинг бу ифодасини (17.99) га қуйиб,

$$\varphi = \int \frac{l_0/r^2}{\sqrt{2m\left(E_0 + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{l_0^2}{r^2}}}\, dr + C \tag{17.100}$$

кўринишдаги траектория тенгламасини оламиз. r ўзгарувчини $\xi = \frac{m\alpha}{l_0} - \frac{l_0}{r}$ қилиб алмаштирамиз. $d\xi = \frac{l_0}{r^2}dr$ булади. У ҳолда янги узгарувчи орқали (17.100) тенглама

$$\varphi = \int \frac{d\xi}{\sqrt{A - \xi^2}} + C \tag{17.101}$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда $A = 2mE_0 + \frac{m^2\alpha^2}{l_0^2}$ белгилаш қабул қилинган. (17,101) нинг ечими

$$\varphi = \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{A}} + C \quad \text{ёки} \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{\xi}{\sqrt{A}}\right) + C_1, \quad C_1 = C - \frac{\pi}{2}$$

булади. Энди r ўзгарувчига ўтамиз:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\frac{l_0}{r} - \frac{m\alpha}{l_0}}{\sqrt{2mE_0 + \frac{m^2\alpha^2}{l_0^2}}}\right) + C_1.$$

Бу ифодани

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\frac{l_0^2}{m\alpha} - r}{r\sqrt{1 + \frac{2E_0 l_0^2}{m\alpha^2}}}\right) + C_1$$

куринишда ёзиш мумкин. Бунда

$$p = \frac{l_0^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E_0 l_0^2}{m\alpha^2}} \tag{17.102}$$

белгилашлар киритсак,

$$\cos(\varphi - C_1) = \frac{p - r}{er}$$

ҳосил булади. Қутб координаталари системасининг укини $\cos(\varphi - C_1) = \cos\varphi$ тенглик бажариладиган қилиб олсак, охирги ифодадан траекториянинг қуйидаги тенгламаси келиб чиқади:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}. \tag{17.103}$$

(17.103) конус кесимларнинг қутб координаталаридаги тенгламасини ифодалайди. e га *эксцентриситет*, p га эса *конус* *кесимнинг параметри* дейилади. Аналитик геометриядан маълумки эксцентриситетнинг қандай булишига қараб (17.103) тенглама айланани ($e = 0$), эллипсни ($e < 1$), параболани ($e = 1$) ёки гиперболани ($e > 1$) ифодалайди. Шундай қилиб $e < 1$ булганда моддий нуқтанинг Ерга нисбатан ҳаракатидаги траекторияси айлана ёки эллипсдан иборат бўлиши, яъни у Ернинг сунъий йулдоши сифатида ҳаракатланиши мумкин.

Энди қандай шартлар бажарилганида $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$ булишини курайлик. (17.102) белгилашга кўра

$$e^2 = 1 + \frac{2E_0 l_0^2}{m\sigma^2}.$$

Бундаги механик энергиянинг бошланғич қиймати E_0 қуйидаги тенгликдан топилади:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi(r_0) = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{\sigma}{r_0}.$$

Бу ифодани олдинги тенгликка қўямиз:

$$e^2 - 1 = \frac{2l_0^2}{m\sigma^2}\left(\frac{mv_0^2}{2} - \frac{\sigma}{r_0}\right)$$

ёки

$$(e+1)(e-1) = \frac{l_0^2}{\sigma^2}\left(v_0^2 - 2\frac{\gamma M}{r_0}\right).$$

Бундан

$$\left.\begin{array}{lll} v_0^2 - 2\frac{\gamma M}{r_0} < 0 \text{ ёки } v_0 < \sqrt{2\frac{\gamma M}{r_0}} & \text{да } e < 1, \\ v_0^2 - 2\frac{\gamma M}{r_0} = 0 \text{ ёки } v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} & \text{да } e = 1, \\ v_0^2 - 2\frac{\gamma M}{r_0} > 0 \text{ ёки } v_0 > \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} & \text{да } e > 1 \end{array}\right\} \quad (17.104)$$

келиб чиқади. Демак, v_0 бошланғич тезликнинг қийматига қараб траектория айлана, эллипс, парабола, гипербола бўлади.

Нуқта Ернинг сунъий йулдоши сифатида айлана бўйлаб айланишини таъминлайдиган энг кичик v_1 тезликни — *биринчи космик тезликни* аниқлайлик. Фараз қилайлик, нуқта Ер сиртидан бирор, Ер радиуси R га нисбатан эътиборга олмаса бўладиган даражада кичик масофага кўтарилиб, унга горизонтал йўналишда бошланғич v_1 тезлик берилган бўлсин. Ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмаймиз. Траектория айланадан иборат булиши учун $e = 0$ шарт бажарилиши керак. Бинобарин, (17.103) дан $R = p$ ёки $R = \frac{l^2}{m\sigma}$ бўлади. Бундан

$$R = \frac{(Rmv_1)^2}{m^2\gamma M} \text{ ёки } v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} \approx 7{,}9 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Шундай қилиб, нуқтага горизонтал йўналишда 7,9 км/с тезлик берилса, нуқта Ерга қайтиб тушмасдан Ернинг сунъий йулдоши сифатида айлана бўйлаб ҳаракат қилади.

Энди нуқта Ернинг тортиш майдонидан чиқиб кетишини таъминлайдиган энг кичик v_{II} тезликни — иккинчи космик тезликни аниқлаймиз. Бунда нуқта бошқа бир тортишиш майдони таъсирига тушиб қолгунига қадар парабола бўйлаб ҳаракатланади. (17.104) шартларнинг иккинчисига кура

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = v_1\sqrt{2} \approx 11{,}2 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

бўлади. Шундай қилиб, Ер сиртидан унча узоқ бўлмаган масофага кўтарилиб горизонтал йўналишда $\vec{v}_0$ тезлик олган нуқта Ернинг сунъий йўлдоши бўлиши учун

$$7{,}9 \frac{\text{км}}{\text{с}} \approx v_I \leqslant v_0 \leqslant v_{II} \approx 11{,}2 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

бажарилиши керак.

XVIII боб. ҚАТТИҚ ЖИСМ ДИНАМИКАСИ

Моддий нуқтадаги каби қаттиқ жисм динамикасининг ҳам икки масаласи мавжуд Қаттиқ жисмнинг бу масалаларини ечишда ҳам берилган кучларга кўра жисм ҳаракатини аниқлаш асосий вазифа ҳисобланади. Агар жисм эрксиз булса, боғланишларнинг реакцияларини аниқлаш иккинчи масала қаторига киради.

Қуйида биз қаттиқ жисмнинг илгарилама, қузғалмас ўқ атрофидаги айланма, текис параллел ва сферик харакатларини динамиканинг иккала масаласини ечиш нуқтаи назаридан қараб чиқамиз. Бундай ҳаракатлар тенгламаларини тузишда система динамикасининг асосий теоремаларидан фойдаланамиз.

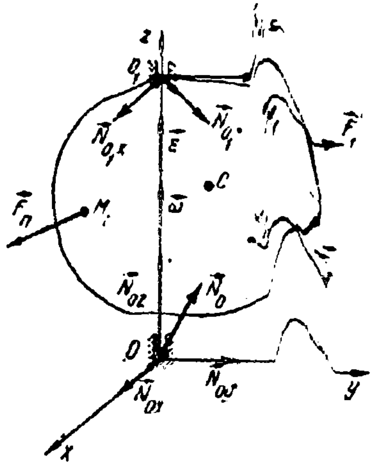
98-§. Қаттиқ жисм илгарилама ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Кинематикадан маълумки, илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг барча нуқталари шу жисмда олинган ихтиёрий нуқта билан бир хил қонун асосида ҳаракатланади. Шунинг учун илгарилама ҳаракатдаги жисм бирор нуқтаси ҳаракатининг дифференциал тенгламаси жисмнинг илгарилама ҳаракати дифференциал тенгламаси сифатида қабул қилинади. Бундай нуқта сифатида одатда жисмнинг массалар маркази олинади.

Жисмнинг массаси M, C массалар марказининг радиус-вектори $\vec{r}_C$, ҳар бир M_i нуқтасига қўйилган ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}_i^E$ бўлсин. У ҳолда массалар марказининг ҳаракати тенгламаси (17.25) га кўра *жисм илгарилама ҳаракатининг дифференциал тенгламаси* қуйидагича булади:

$$M\ddot{\vec{r}}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^E. \qquad (18.1)$$

(18.1) ни координата ўқларига проекциялаб, *жисм илгарилама ҳаракати дифференциал тенгламаларининг скаляр куринишда ифодаланиши*ни ҳосил қиламиз:



18.1-расм.

$$M\ddot{x}_C=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}^E,\quad M\ddot{y}_C=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}^E,\quad M\ddot{z}_C=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}^E. \qquad (18.2)$$

Бунда x_C, y_C, z_C — жисм массалар марказининг коорди[на]ри. (18.2) тенгламаларни интеграллаш нуқта ҳарака[ти]нг дифференциал тенгламаларини интеграллаш каби бажа[ри]и.

Шуни таъкидлаш зарурки, ташқи кучлар тенг таъси[р эту]вчига келтирилиши мумкин бўлган ҳолдагина жисм бу [кучла]р таъсирида илгарилама ҳаракат қила олади.

99-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айла[нма] ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

Бирор OO_1 ўқ атрофида айланувчи жисм берилган (18.1-р[асм]). Ўқ O нуқтада сферик шарнир, O_1 нуқтада эса подшипни[к]дамида маҳкамланган. O ва O_1 нуқталарда ҳосил була[диган] реакцияларни мос равишда $\vec{N}_O$ ва $\vec{N}_{O_1}$ орқали белгилай[миз]. $\vec{N}_O$ реакция фазода ихтиёрий йуналишни эгаллаши мум[кин], $\vec{N}_O$ реакция эса айланиш ўқига тик бўлган текисликда ёт[ади]. Жисмга таъсир қилувчи ташқи кучларнинг бош векторини $\vec{M}$ орқали, уларнинг O нуқтага нисбатан бош моментини эса билан белгилаймиз. Жисм ҳаракатини ҳаракат миқдори ва [ҳа]ракат миқдори моменти ҳақидаги теоремаларни ифодалов[чи] тенгламалар тулиқ белгилайди. Бу тенгламалар қуйидаги ёзилади:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\vec{K}}{dt}&=\vec{R}+\vec{N}_O+\vec{N}_{O_1},\\ \frac{d\vec{L}_O}{dt}&=\vec{M}_O+\left(\overrarrow{OO_1}\times\vec{N}_{O_1}\right).\end{aligned}\right\} \quad (18.3)$$

Бунда $\vec{K}$ — жисмнинг ҳаракат миқдори вектори, $\vec{L}_O$ — эса жисмнинг O нуқтага нисбатан кинетик моментидир. Координаталар бошини 0 нуқтада олиб $Oxyz$ координаталар системасини ўтказамиз. (18.3) тенгламаларни бу координаталар системаси ўқларига проекциялаймиз:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dK_x}{dt}=R_x+N_{Ox}+N_{O_1x},\quad \frac{dK_y}{dt}=R_y+N_{Oy}+N_{O_1y},\\ &\frac{dK_z}{dt}=R_z+N_{Oz},\\ &\frac{dL_{Ox}}{dt}=M_{Ox}-OO_1\cdot N_{O_1y},\quad \frac{dL_{Oy}}{dt}=M_{Oy}+OO_1\times\\ &\times N_{O_1x},\quad \frac{dL_{Oz}}{dt}=M_{Oz}.\end{aligned}\right\} \quad (18.3\text{a})$$

Бу тенгламаларнинг чап томонларини аниқлашга киришамиз. Маълумки, $\vec{K}=M\vec{v}_C=M\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_C\right)$. Бунда M — жисмнинг массаси, $\vec{v}_C$ — инерция марказининг тезлиги, $\vec{\omega}$ — жисмнинг айланма ҳаракатдаги бурчак тезлиги, $\vec{r}_C$ — инерция марказининг O нуқтага нисбатан радиус-вектори. У ҳолда:

$$K_x=-M\omega\cdot y_C,\quad K_y=M\omega\cdot x_C,\quad K_z=0.$$

Бундан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\frac{dK_x}{dt}=-M\left(\varepsilon\cdot y_C+\omega^2 x_C\right),\quad \frac{dK_y}{dt}=M\left(\varepsilon x_C-\omega^2 y_C\right),\quad \frac{dK_z}{dt}=0. \quad (18.4)$$

Энди ҳаракат миқдори моменти проекцияларининг ҳосилаларини аниқлашга ўтамиз. Маълумки механик системанинг бирор нуқтага нисбатан ҳаракат миқдори моменти (17.28) формуладан топилади. Қаттиқ жисмнинг координаталар бошига нисбатан ҳаракат миқдори моментини аниқлаш учун жисмни n та майда бўлакчаларга бўламиз. Сўнгра бундай жисм учун (17.28) каби муносабат тузиб, бу муносабатда бўлакчаларнинг массаларини нолга интилтириб лимитга ўтамиз. Натижада жисмнинг кинетик моменти учун

$$\vec{L}_O=\int_{(M)}\left(\vec{r}\times\vec{v}\right)dm$$

формула ҳосил қиламиз. Бунда $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ эканлигини ва $\vec{\omega}$ бурчак тезлик вектори айланиш ўқи Oz бўйича йўналиб, интегралга боғлиқ эмаслигини эътиборга олиб, жисм кинетик моментининг проекцияларини ҳисоблашнинг қуйидаги формулаларига эга буламиз:

$$L_{Ox} = -\omega \int\limits_{(M)} xzdm, \quad L_{Oy} = -\omega \int\limits_{(M)} yzdm, \quad L_{Oz} = \omega \int\limits_{(M)} (x^2 + y^2)\, dm.$$

Булардан эса

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_{Ox}}{dt} &= -\varepsilon \int\limits_{(M)} xzdm + \omega^2 \int\limits_{(M)} yzdm = -\varepsilon I_{xz} + \omega^2 I_{yz}, \\ \frac{dL_{Oy}}{dt} &= -\varepsilon \int\limits_{(M)} yzdm - \omega^2 \int\limits_{(M)} xzdm = -\varepsilon \cdot I_{yz} - \omega^2 I_{xz}, \\ \frac{dL_{Oz}}{dt} &= \varepsilon \int\limits_{(M)} (x^2 + y^2)\, dm = \varepsilon \cdot I_{Oz} \end{aligned}\right\} \qquad (18.5)$$

келиб чиқади. Бу ерда I_{xz}, I_{yz} — жисмнинг марказдан қочувчи инерция моментлари, I_{Oz} — эса жисмнинг Oz ўққа нисбатан инерция моментидан иборат. (18.4) ва (18.5) тенгликларни (18.3а) га қўямиз:

$$\left.\begin{aligned} -M\varepsilon y_C - M\omega^2 x_C &= R_x + N_{Ox} + N_{O_1x}, \\ M\varepsilon x_C - M\omega^2 y_C &= R_y + N_{Oy} + N_{O_1y}, \\ 0 &= R_z + N_{Oz}, \\ -\varepsilon I_{xz} + \omega^2 I_{yz} &= M_{Ox} - OO_1 \cdot N_{O_1y}, \\ -\varepsilon I_{yz} - \omega^2 I_{xz} &= M_{Oy} + OO_1 \cdot N_{O_1x}, \\ \varepsilon I_{Oz} &= M_{Oz}. \end{aligned}\right\} \qquad (18.6)$$

Бошланғич шартлар берилганда (18.6) тенгламалар қаттиқ жисмнинг актив кучлар таъсиридаги ҳаракатини тулиқ аниқлайди. (18.6) даги сўнгги тенгламани алоҳида кўриб чиқамиз. Уни

$$I_{Oz} \cdot \ddot{\varphi} = M_{Oz} \qquad (18.7)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламанинг ўнг томони актив кучларнинг айланиш уқига нисбатан бош моментидан иборат. (18.7) тенглама *қаттиқ жисмнинг қузғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракати дифференциал тенгламаси* дейилади.

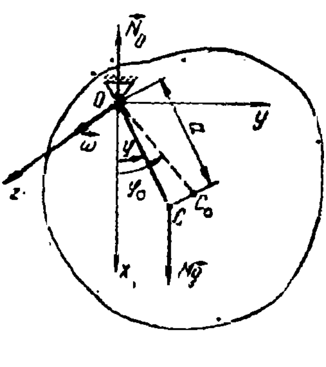
(18.7) тенгламани қаттиқ жисмнинг илгарилама ҳаракати дифференциал тенгламаси (18.1) билан таққослаб, жисмнинг инерция моменти айланма ҳаракатда инерция ўлчови сифатида намоён булишини кўрамиз, яъни *жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти айланма ҳаракатдаги жисмнинг инертлигини белгилайди.*

Агар жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти, жисмга қуйилган кучларнинг айланиш уқига нисбатан бош моменти маълум ёки уни ҳисоблаш мумкин булса, (18.7) дифференциал тенгламани берилган бошланғич шартлар асосида интеграллаб, ҳаракатнинг $\varphi = \varphi(t)$ қонунини топиш мумкин.

(18.7) дан курамизки, жисм айланма ҳаракатининг тенгламаси боғланишлар реакцияларга боғлиқ булмай, фақат актив кучларнинг ўзигагина боғлиқ. Жисм ҳаракатининг тенгламаси аниқланганидан сўнг ω, ε, x_C, y_C айланиш бурчаги φ орқали ифодаланиши мумкин булиб, (18.6) нинг қолган 5 та тенгламасидан $\vec{N}_{Ox}$, $\vec{N}_{Oy}$, $\vec{N}_{Oz}$, $\vec{N}_{O_1x}$, $\vec{N}_{O_1y}$ реакция кучлари аниқланади. (18.6) тенгламалардан курамизки, боғланишлар реакциялари жисмдаги массалар тақсимотига боғлиқ булиш билан бир қаторда, жисмнинг ҳаракатига, жумладан унинг ω бурчак тезлиги ва ε бурчак тезланишига ҳам боғлиқ булади.

Маълумки, боғланишларнинг реакциялари жисмга таъсир қилса, бу реакцияларга тенг, қарама-қарши йўналган кучлар эса боғланишларга таъсир қилади. Жисм катта тезлик билан айланганда бу кучлар жисмга қуйилган актив кучлардан ҳам катталашиб кетиши мумкин. Айланма ҳаракат қилувчи қисми бор қурилмаларда бундай кучларнинг пайдо бўлиши зарарли ва хавфлидир. Катта тезликларда бу кучлар боғланишларнинг синишига, турли хил аварияларнинг келиб чиқишига сабаб бўлиши мумкин, Айланма ҳаракат давомида бундай кучларнинг пайдо бўлмаслиги қурилмаларнинг равон ишлашини таъминлайди. (18.6) тенгламалардан кўринадики, агар айланиш ўқи жисмнинг массалар марказидан ўтса (бунда $x_C = y_C = 0$) ва бу ўқ жисм учун инерция бош уқларидан бири бўлса (бунда $I_{xy} = I_{xz} = 0$),

$$\left.\begin{aligned} &R_x + N_{Ox} + N_{O_1x} = 0, \\ &R_y + N_{Oy} + N_{O_1y} = 0, \\ &R_z + N_{Oz} = 0, \\ &M_{Ox} - OO_1 \cdot N_{O_1y} = 0, \\ &M_{Oy} + OO_1 \cdot N_{O_1x} = 0 \end{aligned}\right| \qquad (18.8)$$



18.2- расм.

тенгламалар ҳосил бўлиб, боғланишларнинг реакциялари жисмнинг ҳаракатига боғлиқ булмайди. Шу билан бир қаторда бу реакцияларни (18.8) тенгламалардан бевосита аниқлаш мумкин бўлади. Шунинг учун айланувчи қисмлари бор қурилмалар айланиш уқлари уларнинг инерция марказларидан ўтадиган ва бу ўқлар инерция бош уқларидан бири бўладиган қилиб ясалади.

55- масала. Массаси M булган қаттиқ жисм C массалар марказидан ўтмайдиган Oz горизонтал уқ атрофида узининг оғирлик кучи таъсирида тебранади (18-расм). Айланиш уқидан массалар марказигача булган масофа $OC = a$, жисмнинг айланиш уқига нисбатан инерция моменти I га тенг. Бошланғич пайтда OC кесма вертикалдан φ_0 бурчакка оғдирилиб, жисмга ω_0 бошланғич бурчак тезлик берилган. Айланиш бурчаги φ нинг кичик қийматларида жисмнинг ҳаракати, тебраниш даври аниқлансин.

Ечиш. Масса марказидан ўтмайдиган горизонтал ўқ атрофида айлана оладиган жисм *физик тебрангич* дейилади. Физик тебрангичнинг ҳаракатини аниқлаш учун жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракати дифференциал тенгламаси (18.7) дан фойдаланамиз:

$$I_{Oz}\ddot{\varphi} = M_{Oz}.$$

Бунда $M_{Oz} = -Mga\sin\varphi$, $I_{Oz} = I$ бўлгани ўчун тенгламани

$$I\ddot{\varphi} = -Mga\sin\varphi$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I}\sin\varphi = 0 \tag{1}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (1) ифода *физик тебрангичнинг дифференциал тенгламаси* дейилади.

Ҳаракат вақтида φ бурчак кичик қийматлар қабул қилгани учун, $\sin\varphi \approx \varphi$ деб олиш мумкин. Шунинг учун

$$k_1^2 = \frac{Mga}{I} \tag{2}$$

белгилаш киритиб, (1) ни қуйидагича ифодалаймиз:

$$\ddot{\varphi} + k_1^2\varphi = 0. \tag{3}$$

(3) эса эркин тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини ифодалайди. Берилган $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$ бошланғич шартларга кура (3) дифференциал тенглама ечими

$$\varphi = \varphi_0\cos k_1t + \frac{\omega_0}{k_1}\sin k_1t$$

ёки

$$\varphi = a_1\sin(k_1t + \alpha) \tag{4}$$

тенглама билан ифодаланиб, (4) да a_1 ва α бошланғич шартлар орқали топилади:

$$a_1 = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\omega_0^2}{k_1^2}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varphi_0 k_1}{\omega_0}.$$

Физик тебрангич тебраниш даврини аниқлаймиз:

$$T_ч = \frac{2\pi}{k_1} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}. \qquad (5)$$

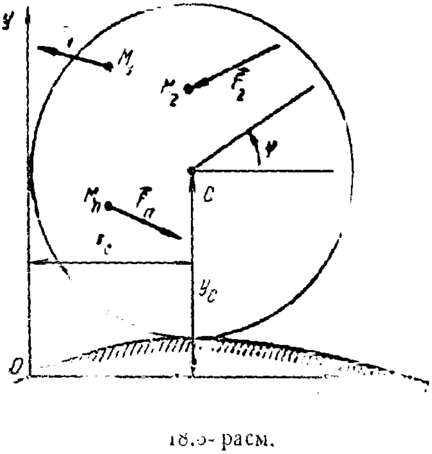
(3) ва (5) ни (17.50) ва (17.51) билан таққослаб, физик тебрангич узунлиги $L = \frac{I}{Ma}$ бўлган математик тебрангич каби ҳаракат қилишини курамиз; L узунлик *физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги* дейилади.

100-§. Қаттиқ жисм текис параллел ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Маълумки, жисмнинг текис параллел ҳаракатини хар онда жисмда олинган ва қутб деб аталувчи нуқта билан биргаликда буладиган илгарилама (кучирма) ҳаракат ва ушбу қутб атрофидаги айланма (нисбий) ҳаракатларнинг йиғиндисидан иборат деб қараш мумкин. Қутб сифатида жисмнинг C массалар марказини олайлик. У ҳолда жисмнинг қутб билан бирликда илгарилама ҳаракати қутбнинг ҳаракати билан тулиқ аниқланади; қутб атрофидаги айланма ҳаракати эса жисм нуқталарининг ҳаракат текислигига тик булган ва C нуқтадан утувчи уқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат бўлади.

Система массалар марказининг ҳаракати ва кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб жисм текис-параллел ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузамиз. Массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, қутб билан бирликдаги ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}. \qquad (18.9)$$



18.3-расм.

Бунда M — жисмнинг массаси, x_C, y_C — C нуқтанинг жисм ҳаракат текислигига параллел қилиб олинган қўзғалмас xOy координаталар текислигидаги координаталари (18.3-расм); F_{ix}, F_{iy} — жисмга таъсир қилувчи актив кучларнинг ($i = 1, 2, \ldots, n$) Ox ва Oy уқлардаги проекциялари.

Системанинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракатидаги кинетик моментининг узгариши ҳақидаги теорема (17.33а) ни жисмнинг массалар марказида олинган қутбга нисбатан ҳаракатига татбиқ этиб

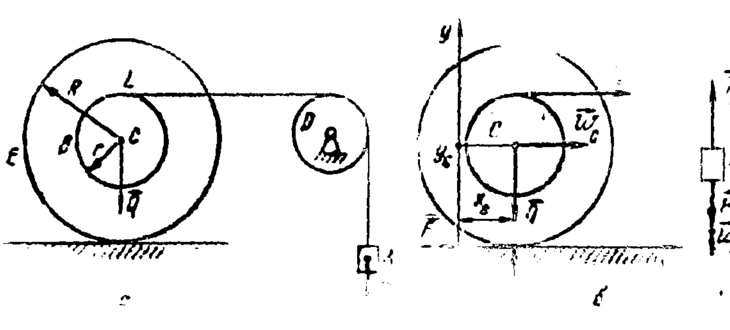
$$I_C\ddot{\varphi} = \sum_{i=1} m_C(\vec{F}_i) \qquad (18.10)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бунда I_C — жисмнинг C нуқтадан ўтувчи ва жисм ҳаракат текислигига тик булган уққа нисбатан инерция моменти, φ — қутб атрофидаги айланиш бурчаги. (18.9) ва (18.10) тенгламалар биргаликда *жисмнинг текис параллел ҳаракати дифференциал тенгламаларини* ифодалайди. Жисмга таъсир қилувчи кучлар ва тегишли бошланғич шартлар берилганда бу тенгламаларни интеграллаб, x_C, y_C ва φ ни t вақтнинг функцияси сифатида аниқлаш мумкин.

Текис параллел ҳаракат қилувчи жисм боғланишлар таъсирида булса, (18.9) ва (18.10) тенгламаларнинг ўнг томонларига боғланишлар реакциялари ва уларнинг C нуқтага нисбатан моментлари киради. Маълумки, боғланишларнинг реакциялари актив кучларга ва умуман олганда, жисмнинг ҳаракатига ҳам боғлиқ бўлади. Бу ҳолда жисм ҳаракатининг тенгламалари билан биргаликда боғланишлар реакцияларини аниқлаш учун (18.9), (18.10) тенгламалар қаторида боғланишлар тенгламаларини ҳам олиш керак.

56-масала. Оғирлиги P бўлган A юк (18.4-расм, *a*) пастга тушиб, оғирлиги бўлмаган ва чўзилмайдиган ип билан E ғилдиракни горизонтал изда сирғанмай ғилдирашга мажбур қилади; ип қузғалмас D блокдан утказилган ва B барабанга ўралган. D блокнинг оғирлиги, ўқлардаги ишқаланиш ҳисобга олинмайди. r радиусли B барабан R радиусли E ғилдиракка бириктирилган; уларнинг умумий оғирлиги Q га тенг, массалар маркази C дан утувчи горизонтал ўққа нисбатан олинган инерция радиуси эса ρ га тенг. A юкнинг тезланиши топилсин.

Ечиш. Система ҳаракатини AL ипни қирқиш орқали A жисмнинг тўғри чизиқли илгарилама ҳаракатига ҳамда барабан ва ғилдиракдан иборат жисмнинг текис параллел ҳаракатига



18.4- расм.

ажратамиз (18.4- расм, *б*). Бунда ҳар бир жисмнинг иккинчи жисмга таъсирини ипдаги таранглик кучи билан алмаштирамиз.

Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра *A* юк ҳаракатини

$$\frac{P}{g} w_A = P - T_1 \tag{1}$$

тенглама билан ифодалаш мумкин. Барабан ва ғилдиракдан иборат жисмнинг текис параллел ҳаракати дифференциал тенгламалари (18.9), (18.10) га кўра қуйидагича ёзилади:

$$m\ddot{x}_C = T_2 - F, \tag{2}$$

$$m\ddot{y}_C = N - Q, \tag{3}$$

$$I_C\ddot{\varphi} = T_2 r + F \cdot R \tag{4}$$

(2) — (4) тенгламаларда ғилдирак билан из орасидаги ишқаланиш кучи $\vec{F}$, изнинг ғилдиракка нормал реакцияси $\vec{N}$, *A* юкнинг ғилдиракка кўрсатадиган таъсири $\vec{T}_2$ куч билан ифодаланган. *D* блокнинг оғирлиги ва ўқлардаги ишқаланиш эътиборга олинмагани учун $T_1 = T_2 = T$ бўлади.

(1) — (4) тенгламаларда $\vec{N}$, $\vec{T}_1$, $\vec{F}$, $\vec{w}_A$ векторларнинг миқдорлари номаълумдир. Бу тенгламалар системасидан, умуман, ҳамма номаълумларни аниқлаш мумкин. *C* нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлгани учун $y_C = \text{const}$, $\ddot{y}_C = 0$; бинобарин (3) дан $N = Q$ келиб чиқади.

C нуқта тезланиши $w_C = \ddot{x}_C$ *A* юк тезланиши орқали қуйидагича ифодаланади:

$$w_C = \frac{R}{R + r} w_A.$$

Ғилдиракнинг бурчак тезланиши $\ddot{\varphi}$ эса w_A орқали қуйидагича боғланган:

$$\ddot{\varphi} = \frac{w_A}{R + r}.$$

Ғилдирак ва барабаннинг инерция моменти эса $I_C = \frac{Q}{g}\rho^2$ формула билан аниқланади. Натижада қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\frac{P}{g} w_A = P - T, \tag{5}$$

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{R}{R + r} w_A = T - F, \tag{5}$$

$$\frac{Q}{g}\frac{\rho^2}{R+r}w_A = Tr + F\cdot R. \qquad (7)$$

(6) тенглама ҳадларини R га кўпайтириб (7) тенглама билан ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$\frac{Q}{g}\cdot\frac{R^2+\rho^2}{R+r}w_A = T(R+r). \qquad (8)$$

(5) тенглама ҳадларини $(R+r)$ га кўпайтириб, (8) тенглама билан ҳадма-ҳад қушсак, w_A га нисбатан тенглама ҳосил бўлади:

$$\left[\frac{R}{g}(R+r)+\frac{Q}{g}\frac{R^2+\rho^2}{R+r}\right]\vec{w}_A = P(R+r).$$

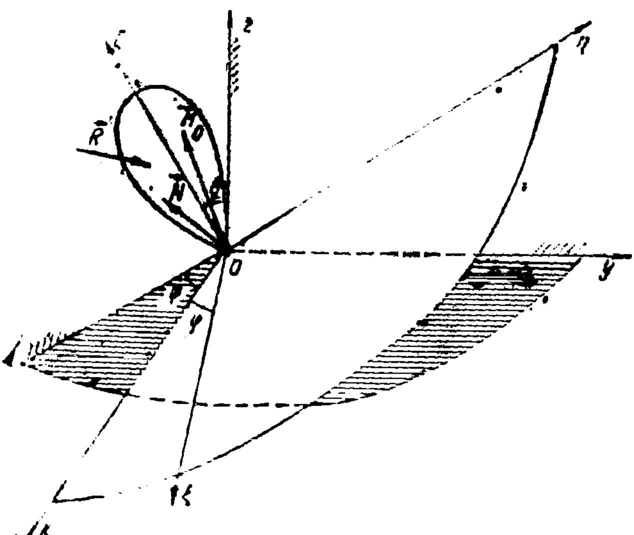
Бу ифодадан w_A топилади:

$$w_A = \frac{P(R+r)^2}{P(R+r)^2+Q(R^2+\rho^2)}\cdot g.$$

Энди керак булса, (5) ва (6) тенгламалардан T ва F ни ҳам топиш мумкин.

101-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Бирор қўзғалмас O нуқта атрофида айланувчи қаттиқ жисм берилган (18.5-расм). Ушбу нуқтани координаталар боши қилиб қўзғалмас $Oxyz$ ва жисм билан боғланган қўзғалувчи $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасини киритамиз. Келажакдаги ҳисобларни енгиллаштириш мақсадида $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ ўқларни



18.5-расм.

жисмнинг инерция бош ўқлари буладиган қилиб утказамиз. Кинематикадан маълумки, жисмнинг қузғалмас нуқта атрофидаги ҳаракати ψ, θ, φ Эйлер бурчаклари билан тулиқ аниқланади. Ҳаракат миқдори ва ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб, Эйлер бурчакларини жисмга таъсир қилувчи кучлар билан боғлайдиган тенгламаларни тузамиз. $\vec{K}$ орқали жисмнинг ҳаракат миқдори векторини, $\vec{L}_O$ орқали унинг O нуқтага нисбатан кинетик моменти векторини, $\vec{R}$ билан жисмга қўйилган актив кучларнинг бош векторини, $\vec{M}_O$ билан бу кучларнинг O нуқтага нисбатан бош моментини, $\vec{N}$ орқали эса O нуқтадаги реакция кучини белгилаймиз. У ҳолда система ҳаракат миқдори ва кинетик моментининг узгариши ҳақидаги теоремаларга кура

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{R}+\vec{N}, \qquad (18.11)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{M}_O \qquad (18.12)$$

булади. (18.11), (18.12) тенгламалар текширилаётган жисм ҳаракатининг вектор куринишдаги дифференциал тенгламаларидир. Жисм ҳаракатини характерлайдиган ўзгарувчилар — Эйлер бурчаклари бу тенгламаларда яширин равишда қатнашади. Бу тенгламаларни ечишнинг умумий тартиби қуйидагича булади: аввало (18.12) тенглама тегишли координаталар уқларига проекцияланади ва $\vec{L}_O$ векторнинг проекциялари Эйлер бурчаклари орқали ифодаланади. Сўнгра бу тенгламалардан Эйлер бурчаклари аниқланади. Эйлер бурчаклари аниқланганидан кейин жисмнинг ҳаракат миқдори аниқланиши мумкин. (18.11) дан фойдаланиб O нуқтадаги $\vec{N}$ реакция топилади.

Масалани шу тартибда мукаммалроқ текширамиз. $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$ ҳосила $\vec{L}_O$ вектор учининг абсолют тезлигини ифодалайди. Тезликларни қушиш теоремасига асосан $\vec{L}_O$ вектор учининг абсолют тезлиги мазкур вектор учига мос келувчи нуқтанинг нисбий ва кучирма тезликлари йиғиндисига тенг. Бунда $\vec{L}_O$ вектор учининг нисбий тезлиги $\tilde{L}$ вектордан қузғалувчи $O\xi\eta\zeta$ системада олинган *локал ҳосилага* тенг. Бундай ҳосилага *нисби*...

ҳосила ҳам дейилади. Уни $\frac{\tilde{d}\vec{L}_O}{dt}$ орқали белгилаймиз. $\vec{L}_O$ вектор учининг кўчирма тезлиги эса $\vec{\omega}\times\vec{L}_O$ вектор кўпайтма билан аниқланади, бунда $\vec{\omega}$ — жисмнинг оний бурчак тезлик вектори. Шундай қилиб (18.12) тенгламани

$$\frac{\tilde{d}\vec{L}_O}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{L}_O=\vec{M}_O$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламани $O\xi\eta\zeta$ координаталар системаси уқларига проекциялаймиз:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dL_{O\xi}}{dt}+(\omega_\eta L_{O\zeta}-\omega_\zeta L_{O\eta})=M_{O\xi},\\&\frac{dL_{O\eta}}{dt}+(\omega_\zeta L_{O\xi}-\omega_\xi L_{O\zeta})=M_{O\eta},\\&\frac{dL_{O\zeta}}{dt}+(\omega_\xi L_{O\eta}-\omega_\eta L_{O\xi})=M_{O\zeta}.\end{aligned}\right\} \quad (18.13)$$

Бунда $L_{O\xi}$, $L_{O\eta}$, $L_{O\zeta}$; ω_ξ, ω_η, ω_ζ; $M_{O\xi}$, $M_{O\eta}$, $M_{O\zeta}$ — мос равишда $\vec{L}_O$, $\vec{\omega}$, $\vec{M}_O$ векторларнинг қўзғалувчи система ўқларидаги проекциялари.

$L_{O\xi}$, $L_{O\eta}$, $L_{O\zeta}$ проекцияларни ҳисоблаймиз. Маълумки, (99-§) қаттиқ жисмнинг $\vec{L}_O$ кинетик моменти вектори $L_O=\int\limits_{(M)}(\vec{r}\times\vec{v})dm)$ унинг проекциялари эса

$$L_{O\xi}=\int\limits_{(M)}(\eta v_\zeta-\zeta v_\eta)\,dm,\quad L_{O\eta}=\int\limits_{(M)}(\zeta v_\xi-\xi v_\zeta)\,dm,$$

$$L_{O\zeta}=\int\limits_{(M)}(\xi v_\eta-\eta v_\xi)\,dm \quad (18.14)$$

формулалардан аниқланади. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг тезлиги $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ Эйлер формуласидан топилади. Бу тезликнинг проекциялари қуйидагича:

$$v_\xi=\omega_\eta\zeta-\omega_\zeta\eta,\quad v_\eta=\omega_\zeta\xi-\omega_\xi\zeta,\quad v_\zeta=\omega_\xi\eta-\omega_\eta\xi. \quad (18.15)$$

Бунда ξ, η, ζ — жисм ихтиёрий нуқтасининг координаталари. ω_ξ, ω_η, ω_ζ нинг интегралга боғлиқ эмаслигини эътиборга олиб, (18.15) ни (18.14) нинг биринчи тенгламасига қўйсак,

$$L_{O\xi}=\omega_\xi\int\limits_{(M)}(\eta^2+\zeta^2)\,dm-\omega_\eta\int\limits_{(M)}\xi\eta\,dm-\omega_\zeta\int\limits_{(M)}\xi\zeta\,dm$$

ҳосил бўлади. Бу ерда $\int\limits_{(M)} (\eta^2 + \zeta^2)\, dm = I_\xi$ — қаттиқ жисмнинг O_ξ ўққа нисбатан инерция моменти, $\int\limits_{(M)} \xi\eta\, dm = I_{\xi\eta}$ ва $\int\limits_{(M)} \xi\zeta\, dm = I_{\xi\zeta}$ — марказдан қочувчи инерция моментларидир. Худди шунингдек, ҳисоблашларни $L_{O\eta}$ ва $L_{O\zeta}$ учун қўлласак,

$$\left.\begin{aligned} L_{O\xi} &= I_\xi \omega_\xi - I_{\xi\eta}\omega_\eta - I_{\xi\zeta}\omega_\zeta, \\ L_{O\eta} &= - I_{\xi\eta}\omega_\xi + I_\eta \omega_\eta - I_{\eta\zeta}\omega_\zeta, \\ L_{O\zeta} &= - I_{\xi\eta}\omega_\xi + I_{\eta\zeta}\omega_\eta - I_\zeta \omega_\zeta, \end{aligned}\right\} \quad (18.16)$$

формулаларга эришамиз. Киритилган $O\xi\eta\zeta$ координаталар системаси уқлари жисмнинг координаталар бошига нисбатан инерция бош ўқлари бўлгани учун $I_{\xi\eta} = I_{\xi\zeta} = I_{\eta\zeta} = 0$ бўлиб, (18.16) формулалар

$$L_{O\xi} = I_\xi \omega_\xi, \quad L_{O\eta} = I_\eta \omega_\eta, \quad L_{O\zeta} = I_\zeta \cdot \omega_\zeta \qquad (18.17)$$

куринишни олади. (18.17) ни (18.13) га қўйиб ва жисмнинг $O\xi\eta\zeta$ система ўқларига нисбатан инерция моментларининг узгармас эканлигини эътиборга олиб,

$$\left.\begin{aligned} I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + (I_\zeta - I_\eta)\, \omega_\eta \omega_\zeta &= M_{O\xi}, \\ I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + (I_\xi - I_\zeta)\, \omega_\xi \omega_\zeta &= M_{O\eta}, \\ I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + (I_\eta - I_\xi)\, \omega_\xi \omega_\eta &= M_{O\zeta} \end{aligned}\right\} \quad (18.18)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар *Эйлернинг динамик тенгламалари* дейилади. (18.18) тенгламалар оний бурчак тезликнинг проекцияларига нисбатан биринчи тартибли чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламалардир. (18.18) тенгламалар Эйлернинг қуйидаги кинематик тенгламалари

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ \omega_\eta &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{aligned}\right\} \quad (18.19)$$

билан биргаликда қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланувчи жисм динамикасининг тўла тенгламалари системасини ташкил қилади. Бу тенгламалар ёрдамида сферик ҳаракатдаги жисм динамикасининг биринчи ва иккинчи асосий масалаларини ҳал қилиш мумкин. Бу ерда шуни қайд этиш керакки, (18.18), (18.19) тенгламаларни интеграллаш вазифаси мураккаб математик масаладир. Ҳозирча ҳар қандай бошланғич шартларда ҳам (18.18), (18.19) тенгламаларни интеграллашнинг фақат учта хусусий ҳоли мавжуд. Бу ҳоллар *Эйлер*, *Лагранж* ва *Ковалевская* номлари билан юритилади.

Қузғалмас нуқта атрофида қаттиқ жисм инерция билан ҳаракатланган ҳол *Эйлер ҳоли* дейилади. Бу ҳолда жисмга таъсир қилувчи кучлар ё мувозанатлашган бўлади, ё уларнинг тенг таъсир этувчиси мавжуд булиб, у қузғалмас нуқта орқали утади ва бу нуқтага нисбатан моменти нолга тенг бўлади.

Лагранж ҳолида жисмда симметрия ўқи мавжуд булиб, жисмнинг оғирлик маркази ва қузғалмас нуқта бу ўқда ётади (бунда $I_\xi = I_\eta$). Жисм фақат оғирлик кучи таъсиридагина ҳаракатланади.

$I_\xi = I_\eta = 2I_\zeta$ бўлиб, жисмнинг оғирлик маркази унинг инерция эллипсоидининг экваториал текислигида ётадиган ҳол *Ковалевская ҳоли* дейилади.

Биз Эйлер ҳолини кўриб чиқамиз.

102-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида инерция билан ҳаракати

Юқорида таъкидлаганимиздек, бу ҳол $M_{O\xi} = M_{O\eta} = M_{O\zeta} = 0$ билан характерланади. Бу ҳол учун (18.18) тенгламалар

$$\left.\begin{aligned} I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + (I_\zeta - I_\eta)\,\omega_\eta\omega_\zeta = 0, \\ I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + (I_\xi - I_\zeta)\,\omega_\xi\omega_\zeta = 0, \\ I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + (I_\eta - I_\xi)\,\omega_\eta\omega_\xi = 0 \end{aligned}\right| \qquad (18.20)$$

кўринишни олади. Аввал ω_ξ, ω_η, ω_ζ ни вақтнинг функцияси сифатида, сўнгра Эйлер бурчакларини улар ёрдамида аниқлашнинг баъзи йўллари билан танишамиз. $\vec{M}_O = 0$ булгани учун ҳаракат миқдори моменти теоремасига асосан $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$ ва $\vec{L}_O = \overrightarrow{\text{const}}$ $(\vec{L}_O = \vec{L}_O^0)$ бўлади. (18.17) дан

$$I_\xi^2\omega_\xi^2 + I_\eta^2\omega_\eta^2 + I_\zeta^2\omega_\zeta^2 = L_O^{02} \qquad (18.21)$$

формулага эга бўламиз.

Энди (18.20) тенгламаларни мос равишда ω_ξ, ω_η, ω_ζ га купайтириб қўшиб чиқамиз:

$$I_\xi\omega_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + I_\eta\omega_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + I_\zeta\omega_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} = 0$$

ёки

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(I_\xi\omega_\xi^2 + I_\eta\omega_\eta^2 + I_\zeta\omega_\zeta^2\right) = 0.$$

Бундан

$$I_\xi\omega_\xi^2 + I_\eta\omega_\eta^2 + I_\zeta\omega_\zeta^2 = 2h = \text{const} \tag{18.22}$$

ҳосил булади. (18.22) да h — узгармас энергияни ифодалайди.

(18.21) ва (18.22) да ω_ξ ва ω_η ни ω_ζ орқали ифодалаймиз ва биргаликда

$$\left.\begin{aligned} I_\xi\omega_\xi^2 + I_\eta\omega_\eta^2 &= 2h - I_\zeta\omega_\zeta^2, \\ I_\xi^2\omega_\xi^2 + I_\eta^2\omega_\eta^2 &= L_O^2 - I_\zeta^2\omega_\zeta^2 \end{aligned}\right\} \tag{18.23}$$

кўринишда ёзамиз. $I_\xi \neq I_\eta$ ҳолида (18.23) нинг биринчи тенгламасини I_η га купайтириб, биридан иккинчисини айирсак, сунгра I_ξ га кўпайтириб, шу ишни такрорласак,

$$\left.\begin{aligned} I_\xi(I_\eta - I_\xi)\,\omega_\xi^2 &= 2hI_\eta - L_O^2 - I_\zeta(I_\eta - I_\zeta)\,\omega_\zeta^2 \\ I_\eta(I_\eta - I_\xi)\,\omega_\eta^2 &= L_O^2 - I_\xi 2h - I_\zeta(I_\zeta - I_\xi)\,\omega_\zeta^2 \end{aligned}\right\} \tag{18.24}$$

ҳосил бўлади. Бунда

$$2hI_\eta - L_O^2 = \alpha, \quad -I_\zeta(I_\eta - I_\zeta) = \beta, \quad L_O^2 - I_\xi 2h = \gamma,$$
$$-I_\zeta(I_\zeta - I_\xi) = \delta$$

белгилашлар киритиб, (18.24) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} I_\xi(I_\eta - I_\xi)\,\omega_\xi^2 &= \alpha + \beta\omega_\zeta^2, \\ I_\eta(I_\eta - I_\xi)\,\omega_\eta^2 &= \gamma + \delta\omega_\zeta^2. \end{aligned}\right|$$

Бу тенгламалар системасини биргаликда ечиб,

$$(I_\eta - I_\xi)\,\omega_\xi\omega_\eta = \frac{1}{\sqrt{I_\xi I_\eta}}\sqrt{(\alpha + \beta\omega_\zeta^2)(\gamma + \delta\omega_\zeta^2)}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу ифодани (18.20) нинг учинчи тенгламасига қўямиз, у ҳолда

$$\frac{d\omega_\zeta}{dt} + \frac{1}{I_\zeta\sqrt{I_\xi I_\eta}}\sqrt{(\alpha + \beta\omega_\zeta^2)(\gamma + \delta\omega_\zeta^2)} = 0$$

келиб чиқади. Тенгламадаги ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{d\omega_\zeta}{(\alpha + \beta\omega_\zeta^2)(\gamma + \delta\omega_\zeta^2)} = -\frac{dt}{I_\zeta\sqrt{I_\xi I_\eta}}.$$

Натижада

$$\int \frac{d\omega_\zeta}{\sqrt{(\alpha + \beta\omega_\zeta^2)(\gamma + \delta\omega_\zeta^2)}} = -\frac{t}{I_\zeta\sqrt{I_\xi I_\eta}} + C \tag{18.25}$$

ҳосил бўлади, C — интеграл доимийси. (18.25) нинг чап томонидаги интеграл эллиптик интегралдир. Шундай қилиб t вақт билан ω_ζ нинг эллиптик функцияси орасидаги боғланиш топилар экан, ω_ζ вакт t нинг функцияси сифатида аниқланганидан кейин (18.24) тенгламалардан ω_ξ ва ω_η ҳам вақт t нинг функцияси сифатида топилади. Ниҳоят, ω_ξ, ω_η ва ω_ζ ни Эйлернинг кинематик тенгламаларига қўйиб, улардан Эйлер бурчакларини вақтнинг функцияси сифатида аниқлаш мумкин.

Қаттиқ жисм қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатининг Эйлер текширган иккита хусусий ҳолини куриб чиқамиз.

1) $I_\xi = I_\eta = I_\zeta$. Бунда қўзғалмас нуқта координаталар бошида булган жисмнинг инерция эллипсоиди сферадан иборат. (18.20) тенгламалардан

$$I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} = 0, \quad I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} = 0, \quad I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} = 0$$

эканлиги келиб чиқади. Бундан $\omega_\xi = C_1$, $\omega_\eta = C_2$, $\omega_\zeta = C_3$, яъни оний бурчак тезликнинг модули ўзгармас бўлади: $\omega = \text{const}$. Иккинчи томондан маълумки, $L_{O\xi} = I_\xi\omega_\xi$, $L_{O\eta} = I_\eta\omega_\eta$, $L_{O\zeta} = I_\zeta\omega_\zeta$.

Бундан $I_\xi = I_\eta = I_\zeta = k$ булгани учун $\frac{L_{O\xi}}{\omega_\xi} = \frac{L_{O\eta}}{\omega_\eta} = \frac{L_{O\zeta}}{\omega_\zeta} = k$,

яъни $\vec{\omega}$ ва $\vec{L}_O$ векторлар коллинеар векторлардир. $\vec{L}_O = \vec{L}_O^0 = \overrightarrow{\text{const}}$ эди. У ҳолда $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{const}}$, яъни бурчак тезлик йўналиши ҳам ўзгармас бўлади. Шундай қилиб бу ҳолда жисмнинг ҳаракати қузғалмас уқ атрофида ўзгармас бурчак тезлик билан бўладиган айланма ҳаракатдан иборат булади.

2) $I_\xi = I_\eta$. Бу ҳолда (18.20) нинг учинчи тенгламасидан $I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} = 0$ бўлиб, $\omega_\zeta = C_1$ келиб чиқади. (18.20) тенгламаларни мос равишда ω_ξ, ω_η, ω_ζ га кўпайтириб қўшамиз:

$$I_\xi\omega_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + I_\eta\omega_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + I_\zeta\omega_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} = 0$$

ёки

$$d\left(I_\xi\omega_\xi^2 + I_\eta\omega_\eta^2 + I_\zeta\omega_\zeta^2\right) = 0$$

ҳосил бўлади. Бундан

$$I_\xi\omega_\xi^2 + I_\eta\omega_\eta^2 + I_\zeta\omega_\zeta^2 = C_2$$

ифодани ҳосил қиламиз.

ω_ζ ўзгармас бўлгани учун охирги ифодадан

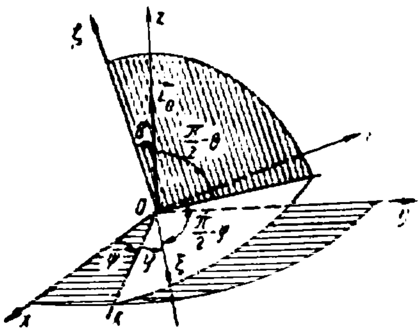
$$I_\xi\left(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2\right) = C_3$$

ёки

$$\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = C_4$$

ёзиш мумкин Бинобарин,

$$\omega^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2 = C_5$$



18.6- расм.

экан. Кўрамизки, бу ҳолда ҳам оний бурчак тезликнинг модули узгармас бўляпти. Берилишига кўра: $\vec{L}_O = \vec{L}_O = \overrightarrow{\text{const}}$. Қузғалмас координаталар системасининг Oz ўқини $\vec{L}_O$ вектор буйлаб олиб, $\vec{L}_O$ векторнинг қузғалувчи $O\xi\eta\zeta$ система ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз (18.6- расм):

$$\left.\begin{aligned} L_{O\xi} = L_O \sin\theta \cdot \sin\varphi,\ L_{O\eta} = L_O \sin\theta\cos\varphi, \\ L_{O\zeta} = L_O \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{18.26}$$

Иккинчи томондан

$$L_{O\xi} = I_\xi\omega_\xi,\ L_{O\eta} = I_\eta\omega_\eta,\ L_{O\zeta} = I_\zeta\omega_\zeta. \tag{18.27}$$

(18.26), (18.27) муносабатларни таққослаб,

$$\left.\begin{aligned} L_O \sin\theta\sin\varphi &= I_\xi\omega_\xi, \\ L_O \sin\theta\cos\varphi &= I_\eta\omega_\eta, \\ L_O \cos\theta &= I_\zeta\omega_\zeta \end{aligned}\right| \tag{18.28}$$

муносабатларга эга буламиз. (18.28) нинг учинчисидан

$$\theta = \theta_0 = C_6 \tag{18.29}$$

эканлиги куринади. (18.29) ни эътиборга олиб Эйлернинг кинематик тенгламаларини (18.28) га қўямиз:

$$L_O \sin\theta_0 \sin\varphi = I_\xi \frac{d\psi}{dt} \sin\theta_0 \sin\varphi,$$

$$L_O \sin\theta_0 \cos\varphi = I_\eta \frac{d\psi}{dt} \sin\theta_0 \cos\varphi,$$

$$L_O \cos\theta_0 = I_\zeta \left(\frac{d\psi}{dt}\cos\theta_0 + \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

ва тегишли қисқартиришларни бажаргандан сўнг

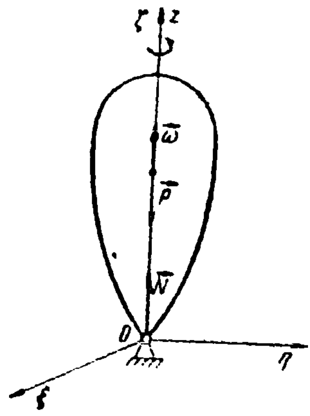
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{L_O}{I_\xi} = C_7 = n,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_O - I_\zeta h}{I_\zeta} \cdot \cos\theta_0 = C_8 = n_1$$

ифодаларга эришамиз. Бундан

$$\psi = nt + \psi_0, \quad \varphi = n_1 t + \varphi_0 \quad (18.30)$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Шундай қилиб $\theta = \theta_0 = \text{const}$ булиб, ψ ва φ бурчаклар текис ўзгарар экан. (18.29), (18.30) ифодалардан жисм мураккаб ҳаракат қилиши кўриниб турибди. Бунда жисмга боғланган $O\zeta$ ўқ билан қузғалмас Oz ўқ орасидаги бурчак ўзгармайди. Жисм $O\zeta$ уқ атрофида модули узгармас n_1 бурчак тезлик билан айланади, $O\zeta$ ўқнинг ўзи эса Oz ўқ атрофида ўзгармас n бурчак тезлик билан айланади. Жисмнинг бундай ҳаракатига *мунтазам прецессия* дейилади.



18.7- расм.

103- §. Гироскопнинг элементар назарияси

Гироскоп деб қўзғалмас нуқта орқали ўтувчи симметрия уқи атрофида катта тезлик билан айланувчи жисмга айтилади. Гироскопнинг умумий назариясини қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланувчи жисм ҳаракатининг қонунлари асосида яратиш мумкин. Биз амалий эҳтиёжларга етарлича жавоб берувчи гироскопнинг бирмунча содда — элементар назариясини қараб чиқамиз. Гироскопнинг элементар назарияси система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема асосида қурилиши мумкин.

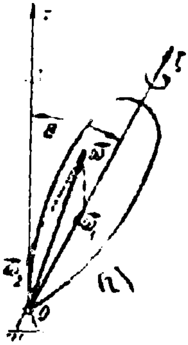
Гироскопнинг ҳаракатида ажойиб хусусиятлар кузатилади. Гироскоп ҳаракатининг хусусиятларидан техниканинг жуда куп соҳаларида, масалан, сув, ҳаво транспортида, асбобсозликда кенг фойдаланилади.

Аввало вертикал симметрия уқи атрофида айланувчи бир жинсли жисмни қарайлик. Айланиш уқида бирор O нуқта танлаб ушбу нуқтага нисбатан жисмнинг ҳаракат миқдори моментини ҳисоблаймиз. $O\zeta$ координаталар уқини айланиш уқи билан устма-уст тушадиган қилиб $O\xi\eta\zeta$ қузғалувчи координаталар системасини киритамиз. У ҳолда, $I_{\xi\zeta} = I_{\eta\zeta} = 0$; $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$ бажарилгани учун (18.16) дан

$$\vec{L}_O = I_\zeta \vec{\omega}$$

келиб чиқади. Жисмга $O\zeta$ ўқ устида ётувчи $\vec{P}$ оғирлик кучи ва O нуқтадаги $\vec{N}$ таянч реакцияси таъсир қилади (18.7- расм). Кинетик момент ҳақидаги теоремага асосан

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{m}_O(\vec{P}) + \vec{m}_O(\vec{N}),$$



18.8-расм.

бунда $\vec{m}_O(\vec{P}) + \vec{m}_O(\vec{N}) = 0$, $I_O = I_\zeta$ булгани учун

$$\vec{L}_O = I_\zeta \vec{\omega} = \overrightarrow{\text{const}}$$

муносабатни ёза оламиз. Шундай қилиб, бу ҳолда жисмнинг (гироскопнинг) ҳаракат миқдори моменти ўзгармас, гироскоп ўзгармас бурчак тезлик билан айланади, ҳаракат миқдори моменти вектори билан бурчак тезлик вектори устма-уст тушади.

Энди гироскоп уқининг O нуқтаси маҳкамланган ва ўқнинг узи вертикалга нисбатан бирор θ бурчакка оғган ҳолни кўрайлик. Гироскоп узининг $O\zeta$ симметрия ўқи атрофидаги айланма ҳаракат ва бу ўқ билан биргаликда вертикал Oz ўқ атрофидаги айланма ҳаракатларнинг йиғиндисидан иборат бўлган мураккаб ҳаракат қилсин. Ўз ўқи атрофидаги айланма ҳаракатининг (хусусий айланма ҳаракат) бурчак тезлигини $\vec{\omega}_1$, вертикал уқ атрофидаги айланма ҳаракатининг бурчак тезлигини эса $\vec{\omega}_2$ орқали белгилайлик. Гироскопнинг абсолют ҳаракатдаги бурчак тезлиги $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ бўлади (18.8-расм). Кўриниб турибдики, бу ҳолда $\vec{\omega}$ вектор ҳам, гироскопнинг $\vec{L}_O$ кинетик моменти вектори ҳам $O\zeta$ ўқ устида ётмайди.

Гироскопнинг элементар назариясида $|\vec{\omega}_1| \gg |\vec{\omega}_2|$ фараз қилиниб, гироскопнинг ҳаракат миқдори моменти

$$\vec{L}_O = I_{O\zeta} \cdot \vec{\omega}_1 \qquad (\zeta)\ (18,31$$

ва бинобарин, $\vec{L}_O$ вектор $O\zeta$ ўқ бўйлаб йўналган деб олинади. Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O. \qquad (\text{ʒ})\ (18.32)$$

Бунда $\vec{M}_O$ — гироскопга таъсир қилувчи кучларнинг O нуқтага нисбатан бош моменти. Маълумки, $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$ ҳосила $\vec{L}_O$ вектор учининг чизиқли тезлигини ифодалайди. $\vec{L}_O$ вектор Oz ўқ атрофида $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан айланиши туфайли бу тезлик $\vec{\omega}_2 \times \vec{L}_O$ купайтма орқали аниқланади. У ҳолда, (18.32) ифода урнига

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{L}_O = \vec{M}_O$$

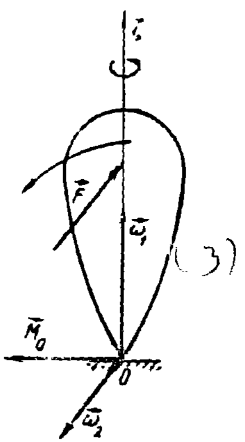
муносабатни ёзиш мумкин. (18.31) га асосан охирги ифода

$$I_{O\zeta} (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) = \vec{M}_O \qquad (18.33)$$

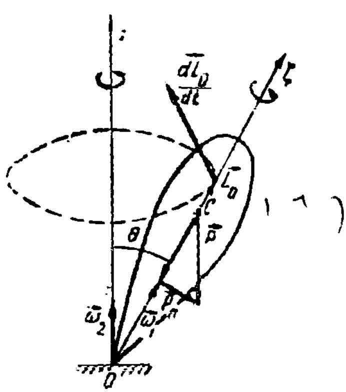
кўринишни олади. (18.33) тенглама *гироскоп элементар назариясининг асосий тенгламасидан* иборат. Бу тенглама $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик векторларини гироскопга таъсир қилувчи кучларнинг гироскоп қўзғалмас O нуқтасига нисбатан бош моменти билан боғлайди. $\vec{M}_O$ — гироскопни ҳаракатлантирувчи жисмлар томонидан гироскопга қўйилган кучларнинг бош моментидан иборат бўлса, $\vec{M}_O^{(гир)} = -\vec{M}_O = I_{O\zeta} (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$ гироскоп томонидан бу жисмларга қўйилган кучларнинг бош моменти *гироскопик момент* дейилади.

(18.33) тенгламадан фойдаланиб гироскоп ҳаракатининг турли хусусиятларини тушунтириш мумкин. Шулардан баъзиларини кўрайлик.

1. Вертикал ўқ атрофида айланувчи гироскопнинг ўқига перпендикуляр бўлган куч билан унга таъсир қилинса, гироскоп ўқи мазкур кучга перпендикуляр бўлган йўналишда оғади. Бу ҳодисани қуйидагича тушунтириш мумкин. Вертикал симметрия ўқ атрофида $\vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айланувчи гироскоп берилган бўлсин. Гироскопнинг ўқига унга перпендикуляр йўналишда $\vec{F}$ куч таъсир қилсин (18.9-расм.) Бу кучнинг O нуқтага нисбатан M_O моменти $O\zeta$ ва $\vec{F}$ кучнинг ҳар бирига перпендикуляр равишда йўналади. (18.33) га асосан, $\vec{\omega}_2$ вектор $\vec{\omega}_1$ орқали ўтувчи ва $\vec{M}_O$ га перпендикуляр бўлган



18.9-расм.



18.10-расм.

текисликда ётади. $\vec{\omega}_1$ вектор $O\zeta$ уқнинг айланишидаги бурчак тезлик вектори булгани учун бу ўқ $\vec{\omega}_2$ га перпендикуляр равишда ва демак, $\vec{F}$ куч йўналишига ҳам тик булган йўналишда оғади.

2. Гироскоп ҳаракатининг қизиқ бир ҳолини — мунтазам прецессияни курамиз. Маълумки, мунтазам прецессияда жисм бирор $O\zeta$ симметрия ўқи атрофида ўзгармас $\vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айланади, бу ўқнинг ўзи эса иккинчи бир қузғалмас Oz ўқ атрофида ўзгармас $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан айланади (18.10-расм). Бунда $O\zeta$ ва Oz ўқлар орасидаги θ бурчак ўзгармас сақланади. θ бурчакка *нутация бурчаги*, $\vec{\omega}_2$ га эса *прецессия бурчак тезлиги* дейилади.

Гироскопга таянч реакциясидан бошқа фақат C массалар марказига қўйилган $\vec{P}$ оғирлик кучи таъсир қилсин. Кўриниб турибдики, агар гироскоп $O\zeta$ ўқ атрофида айланмаса, у оғирлик кучи таъсирида пастга йиқилади. Лекин унга $O\zeta$ ўқ атрофида айланма ҳаракат берилса, θ бурчак ўзгармас сақланиб, $O\zeta$ ўқ Oz ўқ атрофида айлана бошлайди. Бу қуйидагича тушунтирилади. $\vec{P}$ кучнинг O нуқтага нисбатан $\vec{M}_O$ моменти Oz ва $O\zeta$ ўқлар орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр бўлади. $\vec{M}_O$ вектор гироскоп кинетик моменти вектори учининг тезлик векторига тенг. Демак, бу тезлик вектори ҳам гироскоп ҳаракати давомида Oz ва $O\zeta$ ўқлар орқали утувчи текисликка перпендикуляр булиб қолаверади. Аввалги кўрилган ҳолга асосан, гироскопнинг $O\zeta$ уқи $\vec{P}$ кучнинг $\vec{P}_n$ ташкил этувчиси таъсирида $\vec{P}_n$ га перпендикуляр йуңалишда тегишли томонга оғади. $\vec{L}_O$ вектор учининг тезлиги ҳар вақт Oz ва $O\zeta$ уқлар орқали утувчи текисликка перпендикулярлигини сақлагани туфайли, бундай оғишларнинг кетма-кеглиги $O\zeta$ ўқнинг Oz ўқ атрофида айланма ҳаракатини беради ва θ бурчакнинг узгармаслигини таъминлайди Шундай қилиб, мунтазам прецессия содир бўлади.

ω_2 прецессия бурчак тезлиги билан гироскопнинг уз уқи атрофида айланиш бурчак тезлиги орасидаги муносабатни курсатамиз (18.33) га асосан қуйидагини ёзиш мумкин:

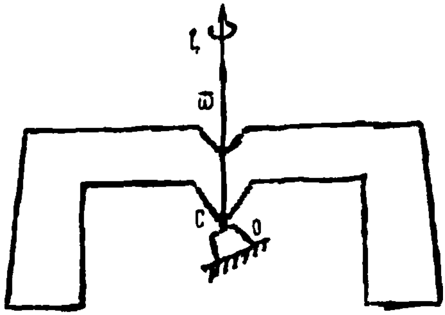
$$|I_{O\zeta}(\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1)| = |\vec{M}_O|$$

ёки

$$I_{O\zeta}\omega_2\omega_1 \sin\theta = P \cdot OC \cdot \sin\theta.$$

Бундан

$$\omega_2 = \frac{P \cdot OC}{I_{O\zeta} \cdot \omega_1}. \quad (18.34)$$



18.11-расм.

(18.34) формуладан курамизки, ω_2 бурчак тезлик ω_1 бурчак тезликка тескари пропорционал, яъни гироскоп ўз ўқи атрофида қанчалик тез айланса, у шунчалик секин прецессиялайди (вертикал ўқ атрофида у шунчалик секин айланади) ва аксинча, гироскоп ўз уқи атрофида қанчалик секин айланса, у шунчалик тез прецессиялайди.

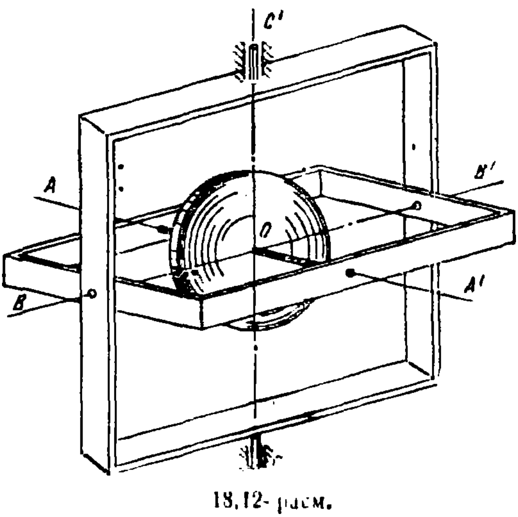
3. Агар гироскопнинг оғирлик маркази унинг таянч нуқтасида бўлса, гироскоп ўқининг йўналиши ўзгармайди (18.11-расм). Ҳақиқатан бу ҳолда:

$$\vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{P}) + \vec{m}_O(\vec{N}) = 0.$$

Бинобарин, $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$. Бундан $\vec{L}_O = I_{O\zeta} \cdot \vec{\omega} = \overline{\text{const}}$ ёки

$$\vec{\omega} = \overline{\text{const}}$$

ҳосил бўлади. Гироскоп ҳаракатининг бу хусусиятидан навигация асбобларида кенг фойдаланилади. Мисол тариқасида энг содда гироскопик асбоб—карданли осма гироскопни кўрайлик (18.12-расм). Гироскоп ротори ички рамага подшипниклар ёр-



18.12-расм.

ламида урнатилган AA' симметрия ўқ атрофида айланади. Ички раманинг ўзи ташқи рамага подшипниклар ёрдамида ўрнатилган BB' ўқ атрофида, ташқи рама эса қузғалмас подшипникларга урнатилган CC' уқ атрофида айланиши мумкин.

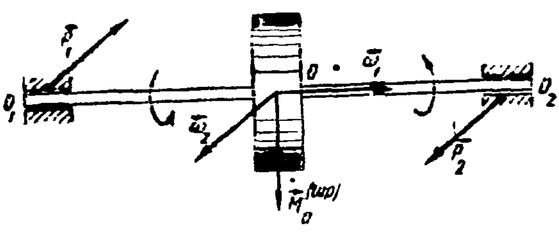
AA', BB', CC' уқлар роторнинг O оғирлик марказида кесишади. Шундай қилиб, ротор бир-бирига боғлиқ булмаган учта уқ атрофида айланма ҳаракат қила олади. Подшипниклардаги ишқаланишлар, ҳавонинг қаршилиги ва рамаларнинг массалари эътиборсиз даражада кичик ҳисобланади. Гироскоп роторини AA' ўқ атрофида катта тезлик билан айлантирайлик. Гироскопга фақат O нуқтага қўйилган оғирлик кучи таъсир қилади. Бу оғирлик кучининг O нуқтага нисбатан моменти нолга тенг. Бинобарин, гироскопнинг $\vec{L}_0$ кинетик моментининг вектори *ўзгармас булади. Демак, AA' ўқ ҳам ҳаракат бошида эга* бўлган йуналишини сақлайди.

104 § Гироскопик эффект

Агар жисм икки нуқтаси билан бириктирилган ўқ атрофида айланиб, бу ўқнинг ўзи ҳам бошқа бирор уқ атрофида айланадиган бўлса, уқнинг бирикиш нуқталарида (одатда подшипникларда) қўшимча юклама кучлар пайдо бўлиб, унга *гироскопик эффект* дейилади. Бундай юклама кучлар пайдо бўлишини гироскоп элементар назариясининг тенгламаси ёрдамида тушунтириш мумкин. Масалан, бирор жисм, гироскоп O_1 ва O_2 нуқталарда подшипникларга бириктирилган O_1O_2 ўқ атрофида $\vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айлансин. Ўқнинг узи эса подшипниклар билан биргаликда $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан 18.13-расмда курсатилган йуналишда айлансин. Бундай гироскоп ҳаракатининг тенгламаси (18.33) га асосан

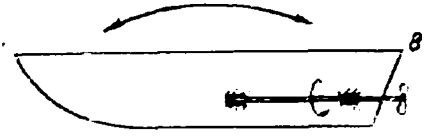
$$I_{O_1O_2}\,\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 = \vec{M}_O$$

булади. Бунда $\vec{M}_O$ — гироскоп ўрнатилган қурилмага таъсир қилувчи ва гироскоп ўкини подшипниклари билан биргаликда айланма ҳаракатга келтирувчи кучларнинг O нуқтага нисбатан бош моменти, $I_{O_1O_2}$ — гироскопнинг O_1O_2 ўққа нисбатан инер-



18 13- расм.

ция моменти. Аввалги параграфда келтирилган мулоҳазаларимизга асосан гироскоп томонидан атроф жисмларга (таянчларга), хусусан, бу ерда O_1 ва O_2 подшипникларга, O нуқтага



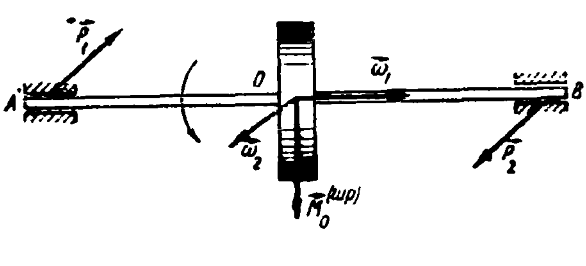
18.14- расм.

нисбатан моменти $\vec{M}_O^{(гир)} = I_{OO_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$ булган кучлар таъсир қилади. Бу кучларнинг ўрнига уларга эквивалент булиб, моменти $\vec{M}_O^{(гир)}$ га тенг бўлган бирор $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфтни мослаш мумкин. Шундай қилиб, гироскоп ўқининг бурилиши натижасида уқнинг таянчлари булмиш подшипникларда қўшимча юклама кучлар юзага келади. Гироскопик момент формуласидан кўрамизки, бу кучлар гироскопнинг ўз ўқи атрофида айланишидаги бурчак тезлиги, гироскоп ўқининг айланишидаги бурчак тезлиги ва гироскопдаги массалар тақсимотига боғлиқ. Гироскоп ўз уқи атрофида катта бурчак тезлик билан айланганда, катта юклама кучларнинг пайдо бўлиши натижасида ўқнинг кескин бурилиши таянчларнинг синишига олиб келиши мумкин. Бу ҳол айланувчи валлари, ўқлари бўлган машина ва механизмларни лойиҳалашда, албатта, ҳисобга олиниши зарур.

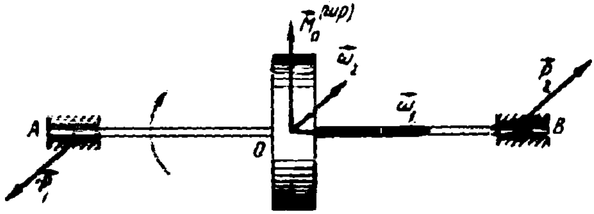
Характерли иккита мисол келтирамиз:

1. *Кемаларнинг чайқалишида пайдо бўладиган гироскопик эффект.* Кеманинг бурун ва қуйи қисмларини кўтарилиб, тушиб чайқалишида кема корпуси буйлаб жойлашган ҳамда катта тезлик билан айланувчи валнинг подшипникларига қўшимча катта юклама кучлар таъсир қилади. Агар вал кеманинг қуйи B томонидан A бурни томонига қараб кузатувчига нисбатан соат стрелкасига тескари йўналишда айланса (18 14-расм), кеманинг бурни кўтарилганида горизонтал текисликда ётувчи ва 18.15- расмда кўрсатилган йуналишда вал подшипникларига таъсир қилувчи $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфт пайдо бўлади.

Кеманинг бурни пастга тушганида эса бундай $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ жуфт вал подшипникларига 18.16- расмда кўрсатилганидек таъсир қилади.



18.15- расм.



18.16- расм.

Вал катта тезликда айланганида кеманинг чайқалиши натижасида пайдо буладиган гироскопик момент катта бўлиши мумкин. Бу подшипникларни тезда ишдан чиқишига олиб келади.

2. Ҳавода *самолётларнинг* горизонтал текисликда йўналишини узгартириб *бурилишида* (виражда) *пайдо бўладиган гироскопик эффектни* курайлик. Самолёт вираж қилганида винт ўқи горизонтал текисликда бурилиши натижасида вертикал текисликда ётувчи ва подшипниклар орқали самолёт корпусига таъсир қилувчи жуфт пайдо бўлади. Бу жуфтнинг моменти самолёт корпусининг массасига нисбатан катта бўлиб кетиши мумкин. Бу ҳолда самолёт жуфт таъсирида вертикал текисликда кескин бурилади. Агар вираж чапга бўлса, самолёт вертикал текисликда кескин юқорига кўтарилади. Вираж ўнгга булганида эса у вертикал текисликда пастга шўнғийди. Бундай виражлар бир винтли самолётларда хавфли ҳисобланади.

XIX боб. ЗАРБА НАЗАРИЯСИ

Моддий нуқта, механик система барча ёки баъзи нуқталарининг тезликлари вақтнинг жуда кичик оралигида чекли катта қийматга узгариши ҳодисаси зарба дейилади. Вақтнинг зарба ҳодисаси содир бўлувчи оралигига *зарба вақти* дейилади ва одатда τ орқали белгиланади.

Зарба процессида вақтнинг жуда кичик оралигида тезликлар чекли қийматларга узгариши натижасида шу вақт оралигида катта тезланишлар юзага келади. Шунинг учун зарба пайтида таъсир қилувчи кучлар зарбадан олдинги ёки зарбадан кейинги кучларга нисбатан жуда катта булади. Зарба пайтида таъсир қилувчи кучларга *оний* ёки *зарбали кучлар*, уларнинг зарба вақти оралигидаги импульсларига эса *зарбали импульслар* дейилади.

105-§. Моддий нуқтага зарбали куч таъсирининг асосий тенгламалари. Тиклаш коэффициенти

Моддий нуқта учун зарба ҳодисасини қараб чиқамиз. Бирор $\vec{F}$ куч таъсирида ҳаракатланувчи m массали моддий нуқта олайлик. Бирор t_1 моментдан бошлаб бу нуқтага $\vec{P}$ зарбали куч таъсир қила бошласин ва бу кучнинг таъсири t_2 пайтда тугасин. $\tau = t_2 - t_1$ вақт оралигини *зарба вақти* деб атаймиз. Нуқтанинг зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги тезликларини мос равишда $\vec{v}$ ва $\vec{u}$ орқали белгилаб, зарба вақти учун импульслар теоремасини ифодаловчи (17.17) тенгламани қўллаймиз:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt + \int_0^{\tau} \vec{P} dt.$$

Бунда $\int_0^{\tau} \vec{P} dt$ — зарбали куч импульси; уни $\vec{S}$ орқали белгилайлик. Зарбали $\vec{P}$ кучнинг қиймати катта булгани учун $\vec{S}$ нинг қиймати чекли бўлади τ зарба вақти жуда кичик бўлгани сабабли $\vec{F}$ кучнинг бу вақт оралигидаги импульсининг қиймати жуда кичик; шунга кура зарбали импульсга нисбатан уни ҳисобга олмаслик мумкин. У ҳолда охирги тенгликдан ёза оламиз:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S}. \qquad (19.1)$$

Равшанки, зарбага учраган моддий нуқтанинг ёки жисмнинг зарбадан кейинги кинематик ҳолати, албатта, унинг физик хусусиятларига ҳам боғлиқ бўлади. Масалан, маълум масофадан горизонтал қузғалмас сиртга резина тупни ёки пулат шарни бир хил бошланғич тезлик билан ташласак, уларнинг сиртга урилгандан (зарбадан) кейинги тезликлари турлича булади.

Шарчанинг қузғалмас горизонтал сиртга зарбасини олайлик. Шарчанинг зарбага учраган пайтдаги тезлиги сиртга перпендикуляр йуналган бирор $\vec{v}$ вектор бўлсин. Зарба процессини икки фазага ажратиш мумкин. Биринчи фаза давомида шарча деформациялана бориб, фаза охирида унинг тезлиги нолга айланади. Бу фаза давомида шарчанинг кинетик энергияси деформацияланиш натижасида ҳосил бўладиган эластиклик кучларининт потенциал энергиясига айланади ва қисман шарчанинг қизишига сарфланади. Иккинчи фаза давомида эластиклик кучининг таъсири остида шарнинг дастлабки шакли тиклана бошлайди, лекин тулиқ тикланмайди. Қолдиқ деформацияга ва қизишга сарфланиш туфайли шарнинг дастлабки кинетик энергияси ҳам қайта тикланмайди. Шарнинг зарбадан кейинги кинетик энергияси унинг зарбадан аввалги кинетик энергиясидан кичик булади. Демак, шарнинг зарбадан кейинги тезлигининг модули унинг зарбадан аввалги тезлигининг модулидан кичик булади.

..., ифодага зарбага учраган моддий нуқтанинг ёки жисмнинг физик хусусиятларини билдирувчи катталик ошкор равишда кирмаган. Моддий нуқта учун бундай катталикни характерловчи коэффициент *тиклаш коэффициенти* дейилиб, у нуқтанинг зарбадан кейинги ва зарбадан аввалги нисбий тезликларининг урилиш сиртига урилиш нуқтасидан ўтказилган нормалдаги проекциялари нисбатининг модулига тенгдир. Масалан, массаси m бўлган моддий нуқта h_1 масофадан бошланғич тезликсиз тушиб, бирор қўзғалмас горизонтал силлиқ s сиртнинг A нуқтасида унга урилсин. Сиртга нисбатан нуқтанинг зарбадан аввалги тезлигини $\vec{v}$, зарбадан кейинги тезлигини эса $\vec{u}$ орқали белгилайлик (19.1- расм). s сиртга A нуқтада ўтказилган нормални n орқали, $\vec{v}$ ва $\vec{u}$ тезликларнинг бу нормалдаги проекцияларини мос равишда v_n ва u_n, нуқтанинг зарбадан кейинги кутарилиш масофасини h_2 орқали белгилайлик, тиклаш коэффициенти эса k бўлсин. У ҳолда

$$k = \left|\frac{u_n}{v_n}\right|. \qquad (19.2)$$

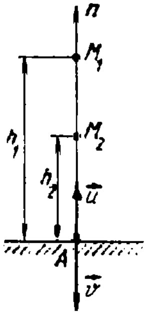
$\vec{v}$ ва $\vec{u}$ векторлар қарама-қарши йўналган векторлар бўлгани учун соннинг модули таърифига кўра (19.2) ни

$$k = -\frac{u_n}{v_n} \qquad (19.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Моддий нуқтанинг зарбадан аввалги тезлик вектори унинг сиртга тўқнашиш нуқтасидан сиртга ўтказилган нормал билан ўткир бурчак ташкил қилганда ҳам тиклаш коэффициенти (19.2) ёки (19.3) муносабатлардан аниқланади.

Агар зарбада жисм қатнашаётган булса, тиклаш коэффициенти жисм урилиш нуқтасининг урилиш сиртига нисбатан зарбадан кейинги ва зарбадан аввалги тезликларининг урилиш нуқтасидан урилувчи жисмлар сиртига ўтказилган умумий нормалдаги проекцияларининг нисбати билан аниқланади.

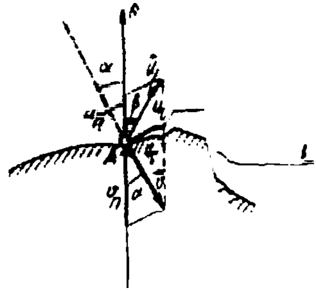


19.1- расм.

Тиклаш коэффициенти оддий тажриба билан қуйидагича аниқланиши мумкин. Бирор шарча (моддий нуқта) ни горизонтал, қўзғалмас, силлиқ сиртга $M_1A = h_1$ масофадан ташлайлик (19.1- расм). Шарчанинг M_1A йўлда оғирлик кучи таъсиридаги ҳаракатига кинетик энергия ҳақидаги теоремани қўлласак, $v = \sqrt{2gh_1}$ булади. Шарча сиртга урилганидан сўнг h_2 баландликка кутарилсин. У ҳолда шарчанинг зарбадан кейинги тезлиги $u = \sqrt{2gh_2}$ бўлади. (19.2) га асосан ёза оламиз:

$$k = \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}}$$

$$\text{ёки } k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$



19.2-расм

Шарчани ва сиртни турли материаллардан ясаб, шарчанинг тушиш ва кутарилиш масофаларини ўлчаш йўли билан турли материаллар учун тиклаш коэффициентини аниқлаш мумкин бўлади. Реал жисмлар учун тиклаш коэффициенти $0 < k < 1$ интервалда булади. Абсолют эластик жисмлар учун $k = 1$ ва абсолют а[...] жисмлар учун $k = 0$ олинади. $k = 1$ бўлганда зарба э[...]ластик *эластик зарба*, $k = 0$ бўлганда эса зарба *абсолют* [...]*солют* *булмаган зарба* дейилади.

(19.1) ва (19.2) тенгламалар *моддий нуқтага* [...] *таъсирининг асосий тенгламалари* ҳисобланади. [...] маларни моддий нуқтанинг сиртга қийшиқ зарбаси [...]енгла-лашни кўриб чиқамиз. Массаси m бўлган нуқта $\vec{v}$ тезлик [...] қўл-силлиқ s сиртнинг A нуқтасига урилсин. A нуқтадан [...] билан нормал ўтказамиз. $\vec{n}$ ва $\vec{v}$ орасидаги бурчакни α [...] белгилаймиз. Нуқтанинг зарбадан кейинги тезлиги $\vec{u}$, бу [...] нормал билан ҳосил қилган бурчаги β бўлсин (19.2-расм). Зарбали импульснинг нормал буйлаб йўналганини [...] олиб, (19.1) тенгламани A нуқтадан сиртга ўтказилган [...] ва нормаль йўналишларига проекциялаб,

$$\left.\begin{aligned} & m(u\sin\beta - v\sin\alpha) = 0, \\ & m(u\cos\beta + v\cos\alpha) = S_n, \\ & k = \frac{u\cos\beta}{v\cos\alpha} \end{aligned}\right| \qquad (19.4)$$

тенгламаларга эга буламиз. Бу тенгламалар системаси [...] моддий нуқтанинг зарбадан кейинги тезлиги модулини, [...] нинг нормал билан ҳосил қилган бурчагини ва зарбали импульсини аниқлаш мумкин:

$$u = v\sqrt{\sin^2\alpha + k^2\cos^2\alpha}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{k}\operatorname{tg}\alpha, \quad S = m(1+k)v\cos\alpha.$$

$k < 1$ бўлганида, $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha$ ва $\beta > \alpha$ бўлади, яъни қайтиш бурчаги тушиш бурчагидан катта бўлар экан. Абсолют эластик зарбада $k = 1$ бўлиб, тушиш бурчаги қайтиш бурчагига тенг.

106-§. Зарбали куч таъсиридаги механик системанинг асосий тенгламалари

Механик система бирор $M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ нуқтасининг зарбадан аввалги ва зарбадан кейинги тезликлари мос равишда $\vec{v}_i$ ва $\vec{u}_i$ бўлсин. Бу нуқтага (19.1) тенгламани қўллаймиз:

$$m_i\vec{u}_i - m_i\vec{v}_i = \vec{S}_i^E + \vec{S}_i^I, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

бунда $\vec{S}_i^E$, $\vec{S}_i^I$ мос равишда M_i нуқтага таъсир қилувчи барча *ташқи* ва *ички зарбали импульсларни* ифодалайди. $\sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i^I = 0$ бўлишини эътиборга олиб, охирги тенгламалар системасини қўшамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{u}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i^E.$$

Бу тенгликнинг чап томонидаги $\vec{K}_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$, $\vec{K}_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{u}_i$ ифодалар мос равишда системанинг зарбадан аввалги ва зарбадан кейинги ҳаракат миқдорларидан иборат. Бинобарин,

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i^E$$

ифодани ёзиш мумкин. (17.12) га асосан охирги тенглик қуйидаги кўринишга келади:

$$M(\vec{u}_C - \vec{v}_C) = \sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i^E. \tag{19.5}$$

Бунда M — системанинг массаси, $\vec{u}_C$, $\vec{v}_C$ — система массалар марказининг зарбадан кейинги ва зарбадан аввалги тезликлари.

Система зарбали кучлар таъсирида бўлган ҳол учун система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{P}_i^E.$$

Бунда $\vec{L}_O$ — системанинг бирор марказга нисбатан кинетик моменти, $\vec{r}_i$ — M_i нуқтанинг радиус-вектори, $\vec{F}_i^E$, $\vec{P}_i^E$ эса M_i нуқтага таъсир қилувчи барча ташқи оддий ва зарбали кучларнинг тенг таъсир этувчиларидан иборат. Бу муносабатни зарба вақти оралигида интеграллаб,

$$\vec{L}_{O_2}-\vec{L}_{O_1}=\int_0^\tau\Big(\sum_{i=1}^n\vec{r}_i\times\vec{F}_i^E\Big)dt+\int_0^\tau\Big(\sum_{i=1}^n\vec{r}_i\times\vec{P}_i^E\Big)dt$$

ифодага эга бўламиз. Бунда $\vec{L}_{O_2}$, $\vec{L}_O$ — мос равишда, системанинг зарбадан кейинги ва зарбадан аввалги кинетик моментлари. Зарба даврида $\vec{r}_i=\overrightarrow{\text{const}}$ ($i=1, 2, \ldots, n$) эканлигини эътиборга олиб, охирги ифодани

$$\vec{L}_{O_2}-\vec{L}_{O_1}=\sum_{i=1}^n\vec{r}_i\times\int_0^\tau\vec{F}_i^E dt+\sum_{i=1}^n\vec{r}_i\times\int_0^\tau\vec{P}_i^E dt$$

кўринишда ёзамиз. $\int_0^\tau\vec{F}_i^E dt$ — ташқи оддий кучнинг импульси зарбали импульсга нисбатан жуда кичик миқдор бўлганидан уни ҳисобга олмаймиз, $\int_0^\tau\vec{P}_i^E dt=S_i^E$ — ташқи зарбали импульс. У ҳолда

$$\vec{L}_{O_2}-\vec{L}_{O_1}=\sum_{i=1}^n\vec{r}_i\times\vec{S}_i^E$$

бўлади. Бунда $\vec{r}_i\times\vec{S}_i^E=\vec{m}_O(\vec{S}_i^E)-M_i$ нуқтага таъсир қилувчи ташқи зарбали кучлар импульсининг моменти. Демак,

$$\vec{L}_{O_2}-\vec{L}_{O_1}=\sum_{i=1}^n\vec{m}_O(\vec{S}_i^E). \qquad (19.6)$$

v_n, u_n мос равишда, механик система урилиш нуқтасининг зарбадан аввалги ва зарбадан кейинги тезлигининг урилиш сиртига утказилган перпендикулярдаги проекциялари десак, система учун тиклаш коэффициенти (19.3) га ухшаш

$$k=-\frac{u_n}{v_n} \qquad (19.7)$$

формула ёрдамида топилади.

(19.5), (19.6), (19.7) тенгламалар *зарбали кучлар таъсиридаги механик системанинг асосий тенгламалари* ҳисобланади. Бу тенгламалар механик системанинг бирор қузғалмас силлиқ сиртга зарбаси нуқтаи назаридан тузилди. Улар ёрдамида зарбадан аввалги ҳаракати маълум механик система ёки қаттиқ жисмнинг зарбадан кейинги ҳаракатини топиш мумкин. Бу тенгламаларни икки механик система ёки қаттиқ жисмларнинг бир-бирига зарбасига ҳам қуллаб, уларнинг зарбадан кейинги ҳаракатларини аниқлаш мумкин. Бунда тенгламалар аввал жисмларнинг бирига нисбатан қулланилади, иккинчиси қўзғалмас деб олинади. Кейин биринчи жисм қўзғалмас деб олиниб, тенгламаларни иккинчи жисмнинг зарбасига қўлланилади. Тиклаш коэффициентини аниқлашда қўлланиладиган нормал чизиқ жисмларнинг урилиш нуқталаридан жисмлар сиртларига умумий қилиб ўтказилади.

Икки жисмнинг бир-бирига зарбасини ҳаракат миқдори ва ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунлари асосида ҳам урганиш мумкин. Бунда икки жисм битта система деб олинса, зарбали кучлар ички кучларни ҳосил қилади ва улар системанинг ҳаракат миқдори ҳамда ҳаракат миқдори моментига таъсир этмайди. (19.5) ва (19.6) тенгламаларнинг ўрнига зарбадан аввалги, зарбадан кейинги пайтларга нисбатан ҳаракат миқдори ва кинетик моментининг сақланиш қонунлари тузилади. Бу қонунларни ифодаловчи тенгламалар билан (19.7) тенглама биргаликда икки жисмнинг бир-бирига зарбасини тўлиқ ифодалайди.

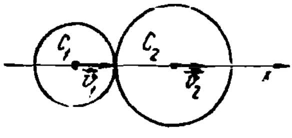
107-§. Икки шарнинг бир-бирига тўғри марказий зарбаси

Илгарилама ҳаракатдаги икки жисмнинг бир-бирига урилиши олдида улар инерция марказларининг тезликлари шу марказларни туташтирувчи тўғри чизиқ буйича йўналган бўлса, бундай зарба *марказий тўғри зарба* дейилади.

Массалари m_1 ва m_2 бўлган икки силлиқ шарнинг бир-бирига тўғри зарбасини кўрайлик. Биринчи шар масса марказининг зарбадан аввалги ва зарбадан кейинги тезликлари мос равишда $\vec{v}_1$ ва $\vec{u}_1$, иккинчи шар учун эса бундай тезликлар мос равишда $\vec{v}_2$ ва $\vec{u}_2$ бўлсин. Шарлар илгарилама ҳаракат қилганликлари учун уларнинг зарбадан аввалги ва зарбадан кейинги ҳаракатлари шу шарлар масса марказларининг тезликлари билан характерланади. Фараз қилайлик, $|\vec{v}_1|>|\vec{v}_2|$ бўлсин. У ҳолда биринчи шар иккинчи шарга етиб, унга урилади (19.3-расм). x уқни шарларнинг C_1, C_2 марказларидан ўтувчи C_1C_2 туғри чизиқ буйлаб йуналтириб, бу уққа нисбатан ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини ёзамиз:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \qquad (19.8)$$

Бу муносабатни шарларнинг ҳар бирига (19.5) тенгламани алоҳида-алоҳида қўллаб ҳам ҳосил қилиш мумкин. u_1 ва u_2 тезликларни аниқлаш учун яна битта тенглама тузамиз. Шарлар урилиш нуқталарининг зарбадан кейинги нисбий тезлигининг зарбадан аввалги нисбий тезлигига нисбати, маълумки, тиклаш коэффициентига тенг, яъни



19.3-расм.

$$k = \frac{|u_1 - u_2|}{|v_1 - v_2|} = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} \quad \text{ёки}$$

$$u_1 - u_2 = k(\vec{v}_1 - \vec{v}_2). \qquad (19.9)$$

(19.8) ва (19.9) тенгламаларни биргаликда ечиб u_1 ва u_2 ни аниқлаймиз.

$$u_1 = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} v_1 + (1 + k)\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2, \qquad (19.10)$$

$$u_2 = \frac{(1 + k)m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2} v_2. \qquad (19.11)$$

Зарбали импульсни ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун (19.5) тенгламани урилувчи шарлардан бирига қўллаш керак. Қуйидаги икки хусусий ҳолни куриб чиқамиз.

1) Абсолют эластик бўлмаган зарба ($k = 0$). Бу ҳолда (19.10) ва (19.11) формулалардан

$$u_1 = u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

келиб чиқади, яъни шарлар зарбадан кейин бир хил тезлик билан ҳаракатланади. Шарларнинг массалари тенг бўлганда бу тезлик қуйидагича ёзилади:

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2),$$

яъни шарлар зарбадан кейин зарбадан аввалги тезликлари йиғиндисининг ярмига тенг бўлган тезлик билан ҳаракатланади.

2) Абсолют эластик зарба ($k = 1$). Бу ҳолда (19.10) ва (19.11) формулалардан

$$u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \quad u_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

ҳосил бўлади. Бу формулалардан кўринадики, бир хил массали икки шар урилганда ($m_1 = m_2$), уларнинг тезликлари алмашинади, яъни: $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$.

108-§. Зарба процессида кинетик энергиянинг ўзгариши

Зарба процессида моддий нуқта ёки механик система кинетик энергиясининг ўзгаришини аввал таъкидлаб ўтган эдик. Бу узгариш кинетик энергиянинг зарбадан аввалги ва зарбадан кейинги қийматларининг айирмасидан иборат. Массаси m, зарбадан аввалги тезлиги $\vec{v}$, зарбадан кейинги тезлиги $\vec{u}$ бўлган моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгаришини ёзамиз:

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m(v^2 - u^2). \qquad (19.12)$$

v ва u тезлик векторларининг урилиш сиртига урилиш нуқтасидан ўтказилган уринма ва нормалдаги проекцияларини текширамиз. 19.2-расмдан бевосита кўринадики, $u_\tau = v_\tau$; бундан ташқари тиклаш коэффициентининг формуласидан $u_n = k \mid v_n \mid$. У ҳолда

$$u^2 = u_n^2 + u_\tau^2 = k^2 v_n^2 + u_\tau^2 \text{ ва } v^2 = v_n^2 + v_\tau^2.$$

Шунга кура (19.12) ифода

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m (1 - k^2) v_n^2 \qquad (19.13)$$

кўринишда ёзилади. Демак, абсолют эластик зарбада ($k = 1$) кинетик энергия ўзгармас экан. Кинетик энергиянинг максимал ўзгариши (аниғи бошқа тур энергияларга айланиб камайиши абсолют эластик бўлмаган зарба ҳолида ($k = 0$) булади.

Нуқтанинг зарбадан кейинги тезлик вектори билан унинг зарбадан аввалги тезлик векторининг айирмаси $\vec{u} - \vec{v}$ ни *„йўқотилган тезлик“* деб атаймиз.

Карно теоремаси. *Зарба жараёнида йўқотилган кинетик энергия йўқотилган тезлик билан буладиган ҳаракатдаги кинетик энергиянинг* $\frac{1-k}{1+k}$ *қисмига тенг.*

Ҳақиқатан, 19.2-расмга кўра $u_\tau = v_\tau$ ни эътиборга олиб

$$|\vec{u} - \vec{v}| = |u_n| + |v_n| = k|v_n| + |v_n| = (1 + k)|v_n|$$

ёки

$$|v_n| = \frac{|\vec{u} - \vec{v}|}{1 + k}$$

ифодани ёза оламиз. У ҳолда, (19.13) дан

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m \frac{1-k}{1+k} (\vec{u} - \vec{v})^2 \qquad (19.14)$$

исботланиши керак бўлган муносабатни ҳосил қиламиз.

Абсолют эластик зарбада ($k = 1$ кинетик энергия йўқотилмайди ($T_1 = T_2$). Абсолют эластик бўлмаган зарбада ($k = 0$):

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m (\vec{u} - \vec{v})^2,$$

яъни йўқотилган кинетик энергия йўқотилган тезлик билан бўладиган ҳаракатдаги кинетик энергиянинг узига тенг.

Икки шарнинг ўзаро тўғри марказий зарбасида йўқотилган кинетик энергияни ҳисоблаймиз. Моддий нуқта деб қаралувчи шарларнинг зарбадан аввалги тезликларини, мос равишда $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, зарбадан кейинги тезликларини $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ билан белгилайлик. У ҳолда, (19.14) га кўра, биринчи шар учун йўқотилган кинетик энергия

$$\Delta T_1 = \frac{1}{2} m_1 \frac{1-k}{1+k} (u_1 - v_1)^2, \qquad (19.15)$$

иккинчи шар учун эса

$$\Delta T_2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{1-k}{1+k} (u_2 - v_2)^2 \qquad (19.16)$$

га тенг булади. (19.10) ва (16.11) формулалардан аниқланувчи u_1 ва u_2 қийматларни (19.15) ва 19.16) га қўйсак, қуйидаги ифодалар ҳосил булади:

$$\Delta T_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}(1-k^2)(v_2-v_1)^2,$$

$$\Delta T_2 = \frac{1}{2}\frac{m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2}(1-k^2)(v_1-v_2)^2.$$

Охирги икки муносабатни $(v_2-v_1)^2 = (v_1-v_2)^2$ бўлишини эътиборга олиб қушсак, тўғри марказий зарба пайтида йуқотилган кинетик энергия учун қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{1-k^2}{2}(v_1-v_2)^2. \qquad (19.17)$$

57-масала. Шарча v тезлик билан қия ҳаракат қилиб қўзғалмас горизонтал текисликка тушади ва $u = \frac{\sqrt{2}}{2}v$ тезлик билан текисликдан қайтади (19.4-расм). Урилишдаги тиклаш коэффициенти $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ бўлса, тушиш бурчаги α ва қайтиш бурчаги β аниқлансин.

Ечиш. Зарбали куч таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳаракатини белгиловчи (19.4 тенгламалар системасидан фойдаланамиз. (19.4) системанинг биринчи ва учинчи тенгламалари масала шартига кўра қуйидагича ёзилади:

$$m(u\sin\beta - v\sin\alpha) = 0, \qquad (1)$$

$$k = \frac{u\cos\beta}{v\cos\alpha}. \qquad (2)$$

(1) ва 2 тенгламалар системасини биргаликда ечиб, номаълумлар α ва β ни аниқлаш мумкин. Бунинг учун (1) ва (2) ни қуйидагича ифодалаймиз:

$$u\sin\beta = v\sin\alpha, \quad u\cos\beta = kv\cos\alpha$$

ёки

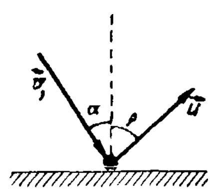
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta = \sin\alpha, \qquad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha. \qquad (4$$

Бу тенгламаларнинг ҳар икки томонини квадратга оширамиз:

$$\frac{1}{2}\sin^2\beta = \sin^2\alpha, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{2}\cos^2\beta = \frac{1}{3}\cos^2\alpha. \qquad (6)$$



19.4-расм.

$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$ формулага кўра (6) тенглама

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\beta = \frac{1}{3}\cos^2\alpha \qquad (7)$$

кўринишда ёзилади. (5) ва (7) ни ҳадлаб қўшамиз:

$$\frac{1}{2} = \sin^2\alpha + \frac{1}{3}\cos^2\alpha.$$

Бундан $\cos^2\alpha = \frac{3}{4}$ ёки $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, демак, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ келиб чиқади. Топилган α бурчак қийматини (3) га қўйсак,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta = \sin\frac{\pi}{3} \text{ ёки } \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ҳосил бўлади. Охирги тенгламадан β ни топамиз: $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Шундай қилиб, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ бўлади.

58-масала. $m_1 = 1$ т массали болға тобланаётган металл билан биргаликда массаси $m_2 = 24$ т бўлган сандонга $v = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ тезлик билан урилади. Зарбани тиклаш коэффициенти $k = 0,3$ булган марказий туғри зарба деб қараб, болғанинг фойдали иш коэффициенти топилсин.

Ечиш. Болғанинг фойдали иш коэффициенти тобланаётган металлнинг деформацияси учун сарф бўлган ишнинг болғани кўтаришда сарфланган ишга нисбати билан, бошқача айтганда, зарба вақтида йўқотилган кинетик энергиянинг системанинг зарбадан аввалги кинетик энергиясига нисбати орқали ифодаланади, яъни

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_1}.$$

Болғанинг зарбадан аввалги тезлиги $v_1 = v = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; сандон тинч ҳолатда булгани учун унинг зарбадан аввалги тезлиги нолга тенг: $v_2 = 0$. У ҳолда (19.17) га биноан, зарба вақтида йуқотилган кинетик энергия қуйидагича топилади:

$$\Delta T = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1 - k^2}{2} v_1^2 = \frac{1000 \cdot 24000}{1000 + 24000} \cdot \frac{1 - (0,3)^2}{2} \cdot 25 = 10920 \text{ Ж}.$$

Системанинг зарбадан аввалги кинетик энергияси болға кинетик энергиясига тенг:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 12500 \text{ Ж}.$$

Шундай қилиб,

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_1} = 0,874$$

ҳосил бўлади.

XX боб. ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ

109- §. Механик система учун Даламбер принципи

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ моддий нуқталардан ташкил топган механик система ҳаракатини кўриб чиқамиз. Система ихтиёрий M_i нуқтасининг массасини m_i, шу нуқтага таъсир этувчи ташқи кучлар ва ички кучлар тенг таъсир этувчиларини, мос равишда, $\vec{F}_i^E$, $\vec{F}_i^I$ билан белгилайлик. Бунда $\vec{F}_i^E$, $\vec{F}_i^I$ кучлар таркибига актив кучлар билан бирликда реакция кучлари ҳам киради. Бу кучлар таъсирида M_i нуқтанинг бирор инерциал координата системасига нисбатан олган тезланишини $\vec{w}_i$ десак, мазкур нуқтанинг инерция кучи

$$\vec{\Phi}_i = -m_i\vec{w}_i \tag{20.1}$$

формула билан аниқланади. У ҳолда (13.44) га кўра

$$\vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I + \vec{\Phi}_i = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{20.2}$$

муносабатни ёза оламиз (20.1- расм). (20.2) ифода системанинг ҳар бир нуқтаси учун ўринлидир. (20.2) дан системанинг ҳар бир нуқтасига таъсир этувчи ташқи ва ички кучлар қаторига шу нуқта инерция кучини қўшиб уни мувозанатда деб қараш мумкин. Шундай усул билан системанинг ҳар бир нуқтасига статиканинг мувозанат тенгламаларини татбиқ этиш мумкин.

(20.2) муносабат механик система учун Даламбер принципини ифодалайди.

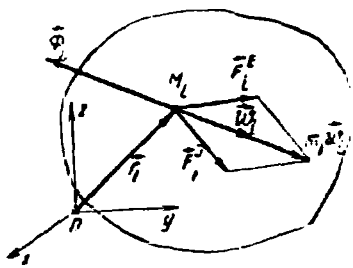
(20.2) системани ҳадлаб қўшиб, ички кучлар хоссасини эътиборга олсак,

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^E + \sum_{i=1}^{n}\vec{\Phi}_i = 0 \tag{20.3}$$

ҳосил бўлади.

Шунингдек, (20.2) нинг ҳар икки томонини M_i нуқтанинг O марказга нисбатан радиус-вектори $\vec{r}_i$ га вектор кўпайтириб, ҳосил бўлган системани қўшсак,

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_i^I + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i = 0$$



20.1-расм.

ёки

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_i^E) + \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_i^I) + \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{\Phi}_i) = 0$$

келиб чиқади. Бунда ички кучларнинг бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг, яъни $\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_i^I) = 0$ бўлгани учун охирги тенглама

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_i^E) + \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\Phi_i) = 0 \tag{20.4}$$

кўринишни олади. Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}^{\Phi} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i = -\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{w}_i, \\ \vec{M}_O^{\Phi} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{\Phi}_i) = -\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{w}_i. \end{aligned}\right\} \tag{20.5}$$

Бунда $\vec{R}^{\Phi}$ ва $\vec{M}_O^{\Phi}$ катталиклар мос равишда, *система инерция кучларининг бош вектори* ҳамда *O марказга нисбатан бош моментини* ифодалайди.

(20.5) белгилашларга кўра (20.3) ва (20.4) муносабатлар қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^E + \vec{R}^{\Phi} = 0, \tag{20.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_i^E) + \vec{M}_O^{\Phi} = 0. \tag{20.7}$$

(20.6) ва (20.7) тенгламалар статикада кўрилган кучлар системаси мувозанат шартларининг геометрик формада ифодаланишига ўхшайди. Бу ифодаларни координата ўқларига проекциялаб, кучлар системаси таъсиридаги жисм мувозанат шартларининг аналитик усулда ифодаланиши каби муносабатларни ҳосил қилиш мумкин. (20.6), (20.7) тенгламалардан фойдаланиш учун инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти маълум бўлиши керак.

Кўриниши билан фарқланса-да, моҳияти жиҳатидан (20.6) тенглама механик система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ёки масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремага, (20.7) эса система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремага эквивалентдир.

110-§. Инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти

Система инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти (29.5) формула билан аниқланиши маълум. Уларни янада ихчам формулалар билан ифодалаш мумкин. Бунинг учун (20.6) тенгламани система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема формуласи

$$M\vec{w}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^E$$

билан таққослаб, инерция кучларининг бош векторини аниқловчи

$$\vec{R}^{\Phi}=-M\vec{w}_C \qquad (20.8)$$

ифодани ҳосил қиламиз. (20.8) да M система массасини, $\vec{w}_C$ массалар марказининг тезланишини ифодалайди. Бинобарин, *система инерция кучларининг бош вектори система массаси билан массалар марказининг тезланиши купайтмасига тенг, йўналиши эса массалар марказининг тезланиши йўналишига қарама-қаршидир.*

Массалар маркази эгри чизиқли ҳаракатда бўлса, $\vec{w}_C=\vec{w}_{Cn}+\vec{w}_{C\tau}$. Шунга кўра инерция кучларининг бош векторини нормал ва уринма ташкил этувчилар орқали ифодалаш мумкин:

$$\vec{R}^{\Phi}=\vec{R}_n^{\Phi}+\vec{R}_\tau^{\Phi},\quad \vec{R}_n^{\Phi}=-M\vec{w}_{Cn},\quad \vec{R}_\tau^{\Phi}=-M\vec{w}_{C\tau}. \qquad (20.9)$$

(20.7) ни система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{m}_O(\vec{F}_i^E)$$

билан таққослаб, инерция кучларининг бирор марказга нисбатан бош моменти учун

$$\vec{M}_O^{\Phi}=-\frac{d\vec{L}_O}{dt} \qquad (20.10)$$

формула ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, *система инерция кучларининг бирор марказга нисбатан бош моменти манфий ишора билан олинган система кинетик моментининг вақт бўйича биринчи ҳосиласига тенг.*

(20.10) ни бирор z ўққа проекциялаймиз:

$$M_z^{\Phi}=-\frac{dL_z}{dt}. \qquad (20.11)$$

(20.11) дан система инерция кучларининг бирор ўққа нисбатан бош моменти ҳисобланади.

111-§. Қаттиқ жисм инерция кучларини содда ҳолга келтириш

Жисм инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини аниқлашнинг баъзи хусусий ҳолларини куриб чиқамиз.

1. *Жисм илгарилама ҳаракатда булсин.* Илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталари бир хил тезланишга эга. Шунинг учун $\vec{w}_i = \vec{w}_c$ ва $\vec{\Phi}_i = -m_i\vec{w}_C$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Бу ҳолда $\vec{\Phi}_i$ кучлар системаси параллел кучлар системасидан иборат булиб, улар масса марказидан утувчи $\vec{R}^{\Phi}$ — тенг таъсир этувчига келтирилади:

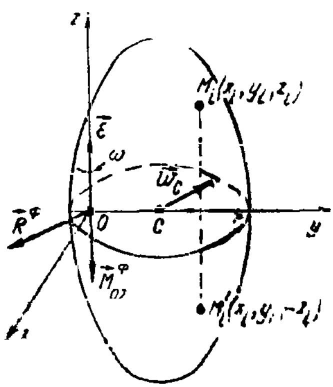
$$\vec{R}^{\Phi} = -\sum_{i=1} m_i\vec{w}_i = -M\vec{w}_C.$$

Шундай қилиб, *илгарилама ҳаракатдаги жисм инерция кучлари $\vec{R}^{\Phi} = -M\vec{w}_C$ га тенг ва масса марказидан утувчи тенг таъсир этувчига келтирилади.*

2. *Жисм Oxy симметрия текислигига эга булиб, шу текисликка перпендикуляр Oz уқ атрофида айланма ҳаракат қилсин* (20.2-расм). Бу ҳолда кучлар системасини O марказга келтирсак, жисм симметрия текислигига эга бўлгани учун келтирилган $\vec{R}^{\Phi}$ куч билан жуфт шу симметрия текислигида ётади ва бу жуфт моменти $\vec{M}^{\Phi}_{Oz}$ бўлади. Айланма ҳаракатда система кинетик моменти $L_{Oz} = I_{Oz}\cdot\omega$ формула билан аниқлангани учун, (20.11) га кўра

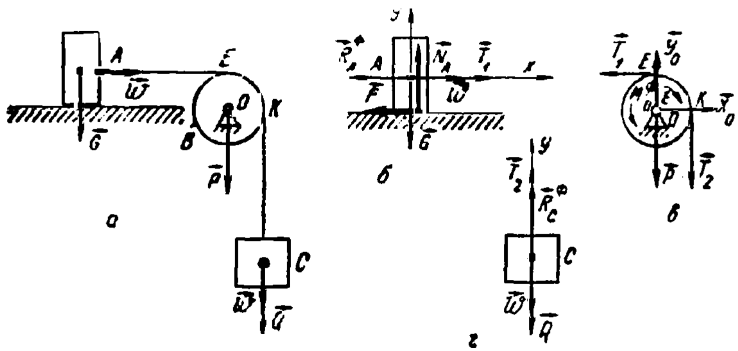
$$M^{\Phi}_{Oz} = -I_{Oz}\cdot\frac{d\omega}{dt} = -I_{Oz}\cdot\varepsilon \qquad (20.12)$$

кўринишни олади. (20.12) да I_{Oz} жисмнинг O келтириш марказидан ўтувчи ва симметрия текислигига перпендикуляр уққа нисбатан инерция моменти, ε эса жисм бурчак тезланишидан иборат.



20.2-расм.

Шундай қилиб, жисм симметрия текислигига эга булиб, бу текисликка перпендикуляр Oz ўқ атрофида айланма ҳаракат қилганида унинг инерция кучлари (20.8) формула билан аниқланувчи ва O нуқтага қуйилган $\vec{R}^{\Phi}$ кучга ҳамда $\vec{M}^{\Phi}_{Oz}$ моменти (20.12) формула билан аниқланувчи ва симметрия текислигида ётувчи жуфтга келтирилади.



20.3-расм.

3. *Жисм масса марказидан ўтувчи қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда* бўлсин. Бу ҳолда $w_C = 0$, $\vec{R}^{\Phi} = 0$. Демак, 2- ҳолга кўра инерция кучлари системаси M^{Φ}_{Oz} моменти (20.12) формула билан аниқланувчи ва симметрия текислигида ётувчи жуфтга келтирилади.

4. Агар *жисм* симметрия текислигига эга бўлиб, шу текисликка параллел текисликда ҳаракатланса, яъни *текис параллел ҳаракатда бўлса*, инерция кучлари жисм масса марказига қўйилган $\vec{R}^{\Phi}$ куч билан моменти $M^{\Phi}_{Cz} = I_{Cz} \cdot \varepsilon$ бўлган жуфтга келтирилишини исботлаш мумкин; келтирилган $\vec{R}^{\Phi}$ куч билан M^{Φ}_{Cz} моментли жуфт симметрия текислигида ётади.

59- масала. P оғирликдаги B бир жинсли ҳалқа орқали AC ип ўтказилган ва унинг учларига оғирликлари мос равишда G ва Q бўлган юклар осилган (20.3- расм, *а*). A юк билан горизонтал текислик орасидаги ишқаланиш коэффициенти f га тенг. AC ипни чўзилмайдиган деб қараб ва унинг оғирлигини, O шарнирдаги ишқаланишни эътиборга олмай, C юк вертикал бўйлаб пастга ҳаракатлангандаги тезланиши $\vec{w}$ ҳамда AE ва KC участкалардаги ипнинг таранглик кучлари топилсин.

Ечиш. Система A ва C юклар ҳамда B ҳалқадан ташкил топган. Системанинг ҳар бир бўлаги ҳаракатини алоҳида-алоҳида текширамиз. Ип чўзилмагани туфайли A ва C юкларнинг тезланишлари бир хил бўлади.

Системага таъсир этувчи ташқи (актив ва реакция) кучлар $\vec{G}$, $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{F}$, $\vec{N}_A$, $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ қаторига ҳар бир бўлак инерция кучларини қушиб оламиз (20.3- расм, *б*, *в*, *г*) A ва C юклар илгарилама ҳаракат қилгани учун уларнинг инерция кучлари, мос равишда, $R^{\Phi}_A = m_A w = \frac{G}{g} w$, $R^{\Phi}_C = m_C w = \frac{Q}{g} w$ формулалар билан аниқланади. Бунда $\vec{R}_A^{\Phi}$ ва $\vec{R}_C^{\Phi}$ юкларнинг тезланиш векторларига қарама-қарши йўналган. B ҳалқа симметрия марказидан ўтувчи қўзғалмас ўқ атрофида ҳаракатда бўлгани учун унинг инерция кучлари $M_O^{\Phi} = I_O \cdot \varepsilon$ га келтирилади; бунда M_O^{Φ} ҳалқанинг айланишига нисбатан тескари томонга йўналган.

Система яхлит деб олинганда ички куч ҳисобланувчи ипдаги таранглик кучлари ҳар бир бўлак алоҳида қаралганда ташқи кучга ўтади. AE ва KC участкаларда ипдаги таранглик кучларини, мос равишда, $\vec{T}_1$ ва $\vec{T}_2$ билан белгилаймиз.

Ҳар қайси бўлак учун Даламбер принципини ифодаловчи тенгламалар тузамиз.

A юк учун: $\vec{G} + \vec{F} + \vec{N}_A + \vec{T}_1 + \vec{R}_A^{\Phi} = 0.$

Бу тенгламани x, y ўқларга проекциялаймиз:

$$-F + T_1 - R_A^{\Phi} = 0, \quad -G + N_A = 0.$$

Бунда $F = f \cdot N_A = fG$ эканлиги эътиборга олинса,

$$T_1 - fG - \frac{G}{g} w = 0 \tag{1}$$

ҳосил бўлади.

B ҳалқа учун Даламбер принципини тузишда $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ номаълум реакцияларни тенгламага киритмаслик мақсадида статиканинг мувозанат тенгламаларидан кучларнинг фақат O нуқтага нисбатан моментлари йиғиндисини тузамиз:

$$-T_1 \cdot r + T_2 \cdot r - M_O^{\Phi} = 0, \tag{2}$$

бу ерда r—ҳалқа радиуси. Ҳалқа K нуқтасининг уринма тезланиши C юк тезланишига тенг бўлгани учун $w = \varepsilon \cdot r$ деб ёза оламиз. Ҳалқанинг O нуқтага нисбатан инерция моменти $I_O = m_B r^2 = \frac{P}{g} r^2$ формула билан аниқланади. У ҳолда $M_O^{\Phi} = \frac{P}{g} r^2 \cdot \frac{w}{r} = \frac{P}{g} r w.$

Шунга кўра (2) тенглама қуйидаги куринишни олади:

$$-T_1 + T_2 - \frac{P}{g} w = 0. \tag{3}$$

Энди C юк учун Даламбер принципини қўллаймиз:

$$Q - T_2 - R_C^{\Phi} = 0$$

ёки

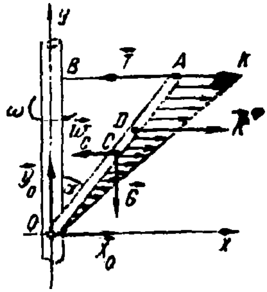
$$Q - T_2 - \frac{Q}{g} w = 0. \tag{4}$$

(1), (3), (4) тенгламалар системасини биргаликда ечиб, номаъ-

$$w = \frac{Q - fG}{G + P + Q} g,$$

$$T_1 = G\left(1 + \frac{Q - fG}{G + P + Q}\right),$$

$$T_2 = Q\left(1 - \frac{Q - fG}{G + P + Q}\right).$$



20.3-расм.

60- масала. Узунлиги l, оғирлиги G бўлган OA стержень ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланувчи вертикал валга O шарнир воситасида бириктирилган (20.4- расм). Стерженнинг A нуқтаси эса валга AB горизонтал ип орқали боғланган бўлиб, ип стерженни валга нисбатан α бурчакда ушлаб туради. Стерженнинг xOy текислигида жойлашган ҳолатида O шарнирдаги реакция кучлари ва AB ипдаги таранглик кучи аниқлансин.

Ечиш. Масалани Даламбер принципи билан ечиш учун стерженга таъсир этувчи $\vec{G}$, $\vec{T}$, $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ кучлар қаторига стержень инерция кучларини қушиб оламиз. Стержень ўзгармас бурчак тезлик билан вертикал ўқ атрофида айлангани учун унинг Oy айланиш ўқидан x масофада ётувчи ҳар бир Δm массали булакчасининг инерция кучи $\Delta m\omega^2 x$ га тенг. Чизиқли қонун бўйича стержень бўйлаб тақсимланган бу параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{R}^{\Phi}$ OAK учбурчакнинг огирлик марказидан ўтади ва D нуқта $OD = \frac{2}{3} l$ тенгликдан топилади. $\vec{R}^{\Phi}$ куч инерция кучларининг бош векторига тенг бўлгани учун, унинг миқдори (20.8) формулага асосан қуйидагича ҳисобланади:

$$R^{\Phi} = mw_C = \frac{G}{g} \omega^2 x_C = \frac{a}{2g} \omega^2 l \sin \alpha. \qquad (1)$$

Энди текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат шартларидан фойдаланамиз:

$$\sum F_{ix} = 0: X_O + R^{\Phi} - T = 0, \qquad (2)$$

$$\sum F_{iy} = 0: Y_O - G = 0, \qquad (8)$$

$$\sum m_O(\vec{F}_i) = 0: -G \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha - R^{\Phi} \cdot \frac{2}{3} l \cos \alpha + Tl \cos \alpha = 0. \qquad (4)$$

(1) ни эътиборга олиб, (2)—(4) тенгламалар системасини ечамиз:

$$T = \frac{2\omega^2 l \sin \alpha + 3g \operatorname{tg} \alpha}{6g} G, \quad X_O = \frac{3g \operatorname{tg} \alpha - \omega^2 l \sin \alpha}{6g}, \quad Y_O = G.$$

XXI боб. АНАЛИТИК МЕХАНИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ. ЛАГРАНЖ ТЕНГЛАМАЛАРИ

112-§. Механик системага қўйилган боғланишлар

Боғланишдаги механик система ҳаракатига тегишли масалаларни ечишда боғланиш реакция кучларини тузиладиган тенгламалардан йўқотиш ёки уларни аниқлаш масаласи қўшимча муаммолардан биридир. Шундай масалалар учрайдики, системага қўйилган боғланишларга нисбатан бирор чекланишлар қабул қилинмаса, номаълумларнинг сони тенгламалар сонидан ошиб кетиб, қўйилган масалани ечиб бўлмайди. Ҳатто тенгламалар сони билан номаълумлар сони бир хил бўлганда ҳам, боғланиш реакция кучларини ҳаракатнинг дифференциал тенгламаларидан йўқотишнинг умумий усули бўлмаганидан, бу дифференциал тенгламаларнинг ечими доимо топилавермайди.

Аналитик механикада системага қўйилган боғланишларга нисбатан баъзи чекланишлар киритиб, системанинг мувозанати ёки ҳаракатига оид масалаларни ечиш методлари ўрганилади.

Ж. Лагранж аналитик механика асосчиси ҳисобланади. Россияда биринчи бўлиб М. В. Остроградский Лагранж идеялари ва методларини илмий асосда тўлдириб, уни такомиллаштириб ўқитиш системасига жорий этган.

Аналитик механика методлари назарий физиканинг нисбийлик назариясига, квант механикасига доир масалаларни ечишда, тебранишларнинг умумий назариясини ўрганишда кенг қўлланилади.

Боғланишдаги моддий нуқта ҳаракатини ўрганиш масаласида (58-§) нуқтага қўйилган боғланишлар классификацияси кўрсатилган эди. Механик системага қўйилган боғланишлар ҳам голоном (геометрик) ва беголоном (кинематик), стационар ва ностационар, бўшатадиган (бир ёқлама) ва бўшатмайдиган (икки ёқлама) бўлиши мумкин.

Фақат голоном боғланишлар қўйилган механик система *голоном система* дейилади ва қуйидаги кўринишдаги тенгламалар билан ифодаланади:

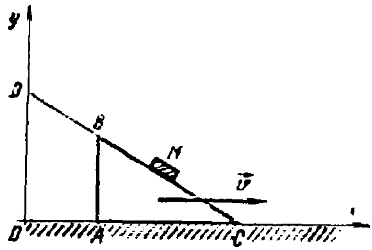
$$f_\nu(t,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2, \ldots, x_n,\ y_n,\ z_n) = 0, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s) \tag{21.1}$$

(21.1) да s билан голоном боғланишлар сони белгиланган.

Беголоном боғланишлар система нуқталари тезликларининг проекцияларига нисбатан чизиқли ёки чизиқли бўлмаган тенгламалар билан ифодаланиши мумкин; чизиқли бўлган ҳолда боғланиш тенгламалари қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$f_\mu = a_\mu + \sum_{i=1}^{n}(b_{\mu i}\cdot \dot{x}_i + c_{\mu i}\cdot \dot{y}_i + d_{\mu i}\cdot \dot{z}_i) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots s_1) \tag{21.2}$$

Шуни таъкидлаш зарурки, системага қўйилган боғланишларнинг бир қисми голоном, қолган қисми эса беголоном боғланишлар ҳам бўлиши мумкин. Биз, асосан, голоном система ҳаракати ёки мувозанатини урганамиз.



21.1-расм.

Моддий нуқта учун боғланишлар тенгламаларининг сони учтадан ошмас эди. Агар механик система n та моддий нуқтадан ташкил топган бўлса, унга қўйилган боғланишлар тенгламаларининг сони $3n$ дан ошмаслиги керак.

(21.1) ва (21.2) тенгламаларнинг сони умуман $3n$ та ҳам бўлиши мумкин. Бу ҳолда боғланиш тенгламаларини биргаликда ечиб, механик система нуқталарининг $3n$ та координаталарини вақт t нинг функциялари сифатида аниқлаш мумкин. Бунда система нуқталарининг ҳаракати системага қўйилган боғланишларнинг характери билан аниқланади. Бу ҳолда система нуқталарига қўйиладиган ҳар қандай кучлар системага қўйилган боғланишлар билан белгиланувчи ҳаракатларни ўзгартира олмайди.

Системага қўйилган боғланишларга доир бир неча мисоллар кўриб чиқамиз.

1. Системанинг $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталари узунлиги l булган абсолют қаттиқ стержень билан боғланган бўлсин. У ҳолда боғланиш тенгламасини

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0$$

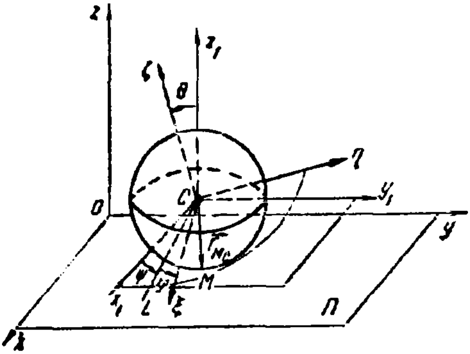
кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама билан ифодаланувчи боғланиш стационар, голоном, бўшатмайдиган боғланишдир.

Агар M_1, M_2 нуқталар стержень ўрнига чўзилмайдиган ип билан алмаштирилса, бундай боғланиш нуқталарнинг бир-биридан узоқлашишига йўл қуймайди, лекин нуқталарнинг бир-бирига яқинлашиши мумкин. Бу ҳолда $l \geqslant M_1M_2$ бўлиб, боғланиш

$$l^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \geqslant 0$$

тенгсизлик билан берилади. Бундай боғланиш бушатадиган бўлади.

2. Горизонтал текислик бўйлаб ўзгармас $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланувчи ABC учбурчакнинг BC томони бўйлаб M моддий нуқта ҳаракатлансин (21.1-расм). BC чизиқ M нуқта учун боғланиш вазифасини утайди. Oxy координаталар системасини шундай танлаймизки, $t = 0$ да AB чизиқ Oy ўқ устида ётсин. У ҳолда BC туғри чизиқнинг t моментдаги тенгламаси қуйи-



21.2-расм.

$$\frac{x}{OC}+\frac{y}{OD}=1.$$

Бунда $OC=OA+AC=$ $=vt+b$; $OD=AB\dfrac{OC}{AC}=$ $=a\dfrac{v\cdot t+b}{b}$ бўлгани учун

$$\frac{x}{vt+b}+\frac{y}{\frac{a}{b}(vt+b)}=1$$

ёки

$$ax+by=a(vt+b)$$

келиб чиқади. Бу боғланиш тенгламасида вақт t ошкор равишда қатнашгани учун боғланиш ностационар боғланишдир.

3. Беголоном боғланишли системанинг ҳаракатига мисол тариқасида абсолют қаттиқ шарнинг ғадир-будир текисликда сирпанмасдан юмалашини келтириш мумкин (21.2-расм). Шарнинг $Oxyz$ қўзғалмас координаталар системасидаги ҳаракатини текширамиз. Oxy текисликни берилган II текислик билан уст-ма-уст тушадигаи қилиб оламиз. Боғланишнинг тенгламалари шар маркази C нуқтанинг Oxy текисликдан узоқлиги z_C узгармаслигини ва шар сиртининг Oxy текислик билан уриниш нуқтаси M нуқта тезлигининг нолга тенг бўлишини ифодалаши керак. (5.3) формулани эътиборга олиб айтилган шартларни қуйидагича ёзамиз:

$$z_C=a,\quad \vec{v}_C+\vec{\omega}\times\vec{r}_{MC}=0. \qquad (21.3)$$

Бунда a—шар радиусини, $\vec{\omega}$ вектори M нуқтанинг C қутб атрофида оний айланиши бурчак тезлигини ифодалайди. (21.3) нинг вектор тенгламасини Эйлернинг кинематик тенгламаларини эътиборга олиб,

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_C-a(\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\cos\psi\sin\theta)=0,\\&\dot{y}_C+a(\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\psi\sin\theta)=0,\\&\dot{z}_C=a\end{aligned}\right\} \qquad (21.4)$$

куринишда ёзиш мумкин. Бу ерда φ, ψ, θ шар ҳаракатини аниқловчи параметрлар — Эйлер бурчаклари. (21.4) тенгламаларни бевосита интеграллаш мумкин бўлмаганидан улар беголоном боғланишларни ифодалайди.

4. $x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0$ тенглама билан ифодаланувчи боғланиш голоном боғланишдан иборат. Чунки бу тенгламани интеграллаб, $x^2+y^2+z^2-C=0$ куринишга келтириш мумкин.

Тенгламадаги C интеграл доимийси моддий нуқтанинг бирор пайтдаги қабул қиладиган координаталарининг қийматига қараб топилади.

113-§. Системанинг мумкин бўлган кўчишлари. Идеал боғланишлар

Системанинг мумкин булган кучишини урганишдан аввал нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини таърифлаймиз.

Берилган пайтда нуқтанинг унга қўйилган боғланиш чеклашларини қаноатлантирувчи ҳар қандай чексиз кичик кучишларига мумкин булган кўчишлар дейилади. Нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини $\delta\vec{r}$ вектор билан белгилаймиз. $\delta\vec{r}$ векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини δx, δy, δz билан белгилаймиз; бу катталиклар *нуқта координаталарининг вариациялари* деб ҳам аталади. У ҳолда мумкин бўлган кўчиш векторини нуқта координаталарининг вариациялари орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\delta\vec{r} = \delta x \cdot \vec{i} + \delta y \cdot \vec{j} + \delta z \cdot \vec{k}. \qquad (21.5)$$

Моддий нуқтанинг ҳақиқий элементар кўчиши $d\vec{r}$ билан унинг мумкин бўлган кўчиши $\delta\vec{r}$ бир хил тушунча эмас. $d\vec{r}$ ҳақиқий кўчиш бирор dt вақт оралигида нуқтага таъсир этувчи кучлар ва бошланғич шартлар асосида боғланишни қаноатлантирган ҳолда содир бўлса, $\delta\vec{r}$ мумкин бўлган кучиш берилган пайтда боғланиш чекларини қаноатлантирувчи чексиз кичик кўчиш бўлиб, у нуқтага таъсир этувчи кучга боғлиқ эмас; шунингдек, мумкин бўлган кўчишда вақт ўзгармайди деб қаралади.

Агар нуқта бирор $f(x, y, z, t) = 0$ сирт устида ҳаракатланиб, унга қўйилган боғланиш ностационар бўлса, $f(x - \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0$ функцияни даражали қаторга ёйиб, иккинчи ва ундан катта тартибли чексиз кичик миқдорларни ташлаб юбориш билан

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0 \qquad (21.6)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бунда вақт вариацияланмайди. (21.6) ифода *функцияни вариациялаш* дейилади ва у δx, δy, δz вариациялар орасидаги боғланишни ифодалаб, боғланиш тенгламасида вақт ошкор равишда қатнашиш ёки қатнашмаслигига боғлиқ эмас. Агар боғланиш $f(x, y, z, t) = 0$ тенглама билан ифодаланган бўлса, нуқтанинг координаталар бўйича ҳақиқий кўчишлари ўзаро қуйидаги муносабат билан боғланган бўлади:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 \qquad (21.7)$$

(21.6) ва (21.7) ни таққослашдан кўрамизки, ностационар боғланиш таъсиридаги нуқтанинг мумкин булган кучишларидан бирортаси ҳам ҳақиқий кучиш була олмайди; агар нуқтага стационар голоном боғланиш қўйилган булса, унинг мумкин булган кучишларидан бири нуқтанинг ҳақиқий кучишига мос келиши мумкин.

Системани ташкил этувчи нуқталар мумкин бўлган кўчишлари туплами системанинг мумкин булган кучишлари дейилади. Умуман, система бир неча, ҳатто чексиз кўп, мумкин булган кўчишлар олиши мумкин. Системанинг мумкин булган кучишлари унга қўйилган барча боғланишлар чеклашларини қаноатлантириши керак.

Агар системага (21.1) тенгламалар билан ифодаланувчи s та голоном боғланиш қўйилган булса, (21.6) ва (21.7) га ўхшаш

$$\delta f_\nu = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0, \ (\nu = 1, 2, \ldots, s) \quad (21.8)$$

$$df_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i}dz_i\right) = 0,$$

$$(\nu = 1, 2 \ldots, s) \quad (21.9)$$

муносабатларни ёзиш мумкин. Голоном системанинг мумкин булган кўчишлари (21.8) муносабатларни қаноатлантириши керак.

Нуқта ёки система мумкин бўлган кўчишлари бир-бирига боғлиқ бўлиши ёки боғлиқ бўлмаслиги мумкин.

Эркин нуқтанинг (δx, δy, δz) мумкин бўлган кўчишлари бир-бирига боғлиқ эмас. Агар нуқта $f(x, y, z) = 0$ сирт устида ҳаракатланадиган булса, унинг мумкин бўлган кўчишларидан иккитаси бир-бирига боғлиқ бўлмай, учинчиси (21.6) муносабатни қаноатлантириши керак. Шунингдек, (21.1) кўринишдаги s та голоном боғланиш қуйилган n та нуқтадан ташкил топган системанинг $3n-s$ та мумкин бўлган кўчишлари бир-бирига боғлиқ булмай, қолган s та мумкин бўлган кўчишлари (21.8) муносабатларни қаноатлантириши керак.

Стационар голоном боғланишдаги системанинг бир-бирига боғлиқ булмаган мумкин бўлган кучишлари сони шу системанинг эркинлик даражаси дейилади. s та голоном боғланиш таъсиридаги n та нуқтадан ташкил топган системанинг эркинлик даражасини k билан белгиласак, $k = 3n - s$ деб ёзиш мумкин.

Куч қўйилган нуқтанинг бирор $\delta\vec{r}$ мумкин бўлган кўчишидаги шу кучнинг элементар ишини, қисқача, *кучнинг мумкин бўлган иши* деб атаймиз ва уни δA билан белгилаймиз. У ҳолда, элементар иш таърифига кўра,

$$\delta A = \vec{F}\delta\vec{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z \qquad (21.10)$$

формула ўринли бўлади.

Шунингдек, n та нуқтадан ташкил топган механик системага таъсир этувчи кучлар мумкин бўлган ишларининг йиғиндисини

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i \qquad (21.11)$$

формула билан ифодалаймиз.

Системанинг ҳар бир нуқтасига қўйилган богланишлар реакция кучларини $\vec{F}_i^r$ билан белгилаймиз. *Системага қўйилган боғланишлар реакция кучлари мумкин булган ишларининг йиғиндиси нолга тенг буладиган боғланишлар идеал боғланишлар дейилади.* Бу таърифга кўра идеал боғланишларни математик тарзда қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^r \delta\vec{r}_i = 0. \qquad (21.12)$$

114-§ Умумлашган координаталар ва умумлашган тезликлар

Система n та нуқтадан ташкил топган бўлса, унинг ҳолати $3n$ та координаталар, масалан, Декарт координаталари орқали аниқланиши мумкин. Бунда системага (21.1) кўринишдаги s та голоном боғланишлар қуйилган бўлса, $3n$ координаталардан $k = 3n - s$ таси бир бирига боғлиқ бўлмайди. Бинобарин, Декарт координаталаридан k тасини бир-бирига боғлиқ қилмай, s тасини эса бир-бирига боғлиқ қилиб танлаш мумкин. Бунда бир-бирига боғлиқ бўлмаган k та Декарт координаталари урнига бошқа $g_1, g_2, \dots, g_k$ параметрлар ҳам киритиш мумкин. *Система ҳолатини бир қийматли аниқлайдиган бир-бирига боғлиқ булмаган параметрлар умумлашган координаталар дейилади.* Одатда, умумлашган координаталар қуйидагича белгиланади:

$$q_1, q_2, \dots, q_k. \qquad (t) \quad (21.13)$$

Умумлашган координаталар бир-бирига боғлиқ бўлмаганидан улар турлича ўлчов бирлигида (масалан, м, радиан, м^2 ва ҳ.к.) булиши мумкин. *Умумлашган координаталардан вақт буйича олинган ҳосилалар умумлашган тезликлар дейилади.* Умумлашган тезликларни $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$ билан белгилаймиз. Таърифга кўра:

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad \dots, \quad \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}.$$

Умумлашган координаталар турлича ўлчов бирлигини қабул қилиши мумкин булганидан, умумлашган тезликлар бирликлари ҳам турлича бўлиши мумкин. Умуман, умумлашган тезликнинг улчов бирлиги умумлашган координата улчов бирлигининг вақт бирлигига нисбати билан ифодаланади. Масалан, q координата „м" да ўлчанганда $\dot{q} - \frac{м}{с}$ да, q учун радиан олинганда $\dot{q} - \frac{рад}{с} = с^{-1}$ да ўлчанади.

Система ихтиёрий нуқтасининг бирор саноқ системасига нисбатан радиус-векторини $\vec{r}_i$, координаталарини (x_i, y_i, z_i) десак, ҳар бир q_i умумлашган координатани улар орқали ифодалаш:

$$q_j = q_j(x_i, y_i, z_i), \; j = 1,2, \ldots, k, \; i = 1,2, \ldots, n \tag{21.14}$$

ёки, аксинча, $\vec{r}_i$, x_i, y_i z_i ни q_i орқали ифодалаш мумкин:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t); \tag{21.15}$$

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots q_k, t) \end{aligned}\right\} \tag{21.16}$$

(21.15) га биноан, система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишларини қуйидагича ифодалай оламиз:

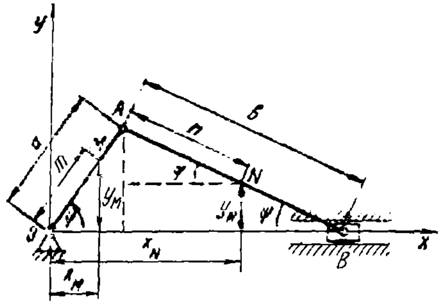
$$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\delta p_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{21.17}$$

(21.17) ифодадаги $\delta q_j(j = 1,2, \ldots, k)$ *мумкин булган кучишларнинг умумлашган координаталар орқали ифодалари* ёки умумлашган координаталар вариацияларидан иборат. Агар системага голоном боғланишлар қуйилган бўлса, δq_j вариациялар бир-бирига боғлиқ булмай, уларнинг сони бир-бирига боғлиқ булмаган умумлашган координаталар сонига тенг; бинобарин, голоном системанинг эркинлик даражаси билан умумлашган координаталар сони бир хил булади.

Беголоном система учун боғланиш тенгламаси таркибига координаталарнинг вақт бўйича ҳосиласи қагнашгани туфайли, боғланиш тенгламалари δq_j вариацияларга ҳам маълум миқдорда чекланишлар қуяди ва бир-бирига боғлиқ бўлмаган мумкин булган кучишлар сонини камайтиради. Натижада, беголоном системанинг эркинлик даражаси бир-бирига боғлиқ бўлмаган умумлашган координаталар сонидан кичик ва улар орасидаги тафовут бир-бирига боғлиқ мумкин бўлган кўчишлар сонига тенг.

Умумлашган координаталар сони системани ташкил этувчи нуқталар сонига боғлиқ бўлмагани учун боғланишдаги система ҳаракатини урганишда умумлашган координаталардан фойдаланиш Декарт координаталарини қўллашга қараганда анча қулайдир. Умумлашган координаталарга бир неча мисоллар келтирамиз.

1. Эркин нуқтанинг ҳаракати бир-бирига боғлиқ бўлмаган 3 та x, y, z координаталар билан аниқланади. Шунинг учун бу координаталарни эркин ҳаракатдаги нуқтанинг умумлашган координаталари деб олиш мумкин: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$.



21.3-расм.

2. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг айланиш бурчаги φ ни умумлашган координата деб қараш мумкин: $q = \varphi$.

3. Кривошип-шатунли механизм (21.3-расм) нуқталарининг мумкин бўлган кўчишларидан фақат биттасини ихтиёрий танлаш мумкин. Мумкин бўлган кўчишларнинг қолганлари эса шу кучишга боғлиқ. Демак, бу системанинг эркинлик даражаси битта. Системанинг барча мумкин бўлган кўчишларини OA кривошипнинг O атрофида айланишида олган $\delta\varphi$ мумкин бўлган кўчиш орқали ифодалаш мумкин. Бинобарин, кривошип-шатунли механизмдан иборат система ҳолатини аниқлашда умумлашган координата учун OA кривошипнинг φ бурилиш бурчагини олиш мумкин. OA кривошипда $OM = m$ тенглик билан аниқланувчи M нуқтанинг, шунингдек, AB шатундаги N нуқтанинг ($AN = n$) координаталарини φ бурчак орқали аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан, расмдан:

$$x_M = m\cos\varphi, \quad y_M = m\sin\varphi. \tag{a}$$

N нуқтанинг координаталарини топиш учун аввало синуслар теоремасидан фойдаланиб ψ бурчакни φ бурчак орқали ифодалаймиз:

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{OA}{AB} = \frac{a}{b}.$$

Бундан $\sin\psi = \frac{a}{b}\sin\varphi$ ва $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}}{b}$

У ҳолда

$$\left.\begin{aligned} x_N &= a\cos\varphi + n\cos\psi = a\cos\varphi + \frac{n}{b}\sqrt{b^2-a^2\sin^2\varphi} \\ y_N &= (b-n)\sin\psi = \frac{a}{b}(b-n)\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{б}$$

Шунга ўхшаш механизм ҳар бир нуқтаси ҳолатини аниқловчи Декарт координаталарини умумлашган координата φ орқали ифодалаш мумкин.

115-§. Умумлашган кучлар

Эркинлик даражаси k бўлган n та моддий нуқтадан ташкил топган голоном механик системанинг ҳолати $q_1, q_2, \ldots, q_k$ умумлашган координаталар орқали аниқлансин. Система нуқталарига мос равишда таъсир этувчи кучларни $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ билан белгилайлик. Система нуқталари радиус-векторларини $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ десак, бу кучлар мумкин бўлган ишларининг йиғиндиси (21.11) билан аниқланади. (21.17) дан маълумки,

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Шунга кўра, (21.11) қуйидагича ёзилади:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \qquad (21.18)$$

Қуйидагича белгилаш киритайлик:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \qquad (21.19)$$

Унда (21.18) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{k} Q_j\delta q_j = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_k\delta q_k. \qquad (21.20)$$

(21.19) формула билан аниқланувчи Q_j катталик q_j *умумлашган координатага мос келувчи умумлашган куч* дейилади.

$\vec{F}_i$ ва $\delta\vec{r}_i$ векторларни координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали $\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k}$, $\delta\vec{r}_i = \delta x_i\vec{i} + \delta y_i\vec{j} + \delta z_i\vec{k}$ куринишда ифодалаб, (21.19) га қўйсак, у қуйидагича ёзилади:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right). \qquad (21.21)$$

Шундай қилиб, умумлашган кучни ҳисоблашда бевосита (21.19) ёки (21.21) формулалардан фойдаланиш мумкин. Голоном механик система учун $\delta q_j (j = 1, 2, \ldots, k)$ бир-бирига боғлиқ бўлмагани учун, (21.20) га биноан, q_j га мос келувчи умумлашган куч шу умумлашган координатанинг δq_j кучишида мумкин булган ишни ҳисоблаш билан ҳосил қилинган ифодадаги δq_j олдидаги коэффициент деб олиниши ҳам мумкин.

(21.20) формуладан фойдаланиб, бирор умумлашган координатага (масалан, q_1 га) мос келувчи умумлашган кучни (Q_1

ни) топиш қуйидагича бажарилиши мумкин: фақат q_1 буйича мумкин булган кўчиш бериб ($\delta q_1 \neq 0$), қолган координаталар ўзгармайди деб қаралади ($\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_k = 0$) ва бунга мос келувчи мумкин бўлган иш δA_1 ҳисобланади: $\delta A_1 = = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i\right)_{q_1}$, бунда q_1 индекс мумкин булган ишларнинг йиғиндиси ҳисобланаётганда фақат q_1 координата вариацияланишини ифодалайди. У ҳолда (21.20) дан

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta q_1}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, ихтиёрий q_j умумлашган координатага мос келувчи Q_j умумлашган кучни ҳисоблаш учун

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j}, \ (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{21.22}$$

формула ҳосил қилинади.

Потенциал кучлар учун

$$F_{ix} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \ F_{iy} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \ F_{iz} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

бўлиши эътиборга олинса, (21.21) ифода

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

кўринишда ёзилади. Бунда куч функцияси U система потенциал энергияси П билан $\Pi = -U + C$ тенглик орқали ифодаланганидан, куч функцияси мавжуд бўлганда умумлашган кучлар

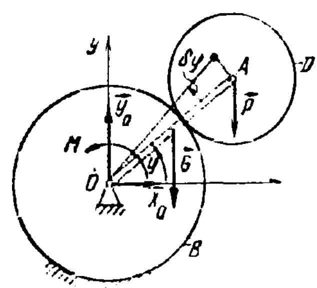
$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial b_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \tag{21.23}$$

формула билан ҳисобланади.

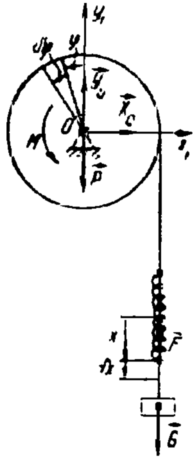
(21.22) дан кўрамизки, *умумлашган кучнинг улчов бирлиги* иш бирлигининг умумлашган координата улчов бирлигига нисбатига тенг; агар умумлашган координата узунлик бирлигида ўлчанса, умумлашган куч куч бирлигини (Н), q—рад/с да ўлчанса, Q—куч моменти бирлигини (Н·м) қабул қилади.

Умумлашган кучларни ҳисоблашга доир мисоллар кўриб чиқамиз.

1. 21.4-расмда тасвирланган эпициклик механизмда OA кри-



21.4-расм.



21.5-расм.

вошипга ўзгармас айлантирувчи момент M қуйилган. Кривошипнинг оғирлиги $\vec{G}$, D диск оғирлиги $\vec{P}$, радиуси r, B қўзғалмас диск радиуси R га тенг. Механизмнинг вертикал текисликдаги ҳаракатида умумлашган координата учун кривошипнинг бурилиш бурчаги φ ни олиб, унга мос келувчи умумлашган кучни аниқлаймиз.

Кривошипга O атрофида $\delta\varphi$ мумкин булган кўчиш бериб, системага қўйилган M момент, $\vec{G}$, $\vec{P}$, $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ кучларнинг шу кўчишдаги мумкин бўлган ишларининг йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\delta A_\varphi = M\delta\varphi - G\cdot\frac{r+R}{2}\cos\varphi\delta\varphi - P(r+R)\cos\varphi\delta\varphi = \frac{2M-(G+2P)(r+R)\cos\varphi}{2}\delta\varphi.$$

(21.22) формулага биноан умумлашган куч қуйидагига тенг бўлади:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = \frac{2M-(G+2P)(r+R)\cos\varphi}{2}\delta\varphi.$$

2. M ўзгармас момент таъсирида оғирлиги P, радиуси R бўлган барабанга ип ўралиши натижасида, ипга бикирлиги c бўлган пружина воситасида бириктирилган G оғирликдаги юк ҳаракатга келтирилади (21.5-расм). Барабаннинг бурилиш бурчаги φ билан пружина деформацияси x ни умумлашган координата деб олиб, уларга мос умумлашган кучларни аниқлашни кўрайлик.

Системага қўйилган M момент, $\vec{P}$, $\vec{G}$ оғирлик кучлари қаторига $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ реакция кучлари ҳамда $F = cx$ пружинанинг эластиклик кучини қўямиз.

Системанинг эркинлик даражаси иккига тенг бўлиб, φ ва x бир-бирига боғлиқ бўлмаган координаталардир. Аввал $\delta\varphi \neq 0$, $\delta x = 0$ деб олиб, шу кўчишдаги мумкин бўлган ишни ҳисоблаймиз:

$$\delta A_\varphi = M\delta\varphi - G\cdot R\delta\varphi.$$

φ умумлашган координатага мос келувчи Q_φ умумлашган куч (21.22) га кура қуйидагича топилади:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = M - G\cdot R\ (\text{Н}\cdot\text{м}).$$

Энди $\delta\varphi = 0$, $\delta x \neq 0$ мумкин бўлган кучишдаги ишни ҳисоблаймиз:

$$\delta A_x = G\delta x - F\delta x = (G - cx)\delta x.$$

Бинобарин, $Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = G - cx$ (H).

116-§. Мумкин бўлган кўчиш принципи

Мумкин бўлган кучиш принципи идеал, голоном стационар боғланишдаги система мувозанатининг зарурий ва етарли шартларини ифодалаб, қуйидаги теорема билан таърифланади.

Теорема. *Идеал, голоном, бушатмайдиган стационар боғланишлар таъсиридаги механик системанинг мувозанатда бўлиши учун унга таъсир этувчи актив кучларнинг система нуқталарининг мумкин бўлган кучишларидаги ишларининг йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.*

Система ҳар бир нуқтасига таъсир этувчи актив ва реакция кучларини мос равишда $\vec{F}_i^a$, $\vec{F}_i^r$, нуқталар радиус-векторларини $\vec{r}_i$ билан белгилаймиз. У ҳолда, мумкин булган кучиш принципи

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \delta\vec{r}_i = 0 \tag{21.24}$$

тенглама билан ифодаланади.

Аввал система мувозанатда бўлиши учун (21.24) шартнинг зарурлигини исботлаймиз. Система мувозанатда булгани учун, унинг ҳар бир нуқтаси ҳам мувозанатда булиб, $\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^r = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ шарт бажарилиши керак. Бу ифодани $\delta\vec{r}_i$ га скаляр купайтириб, системанинг барча нуқталари бўйича йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^r \delta\vec{r}_i = 0.$$

(21.12) ни, яъни системага идеал боғланишлар қуйилганини эътиборга олсак, охирги тенгламадан (21.24) ҳосил булади.

Энди (21.24) шартнинг система мувозанати учун етарли булишини исботлаймиз. Бунинг учун (21.24) шарт бажарилса ҳам, система мувозанатда бўлмайди деб фараз қиламиз. У ҳолда системанинг бирор нуқтаси ҳаракатда булиб,

$$\vec{F}_i^a + \vec{F}^r = \vec{R}_i \neq 0$$

келиб чиқади. Бундай нуқтанинг бирор $d\vec{r}_i$ ҳақиқий кучишидаги иши нолдан фарқли булади:

$$\vec{R}_i d\vec{r}_i = (\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^r) d\vec{r}_i > 0.$$

Системага қўйилган боғланишлар стационар голоном боғланиш бўлгани учун $d\vec{r}_i$ ҳақиқий кўчиш система мумкин бўлган кўчишининг бири бўла олади: $d\vec{r}_i=\delta\vec{r}_i$. У ҳолда,

$$(\vec{F}_i^a+\vec{F}_i')\delta\vec{r}_i>0.$$

Бу ифодани система барча нуқталари бўйича қўшиб,

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^a\delta\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i'\delta\vec{r}_i>0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. (21.12) га кўра охирги тенгсизлик

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^a\delta\vec{r}_i>0$$

кўринишни олади. Бу эса (21.24) га зиддир. Демак, қилинган фараз ноўрин ва система мувозанатда бўлади.

(21.24) ифодани аналитик усулда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{i=1}^{n}(F_x^a\delta x_i+F_{iy}^a\delta y_i+F_{iz}^a\delta z_i)=0. \qquad (21.25)$$

(21.24) ёки (21.25) ифода *Лагранж принципи* ёки *иш тенгламаси* деб ҳам аталади.

Агар системанинг ҳолати $q_1, q_2, \ldots, q_k$ умумлашган координаталар орқали аниқланса, (21.20) дан $\delta A=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\ldots+$ $+Q_k\delta q_k=0$ бўлиши маълум эди. Шунга кўра (21.24) қуйидаги кўринишни олади:

$$Q_i\delta q_i+Q_2\delta q_2+\ldots+Q_k\delta q_k=0. \qquad (21.26)$$

Голоном системада $\delta q_j(j=1,2,\ldots,k)$ бир-бирига боғлиқ бўлмаган вариациялар бўлгани учун (21.26) дан

$$Q_1=0,\ Q_2=0,\ \ldots,\ Q_k=0 \qquad (21.27)$$

келиб чиқади. (21.27) *мумкин бўлган кўчиш принципининг умумлашган координаталарда ифодаланишидир: голоном стационар бўшатмайдиган идеал боғланишли механик система мувозанатда бўлиши учун ҳар бир умумлашган координатага мос келувчи умумлашган кучнинг алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Системага таъсир этувчи кучлар потенциал кучлардан иборат бўлса, (21.23) ни эътиборга олиб, (21.27) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial U}{\partial q_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial U}{\partial q_k}=0 \qquad (21.28)$$

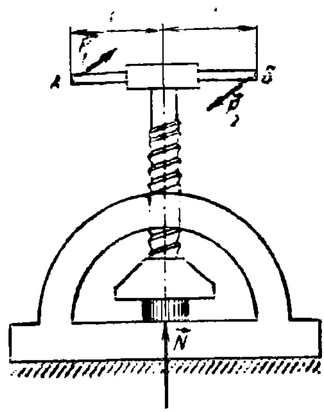
ёки

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=0,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}=0.$$

(21.28 а)

яъни *системанинг мувозанат ҳолатида куч функцияси ёки система потенциал энергияси экстремал қийматга эга булади.*

Мумкин булган кучиш принципини идеал булмаган боғланишдаги система мувозанати учун ҳам умуман татбиқ этиш мумкин; бунда фақат идеал бўлмаган боғланишлар реакция кучларини ҳам актив кучлар қаторига қушиб олиш керак.



2.16-расм.

61-масала. Винтли пресснинг AB дастасига горизонтал текисликда шу дастага перпендикуляр равишда йўналган ($\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$) жуфт қўйилган (21.6-расм). Винт қадамини h га тенг, $P_1=P_2=P$ ва $AB=2l$ деб олиб, прессланаётган жисмни қисувчи куч топилсин. Боғланишлардаги ишқаланишлар эътиборга олинмасин.

Ечиш. Прессланаётган жисмнинг прессга таъсирини $\vec{N}$ реакция кучи билан алмаштирамиз. У ҳолда система ($\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$) жуфт ва $\vec{N}$ кучдан иборат мувозанатдаги системани ташкил этади. Мумкин булган кучиш принципидан фойдаланиш учун AB дастага $\delta\varphi$ мумкин булган кучиш бериб, (21.24) иш тенгламасини тузамиз:

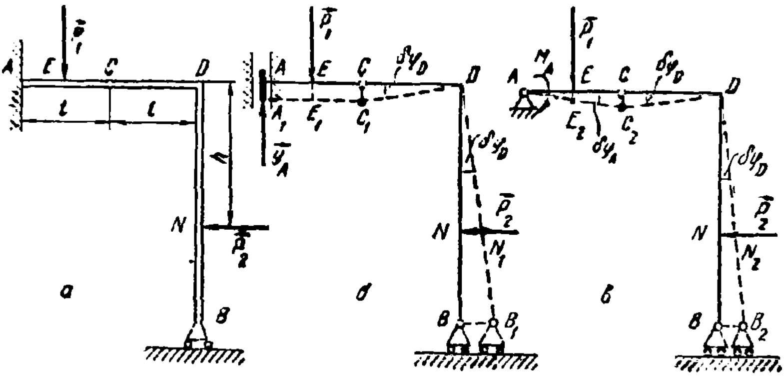
$$2Pl\delta\varphi - N\delta s = 0, \tag{1}$$

бунда δs—пресснинг вертикал бўйича пастга қараб кўчиши. Пресснинг эркинлик даражаси бирга тенг, яъни $\delta\varphi$ ва δs мумкин бўлган кучишлар бир-бирига боғлиқдир. Винтнинг илгарилама кўчиши унинг бурилиш бурчагига пропорционал бўлиб, у 2π га бурилганда винт h қадамга кўчади. Шунга кўра $\delta\varphi=\frac{2\pi}{h}\delta s$. Буни (1) га қўямиз:

$$\left(2Pl\cdot\frac{2\pi}{h} - N\right)\cdot\delta s = 0.$$

Бу тенгламадан $N=4\pi\cdot\frac{l}{h}P$ келиб чиқади. Жисмни қисувчи куч миқдор жиҳатдан N га тенг, йўналиши эса унга қарама-қаршидир.

62-масала. 21.7-расм, *а* да тасвирланган платформага $P_1=10$ кН, $P_2=4$ кН куч таъсир этади. $h=3$ м, $l=2$ м,



21.7-расм.

$AE = EC$ деб олиб, A нуқтада қисиб маҳкамланган боғланиш реакция кучининг вертикал ташкил этувчиси билан реакция моменти топилсин.

Ечиш. Платформа қўзғалмас системадан иборат. Унга қўйилган боғланишлар чеклашларини қаноатлантирган ҳолда мумкин бўлган кўчиш бера олмаймиз. Қайси реакция кучини аниқлаш керак бўлса, шу реакция кучини киритиб, мос равишда боғланишни олиб ташлаш ёки бошқача боғланиш билан алмаштириш орқали қўзғалувчи система ҳосил қилиш мумкин.

A боғланиш реакция кучининг вертикал ташкил этувчисини аниқлаш учун бу боғланишни вертикал бўйича сирпана оладиган боғланиш билан алмаштирамиз; бунда мувозанат бузилмаслиги учун $\vec{Y}_A$ реакция кучини қўямиз (21.7-расм, *б*). Натижада ҳосил бўлган системанинг AC қисми вертикал бўйича кўчиш олиши, B нуқта горизонтал бўйича кўчиш олиши, BC қисми текис параллел кучиш олиши мумкин, бунда D нуқта BC нинг айланма кўчиши маркази бўлади. $\vec{Y}_A$ кучни актив кучлар қаторига қўшиб қараймиз. Янги ҳосил қилинган системада боғланишлар идеал бўлгани учун, бу боғланишларнинг реакция кучларини тасвирлашнинг ҳожати йуқ. A нуқтага $\delta s_A = AA_1$ мумкин бўлган кўчиш бериб, (21.24) куринишдаги мувозанат шартни тузамиз:

$$-Y_A \delta s_A + P_1 \delta s_E - P_2 \delta s_N = 0. \qquad (1)$$

Бунда $\delta s_A = \delta s_E = \delta s_C$, $\delta s_N = NN_1$, D айланма кўчиш маркази бўлгани учун $CC_1 = \delta s_C = l\delta\varphi_D$, $\delta s_N = h\cdot\delta\varphi_D$ тенгликлар уринли ва улардан $\delta s_N = \frac{h}{l}\delta s_C = \frac{h}{l}\delta s_A$ муносабатни ёзиш мумкин. Шунга кўра (1) тенглама

$$\left(-Y_A + P_1 - P_2\cdot\frac{h}{l}\right)\delta s_A = 0$$

кўринишни олади. Бундаги қавс ичидаги ифодани нолга тенглаш билан Y_A ни топамиз:

$$Y_A = P_1 - P_2\cdot\frac{h}{l} = 4\text{кН}.$$

Энди M_A реакция моментини аниқлаш учун A боғланишни қўзғалмас шарнир ва M_A реакция моменти билан алмаштирамиз (21.7-расм, *в*). Ҳосил бўлган системанинг AC қисмини A атрофида айлантириш билан $\delta\varphi_A$ мумкин бўлган айланма кўчиш берамиз. Бунда CB текис параллел кўчиш олиб, уни D атрофида $\delta\varphi_D$ бурчак билан ифодаланувчи мумкин бўлган кўчишга алмаштира оламиз. У ҳолда иш тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$M_A\delta\varphi_A + P_1\frac{l}{2}\delta\varphi_A - P_2\cdot h\delta\varphi_D = 0. \qquad (2)$$

(2) даги $\delta\varphi_D$ ни $\delta\varphi_A$ орқали ифодалаймиз. Бир томондан $CC_2 = \delta s_C = AC\delta\varphi_A$, иккинчи томондан $\delta s_C = CD\delta\varphi_D$ ёки $AC\delta\varphi_A = CD\delta\varphi_D$, бунда $AC=CD=l$; шунинг учун $\delta\varphi_A=\delta\varphi_D$. Натижада (2) тенглама

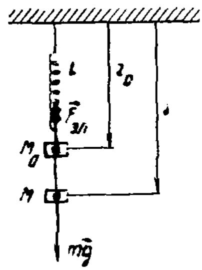
$$\left(M_A + P_1\cdot\frac{l}{2} - P_2\cdot h\right)\delta\varphi_A=0$$

кўринишда ёзилади. Бундан $M\varphi = P_2h - P_1\cdot\frac{l}{2} + 2$ кН · м келиб чиқади.

Бу масалани ечиш жараёнида бир неча қисмдан ташкил топган системада идеал боғланишлар реакция кучларини мумкин бўлган кўчиш принципидан фойдаланиб аниқлашнинг афзаллиги яққол намоён бўлди. Мумкин бўлган кўчиш принципи билан бирор реакция кучини бошқа реакция кучларини киритмай аниқлаш мумкин экан.

63-масала. m массали юк c бикирликдаги пружинага осилган бўлиб, деформацияланмаган пружина узунлиги z_0 га тенг (21.8-расм). Юкнинг мувозанат ҳолатидаги z аниқлансин.

Ечиш. Умумлашган координата учун z ни танлаймиз, $q=z$ координатага мос келувчи Q_z умумлашган кучни ҳисоблаймиз. Юкка таъсир этувчи кучлар (юкнинг оғирлик кучи, пружинанинг эластиклик кучи) потенциал кучлар бўлгани учун $Q_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}$.



21.8-расм.

Куч функцияси U эса

$$U = mg(z - z_0) - c \cdot \frac{(z - z_0)^2}{2}$$

муносабат билан ифодаланади. Бинобарин, $Q_z = \frac{\partial U}{\partial z} = mg - c(z - z_0)$. Энди мумкин булган кўчиш принципининг (21.28) кўринишдаги ифодасидан фойдаланамиз: $mg - c(z - z_0) = 0$. Бу тенгликдан юкнинг мувозанат ҳолати аниқланади: $z = z_0 + \frac{mg}{c}$.

117- §. Динамиканинг умумий тенгламаси

Голоном, бўшатмайдиган ва идеал боғланишдаги n та моддий нуқтадан ташкил топган механик система ҳаракатини курайлик. Системанинг ҳар бир $m_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ массали нуқтасига таъсир қилувчи актив ва реакция кучларининг тенг таъсир этувчиларини мос равишда $\vec{F}_i^a$, $\vec{F}_i^r$ орқали белгилайлик; бу нуқтанинг инерция кучи $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{w}_i$ булсин. У ҳолда системанинг ҳар бир нуқтаси учун Даламбер принципини ифодаловчи (20.2) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^r - m_i \vec{w}_i = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (21.29)$$

Система нуқталарига $\delta \vec{r}_i$ мумкин бўлган кўчиш берамиз. 21.29) ифодани $\delta \vec{r}_i$ га скаляр купайтирамиз:

$$\vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i + \vec{F}_i^r \delta \vec{r}_i - m_i \vec{w}_i \delta \vec{r}_i = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Бу тенгламалар системасини ҳадлаб қўшамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^r \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} (-m_i \vec{w}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (21.30)$$

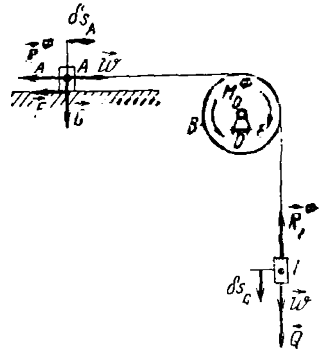
Системага идеал боғланишлар қўйилгани учун $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^r \delta \vec{r}_i = 0$ бўлиб, (21.30) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i^a - m_i \vec{w}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (21.31)$$

(21.31) ифода *динамиканинг умумий тенгламаси* дейилади ва қуйидагича таърифланади; *идеал, голоном, бушатмайдиган системага таъсир этувчи актив кучлар билан система нуқталари инерция кучларининг мумкин бўлган ишларининг йиғиндиси нолга тенг.*

$\vec{w}_i = \ddot{\vec{r}}_i$ булгани учун (21.31) тенгламани

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i^a - m_i\ddot{\vec{r}}_i)\delta\vec{r}_i = 0 \qquad (21.32)$$



21.9-расм.

куринишда ҳам ёзиш мумкин. $\vec{F}_i^a$, $\ddot{\vec{r}}_i$ ва $\delta\vec{r}_i$ ни координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали ифодалаб, (21.32) га қуйсак,

$$\sum_{i=1}^{n} [(F_{ix}^a - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{iy}^a - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i +$$

$$+ (F_{iz}^a - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i] = 0 \qquad (21.33)$$

ҳосил бўлади. (21.33) ифода *динамика умумий тенгламасининг аналитик кўринишидир.*

Динамиканинг умумий тенгламасидан фойдаланиб, идеал голоном, бушатмайдиган боғланишлар таъсиридаги механик система динамикасининг биринчи ва иккинчи асосий масалаларини ҳал қилиш, динамиканинг умумий теоремаларини келтириб чиқариш мумкин. Агар боғланишлар идеал бўлмаса, реакция кучларини ҳам актив кучлар қаторига қушиб олиш билан динамиканинг умумий тенгламасидан фойдаланиш мумкин

64-масала. 59-масалада C юкнинг тезланиши динамиканинг умумий тенгламасидан фойдаланиб аниқлансин (21.9-расм).

Ечиш. Системага таъсир этувчи $\vec{Q}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ кучлар қаторига A ва C юклар инерция кучлари $R_A^\Phi = \frac{G}{g} w$, $R_C^\Phi = \frac{Q}{g} w$ билан B ҳалқа инерция кучларининг моменти $M_O^\Phi = J_O \cdot \varepsilon = \frac{P}{g} rw$ ни қўшиб оламиз. A юк билан горизонтал текислик орасидаги ишқаланиш реакция кучи $F = fG$ ни актив кучлар қаторига қўшиб караймиз. Қолган боғланишлар идеал бўлгани учун расмда уларнинг реакция кучларини тасвирлашнинг ҳожати йўқ.

C юкка δs_C мумкин бўлган кучиш бериб, динамиканинг умумий тенгламаси (21.31) ни тузамиз:

$$Q\cdot\delta s_C - F\delta s_A - R_C^\Phi\delta s_C - M_O^\Phi\delta\varphi_O - R_A^\Phi\delta s_A = 0. \qquad (1)$$

Бунда $\delta s_C = \delta s_A$, $\delta\varphi_O = \frac{\delta s_C}{r}$ бўлгани учун (1) ни

$$(Q - F - R_C^\Phi - \frac{M_O^\Phi}{r} - R_A^\Phi)\delta s_A = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Қавс ичидаги ифодани нолга тенглаштириб, инерция кучларининг $\vec{w}$ орқали ифодаларини эътиборга олиб,

$$Q - fG - \frac{Q}{g} w - \frac{P}{g} r \cdot w \cdot \frac{1}{r} - \frac{G}{g} w = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан C юк тезланиши w топилади:

$$w = \frac{Q - fG}{G+P+Q} g.$$

Шундай қилиб, динамиканинг умумий тенгламасидан фойдаланилганда ипнинг таранглик кучи киритилмаса, масалани ечиш анча соддалашади.

118-§. Лагранжнинг биринчи тур тенгламалари

Агар n та моддий нуқтадан ташкил топган системага

$$f_\nu(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (\nu = 1,2, \ldots, s) \qquad (21.34)$$

голоном стационар идеал боғланишлар қўйилган бўлса, бу боғланишлар система виртуал кўчишларидан s тасини бир-бирига боғлиқ қилиб қўйиб, улар қуйидаги муносабатлар билан аниқланади;

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f_\nu}{\partial z_1} \delta z_1 + \ldots + \frac{\partial f_\nu}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_n} \delta y_n +$$
$$+ \frac{\partial f_\nu}{\partial z_n} \delta z_n = 0, \quad (\nu = 1,2, \ldots, s). \qquad (21.35)$$

Бинобарин, $3n$ та $\delta x_1, \delta y_i, \delta z_1, \ldots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ виртуал кўчишлардан $(3n-s)$ таси бир-бирига боғлиқ бўлмайди. (21.35) тенгламалардан s та бир-бирига боғлиқ кўчишларни $(3n-s)$ та бир-бирига боғлиқ булмаган кўчишлар орқали ифодалаб, уларни динамиканинг умумий тенгламасига қуйиб, бир-бирига боғлиқ бўлмаган мумкин булган кучишлар олдидаги коэффициентларни нолга тенглаш билан ҳаракатнинг $3n-s$ та дифференциал тенгламаларини ҳосил қилиш мумкин. Бу тенгламалар қаторида s та боғланиш тенгламаларини биргаликда олиб, $3n$ та тенгламалар системасига эга бўламиз ва уларни ечиб, $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ координаталарни вақт ва интеграллаш доимийлари функцияси сифатида аниқлаш мумкин.

Аммо дифференциал тенгламаларни бундай ечиш методи анчагина мураккабдир. Бунда Лагранжнинг номаълум кўпайтувчилари деб аталмиш $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ дан фойдаланиш усули аввалгисига қараганда қулайроқдир. Бу усулга кўра (21.35) ифодаларни мос равишда ҳозирча номаълум бўлган $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ купайтувчиларга кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган купайтмаларни динамиканинг умумий тенгламаси (21 33) билан қушамиз. Йиғиндидаги ҳадларни группалагандан сунг

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(F_{ix}^{a}-m_i\ddot{x}_i+\sum_{\nu=1}^{s}\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}\right)\delta x_i+\left(F_{iy}^{a}-m_i\ddot{y}_i+\sum_{\nu=1}^{s}\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial y_i}\right)\delta y_i+\right.$$

$$\left.+\left(F_{iz}^{a}-m_i\ddot{z}_i+\sum_{\nu=1}^{s}\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right]=0 \qquad (21.36)$$

тенглама келиб чиқади. Юқорида таъкидлаганимиздек, δx_i, δy_i, δz_i вариациялардан фақат $3n-s$ тасигина бир-бирига боғлиқ эмас, улардан s таси эса (21.35) муносабат билан боғланган. $3n-s$ та координаталар вариацияларининг мустақиллигидан фойдаланиб, (21.36) тенгламада $3n-s$ та кичик қавсдаги ифодаларни нолга тенглаштириб олиш мумкин. Қолган s та кичик қавсдаги ифодалар эса $\lambda_\nu(\nu=1,2,\ldots,s)$ кўпайтувчиларни тегишлича танлаш билан нолга тенгланади. Натижада қуйидаги $3n$ та тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i&=F_{ix}^{a}+\sum_{\nu=1}^{s}\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i},\\ m_i\ddot{y}_i&=F_{iy}^{a}+\sum_{\nu=1}^{s}\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial y_i},\quad (i=1,2,\ldots,n).\\ m_i\ddot{z}_i&=F_{iz}^{a}+\sum_{\nu=1}^{s}\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial z_i},\end{aligned}\right\} \qquad (21.37)$$

(21.37) система *Лагранжнинг биринчи тур тенгламалари* дейилади. (21.37) тенгламалар системаси қаторига (21.34) боғланиш тенгламаларини қўшиб қарасак, $3n+s$ та x_i, y_i, z_i, λ_ν номаълумларга нисбатан ёпиқ система ҳосил бўлади. Бу системани ечиб, s та ёрдамчи кўпайтувчилар ва механик система нуқталарининг $3n$ координаталари вақтнинг функциялари сифатида аниқланади. (21.37) ни механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари билан таққослаб, $\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}$, $\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial y_i}$, $\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial z_i}$ ифодалар (21.34) билан ифодаланувчи боғланишлар реакция кучларининг координата ўқларидаги проекцияларидан иборат эканлигини кўрамиз.

Механик система нуқталари сонини ва системага қўйилган боғланишлар сонининг ортиши билан (21.37) ва (21.34) тенгламаларнинг сони ҳам ошиб боради, натижада бу тенгламаларнинг амалда қулланилиши қийинлашади. Лагранжнинг I тур тенгламаларини аҳамияти шундаки, улар ёрдамида система нуқталари ҳаракатини аниқлаш билан бир қаторда боғланишлар реакцияларини ҳам топиш мумкин.

Мисол тариқасида P оғирликдаги моддий нуқтанинг силлиқ горизонтал текисликдаги ҳаракатини кўрайлик. z ўқни горизонтал xy текисликка перпендикуляр қилиб утказамиз. У ҳолда боғланиш тенгламаси $f=z=0$ тенглама билан ифодаланади. Бу ҳолда нуқтанинг эркинлик даражаси $3 \cdot 1 - 1 = 2$ га тенг.

$F_x^a = 0$, $F_y^a = 0$, $F_z^a = -P$ бўлганидан моддий нуқтанинг (21.37) кўринишдаги дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m\ddot{x} = 0, \ m\ddot{y} = 0, \ m\ddot{z} = -P + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \qquad (а)$$

Бу ҳолда λ коэффициентни аниқласак, $\lambda = P$ келиб чиқади. $\vec{N}$ боғланиш реакция кучининг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича топилади:

$$N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda = P.$$

Бинобарин, $N = P$.

Шундай қилиб, (а) дифференциал тенгламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$m\ddot{x} = 0, \ m\ddot{y} = 0, \ m\ddot{z} = 0. \qquad (б)$$

$z = 0$ тенглама билан ифодаланувчи боғланиш (текислик) бўшатмайдиган боғланиш бўлгани учун бошланғич пайтда $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$. У ҳолда (б) тенгламаларнинг биринчи иккитасидан нуқта xy текисликда ўз инерцияси бўйича ҳаракатда бўлиши келиб чиқади.

119- §. Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари

Системани ташкил этувчи нуқталар сони ҳамда унга қуйилган боғланишларнинг сони ортиши билан Лагранжнинг биринчи тур тенгламаларидан фойдаланиш қийинлашиб боришини қайд қилган эдик.

Системага қуйилган боғланишларнинг сони ортиши билан умумлашган координаталарнинг сони камайиб боради ва дифференциал тенгламалар умумлашган координаталар орқали тузилса, табиийки, бу тенгламаларнинг сони Декарт координаталарига нисбатан тузилган тенгламаларнинг сонидан кам булади. Иккинчи томондан умумлашган координаталарни киритиш билан боғланишларнинг система нуқталари ҳаракатига кўрсатадиган таъсири уз-узидан ҳисобга олинади. Шунга кўра, механик система ҳаракатининг умумлашган координаталар орқали дифференциал тенгламалари тузилса, Лагранжнинг биринчи тур тенгламасидан фойдаланишга қараганда анчагина қулайлик яратилади.

Эркинлик даражаси k га тенг идеал, голоном боғланишдаги механик система ҳолати $q_1, q_2, \ldots, q_k$ умумлашган координаталар орқали аниқлансин. Система ҳар бир нуқтасининг радиус-векторини $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) билан белгилаб, динамиканинг асосий тенгламаси (21.32) ни

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \delta\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i = 0 \tag{21.38}$$

кўринишда ифодалаймиз. (21.38) да биринчи йиғинди (21.20) га кура қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{k} Q_j \delta q_j. \tag{21.39}$$

Энди (21.38) даги иккинчи йиғиндининг шаклини ўзгартирамиз. $\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial\vec{q}_j}\delta q_j$ бўлгани учун

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{21.40}$$

(21.39) ва (21.40) ни (21.38) ға қўямиз:

$$\sum_{i=1}^{k}\left[Q_j - \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0.$$

Голоном боғланишдаги система учун δq_j вариациялар бир-бирига боғлиқ булмагани учун улар олдидаги коэффициентларни алоҳида-алоҳида нолга тенглаб,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j, \; (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{21.41}$$

муносабатларни ҳосил қиламиз (21.41) тенгликнинг чап томонида қуйидагича шакл узгартирамиз:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = m_i \frac{d}{dt}\left(v_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right). \tag{21.42}$$

(21.42) ни содда ҳолга келтириш мақсадида, аввал қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини кўрсатамиз:

$$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\mu} = \frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\mu} = \frac{\partial\dot{v}_i}{\partial\dot{q}_\mu}, \tag{21.43}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right) = \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_\mu}. \tag{21.44}$$

Бунда μ билан 1, 2, ..., k қийматларни қабул қилувчи ихтиёрий индекс белгиланган, $\dot{q}_\mu$ эса умумлашган тезликдан иборат. Ҳақиқатан, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ дан қуйидагини ёза оламиз.

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \tag{21.45}$$

Бунда $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ ва $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ хусусий ҳосилалар умумлашган координаталар ва вақтнинг функцияси бўлиб, умумлашган тезликларга боғлиқ бўлмагани учун ҳар бир нуқта тезлиги умумлашган тезлик орқали чизиқли ифодаланиши мумкин ва бунда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\mu}.$$

Энди (21.44) ни исботлаймиз. $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\mu}$ дан вақт бўйича ҳосила ҳисоблайлик:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_\mu}\cdot \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right). \tag{21.46}$$

Иккинчи томондан (21.45) дан q_μ бўйича ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\mu} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial q_\mu}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot \dot{q}_j\right) + \frac{\partial}{\partial q_\mu}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_\mu}\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right). \tag{21.47}$$

(21.46) ва (21.47) формулаларни таққослаб, (21.44) формуланинг туғрилигини кўрамиз.

Энди (21.43) ва (21.44) муносабатларни эътиборга олиб, (21.42) ни қуйидагича узгартирамиз:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i\left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\frac{m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{2}\right]\right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{2}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T_i}{\partial q_j}. \tag{21.48}$$

(21.48) да T_i билан системанинг m_i массали нуқтасининг кинетик энергияси белгиланган. (21.48) ифодани (21.41) га қўйиб

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T_i}{\partial q_j}\right]=Q_j \ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k) \qquad (21.49)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (21.49) *динамиканинг умумий тенгламасини умумлашган координаталар орқали ифодалаш ёки Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари* дейилади. Бунда $T=\sum_{i=1}^{n}T_i$ механик системанинг кинетик энергиясидир.

Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари *система ҳаракати дифференциал тенгламаларининг умумлашган координаталарда ифодаланиши* деб ҳам аталади. (21.49) дан кўрамизки, бу дифференциал тенгламаларнинг сони системани ташкил этувчи нуқталар сонига боғлиқ бўлмай, системанинг эркинлик даражасига тенг экан. Шу нуқтаи назардан Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари механик система ҳаракатининг Декарт координаталаридаги дифференциал тенгламаларидан ёки Лагранжнинг биринчи тур тенгламаларидан афзалдир.

Кинетик энергияни умумлашган координаталар ва умумлашган тезликлар орқали ифодалашни кўриб ўтамиз.

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\vec{v}_i\vec{v}_i)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{\vec{r}}_i)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2.$$

Қавсдаги ифодани квадратга оширамиз ва умумлашган тезликларга нисбатан иккинчи даражали ва биринчи даражали ҳадларни алоҳида-алоҳида ҳамда умумлашган тезликлар қатнашмаган ҳадларни алоҳида группаларга ажратамиз. Бу группаларни мос равишда T_2, T_1 ва T_0 орқали белгилаймиз. У ҳолда:

$$T=T_2+T_1+T_0. \qquad (21.50)$$

Бунда

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\right)^2\cdot\dot{q}_1^2+\ldots+\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)^2\cdot\dot{q}_k^2+2\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2+\right.$$

$$\left.+\ldots+2\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{k-1}}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_{k-1}\dot{q}_k\right],$$

$$T_1=\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_k\right],\quad T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)^2.$$

Яна қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A_{j\mu}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\mu},\ B_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}. \tag{21.51}$$

У ҳолда T_2 ва T_1 функцияларни

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k}A_{j\mu}\dot{q}_j\dot{q}_\mu, \tag{21.52}$$

$$T_1=\sum_{j=1}^{k}B_j\dot{q}_j \tag{21.53}$$

каби ёзиш мумкин. (21.51) дан курамизки, $A_{j\mu}$ коэффициент уз индексларига нисбатан симметрикдир. $A_{j\mu}$ ва B_j коэффициентлар $q_1, q_2, \ldots, q_k$ умумлашган координаталар ва t вақтга боғлиқ булиб, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ умумлашган тезликларга боғлиқ эмас.

Шундай қилиб умумий ҳолда система кинетик энергияси умумлашган тезликларга нисбатан иккинчи даражали T_2, чизиқли T_1 ва нолинчи T_0 формаларнинг йиғиндиси сифатида ифодаланиши мумкин экан.

Стационар боғланишлар ҳолида $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}=0$ бўлгани учун T_0 ва T_1 ҳадлар ҳам нолга айланади. Бу ҳолда системанинг кинетик энергияси умумлашган тезликларга нисбатан

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k}A_{j\mu}\dot{q}_j\dot{q}_\mu$$

кўринишдаги квадратик формани ташкил қилади. Бу ерда энди $A_{j\mu}$ коэффициентлар t вақтга ошкор равишда боғлиқ булмайди.

Лагранж тенгламаларига система кинетик энергиясининг умумлашган координаталар орқали ифодасини киритиб, уларни интеграллаш билан умумлашган координаталарни t вақт функциялари сифатида аниқлаш мумкин. Натижада механик системанинг ҳаракати аниқланади. (21.49) тенгламаларнинг умумий ечими $2k$ та интеграл доимийларини уз ичига олади:

$$q_j=q_j(t,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{2k}),\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Бу интеграл доимийлари умумлашган координаталар ва умумлашган тезликларнинг бошланғич пайтдаги қийматлари орқали топилади.

Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари механик система ҳаракатини тулиқ аниқловчи минимал сондаги ҳамда боғланишларнинг номаълум реакцияларини ўз ичига олмаган тенгламалардан иборат. Лекин бу тенгламалар ечилгандан сунг система нуқталарига қўйилган идеал боғланишлар реакцияларини ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун вақт функциялари сифатида аниқланган умумлашган координаталардан Декарт координаталарига ўтиб, ҳар қайси нуқтанинг тезланиши топилади ва

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i^a + \vec{F}_i^r, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

тенгламага қўйилади. Бунда $\vec{F}_i^a$ ва $\vec{F}_i^r$ мос равишда m_i массали нуқтага қўйилган актив ва реакция кучларнинг тенг таъсир этувчиларидир. $\vec{F}_i^a$ кучларни берилган ҳисоблаб, бу тенгламалардан $\vec{F}_i^r$ боғланишлар реакцияларини аниқлаш мумкин.

120-§. Потенциал кучлар ҳолида Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари. Циклик координаталар

Механик системага потенциал кучлар таъсир этганда системанинг потенциал энергияси $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots q_k, t)$ кўринишда булади. q_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ умумлашган координаталарга мос Q_j умумлашган кучлар эса $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ тенгликдан топилади. Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаларидаги умумлашган кучларни потенциал энергиянинг хусусий ҳосилалари билан алмаштирамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Ёки уни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - \Pi) = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \qquad (21.54)$$

Система кинетик энергиясидан потенциал энергиясининг айирмаси Лагранж функцияси ёки Лагранжнинг кинетик потенциали дейилади. Уни L билан белгилаймиз:

$$L = T - \Pi. \qquad (21.55)$$

Потенциал энергия умумлашган тезликка боғлиқ бўлмагани учун

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \qquad (21.56)$$

бўлади. (21.55), (21.56) ифодаларни (21.54) га қўямиз ва

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (21.57)$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Шундай қилиб, *потенциал кучлар таъсиридаги система учун Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари* (21.57) тенгламалар билан ифодаланади. (21.55) дан куринадики, Лагранж функцияси умумлашган координаталар, умумлашган тезликлар, шунингдек, вақтнинг функцияси булиши мумкин. Умумлашган координаталар ва умумлашган тезликлар *Лагранж узгарувчилари* дейилади.

Айрим ҳолларда Лагранж функциясига баъзи умумлашган координаталар ошкор равишда кирмаслиги мумкин Лагранж функциясига ошкор равишда кирмаган умумлашган координаталарга *механик системанинг циклик координаталари* дейилади. Масалан, қаршиликсиз муҳитда ҳаракатланувчи m массали моддий нуқтани қарайдиган бўлсак, бунда умумлашган координаталар сифатида нуқтанинг Декарт координаталарини олиш мумкин. Бинобарин, Лагранж функцияси

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

бўлиб, x, y координаталар L функцияга ошкор равишда кирмаганлиги учун улар циклик координаталар бўлади.

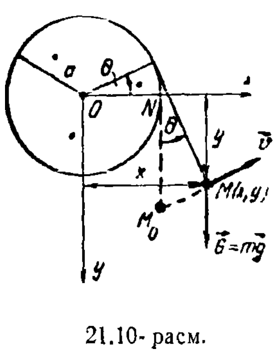
Фараз қилайлик, қаралаётган механик системанинг k та q_1, q_2, ..., q_k умумлашган координаталари орасида дастлабки l таси циклик координаталар бўлсин. У ҳолда $\alpha = 1, 2, \ldots, l$ учун $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$ ва (21.57) Лагранж тенгламаларидан

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0$$

ёки

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \mathrm{const}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, l \tag{21.58}$$

ҳосил бўлади. (21.58) тенгламалар умумлашган координаталар, умумлашган тезликлар ва интеграл доимийлари орасидаги боғланишни ифодалаб, *Лагранж тенгламаларининг биринчи интеграллари* бўлади. Бу биринчи интегралларга *циклик интеграллар* дейилади. Шундай қилиб, Лагранж функциясида нечта умумлашган координата ошкор равишда қатнашмаса, Лагранж тенгламаларидан мос равишда шунча биринчи интегралларни аниқлаш мумкин.



21.10- расм.

65-масала. Радиуси a га тенг қўзғалмас цилиндрга уралган ипга осилган m массали M моддий нуқтадан иборат маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламаси тузилсин (21.10-расм). Мувозанат вазиятида ипнинг осилиб турган қисмининг узунлиги l. Ип массаси ҳисобга олинмасин.

Ечиш. M маятникнинг эркинлик даражаси бирга тенг. Умумлашган координата учун ипнинг вертикалдан оғиш бурчаги θ ни оламиз.

M маятникка қўйилган боғланиш идеал боғланишдан иборат. Унга таъсир этувчи оғирлик кучи эса потенциал кучдир. Шунга кура, потенциал кучлар таъсиридаги система учун (21.57) кўринишдаги Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаларидан фойдаланамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0, \qquad (1)$$

бунда $L=T-\Pi$ бўлиб, T — маятник кинетик энергиясини, Π эса унинг потенциал энергиясини ифодалайди. M маятник кинетик энергияси

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (2)$$

формула билан аниқланади.

M нуқта тезлигини аниқлаш учун Oxy координаталар системасини ўтказиб, нуқтанинг координаталари x, y ни умумлашган координата θ орқали ифодалаймиз. Расмдан қуйидагиларни топамиз:

$$x=a\cos\theta+(l+a\cdot\theta)\sin\theta,$$
$$y=(l+a\cdot\theta)\cos\theta-a\sin\theta.$$

У ҳолда M нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича бўлади:

$$v_x=\dot{x}=-a\sin\theta\cdot\theta+(l+a\cdot\theta)\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta}+a\cdot\dot{\theta}\sin\theta=$$
$$=(l+a\cdot\theta)\cdot\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$v_y=\dot{y}=-(l+a\cdot\theta)\sin\theta\cdot\dot{\theta}+a\cdot\dot{\theta}\cos\theta-a\cos\theta\cdot\dot{\theta}=$$
$$=-(l+a\cdot\theta)\cdot\dot{\theta}\sin\theta.$$

Шунга кўра M нуқта тезлиги v қуйидагига тенг бўлади:

$$v^2=v_x^2+v_y^2=(l+a\cdot\theta)^2\cdot\dot{\theta}^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

ёки

$$v^2=(l+a\cdot\theta)^2\cdot\dot{\theta}^2.$$

Буни (2) га қўямиз:

$$T=\frac{1}{2}m(l+a\cdot\theta)^2\cdot\dot{\theta}^2.$$

нди маятникнинг потенциал энергиясини ёзамиз:

$$\Pi = -mgy = -mg[(l + a\cdot\theta)\cos\theta - a\sin\theta].$$

Шундай қилиб,

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m(l + a\cdot\theta)^2\cdot\dot\theta^2 + mg[(l + a\cdot\theta)\cos\theta - a\sin\theta].$$

(1) формула учун керакли ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = m(l + a\theta)\cdot a\dot\theta^2 + mg[a\cos\theta - (l + a\theta)\sin\theta - a\cos\theta] =$$

$$= m(l + a\cdot\theta)(a\dot\theta^2 - g\sin\theta);$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = m(l + a\cdot\theta)^2\cdot\dot\theta;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = m(l + a\cdot\theta)(2a\cdot\dot\theta^2 + (l + a\cdot\theta)\cdot\ddot\theta).$$

Натижада (1) Лагранж тенгламаси қуйидагича ёзилади:

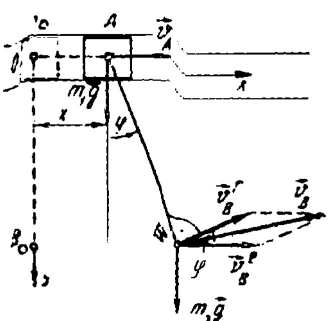
$$m(l + a\cdot\theta)[2a\cdot\dot\theta^2 + (l + a\cdot\theta)\cdot\ddot\theta - a\cdot\dot\theta^2 + g\sin\theta] = 0.$$

Бу ифоданинг икки томонини $m(l + a\cdot\theta)$ га булиб, ўхшаш ҳадларини ихчамласак, маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламаси ҳосил бўлади:

$$(l + a\cdot\theta)\cdot\ddot\theta + a\cdot\dot\theta^2 + g\sin\theta = 0.$$

66-масала. 21.11-расмда тасвирланган эллиптик маятникнинг ҳаракати дифференциал тенгламалари ҳамда маятникнинг кичик тебранишлари даври аниқлансин. Ползун A нинг массаси m_1, нуқта деб қаралувчи B шарчанинг массаси m_2, вазнсиз AB стерженнинг узунлиги l деб олинсин. Ишқаланишлар ҳисобга олинмасин.

Ечиш. A ползун ва B шарчадан иборат идеал голоном боғланишли системанинг эркинлик даражаси иккига тенг. Умумлашган координата q_1 учун A ползуннинг горизонтал Ox ўқ буйлаб ҳаракатини аниқловчи x координатани, q_2 учун AB стерженнинг вертикалдан оғиш бурчаги φ ни оламиз. У ҳолда, Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари қуйидагича ёзилади:



21.11-расм.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot x}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} &= Q_\varphi \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Q_x, Q_φ умумлашган кучларни

ҳисоблаймиз. Q_x ни ҳисоблаш учун x умумлашган координата буйича δx мумкин булган кучиш бериб, системага қуйилган кучларнинг бу кўчишдаги ишлари йиғиндисини ҳисоблаймиз. Бунда φ координата узгармайди деб қараймиз. У ҳолда $\delta A_x = 0$, демак, $Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = 0$ келиб чиқади. Энди φ умумлашган координатага $\delta\varphi$ мумкин бўлган кучиш берамиз, x ни эса узгармайди деб қараймиз. Бунда $\delta A_\varphi = -m_2 g l \sin\varphi\delta\varphi$. Бинобарин $Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = -m_2 g l \sin\varphi$.

Энди система кинетик энергиясини ҳисоблаймиз:

$$T = T_A + T_B.$$

A ползун илгарилама ҳаракатда бўлгани учун унинг кинетик энергияси T_A қуйидагича топилади:

$$T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2.$$

B шарчанинг (моддий нуқтанинг) кинетик энергияси T_B ни аниқлаймиз:

$$T_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2.$$

Бунда B нуқта мураккаб ҳаракатда бўлади:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_B^e + \vec{v}_B^r.$$

B нуқтанинг кўчирма тезлиги умумлашган тезлик орқали $v_B^e = \dot{x}$, нисбий тезлиги эса $v_B^r = l\dot{\varphi}$ муносабатлар орқали ифодаланади. $\vec{v}_B^e$ ва $\vec{v}_B^r$ векторлари орасидаги бурчак эса φ га тенг. У ҳолда косинуслар теоремасига кўра:

$$v_B^2 = (v_B^e)^2 + (v_B^r)^2 + 2 v_B^e v_B^r \cos\varphi = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Бинобарин,

$$T_B = \frac{m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Натижада

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

ҳосил бўлади.

(1) тенгламаларни тузиш учун керакли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x} \cos\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \cos\varphi - m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin\varphi.$$

Топилган Q_x, Q_φ қийматлари ва ҳисобланган ҳосилаларни (1) га қўйиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi\right] = 0, \\ &l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(2) система эллиптик маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламаларидан иборат.

Маятнинг кичик тебранишлари қаралганда $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx \approx 1$ деб олиш мумкин. Бу ҳолда (2) система қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} &(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0, \\ &l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0. \end{aligned}\right\}$$

Бу тенгламаларнинг биринчисидан $\ddot{x}$ ни топиб $\left(\ddot{x} = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \times \times \ddot{\varphi}\right)$, иккинчисига қўйсак, тебрангичнинг кичик тебранишлари дифференциал тенгламаси ҳосил бўлади:

$$l\ddot{\varphi} - \frac{m_2 l \ddot{\varphi}}{m_1 + m_2} + g\varphi = 0$$

ёки

$$\frac{l \cdot m_1}{m_1 + m_2}\ddot{\varphi} + g\varphi = 0. \tag{3}$$

Агар $k^2 = \frac{g}{l} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1}$ белгилаш киритсак, (3) дифференциал тенглама

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

кўринишни олади. Маълумки, бу ҳолда тебранишлар даври қуйидагича топилади:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{g}}.$$

121-§. Механик система ҳаракатининг каноник тенгламалари (Гамильтон тенгламалари)

Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари умумлашган координаталарга нисбатан иккинчи тартибли k та дифференциал тенгламалардан иборат. Лекин янги ўзгарувчилар киритиб, бу тенгламалар системасини унга эквивалент булган $2k$ та биринчи тартибли дифференциал тенгламаларга келтириш мумкин. Бунда турлича усуллар мавжуд. Бу усуллардан бири *Гамильтон усули* булиб, янги ўзгарувчилар учун умумлашган координаталар q_j қаторида *умумлашган импульслар* деб аталувчи p_j ўзгарувчилар киритилади. Умумлашган импульс p_j қуйидаги формулага биноан танланади:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (21.59)$$

Бу тенгликни (21.50) — (21.53) муносабагларга асосан

$$p_j = \sum_{\mu=1}^{k} A_{j\mu}\dot{q}_\mu + B_j; \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \qquad (21.60)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (21.60) тенгламалар умумлашган тезликларга нисбатан алгебраик чизиқли тенгламалардан иборат бўлиб, ундаги $A_{j\mu}$ ва B_j умумлашган координаталарга боғлиқ коэффициентлардир. (21.60) тенгламалар системасининг детерминанти:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot_k \\ A_{k1} & A_{k2} & \ldots & A_{kk} \end{vmatrix}$$

нолдан фарқлидир. Чунки $D = 0$ бўлса, $\dot{q}_j \neq 0$ да кинетик энергия нолга тенг чиқиб қолади, бундай бўлиши мумкин эмас. Бинобарин, (21.60) системани умумлашган тезликларга нисбатан ечиб, бу тезликларни умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар орқали ифодалаш мумкин:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1, q_2, \ldots, q_k; p_1, p_2, \ldots, p_k, t),$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k). \qquad (21.61)$$

(21.61) дан шундай хулоса чиқади: механик системанинг ихтиёрий пайтдаги ҳолати умумлашган координаталар ва умумлашган импульсларнинг қийматлари билан аниқланади.

Умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар *каноник узгарувчилар* ёки *Гамильтон ўзгарувчилари* дейилади.

Энди механик система ҳаракатининг каноник ўзгарувчиларга нисбатан дифференциал тенгламаларини тузишга киришамиз. Бунинг учун *Гамильтон функцияси* деб аталувчи қуйидаги H функцияни киритамиз:

$$H = -L \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j.$$

Бу функциянинг вариациясини аниқлаймиз:

$$\delta H = -\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{k} \delta p_j \cdot \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{k} p_j \delta \dot{q}_j.$$

(21.59) ни эътиборга олсак, бу ифоданинг ўнг томонидаги иккинчи ва туртинчи қўшилувчилар йиғиндиси нолга тенг. (21.57) га асосан:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{dp_j}{dt} = \dot{p}_j.$$

Натижада

$$\delta H = -\sum_{j=1}^{k} \dot{p}_j \delta q_j + \sum_{j=1}^{k} \delta p_j \dot{q}_j \tag{21.62}$$

келиб чиқади. (21.61) га кура

$$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_k; p_1, p_2, \ldots, p_k; t).$$

Шунинг учун Гамильтон функциясининг вариацняси

$$\delta H = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j \tag{21.63}$$

ўринлидир. (21.62) ва (21.63) тенгликларнинг чап томонлари бир хил бўлганидан ўнг томонлари ҳам тенг:

$$-\sum_{j=1}^{k} \dot{p}_j \delta q_j + \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \delta p_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j. \tag{21.64}$$

Системага голоном боғланишлар қўйилгани учун δq_j ва δp_j вариациялар бир-бирига боғлиқ эмас ва (21.64) тенглик δq_j ва δp_j вариацияларнинг ҳар қандай қийматларида ҳам уринли. Шунинг учун бу вариациялар олдидаги коэффициентлар тенг:

$$-\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}. \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{21.65}$$

(21.65) тенгламалар системаси *механиканинг каноник тенгламалари* ёки *Гамильтон тенгламалари* дейилади. Бу тенгламалар умумлашган координаталар ва умумлашган импульсларга нисбатан $2k$ та биринчи тартибли дифференциал тенгламалардан иборат. Бошланғич шартлар берилиши билан бу тенгламалардан умумлашган координаталар ва умумлашган импульсларни вақтнинг маълум функциялари сифатида аниқлаш мумкин. Умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар аниқлангандан сунг (21.60) формулалардан фойдаланиб умумлашган тезликларни ҳам топиш мумкин.

Гамильтон функцияси маълум физик маънога эга. Ҳақиқатан потенциал энергия умумлашган тезликларга боғлиқ булмагани учун бу функцияни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$H = -L + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = -(T - \Pi) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j =$$

$$= \Pi - T + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \qquad (21.66)$$

Маълумки, механик системага стационар боғланишлар қўйилганда, кинетик энергия $\dot{q}_j$ умумлашган тезликларга нисбатан иккинчи тартибли бир жинсли функциядан иборат. Эйлернинг бир жинсли функциялар ҳақидаги теоремасига асосан $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \times \dot{q}_j = 2T$ бўлиб, (21.66) дан $H = T + \Pi$ ҳосил бўлади. Демак, *голоном стационар боғланишлар таъсиридаги механик система учун Гамильтон функцияси системанинг тўлиқ механик энергиясини ифодалайди.*

67-масала. Ньютон қонуни бўйича ўзаро тортишиш кучи таъсирида xOy текислигида ҳаракатланувчи m_1, m_2 массали M_1 ва M_2 моддий нуқталардан иборат система учун (21.12-расм) Гамильтон функцияси ва ҳаракатнинг каноник тенгламалари тузилсин. Бошланғич пайтда системанинг массалар маркази тинч ҳолатда туради.

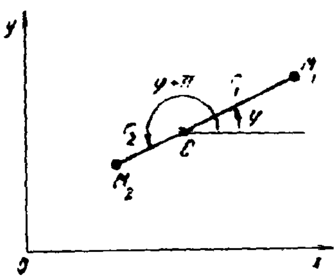
Ечиш. Бошланғич пайтда система массалар маркази тинч ҳолатда бўлиб, нуқталар фақат ички кучлар — Ньютон тортишиш кучи таъсирида ҳаракатлангани учун, массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунига кўра система массалар маркази C доимо қўзғалмай қолади. Массалар марказини координата боши деб олиб, ундан M_1 ва M_2 нуқталаргача бўлган масофаларни r_1, r_2, M_1M_2 масофани эса r билан белгилаймиз, равшанки, $r = r_1 + r_2$.

M_1, M_2 нуқталар ҳолатини аниқлаш учун қутб координаталар системасидан фойдаланамиз. У ҳолда M_1 нуқта ҳолати (r_1, φ) билан, M_2 ҳолати $(r_2, \varphi + \pi)$ воситасида аниқланади.

Массалар маркази координата бошида бўлгани ва массалар марказини аниқлаш формуласини эътиборга олсак, $r_1 m_1 = r_2 m_2$ ўринлидир. Бинобарин, r_1 ва r_2 катталиклар r орқали

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

формулалар билан боғланган. Шундай қилиб, ҳар қайси нуқтанинг қутб радиуси ва қутб бурчаги мос равишда ўзаро боғлиқ бўлганидан, система ҳолати иккита умумлашган координата: $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$ орқали аниқланади.



11.12-расм.

Гамильтон функциясини тузиш

учун керак бўлган Лагранж функцияси $L = T - \Pi$ ни аниқлаймиз.

Бунда система кинетик энергияси M_1 ва M_2 нуқталар кинетик энергияларининг йиғиндисидан иборат:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2).$$

Нуқталар тезликларини қутб усулида аниқлаб, улардан умумлашган координаталарга ўтамиз:

$$v_1^2 = \dot{r}_1^2 + r_1^2 \cdot \dot{\varphi}^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2),$$

$$v_2^2 = \dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{m}{m_1 + m_2}\right)^2 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

У ҳолда қуйидагига эришамиз:

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2). \qquad (1)'$$

Ньютон қонуни бўйича тортишиш кучининг миқдори $F = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ бўлиб, бу куч учун U потенциал функция

$$U = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r} \qquad (2)$$

формуладан аниқланади. Бунда γ — ўзаро тортишиш доимийсидан иборат.

(1) ва (2) ни ҳамда $U = -\Pi$ бўлишини эътиборга олиб, Лагранж функциясини ёзамиз:

$$L = T - \Pi = m_1 m_2 \left[\frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\gamma}{r}\right]. \qquad (3)$$

(3) дан кўрамизки, Лангранж функцияси вақтга ошкор равишда боғлиқ эмас экан. Бинобарин, Гамильтон функцияси ҳам вақтга боғлиқ бўлмай, тулиқ механик энергияни ифодалайди:

$$H = T + \Pi.$$

(21.59) формуладан фойдаланиб, умумлашган импульсларни аниқлаймиз:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2\dot{\varphi}.$$

Бу тенгликлардан кўрамизки, умумлашган тезликлар умумлашган импульслар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\dot{r} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} p_r, \quad \dot{\varphi} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\frac{p_\varphi}{r^2}.$$

У ҳолда Гамильтон функциясини умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2}\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - m_1 m_2 \frac{\gamma}{r}. \qquad (4)$$

Энди система ҳаракатининг каноник тенгламаларини ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} \dot r &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} p_r, \\ \dot\varphi &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\frac{p_\varphi}{r^2}, \\ \dot p_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{m_1 m_2 \gamma}{r^2} - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\frac{p_\varphi}{r^3}, \\ \dot p_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

(5) система умумлашган координаталар ва умумлашган импульсларга нисбатан биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасидан иборат.

122-§. Каноник тенгламаларнинг биринчи интеграллари

Каноник ўзгарувчиларнинг каноник тенгламаларни қаноатлантирувчи ҳар қандай q_1, q_2, ..., q_k p_1, p_2, ..., p_k қийматларида узгармай қоладиган $f(q_j,\ p_j,\ t)$ функцияга *каноник тенгламаларнинг биринчи интеграллари* дейилади. Биринчи интеграл

$$f(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k;\ t) = \text{const}$$

кўринишга эга.

Фараз қилайлик, каноник тенгламаларнинг бошланғич m та биринчи интеграллари берилган бўлсин,

$$f_\eta(q_j,\ p_j,\ t) = c_\eta,\ (\eta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \qquad (21.67)$$

бу ерда C_η — ўзгармас катталик. Умуман, биринчи интеграллар бир-бирига боғлиқ ёки боғлиқ бўлмаган тенгламалар билан ифодаланади. Каноник тенгламаларнинг (21.67) тенгламалар билан ифодаланувчи биринчи интегралларини бир-бирига боғлиқ бўлмаган тенгламалар деб қараймиз.

Агар $m = 2k$ бўлиб, (21.67) системага кирувчи барча тенгламалар бир-бирига боғлиқ бўлмаса, бу (21.67) система биринчи интегралларнинг тўлиқ системасини ташкил қилади. $m = 2k$ биринчи интеграллардан иборат тулиқ система умумлашган координаталар ва умумлашган импульсларга нисбатан ечилиб,

$$q_j = \varphi_i(C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{2k}, t),$$
$$p_j = \psi_j(C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{2k},\ t).\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

кўринишда ифодаланиши мумкин, яъни барча умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар вақтнинг ва $2k$ ўзгармас сонларнинг маълум функциялари сифатида ифодаланади. Бу узгармас сонлар ихтиёрий булиб, улар одатдагидек бошланғич шартлардан аниқланади. Шундай қилиб $2k$ та бирбирига боғлиқ булмаган биринчи интеграллар бошланғич шартларнинг берилиши билан механик система ҳаракатини тулиқ аниқлайди.

Каноник тенгламаларнинг биринчи интегралларини бевосита аниқлаш мумкин бўлган баъзи хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз:

1. Маълумки, механик системага стационар боғланишлар қўйилган булса, Гамильтон функцияси H системанинг тулиқ механик энергиясини ифодалайди. Потенциал кучлар майдонида ҳаракатланувчи система учун тўлиқ механик энергия ўзгармас бўлганидан

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_k; p_1, p_2, \ldots, p_k) = \text{const}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб биз биринчи интегрални аниқладик. H тулиқ механик энергия бўлгани учун бу интегралга *энергия интеграли* дейилади.

2. Фараз қилайлик, системанинг барча умумлашган координаталари циклик бўлсин. У ҳолда бу координаталар Лагранж функциясига ошкор кўринишда кирмаганидек, Гамильтон функциясида ҳам ошкор равишда қатнашмайди. Гамильтон функцияси

$$H = H(p_1, p_2, \ldots, p_k, t)$$

кўринишда бўлади. Каноник тенгламалардан k та

$$p_1 = C_1;\ p_2 = C_2;\ \ldots;\ p_k = C_k$$

биринчи интеграллар ҳосил бўлади. Бу интеграллар *циклик интеграллар* дейилади. Гамильтон функциясидаги умумлашган импульслар энди $C_j\ (j = 1, 2, \ldots, k)$ узгармаслар билан алмаштирилиши мумкин:

$$H = H(C_1, C_2, \ldots, C_k, t).$$

Системага стационар боғланишлар қўйилган бўлса, Гамильтон функцияси вақтга боғлиқ булмайди ва каноник тенгламаларнинг иккинчи группаси учун

$$\frac{dq_j}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)_{p_j = C_j} = S_j,\ (j = 1, 2, \ldots, k)$$

муносабатлар ҳосил булади. Бу ерда S_j — бирор ўзгармас сонлар. Бу ифодалардан эса

$$q_j = S_j \cdot t + C_{k+j}\ (j = 1, 2, \ldots, k)$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Шундай қилиб стационар боғланишлар таъсиридаги голоном система учун барча умумлашган координаталар циклик бўлган ҳолда каноник тенгламалар осонгина интегралланиб, умумлашган координаталар вақтнинг чизиқли функциялари сифатида ифодаланади.

3. Энди k та умумлашган координаталардан l таси цикликмас ($l < k$) булган ҳолни қараймиз: $q_1, q_2, \ldots, q_l$ ни цикликмас координаталар, $q_{l+1}, q_{l+2}, \ldots, q_k$ ни эса циклик булган координаталар дейлик. Бу ҳолда Гамильтон функцияси циклик булмаган координаталар ва улар тегишли бўлган импульсларга боғлиқ бўлади. Каноник тенгламаларга асосан циклик координаталарга тегишли импульслар ўзгармас бўлгани учун Гамильтон функциясида бу импульслар ўрнига тегишли C_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, l$) ўзгармаслар қўйилади. Бинобарин, Гамильтон функцияси

$$H = H(q_{l+1}, q_{l+2}, \ldots, q_k; p_{l+1}, p_{l+2}, \ldots, p_k; C_1, C_2, \ldots, C_l; t) \qquad (21.68)$$

кўринишда бўлади. Циклик бўлмаган координаталар ва уларга мос импульслар учун каноник тенгламаларни ёзамиз:

$$\frac{dq_\chi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\chi}; \quad \frac{dp_\chi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\chi}. \quad (\chi = l+1, \ l+2, \ldots, k) \qquad (21.69)$$

Бу тенгламалар циклик координаталарга ва уларга мос импульсларга боғлиқ булмаган $2(k-l)$ мустақил тенгламалардан иборат системани ташкил қилади.

Фараз қилайлик, (21.69) система интеграллансин, яъни барча циклик булмаган координаталар ва уларга мос импульслар вақтнинг маълум функциялари сифатида ифодалансин. (21.69) тенгламаларнинг сони $2(k-l)$ бўлмагани учун бу функциялар ушбу тенгламаларни интеграллаш натижасида пайдо бўладиган $2(k-l)$ интеграл доимийларига ва (21.69) тенгламалардаги Гамильтон функциясига аввалдан кирувчи l та C ўзгармасларга боғлиқ бўлади:

$$\begin{aligned} q_\chi &= q_\chi(C_1, C_2, \ldots, C_l; S_{l+1}, \ldots, S_{2(k+l)}; t) \\ p_\chi &= p_\chi(C_1, C_2, \ldots, C_l; S_{l+1}, \ldots, S_{2(k-l)}; t). \\ &(\chi = l+1, \ l+2, \ldots, k). \end{aligned} \qquad (21.70)$$

Шундай қилиб бу ерда биз циклик бўлмаган координаталарни ва уларга мос импульсларни аниқлашнинг умумий йўлини кўрсатдик.

Циклик координаталарга мос импульслар эса юқорида кўрсатилганидек ўзгармасларга айнан тенг бўлади. Циклик координаталарни аниқлаш энди қуйидагича бажарилади. Циклик координаталар учун каноник тенгламалар ёзилади ва бу тенгламалардаги Гамильтон функцияларида циклик координаталарга мос импульслар ўрнига мос ўзгармаслар қўйилади:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)_{p_\alpha = C_\alpha}. \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, l) \qquad (21.71)$$

H даги циклик бўлмаган координаталар ва уларга мос импульслар (21.70) га асосан алмаштирилади. У ҳолда Гамильтон функцияси $2(k-l)+l$ та ихтиёрий ўзгармас сонларга ва t вақтга боғлиқ бўлади. Бинобарин, (21.71) тенгламалардан алоҳида-алоҳида бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ўзгарувчиларни алмаштириш ва уларни

$$dq_\alpha = \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)_{(p_\alpha = c_\alpha)} \cdot dt, \ (\alpha = 1, 2, \ldots, l)$$

куринишда ёзиш мумкин. Интеграллаш натижасида

$$q_\alpha = \int \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)_{(p_\alpha = c_\alpha)} \cdot dt + D_\alpha; \ (\alpha = 1, 2, \ldots, l) \quad (21.72)$$

ифодалар ҳосил бўлади. Интеграллашда пайдо бўлган D_α ўзгармасларни ҳисобга олганда ихтиёрий ўзгармасларнинг умумий сони $2k$, яъни каноник тенгламалар сонига тенг бўлади. Шундай қилиб l та циклик координаталар мавжуд бўлганда $2k$ каноник тенгламалардан $2(k-l)$ тасинигина алоҳида олиб интеграллашга тўғри келади. Ушбу $2(k-l)$ та тенгламалар интегралланганидан сунг l циклик координаталар (21.72) квадратуралардан осонгина аниқланиши мумкин.

Системага қўйилган боғланишлар стационар булган ҳолда, маълумки, $\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)_{(p_\alpha = c_\alpha)} = B_\alpha$ (B_α — бирор узгармас сонлар) бўлиб, (21.72) дан

$$q_\alpha = B_\alpha \cdot t + D_\alpha, \ (\alpha = 1, 2, \ldots, l)$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Кўрамизки, бу ҳолда циклик координаталар вақтнинг чизиқли функциялари булади.

68-масала. m массали моддий нуқтанинг инерция бўйича ҳаракати тенгламалари Гамильтон функциясидан фойдаланиб аниқлансин.

Ечиш. Эркин моддий нуқтанинг эркинлик даражаси 3 га тенг. Моддий нуқтанинг Декарт координаталарини умумлашган координаталар деб оламиз: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$.
Бу нуқта кинетик энергияси

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Нуқта инерция бўйича ҳаракатда бўлгани учун $\Pi = 0$. Бинобарин, $L = T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Лагранж функцияси таркибида нуқта координаталари x, y, z ошкор қатнашмагани учун, бу координаталар циклик координаталар бўлиб, умумлашган импульслар ўзгармас бўлади:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \alpha, \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \beta, \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = \gamma. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(1) система каноник тенгламаларнинг биринчи интеграллари — циклик интеграллардир. Шунга кура Гамильтон функцияси

$$H = L = \frac{1}{2m}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

кўринишни олади.

У ҳолда

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{m}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{\beta}{m}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial \gamma} = \frac{\gamma}{m}.$$

Бу дифференциал тенгламаларни интеграллаб, нуқтанинг

$$x = \frac{\alpha}{m} t + C_1, \quad y = \frac{\beta}{m} t + C_2, \quad z = \frac{\gamma}{m} t + C_3$$

кўринишдаги ҳаракат тенгламаларини ҳосил қиламиз. Кўрамизки, нуқта координаталари вақтнинг чизиқли функциялари сифатида ифодаланади.

123-§. Каноник тенгламаларнинг биринчи интегралларини Пуассон қавслари ёрдамида аниқлаш

Функция каноник тенгламаларнинг биринчи интеграли бўлиши учун қандай шартни қаноатлантириши кераклиги масаласини, шунингдек, маълум биринчи интеграллардан янги биринчи интегрални топиш масаласини кўрамиз. Фараз қилайлик, бирор $f(q_j, p_j, t) = \text{const}$ функция каноник тенгламаларнинг биринчи интеграли булсин. У ҳолда f функциянинг вақтга нисбатан тулиқ ҳосиласи нолга тенг бўлади, яъни

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) = 0.$$

(21.65) каноник тенгламалардан фойдаланиб, бу ифодани

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) = 0 \qquad (21.73)$$

кўринишда ёзамиз. *Пуассон қавслари* тушунчасини киритамиз. Каноник ўзгарувчиларнинг иккита φ ва ψ функциялари учун Пуассон қавси деб қуйидаги кўринишдаги ифодага айтилади:

$$(\varphi, \psi) = \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} & \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_j} & \frac{\partial \psi}{\partial p_j} \end{vmatrix} = \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\frac{\partial \psi}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_j}\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right). \qquad (21.74)$$

Курамизки, (21.73) тенгликнинг чап томонидаги $\frac{\partial f}{\partial t}$ дан ташқари йиғинди f функция ва Гамильтон функцияси H учун Пуассон қавсидан иборат. Бинобарин, (21.73) ни

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,\ H)=0 \qquad (21.75)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (21.75) ифода $f=\mathrm{const}$ функция каноник тенгламаларнинг биринчи интеграли бўлишининг зарур ва етарли шартидир. (21.75) шартнинг зарурийлиги уни келтириб чиқаришдан кўриниб турибди. (21 75) ни ҳосил қилишдаги мулоҳазаларга тескари мулоҳазалар юритиб, бу шартнинг етарли эканлигини ҳам кўрсатиш мумкин.

Пуассон қавсларининг хоссаларини исботсиз келтириб ўтамиз:

1. Пуассон қавси $t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган иккита φ ва ψ функциялардан тузилган бўлсин. У ҳолда φ ва ψ функцияларнинг уринлари алмаштирилса, Пуассон қавсининг ишораси ўзгаради, яъни

$$(\varphi,\ \psi)=-(\psi,\ \varphi).$$

2. Агар α бирор ўзгармас сон бўлса, қуйидаги уринлидир:

$$(\alpha\cdot\varphi,\ \psi)=\alpha(\varphi,\ \psi).$$

3 Агар функциялардан бири айнан ўзгармас бўлса (масалан, $\psi\equiv C$), Пуассон қавси нолга тенг бўлади:

$$(\varphi,\ C)=0.$$

4. Пуассон қавсидан t бўйича хусусий ҳосила олиш икки функциянинг кўпайтмасидан ҳосила олиш каби бажарилади:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi,\ \psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right)+\left(\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right).$$

Ушбу хосса ихтиёрий каноник ўзгарувчиларга нисбатан ҳам уринли.

5. Учта $f,\ \varphi,\ \psi$ функциялар учун қуйидаги айният ўринлидир:

$$(f,\ (\varphi,\ \psi))+(\varphi,\ (\psi,\ f))+(\psi,\ (f,\ \varphi))\equiv 0.$$

Бу айниятга *Пуассон айнияти* дейилади.

Юқоридаги хоссалардан фойдаланиб қуйидаги, *Пуассон теоремасини* исбот қилиш мумкин.

Теорема. *Агар* $\varphi=C_1$ *ва* $\psi=C_2$ *каноник тенгламаларнинг биринчи интеграллари бўлса,* $(\varphi,\ \psi)$ *ҳам бу тенгламаларнинг биринчи интеграллари бўлади.*

Исбот. Теореманинг шартига асосан

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\varphi,\ H)=0;\ \frac{\partial\psi}{\partial t}+(\psi,\ H)=0 \qquad (21.76)$$

булади. $H,\ \varphi,\ \psi$ функциялар учун Пуассон айниятини ёзамиз:

$$((\varphi,\ \psi),\ H)+((\psi,\ H),\ \varphi)+((H,\ \varphi),\ \psi)\equiv 0.$$

(21.76) дан (φ, H), (ψ, H) ни топиб, бу айниятга қўямиз:

$$((\varphi, \psi), H) + \left(-\frac{\partial\psi}{\partial t}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right) \equiv 0.$$

1 ва 4 хоссаларга кўра бу ифодалардан

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) + ((\varphi, \psi), H) \equiv 0$$

келиб чиқади. Бунда (21.75) ни эътиборга олсак, $(\varphi, \psi) = C_3$ Пуассон қавси каноник тенгламаларнинг биринчи интеграли бўлиши келиб чиқади.

Пуассон теоремаси ёрдамида мавжуд биринчи интеграллардан фойдаланиб, янги биринчи интегралларни ҳосил қилиш мумкин.

Характерли бир мисол келтирамиз. Фараз қилайлик, қаралаётган системага қўйилган боғланишлар стационар бўлсин. У ҳолда, маълумки, $H = C_1$ каноник тенгламаларнинг биринчи интеграли бўлади. $\varphi(q_j, p_j, t) = C_2$ функция ҳам биринчи интеграл бўлсин. Пуассон теоремасига асосан

$$(\varphi, H) = C_3$$

функция ҳам биринчи интеграл бўлади. У ҳолда (21.75) га кура:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -C_3.$$

Демак, φ функция t вақтнинг ошкор функцияси ҳамда $\varphi = C_2$ берилган системанинг биринчи интеграли булса,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = C$$

ҳам биринчи интеграл дея оламиз. Шунингдек, φ функциянинг вақтга нисбатан хусусий ҳосилалари ҳам вақтнинг ошкор функциялари бўлганда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}, \ldots$$

функциялар каноник тенгламаларнинг биринчи интеграллари бўлади.

Пуассон теоремаси ёрдамида мавжуд биринчи интеграллардан фойдаланиб янги биринчи интегралларни ҳосил қилишни чексиз давом эттириш мумкин. Лекин ҳосил бўлган биринчи интеграллардан фақат $2k$ тасигина бир-бирига боғлиқ бўлмайди, қолганлари бу биринчи интегралларга боғлиқ бўлади. Бу ерда шуни алоҳида таъкидлаш керакки, агар иккита биринчи интеграллардан тузилган Пуассон қавси айнан нолга тенг бўлса, бу қавс биринчи интегрални ташкил қилмайди.

69-масала. Инерция бўйича ҳаракатланувчи моддий нуқта учун ҳаракат миқдори интеграллари (68-масала ечимига қаранг):

$$p_x = m\dot{x} = \alpha,\ p_y = m\dot{y} = \beta,\ p_z = m\dot{z} = \gamma$$

ҳамда ҳаракат миқдори моментлари интеграллари

$$l_x = yp_z - zp_y = \theta,\ l_y = zp_x - xp_z = \psi,\ l_z = xp_y - yp_x = \varphi$$

мавжуд (α, β, γ, θ, ψ, φ — ўзгармас катталиклар) бўлса, $(l_x, l_y) = l_z = xp_y - yp_x = \varphi$ бажарилиши исботлансин.

Ечиш. (l_x, l_y) Пуассон қавсларини тузамиз:

$$(l_x, l_y) = \frac{\partial l_x}{\partial x}\frac{\partial l_y}{\partial p_x} - \frac{\partial l_x}{\partial p_x}\frac{\partial l_y}{\partial x} + \frac{\partial l_x}{\partial y}\frac{\partial l_y}{\partial p_y} - \frac{\partial l_x}{\partial p_y}\frac{\partial l_y}{\partial y} + \frac{\partial l_x}{\partial z}\frac{\partial l_y}{\partial p_z} - \frac{\partial l_x}{\partial p_z}\frac{\partial l_y}{\partial z}. \quad (1)$$

Берилганлардан фойдаланиб, (1) учун керакли ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial l_x}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial l_x}{\partial y} = p_z,\ \frac{\partial l_x}{\partial z} = -p_y;\ \frac{\partial l_y}{\partial x} = -p_z,\ \frac{\partial l_y}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial l_y}{\partial z} = p_x;\ \frac{\partial l_x}{\partial p_x} = 0,\ \frac{\partial l_x}{\partial p_y} = -z,\ \frac{\partial l_x}{\partial p_z} = y;\\ &\frac{\partial l_y}{\partial p_x} = z,\ \frac{\partial l_y}{\partial p_y} = 0,\ \frac{\partial l_y}{\partial p_z} = -x. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(2) ни (1) га қўямиз:

$$(l_x, l_y) = -p_y \cdot (-x) - y \cdot p_x = xp_y - yp_x$$

ёки

$$(l_x, l_y) = l_z = z.$$

Шуни исботлаш керак эди.

XXII боб. ТЕБРАНИШЛАР НАЗАРИЯСИ

Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузиш ва бу тенгламаларни интеграллашга мисол сифатида нуқтанинг тўғри чизиқли тебранма ҳаракатини қараб чиққан эдик. Энди механик системанинг кичик тебранишларини ўрганишга ўтамиз.

Тебранишлар содир буладиган жараёнларнинг моҳияти турлича бўлишига қарамасдан, уларнинг характерли хусусиятлари бир хил ёки бир-бирига яқин қонуниятларга бўйсунади. Масалан, маятникнинг, пружинага осилган юкнинг, вагон кузовининг тебранишлари, электр контурдаги тебранишлар, кемани сувда чайқалиши бир хил дифференциал тенгламалар билан ифодаланиши мумкин. Тебранишларнинг умумий қонуниятларини тебранишлар назарияси ўрганади.

Тебранишлар улар содир бўладиган системаларнинг асосий физик хусусиятларига қараб классификацияланади. Барча тебранишлар улар содир булаётган системаларнинг қандай тузиси бирга бў

лишига қараб эркинлик дараж бўлинади. нг ва кўп системалардаги тебранишларга урий, параметрик тебра

Тебранишларни эркин, мажб ажратиш метрик тебра автотебранишлар каби турлар анишлар мумкин.

1. Эркин (ёки хусусий) тебрандан сўнг ташқи таъсир жасида мувозанатдан чиқарил уз ҳолига системадаги тебранишлардир. системадаги

2. Мажбурий тебранишлар и кучлар тебранишлар лиқсиз равишда таъсир қилув нг характери таъсирида ла ди. Бу ҳолда тебранишларн ташқи таъсир системани сусиятларига қараганда кўпро таъсир куч билан ланади.

3. Параметрик тебранишла системанинг юкининг бирор ни (масалан, пружинали маятн ни, тебранишни массасини, тик маятник ипининг узунлиги тагининг контури саторининг сиғимини ёки ғалтилан вужудига индуктивлиги равишда даврий ўзгартириш сага ташқаридан келади.

4. Автотебранишлар систем содир бўлади даврий таъсир этилмаган тақдирда ҳарнида сарфланадиган сўнмас ранишлардир. Тебраниш жара г ўзида бўладиган энергияни қоплайдиган манба системани масалалар бўлади.

Тебранишларга доир кўп м и ўрганишга устувор муво рофидаги кичик тебранишлар ерланадики келтирилади тебранишлар шу билан харак озгина четлашади, бунда систе ланғич мувозанат ҳолатидан нинг умумлашади. Агар ғич мувозанат ҳолат системан а. системанинг умумлашган коорди учун саноқ боши қилиб олинг шган координаталарнинг мувозана дан озгина четланиши умумла нади. Бундай ҳол сист қийматлари билан характерла шда умумлашган коорди кичик тебранишларини ўргани иборга олмаслик ва те нинг юқори даражаларини эъ маларини чизиқли диффе ларнинг дифференциал тенгла нини беради. тенгламаларга келтириш имко

124-§. Системанинг устувор ва ноустувор мувозанати. Лагранж-Дирихле теоремаси

Системанинг мувозанати устувор ва ноустувор мувозанатлик системаларга ажратилади. Агар механиб, уларга нуқталарини нат ҳолатидан озгина силжитинг бошланғич кичик тезлик рилгандан сунг система ўзининатда дейилади. Аксинча, ласа, система *устувор мувозанатда* четлатилганида бу тема мувозанат ҳолатдан озгима *ноустувор мувозанат* тобора ортиб бораверса, систе собланади.

Устувор мувозанатни формал равишда қуйидагича лаш мумкин. Системанинг мувозанати $q_j^{(0)}$ ($j = 1, 2$, координаталар билан белгилансин. Фараз қилайлик, t ланғич вақтда системанинг координаталарига q_{j0} қий бериб, у мувозанатдан чиқарилган ва $\dot{q}_{j0}$ эса система нуқталарининг бошланғич тезликлари булсин. *Агар* $\varepsilon > 0$ *мусбат сон учун унга боғлиқ бўлган шундай иккита мусбат* η *ва* η_1 *сонларни кўрсатиш мумкин бўлсаки,*

$$t = t_0 \text{ да } |q_{j0} - q_j^{(0)}| < \eta(\varepsilon) \text{ ва } |\dot{q}_{j0}| < \eta_1(\varepsilon); \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

учун t *вақтнинг ихтиёрий моментида*

$$|q_j - q_j^{(0)}| < \varepsilon, \ (i = 1, 2, \ldots, k)$$

ўринли бўлса, системанинг мувозанати устувор мувозанат дейилади.

Равшанки, системанинг дастлабки мувозанат ҳолати ноустувор бўлса, унинг бу ҳолат атрофидаги тебранишлари кичик тебранишлардан иборат булмайди. Бинобарин, системанинг кичик тебранишларини ўрганишда системанинг дастлабки мувозанатини устувор мувозанат деб қабул қиламиз.

Голоном, идеал боғланишли консерватив механик системани қараймиз. Бундай системанинг мувозанат ҳолати учун барча умумлашган координаталар нолга тенг бўлиб, П потенциал энергия экстремалликнинг зарурий шартини қаноатлантиради:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0. \ (j = 1, 2, \ldots, k)$$

Система мувозанати устувор бўлишининг етарли шарти қуйидаги теорема билан ифодаланади.

Теорема. *Агар голоном, идеал боғланишли консерватив системанинг мувозанат ҳолатдаги потенциал энергияси минимумга эга бўлса, унинг бу мувозанати устувор мувозанат булади.*

Бу теоремани даставвал Лагранж келтирган. Лекин унинг узил-кесил исботини Дирихле бажарган. Шунинг учун ҳам бу теорема *Лагранж-Дирихле теоремаси* деб юритилади. Теоремани *исбот* қиламиз. Системанинг мувозанат ҳолатдаги, теоремада назарда тутилган минимум потенциал энергияси Π_1 бўлсин. $|q_i| \leqslant \varepsilon$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ орқали умумлашган координаталарнинг мувозанат ҳолат атрофидаги қийматларининг шундай соҳасини белгилайликки, умумлашган координаталарнинг бу соҳа ичидаги ва унинг чегарасидаги қийматлари учун $\Pi > \Pi_1$ ўринли бўлсин. q_i координаталар қийматларининг ушбу соҳасини *функция минимумининг соҳаси* дейилади q_j координаталардан бирортаси функция минимуми соҳасининг чегарасида бўлганида, яъни $q_j = \pm \varepsilon$ да П потенциал энергиянинг қийматларини курайлик. Потенциал энергиянинг бу қийматлари ичида энг кичиги албатта, Π_1 дан катта бўлади. Уни $\Pi_1 + \alpha$ орқали белгилайлик, бунда $\alpha > 0$. Шундай қилиб, ҳеч бўлмаганда битта умумлашган координата функция минимуми соҳасининг чегарасида ётса,

$$\Pi \geqslant \Pi_1 + \alpha \qquad (22.1)$$

бўлади. Системани бошланғич мувозанат ҳолатдан чиқар[аз]. Бунинг учун умумлашган координаталарга функция мин[иму]ми соҳасининг қийматларидан бериб, система нуқтал[арини] силжитамиз ва уларга кичик бошланғич тезликлар бер[ами]з. Қаралаётган механик система консерватив система бў[лган]и учун унга нисбатан тулиқ механик энергиянинг сақланиш [қо]нуни ўринли, яъни

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0. \qquad (22.2)$$

Бунда T_0, Π_0 — мос равишда системанинг $t = 0$ бошла[нғич] пайтдаги кинетик ва потенциал энергияларидир. Доимо [$T \geqslant 0$] булгани учун (22.2) дан қуйидаги муносабатни ёзиш му[мкин]:

$$\Pi \leqslant T_0 + \Pi_0. \qquad (22.3)$$

Системани мувозанат ҳолатдан чиқаришда q_j умумлаш[ган] координаталар ва $\dot{q}_j$ умумлашган тезликлар қийматларини [шу] даражада кичик қилиб олиш мумкинки,

$$\Pi_0 < \Pi_1 + \frac{\alpha}{2}; \quad T_0 < \frac{\alpha}{2} \qquad (22.4)$$

бўлсин. Π — потенциал энергия q_j умумлашган координата[лар]нинг, T — кинетик энергия эса q_j умумлашган координата[лар] ва $\dot{q}_j$ умумлашган тезликларнинг узлуксиз функцияси бўл[гани] учун (22.4) ни ҳамма вақт амалга ошириш мумкин. (22.3) [ва] (22.4) дан ихтиёрий пайт учун

$$\Pi < \Pi_1 + \alpha \qquad (22.5)$$

келиб чиқади. (22.5) дан кўрамизки, механик система нуқ[та]ларига кичик тезликлар бериб, системани мувозанатдан [чи]қарганимиздан кейинги ҳаракат давомида система умумлаш[ган] координаталарининг қийматлари функциянинг минимум соҳа[]си ичида қоляпти, яъни система ҳаракат давомида мувоза[нат] ҳолатдан узоқлашишга интилаётгани йўқ. Ҳақиқатан, агар [сис]тема кейинги ҳаракати давомида мувозанат ҳолатдан узоқ[ла]шишга интилса, умумлашган координаталарнинг қийматла[ри] функция минимум соҳаси чегарасига тушиб, (22.1) уринли [бў]либ қолар эди. (22.5) га асосан бундай бўлиши мумкин эм[ас]. Демак, системанинг дастлабки ҳолати устувор мувозанат [ҳолатида] бўлади.

125-§. Механик система кинетик энергияси билан потенциал энергиясининг тақрибий ифодалари

Механик системанинг умумлашган координаталари учун с[а]ноқ бошини системанинг устувор мувозанат ҳолатида оламиз. Системанинг мувозанат ҳолати атрофидаги кичик ҳаракатла[]рини урганамиз. Бу ҳаракатлар умумлашган координатала[р] нинг кичик қийматлари билан ифодаланади. Буни эътиборга олиб, системанинг мувозанат ҳолати атрофидаги кичик ҳаракатлари учун кинетик ва потенциал энергияларнинг ифодаларини аниқлаймиз.

Маълумки, агар системага стационар боғланишлар қўйилган бўлса, системанинг кинетик энергияси (119- §)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} A_{j\mu} \dot{q}_j \dot{q}_\mu$$

кўринишда ифодаланар эди. Бунда $A_{j\mu} = A_{\mu j}$ бўлиб, бу коэффициентлар умумлашган координаталарнинг функцияларидир. Улар t вақтга боғлиқ эмас. $A_{j\mu}$ коэффициентларни координаталар боши атрофида қаторга ёямиз:

$$A_{j\mu} = (A_{j\mu})_0 + \sum_{\xi=1}^{k} \left(\frac{\partial A_{j\mu}}{\partial q_\xi}\right)_0 q_\xi + \frac{1}{2} \sum_{\eta\xi=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 A_{j\mu}}{\partial q_\eta \partial q_\xi}\right)_0 q_\eta q_\xi + \dots$$

Бунда $(A_{j\mu})_0$, $\left(\frac{\partial A_{j\mu}}{\partial q_\xi}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 A_{j\mu}}{\partial q_\eta \partial q_\xi}\right)_0$, ... тегишли ифодаларнинг координаталар бошидаги қийматлари бўлганидан улар ўзгармас катталиклардир.

Юқорида таъкидлаганимиздек, системанинг умумлашган координаталарининг кичик қийматлари билан характерланувчи кичик миқдорларни текширамиз. Шунинг учун кинетик энергиянинг, кейинчалик эса потенциал энергиянинг ифодаларидаги умумлашган координаталар ва умумлашган тезликларга нисбатан учинчи ва ундан юқори даражали кичик ҳадларни эътиборга олмаймиз. У ҳолда система кинетик энергиясининг тақрибий ифодаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} (A_{j\mu})_0 \dot{q}_j \dot{q}_\mu. \tag{22.6}$$

Эркинлик даражаси бирга тенг системанинг ҳолати $q_1 = q$ умумлашган координата билан аниқланса, (22.6) ифода

$$T = \frac{1}{2} (A_{11})_0 \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_1$$

ёки

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 \tag{22.7}$$

кўринишда ёзилади. (22.7) даги $a = (A_{11})_0$ ўзгармас сон *инерция коэффициенти* деб аталади ва у масса ёки инерция моменти ўлчов бирлигига эга.

Энди потенциал энергияни тақрибан ҳисоблашга ўтамиз. Потенциал энергия ифодасини координаталар боши атрофида қаторга ёямиз:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{\xi=1}^{k}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_\xi}\right)_0 \cdot q_\xi + \frac{1}{2}\sum_{\eta,\,\xi=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\eta \partial q_\xi}\right) \cdot q_\eta q_\xi + \ldots \quad (22.8)$$

Бунда Π_0, $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_\xi}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\eta \partial q_\xi}\right)_0$ — тегишли ифодаларнинг координаталар бошидаги қийматлари, демак, улар ўзгармас сон аниқлигида топилас сонлар. Потенциал энергия ўзгармас шунингдек, системанинг ... гани учун $\Pi_0 = 0$ деб олиш мумкин. ... мувозанат ҳолати учун $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_\xi}\right)_0 = 0$ (116-§, (21.28 *a*) формула) бўлади. Учинчи ва ундан юқори даражали кичик ҳадлар ... устувор мувозанат ҳолати ҳисобга олмаи механик системанинг потенциал энергиянинг ... ати атрофидаги ҳаракатлари учун тақрибий ифодасини ёзиш мумкин:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{\eta,\,\xi=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\eta \partial q_\xi}\right) \cdot q_\eta q_\xi.$$

$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\eta \partial q_\xi}\right)_0 = c_{\eta\xi}$ белгилаш киритамиз, бунда $c_{\eta\xi} = c_{\xi\eta}$. У ҳолда

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{\eta,\,\xi=1}^{k} c_{\eta\xi} q_\eta q_\xi \quad (22.9)$$

келиб чиқади.

Эркинлик даражаси бирга тенг консерватив системa потенциал энергияси учун (22.9) ифода

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2 \quad (22.10)$$

кўринишда ёзилади. Бунда $c = c_{11} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q}\right)_0$ белгилаш киритилган бўлиб, c бикирлик коэффициенти ёки бикирлик деб аталади.

126-§. Эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг хусусий кичик тебранишлари

Эркинлик даражаси бирга тенг ва фақат потенциал кучлар таъсиридаги механик система ҳаракатини q умумлашган координата орқали аниқлаимиз. Система ўзининг устувор мувозанат ҳолати ($q = 0$) дан q_0 кичик қийматга четга чиқарилиб, $\dot{q}_0$ бошланғич тезлик билан қўйиб юборилсин. Бу ҳолда система кинетик энергиясини (22.7), потенциал энергиясини эса (22.10) тенглик билан ифодалаш мумкин: $T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$, $\Pi = \frac{1}{2} c q^2$, бунда a — инерция коэффициенти, c — бикирлик коэффициентидан иборат. Буларни эътиборга олган ҳолда система ҳаракатини аниқлаш учун Лагранжнинг иккинчи тур тенгламасини тузамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q. \qquad (22.11)$$

(22.7) дан ҳосилалар ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial T}{\partial q}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)=a\ddot{q}. \qquad (22.12)$$

Потенциал кучлар учун умумлашган кучлар (21.23) га кўра $Q=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}$ формуладан аниқланади. Шунга кўра, (22.10) ни эътиборга олиб, қуйидаги ҳосил қилинади: $Q=-cq$.

Натижада (22.11) дифференциал тенглама

$$a\ddot{q}=-cq$$

кўринишни олади. Бунда

$$k^2=\frac{c}{a} \qquad (22.13)$$

белгилаш киритсак, тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{q}+k^2q=0. \qquad (22.14)$$

(22.14) моддий нуқтанинг тебранма ҳаракати дифференциал тенгламаси (14.3) нинг ўзидир. Шунинг учун (22.14) нинг

$$t=0, \quad q=q_0, \quad \dot{q}=\dot{q}_0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини аниқлашда (14.3) нинг ечими (14.8) ёки (14.11) дан фойдаланиб, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$q=q_0\cos kt+\frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt \qquad (22.15)$$

ёки

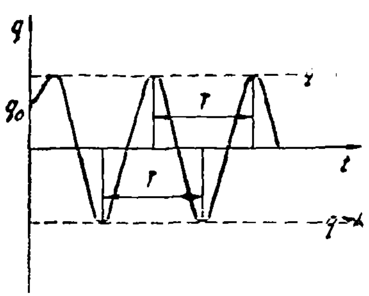
$$q=A\sin(kt+\alpha). \qquad (22.16)$$

Бунда A ва α (14.10) га кўра қуйидагича топилади:

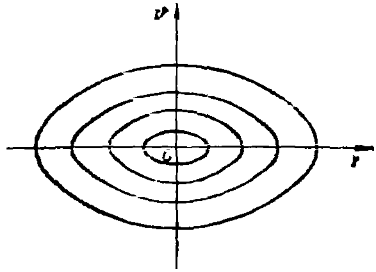
$$A=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, \quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{q_0\cdot k}{\dot{q}_0}. \qquad (22.17)$$

Шундай қилиб потенциал кучлар таъсиридаги системанинг устувор мувозанати атрофидаги ҳаракати (22.14) дифференциал тенглама билан ифодаланади ва бундай ҳаракат системанинг кичик хусусий (эркин) тебранма ҳаракати дейилади. Хусусий тебранма ҳаракат графиги 22.1-расмда кўрсатилган.

Маълумки, A—тебраниш амплитудаси, α — бошланғич фаза дейилади. Хусусий тебранишлар даври (14.12) каби



22.1-расм.



22.2-расм.

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} \qquad (22.18)$$

формуладан аниқланади.

Хусусий тебранма ҳаракатларни q ва $\dot{q}$ фазавий ўзгарувчилар текислиги — фазалар текислигида ҳам тасвирлаш мумкин. Моддий нуқтанинг тебранишлари учун x ва $v = \dot{x}$ фазавий ўзгарувчилар бўлади. У ҳолда

$$x = A\sin(kt + \alpha), \qquad v = Ak\cos(kt + \alpha)$$

муносабатлардан t вақтни йўқотиш билан фазалар текислигидаги

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2k^2} = 1$$

эллипслар тупламини ҳосил қиламиз (22.2-расм). A параметрга боғлиқ булган бу эгри чизиқлар *фазавий траекториялар* дейилади. Нуқтанинг мувозанат ҳолатида фазалар текислигининг $x=0$, $v=0$ нуқтаси, яъни координата боши мос келади. Моддий нуқта тебранганда вақт ўтиши билан унинг x координатаси ва v тезлиги узгариб, ҳар бир пайт учун фазалар текислигида координаталари x, v бўлган тасвирловчи нуқта мос келади. Битта тула тебраниш даврида ҳаракатни тасвирловчи нуқта эллипс чизади.

127-§. Эркинлик даражаси бирга тенг система хусусий тебранишларига тезликка пропорционал ўзгарувчи қаршилик кучининг таъсири

Эркинлик даражаси бирга тенг, потенциал кучлар таъсиридаги система нуқталарига уларнинг тезликларига пропорционал равишда ўзгарувчи қаршилик кучлари ҳам таъсир қилсин. Бундай кучлар система нуқталарининг тезликларига қарама-қарши йуналганини эътиборга олиб, уларни

$$\vec{R}_i = -\beta_i \dot{\vec{r}}_i \qquad (22.19)$$

кўринишда ифодалаймиз. β_i—ўзгармас коэффициентлар ($\beta_i > 0$), $\vec{r}_i$—система $m_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ массали нуқтасининг радиус-вектори. Лагранжнинг иккинчи тур тенгламасини мазкур системага тадбиқ этишда умумлашган кучларни икки группага ажратамиз:

1) потенциал кучларга тегишли умумлашган куч, уни $Q_П$ орқали белгилаймиз;

2) (22.19) формула билан аниқланувчи қаршилик кучларига тегишли умумлашган куч, уни Q_R билан белгилаймиз.

У ҳолда Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_П + Q_R. \qquad (22.28)$$

Бундаги T—системанинг кинетик энергияси, у (22.7) тенгликдан аниқланади.

$Q_П$ умумлашган куч қуйидаги муносабатдан топилади:

$$Q_П = -\frac{\partial П}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2} c q^2\right) = -cq. \qquad (22.21)$$

Q_R умумлашган кучни аниқлаймиз. (21.19) га асосан

$$Q_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}$$

бўлади. (22.19) ни эътиборга олиб, бу ифодани

$$Q_R = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}$$

кўринишда ёзамиз. (21.43) га кўра $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}}$ бўлгани учун Q_R умумлашган куч қуйидагича ифодаланади:

$$Q_R = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}}\right) = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2}.$$

Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2}, \qquad (22.22)$$

Φ — *Рэлей функцияси* ёки *диссипатив функция* дейилади. Шундай қилиб,

$$Q_R = -\frac{\partial\Phi}{\partial \dot q}. \qquad (22.23)$$

Φ функцияни q умумлашган координата ва $\dot q$ умумлашган тезлик орқали ифодалаймиз. $\dot{\vec r}_i = \frac{\partial \vec r_i}{\partial q}\dot q$ бўлгани учун

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i \dot{\vec r}_i^{\,2}}{2} = \frac{\dot q^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial q}\right)^2 = \frac{1}{2}B(q)\cdot \dot q^2. \qquad (22.24)$$

Бунда

$$B(q) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial q}\right)^2$$

белгилаш киритилди. $\frac{\partial \vec r_i}{\partial q}$ ифода $\dot q$ умумлашган тезликка боғлиқ бўлмагани учун, $B(q)$ функция q нинг функцияси бўлиб, $\dot q$ га боғлиқ эмас, $B(q)$ функцияни координаталар боши ($q=0$) атрофида қаторга ёзамиз:

$$B(q) = B(0) + \left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)_{q=0}\cdot q + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2}\right)_{q=0}\cdot\frac{q^2}{2} + \ldots \qquad (22.25)$$

Системанинг текширилаётган ҳаракатида q нинг кичик қийматлар қабул қилишини назарда тутиб, Φ ни иккинчи даражали чексиз кичик миқдоргача аниқлаш учун (22.25) қаторда биринчи ҳаднигина қолдириш кифоя:

$$B(q) = B(0).$$

Натижада

$$\Phi = \frac{1}{2}B(q)\cdot \dot q^2 = \frac{1}{2}B(0)\dot q^2 = \frac{1}{2}\mu\dot q^2 \qquad (22.26)$$

келиб чиқади; бунда $B(0)=\mu$ белгилаш киритилган бўлиб, унга *умумлашган қаршилик коэффициенти* дейилади. (22.26) ни (22.7) билан таққослаб, Φ ва T кўриниши жиҳатидан бир хил эканлигини, система кинетик энергиясини аниқловчи формуладаги инерция коэффициенти a ўрнига умумлашган қаршилик коэффициенти μ ни олиш билан Рэлей функциясини ҳосил қилиш мумкинлигини кўрамиз.

(22.26) ифодани (22.23) га қўйиб,

$$Q_R = -\mu\cdot\dot q \qquad (22.27)$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди (22.7), (22.21) ва (22.27) ифодаларни (22.20) га қуйиш:

$$a\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q}.$$

Бу тенгламада

$$\frac{c}{a} = k^2, \quad \frac{\mu}{a} = 2b$$

белгилашлар киритиб, уни

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = 0 \qquad (22.28)$$

кўринишга келтирамиз. (22.28) тенглама потенциал кучлар ва тезликка пропорционал ўзгарувчи қаршилик кучлари таъсиридаги системанинг хусусий ҳаракатини ифодаловчи дифференциал тенгламадир. (22.28) тенглама моддий нуқта сунувчи ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (14.13) га ўхшаш. Шунинг учун (22.28) дифференциал тенглама ечимини аниқлашда (14.13) тенгламанинг ечимларидан фойдаланиш мумкин. Бунда ҳам $b<k$—кичик қаршиликлар ҳоли, $b>k$—катта қаршиликлар ҳоли ва $b=k$ — чегаравий ҳол алоҳида алоҳида кўриб чиқилади.

Кичик қаршиликлар ҳолида (22.28) дифференциал тенгламанинг

$$t=0, \quad q=q_0, \quad \dot{q}=\dot{q}_0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими (14.16)—(14.19) га кўра

$$q = e^{-bt}\left(q_0 \cos\sqrt{k^2-b^2}\,t + \frac{\dot{q}_0 + bq_0}{\sqrt{k^2-b^2}} \sin\sqrt{k^2-b^2}\,t\right) \qquad (22.29)$$

ёки

$$q = e^{-bt}\sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0+bq_0)^2}{k^2-b^2}} \sin\left(\sqrt{k^2-b^2}\,t + \operatorname{arctg}\frac{q_0\sqrt{k^2-b^2}}{\dot{q}_0+q_0 b}\right) \qquad (22.30)$$

тенгламалар билан ифодаланиб, система ҳаракати сўнувчи тебранма ҳаракатдан иборат бўлади. Ҳаракат графиги 14.4-расмда тасвирлангандек бўлади.

Катта қаршиликлар ёки чегаравий ҳолда система ҳаракати сўнувчи ҳаракатдан иборат бўлиб, (22.28) дифференциал тенгламанинг ечими (14.22) ёки (14.23) тенгламалар каби ифодаланади.

128-§. Эркинлик даражаси бирга тенг системанинг мажбурий тебранишлари

Эркинлик даражаси бирга тенг механик системага $Q_п$ умумлашган куч билан биргаликда $Q_H = H\sin(pt+\beta)$ умумлашган уйғотувчи куч қўйилган бўлсин. Бу ҳолда Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_{\text{п}}+Q_{H}.$$

Бу тенгламада $T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$, $Q_{\text{п}}+Q_{H}=-cq+H\sin(pt+\beta)$ бўлгани эътиборга олинса, ундан

$$a\ddot{q}=-cq+H\sin(pt+\beta)$$

тенглама ҳосил қилинади. $\frac{c}{a}=k^2$, $\frac{H}{a}=h$ белгилашлар киритиб, охирги тенгламани

$$\ddot{q}+k^2q=h\sin(pt+\beta) \tag{22.31}$$

кўринишда ёзамиз. (22.31) дифференциал тенглама кўриниши жиҳатидан (14.24) тенгламанинг ўзгинасидир. Бинобарин, (22.31) тенглама эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг мажбурий тебранма ҳаракатини ифодаловчи дифференциал тенгламадир. Шунга кўра (22.31) тенглама ечимларини аниқлашда (14.24) ни ечиш йўлидан фойдаланиш мумкин. Жумладан, $k\neq p$ ҳол учун (14.30) га асосан қуйидагича ечим ёзилиши мумкин:

$$q=q_0\cos kt+\frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt-\frac{h}{k^2-p^2}\left(\sin\beta\cdot\cos kt+\frac{p}{k}\cos\beta\sin kt\right)+$$
$$+\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\beta). \tag{22.32}$$

(22.32) да q_0 ва $\dot{q}_0$ мос равишда, бошланғич пайтдаги умумлашган координата ва умумлашган тезликни ифодалайди.

$k=p$ бўлган ҳолда (22.31) нинг ечими (14.35) га кўра қуйидагича бўлади:

$$q=q_0\cos kt+\frac{1}{k}\left(\dot{q}_0+\frac{h}{2k}\right)\sin kt-\frac{h}{2k}t\cos(kt+\beta). \tag{23.33}$$

Маълумки, (22.33) тенгламадаги охирги ҳад системанинг мажбурий тебранишларини характерлайди. Формуланинг кўрсатиши бўйича мажбурий тебранишлар амплитудаси вақтнинг ўсиши билан чексиз ўса бориши керак. Лекин, реал системаларда доимо қаршилик кучлари мавжудлиги туфайли мажбурий тебранишлар амплитудаси маълум қийматдан ошмайди.

129-§. Механик системанинг мажбурий тебранишларига тезликка пропорционал ўзгарувчи қаршилик кучларининг таъсири

Эркинлик даражаси бирга тенг механик системага $Q_{\text{п}}=-cq$, $Q_{R}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}=-\mu\dot{q}$ ҳамда $Q_{H}=H\sin(pt+\beta)$ умумлашган кучлр таъсир этган ҳолни кўрайлик. Бу ҳолда Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаси

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_{\text{п}}+Q_R+Q_H$$

кўринишда ёзилиб, бунда $T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$ эканлиги эътиборга олинса, қуйидаги дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$a\ddot{q}+\mu\dot{q}+cq=H\sin(pt+\beta).$$

$\frac{\mu}{a}=2b$, $\frac{c}{a}=k^2$, $\frac{H}{a}=h$ белгилашлар киритсак, охирги тенглама

$$\ddot{q}+2b\dot{q}+k^2q=h\sin(pt+\beta) \tag{22.34}$$

кўринишни олади. (22.34) тенглама механик системанинг потенциал кучлар, тезликка пропорционал равишда ўзгарувчи қаршилик кучлари ва умумлашган кучи гармоник функция сифатида ифодаланувчи уйғотувчи кучлар таъсиридаги ҳаракатининг дифференциал тенгламасидир. Бу тенглама моддий нуқтанинг қаршилик кўрсатувчи муҳитда мажбурий тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (14.36) билан бир хил характерга эга. Бинобарин, (14.36) тенгламанинг ечими қандай топилган бўлса, (22.34) нинг ечими ҳам худди шундай топилади. Чунончи, (22.34) нинг ечими (14.42) — (14.44) га кўра $k>b$ ҳол учун

$$q=e^{-bt}a_1\sin\left(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\alpha_1\right)+$$
$$+\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}\sin\left(pt+\beta-\operatorname{arctg}\frac{2bp}{k^2-p^2}\right), \tag{22.35}$$

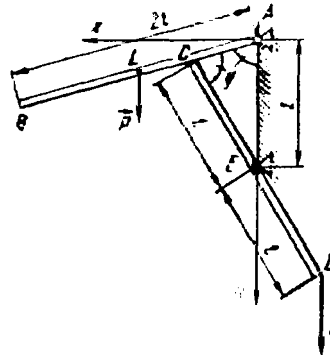
$b>k$ ҳол учун

$$q=C_1\cdot e^{(-b+\sqrt{b^2-k^2})t}+C_2e^{-(b+\sqrt{b^2-k^2})t}+$$
$$+\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}\sin\left(pt+\beta-\operatorname{arctg}\frac{2bp}{k^2-p^2}\right), \tag{22.36}$$

$b=k$ ҳол учун

$$q=e^{-bt}(C_1+C_2t)+$$
$$+\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}\sin\left(pt+\beta-\operatorname{arctg}\frac{2bp}{k^2-p^2}\right) \tag{22.37}$$

тенгламалар билан ифодаланади. Бу тенгламалардаги a_1, α_1, C_1, C_2 ўзгармас сонлар бошланғич шартлардан аниқланади. (22.35) — (22.37) тенгламаларни ҳам 69-§ да курилгани каби таҳлил қилиш мумкин. Бу тенгламаларнинг ҳар бири учун умумий бўлган охирги қўшилувчи системанинг мажбурий тебранишларини ифодалаши, маълум вақт ўтганидан кейин системанинг ҳаракати уйғотувчи куч такрорлиги билан содир булувчи шу мажбурий тебранишларнинг ўзидан иборат бўлиб қолиши аввал таъкидланган эди. Мажбурий тебранишларнинг хусусиятлари, унинг амплитудасининг максимал қийматларини аниқлаш 66-§ да берилгани учун, уларни қайтадан такрорламаймиз.



22.3-расм.

70- масала. Узунлиги $2l$, оғирлиги P бўлган бир жинсли AB стержень A учидаги горизонтал уқ атрофида айлана олади (22.3- расм). Бу стержень худди шундай $2l$ узунликдаги бир жинсли CD стерженга тиралган; CD стержень ўзининг ўргасидаги E шарнир горизонтал уқи атрофида айлана олади. A ва E нуқталар бир вертикалда ётади. $AE = l$ стерженнинг D учига $Q = 2P$ оғирликдаги юк осилган. Ишқаланишни ҳисобга олмай, мувозанат ҳолатида AB стерженнинг вертикал билан ҳосил қиладиган φ бурчаги, шунингдек, мувозанатнинг устувор ёки ноустувор бўлиши аниқлансин.

Ечиш. φ бурчакни умумлашган координата деб оламиз. Расмда кўрсатилгани каби Axy Декарт координата системасини утказамиз. $\vec{P}$ куч қуйилган L нуқта ординатасини y_L, $\vec{Q}$ куч қўйилган D нуқта ординатасини y_D билан белгиласак, система потенциал энергияси

$$\Pi = -P \cdot y_L - Q \cdot y_D$$

формула билан аниқланади. CD бир жинсли стержень ўртаси қўзғалмас бўлгани учун бу стержень оғирлик кучига мос келувчи потенциал энергия нолга тенг. AEC учбурчак тенг ёнли эканини эътиборга олиб, y_L ва y_D ни умумлашган координата орқали ифодалаймиз:

$$y_L = AL\cos\varphi = l\cos 2\varphi, \quad y_D = AE + ED\cos(180° - 2\varphi) =$$
$$= l - l\cos 2\varphi.$$

Шунга кура система потенциал энергияси

$$\Pi = -Pl\cos\varphi - Ql + Ql\cos 2\varphi = -(P\cos\varphi + Q - Q\cos 2\varphi)l \quad (1)$$

куринишда ёзилади.

Маълумки, системанинг мувозанат ҳолатида $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$ бўлиши керак. (1) дан φ бўйича хусусий ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (P\sin\varphi - 2Q\sin 2\varphi)l. \quad (2)$$

$Q=2P$ эканлигини ҳисобга олиб, охирги ифодани нолга тенглаштирамиз:

$$Pl(\sin\varphi - 8\sin\varphi\cdot\cos\varphi)=0.$$

Бундан

$$\sin\varphi(1-8\cos\varphi)=0. \qquad (3)$$

$\varphi\neq 0$ бўлгани учун (3) да $\sin\varphi\neq 0$. Бинобарин,

$$1-8\cos\varphi=0 \text{ ёки } \cos\varphi=\frac{1}{8}.$$

Шундай қилиб, $\varphi=\varphi_0=\arccos\frac{1}{8}$ да система мувозанатда бўлади.

Система мувозанатининг устуворлигини текшириш учун (2) дан яна бир марта φ бўйича ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}=Pl(\cos\varphi-8\cos 2\varphi). \qquad (4)$$

(4) нинг $\varphi=\varphi_0\left(\cos\varphi_0=\frac{1}{8}\right)$ да мусбат ёки манфий бўлишини аниқлаймиз. $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1$ бўлгани учун (4) дан:

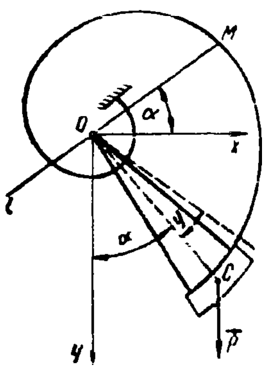
$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_0}=Pl\,(\cos\varphi_0-8(2\cos^2\varphi_0-1))=Pl\left(\frac{1}{8}-8\cdot2\cdot\frac{1}{64}+8\right)$$

ёки

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_0}=\frac{63}{8}Pl>0$$

келиб чиқади. Демак, $\varphi=\varphi_0$ да потенциал энергия минимумга эга ва система мувозанати устувордир.

71-масала. Фундаментлар, машина қисмлари ва ҳоказоларнинг тебранишини ёзишда қўлланиладиган Гейгер вибрографида P оғирликдаги маятникни бикирлиги c бўлган спираль пружина вертикалга α бурчак остида ушлаб туради (22.4-расм); маятникнинг O айланиш ўқига нисбатан инерция моменти I, маятник оғирлик маркази билан айланиш ўқи орасидаги масофа $OC=s$ га тенг. Виброграф эркин тебранишларининг даври аниқлансин.



22.4-расм.

Ечиш. Умумлашган координата учун маятникнинг мувозанат ҳолатидан четга чиқишини кўрсатувчи φ бурчакни оламиз.

Системага маятник оғирлик кучи $\vec{P}$ ҳамда спираль пружина ҳосил қилган реактив момент M дан иборат потенциал кучлар таъсир этади. Системанинг бу кучлар туфайли ҳосил булган потенциал энергияларини мос равишда Π_1 ва Π_2 билан белгилайлик.

Маятник мувозанат ҳолатидан φ бурчакка бурилгандаги оғирлик кучининг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз:

$$\Pi_1 = P\cdot s(\cos\alpha - \cos(\varphi+\alpha) = Ps[\cos\alpha(1-\cos\varphi)+\sin\varphi\cdot\sin\alpha].$$

Маятникнинг кичик тебранишида $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$ деб олиш мумкин. Шунга кура

$$\Pi_1 = Ps\left(\frac{\varphi^2}{2}\cos\alpha+\varphi\cdot\sin\alpha\right).$$

Π_2 ни ҳисоблашда пружинанинг пастки учи Oy вертикал устига тушиши учун пружинани айлантириш керак бўлган бурчакни α_0 билан белгилаймиз; бу ҳолда пружинага $c\alpha_0$ момент қўйиш керак. Агар маятник вертикалдан $\alpha+\varphi$ бурчакка бурилган бўлса, α_0 бурчак $\alpha+\varphi$ га камайиб, пружинанинг реактив моменти $c(\alpha_0-\alpha-\varphi)$ га тенг. Шунга кўра

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}c(\alpha_0-\alpha-\varphi)^2.$$

Натижада система потенциал энергияси учун куйидаги ифода ҳосил булади:

$$\Pi = Ps\left(\frac{\varphi^2}{2}\cos\alpha+\varphi\sin\alpha\right)+\frac{1}{2}c(\alpha_0-\alpha-\varphi)^2$$

ёки

$$\Pi = Ps\left(\frac{\varphi^2}{2}\cos\alpha+\varphi\sin\alpha\right)+\frac{c}{2}(\alpha_0-\alpha)^2 - c(\alpha_0-\alpha)\varphi+\frac{1}{2}c\varphi^2. \qquad (1)$$

Системанинг мувозанат ҳолатида $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}=0$ бўлишини эътиборга олиб, (1) ни соддалаштирамиз.

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = P\cdot s(\varphi\cos\alpha+\sin\alpha)-c(\alpha_0-\alpha)+c\varphi;$$

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0} = Ps\sin\alpha - c(\alpha_0-\alpha).$$

Шунинг учун (1) қуйидагича ёзилади:

$$\Pi = \frac{1}{2}(Ps\cos\alpha+c)\varphi^2+\frac{c}{2}(\alpha_0-\alpha)^2. \qquad (2)$$

Энди Лагранжнинг иккинчи тур тенгламасини тузамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{dT}{\partial\varphi} = Q_\Pi. \qquad (3)$$

Маълумки, потенциал кучларга мос келувчи умумлашган куч $Q_{\text{п}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$ формула билан аниқланади. Бинобарин,

$$Q_{\text{п}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -(Ps\cos\alpha + c)\varphi. \tag{4}$$

Маятник қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун унинг кинетик энергияси қуйидагича ҳасобланади:

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2.$$

Бундан ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = I\ddot{\varphi}. \tag{5}$$

(4) ва (5) ни (3) га қўямиз:

$$I\ddot{\varphi} = -(Ps\cos\alpha + c)\cdot\varphi.$$

Бунда

$$\frac{Ps\cos\alpha + c}{I} = k^2$$

белгилаш киритилса, тенглама

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \tag{6}$$

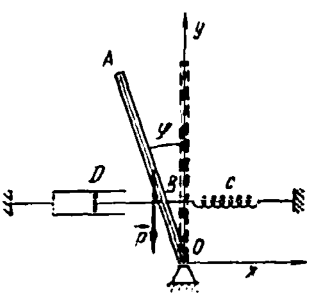
куринишни олади. (6) эса эркин тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини ифодалаб, унинг T тебраниш даври

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

формуладан аниқланади. Шундай қилиб,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Ps\cos\alpha + c}}.$$

(7) ифодада $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ деб олиб, горизонтал ва вертикал тебранишлар даврларини аниқлаш мумкин.



22.5-расм.

72-масала. Массаси m, узунлиги l бўлган бир жинсли OA стержень O нуқтада қузғалмас шарнир билан бириктирилган (22.5-расм). Стерженнинг B нуқтасига бир томондан c бикирликдаги пружина, иккинчи томондан D демпфер қўйилган бўлиб, демпфер орқали таъсир этувчи қаршилик кучи $\bar{R} = -\beta\cdot\bar{v}_B$ га тенг ($\beta = \text{const}$) ва $OB = \frac{l}{3}$. Стерженнинг вертикал ҳолатида пружина деформацияланмаган деб қараб, пружина бикирлигининг қандай қийматида стерженнинг вертикал ҳолатдаги мувозанати устувор бўлиши ва β нинг қандай қийматида стержень ҳаракати сўнувчи тебранишлардан иборат бўлиши топилсин.

Ечиш. Стерженнинг вертикалдан оғиш бурчаги φ ни умумлашган координата деб оламиз. Стержень потенциал кучлар ($P=mg$ — оғирлик кучи ва $F=cx$ — эластиклик кучи) ҳамда қаршилик кучи таъсирида ҳаракатланади. Бинобарин, (22.20) куринишдаги Лагранж тенгламасини тузиш керак.

Системанинг оғирлик кучи ва эластиклик кучи туфайли ҳосил бўлган потенциал энергияларини мос равишда Π_1 ва Π_2 билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\Pi_1 = mg\cdot\frac{l}{2}\cos\varphi,\quad \Pi_2 = c\,\frac{\lambda^2}{2}$$

бўлиб, бундаги пружина деформацияси λ қуйидагича ҳисобланади:

$$\lambda = OB\sin\varphi = \frac{l}{3}\sin\varphi.$$

Стерженнинг кичик тебраниши ўрганилганидан $\cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$, $\sin\varphi\approx\varphi$ деб олинса,

$$\Pi = \Pi_1+\Pi_2 = \frac{mgl}{2}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)+\frac{cl^2}{18}\varphi^2 \tag{1}$$

ҳосил бўлади.

(1) дан φ бўйича ҳосила ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -\frac{mgl}{2}\varphi+\frac{cl^2}{9}\varphi = \frac{2cl-9mg}{18}\,l\varphi. \tag{2}$$

Бу ифодани нолга тенглаштириб, $\varphi=0$ да стержень мувозанатда булишини кўрамиз. Мувозанатнинг устуворлик шарти $\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=0}>0$ дан фойдаланамиз:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = \frac{2cl-9mg}{18}\,l.$$

Шунинг учун $2cl-9mg>0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $c=c_1$ да стерженнинг мувозанати устувор бўлади. Бундан $c_1>\frac{9mg}{2l}$ келиб чиқади.

Энди Лагранжнинг иккинчи тур тенгламасини тузиш мақсадида система кинетик энергиясини ва қаршилик кучлари туфайли ҳосил бўлувчи Рэлей функциясини аниқлашга ўтамиз.

Стержень қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилгани учун унинг кинетик энергияси қуйидагича топилади:

$$T = \frac{1}{2}I\dot\varphi^2 = \frac{ml^2}{6}\dot\varphi^2.$$

Бунда $a = \frac{ml^2}{3}$ белгилаш киритсак, охирги тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2.$$

(22.26) дан фойдаланиб, Рэлей функциясини аниқлаймиз:

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta v_B^2 = \frac{\beta}{2}\left(\frac{l}{3}\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{\beta l^2}{18}\dot{\varphi}^2.$$

Бунда $\mu = \frac{\beta l^2}{9}$ белгилаш киритсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu \dot{\varphi}^2.$$

Натижада (22.20) кўринишдаги Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$a\ddot{\varphi} = -\frac{2cl - 9mg}{18} l\varphi - \mu\dot{\varphi}.$$

Бунда $\frac{\mu}{2a} = b$, $\frac{2cl - 9mg}{18a} \cdot l = k^2$ белгилашлар киритиб, (22.28) каби дифференциал тенглама ҳосил қиламиз:

$$\ddot{\varphi} + 2b\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Бу дифференциал тенглама сўнувчи тебранма ҳаракатни ифодалаши учун $b < k$ шарт бажарилиши керак. Шу шартдан фойдаланиб, β коэффициентни топамиз:

$$\frac{\mu}{2a} < \sqrt{\frac{2cl - 9mg}{18a} l}$$

ёки

$$\frac{\frac{\beta l^2}{9}}{2 \cdot \frac{ml^2}{3}} < \sqrt{\frac{2cl - 9mg}{18 \cdot \frac{ml^2}{3}} l}.$$

Бундан

$$\beta < \sqrt{\frac{6m(2lc - 9mg)}{l}} \qquad (3)$$

келиб чиқади. Шундай қилиб (3) шарт бажарилса, стержень сўнувчи тебранма ҳаракатда бўлади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Аҳмаджонов О. Физика курси. Механика ва молекуляр физика. «Ўқитувчи», Т., 1984.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. «Наука», М., 1965.
3. Бать М. И., Джаналидзе Г. Ю., Кельзон А. С., Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 1, 2, «Наука», М., 1964.
4. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики «Наука», М., т. 1, 1970; т. 2, 1971.
5. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. «Наука», М., 1971.
6. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. «Наука», М., ч. 1, 2. 1967.
7. Веселовский И. Н. Сборник задач по теоретической механике. Госиздат тех. теор. лит. М., 1955.
8. Воронков И. М. Курс теоретической механики. «Наука», М., 1964.
9. Гернет М. М. Курс теоретической механики. «Высшая школа», М., 1987.
10. Геронимус Я. Л. Теоретическая механика. «Наука», М., 1973.
11. Голубева О. В. Теоретическая механика. Физматгиз. М., 1961.
12. Добронравов В. В. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. «Высшая школа», М., 1983.
13. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики. т. 1, «Наука», М., 1972.
14. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики. ч. 1, «Просвещение», М., 1965.
15. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
16. Мешчерский И. В. Назарий механикадан масалалар тўплами. «Ўқитувчи», Т., 1989.
17. Мультановский В. В. Курс теоретической физики. Классическая механика. «Просвещение», М., 1988.
18. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. «Наука». М., 1870.
19. Петкевич В. В. Теоретическая механика. «Наука», М., 1981.
20. Попов М. В. Теоретическая механика. «Наука», М., 1986.
21. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под общей редакцией Яблонского А. А. «Высшая школа», М., 1985.
22. Сборник задач по теоретической механике. Под общей редакцией Бражниченко Н. А. «Высшая школа», М., 1986.
23. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. «Высшая школа», М., 1986.
24. Халфман Р. Л. Динамика. Перевод с английского В. А. Космодемьянского. «Наука», М., 1972.
25. Шоҳайдарова П., Шозиётов Ш., Зоиров Ж. Назарий механика. «Ўқитувчи», Т., 1981.
26. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Часть II «Высшая школа», М., 1984.
27. Ўрозбоев М. Т. Назарий механика асосий курси. «Ўқитувчи», Т., 1966.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

ЯХЯЕВ МУХТАР, МУМИНОВ КАДЫР БАКАНОВИЧ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для студентов педагогических ВУЗов

Ташкент — „Ўқитувчи" — 1990

Махсус муҳаррир *Э Эргашев*
Нашриёт муҳаррири *А. Аҳмедов*
Бадиий муҳаррир *Ф. Неккадамбоев*
Техник муҳаррир *Т. Скиба*
Корректор *М. Минахметова*

ИБ № 4720

Теришга берилди 18. 09. 89. Босишга рухсат этилди 13. 08. 90. Формати $60 \times 90^1/_{16}$. Тип. қоғози № 2. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 25,5. Шартли кр.- отт. 25.69. Нашр. л. 17,85. Тиражи 9500. Зак. 5955. Баҳоси 80 т.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 11-179-88.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги босмахонаси ва бирлашган нашриёти. Самарқанд, У. Турсунов кўчаси, 82. 1990.

Объединенное издательство и типография областных газет имени М. В. Морозова. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.

22.21
Я 90

Яҳёев М. С. , Мўминов Қ. Б.
Назарий механика: Пед. ин-тларининг студ. учун ўқув қўлл.—Т. : Ўқитувчи, 1990.—408

1. Автордош.
Яхъяев М. , Муминов К. Теоретическая механика.

ББК 22.21я73