Т. А. САРИМСОҚОВ

ФУНКЦИОНАЛ АНАЛИЗ КУРСИ

ЎзССР Олий ва ўрта махсус таълим министрлиги
университетларнинг математика ва амалий математика
факультетлари студентлари учун
дарслик сифатида тасдиқлаган

Қайта ишланган, тўлдирилган
иккинчи нашри

ТОШКЕНТ—„ЎҚИТУВЧИ“—1986

Тақризчилар: Ўзбекистон ССР Фанлар академиясининг ҳақиқий
аъзоси, профессор *С. Х. Сирожиддинов*.
физика-математика фанлари кандидати,
доцент *А. Аъзамов*

Ушбу китобда функционал анализ курсининг асослари баён қилинган. Китобнинг биринчи қисмида асосий фазолар, иккинчи қисмида операторлар назарияси баён қилинади. Мураккаб функционал фазолар метрика, норма ва скаляр кўпайтма ёрдамида соддароқ фазоларга қулай тарзда акс эттириб ўрганилади.

Мазкур китоб университетлар ва педагогика институтларининг математика, физика-математика, механика-математика ва амалий математика факультетлари студентларига мўлжалланган.

С $\frac{1702050000-330}{353(04)\ 86}$ 155—86

қайта ишланган, тўлдирилган 2- нашри

МУНДАРИЖА

Қимматли отамнинг
хотирасига бағишлайман.

БИРИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Функционал анализ ҳозирги замон математикасининг муҳим соҳаларидан биридир. У математиканинг бир неча соҳалари (жумладан, математик анализ, функциялар назарияси, интеграл ва дифференциал тенгламалар назарияси, вариацион ҳисоб) чегарасида, уларнинг тушунчалари ва методларини умумлаштирилиши натижасида XX аср бошларида янги ва мустақил соҳа сифатида вужудга келди.

Сўнгги, тахминан, ярим аср мобайнида функционал анализ ғоят чуқур ва кенг ривож топди. Бу ривожланиш айни вақтда ҳам давом этмоқда. Ҳозирги кунда функционал анализ математиканинг кўп тармоқли соҳаларидан бирига айланиб, математика ва физиканинг турли бўлимларида кенг татбиқ қилинмоқда.

Функционал анализнинг муҳим хислатларидан бири мураккаб функционал фазоларни (нуқталари функциялардан иборат фазоларни) метрика, норма ва скаляр кўпайтма ёрдамида соддароқ, яхши ўрганилган фазоларга, масалан, тўғри чизиққа қулай тарзда акс эттириб олиб, ўрганишдан иборатдир. Бу ғоя асримизнинг бошларида амалга оширилиб, келгусида кенг ривож топди. Бу ғояга биз ҳам мазкур китобда етарли даражада эътибор бердик. Функционал анализда, одатда, функционал фазолар бир неча ўзаро узвий боғланган турли математик структуралар (масалан, алгебранк амаллар, метрика, норма, скаляр кўпайтма, қисман тартиб) киритилган ҳолда кўрилади. Функционал фазоларнинг бу тарзда кўрилиши функционал анализда турли методларни, айниқса, аналитик ва топологик методларни қўлланиш имконини беради.

Функционал анализнинг асосий мазмуни функционал фазоларни ва уларда аниқланган операторларни ўрганишдир.

Бунга кўра биз китобни қуйидаги икки қисмга бўлишни лозим топдик:

I қисм. Асосий фазолар.

II қисм. Операторлар назарияси.

Биринчи қисмни функционал анализнинг асосий пойдевори, иккинчи қисмни эса бу пойдеворга қурилган иншоот деб қараш мумкин.

Мазкур китоб университетлар ва педагогика институтларининг математика, физика-математика, механика-математика ва амалий математика факультетларига мўлжалланган бўлиб, бунда биз мавжуд программаларни назарда тутган ҳолда функционал анализнинг энг асосий ва муҳим бобларини ёритиш билан чегараландик.

Китобда махсус курсларга мўлжалланган параграфлар ҳам ўз ўрнини топди.

Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назариясига оид маълумотлар бу китобда келтирилмади. Бундай маълумотлар авторнинг 1968 йилда нашр этилган „Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси“ китобида келтирилган бўлиб, бу китобни текстда қисқача [ҲЎФН] билан белгиладик.

Китобни ёзишда биз рус тилидаги дарсликлар, қўлланмалар ва монографиялардан фойдаландик; уларнинг рўйхати китобнинг охирида келтирилган.

Китобда теоремалардан фойдаланиш тартиби қуйидагича: мазкур параграфдаги теоремаларнинг фақат номери кўрсатилади; бошқа параграфдаги теоремалардан фойдаланилганда параграфнинг номери ҳам кўрсатилади (масалан, 9.1-§, 4- теорема).

Китобнинг қўл ёзмасини тайёрлашда ТошДУ функционал анализ кафедрасининг ходимлари, айниқса, проф. Ж. Ҳожиев, доц. Ш. А. Аюпов ва Р. Н. Ғанихўжаев ўртоқлар яқиндан ёрдам бердилар. Уларнинг ҳаммаларига самимий ташаккур билдираман.

Автор

ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Мазкур китобнинг биринчи нашри 1980 йилда чиққан эди. Бу орада китоб тарқалиб, унинг қайта чоп этилишига эҳтиёж вужудга келди. Шуни назарда тутиб, китобга деярли ўзгартишлар киритмай, биргина „Вариацион ҳисоб элементлари“ бобини қўшдик, чунки математиканинг бу соҳаси муҳимлигидан ташқари, кўп соҳаларда татбиқий аҳамиятга эгадир. Шуни ҳам айтиш керакки, вариацион ҳисоб университетларда кўп йиллар мобайнида алоҳида курс сифатида ўқилади. Бундан ташқари биринчи нашрда йўл қўйилган баъзи камчиликлар тузатилди.

Дарсликнинг биринчи нашрида авторнинг „Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси“ китобидаги маълумотларга таянилган эди. Бу китобнинг янги тузатилган ва қайта ишланган нашри 1982 йилда чиқди. Шунинг учун мазкур дарсликда китобнинг янги нашридаги маълумотларга мурожаат қилинди.

Китобни нашрга тайёрлашда доц. Р. Ғанихўжаев фаол қатнашди. Унга ўз миннатдорчилигимни билдираман.

Автор

АСОСИЙ ФАЗОЛАР

I боб

ВЕКТОР ФАЗОЛАР

1.1-§. n ўлчамли вектор фазо

Геометрия, механика ва физикада шундай объектлар учрайдики, улар бир ёки бир неча ҳақиқий соннинг тартибланган системаси билан аниқланади. Масалан, текисликдаги ҳар қандай нуқта ўзининг икки координатаси билан, ҳар қандай вектор ўзининг икки компонентаси билан аниқланади. Текисликдаги векторнинг энг содда умумлаштирилиши n ўлчамли вектор тушунчасидир.

Таъриф. Тартиб билан ёзилган n та ҳақиқий сон системаси, яъни

$$a=(a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_n)$$

n ўлчамли вектор дейилади. Бунда a_1, a_2, . . . , a_n сонлар векторнинг *координаталари* дейилади.

n ўлчамли $a=(a_1, a_2 \ldots, a_n)$ ва $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ векторларнинг мос координаталари тенг, яъни $a_1=b_1$, $a_2=$ $=b_2$, . . . , $a_n=b_n$ бўлса, бу векторлар тенг деб ҳисобланади. Бундан яна бир бор кўриниб турибдики, вектор бу n та ҳақиқий сон тўплами бўлибгина қолмай, балки элементлари тартибланган система ҳамдир. Яъни берилган векторларнинг координаталарини бошқа тартибда ёзсак, умумий ҳолда биз бошқа векторни ҳосил қиламиз. Масалан, уч ўлчамли фазода $a=(1, 2, 3)$ ва $b=(2, 1, 3)$ векторлар бир-бирига тенг эмас.

Мисоллар. 1. Текисликдаги векторлар икки ўлчамли векторга, реал физик фазодаги векторлар (куч, тезлик кабилар) уч ўлчамли векторга мисол бўлади.

2. Бир ўзгарувчили (n—1)-даражали $f(x)=a_0+a_1x+$ $+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$ кўпҳадни n ўлчамли $a=(a_0, a_1, \ldots,$ a_{n-1}) вектор сифатида қараш мумкин.

Энди биз n ўлчамли векторлар устида амаллар киритамиз. Икки

$$a=(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ ва } b=(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

векторнинг йиғиндиси қуйидагича аниқланади:

$$a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n).$$

Сонларни қўшиш амали коммутатив ва ассоциатив бўлгани учун векторларнинг йиғиндиси ҳам шу хоссаларга эга, яъни

1) $a+b=b+a$ (коммутативлик хоссаси);
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативлик хоссаси).

Ҳамма координаталари нолдан иборат вектор *ноль вектор* дейилади ва $\theta=(0, 0, \dots, 0)$ орқали ёзилади. Ноль вектор векторлар орасида сонлар тўпламидаги ноль ролини ўйнайди. Дарҳақиқат, ихтиёрий $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ вектор учун

$$a+\theta=(a_1+0, a_2+0, \dots, a_n+0)= \\ =(a_1,a_2, \dots, a_n)=a.$$

Ушбу

$$-a=(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

вектор a векторга *қарама-қарши вектор* дейилади. Равшанки, $a+(-a)=\theta$. Демак, киритилган қўшиш амалига нисбатан n ўлчамли векторлар коммутатив группа ҳосил қилади.

Векторлар устида яна бир амал киритамиз. a векторнинг λ ҳақиқий сонга кўпайтмасини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\lambda a=(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Ҳақиқий сонларни кўпайтириш амалининг хоссаларидан киритилган амалнинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

3) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$;
4) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$;
5) $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$;
6) $0\cdot a=\theta$;
7) $1\cdot a=a$.

Бу ерда a, b, θ—векторлар, λ, μ, 0, 1—ҳақиқий сонлар.

Берилган n натурал сон учун ҳамма n ўлчамли векторлар тўплами (киритилган амаллар билан биргаликда) *n ўлчамли вектор фазо* дейилади ва R^n билан белгиланади. Хусусан, $n=2$ ва $n=3$ бўлганда юқорида киритилган

(1) шартни қаноатлантирувчи икки кетма-кетликнинг йиғиндиси ҳам шу шартни қаноатлантириши қуйидаги содда тенгсизликдан келиб чиқади:

$$(a_1+a_2)^2 \leqslant 2a_1^2+2a_2^2.$$

Шунга ўхшаш l_2 комплекс фазони киритиш мумкин.

7. m фазо. Унинг элементлари чегараланган сонли кетма-кетликлардир. Бу фазода қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари 6- мисолдагидек киритилади.

8. s фазо. Ихтиёрий ҳақиқий сонли кетма-кетликлар тўплами 6, 7- мисоллардаги амаллар билан олинса, у s вектор фазо ҳосил қилади.

9. $[a, b]$ оралиқда аниқланган узлуксиз ҳақиқий (ёки комплекс) функциялар тўплами функцияларни одатдаги қўшиш ва сонга кўпайтириш амалларига нисбатан $C[a, b]$ вектор фазо ҳосил қилади. Бу функционал фазо математик анализда катта аҳамиятга эга.

1.3- §. Чизиқли боғланиш. Ўлчам

Таъриф. V вектор фазода $x, y, \ldots, w$ элементлар берилган бўлсин. Агар шундай $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ сонлар топилсаки, уларнинг камида бири нолдан фарқли бўлиб, ушбу

$$\alpha x+\beta y+\ldots+\lambda w=0 \qquad (1)$$

муносабат бажарилса, $x, y, \ldots, w$ элементлар *чизиқли боғлиқ* дейилади. Акс ҳолда бу элементлар *чизиқли эркли* дейилади, яъни $x, y, \ldots, w$ элементлар учун (1) муносабат фақат $\alpha=\beta=\ldots=\lambda=0$ сонлар учунгина бажарилса, $x, y, \ldots, w$ элементлар чизиқли эркли бўлади. Масалан, $C[a, b]$ фазода қуйидаги

$$x(t)=t^2,\ y(t)=2t,\ z(t)=2t^2+4t$$

функциялар чизиқли боғлиқ, чунки

$$2\cdot x(t)+2\cdot y(t)-1\cdot z(t)=0.$$

Аксинча, шу фазода ихтиёрий n учун ушбу

$$x_0(t)=1,\ x_1(t)=t,\ x_2(t)=t^2,\ \ldots,\ x_n(t)=t^n$$

функциялар чизиқли эркли. Ҳақиқатан,

$$\alpha_0x_0(t)+\ldots+\alpha_nx_n(t)=0, \text{ яъни } \alpha_0+\ldots+\alpha_nt^n=0$$

муносабатларни қаноатлантирувчи $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ сонлар мавжуд деб фараз қилайлик. Демак, $[a, b]$ даги ихтиёрий t

сон бу кўпҳаднинг илдизи. Алгебранинг асосий теоремасига биноан n-даражали кўпҳаднинг илдизлари сони n тадан кўп эмас. Шунинг учун $\alpha_0+\alpha_1 t+\ldots+\alpha_n t^n$ кўпҳаднинг ҳамма коэффициентлари нолга тенг, яъни $\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$. Демак, таърифга асосан $x_0(t)$, $x_1(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$ функциялар чизиқли эркли.

V вектор фазода элементларининг сони чексиз бўлган системанинг ҳар қандай чекли сондаги элементлари чизиқли эркли бўлса, у ҳолда берилган система *чизиқли эркли* дейилади. Масалан, $C\,[a, b]$ фазода

$$x_0=1,\ x_1=t,\ x_2=t^2,\ \ldots,\ x_n=t^n,\ \ldots$$

чексиз система чизиқли эркли. Бу ҳам, юқоридагига ўхшаш, алгебранинг асосий теоремасидан келиб чиқади.

Таъриф. Агар V вектор фазода n та чизиқли эркли элемент топилиб, ҳар қандай $n+1$ та элемент чизиқли боғлиқ бўлса, V фазо *n ўлчамли вектор фазо* дейилади.

Элементларининг сони ихтиёрий бўлган чизиқли эркли система мавжуд бўлса, вектор фазо *чексиз ўлчамли*, акс ҳолда чекли ўлчамли дейилади. Масалан, 1.2- § даги 1-, 2-, 4- мисоллардаги фазолар чекли ўлчамли, 6—9- мисоллардаги функционал фазолар эса чексиз ўлчамли. Хусусан, 9- мисолдаги $C\,[a, b]$ фазонинг чексиз ўлчамлилиги $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ чексиз системанинг чизиқли эркли эканлигидан келиб чиқади.

Таъриф. n ўлчамли вектор фазода ҳар қандай n та элементдан иборат бўлган чизиқли эркли система *базис* дейилади.

Функционал анализда ўрганиладиган вектор фазолар асосан функционал фазолар бўлиб, улар одатда чексиз ўлчамлидир.

Ихтиёрий вектор фазода ҳам базис тушунчасини киритиш мумкин.

V вектор фазода $\Gamma=\{x_\alpha\}$ чизиқли эркли система берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $x\in V$ элемент учун шундай x_{α_1}, x_{α_2}, $\ldots$, $x_{\alpha_n}\in\Gamma$ векторлар ва λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n сонлар топилсаки, x ушбу

$$x=\lambda_1 x_{\alpha_1}+\ldots+\lambda_n x_{\alpha_n}$$

кўринишда ёзилса, Γ тўплам V вектор фазонинг *Ҳамель базиси* дейилади. Ихтиёрий вектор фазо Ҳамель базисига эга эканлигини кўрсатиш мумкин.

1.4- §. Вектор қисм фазо. Қавариқ тўпламлар

Таъриф. V вектор фазонинг L қисм тўпламининг ўзи ҳам V да аниқланган векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амалларига нисбатан вектор фазо бўлса, L фазо V вектор фазонинг вектор *қисм фазоси* (баъзан эса *чизиқли кўпхиллик*) дейилади.

Энди V нинг A ва B қисм тўпламлари ҳамда K майдон учун

$$A+B=\{a+b: a\in A,\ b\in B\},$$
$$K\cdot A=\{\mu a: \mu\in K,\ a\in A\}$$

белгилашларни киритамиз.

$A+B$ тўплам A ва B тўгламларнинг *вектор йиғиндиси* дейилади. Бундай белгилар ёрдамида V даги L тўпламнинг вектор қисм фазо бўлиш шартлари қуйидагича ёзилади:

$$\text{а) } L+L\subset L, \qquad \text{б) } KL\subset L.$$

Дарҳақиқат, бу шартга кўра L тўплам ноль векторга эга бўлади, чунки агар a вектор L га тегишли бўлса, у ҳолда L га $0\cdot a=\theta$ вектор ҳам тегишли бўлади. Сўнгра L ўзининг ихтиёрий a вектори билан бирга яна б) шартга кўра унга қарама-қарши бўлган—$a=(-1)\cdot a$ векторга ҳам эга бўлади. Сўнг а) ва б) шартларга кўра ҳар қандай икки векторнинг йиғиндиси ҳам, ҳар қандай векторнинг ихтиёрий сонга кўпайтмаси ҳам L га тегишли бўлади.

Энг кичик вектор қисм фазо ноль элементдан иборат бўлган $\{\theta\}$ фазодир.

Бевосита кўриш мумкинки, ихтиёрий вектор қисм фазолар системасининг кесишмаси (кўпайтмаси) ҳам вектор қисм фазодир.

V вектор фазода ихтиёрий бўш бўлмаган S тўплам берилган бўлсин. S тўпламни ўз ичига олган энг кичик вектор қисм фазо S тўпламдан *ҳосил қилинган вектор қисм фазо* дейилади. Бундай вектор қисм фазо S тўпламни ўз ичига олувчи ҳамма вектор қисм фазоларнинг кесишмасига тенгдир. S дан ҳосил қилинган L вектор қисм фазо айнан қуйидаги кўринишдаги элементлардан иборатдир:

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, a_i\ ,$$

бу ерда $\alpha_i\in K$, $a_i\in S$, $1\leqslant i\leqslant n$, n—ихтиёрий (x га боғлиқ) натурал сон. Баъзан, S тўпламдан вужудга келтирилган L

вектор қисм фазо S нинг *чизиқли қобиғи* дейилади ёки S тўплам L ни *вужудга келтирувчи система* дейилади ва $L=[S]$ кўринишда белгиланади.

Мисоллар. 1. V вектор фазо, x унинг нолдан фарқли элементи бўлсин. $\{\lambda x, \lambda \in K\}$ элементлар тўплами бир ўлчамли фазо ҳосил қилади. Бу фазо V нинг вектор қисм фазосидир. Агар V нинг ўлчами бирдан катта бўлса, $\{\lambda x, \lambda \in K\} \neq V$.

2. 1.2- § да кўрилган 9- мисолдаги $C\ [a, b]$ вектор фазода ҳамма кўпҳадлар тўплами $P\ [a, b]$ ни олайлик. Равшанки, $P\ [a, b]$ тўплам $C\ [a, b]$ да вектор қисм фазо ҳосил қилади. $C\ [a, b]$ каби $P\ [a, b]$ ҳам чексиз ўлчамлидир. Ўз навбатида, $C\ [a, b]$ фазони $[a, b]$ оралиқда аниқланган барча (узлуксиз ва узилувчи) функциялар вектор фазосининг қисм фазоси сифатида қараш мумкин.

3. 1.2- § даги l_2, m, s вектор фазоларга қайтсак (6—8- мисоллар), бу ерда l_2 фазо m фазонинг вектор қисм фазоси, m эса ўз навбатида s нинг қисм фазосидир.

Таъриф. V вектор фазода ихтиёрий A тўплам берилган бўлсин. Агар $\lambda+\mu=1$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий λ, μ сонлар учун ушбу

$$\lambda A+\mu A \subset A \qquad (1)$$

муносабат ўринли бўлса, A *қавариқ тўплам* дейилади. Агар $|\lambda| \leqslant 1$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий λ учун $\lambda A \subset A$ муносабат бажарилса, A *мувозанатдаги тўплам* дейилади. Қавариқ ва мувозанатдаги тўплам *абсолют қавариқ тўплам* дейилади.

Равшанки, агар A қавариқ тўплам бўлса, ихтиёрий $x \in V$ ва $\lambda \in K$ учун $x+\lambda A$ ҳам қавариқ тўпламдир. Абсолют қавариқ A, B тўпламлар учун $A+B$ ва λA тўпламлар ҳам абсолют қавариқдир.

1- лемма. A абсолют қавариқ тўплам бўлсин. У ҳолда K дан олинган ихтиёрий λ, μ ($|\lambda| \leqslant |\lambda_1|$), $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сонлар учун ушбу муносабатлар ўринлидир:

1) $\lambda A \subset \mu A$,

2) $\sum\limits_{1<i<n} (\lambda_i A) = (\sum\limits_{1<i<n} |\lambda_i|)A$.

Исбот. 1) агар $\mu=0$ бўлса, у ҳолда $\lambda A=\mu A=\{\theta\}$. Агар $\mu \neq 0$ ва $x \in A$ бўлса, A нинг мувозанатдалигидан $\lambda \cdot \mu^{-1} \cdot x \in A$, яъни $\lambda x \in \mu A$, демак, $\lambda A \subset \mu A$ муносабат келиб чиқади;

2) $n=2$ бўлган ҳол учун, яъни ушбу

$$\lambda A+\mu A=(|\lambda|+|\mu|)A$$

муносабатни исботлаймиз. $\lambda=\mu=0$ бўлса, ҳаммаси равшан. λ ёки μ нолдан фарқли бўлса, у ҳолда

$$\frac{\lambda}{|\lambda|+|\mu|}A+\frac{\mu}{|\lambda|+|\mu|}A\subset A,$$

яъни $\lambda A+\mu A\subset(|\lambda|+|\mu|)A$ муносабат ўринли. Аммо

$$(|\lambda|+|\mu|)A\subset|\lambda|A+|\mu|A\subset\lambda A+\mu A.$$

Демак,

$$\lambda A+\mu A=(|\lambda|+|\mu|)A.$$

Умумий ҳол индукция ёрдамида исботланади.$_*$

2- лемма. Ихтиёрий қавариқ (абсолют қавариқ) тўпламлар системасининг кесишмаси ҳам қавариқдир (абсолют қавариқдир).

Исбот. Г ихтиёрий тўплам, $\{A_\alpha, \alpha\in\Gamma\}$ қавариқ тўпламлар системаси бўлсин. $A=\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$ тўпламнинг ихтиёрий a_1, a_2 элементларини оламиз. Ихтиёрий α учун a_1, $a_2\in A_\alpha$, демак, $\lambda+\mu=1$, $\lambda\geqslant0$, $\mu\geqslant0$ сонлар учун $\lambda a_1+\mu a_2\in A_\alpha$; α ихтиёрий бўлгани учун $\lambda a_1+\mu a_2\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=A$, яъни $\lambda A+\mu A\subset A$.

Абсолют қавариқ тўпламлар олинган ҳолда ҳам исбот шунга ўхшашдир.$_*$

A тўпламни ўз ичига олган барча қавариқ (абсолют қавариқ) тўпламлар кесишмаси ҳам қавариқ (абсолют қавариқ) тўплам бўлиб, у A нинг *қавариқ (абсолют қавариқ) қобиғи* дейилади. Қавариқ (абсолют қавариқ) қобиқ $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ кўринишдаги элементлардан иборат, бу ерда

$$x_i\in A,\ \lambda_i\geqslant0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda\ =1\ \Big(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\leqslant1,\ n\text{—ихтиёрий сон}\Big).$$

Агар ихтиёрий $x\in V$ элемент учун шундай $\lambda>0$ сон мавжуд бўлсаки, $x\in\rho A$ муносабат ихтиёрий μ ($|\mu|\geqslant\lambda$) сон учун ўринли бўлса, A тўплам *ютувчи* дейилади. Равшанки, ихтиёрий ютувчи тўпламлар чекли системасининг кесишмаси ҳам ютувчидир.

1.5-§. Фактор фазолар ва фазоларнинг кўпайтмаси

V вектор фазо, V' унинг вектор қисм фазоси бўлсин. Агар $x, y \in V$ элементлар учун $x—y$ элемент V' га тегишли бўлса, x ва y ни *эквивалент* деймиз ва буни $x \sim y$ кўринишда ёзамиз, бу муносабат (яъни эквивалентлик) қуйидаги хоссаларга эга:

а) рефлексивлик хоссаси: ҳар қандай a элемент ўз-ўзига эквивалент;

б) симметриклик хоссаси: агар $a \sim b$ бўлса, у ҳолда $b \sim a$;

в) транзитивлик хоссаси: $a \sim b$, $b \sim c$ бўлса, у ҳолда $a \sim c$. Шунинг учун бу муносабат V тўпламни синфларга бўлади ([ҲЎФН], 1 боб). Бундай синфлар тўпламини V нинг V' бўйича *фактор фазоси* деб аталади ва V/V' кўринишда ёзилади. Ҳар қандай фактор фазода қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари қуйидагича киритилади.

ξ ва η синфлар V/V' нинг элементлари бўлган икки синф бўлсин. Ҳар бир синфда биттадан x ва y вакил танлаб олиб, ξ ва η синфлар *йиғиндиси* деб $x+y$ элементни ўз ичига олган синфни айтамиз. ξ синфнинг α сонга *кўпайтмаси* деб, αx элементни ўз ичига олган синфга айтамиз. Равшанки, бу амаллар натижаси ξ ва η синфлардаги вакилларга боғлиқ эмас. Масалан, $x' \in \xi$, $y' \in \eta$ бошқа бир вакиллар бўлса, у ҳолда

$$(x+y)-(x'+y')=(x-x')+(y-y') \in V',$$

яъни $x+y$ ва $x'+y'$ элементлар бир синфга тегишли. Шундай қилиб, биз V/V' фактор фазонинг элементлари устида амаллар киритдик. Бу амаллар вектор фазодаги амаллар шартларини қаноатлантириши осонликча текширилади. Шундай қилиб, ҳар қандай фактор фазо вектор фазодир.

Таъриф. V/V' фактор фазонинг ўлчами V' фазонинг *коўлчами (қўшимча ўлчами)* дейилади ва codim V' орқали белгиланади.

Мисоллар. 1. $V=R^2$ да, яъни текисликда V' деб $y=0$ тўғри чизиқни (яъни x ўқини) оламиз. Агар $a=(a_1, a_2)$, $b=(b_1, b_2)$ элементларни олсак, $a—b \in V'$ бўлиши учун $a_2=b_2$ шарт зарур ва кифоядир. Демак, $a=(a_1, a_2)$ вектор V/V' фазонинг қайси синфига тегишли бўлиши фақат a_2 га боғлиқ. Яъни $y=y_0$ тўғри чизиқнинг ҳамма элементлари бир синфга тегишлидир ва, аксинча, ҳар бир синф R^2 текисликда бирор $y=y_0$ тўғри чизиқни аниқлайди. Шунинг учун V/V' фазонинг элементлари Ox ўққа параллел бўлган тўғри чизиқлар деб қараш мумкин. Бевосита кўриниб турибдики, codim $V'=1$.

2. $V=C\,[a, b]$ фазони кўрайлик. Қийматлари a ва b нуқталарда нолга тенг бўлган узлуксиз функциялар тўплами V' бу фазода вектор қисм фазодир. Энди шу вектор қисм фазога нисбатан эквивалентлик муносабатини киритамиз. Бунда f ва g функциялар эквивалент бўлиши учун $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$ бўлиши зарур ва кифоядир. Демак, эквивалентлик синфлари, яъни V/V' фазонинг элементлари a ва b нуқталардаги қийматлари билан аниқланади. Шунинг учун V/V' фазонинг элементларини R^2 фазонинг элементлари сифатида қараш мумкин. Хусусан, codim $V'=2$.

Бирор V вектор фазода V_1, V_2 қисм фазоларни оламиз. Агар ихтиёрий $x\in V$ векторни ягона равишда

$$x=x_1+x_2,\quad x_1\in V_1,\quad x_2\in V_2$$

кўринишда ёйиш мумкин бўлса, у ҳолда V фазо V_1 ва V_2 қисм фазоларнинг *тўғри йиғиндиси* дейилади ва $V=V_1\oplus V_2$ кўринишда белгиланади.

Масалан, $V=R^2$ вектор фазо ўзининг

$$V_1=\{(0,\beta),\ \beta\in R\}\ \text{ва}\ V_2=\{(\alpha,0),\ \alpha\in R\}$$

қисм фазоларининг тўғри йиғиндисидир.

Энди вектор фазоларнинг тўғри кўпайтмаси тушунчасини киритамиз. Бунинг учун вектор фазолар системаси $\{V_i\}_{i\in I}$ ни оламиз, бу ерда I — ихтиёрий қувватли тўплам. Бу фазоларнинг Декарт (тўғри) кўпайтмаси ([ҲЎФН], 1 боб) бўлган $V=\prod\limits_{i\in I}V_i$ тўпламда вектор фазоларга хос бўлган операциялар киритамиз. Агар $x=(x_i)_{i\in I}$, $y=(y_i)_{i\in I}$ V нинг икки элементи бўлса, у ҳолда қўшиш амали ушбу

$$x+y=(x_i+y_i)_{i\in I}$$

кўринишда, $\lambda\in K$ сонга кўпайтириш амали эса

$$\lambda x=(\lambda x_i)_{i\in I}$$

кўринишда аниқланади. Ҳар бир V_i вектор фазо бўлганидан фойдаланиб, киритилган амаллар V тўпламни вектор фазога айлантириши осонликча исботланади. Ҳосил бўлган V вектор фазо V_i фазоларнинг *тўғри кўпайтмаси* дейилади ва $\prod\limits_{i\in I}V_i$ ёки $\mathop{\times}\limits_{i\in I}V_i$ кўринишларда ёзилади. Хусусан, ҳамма $V_i=F$ бўлса (F — тайинланган вектор фазо), у ҳолда ҳосил бўлган тўғри кўпайтма F^I билан белгиланади.

Агар I тўплам чекли бўлиб, n та элементдан иборат бўлса, F^I ўрнига F^n ёзилади.

Масалан, R^n фазони R^1 вектор фазоларнинг тўғри кўпайтмаси сифатида қараш мумкин. 1.2- § даги s фазони (8- мисол) R^N сифатида қараш мумкин (бунда N — натурал сонлар тўплами).

1.6- §. Чизиқли акс эттиришлар

E вектор фазони F вектор фазога бирор $u: E \to F$ акс эттириши берилган бўлсин.

Таъриф. Агар ҳар қандай x, $y \in E$ ва α, $\beta \in K$ учун

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$$

муносабат ўринли бўлса, *u чизиқли акс эттириш* ёки *чизиқли оператор* дейилади. Хусусан, F фазо сифатида K майдон олинса, бундай акс эттириш *чизиқли форма* ёки *чизиқли функционал* дейилади.

Равшанки, ҳар қандай u чизиқли оператор E нинг бирор E_0 қисм фазосини F нинг қисм фазосига акс эттиради, яъни $u(E_0)$ тўплам F нинг қисм фазосидир. Агар F_0 тўплам F нинг қисм фазоси бўлса, у ҳолда F_0 нинг асли бўлган $u^{-1}(F_0)$ тўплам E нинг вектор қисм фазоси бўлади. Дарҳақиқат, агар x, $y \in u^{-1}(F_0)$, яъни $u(x)$, $u(y) \in F_0$ бўлса, у ҳолда F_0 вектор қисм фазо бўлгани учун $u(x) + u(y) \in F_0$. Аммо $u(x) + u(y) = u(x + y) \in F_0$, яъни $x + y \in u^{-1}(F_0)$.

Шунга ўхшаш $\lambda x \in u^{-1}(F_0)$ ҳам исботланади. Хусусан, агар $F_0 = \{\theta\}$ бўлса, $u^{-1}(\theta)$ қисм фазо чизиқли акс эттиришнинг *ядроси* дейилади ва $\ker u$ билан белгиланади.

Турли векторларни турли векторларга акслантирувчи яъни $x \neq y$ учун $u(x) \neq u(y)$ бўлган акс эттириш *мономорфизм* дейилади.

1- теорема. *$u: E \to F$ чизиқли акс эттириш мономорфизм бўлиши учун $\ker u = \{\theta\}$ бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурлиги. Агар $x \in \ker u$ бўлса, у ҳолда $u(x) = \theta = u(\theta)$. Иккинчи томондан, u мономорфизм бўлгани учун $x = \theta$, яъни $\ker u = \{\theta\}$.

Кифоялиги. $\ker u = \{\theta\}$ бўлсин. Агар $u(x) = u(y)$ муносабат бажарилса, яъни $u(x - y) = \theta$ бўлса, у ҳолда $x - y \in \ker u$. Демак, $x - y = \theta$, яъни $x = y$.*

Агар $u: E \to F$ чизиқли акс эттириш учун $u(E) = F$ бўлса, бу акс эттириш *эпиморфизм* дейилади. u чизиқли оператор бир вақтда мономорфизм ҳамда эпиморфизм бўлса, у ҳолда *изоморфизм* ёки *чизиқли изоморфизм* дейилади. Бу ҳолда E ва F фазолар *изоморф фазолар* дейилади ва бу муносабат $E\cong F$ кўринишда ёзилади.

Мисоллар.

1. $R^n(n>1)$ фазонинг $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ элементига u акс эттириш x_1 сонни мос қўйса, яъни $u(x)=x_1$ бўлса, у ҳолда $u: R^n\to R^1$ чизиқли оператордир (аниқроғи, чизиқли функционал). Равшанки, u — эпиморфизм. Аммо u мономорфизм эмас. Дарҳақиқат, бу оператор учун $\ker u=\{x=(0, x_2, x_3, \dots, x_n): x_i\in R, i=2, \dots, n\}\neq\{\theta\}$. Демак, 1-теоремага асосан у мономорфизм эмас.

2. Ихтиёрий V вектор фазонинг V_0 қисм фазосини олиб, $u: V_0\to V$ акс эттиришни $u(x)=x$ деб аниқласак, равшанки, чизиқли оператор ҳосил бўлади. Унинг ядроси θ элементдан иборат, яъни u — мономорфизм. Лекин $V_0\neq V$ ҳолда u эпиморфизм эмас.

3. $E=R^n$, $F=P^{n-1}(x)$ ($P^{n-1}(x)$ — даражаси $n-1$ дан катта бўлмаган кўпҳадлар фазоси) бўлса, $u: E\to F$ операторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$u((a_1\ a_2, \dots, a_n))=a_1+a_2x+\dots+a_nx^{n-1}.$$

u чизиқли оператордир. Дарҳақиқат, $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ихтиёрий векторлар бўлса, у ҳолда

$$u(a+b)=u(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)=a_1+b_1+(a_2+b_2)x+\dots+(a_n+b_n)x^{n-1}=(a_1+a_2x+\dots+a_nx^{n-1})+(b_1+b_2x+\dots+b_nx^{n-1})=u(a)+u(b).$$

Шунга ўхшаш

$$u(\lambda a)=\lambda u(a).$$

Бу ерда u эпиморфизмдир. Ҳақиқатан, $P^{n-1}(x)$ фазода ихтиёрий

$$f(x)=a_1+a_2x+\dots+a_nx^{n-1}$$

кўпҳадни олсак, у ушбу $(a_1, a_2, \dots, a_n)\in R^n$ векторнинг тасвири, яъни $u\ (a_1, a_2, \dots, a_n)=f(x)$.

Шу билан бирга u мономорфизмдир, чунки $u(a)=u((a_1, a_2, \dots, a_n))=\theta$, яъни $a_1+a_2x+\dots+a_nx^{n-1}$ айнан нолга тенг кўпҳад бўлса, алгебранинг асосий теоремасига биноан унинг ҳамма коэффициентлари нолга тенг: $a_1=a_2=\dots=a_n=0$. Демак, $\ker u=\{\theta\}$. Шундай қилиб, u изоморфизмдир.

Ҳар қандай икки чизиқли u ва v оператор учун уларнинг йиғиндиси деб аталадиган $u+v$ оператор ва u операторни λ сонга кўпайтмаси деб аталувчи λu оператор қуйидагича аниқланади:

$$(u+v)(x)=u(x)+v\ (x),\ (\lambda u)(x)=\lambda u(x).$$

Шундай қилиб, E ни F га акс эттирувчи операторлар тўплами бу амалларга нисбатан вектор фазо ҳосил қилади. Бу вектор фазо $Z\ (E,\ F)$ билан белгиланади. Агар $F=K$ бўлса, $Z(E,\ K)$ фазо E^* кўринишда ёзилади ва уни E га *алгебраик қўшма фазо* дейилади.

Энди u чизиқли акс эттиришни бутун E фазода эмас, балки унинг L вектор қисм фазосида аниқланган деб фараз қилайлик. Унда L тўплам u чизиқли акс эттиришнинг аниқланиш соҳаси дейилади ва $\mathrm{dom}\ u$ билан белгиланади. u чизиқли акс эттиришнинг $u(L)$ қийматлари соҳасини $\mathrm{Im}\,u$ билан белгилаймиз ва u чизиқли акс эттиришнинг *тасвири* ёки *акси* деймиз.

Энди биз u акс эттиришнинг графиги тушунчасини киритамиз. $E\times F$ кўпайтманинг $(x,\ u\ (x))$ (бу ерда x элемент $\mathrm{dom}\ u$ тўпламда ўзгаради) кўринишдаги нуқталар тўпламини u нинг *графиги* деймиз ва $\mathrm{gr}\ u$ билан белгилаймиз. Равшанки, агар u чизиқли акс эттириш бўлса, у ҳолда $\mathrm{gr}\ u$ тўплам $E\times F$ вектор фазонинг вектор қисм фазоси бўлади.

$E\times F$ кўпайтмада G тўплам берилган бўлсин. Ўз-ўзидан бундай савол туғилади: қандай шартлар бажарилса, G тўплам E нинг бирор қисм фазосида аниқланган ва қийматлари F да бўлган бирор u акс эттиришнинг графиги бўлади? Равшанки, агар G бирор u акс эттиришнинг графиги бўлса, у ҳолда қуйидаги шарт бажарилади: ҳар қандай $x\in E$ элемент учун кўпи билан битта $y\in F$ элемент мавжудки, $(x,\ y)\in G$.

Аксинча, $G\subset E\times F$ тўплам учун юқорида ёзилган шарт бажарилса, у ҳолда G бирор u акс эттиришнинг графиги бўлади. Бу акс эттиришнинг аниқланиш соҳаси бўлган $\mathrm{dom}\ u$ тўплам шундай $x\in E$ элементлардан иборатки, x учун камида битта (демак, шартга биноан фақат битта) $y\in F$ элемент мавжудки, $(x,\ y)\in G$. Бу ҳолда $y=u(x)$ бўлади.

Агар G га қўшимча шарт қўйиб, G тўпламни $E\times F$ нинг вектор қисм фазоси десак, у ҳолда ҳосил бўлган u акс эттириш чизиқли бўлади. Бу мулоҳазалардан қуйидаги теорема келиб чиқади.

2-теорема. *$E\times F$ вектор фазода берилган G тўплам E да аниқланган, қийматлари F га тегишли* *бирор u чизиқли акс эттиришнинг графиги бўлиши учун қуйидаги икки шарт зарур ва кифоядир:*

(1) *G тўплам* $E\times F$ *вектор фазонинг қисм фазоси;*

(2) *агар* (θ, y) *элемент G тўпламга тегишли бўлса, у ҳолда* $y=\theta$.

Энди бичизиқли акс эттириш ва бичизиқли форма тушунчаларига ўтамиз.

E, F, G вектор фазолар бўлиб, $u: E\times F\to G$ бирор акс эттириш бўлсин. Агар ихтиёрий ўзгармас $e\in E$ учун ва λ, $\mu\in K$, f_1, $f_2\in F$ учун

$$u(e, \lambda f_1+\mu f_2)=\lambda u(e, f_1)+\mu u(e, f_2)$$

ҳамда ўзгармас f учун ва λ, $\mu\in K$, e_1, $e_2\in E$ учун

$$u(\lambda e_1+\mu e_2, f)=\lambda u(e_1 f)+\mu u(e_2, f)$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда *u бичизиқли акс эттириш* дейилади. Бошқача қилиб айтганда, $u(e, f)$ акс эттириш бир ўзгарувчини тайинлаб олганда, иккинчи ўзгарувчига нисбатан чизиқли акс эттириш бўлади.

Шундай қилиб, $u: E\times F\to G$ бичизиқли акс эттириш бўлса, у ҳолда ихтиёрий $e_0\in E$ учун

$$u(e_0,.): F\to G$$

ва ихтиёрий $f_0\in F$ учун

$$u(\cdot, f_0): E\to G$$

чизиқли акс эттиришлар бўлади.

Хусусий $G=K$ ҳолда

$$u: E\times F\to K$$

бичизиқли акс эттириш *бичизиқли форма* ёки *бичизиқли функционал* дейилади.

Мисоллар. 1. $V=C[a, b]$ бўлсин. $u: V\times V\to V$ акс эттиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$$u(f,g)=fg, \qquad f,g\in C[a, b].$$

u бичизиқли акс эттириш, чунки

$$u(\lambda f_1+\mu f_2 g)=(\lambda f_1+\mu f_2)g=\lambda f_1 g+\mu f_2 g= \\ =\lambda u\ (f_1, g)+\mu u\ (f_2, g).$$

Шунга ўхшаш

$$u(f,\lambda g_1+\mu g_2)=\lambda u\ (f,g_1)+\mu u(f, g_2).$$

2. $V=R^n$ бўлсин ва $u: V\times V\rightarrow R^1$ акс эттириш қуйидагича аниқлансин:

$$u(a,\ b)=\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i,$$

бу ерда $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n),\ b=(b_1\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$

u бичизиқли эканлиги осонликча исботланади (текшириб кўринг).

МАШҚЛАР

1. Q рационал сонлар майдони бўлсин. Ихтиёрий r рационал соннинг α ҳақиқий сонга кўпайтмаси одатдагидек бўлсин. R фазо Q майдон устида вектор фазо бўладими?

2. Ихтиёрий комплекс вектор фазо ҳақиқий вектор фазо сифатида қаралиши мумкинлигини исботланг.

3. C комплекс сонлар майдонини ҳақиқий вектор фазо сифатида оламиз. Бу фазода 1 ва i элементлар чизиқли эркли эканлигини кўрсатинг. Бу фазонинг ўлчамини топинг.

4. n ўлчамли комплекс вектор фазони ҳақиқий вектор фазо сифатида қаралса, унинг ўлчами нимага тенг бўлади?

5. $C[a,\ b]$ вектор фазонинг ўлчами чексиз эканлигини исботланг.

6. R^n вектор фазода ушбу

$$V=\{x=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n): a_1=a_2\}$$

тўплам вектор қисм фазо эканлигини исботланг, унинг ўлчамини топинг.

7. $C[a,\ b]$ фазода $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$ функциялар тўпламини оламиз. Бу тўпламнинг чизиқли қобиғини топинг.

8. l_2 фазода $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементлар системасини қуйидагича аниқлаймиз:

$$x_n=(\underbrace{0,0,\ \ldots,\ 0}_{n-1},\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$$

Бу тўпламнинг чизиқли қобиғини топинг. У l_2 га тенгми?

9. Ушбу $|\lambda|+|\mu|\leqslant 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\lambda,\ \mu$ сонлар учун

$$\lambda A+\mu A\subset A$$

муносабатнинг бажарилиши A тўпламнинг абсолют қавариқ бўлиши учун зарур ва кифоядир. Исботланг.

10. Қуйидаги теоремани исботланг: V вектор фазода

абсолют қавариқ бўлган A тўплам ютувчи бўлиши учун, ушбу

$$V=\bigcup_{n=1}^{\infty} nA$$

муносабат зарур ва кифоядир.

11. R^n фазода биринчи координаталари нолга тенг бўлган векторлардан иборат V_0 қисм фазони оламиз. R^n/V_0 фактор фазони аниқланг.

12. Мос равишда n ва m ўлчамли бўлган R^n ва R^m фазоларни оламиз.

$$T=(a_{ij}),\ i=\overline{1,\ n};\ j=\overline{1,\ m}$$

n сатрли, m устунли матрица бўлсин. R^n фазонинг $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ элементига $Tx=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)\in R^m$ векторни қуйидагича мос қўямиз:

$$y_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i,\quad j=\overline{1,m}.$$

T нинг чизиқли оператор эканлигини исботланг. Аксинча, ихтиёрий $T: R^n\to R^m$ чизиқли оператор шундай кўринишда, яъни матрица ёрдамида ёзилишини кўрсатинг.

13. V вектор фазода ихтиёрий V_0 вектор қисм фазони олиб, қуйидаги изоморфизмни исботланг:

$$V/V_0\times V_0\cong V.$$

14. $u: E\to F$ чизиқли оператор бўлса,

$$E/\ker\ u\cong \operatorname{Im}\ u$$

изоморфизмни исботланг.

15. V вектор фазо ўзининг V_1 ва V_2 қисм фазоларининг тўғри йиғиндиси бўлсин, яъни $V=V_1\oplus V_2$. Қуйидаги изоморфизмни исботланг:

$$V_1\cong V/V_2$$

II боб

МЕТРИК ФАЗОЛАР

2.1-§. Метрик фазолар

Математик анализнинг асосий амалларидан бири лимитга ўтиш тушунчасидир. Бу амални тўғри чизиқ нуқталаридан иборат тўпламда жорий этишда биз икки нуқта орасидаги масофа тушунчасидан доимо фойдаланиб келган эдик. Аммо лимитга ўтиш масаласи кенгроқ қараладиган бўлса, асосий мазмун олинган тўплам элементларининг табиий тузилишида эмас, балки унинг икки элементи орасида масофа тушунчасини кирита билишдадир. Бу мулоҳаза француз математиги М. Фрешени 1906 йилда метрик фазо тушунчасига олиб келди.

Таъриф. Агар бирор X тўпламнинг ўзини ўзига тўғри (Декарт) кўпайтмаси $X\times X$ ни $R_+=[0,\infty]$ тўпламга акс эттирувчи $\rho(x, y)$ функция берилган бўлиб, у қуйидаги шартларни (метрика аксиомаларини) қаноатлантирса, X тўплам *метрик фазо* дейилади:

1°. $\rho(x, y)\geqslant 0$; $\rho(x, y)=0$ муносабат $x=y$ бўлгандагина бажарилади;

2°. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ (симметриклик аксиомаси);

3°. $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$ (учбурчак аксиомаси).

$\rho(x, y)$ функция *метрика* дейилади. Одатда, ρ метрикали X метрик фазо (X, ρ) билан белгиланади.

Мисоллар. 1. X ихтиёрий тўплам бўлсин; ушбу

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, \text{ агар } x\neq y \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } x=y \text{ бўлса,}\end{cases}$$

функция метрик фазо аксиомаларини қаноатлантиради.

Ҳаётдан бундай метрикага мисол келтирамиз. X тўплам сифатида бирор трамвай маршрутининг бекатлари тўпламини оламиз. $\rho(x, y)$ орқали x бекатдан y бекатгача бориш учун тўланадиган ҳақни белгилаймиз. У ҳолда

$$\rho(x, y)=\begin{cases}3 \text{ тийин, агар } x\neq y \text{ бўлса,}\\ 0 \text{ тийин, агар } x=y \text{ бўлса.}\end{cases}$$

2. n ўлчамли R^n вектор фазода икки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ вектор орасидаги масофа ушбу

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

кўринишда киритилса, у ҳолда R^n метрик фазони ташкил этади. 1^0 ва 2^0 аксиомаларнинг бажарилиши ўз-ўзидан равшан. Биз бу масофа учун учбурчак аксиомасини исботлаймиз. Бу аксиомадаги тенгсизлик

$$x=(x_1, x_2, \dots, x_n), y=(y_1, y_2, \dots, y_n),\ z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

элементлар учун қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}. \tag{1}$$

Ушбу белгилашларни киритамиз:

$x_i - z_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$, бундан $x_i - y_i = a_i + b_i$.

У ҳолда (1) тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка келтирилади:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}. \tag{2}$$

Ушбу

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-b_ia_j)^2$$

айниятдан қуйидаги Коши — Буняковский тенгсизлиги келиб чиқади:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

Бу тенгсизликдан:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2.$$

Бундан эса керак бўлган (2) тенгсизлик, демак, (1) тенгсизлик келиб чиқади.

3. l_2 ҳақиқий фазо. 1.2- §, 6- мисолдаги l_2 фазонинг элементлари

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий сонли кетма-кетликлар эди. Бу фазода масофа қуйидагича киритилади:

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}.$$

Метриканинг биринчи ва иккинчи аксиомаларининг ўринлилиги равшан, учбурчак аксиомасининг бажарилишини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, ихтиёрий n натурал сон ва $\{a_i\} \in l_2$, $\{b_i\} \in l_2$ учун

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right]^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

тенгсизлик ўринлидир [2- мисолдаги (2) тенгсизлик]. Бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги ҳадларнинг ҳар бири $n \to \infty$ да лимитга эга, чунки $\{a_i\} \in l_2$ ва $\{b_i\} \in l_2$. Демак, чап томондаги ифода камаймайдиган ва чегараланган бўлгани учун лимитга эга ва

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

Энди l_2 фазодан учта

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots),$$
$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$$

нуқталарни оламиз ва 2- мисолдаги каби қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$a_k = x_k - z_k, \quad b_k = z_k - y_k;$$

равшанки,

$$x_k - y_k = a_k + b_k.$$

Юқоридаги (3) тенгсизликдан фойдаланиб, қуйидаги тенгсизликни келтириб чиқарамиз:

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - z_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

4. m фазо. Бу фазо ҳамма чегараланган ҳақиқий сонли кетма-кетликлардан иборат эди. Агар унинг иккита $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ нуқтаси учун масофа

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i|$$

тенглик билан аниқланса, m фазо метрик фазога айланади. Дарҳақиқат, учбурчак аксиомаси қуйидагича текширилади:

$$|a_i - c_i| \leqslant |a_i - b_i| + |b_i - c_i| \leqslant \sup_i |a_i - b_i| +$$

$$+ \sup_i |b_i - c_i| = \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

бу ерда $z = (c_1, c_2, \ldots)$. Бундан

$$\sup_i |a_i - c_i| = \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Қолган аксиомаларнинг ўринлилиги равшан.

5. X тўплам ҳамма яқинлашувчи сонли кетма-кетликлардан иборат бўлсин, яъни

$$X = \{x : x = (a_1, a_2, \ldots);\ \exists\ \lim a_n\}.$$

Равшанки, $X \subset m$, яъни X нинг ҳар бир элементи m учун ҳам элемент. Демак, X да m даги масофа киритилса, у ҳам метрик фазони ҳосил этади. Бу фазо c билан белгиланади.

6. s фазо. X элементлари ҳақиқий сонли кетма-кетликлардан иборат тўплам бўлсин, яъни

$$X = \{x : x = (a_1, a_2, \ldots)\}.$$

Бу тўпламда икки $x = (a_1, a_2, \ldots)$ ва $y = (b_1, b_2, \ldots)$ нуқта орасидаги масофани қуйидагича киритамиз:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}. \tag{4}$$

Учбурчак аксиомаси ушбу

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|} \tag{5}$$

тенгсизликдан келиб чиқади, шунинг учун (5) ни исбот этамиз. a ва b нинг ишоралари бир хил деб фараз қилайлик, масалан, $a>0$, $b>0$ бўлсин, у ҳолда

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}=\frac{a+b}{1+a+b}=\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<$$
$$<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}.$$

Энди a билан b нинг ишоралари турлича ва, масалан, $|a|\geqslant|b|$ бўлсин. У ҳолда $|a+b|\leqslant|a|$.

Энди $f(x)=\frac{x}{1+x}(x\neq-1)$ функцияни қарасак, у ўсувчи бўлади, чунки

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0.$$

Демак,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

Яна бир $z=(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ элементни олсак, (5) га мувофиқ,

$$\rho(x, z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|a_k-c_k|}{1+|a_k-c_k|}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|a_k-b_k+b_k-c_k|}{1+|a_k-b_k+b_k-c_k|}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|a_k-b_k|}{1+|a_k-b_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|b_k-c_k|}{1+|b_k-c_k|}=$$
$$=\rho(x, y)+\rho(y, z),$$

яъни учбурчак аксиомаси исботланади.

7. $C[a, b]$ фазо. $[a, b]$ оралиқда аниқланган узлуксиз ҳақиқий функциялар тўплами $C[a, b]$ да метрикани қуйидагича киритамиз:

$$\rho(x, y)=\max_{a<t<b}|x(t)-y(t)|.$$

Метрика аксиомаларининг бажарилишини кўрсатиш қийин эмас. Масалан, учбурчак аксиомасини исботлайлик. Ихтиёрий $t\in[a, b]$ нуқта ва $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функциялар учун ушбу муносабат бажарилади:

$$|x(t)-y(t)|=|[x(t)-z(t)]+[z(t)-y(t)]|\leqslant$$
$$\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\leqslant\max_{a<t<b}|x(t)-z(t)|+$$
$$+\max_{a<t<b}|z(t)-y(t)|=\rho(x, z)+\rho(z, y).$$

Бундан

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y).$$

8. X тўплам $[a, b]$ сегментда аниқланган ҳамма ўлчовли функциялардан иборат бўлсин. Агар икки функция фарқ қиладиган нуқталардан иборат тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса, бу функциялар тенг ҳисобланади.

Икки $x(t)$ ва $y(t)$ функция орасидаги масофани ушбу формула билан аниқлаймиз:

$$\rho(x, y) = \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt. \qquad (6)$$

Бу ҳол учун ҳам учбурчак аксиомасининг бажарилиши 6-мисолдаги каби исботланади; қолган икки аксиоманинг ўринлилиги равшан. Бу фазо $S[a, b]$ орқали белгиланади.

Шуни ҳам айтиш керакки, берилган тўпламда метрикани турлича киритиш мумкин.

Масалан, (X, ρ) метрик фазо бўлсин. X тўпламда қуйидаги функциялар ҳам метрикани аниқлайди:

а) $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$;

б) $\rho_2(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \rho(x, y) > 0 \\ 0, & \text{агар } \rho(x, y) = 0, \text{ бўлса} \end{cases}$

в) $\rho_3(x, y) = f(\rho(x, y))$, бу ерда $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — узлуксиз қавариқ ва $f(a) = 0 \iff a = 0$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий функция;

г) $\rho_4(x, y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y))$, бу ерда $\varphi: X \to X$ — биектив акслантириш.

2.2-§. Метрик фазода яқинлашиш тушунчаси

Таъриф. (X, ρ) метрик фазода бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $n \to \infty$ да $\rho(x_n, x) \to 0$ бўлса, бу кетма-кетлик X фазонинг x элементига *яқинлашувчи* дейилади ва $x_n \to x$ ёки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ орқали белгиланади.

Бу x нуқта $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимити* дейилади.

1-теорема. *Ҳар бир яқинлашувчи кетма-кетлик биргина лимитга эга.*

Исбот. Дарҳақиқат, $x_n \to x$ ва $x_n \to y$ бўлсин. У ҳолда учбурчак аксиомасига мувофиқ,

$$0 \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y).$$

Аммо бу тенгсизликнинг ўнг томони $n \to \infty$ да нолга интилади, демак, $\rho(x, y) = 0$, яъни $x = y$.

2-теорема. $\rho(x, y)$ *масофа* x *ва* y *элементлар-*

нинг узлуксиз функцияси, яъни агар $x_n \to x$ ва $y_n \to y$ бўлса, у ҳолда

$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y).$$

Исбот. Ихтиёрий тўртта $x, y, z, u \in X$ нуқта учун

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u) \qquad (1)$$

тенгсизлик ўринли. Ҳақиқатан ҳам, учбурчак аксиомасидан фойдаланиб,

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) < \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y) \qquad (2)$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин. Бундан

$$\rho(x, y) - \rho(z, u) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u).$$

Бу тенгсизликда x, y билан мос равишда z, u нинг ўринларини алмаштирилса,

$$\rho(z, u) - \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u) \qquad (3)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. (2) ва (3) дан (1) келиб чиқади. (1) дан (z ва u ни мос равишда x_n ва y_n билан алмаштирилса, теореманинг шартига кўра

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0.$$

Бундан

$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y).{}_*$$

Қуйидаги даъво ўз-ўзидан равшан.

3-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик x нуқтага яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг ихтиёрий $\{x_{n_k}\}$ қисм кетма-кетлиги ҳам шу нуқтага яқинлашади.*

4-теорема. *$\{x_n\}$ кетма-кетлик x нуқтага яқинлашса, ва $x_0 \in X$ аниқ бир нуқта бўлса, у ҳолда $\{\rho(x_n, x_0)\}$ сонлар тўплами чегараланган бўлади.*

Исбот. $\{\rho(x_n, x)\}$ яқинлашувчи сонли кетма-кетлик бўлганлиги учун у чегараланган бўлади; унинг юқори чегарасини M билан белгиласак, у ҳолда учбурчак аксиомасига кўра

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_0) \leqslant M + \rho(x, x_0) = M_{1*}$$

Энди баъзи метрик фазоларда яқинлашиш тушунчасининг маъносини кўриб чиқамиз.

1. 1-мисолдаги фазодан олинган бирор кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун бирор номердан бошлаб бу кетма-кетликнинг ҳамма элементлари бир-бирига тенг бўлиши керак.

2. R^n фазодан олинган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x элементга яқинлашиши учун x_n вектор координаталарининг мос равишда x вектор координаталарига яқинлашиши зарур ва кифоя. Дарҳақиқат, агар R^n да $\rho(x_k, x) = \left(\sum_{l=1}^{n} (a_i^{(k)} - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \, (k \to \infty)$ бўлса, у ҳолда $a_i^{(k)} \to a_i$, $i = 1,2 \, \ldots, n \, (k \to \infty)$ ва, аксинча.

3. $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $C[a, b]$ фазонинг элементларидан тузилган ва $x_n(t) \to x(t) \in C[a, b]$ бўлсин, яъни

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x(t)| \to 0, \; n \to \infty.$$

Бундан, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 = n_0(\varepsilon)$ натурал сон мавжудки, $t \in [a, b]$ бўлганда

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Демак, $t \in [a, b]$ нинг ҳамма қийматлари учун $n > n_0$ бўлганда

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Бу эса $\{x_n(t)\}$ кетма-кетликнинг $x(t)$ га текис яқинлашишининг худди ўзи. Равшанки, аксинча, $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $[a, b]$ сегментда $x(t)$ га текис яқинлашса, у ҳолда $\rho(x_n, x) \to 0$. Демак, $C[a, b]$ фазода метрика маъносида яқинлашиш маълум текис яқинлашиш тушунчаси билан устма-уст тушади.

4. $L_p[a, b]$ фазода ([ҲЎФН], VIII боб) яқинлашишни *p-даражали ўрта маънода яқинлашиш дейилади,* яъни

$$\rho(x_n, x) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} dt \to 0 (n \to \infty), \; p > 1$$

$p = 2$ бўлганда *квадратик ўрта маънода яқинлашиш* деб гапирилади.

5. $\{x_k\}$ кетма-кетлик m фазонинг элементларидан тузилган ва $x_k \to x \in m (k \to \infty)$ бўлсин, яъни $\rho(x_k, x) = \sup |a_i^{(k)} - a_i| \to 0$, бу ерда $x_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)} \ldots)$, $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Демак, ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай $n_0=n_0(\varepsilon)$ натурал сон мавжудки; $k>n_0$ бўлганда

$$\rho(x_k, x)=\sup_i |a_i^{(k)}-a_i|<\varepsilon.$$

Бундан, i нинг ҳамма қийматлари учун $k>n_0$ бўлганда

$$|a_i^{(k)}-a_i|<\varepsilon.$$

Аксинча, $k>n_0$ бўлганда i нинг ҳамма қийматлари учун

$$|a_i^{(k)}-a_i|<\varepsilon$$

бўлса, у ҳолда равшанки, $k\to\infty$ да $\rho(x_k, x)\to 0$. Демак, m фазода метрика маъносида яқинлашиш координаталар бўйича текис яқинлашишни беради.

6. s фазода метрика маъносида яқинлашиш координаталар бўйича яқинлашишни беради (умуман айтганда, текис эмас!) Дарҳақиқат, $x_k=(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots)$, $x=(a_1, a_2, \ldots)$ ва $x_k\to x (k\to\infty)$ бўлсин. У ҳолда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|a_i^{(k)}-a_i|}{1+|a_i^{(k)}-a_i|}<\varepsilon,\quad k>n_0(\varepsilon).$$

Бундан ҳар қандай i учун ҳам $k>n_0(\varepsilon)$ бўлганда

$$\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|a_i^{(k)}-a_i|}{1+|a_i^{(k)}-a_i|}<\varepsilon.$$

Лекин бу тенгсизликнинг чап томонида i ни тайинлаб қўйиб, k бўйича лимитга ўтилса, қуйидаги муносабат ҳосил бўлади:

$$|a_i^{(k)}-a_i|\to 0,\quad k\to\infty.$$

Аксинча, i нинг ҳар бир қиймати учун $k\to\infty$ да $|a_i^{(k)}-a_i|\to 0$ бўлсин. $\varepsilon>0$ ни ихтиёрий қилиб олиб, k натурал сонни шундай танлаб оламизки,

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$$

бўлсин. У ҳолда

$$\rho(x_n, x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|a_i^{(n)}-a_i|}{1+|a_i^{(n)}-a_i|}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|a_i^{(n)}-a_i|}{1+|a_i^{(n)}-a_i|}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\times$$

$$\times\frac{|a_i^{(n)}-a_i|}{1+|a_i^{(n)}-a_i|}<\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|a_i^{(n)}-a_i|}{1+|a_i^{(n)}-a_i|}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ўнг томондаги йигиндида ҳадларнинг сони чекли бўлганлиги учун k ни тайинлаб қўйиб, $n_0=n_0(\varepsilon)$ ни шу қадар катта қилиб оламизки, $n>n_0$ бўлганда

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|a_i^{(n)}-a_i|}{1+|a_i^{(n)}-a_i|}<\frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилсин. Натижада $n>n_0$ бўлганда

$$\rho(x_n, x)<\varepsilon.$$

2.3-§. Метрик фазоларда узлуксиз акс эттиришлар ва функционаллар

Математик анализда функцияларнинг узлуксизлигидан кенг фойдаланилади. Энди биз узлуксизлик тушунчасини ихтиёрий метрик фазоларнинг акс эттиришлари учун киритамиз.

Таъриф. X, Y метрик фазолар бўлиб, X нинг D қисм тўпламини Y га акс эттирувчи T оператор берилган бўлсин.

Агар D тўпламдаги x_0 нуқтага яқинлашувчи бўлган ихтиёрий $\{x_n\}\subset D$ кетма-кетлик учун ушбу

$$Tx_n\to Tx_0$$

муносабат бажарилса, у ҳолда T оператор x_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади.

Агар T ўзининг аниқланиш соҳасининг ҳар бир нуқтасида *узлуксиз* бўлса, у ҳолда *T узлуксиз оператор* дейилади.

Биз T акс эттиришнинг узлуксизлик таърифини кетма-кетликлар тилида бердик. Бу таърифни „$\varepsilon-\delta$“ тилида ҳам бериш мумкин. Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ мавжуд бўлсаки, $\rho_1(x, x_0)<\delta$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий x учун

$$\rho_2(Tx, Tx_0)<\varepsilon$$

муносабат бажарилса, T оператор x_0 *нуқтада узлуксиз* дейилади.

Бу икки таъриф тенг кучли эканлиги математик анализда функциялар учун исботланишига ўхшаш кўрсатилади.

Таъриф. Хусусий $Y=R^1$ ҳолда узлуксиз оператор *узлуксиз функционал* дейилади.

Мисоллар. 1 Узлуксиз акс эттиришнинг муҳим хусусий ҳоли бўлган изометрия тушунчасини киритамиз.

(X, ρ_1), (Y, ρ_2) метрик фазолар бўлиб, X ни Y нинг устига акслантирувчи ўзаро бир қийматли φ акс эттириш берилган бўлсин. Агар ушбу

$$\rho_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = \rho_1(x_1, x_2)$$

муносабат X фазонинг ихтиёрий x_1, x_2 элементлари учун бажарилса, φ *изометрия* дейилади.

Бевосита кўриниб турибдики, агар φ изометрия бўлса, у ҳолда φ ҳам, φ^{-1} ҳам узлуксиз бўлади.

2. X фазода ρ_1 ва ρ_2 метрикалар берилган бўлсин. Агар шундай α, β мусбат сонлар топилсаки, ушбу

$$\alpha\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \beta\rho_1(x, y)$$

муносабат ҳамма $x, y \in X$ элементлар учун ўринли бўлса, ρ_1 ва ρ_2 *эквивалент метрикалар* дейилади.

Энди ρ_1, ρ_2 эквивалент метрикалар бўлсин. (X, ρ_1) метрик фазони (X, ρ_2) метрик фазога қуйидагича акс эттирамиз:

$$Tx = x.$$

Равшанки, T ўзаро бир қийматли акс эттириш. Эквивалентлик таърифига асосан

$$\rho_2(Tx, Ty) \leqslant \beta\rho_1(x, y),$$

демак, T—узлуксиз акс эттириш. Ушбу

$$\alpha\rho_1(\overset{-1}{T}x, \overset{-1}{T}y) \leqslant \rho_2(x, y)$$

тенгсизликдан T^{-1} акс эттиришнинг узлуксизлиги келиб чиқади.

Агар ρ_1 ва ρ_2 метрикалар ҳар хил бўлса, T акс эттириш изометрия бўлмайди.

3. Агар X 2.1-§ нинг 1-мисолидаги метрик фазо бўлса, у ҳолда X ни ихтиёрий Y метрик фазога акс эттирувчи ихтиёрий T оператор узлуксиз бўлади. Бу хосса шу метрик фазодаги яқинлашиш маъносидан бевосита келиб чиқади.

4. l_2 фазони R^1 фазога қуйидагича акс эттирамиз: $x = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементга $f(x) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2}$ сонни мос қўямиз. Бу акс эттириш (функционал) l_2 фазонинг метрикасига нисбатан узлуксиз. Дарҳақиқат, агар $x = (a_1, a_2, \ldots)$,

$y = (b_1, b_2, \dots)$ бўлса, у ҳолда 2.1-§ даги (2) тенгсизликка кўра

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2} = \rho(x, y).$$

Бу муносабатдан f нинг узлуксизлиги кўриниб турибди.

Аммо l_2 фазода s фазонинг метрикасини кўрсак, f узлуксиз бўлмайди. Ҳақиқатан, s фазодаги метрика бўйича яқинлашиш маъносига асосан (2.2-§), ушбу

$$x_n = (\underbrace{0, 0, \dots,}_{} 1, 0, \dots)$$

кетма-кетлик нолга яқинлашувчи бўлади. Аммо $f(x_n) = 1$ нолга яқинлашмайди, демак, шу метрикада f узлуклидир.

2.4-§. Метрик фазода очиқ ва ёпиқ тўпламлар

Энди (X, ρ) метрик фазода баъзи бир геометрик тушунчалар киритамиз. Бирор $x_0 \in X$ нуқта ва $r > 0$ сон берилган бўлсин. Ушбу

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$$

тўплам X фазодаги *очиқ шар* ва

$$\overline{S}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\}$$

тўплам *ёпиқ шар* дейилади. x_0 нуқта шарнинг *маркази*, r сон шарнинг *радиуси* дейилади. Ушбу $\{x \in X : \rho(x, x_0) = r\}$ тўплам маркази x_0 нуқтада, радиуси r бўлган *сфера* дейилади. $S(x_0, \varepsilon)$ очиқ шар x_0 нуқтанинг атрофи (аниқроғи, ε-*атрофи*) дейилади.

(X, ρ) метрик фазодаги M тўплам бирор шар ичида жойлашган бўлса, бу тўплам *чегараланган* дейилади.

Таъриф. (X, ρ) метрик фазода бирор M тўплам берилган бўлсин. Агар $x_0 \in X$ нуқтанинг ихтиёрий атрофида M тўпламнинг камида битта элементи мавжуд бўлса, яъни ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун

$$S(x_0, \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$$

ўринли бўлса, x_0 нуқта M нинг *уриниш нуқтаси* дейилади. Бу тушунчага яқин бўлган лимит нуқта тушунчасини киритамиз.

Таъриф. Агар $x_0 \in X$ нуқтанинг ихтиёрий атрофида M тўпламнинг x_0 дан фарқли элементи мавжуд бўлса, x_0 нуқта M нинг *лимит нуқтаси* дейилади.

Таърифлардан бевосита кўриниб турибдики, ихтиёрий лимит нуқта уриниш нуқтаси ҳам бўлади. Аммо уриниш нуқтаси лимит нуқта бўлиши шарт эмас. Масалан, ҳақиқий сонлар (R, ρ), $\rho(a, b) = |a - b|$ метрик фазосида (0,1) оралиқ ва „2“ нуқтадан ҳосил бўлган тўплам учун „2“ нуқта уриниш нуқтаси, аммо лимит нуқта эмас. Шу тўплам учун $[0, 1]$ сегментнинг ҳар бир нуқтаси лимит нуқтадир.

M тўпламнинг уриниш нуқталари тўплами $\overline{M}$ билан белгиланади ва M нинг *ёпилмаси* дейилади.

1-теорема. *Ихтиёрий M, M_1 ва M_2 тўпламлар учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир:*

1) $M \subset \overline{M}$,
2) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$,
3) агар $M_1 \subset M_2$ бўлса, у ҳолда $\overline{M_1} \subset \overline{M_2}$
4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$.

Исбот. Биринчи хосса равшан. Иккинчи хоссани исботлаймиз. Биринчи хоссага асосан $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Шунинг учун $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ муносабатни исботлаш етарлидир. $x \in \overline{\overline{M}}$ бўлсин. У ҳолда бу нуқтанинг ихтиёрий ε-атрофида $\overline{M}$ га тегишли x_1 нуқта топилади; сўнг x_1 нуқтанинг $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1) > 0$ бўлган ε_1-атрофини оламиз. Агар $z \in S(x_1, \varepsilon_1)$ бўлса, яъни $\rho(z, x_1) < \varepsilon_1$ бажарилса, у ҳолда

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, x_1) + \rho(x_1, x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

яъни

$$z \in S(x, \varepsilon).$$

Шундай қилиб, $S(x_1, \varepsilon_1) \subset S(x, \varepsilon)$. Аммо $x_1 \in \overline{M}$, демак, x_1 нинг ε_1-атрофида M га тегишли x_2 нуқта мавжуд. Шунинг учун $x_2 \in S(x_1, \varepsilon_1) \subset S(x, \varepsilon)$. Лекин $S(x, \varepsilon)$ шар x нуқтанинг ихтиёрий ε-атрофи бўлгани учун $x \in \overline{M}$. Учинчи хосса ўз-ўзидан равшан. Тўртинчи хоссани исботлаймиз. $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ бўлсин, у ҳолда x нуқтанинг ихтиёрий $S(x, \varepsilon)$ атрофида $M_1 \cup M_2$ га тегишли x_1 элемент мавжуд. Агар $x \overline{\in} M_1$ ва $x \overline{\in} \overline{M_2}$ бўлса, у ҳолда x нинг шундай $S(x, \varepsilon_1)$ ва $S(x, \varepsilon_2)$ атрофлари мавжудки, бу атрофлар мос равишда M_1 ва M_2 тўпламлар билан кесишмайди, яъни $S(x, \varepsilon_1) \cap M_1 = \varnothing$ ва $S(x, \varepsilon_2) \cap M_2 = \varnothing$. Энди ε сонни $\varepsilon = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ қилиб олсак, у ҳолда x нуқтанинг $S(x, \varepsilon)$ атрофи $M_1 \cup M_2$ тўплам билан кесишмайдиган бўлиб, зиддият ҳосил бўлади. Демак, бундан келиб чиқадики, x нуқта $\overline{M_1}$ ёки $\overline{M_2}$ тўпламлардан камида биттасига тегишли, яъни

$$\overline{M_1 \cup M_2} \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}.$$

Тескари муносабатнинг ўринлилиги $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ ва $M_2 \subset \subset M_1 \cup M_2$ муносабатлардан ҳамда учинчи хоссадан келиб чиқади.*

Таъриф. (X, ρ) метрик фазода M тўплам ўз ёпилмасига тенг (яъни $M = \overline{M}$) бўлса, у ҳолда M *ёпиқ тўплам* дейилади.

1-теоремадаги учинчи хоссага биноан M тўпламнинг ёпилмаси $\overline{M}$ ни ўз ичига олувчи энг кичик ёпиқ тўпламдир.

Мисоллар.

1. (R, ρ), $\rho(a, b) = |a - b|$ тўғри чизиқда ихтиёрий $[a, b]$ сегмент ёпиқ тўпламдир.

2. (X, ρ) метрик фазода ихтиёрий $\overline{S}(x_0, r)$ ёпиқ шар ёпиқ тўпламдир. Хусусан, $C[a, b]$ метрик фазода $|f(t)| \leqslant \leqslant K (t \in [a, b])$ тенгсизликни қаноатлантирувчи функциялар тўплами ёпиқдир.

3. $C[a, b]$ фазода $|f(t)| < K (t \in [a, b])$ тенгсизликни қаноатлантирувчи функциялар тўплами (очиқ шар) ёпиқ эмас. Унинг ёпилмаси $\{f \in C[a, b] : |f(t)| \leqslant K, \ t \in [a, b]\}$ тўпламдир.

4. Ихтиёрий (X, ρ) метрик фазода X ва $\varnothing$ тўпламлар ёпиқдир.

5. Метрик фазода ҳар қандай чекли тўплам ёпиқдир.

2-теорема. *а) сони чекли ёпиқ тўпламларнинг йиғиндиси яна ёпиқдир;*

б) сони ихтиёрий бўлган ёпиқ тўпламларнинг кўпайтмаси ёпиқдир.

Исбот. а) бу хоссани икки ёпиқ тўплам учун исбот қилиниши кифоя F_1, F_2 ёпиқ тўпламлар бўлсин, яъни

$$\overline{F_1} = F_1, \quad \overline{F_2} = F_2,$$

у ҳолда 1-теоремадаги 4) хоссага биноан

$$\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2.$$

Таърифга асосан $F_1 \cup F_2$ ёпиқдир.

б) $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ёпиқ тўпламлар системаси ва x улар кўпайтмасининг, яъни $F=\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ тўпламнинг уриниш нуқтаси бўлсин. У ҳолда x нинг ихтиёрий ε-атрофида F нинг камида битта, масалан, x_1 элементи мавжуд ва, демак, α нинг ҳамма қийматлари учун $x_1\in F_\alpha$. Демак, ихтиёрий α учун $x\in\overline{F}_\alpha=F_\alpha$, яъни $x\in\bigcap F_\alpha=F$. Демак, F ёпиқ тўплам.*

Таъриф. Агар x нуқтанинг M тўпламда бутунлай жойлашган атрофи мавжуд бўлса, x нуқта M тўпламнинг *ички нуқтаси* дейилади. Агар M тўпламнинг ҳамма нуқталари ички бўлса, у *очиқ тўплам* дейилади. Бўш тўплам ҳам очиқ деб ҳисобланади.

Мисоллар.

6. R тўғри чизиқда (a, b) интервал очиқ тўпламдир. Ҳақиқатан $x\in(a, b)$ бўлса, у ҳолда $\varepsilon=\min(x-a, b-x)$ учун

$$S(x, \varepsilon)\subset(a, b).$$

7. (X, ρ) метрик фазода ихтиёрий $S(x, r)$ очиқ шар очиқ тўпламдир. Ҳақиқатан, агар $y\in S(x, r)$ бўлса, у ҳолда $\varepsilon=r-\rho(x, y)$ учун $S(y, \varepsilon)\subset S(x, r)$. Хусусан, 3-мисолдаги $\{f\in C[a, b] : |f(t)|<K, t\in[a, b]\}$ тўплам $C[a, b]$ метрик фазода очиқ тўпламдир.

3-теорема. $G(\subset X)$ *тўпламнинг очиқ бўлиши учун унинг тўлдирувчиси* $F=X\setminus G$ *тўпламнинг ёпиқ бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. а) зарурлиги. G очиқ бўлсин, у ҳолда ҳар бир $x\in G$ нуқта бутунлай G да жойлашган атрофга эга. Демак, бу атроф F билан кесишмайди. Бундан, равшанки, F нинг бирорта ҳам уриниш нуқтаси G га кирмайди, яъни F ёпиқ тўплам.

б) кифоялиги. $F=X\setminus G$ ёпиқ бўлсин, у ҳолда G дан олинган ихтиёрий нуқта F билан кесишмайдиган, демак G да бутунлай жойлашган атрофга эга, яъни G — очиқ тўплам.*

Натижа. $\varnothing$ бўш тўплам ва X фазо ҳам очиқ, ҳам ёпиқ тўпламлардир.

Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, метрик фазода очиқ ҳам бўлмаган, ёпиқ ҳам бўлмаган тўпламлар мавжуд бўлиши мумкин. Масалан, $(R^1, \rho)(\rho(x,y)=|x-y|)$ ҳақиқий сонлар метрик фазосида $A=[a, b)$ тўпламни оламиз. Равшанки, $\overline{A}$ ёпиқ тўплам эмас, чунки $\overline{A}=[a, b]\neq A$. A тўплам очиқ ҳам эмас, Дарҳақиқат, a нуқтанинг ҳеч қандай

ε-атрофи $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ A тўпламда бутунлай жойлаша олмайди. Демак, A тўплам очиқ ҳам эмас, ёпиқ ҳам эмас.

4-теорема. *Сони ихтиёрий бўлган очиқ тўпламларнинг йиғиндиси ва сони чекли бўлган очиқ тўпламларнинг кўпайтмаси очиқ тўпламлар бўлади.*

Теореманинг исботи қуйидаги

$$\bigcap_{\alpha}(X\setminus G_\alpha)=X\setminus\left(\bigcup_{\alpha}G_\alpha\right),\quad \bigcup_{i=1}^{n}(X\setminus G_i)=X\setminus\left(\bigcap_{i=1}^{n}G_i\right)$$

тенгликларни назарда тутсак, 2- ва 3-теоремалардан осонликча келиб чиқади.*

2.5-§. Сепарабел метрик фазолар

Таъриф. $(X,\ \rho)$ метрик фазода M, N тўпламлар учун $\overline{M}\supset N$ бўлса, M тўплам N тўпламда *зич* дейилади. Хусусан, M тўплам X да зич бўлса, у ҳолда M тўплам *ҳамма ерда зич тўплам* дейилади.

Таъриф. Агар M тўплам ҳеч бир шарда зич бўлмаса, у ҳолда M тўплам *ҳеч қаерда зич эмас* дейилади. Яъни агар ихтиёрий S шарнинг ичида M тўплам билан кесишмайдиган S_1 шар топилса, M тўплам ҳеч қаерда зич эмас.

Таъриф. Агар $(X,\ \rho)$ метрик фазонинг ҳамма ерида зич бўлган саноқли ёки чекли тўплам мавжуд бўлса, у ҳолда X *сепарабел фазо* дейилади.

Сепарабеллик хоссаси нуқтаи назаридан 2.1-§ даги мисолларимизга қайтамиз.

Масалан, 2-мисолдаги R^n сепарабел фазодир. Дарҳақиқат, R^n фазода координаталари рационал сонлардан иборат бўлган нуқталар тўплами саноқли бўлиб, R^n нинг ҳамма ерида зич.

$C[a,\ b]$ фазо ҳам сепарабелдир. Дарҳақиқат коэффициентлари рационал сонлардан иборат ҳамма кўпҳадлар тўплами P_r саноқли бўлиб, у ҳамма кўпҳадлар тўплами P да зич, P эса математик анализдаги маълум Вейерштрасс теоремасига асосан $C[a,\ b]$ нинг ҳамма ерида зич бўлади. Демак, $\overline{P_r}=C[a,\ b]$.

m фазо сепарабел эмас. Бу фазода қуйидаги тўпламни оламиз:

$$Q=\{x : x=(a_1,\ a_2\ \ldots,\ a_n,\ \ldots),\ a_i=0 \text{ ёки } 1\}.$$

Равшанки, Q континуум қувватга эга ([ҲЎФН], I боб).

Агар Q дан иккита турли x ва y элемент олинса, улар орасидаги масофа

$$\rho(x, y) = \sup_{i} |a_i - b_i| = 1.$$

Бундан фойдаланиб, m сепарабел эмаслигини исбот этамиз. Бунинг учун тескарисини, яъни m нинг ҳамма ерида зич бўлган саноқли A тўплам мавжуд деб фараз қиламиз. A нинг ҳар бир элементи атрофида радиуси $\varepsilon = \frac{1}{3}$ га тенг шарни оламиз. У ҳолда бу шарларнинг йиғиндисида m фазонинг ҳамма элементлари жойлашган бўлади. Аммо шарларнинг сони кўпи билан саноқли бўлгани учун уларнинг ҳеч бўлмаганда биттасининг ичида Q нинг камида иккита турли x, y элементи жойлашган бўлади. Шу икки x ва y элемент кирган шарнинг маркази x_0 нуқтада бўлсин. Бундан ушбу

$$1 = \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

зиддият келиб чиқади. Бу зиддият эса қилган фаразимиз натижасида ҳосил бўлди. Демак, m сепарабел фазо эмас.

1-теорема. *(X, ρ) сепарабел метрик фазонинг ихтиёрий X_0 қисм тўплами ҳам ρ метрикага нисбатан сепарабел метрик фазодир.*

Исбот. Ушбу

$$\xi_1, \xi_2, \ \ldots, \ \xi_n, \ \ldots \qquad (1)$$

саноқли тўплам X фазонинг ҳамма ерида зич бўлсин. Ушбу белгилаш киритамиз;

$$a_n = \inf_{x \in X_0} \rho(\xi_n, x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Ихтиёрий n, m натурал сонлар учун inf нинг хоссаларига асосан шундай $x_{n,m} \in X_0$ нуқта топиладики, $\rho(\xi_n, x_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m}$. Бирор $\varepsilon > 0$ сонни олайлик ва m сон $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$ шартни қаноатлантирсин. (1) тўплам X нинг ҳамма ерида зич бўлгани сабабли ихтиёрий $x_0 \in X_0$ учун шундай n топиладики,

$$\rho(\xi_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Демак,

$$\rho(\xi_n, x_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m} \leqslant \rho(\xi_n, x_0) + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

У ҳолда

$$\rho(x_0, x_{n\bullet m}) \leqslant \rho(x_0, \xi_n) + \rho(\xi_n, x_{n.m}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Шундай қилиб, ихтиёрий $x_0 \in X_0$ нуқтанинг ихтиёрий ε атрофида $x_{n,\ m} \in X_0$ кўринишдаги нуқта мавжуд, яъни $\{x_{n,\ m}\}_{n,m} \in N$ тўплам X_0 фазонинг ҳамма ерида зич ва, равшанки, саноқли тўплам. Демак, X_0 сепарабел метрик фазодир*.

2.6- §. Тўла метрик фазолар

Математик анализнинг умумий курсидан маълумки, сонли кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун Коши шартини қаноатлантириши зарур ва кифоя. Бу хосса математик анализда катта аҳамиятга эга бўлиб, ҳақиқий сонлар тўпламининг „тўлалигини“ кўрсатади.

Энди ҳақиқий сонлар тўпламининг бу хоссаси ҳар қандай метрик фазо учун ҳам ўринлими деган савол қўйиш мумкин. Масалани аниқроқ ифода қилиш учун қуйидаги таърифни киритамиз.

Таъриф. Агар (X, ρ) метрик фазодан олинган $\{x_n\}$ кетма-кетлик Коши шартини қаноатлантирса, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай N натурал сон мавжуд бўлиб, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ тенгсизлик n ва m сонларнинг N дан катта бўлган ҳамма қийматлари учун бажарилса, у ҳолда $\{x_n\}$ *фундаментал кетма-кетлик* дейилади.

Агар X фазода ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у фазо *тўла* дейилади.

Равшанки, ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик фундаментал. Юқоридаги саволни энди қуйидагича ифода қилиш мумкин: ҳар қандай метрик фазо тўлами? Бу саволга бериладиган жавоб ҳар доим ижобий эмас.

Мисоллар.

1. Ҳамма рационал сонлардан иборат X тўпламда масофа $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ формула билан аниқлансин. Равшанки, X метрик фазо; аммо бу фазо тўла эмас, чунки, масалан, $\left\{r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ рационал сонлар кетма-кетлиги фундаментал бўлиб, шу X фазода яқинлашувчи эмас, яъни у ҳеч қандай рационал сонга яқинлашмайди.

2. $[a, b]$ сегментда аниқланган ҳамма узлуксиз ҳақиқий функциялардан иборат тўпламни олиб, унда масофани қуйидагича аниқлаймиз:

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

Бу метрик фазони $C^2[a, b]$ билан белгилаймиз. Коши — Буняковский тенгсизлигидан фойдаланиб, бу масофа учун учбурчак аксиомасининг ўринлилигини кўрсатиш қийин эмас. Метриканинг қолган икки аксиомаси ўз-ўзидан равшан. Демак, бу метрик фазо. Бу фазо тўла эмас, чунки бу метрикада узлуксиз функциялар кетма-кетлиги яна узлуксиз функцияга яқинлашиши шарт эмас. Конкрет мисол келтирамиз. Масалан,

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$$

кетма-кетлик $C^2[0, 2]$ фазода фундаментал. Ҳақиқатан, ихтиёрий n, m натурал сонлар учун

$$\rho^2(\varphi_n, \varphi_m) = \int_0^2 [\varphi_n(t) - \varphi_m(t)]^2 dt = \int_0^1 (t^n - t^m)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{m+n+1} + \frac{1}{2m+1} \to 0.$$

Аммо бу кетма-кетлик ҳеч қандай узлуксиз функцияга яқинлашмайди. Буни исботлаш учун қуйидаги узлукли функцияни қурамиз:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Ихтиёрий $\varphi \in C^2[0, 2]$ функция учун равшанки,

$$\rho(f, \varphi) = \left[\int_0^2 (f(t) - \varphi(t))^2 dt\right]^{1/2} > 0.$$

Демак,

$$0 < \rho(f, \varphi) \leqslant \rho(f, \varphi_n) + \rho(\varphi_n, \varphi).$$

Шу билан бирга

$$\rho(f, \varphi_n) = \left[\int_0^2 [f(t) - \varphi_n(t)]^2 dt\right]^{1/2} = \left[\int_0^1 t^{2n} dt\right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \to 0.$$

Шунинг учун $\rho(\varphi_n, \varphi)$ ҳеч қандай $\varphi \in C^2[0, 2]$ учун нолга интилмайди.

2. 1-§ да мисол сифатида келтирилган ҳамма метрик фазолар тўла. Уларнинг баъзиларининг тўлалигини қуйида кўрсатамиз.

3. $C[a, b]$ **фазонинг тўлалиги.** Бу фазода $\{x_n(t)\}$ фундаментал кетма-кетлик бўлсин, яъни

$$\rho(x_n, x_m) \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

2.2- § да $C[a, b]$ фазодаги яқинлашиш функцияларнинг текис яқинлашишига эквивалент эканлигини кўрсатган эдик.

Ҳар бир берилган ихтиёрий $t \in [a, b]$ нуқтада ушбу $\{x_n(t)\}$ сонли кетма-кетлик Коши шартини қаноатлантиргани учун бу кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади. Унинг лимитини $x_0(t)$ билан белгилаймиз. $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $x_0(t)$ функцияга текис яқинлашувчи бўлгани учун $x_0(t)$ функция узлуксиз бўлади. Натижада

$$\rho(x_n, x_0) \to 0, \quad x_0(t) \in C[a, b]$$

ва, демак, $C[a, b]$ фазо тўла.

4. l_2 **фазонинг тўлалиги.** Бу фазодан олинган $\{x_n\}$

$$\left(x_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}, \ldots), \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^{(n)})^2 < \infty\right)$$

кетма-кетлик фундаментал бўлсин. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай n_0 натурал сон мавжудки, улар учун

$$\rho^2(x_n, x_m) = \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^{(n)} - a_l^{(m)})^2 < \varepsilon, \quad n, m > n_0. \qquad (1)$$

Бундан, ҳар қандай k учун

$$(a_k^{(n)} - a_k^{(m)})^2 < \varepsilon, \quad n, m > n_0,$$

яъни ҳар бир k учун $\{a_k^{(n)}\}$ сонли кетма-кетлик яқинлашувчи. Бу кетма-кетликнинг лимитини a_k билан белгилаб, $x = (a_1, a_2, \ldots)$ элементни ҳосил қиламиз. Агар

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l^2 < +\infty \text{ ва}$$

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$$

муносабатларнинг ўринлилиги кўрсатилса, l_2 фазонинг тўлалиги исбот этилган бўлади.

(1) тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sum_{l=1}^{\infty} (a_l^{(n)} - a_l^{(m)})^2 = \sum_{l=1}^{p} (a_l^{(n)} - a_l^{(m)})^2 +$$

$$+\sum_{i=p+1}^{\infty}(a_i^{(n)}-a_i^{(m)})^2<\varepsilon,$$

бу ерда p — ихтиёрий натурал сон. Бундан ихтиёрий p учун:

$$\sum_{i=1}^{p}(a_i^{(n)}-a_i^{(m)})^2<\varepsilon,$$

ёки p билан m ни тайинлаб қўйиб, n бўйича лимитга ўтилса, ушбу

$$\sum_{i=1}^{p}(a_i-a_{\;i}^{(m)})^2\leqslant\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизлик ихтиёрий p учун ўринли; шунинг учун бунда p бўйича лимитга ўтиш мумкин, у ҳолда

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-a_i^{(m)})^2\leqslant\varepsilon. \qquad (2)$$

Бундан ва $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^{(m)})^2<\infty$ ҳамда $a_i^2\leqslant 2(a_i^{(m)})^2+2(a_i-$ $-a_i^{(m)})^2$, $(i=1, 2, \ldots)$ муносабатдан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<+\infty.$$

Демак, $x=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)\in l_2$. Сўнгра $\varepsilon>0$ ихтиёрий бўлганлиги учун (2) дан

$$\lim_{m\to\infty}\rho(x_m, x)=0.$$

5. m фазонинг тўлалиги. $\{x_n\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлсин. $x_n=(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots)\in m$ бўлганлиги туфайли шундай $\{M_n\}$ кетма-кетлик мавжудки, унинг учун $|a_i^{(n)}|<$ $<M_n$ $(i=1, 2, \ldots)$ ўринли ва ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай n_0 натурал сон мавжудки,

$$\rho(x_n, x_p)<\varepsilon, \qquad n, p>n_0$$

ёки

$$\sup_i|a_i^{(n)}-a_i^{(p)}|<\varepsilon; \quad n, p>n_0.$$

Бундан

$$|a_i^{(n)}-a_i^{(p)}|<\varepsilon, \qquad n, p>n_0. \qquad (3)$$

муносабатнинг i га нисбатан текис бажарилиши келиб чиқади. Демак, ихтиёрий i учун $\{a_i^{(n)}\}$ кетма-кетлик n

бўйича яқинлашувчи бўлади; унинг лимитини a_i билан белгилаб,

$$x = (a_1, a_2, \ldots)$$

элементни ҳосил қиламиз.

Энди ўшбу $x \in m$ ва $\rho(x_n, x) \to 0$ муносабатларни исботлаймиз. (3) да p га нисбатан лимитга ўтилса, ҳамма i лар учун ўринли бўлган

$$|a_i^{(n)} - a_i| \leqslant \varepsilon, \quad n > n_0 \tag{4}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан

$$|a_i| \leqslant |a_i^{(n_0+1)} - a_i| + |a_i^{(n_0+1)}| < \varepsilon + M_{n_0+1}$$

тенгсизликни ҳамма i'лар учун ҳосил қилиш мумкин, яъни $x = (a_1, a_2, \ldots) \in m$ муносабат келиб чиқади. (4) дан

$$\sup_i |a_i^{(n)} - a_i| \leqslant \varepsilon, \quad n > n_0$$

ёки $\rho(x_n, x) \leqslant \varepsilon$, $n \geqslant n_0$. ε ихтиёрий бўлганлиги учун бундан

$$\rho(x_n, x) \to 0 \text{ ёки } x_n \longrightarrow x \, (n \to \infty)$$

муносабат келиб чиқади. Демак, m — тўла фазо.

Энди метрик фазоларнинг тўлалигига оид баъзи хоссаларни келтирамиз.

1-теорема. (X, ρ) *тўла метрик фазода* $\{\overline{S}_n = \overline{S}_n(a_n, \varepsilon_n)\}$ *ёпиқ шарлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, булар учун қуйидаги шартлар бажарилсин:*

$$\overline{S}_{n+1} \subset \overline{S}_n (n = 1, 2, \ldots) \text{ ва } n \to \infty \text{ да } \varepsilon_n \to 0.$$

У ҳолда бу шарларнинг умумий қисми биргина нуқтадан иборат бўлади.

Исбот. $\overline{S}_i$ шарларнинг марказларидан иборат бўлган қуйидаги кетма-кетликни тузамиз:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{5}$$

Теорема шартига кўра $a_{n+p} \in \overline{S}_n$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Шунинг учун

$$\rho(a_{n+p}, a_n) \leqslant \varepsilon_n \text{ ёки } \rho(a_{n+p}, a_n) \to 0, \; n \to \infty.$$

Демак, (5) кетма-кетлик фундаментал. X тўла фазо бўлганлиги учун бу кетма-кетлик бирор $a \in X$ элементга яқинлашувчи бўлади.

Сўнгра, ихтиёрий $\overline{S}_m$ ёпиқ шарни оламиз (m — тайин натурал сон); у ҳолда $a\in\overline{S}_m$, чунки $\{a_m, a_{m+1}, \dots\}$ нуқталар кетма-кетлиги (5) нинг қисм кетма-кетлиги бўлгани учун a га яқинлашувчи, бу кетма-кетликнинг ҳар бир элементи $\overline{S}_m$ га киради ва S_m ёпиқ бўлганлиги учун

$$a\in\overline{S}_m,\quad m=1,\ 2,\ \dots .$$

Демак, $a\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\overline{S}_m$.

Энди $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\overline{S}_m$ га a нуқтадан бошқа яна бирор b элемент ҳам тегишли бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда, бир томондан, ҳар қандай n учун

$$0<\rho(a,\ b)\leqslant\rho(a,\ a_n)+\rho(a_n,\ b)\leqslant 2\varepsilon_n$$

муносабат ўринли, иккинчи томондан, $n\to\infty$ да $\varepsilon_n\to 0$ бўлгани учун $\rho(a,\ b)=0$, яъни $a=b$.*

2-теорема. *Агар $(X,\ \rho)$ метрик фазода 1-теореманинг шартларини қаноатлантирадиган ҳар қандай ёпиқ шарлар кетма-кетлиги бўш бўлмаган умумий қисмга эга бўлса, у ҳолда X фазо тўла бўлади.*

Исбот. $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетликни олиб, n_k натурал сонни шундай танлаб оламизки, ихтиёрий p натурал сон учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлсин:

Ушбу $\rho(x_{n_{k+p}},\ x_{n_k})<\frac{1}{2k}$.

$\overline{S}_k=\overline{S}\left(x_{n_k},\ \frac{1}{2k-1}\right)$ ёпиқ шарларни кўрамиз. Агар $x\in\overline{S}_{k+1}$ бўлса, у ҳолда

$$\rho(x,\ x_{n_k})\leqslant\rho(x,\ x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}},\ x_{n_k})<\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}=\frac{1}{2k-1},$$

яъни $x\in\overline{S}_k$. Демак, $\overline{S}_{k+1}\subset\overline{S}_k$. Теорема шартига кўра бу ёпиқ шарлар уларнинг ҳаммасига тегишли x_0 элементга эга. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x_0 га яқинлашиши кўрсатилса, иборамиз исбот этилган бўлади. $\{x_{n_k}\}$ қисм кетма-кетлик x_0 га яқинлашади, чунки

$$\rho(x_{n_k},\ x_0)\leqslant\frac{1}{2k-1}\to 0.$$

у ҳолда бутун $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам x_0 га яқинлашади, чунки ушбу

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

тенгсизликнинг ўнг томони n ва n_k етарли катта бўлганда исталганча кичик қилиниши мумкин.$_*$

Тўла метрик фазолар назариясида қуйидаги теорема катта аҳамиятга эга.

3-теорема. (Бэр теоремаси). (X, ρ) *тўла метрик фазони ҳадларининг сони саноқли ва ҳеч қаерда зич бўлмаган тўпламларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаб бўлмайди.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ ва M_n лар ҳеч қаерда зич бўлмаган тўпламлар бўлсин. S_0 радиуси 1 га тенг бўлган ихтиёрий ёпиқ шар бўлсин. M_1 ҳеч қаерда зич эмас, хусусан S_0 да ҳам зич бўлмагани учун радиуси $\frac{1}{2}$ дан кичик S_1 ёпиқ шар топиладики, $S_1 \subset S_0$ ва $S_1 \cap M_1 = \varnothing$. M_2 тўплам S_1 шарда зич бўлмагани учун S_1 нинг ичида шундай S_2 шар топиладики унинг радиуси $\frac{1}{3}$ дан кичик ва $S_2 \cap M_2 = \varnothing$ ва ҳоказо. Шу тарзда давом этиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\{S_n\}$ ёпиқ шарлар системасини ҳосил қиламиз:

1) $S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots,$

2) $S_n \cap M_n = \varnothing,$

3) S_n нинг радиуси $n \to \infty$ да нолга интилади.

1-теоремага биноан $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ га тегишли $x \in X$ нуқта мавжуддир. S_n ларнинг 2) хоссасига кўра $x \overline{\in} M_n$, $n = 1, 2, \ldots$, яъни $x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = X$. Бу зиддиятдан $X \neq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ келиб чиқади.$_*$

2.7-§. Тўлдирувчи фазо ҳақидаги теорема

Бу параграфда функционал анализдаги муҳим теоремалардан бири бўлган тўлдирувчи фазо ҳақидаги теоремани исботлаймиз.

Таъриф. Агар X метрик фазо учун шундай X^* метрик фазо мавжуд бўлсаки, X фазо X^* нинг ҳамма ерида зич бўлиб, X^* фазо тўла бўлса, у ҳолда X^* метрик фазо X фазонинг *тўлдирувчиси* дейилади.

Теорема. *Ихтиёрий X метрик фазо тўлдирувчига эга. Тўлдирувчи фазо X нинг элементларини ўз ўрнида қолдирувчи изометрия аниқлиги билан ягонадир, яъни ҳар қандай икки тўлдирувчи фазонинг бирини иккинчисига акс эттирувчи ва X фазонинг ҳар бир нуқтасини ўз ўрнида қолдирувчи изометрия доим мавжуддир.*

Исбот. Даставвал, агар тўлдирувчи фазо мавжуд бўлса, унинг ягоналигини исботлаймиз. (X^*, ρ_1) ва (X^{**}, ρ_2) фазолар (X, ρ) фазонинг тўлдирувчилари бўлсин деб фараз қилайлик. Бизнинг мақсадимиз учун қуйидаги хоссаларга эга бўлган $\varphi: X^* \to X^{**}$ акс эттиришнинг мавжудлигини кўрсатиш кифоя:

1) φ — изометрия;

2) ихтиёрий $x \in X$ учун $\varphi(x) = x$.

Бундай φ-изометрияни қуйидагича аниқлаймиз. $x^* \in X^*$ ихтиёрий нуқта бўлсин. Тўлдирувчи фазонинг таърифига асосан x^* га яқинлашувчи ва X нинг элементларидан тузилган $\{x_n\}$ кетма-кетлик мавжуд. Бу кетма-кетлик X^{**} фазога ҳам тегишлидир. X^{**} тўла бўлганлиги учун $\{x_n\}$ бирор $x^{**} \in X^{**}$ нуқтага яқинлашувчи бўлади. Ўз-ўзидан равшанки, x^{**} нуқта $\{x_n\}$ кетма-кетликни танлашга боғлиқ эмас, яъни агар $\{x'_n\}$ кетма-кетлик x^* га яқинлашувчи бошқа бир кетма-кетлик бўлса, у ҳолда X^{**} фазода $\{x'_n\}$ ҳам x^{**} га яқинлашувчи бўлади. Акс эттиришни $\varphi(x^*) = x^{**}$ кўринишда аниқлаймиз. Равшанки, ихтиёрий $x \in X$ учун $\varphi(x) = x$. Энди фараз қилайлик, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ лар X фазодаги фундаментал кетма-кетликлар бўлиб, улар X^* фазода мос равишда x^* ва y^* нуқталарга, X^{**} фазода эса x^{**} ва y^{**} нуқталарга яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$

яъни

$$\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Шундай қилиб, φ биз излаган изометриядир.

Энди тўлдирувчининг мавжудлигини исбот қиламиз. X метрик фазода $\{x_n\}$ ва $\{x'_n\}$ фундаментал кетма-кетликлар учун $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$ бажарилса, биз уларни *эквивалент* деймиз ва $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$ кўринишда белгилаймиз.

Ўз-ўзидан равшанки, бу муносабат рефлексив, симметрик ва транзити дир, яъни эквивалентлик муносабатидир. Демак, X фазодаги фундаментал кетма-кетликлар тўплами ўзаро эквивалент бўлган кетма-кетликлар синфларига ажралади. Энди биз (X^*, ρ) фазони аниқлаймиз. X^* нинг элементлари деб ўзаро эквивалент бўлган фундаментал кетма-кетликлар синфларига айтамиз. Агар x^*, $y^* \in X^*$ икки синф бўлса, биз уларнинг ҳар биридан мос равишда биттадан $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ фундаментал кетма-кетликларни оламиз ва X^* фазода метрикани

$$\rho(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \qquad (1)$$

кўринишда аниқлаш мумкин эканлигини исботлаймиз, яъни (1) нинг ўнг томонидаги лимит мавжуд ва $\{x_n\}\in x^*$, $\{y_n\}\in y^*$ вакилларга боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз. 2.2- § даги (1) тенгсизликка асосан

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \qquad (2)$$

Энди $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг фундаментал эканлигини ҳисобга олсак, етарли даражада катта бўлган n, m натурал сонлар учун

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

муносабат келиб чиқади. Яъни $s_n = \rho(x_n, y_n)$ ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги учун Коши шарти бажарилади, ва демак, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ мавжуд. Бу лимит x^* ва y^* нинг вакилларига боғлиқ эмас. Дарҳақиқат, x^* синфдан $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ вакилларни, y^* синфдан $\{y_n\}$, $\{y'_n\}$ вакилларни олиб, улар учун (2) тенгсизликка ўхшаш ушбу

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n)$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. Сўнг $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, $\{y_n\} \sim \sim \{y'_n\}$ бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Демак, $\rho(x^*, y^*)$ сон мавжуд ва x^*, y^* синфларнинг вакилларига боғлиқ эмас. Энди биз $\rho(x^*, y^*)$ учун метрика аксиомаларини текшириб чиқамиз.

1) аксиома $\rho(x^*, y^*)$ нинг таърифидан келиб чиқади;

2) аксиома ўз-ўзидан равшан.

Учбурчак аксиомасини исботлаймиз. X фазода бу аксиома ўринли эканлигидан фойдаланиб,

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$$

тенгсизликни ёзамиз. Сўнгра n бўйича лимитга ўтсак,

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty}\rho(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty}\rho(z_n, y_n),$$

яъни

$$\rho(x^*, y^*) \leqslant \rho(x^*, z^*) + \rho(z^*, y^*)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди X ни X^* нинг қисм фазоси деб ҳисоблаш мумкинлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $x \in X$ элементга шу элементга яқинлашувчи бўлган фундаментал кетма-кетликлар синфини мос қўямиз. Бу синф бўш эмас, чунки у стационар бўлган (яъни ҳамма x_n элементлари x га тенг бўлган) кетма-кетликни ўз ичига олади. Агар $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ бўлса, у ҳолда

$$\rho(x, y) = \lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n).$$

Шу тарзда ҳар бир $x \in X$ элементга юқорида айтилган синфни мос қўйсак, X ни X^* га изометрик акс эттириш ҳосил бўлади. Шунинг учун X ни унинг X^* даги тасвири билан айнан бир деб ҳисоблаймиз.

X ни X^* нинг ҳамма ерида зич эканлигини исботлаймиз. $x^* \in X^*$ ихтиёрий элемент ва $\varepsilon > 0$ бўлсин. x^* синфга тегишли бўлган бирор $\{x_n\} \in x^*$ фундаментал кетма-кетликни оламиз. N натурал сон шундай бўлсинки, ушбу

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

тенгсизлик ихтиёрий m, $n > N$ сонлар учун бажарилсин. У ҳолда m бўйича лимитга ўтсак,

$$\rho(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty}\rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$$

тенгсизлик ихтиёрий $n > N$ учун бажарилади. Демак, x^* нуқтанинг ихтиёрий атрофида X нинг элементи мавжуд, яъни X нинг ёпилмаси X^* га тенг.

Ниҳоят, X^* нинг тўла эканлигини исботлаймиз. Аввал шуни айтиш керакки, X^* нинг таърифига кўра X нинг элементларидан ҳосил бўлган ихтиёрий x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ фундаментал кетма-кетлик X^* нинг бирор x^* элементига яқинлашади, аниқроғи, шу кетма-кетликни ўз ичига олувчи синф билан аниқланган x^* элементга яқинлашади. X фазо X^* фазода зич бўлгани туфайли X^* элементларидан тузилган ихтиёрий

$$x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*,\ \ldots$$

фундаментал кетма-кетлик учун унга эквивалент бўлган ва X нинг элементларидан тузилган

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

кетма-кетлик мавжуд. Буни кўрсатиш учун x_n сифатида X нинг ушбу

$$\rho\,(x_n,\ x_n^*) < \frac{1}{n}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий элементини олиш мумкин. Ҳосил бўлган $\{x_n\}$ кетма-кетлик X да фундаментал, ва демак, бирор x^* элементга яқинлашувчи бўлади. Лекин бу ҳолда $\{x_n^*\}$ кетма-кетлик ҳам x^* га яқинлашади.$_*$

Мисоллар. 1. Рационал сонлар фазоси $\rho\,(x,\ y) = |x - y|$ метрикада тўла эмас. Математик анализдан маълумки, бу фазонинг тўлдирувчиси ҳақиқий сонлар фазосидир.

2. 2.6- § да кўрсатилганидек, $C^2\,[0,\ 2]$ фазо тўла эмас. Бу фазонинг тўлдирувчиси $L^2[0,\ 2]$ фазодир. Ҳақиқатан, Фишер теоремасига асосан ([ҲЎФН], VIII боб) $L^2[0,\ 2]$ фазо тўла. $C^2[0,\ 2]$ фазонинг $L^2\ [0,\ 2]$ фазодаги зичлиги Лузин теоремасидан ([ҲЎФН], VI боб) осонликча келиб чиқади.

2.8- §. Метрик фазода компакт тўпламлар

Тўғри чизиқнинг ажойиб хоссаларидан бири шуки, ундаги чегараланган ҳар қандай чексиз тўплам камида битта лимит нуқтага эга. Бу факт Больцано — Вейерштрасс теоремасида ўз ифодасини топган. Лекин ихтиёрий метрик фазода бундай содда натижа, умуман айтганда, ўринли эмас. Шунинг учун қуйидаги саволнинг қўйилиши табиий. Метрик фазода қандай тўпламлар синфи учун Больцано — Вейерштрасс теоремасининг мазмуни сақланади? Мана шу савол муносабати билан қуйидаги муҳим таърифни киритамиз.

Таъриф. X метрик фазодаги M тўпламнинг элементларидан тузилган ихтиёрий кетма-кетликдан бирор $x\,(\in X)$

элементга яқинлашувчи қисм кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин бўлса, M тўплам X да *нисбий компакт* дейилади; ёпиқ нисбий компакт тўплам *компакт* дейилади[1].

Больцано — Вейерштрасс теоремасига асосан тўғри чизиқда ҳар қандай чегараланган (ёпиқ ва чегараланган) тўплам нисбий компактдир (компактдир).

Равшанки, нисбий компакт тўпламнинг ихтиёрий қисм тўплами яна нисбий компакт тўпламдир.

1-теорема. *Нисбий компакт тўплам чегараланган бўлади.*

Исбот. $A(\subset X)$ нисбий компакт тўплам бўлиб, чегараланган бўлмасин деб фараз қиламиз. A дан ихтиёрий x_1 нуқтани олиб, радиуси $r_1 = 1$ га тенг $S(x_1, r_1)$ шарни қурамиз. A чегараланмаганлиги учун у бу шарда тўласича жойлашган бўлмайди. A тўпламнинг $S(x_1, r_1)$ шарга кирмаган бирор x_2 элементни оламиз. У ҳолда $\rho(x_1, x_2) \geqslant r_1$. Сўнг радиуси $r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$ га тенг $S(x_1, r_2)$ шарни қуриб, A тўпламнинг бу шарга кирмаган бирор x_3 элементини оламиз; бундай элемент мавжуд, чунки A чегараланмаган тўплам ва $\rho(x_1, x_3) \geqslant r_2$. Сўнгра радиуси $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ га тенг $S(x_1, r_3)$ шарни қурамиз. Бу процессни, A тўплам чегараланмаганлиги учун чексиз давом эттиришимиз мумкин. Натижада $\{x_n\}$ $(x_n \in A)$ кетма-кетлик ва ўсиб борувчи $\{r_n\}$ сонли кетма-кетлик ҳосил бўлиб, ушбу

$$\rho(x_1, x_n) + 1 = r_n > r_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

тенгсизликлар бажарилади.

Энди ихтиёрий $n > m \geqslant 2$ натурал сонлар учун

$$\rho(x_1, x_n) + 1 = r_n > r_{n-1} \geqslant r_m; \quad \rho(x_1, x_m) + 1 = r_m$$

муносабатлар ўринли. Булардан қуйидаги

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_m) + \rho(x_m, x_n)$$

тенгсизликларга асосан ушбу

$$r_n \leqslant r_m + \rho(x_m, x_n), \text{ демак, } \rho(x_m, x_n) \geqslant 1$$

муносабат келиб чиқади.

Сўнгги муносабат кўрсатадики, на $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ўзи ва на унинг бирор қисми фундаментал бўла олмайди, демак, яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин эмас. Бу

---

[1] Баъзан нисбий компакт тўпламлар *компакт* дейилади, компакт тўпламлар эса *бикомпакт* дейилади.

эса зиддиятга олиб келади, чунки $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг элементлари A нисбий компакт тўпламдан олинган.$_*$

Бу теореманинг тескариси, умуман айтганда, ўринли эмас, яъни тўплам чегараланган бўлса, у нисбий компакт бўлиши шарт эмас. Бунга l_2 фазодан конкрет мисол келтирамиз. l_2 фазодан ушбу

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0, \ldots),\ e_2 = (0,\ 1,\ 0, \ldots),\ e_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0, \ldots), \ldots$$

элементлардан иборат чегараланган тўпламни тузамиз. Бу элементларнинг ихтиёрий иккитаси орасидаги масофа $\rho(e_m, e_n) = \sqrt{2}\,(m \neq n)$ га тенг. Шунинг учун бу кетма-кетлик ва унинг ҳеч қандай қисми яқинлашувчи бўлмайди, демак, тузилган тўплам нисбий компакт эмас.

Метрик фазода нисбий компактлик тушунчасига яқин бўлган тушунчани киритамиз.

Таъриф. A, B лар (X, ρ) метрик фазодан олинган тўпламлар ва $\varepsilon > 0$ бирор сон бўлсин. Агар A дан олинган ихтиёрий x элемент учун B да ушбу $\rho(x, y) < \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирадиган y элемент мавжуд бўлса, B тўплам A тўпламга нисбатан ε-*тўр* дейилади. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун A тўплам чекли ε-тўрга эга бўлса, у ҳолда A *тўла чегараланган* дейилади.

Мисоллар. 1. Текисликда координаталари бутун сонлардан иборат тўплам 1-тўрни ташкил этади.

2. R^n фазода ҳар қандай чегараланган A тўплам чекли ε-тўрга эга, яъни A тўла чегараланган.

3. l_2 фазода A тўпламни қуйидагича аниқлаймиз:

$$x = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots) \in A,$$

бу ерда

$$|a_1| \leqslant 1,\ |a_2| \leqslant \frac{1}{2},\ \ldots,\ |a_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots.$$

Бу тўплам ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун чекли ε-тўрга эга. Дарҳақиқат, берилган $\varepsilon > 0$ учун n натурал сонни шундай танлаб оламизки, $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$ бўлсин.

A дан олинган ҳар бир $x = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots)$ нуқтага шу тўпламнинг ўзидан олинган

$$x^* = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ 0,\ 0,\ \ldots) \qquad (1)$$

нуқтани мос қўямиз. У ҳолда

$$\rho(x,\ x^*) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}}\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(1) кўринишдаги нуқталардан иборат B тўплам R^n фазода чегараланган; демак, B тўплам ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун чекли $\frac{\varepsilon}{2}$-тўрга эга, натижада A тўплам чекли ε-тўрга эга бўлиб, тўла чегараланган бўлади.

4. Юқоридаги $\{e_n\}$ кетма-кетликдан иборат тўплам чегараланган бўлиб, тўла чегараланган эмас. Чунки $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлганда чекли ε-тўрни қуриб бўлмайди.

Компактлик, тўлалик ва тўла чегараланганлик тушунчалари орасида қандай боғланиш борлигини қуйидаги теоремадан кўриш мумкин.

2-теорема. *X тўла метрик фазода жойлашган A тўпламнинг нисбий компакт бўлиши учун унинг тўла чегараланган бўлиши зарур ва кифоя.*

Исбот. Зарурлиги. Нисбий компакт A тўпламни тўла чегараланмаган, яъни бирор $\varepsilon > 0$ учун A да чекли ε-тўр йўқ деб фараз қилайлик. У ҳолда A дан олинган ихтиёрий x_1 нуқта учун шундай x_2 нуқта мавжудки, $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Сўнг шундай x_3 нуқта мавжудки, $\rho(x_1, x_3) \geqslant \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$ бўлади ва ҳоказо. Бу процессни давом эттириб, қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантирадиган $\{x_n\}$ кетма-кетликни тузамиз:

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon, \quad m \neq n.$$

Равшанки, бундай кетма-кетликдан ҳеч қандай яқинлашувчи қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин эмас. Бу эса A нинг нисбий компактлигига зид.

Кифоялиги. Энди X тўла фазо бўлиб, A унда тўла чегараланган тўплам бўлсин. A нинг нисбий компактлигини кўрсатамиз. A нинг элементларидан тузилган ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Ҳар бир $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ учун A да мос равишда чекли ε_k-тўрни қурамиз:

$$a_1^{(k)}, \; a_2^{(k)}, \; \ldots \; a_{p_k}^{(k)}.$$

Марказлари ε_1-тўрни ташкил этувчи нуқталарда жойлашган ва радиуслари 1 га тенг шарларни қурамиз. Сони чекли бу шарлар A тўпламни тўласича қоплайди. Улардан камида биттаси, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз $\{x_n'\}$ қисм кетма-кетлигини ўз ичига олади, уни масалан, S_1 билан белгилайлик. Сўнг марказлари $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$-тўрни ташкил этувчи нуқталарда жойлашган ва радиуслари $\frac{1}{2}$ тенг шарла ни қурамиз. Бу шарларнинг сони чекли бўлганлиги учу уларнинг камида биттаси $\{x'_n\}$ кетма-кетликнинг чекси $\{x''_n\}$ қисм кетма-кетлигини ўз ичига олади, уни масалан S_2 билан белгилайлик, ва ҳоказо. Бу процессни чекси давом эттирамиз. Энди қуйидаги

$$x'_1,\ x'_2,\ \dots,\ x'_n,\ \dots$$
$$x''_1,\ x''_2,\ \dots,\ x''_n,\ \dots$$

кетма-кетликларнинг диагоналида жойлашган элементлардан ушбу кетма-кетликни тузамиз:

$$x'_1,\ x''_2,\ \dots,\ x^{(n)}_n,\ \dots . \qquad (2)$$

Бу кетма-кетлик фундаментал бўлади, чунки унинг $x^{(n)}_n$ элементдан бошлаб сўнгги ҳамма элементлари S_n шарда (унинг радиуси $\frac{1}{n}$ га тенг) жойлашган бўлади. X метрик фазо тўла бўлганлиги учун (2) кетма-кетлик лимитга эга. Яъни A тўпламдан олинган ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи $\{x^{(n)}_n\}$ кетма-кетликни ҳосил қилдик, демак, A нисбий компакт тўплам.*

Натижа. X тўла метрик фазодаги A тўплам компакт бўлиши учун унинг ёпиқ ва тўла чегараланган бўлиши зарур ва кифоя.

2-теоремада зарур ва кифоя шарт берилган бўлсада, ундан конкрет метрик фазоларда фойдаланиш осон эмас. Махсус метрик фазоларда жойлашган тўпламларнинг нисбий компактлигини (компактлигини) аниқлаш учун одатда махсус компактлик белгилари изланади.

Биз бу масала билан s ва $C\,[a,\ b]$ фазоларда шуғулланамиз.

3-теорема *(s фазода компактлик белгиси). A тўплам s фазодан олинган бўлиб, A_i тўплам A нинг i-номерли ($i = 1, 2, \dots$) координаталаридан тузилган тўплам бўлсин. A нинг нисбий компакт бўлиши учун A_i тўпламлар чегараланган бўлиши зарур ва кифоя. A_i тўпламнинг юқори чегараси i га боғлиқ бўлиши ҳам мумкин.*

Исбот. Зарурлиги. 2.2-§ даги 6-мисолдан маълумки, s фазода яқинлашиш координаталар бўйича яқинлашишдир. Демак, A нисбий компакт бўлганлиги учун

A_i лар ҳам нисбий компакт ва, демак, чегараланган бўлади, чунки A_i тўғри чизиқда жойлашган тўплам.

Кифоялиги. A шундай тўплам бўлсинки, унинг учун юқорида тузилган A_i тўпламларнинг ҳар бири чегараланган бўлсин. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ни олиб p натурал сонни шундай танлаб оламизки, унинг учун

$\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p} < \varepsilon$ бўлсин. Сўнг ҳар бир $x = (a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots) \in s$ элементга $y = (a_1, a_2, \ldots, a_p, 0, \ldots) \in s$ элементни мос қўямиз. Бу кўринишда тузилган y элементлардан иборат тўпламни B_p билан белгилаймиз. Равшанки,

$$\rho(x, y) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k|}{1+|a_k|} < \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon,$$

яъни B_p тўплам A га нисбатан ε-тўрни ташкил этар экан. Аммо B_p эса, тузилишига кўра, R^p фазода тўласича жойлашган чегараланган тўплам. Демак, B_p чекли ε-тўрга эга, натижада A тўплам ҳам чекли 2ε-тўрга эга, яъни A тўла чегараланган. 2-теореманинг кифоялик шартига ва s нинг тўлалигига мувофиқ A нисбий компакт тўплам.*

Энди $C[a, b]$ фазода нисбий компактлик белгисини берамиз. Бу белгини ифода қилиш учун қуйидаги икки тушунчани келтирамиз.

$[a, b]$ сегментда аниқланган бирор $\{\gamma(t)\} = \Phi$ функциялар системаси берилган бўлсин. Агар t нинг ҳамма қийматлари ва Φ системанинг ҳамма элементлари учун

$$|\gamma(t)| \leqslant K \quad (t \in [a, b],\ \gamma \in \Phi)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган K сон мавжуд бўлса, $\Phi = \{\gamma(t)\}$ функциялар системаси *текис чегараланган* дейилади. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлсаки,

$$|t_1 - t_2| < \delta$$

тенгсизлик бажарилганда Φ системага тегишли ихтиёрий $\gamma(t)$ функция учун

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \varepsilon$$

бўлса, Φ система *текис даражада узлуксиз* дейилади.

4-теорема (Арцела теоремаси). *$[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз функциялардан иборат Φ тўплам $C[a, b]$ фазода нисбий компакт бўлиши* *учун бу функциялар системасининг текис чегараланган ҳамда текис даражада узлуксиз бўлиши зарур ва кифоя.*

Исбот. Зарурлиги. Φ тўплам $C[a, b]$ фазода нисбий компакт бўлсин. У ҳолда 2-теоремага мувофиқ, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун Φ да чекли $\frac{\varepsilon}{3}$-тўрни ташкил этувчи

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p \qquad (3)$$

функциялар мавжуд бўлади. Бу функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ да узлуксиз бўлганлиги сабабли чегаралангандир, яъни

$$|\varphi_i| \leqslant K_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Чекли $\frac{\varepsilon}{3}$-тўрнинг таърифига кўра Φ дан олинган ҳар қандай φ элемент учун (3) даги сони чекли функциялар орасида шундай φ_i функция топиладики, унинг учун

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_{a<t\leqslant b} |\varphi(t) - \varphi_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизлик ўринли. Натижада

$$|\varphi| \leqslant |\varphi_i| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K, \quad K = \max_{1\leqslant i\leqslant p} K_i + \frac{\varepsilon}{3},$$

яъни Φ система текис чегараланган. Сўнгра (3) кетма-кетликдаги чекли $\frac{\varepsilon}{3}$-тўрни ташкил этувчи функцияларнинг ҳар бири узлуксиз ва уларнинг сони чекли, демак, улар $[a, b]$ да текис узлуксиз; демак, берилган $\frac{\varepsilon}{3}$ учун шундай δ_i сон мавжудки, бунинг учун қуйидагиларни ёзишимиз мумкин: агар $|t_1 - t_2| < \delta_i$ бўлса, $|\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Агар $|t_1 - t_2| < \delta$ бўлса ($\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} \delta_i$), у ҳолда ихтиёрий $\varphi \in \Phi$ учун φ_i нинг (3) функциялар орасида $\rho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ тенгсизликни қаноатлантирадиганини олиб, ушбу муносабатни ёза оламиз:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| = |\varphi(t_1) - \varphi_i(t_1) + \varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2) + \varphi_i(t_2) - \varphi(t_2)| \leqslant |\varphi(t_1) - \varphi_i(t_1)| + |\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| + |\varphi_i(t_2) - \varphi(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Шунинг билан Ф системанинг текис даражада узлуксизлиги ҳам кўрсатилди, яъни теореманинг зарурлик қисми исбот этилди.

Кифоялиги. Ф система текис чегараланган ва текис даражада узлуксиз бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун унга нисбатан $C[a, b]$ да чекли ε-тўр мавжуд бўлса, бу системанинг $C[a, b]$ фазода нисбий компактлиги кўрсатилган бўлади.

K ва δ қуйидаги муносабатларни қаноатлантирадиган сонлар бўлсин: $|\varphi| \leqslant K$ (ҳамма $\varphi \in \Phi$ учун); агар $|t_1 - t_2| < \delta$ бўлса, $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$ (ҳамма $\varphi \in \Phi$ учун).

Энди $[a, b]$ сегментни

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$$

нуқталар билан ҳар бирининг узунлиги δ дан кичик бўлган n та қисмга бўлиб, бу нуқталарнинг ҳар биридан вертикал тўғри чизиқ ўтказамиз. Ординаталар ўқида $[-K, K]$ сегментни

$$y_0 = -K < y_1 < y_2 < \dots < y_m = K$$

нуқталар билан ҳар бирининг узунлиги $\frac{\varepsilon}{5}$ дан кичик m та қисмга бўлиб, бу нуқталарнинг ҳар бирида горизонтал тўғри чизиқларни ўтказамиз. Натижада ушбу $[a \leqslant t \leqslant b, -K \leqslant y \leqslant K]$ тўғри тўртбурчак қисмларга бўлиниб, бу қисмларнинг горизонтал томонлари δ ва вертикал томонлари $\frac{\varepsilon}{5}$ дан кичик бўлади, яъни тўғри тўртбурчакда тўр тузилди. Энди ҳар бир $\varphi (\in \Phi)$ функцияга учлари (t_k, y_l) $\left(|y_l - \varphi(t_k)| < \frac{\varepsilon}{5}\right)$ нуқтада жойлашган $\psi(t)$ синиқ функцияни мос қўямиз (агар функциянинг графиги туташган кесмалардан иборат бўлса, бу функцияни *синиқ* деймиз). Тузилган тўрининг учларида тузилишига кўра

$$|\psi(t_k) - \varphi(t_k)| < \frac{\varepsilon}{5} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизлик ва

$$|\varphi(t_{k+1}) - \psi(t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

тенгсизликлардан

$$|\psi(t_k) - \psi(t_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

$[t_k, t_{k+1}]$ сегментда $\psi(t)$ чизиқли функция бўлганлиги учун

$$|\psi(t_k)-\psi(t)|<\frac{3\varepsilon}{5}$$

тенгсизлик t нинг $[t_k, t_{k+1}]$ сегментдаги ҳамма қийматлари учун бажарилади.

Энди $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий t нуқтасини олиб, чапдан унга энг яқин турган t_k нуқтани оламиз (бу бўлиш нуқтаси). У ҳолда

$$\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant|\varphi(t)-\varphi(t_k)|+|\varphi(t_k)-\psi(t_k)|+|\psi(t_k)-\\-\psi(t)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринлидир. Демак, сони чекли $\psi(t)$ синиқ функциялар Ф системага нисбатан чекли ε-тўрни ташкил этади, яъни Ф система тўла чегараланган системадир.$_*$

Энди метрик фазодаги функционалларнинг компактлик билан боғлиқ бўлган хоссаларини келтирамиз.

Қуйидаги теорема математик анализдан маълум бўлган Вейерштрасс теоремасининг умумлаштирилишидир.

5- теорема. X метрик фазода f узлуксиз функционал бўлсин. Ихтиёрий $D\subset X$ компакт тўпламда f чегараланган ва ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларини қабул қилади.

Исбот. f функционал D тўпламда қуйидан чегараланганлигини ва ўзининг энг кичик қийматини қабул қилишини исботлаш билан чегараланамиз.

Агар f қуйидан чегараланмаган деб фараз қилсак, у ҳолда ихтиёрий n натурал сон учун $f(x_n)<-n$ шартни қаноатлантирадиган $x_n\in D$ нуқта топилади. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=-\infty$. Ҳосил бўлган $\{x_n\}$ кетма-кетликдан D компакт бўлгани туфайли бирон $x_0\in D$ нуқтага яқинлашувчи $\{x_{n_i}\}$ қисм кетма-кетлик ажратиш мумкин. f узлуксиз бўлгани учун $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i})=f(x_0)$. Шу билан бирга $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i})=-\infty$. Бу эса $f(x_0)$ чекли сон эканлигига зид. Демак, $f(x)$ функционал D тўпламда қуйидан чегараланган.

Энди m билан ушбу $f(D)=\{f(x):x\in D\}\subset R$ тўпламнинг аниқ қуйи чегарасини белгилаймиз ва $f(x_0)=m$ шартни қаноатлантирувчи $x_0\in D$ нуқта мавжудлигини исботлаймиз. Ихтиёрий n натурал сон учун $m+\frac{1}{n}$ сон $f(D)$

тўпламнинг қуйи чегараси бўлмайди, яъни $f(x_n) < m + \frac{1}{n}$ шартни қаноатлантирувчи $x_n \in D$ нуқта мавжуд. Бу $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи $x_{n_l} \to x_0 \in D$ қисм кетма-кетлик ажратиб олишимиз мумкин. Энди ушбу

$$m \leqslant f(x_{n_l}) < m + \frac{1}{n_l}$$

тенгсизликда лимитга ўтсак,

$$\lim_{l \to \infty} f(x_{n_l}) = m$$

тенглик ҳосил бўлади. f узлуксиз бўлгани сабабли

$$f(x_0) = \lim_{l \to \infty} f(x_{n_l}) = m. \ *$$

Кўриниб турибдики, бу теореманинг исботи математик анализдаги Вейерштрасс теоремасининг исботига ўхшайди. Узлуксиз функцияларнинг баъзи бошқа хоссалари ҳам шунга ўхшаш осонликча метрик фазолардаги функционаллар учун исботланади. Мисол учун Кантор теоремасини келтирамиз.

Таъриф. (X, ρ) метрик фазода f функционал берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топилсаки,

$$\rho(x' \ x'') < \delta$$

шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай x', $x'' \in X$ учун ушбу

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \ .$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функционал *текис узлуксиз* дейилади.

6-теорема (Кантор теоремаси). *X метрик фазодаги f функционал $D \subset X$ компакт тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда f шу тўпламда текис узлуксиздир.*

Бу теореманинг ҳам исботи сонли функциялар учун келтирилган исботдан фарқ қилмайди.

2.9- §. Қисқартириб акс эттириш принципи ва унинг татбиқлари

Тўла метрик фазоларда берилган турли тенгламаларнинг ечимлари мавжудлиги ва ягоналигини исботлашда қисқартириб акс эттириш принципи муҳим ва фойдали метод сифатида ишлатилиши мумкин. Ҳозир мана шу принцип билан ўқувчини қисқача таништирамиз.

T акс эттириш X метрик фазонинг ўзини-ўзига акс эттириш бўлсин. Агар X фазодан олинган ихтиёрий x ва y элементлар учун

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant \alpha \cdot \rho(x, y) \qquad (1)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган $\alpha (0 < \alpha < 1)$ сон мавжуд бўлса, у ҳолда T ни *қисқартириб акс эттириш* дейилади. (1) га мувофиқ, агар $n \to \infty$ да $x_n \to x_0$ бўлса, у ҳолда $Tx_n \to Tx_0$, яъни T акс эттириш узлуксиз бўлади.

V Теорема (қисқартириб акс эттириш принципи). *X тўла метрик фазода аниқланган ҳар қандай қисқартириб акс эттириш биргина қўзғалмас нуқтага эга, яъни $Tx = x$ тенгламанинг биргина ечими мавжуддир.*

Исбот. X метрик фазодан ихтиёрий x_0 нуқтани олиб, ушбу $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1 = T^2x_0$, $x_3 = Tx_2 = T^3x_0$, ..., $x_n = Tx_{n-1} = T^nx_0$, ... кетма-кетликни тузамиз ва бу кетма-кетликнинг фундаменталлигини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, (1) ва учбурчак аксиомасига мувофиқ ҳар қандай m ва $n (m > n)$ натурал сонлар учун

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(T^nx_0, T^mx_0) = \rho(T^nx_0, T^nx_{m-n}) \leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant \alpha^n\{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

n етарли катта бўлганда бу тенгсизликнинг ўнг томони исталганча кичик қилиниши мумкин, чунки $\alpha < 1$. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик фундаменталдир. X фазо тўла бўлганлиги учун $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фундаменталлигидан унинг яқинлашувчилиги келиб чиқади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

T узлуксиз акс эттириш бўлганлиги учун

$$Tx = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n\to 1} = x.$$

Демак, x — қўзғалмас нуқта.

Энди қўзғалмас нуқтанинг ягоналигини исбот қиламиз.

Дарҳақиқат, $Tx=x$ ва $Ty=y$, яъни қўзғалмас нуқта иккита бўлсин. У ҳолда

$$\rho(x, y)=\rho(Tx, Ty)\leqslant\alpha\cdot\rho(x, y) \quad (\alpha<1),$$

бундан

$$\rho(x, y)=0 \text{ ёки } x=y. *$$

Бир неча мисол келтирамиз.

1. $x=\varphi(x)$ тенгламадаги φ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган бўлиб, ушбу Липшиц шарти

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|<\alpha|x_2-x_1| \quad (0<\alpha<1)$$

ни қаноатлантирсин ва $[a, b]$ сегментни ўзини-ўзига акс эттирсин, у ҳолда

$$x_0, \ x_1=\varphi(x_0), \ x_2=\varphi(x_1), \ \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи ва унинг лимити φ акс эттиришнинг ягона қўзғалмас нуқтаси бўлади.

2. Қуйидаги тенгламани текширамиз:

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k+b_i \quad (i=1,2, \ldots, n). \tag{2}$$

Бу тенгламани n ўлчамли вектор фазодаги $x=(x_1, \ldots, x_n)$ вектор ёрдамида ифода қилсак, уни $x=Tx$ кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Қисқартириб акс эттириш принципини бу тенгламага татбиқ қилиш учун тегишли шартларни аниқлашимиз керак, яъни қандай шартлар бажарилганда бу акс эттириш (1) тенгсизликни қаноатлантиради. Бу шартларни аниқлаш эса берилган фазода метриканинг киритилишига боғлиқдир. Масалан,

а) $\rho(x, y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i-\beta_i|$, $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$,

$$y=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

бу ҳолда ихтиёрий иккита

$$x'=(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n'), \ x''=(\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_n'')$$

нуқта учун

$$\rho(Tx', Tx'')=\rho(y', y'')=\max_i|\beta_i'-\beta_i''|=\max_i\Big|\sum_k a_{ik}\times$$

$$\times(\alpha_k'-\alpha_k'')\Big|\leqslant\max_i\sum_k|a_{ik}|\cdot|\alpha_k'-\alpha_k''|\leqslant\max_i\sum_k|a_{ik}|\cdot\max_k|\alpha_k'-$$

$$-\alpha_k''|=\rho(x', x'')\cdot\max_i\sum_k|a_{ik}|.$$

Бундан (1) шарт бажарилиши учун

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\leqslant\alpha<1,\quad i=1,2,\ \ldots,\ n \tag{3}$$

тенгсизликлар ўринли бўлиши етарли. Демак, (3) муносабат бу хусусий ҳол учун қисқартириб акс эттириш шартини беради.

$$\text{б)}\ \rho(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\beta_i|.$$

Бу ҳолда

$$\rho(Tx',\ Tx'')=\rho(y',\ y'')=\sum_{i=1}^{n}|\beta'_i-\beta''_i|=\sum_{i}\Big|\sum_{k}a_{ik}(\alpha'_k-$$

$$-\alpha''_k)\Big|\leqslant\sum_{i}\sum_{k}|a_{ik}|\cdot|\alpha'_k-\alpha''_k|\leqslant\rho(x',\ x'')\cdot\max_{k}\sum_{i}|a_{ik}|.$$

Демак, қисқартириб акс эттириш шартини қуйидагича олиш мумкин:

$$\sum_{i}|a_{ik}|\leqslant\alpha<1,\quad k=1,2,\ \ldots,\ n. \tag{4}$$

$$\text{в)}\ \rho(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)^2\Big)^{1/2}.$$

Бу ҳолда Коши-Буняковский тенгсизлигига биноан

$$\rho^2(y',\ y'')=\sum_{i}\Big(\sum_{k}a_{ik}\ (\alpha'_k-\alpha''_k)\Big)^2\leqslant\sum_{i}\sum_{k}a^2_{ik}\rho^2(x',\ x'').$$

Бу ҳолда қисқартириб акс эттириш шарти қуйидагича бўлади:

$$\sum_{i,k}a^2_{ik}\leqslant\alpha<1. \tag{5}$$

Юқорида кўрилган уч ҳол учун топилган қисқартириб акс эттириш шартларининг ҳаммаси кифоявий шартлардир (3), (4) ва (5) шартларнинг бирортаси бажарилганда, (2) тенгламанинг биргина ечимга эгалиги келиб чиқади.

3. Охирги мисол сифатида ушбу

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \tag{6}$$

$$y(x_0)=y_0\ \text{(бошланғич шарт)} \tag{7}$$

дифференциал тенгламани кўриб чиқамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x, y)$ функция, текисликдаги (x_0, y_0) нуқтани ўз ичига олган бирор G соҳада аниқланган, узлуксиз ва

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|$$

Липшиц шартини қаноатлантиради, деб фараз қиламиз (K—ўзгармас сон).

Энди (6) тенгламани бирор $[x_0-c, x_0+c]$ сегментда (7) бошланғич шартни қаноатлантирадиган биргина $y=\psi(x)$ ечимга эгалигини исбот этамиз (бу эса Пикарнинг маълум теоремасидир).

Аввало (6) тенглама (7) шарт бажарилганда қуйидаги содда интеграл тенглама шаклида ёзилиши мумкин:

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))\,dt. \tag{8}$$

$f(x, y)$ функция G соҳада узлуксиз бўлганлиги учун (x_0, y_0) нуқтани ўз ичига олган бирор $G'\subset G$ соҳада чегараланган бўлади, яъни $|f(x, y)|\leqslant d$. Энди c сонни шундай танлаб оламизки, унинг учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

а) агар $|x_0-x|\leqslant c$, $|y-y_0|\leqslant c\cdot d$ бўлса, у ҳолда $(x,y)\in G'$;

б) $K\cdot c<1$.

$[x_0-c, x_0+c]$ сегментда аниқланган ва $|\psi(x)-y_0|\leqslant c\cdot d$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $\{\psi\}$ узлуксиз функциялар системасини Ф билан белгилаймиз ва бу системада метрикани қуйидагича киритамиз:

$$\rho(\psi_1, \psi_2)=\max_{x_0-c\leqslant x\leqslant x_0+c}|\psi_1(x)-\psi_2(x)|.$$

Ф метрик фазо тўла, чунки у тўла $C[x_0-c, x_0+c]$ фазонинг ёпиқ қисмидир. Ушбу

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt \tag{9}$$

акс эттиришда $x\in[x_0-c, x_0+c]$ бўлсин. У ҳолда бу акс эттириш Ф фазони ўзини ўзига қисқартириб акс эттиради. Дарҳақиқат, $\varphi\in Ф$ ва $x\in[x_0-c\ x_0+c]$ бўлсин.

У ҳолда

$$|\psi(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt\right|\leqslant c\cdot d$$

муносабат ўринли ва, демак, (9) акс эттириш Ф фазони ўзини ўзига акс эттиради. Энди

$$|\psi_1\ (x)-\psi_2(x)|\leqslant\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,\ \varphi_1(t))-f(t,\ \varphi_2(t))|\ dt\leqslant$$

$$\leqslant Kc\max_{x_0-c\leqslant t\leqslant x_0+c}|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|=Kc\rho(\varphi_1,\ \varphi_2).$$

Бундан $Kc<1$ бўлганлиги учун (9) акс эттиришнинг қисқартирувчи акс эттириш эканлиги келиб чиқади. Демак, шу параграфдаги теоремага кўра (8) тенглама Ф фазода бошланғич (7) шартни қаноатлантирадиган биргина ечимга эга.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. R ҳақиқий сонлар тўпламида

$$\rho(x,\ y)=|x^2-y^2|$$

функцияни киритамиз. (R, ρ) метрик фазо бўладими?

2. R^n вектор фазода қуйидагича уч хил метрика киритамиз:

$$\rho(x,\ y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2};$$

$$\rho_1(x,\ y)=\max_{1<i\leqslant n}|x_i-y_i|;$$

$$\rho_2(x,\ y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\ldots+|x_n-y_n|.$$

Шу уч метрика бир-бирига эквивалент эканлигини исботланг.

3. Қандай α ва β учун ушбу

$$\rho(x,\ y)=|x^\alpha-y^\alpha|^\beta$$

функция тўғри чизиқда метрикани беради?

4. X, Y, Z метрик фазолар бўлиб, T_1, T_2 мос равишда X ни Y га, Y ни Z га акс эттирувчи узлуксиз операторлар бўлса, у ҳолда X ни Z га акс эттирувчи ушбу

$$x\to T_2(T_1x)$$

оператор ҳам узлуксиз бўлишини исботланг.

5. 2.1- § даги R^n метрик фазони ўзини ўзига акс эттирувчи ихтиёрий чизиқли оператор узлуксиз эканлигини исботланг.

6. Ҳақиқий сонлар тўплами R да метрикани $\rho(x,\ y)=|x-y|$ кўринишда оламиз. Бу метрик фазода рационал сонлар тўплами очиқ ҳам эмас, ёпиқ ҳам эмаслигини исботланг. Бу фазода натурал сонлар тўплами N ёпиқми?

7. Шундай (X, ρ) метрик фазога мисол келтирингки, бу фазода икки шар $S(x_1, r_1)$ ва $S(x_2, r_2)$ топилиб, $r_1 > r_2$ ва $S(x_1, r_1) \subset S(x_2, r_2)$ муносабатлар ўринли бўлсин.

8. l_2 метрик фазо сепарабел эканлигини исботланг.

9. (X, ρ) метрик фазода зич бўлган сепарабел қисм фазо мавжуд бўлса, у ҳолда X фазо ҳам сепарабел эканлигини исботланг.

10. R ҳақиқий сонлар тўпламида шундай ρ метрика киритингки, (R, ρ) сепарабел метрик фазо бўлмасин.

11. Ихтиёрий фундаментал кетма-кетлик чегараланган эканлигини исботланг.

12. Ҳақиқий сонлар тўпламида чегараланган, аммо фундаментал бўлмаган кетма-кетликка мисол келтиринг.

13. Шундай (X, ρ) тўла метрик фазога мисол келтирингки, бу фазода

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \supset \ldots \supset \overline{S}_n \supset \ldots$$

ёпиқ шарлар кетма-кетлиги мавжуд бўлсин ва уларнинг умумий қисми бўш бўлсин, яъни $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n = \varnothing$.

14. s фазо тўлалигини исботланг.

15. X фазода ρ_1 ва ρ_2 эквивалент метрикалар бўлсин. (X, ρ_1) фазо тўла бўлиши учун (X, ρ_2) фазо тўла бўлиши зарур ва кифоядир. Исботланг.

16. X метрик фазо бўлиб, X^* унинг тўлдирувчиси бўлсин. X^* метрик фазо сепарабел бўлиши учун X метрик фазо сепарабел бўлиши зарур ва кифоядир.
Исботланг.

17. Барча бир ўзгарувчили кўпҳадлар тўплами P ни олиб, ихтиёрий иккита

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

кўпҳад учун қуйидаги функцияни тузамиз:

$$\rho(f, g) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} |a_i - b_i|^2},$$

бу ерда $i > n$ бўлса $a_i = 0$, $i > m$ бўлса, $b_i = 0$. $\rho(f, g)$ функция P да метрика эканлигини исботланг ва бу метрикага нисбатан P нинг тўлдирувчисини топинг.

Шу масалани

$$\rho(f,\ g)=\max_{0\leqslant i<\infty} |a_i - b_i|$$

функция учун ҳам ечинг.

18. Компакт метрик фазо тўла ва сепарабел эканлигини исботланг.

19. m метрик фазода чегараланган, лекин компакт бўлмаган тўпламга мисол келтиринг.

20. $\rho\ (Ax,\ Ay)<\rho(x,\ y)\ (x\neq y)$ шартни қаноатлантирувчи шундай A акс эттиришга мисол келтирингки, ушбу

$$Ax=x$$

тенглама ечимга эга бўлмасин.

21. X тўла метрик фазо, $T:X\to X$ узлуксиз акс эттиришнинг бирор даражаси T^m қисқартирувчи бўлсин, яъни

$$T^m x=T(T\ \ldots\ (Tx)\ \ldots\ )$$

$$\rho(T^m x,\ T^m y)\leqslant\alpha\rho(x,y),\ 0\leqslant\alpha<1.$$

У ҳолда T ягона қўзғалмас нуқтага эга бўлишини исботланг.

22. f акслантириш $[0,1]$ сегментни $[0,1]$ сегментга ўзаро бир қийматли узлуксиз акслантириш бўлсин. У ҳолда бу акслантиришнинг ҳеч бўлмаганда битта қўзғалмас нуқтаси мавжудлигини кўрсатинг.

III боб

ТОПОЛОГИК ФАЗОЛАР

3.1- §. Топологик фазоларнинг таърифи ва мисоллар

Метрик фазоларнинг асосий тушунчалари (лимит нуқта, тўпламнинг ёпилмаси ва ҳоказо) атроф ҳамда очиқ тўплам тушунчалари ёрдамида киритилган эди. Бунда атроф ва очиқ тўпламлар кўрилаётган фазода берилган метрика билан аниқланган эди. Умуман, берилган тўпламда очиқ тўпламлар системасини аксиомалар ёрдамида бевосита киритиш мумкин.

Таъриф. T тўпламдаги *топология* деб, X нинг қисм тўпламларидан иборат ва қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирувчи τ системага айтилади:

1°. $X \in \tau$, $\varnothing \in \tau$;

2°. Агар $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau$ бўлса, у ҳолда $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \tau$;

бу ерда индекслар тўплами I ихтиёрий;

3°. $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \tau$ ва n ихтиёрий натурал сон бўлса, у ҳолда $\bigcap_{k=1}^{n} G_k \in \tau$.

(X,τ) жуфтлик *топологик фазо* деб аталади. X нинг τ системага тегишли бўлган қисм тўпламлари *очиқ тўпламлар* деб аталади. Шундай қилиб, топологик фазони бериш — бу бирор X тўпламни олиб, унда τ топологияни киритиш, яъни X нинг очиқ тўплам дейиладиган қисм тўпламларини аниқлаш, демакдир. Топологик фазонинг элементлари унинг *нуқталари* деб ҳам аталади.

Битта X тўпламда турли хил топологиялар киритиш мумкин бўлиб, бунда турли топологик фазолар ҳосил бўлади.

τ_1 ва τ_2 системалар X даги иккита топология бўлсин. Агар $\tau_1 \subset \tau_2$ муносабат ўринли бўлса, τ_2 топология τ_1 топологияга нисбатан *кучлироқ топология* дейилади ва $\tau_1 \leqslant \tau_2$ кўринишда ёзилади. Бу ҳолда τ_1 топологияни τ_2 топологияга нисбатан *кучсизроқ (сустроқ)* ҳам дейилади.

Мисоллар.

1. Ҳар қандай метрик фазодаги очиқ тўпламлар системаси топологиянинг 1°, 2° ва 3° аксиомаларини қаноатлантиради. Демак, ихтиёрий метрик фазо табиий равишда топологик фазо ҳамдир.

2. X ихтиёрий тўплам ва τ унинг барча қисм тўпламлари системаси бўлсин, деб фараз қилайлик. Унда (X, τ) топологик фазодир. X даги бундай топология *дискрет топология* дейилади.

3. X тўпламда фақат $\varnothing$ билан X дан иборат система ҳам топология ҳосил қилади *(антидискрет топология)*.

Юқорида келтирилган 2- мисолдаги топология X тўпламдаги барча топологияларнинг энг кучлисидир, 3- мисолдаги топология эса улар орасида энг кучсизидир.

4. Икки элементдан иборат $X=\{a, b\}$ тўпламда ҳаммаси бўлиб тўртта топология мавжуд. Улар қуйидагилардир:

$$\tau_1=\{(a, b), \varnothing\},\ \tau_2=\{(a, b), (a), \varnothing\},$$
$$\tau_3=\{(a, b), (b), \varnothing\},\ \tau_4=\{(a, b), (a), (b), \varnothing\}.$$

3.2- §. Атрофлар. Ёпиқ тўпламлар

Таъриф. Агар топологик фазода бирор A ва U тўпламлар учун $A \subset G \subset U$ муносабатни қаноатлантирувчи G очиқ тўплам мавжуд бўлса, U тўплам A тўпламнинг *атрофи* дейилади. Хусусан, $A=\{x_0\}$ бўлса, у ҳолда U тўплам x_0 *нуқтанинг атрофи* дейилади.

1- теорема. *Топологик фазода A тўплам очиқ бўлиши учун у ўзининг ҳар бир нуқтасининг атрофи бўлиши зарур ва кифоя.*

Исбот. Равшанки, агар A очиқ тўплам бўлса, у ўзининг ҳар бир нуқтасининг атрофидир.

Аксинча, агар ихтиёрий $x \in A$ учун шундай U_x очиқ тўплам мавжуд бўлиб, $x \in U_x \subset A$ муносабат бажарилса, у ҳолда $A = \bigcup_{x \in A} U_x$. Демак, A тўплам очиқ тўпламларнинг йиғиндиси сифатида топологиянинг 2° аксиомасига асосан очиқдир.*

Топологик фазодаги x нуқтанинг барча атрофлари системасини $B(x)$ билан белгилаймиз.

Алгебраик системаларда (масалан, группа, ҳалқа, вектор фазоларда) одатда топология нуқталарнинг атрофлари системаси орқали киритилади. Бундай киритилишнинг қонунийлиги қуйидаги теоремадан келиб чиқади.

2- теорема. *$B(x)$ система қуйидаги хоссаларга эга:*

1) *ихтиёрий $U \in B(x)$ учун $x \in U$;*

2) *агар $U \subset V$ ва $U \in B(x)$ бўлса, у ҳолда $V \in B(x)$;*

3) *агар $U, V \in B(x)$ бўлса, $U \cap V \in B(x)$;*

4) *ҳар бир $V \in B(x)$ учун шундай $W \in B(x)$ мав-*

жудки, барча $y \in W$ лар учун $V \in B(y)$ муносабат ўринли.

Аксинча, агар X тўпламнинг ҳар бир x элементига X нинг қисм тўпламларидан иборат ва 1)–4) шартларни қаноатлантирувчи $B(x)$ система мос қўйилган бўлса, у ҳолда X тўпламда шундай ягона топология мавжудки, бу топологияда ҳар бир x элементнинг барча атрофлари системаси $B(x)$ дан иборатдир,

Исбот. Агар $B(x)$ система x нуқтанинг барча атрофлари системаси бўлса, у ҳолда 1)–3) хоссалар осонгина кўрсатилади. 4) хоссани исботлаймиз. $V \in B(x)$ тўплам учун ушбу $x \in W \subset V$ муносабатни қаноатлантирувчи W очиқ қисм тўплам мавжуддир. W очиқ тўплам бўлгани учун у ўзидаги ҳар бир нуқтанинг атрофидир. Демак, барча $y \in W$ учун $W \in B(y)$. Бундан эса 2) хоссага кўра ихтиёрий $y \in W$ учун ушбу $V \in B(y)$ муносабат ўринли, яъни 4) хосса исботланди.

Аксинча, $B(x)$ система 1)—4) шартларни қаноатлантирсин. X да τ топологияни қуйидагича киритамиз: агар ихтиёрий $x \in A$ учун $A \in B(x)$ муносабат ўринли бўлса, A тўпламни очиқ деймиз ва бўш тўпламни ҳам очиқ деб ҳисоблаймиз. Демак,

$$(A \in \tau) \Longleftrightarrow (\forall x \in A, (A \in B(x) \text{ ёки } A = \varnothing).$$

Равшанки, $X \in \tau$, $\varnothing \in \tau$. Агар $G_\alpha \in \tau$ $(\alpha \in I)$ бўлса $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ ҳам τ га тегишли бўлади.

Ихтиёрий $G_1, G_2, \in \tau$ тўпламларни оламиз. Агар $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ бўлса, равшанки $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Энди $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$ ҳолни кўрамиз. Ихтиёрий $x \in G_1 \cap G_2$ элементни оламиз. τ нинг таърифига асосан $G_1 \in B$ (x), $G_2 \in B$ (x), демак, 3) га асосан $G_1 \cap G_2 \in B(x)$. Агар G_1, $G_2, \dots, G_n \in \tau$ бўлса, математик индукция методини қўллаб, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k \in \tau$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, τ система X даги топологиядир.

Энди ҳар бир $x \in X$ учун $B(x)$ система x элементнинг τ топологиядаги барча атрофлари системасидан иборат эканлигини кўрсатамиз.

U тўплам x элементнинг τ топологиядаги бирор атрофи бўлсин. У ҳолда шундай A очиқ тўплам мавжудки $x \in A \subset U$. Равшанки, $A \in B(x)$ ва, демак, 2) га асосан

$U \in B(x)$. Энди ҳар бир $V \in B(x)$ тўплам x нуқтанинг τ топологиядаги атрофи эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $x \in U \subset V$ шартни қаноатлантирувчи ва τ топологияда очиқ бўлган U тўплам мавжудлигини кўрсатиш керак. U ни қуйидагича киритамиз:

$$U=\{y \in X : V \in B(y)\}.$$

Равшанки, $x \in U$. Энди $U \subset V$ ва $U \in \tau$ эканлигини кўрсатамиз. 1) шартдан ҳар бир $y \in U$ элемент V га тегишли эканлиги келиб чиқади, яъни $U \subset V$.

Ихтиёрий $y \in U$ оламиз. 4) шартга асосан шундай $W \in B(y)$ мавжудки, $V \in B(z)$ муносабат барча $z \in W$ лар учун ўринлидир. $V \in B(z)$ муносабат эса z нинг U га тегишли эканлигини кўрсатади, демак, $W \subset U$. 2) шартга биноан $U \in B(y)$, яъни $U \in \tau$ ва шунинг учун V тўплам x нуқтанинг τ топологиядаги атрофидир.

Шундай қилиб, киритилган τ топология учун $B(x)$ система x нуқтанинг барча атрофлари системасидир.

Энди бирор τ_1 топология учун ҳам $B(x)$ система x нуқтанинг τ_1 топологиядаги атрофлари системаси бўлсин. 1- теоремага асосан

$$(A \in \tau) \Longleftrightarrow (\forall x \in A : A \in B(x) \text{ ёки } A=\varnothing),$$
$$(A \in \tau_1) \Longleftrightarrow (\forall x \in A : A \in B(x) \text{ ёки } A=\varnothing).$$

демак, $\tau=\tau_1$.*

Таъриф. X топологик фазонинг ҳар иккита турли x ва y нуқталарининг ўзаро кесишмайдиган мос равишда U_x ва U_y атрофлари мавжуд бўлса, бундай топологик фазо *Хаусдорф фазоси* дейилади; унинг топологияси эса ажратишнинг T_2 аксиомасини *қаноатлантирувчи топология* дейилади.

Масалан, ихтиёрий (X, ρ) метрик фазо Хаусдорф фазосидир. Бунда U_x, U_y атрофлар сифатида мос равишда $S(x,r)$, $S(y,r)$ $\left(r=\frac{1}{3}\rho(x, y)\right)$ шарларни олиш мумкин. Хаусдорф фазоси бўлмаган фазога мисол сифатида элементлари иккитадан кўп бўлган антидискрет топологияли фазони олиш мумкин.

2- теоремадан кўринадики, X тўпламда топологияни унинг ҳар бир нуқтаси атрофлари системаси $B(x)$ ни бериш орқали киритиш мумкин.

Таъриф. x нуқтанинг $B(x)$ атрофлари системасидан бирор $W(x)$ қисмини оламиз. Агар x нуқтанинг ҳар бир $V \in B(x)$ атрофи учун $U \subset V$ муносабатни қаноатлантирувчи $U\in W(x)$ тўплам мавжуд бўлса, у ҳолда $W(x)$ шу нуқта атрофлари системасининг *базиси* дейилади.

Мисол. Метрик фазода барча $S\ (x, r)$, $r>0$, шарлар тўплами x нуқтанинг атрофлари системаси учун базис ташкил этади, хусусан, тўғри чизиқдаги барча $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ интерваллар системаси x нуқтанинг атрофлари системаси учун базисдир.

Таъриф. (X, τ) топологик фазо бўлсин. Агар $M\subset X$ тўплам учун $X\setminus M$ очиқ тўплам бўлса (яъни $X\setminus M\in\tau$), M *ёпиқ тўплам* дейилади.

Топология таърифидан ёпиқ тўпламларнинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1) $\varnothing$, X—ёпиқ тўпламлар;

2) сони ихтиёрий F_α ёпиқ тўпламлар кесишмаси $\bigcap F_\alpha$ ёпиқ тўпламдир;

3) сони чекли ёпиқ тўпламлар йиғиндиси ҳам ёпиқдир.

Бу хоссалар қуйидаги дуаллик принципларининг натижасидир:

$$X\setminus\bigcap_\alpha F_\alpha=\bigcup_\alpha\ (X\setminus F_\alpha);$$

$$X\setminus\bigcup_\alpha F_\alpha=\bigcap_\alpha\ (X\setminus F_\alpha)$$

Ихтиёрий M тўплам берилган бўлиб, бирор $x\in X$ нуқтанинг ҳар бир U атрофи M тўплам билан бўш бўлмаган умумий қисмга эга бўлса, у ҳолда x нуқта M нинг *уриниш нуқтаси* дейилади.

Таъриф. M тўпламнинг барча уриниш нуқталаридан иборат тўплам $\overline{M}$ билан белгиланади ва M нинг *ёпилмаси* дейилади.

Мисоллар. 1. Метрик фазолар учун тўпламнинг ёпилмаси тушунчаси 2.4- § да киритилган ёпилма тушунчаси билан мос тушади.

2. 3.1- §, 3- мисолдаги топологик фазода бўш бўлмаган ихтиёрий тўпламнинг ёпилмаси X га тенг.

Таъриф. A тўпламдаги барча очиқ қисм тўпламлар йиғиндиси A нинг *ичи* дейилади ва Int A билан белгиланади.

Равшанки, Int A тўплам A нинг очиқ қисм тўпламлари орасида энг каттасидир.

Мисоллар. 1. Дискрет топологик фазода ихтиёрий тўпламнинг ичи шу тўпламнинг ўзига тенг.

2. Антидискрет топологик фазода X дан фарқли ҳар бир тўпламнинг ичи бўш тўплам.

3. (X, ρ) метрик фазода A тўпламнинг ички A нинг ички нуқталар тўпламидир (2.4- §).

Тўплам ёпилмасининг хоссаларини ўрганишдан аввал қуйидаги муҳим муносабатни исботлаймиз:

$$X\setminus\overline{M}=\mathrm{Int}\ (X\setminus M). \qquad (1)$$

Дарҳақиқат, агар $x\in X\setminus\overline{M}$ бўлса, у ҳолда x нуқта M нинг уриниш нуқтаси эмас, яъни унинг M билан кесишмайдиган, ва демак, $X\setminus M$ тўпламда жойлашган U_x атрофи мавжуд. Демак, $x\in\mathrm{Int}\ (X\setminus M)$, яъни

$$X\setminus\overline{M}\subset\ \mathrm{Int}\ (X\setminus M).$$

Энди $x\in\mathrm{Int}\ (X\setminus M)$ бўлсин. $\mathrm{Int}\ (X\setminus M)$ тўплам очиқ бўлгани сабабли, у x нуқтанинг M билан кесишмайдиган атрофидир, яъни $x\,\overline{\in}\,\overline{M}$. Демак, $x\in X\setminus\overline{M}$, яъни

$$X\setminus\overline{M}\supset\mathrm{Int}\ (X\setminus M).$$

(1) муносабат исботланди.

Исботланган муносабатга асосан

$$\overline{M}=X\setminus\mathrm{Int}\ (X\setminus M).$$

Демак, $\overline{M}$ ёпиқ тўпламдир. Энди F тўплам M ни ўз ичига олган ихтиёрий ёпиқ тўплам бўлсин. У ҳолда $X\setminus F$ очиқ тўплам ва $X\setminus F\subset X\setminus M$. Шунинг учун $X\setminus F\subset\mathrm{Int}$ $(X\setminus M)$, бундан $F\supset X\setminus\mathrm{Int}\ (X\setminus M)=\overline{M}$. Шундай қилиб, $\overline{M}$ тўплам M ни ўз ичига олган ёпиқ тўпламлар орасида энг кичигидир. Метрик фазолардагидек (2.4- §, 1- теорема), тўпламнинг ёпилмаси қуйидаги хоссаларга эга:

1) $M\subset\overline{M}$;
2) агар $M_1\subset M_2$ бўлса, $\overline{M}_1\subset\overline{M}_2$;
3) $\overline{M_1\cup M_2}=\overline{M}_1\cup\overline{M}_2$;
4) $\overline{\overline{M}}=\overline{M}$, бу ерда $\overline{\overline{M}}$ тўплам $\overline{M}$ нинг ёпилмаси.

Таъриф. Агар $\overline{M}=X$ тенглик ўринли бўлса, M тўплам X нинг *ҳамма ерида зич* дейилади.

Масалан, R^1 тўғри чизиқда барча рационал сонлар тўплами унинг ҳамма ерида зич, шунингдек, R^n фазода ҳамма координаталари рационал сонлар бўлган барча нуқталар тўплами унинг ҳамма ерида зичдир.

Агар (X, τ) топологик фазонинг ҳамма ерида зич саноқли қисм тўплам мавжуд бўлса, бу топологик фазо *сепарабел топологик фазо* дейилади.

Мисоллар. 1. 2.5- § да келтирилган сепарабел метрик фазолар сепарабел топологик фазоларга мисол бўлади.

2. Антидискрет топологик фазо доим сепарабел фазодир.

(X, τ) фазонинг бирор Y қисмини олиб, ушбу $\tau_Y = \{G \cap Y : G \in \tau\}$ системасини тузамиз. Равшанки, (Y, τ_Y) топологик фазодир. Бу топологик фазо (X, τ) топологик фазонинг *қисм фазоси* дейилади. Бу ҳолда τ_Y топологияни τ топологиянинг Y қисм тўпламга *кўчирилгани* дейилади.

Қуйидаги иборалар осонгина исботланади:

1) $W \subset Y$ тўплам $y \in Y$ нуқтанинг τ_Y топологиядаги атрофи бўлиши учун y нуқтанинг τ топологияда $W = Y \cap U$ шартни қаноатлантирувчи U атрофи мавжуд бўлиши зарур ва кифоядир;

2) (Y, τ_Y) фазодаги ҳар бир ёпиқ тўплам X даги бирор ёпиқ тўпламнинг Y билан кесишмасидан иборат;

3) Y даги M тўпламнинг τ_Y топологиядаги ёпилмаси M нинг τ топологиядаги ёпилмаси билан Y нинг кесишмасидан иборат.

3. 3- §. Топологик фазоларни узлуксиз акс эттириш

Таъриф. (X, τ), (Y, t) топологик фазолар, $f: X \to Y$ акс эттириш ва $x_0 \in X$ бўлсин. Агар $f(x_0) = y_0$ нуқтанинг ҳар бир U атрофи учун x_0 нинг $f(V) \subset U$ шартни қаноатлантирувчи V атрофи мавжуд бўлса, f акс эттириш x_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади. Агар f акс эттириш X нинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у *X да узлуксиз* ёки, қисқача, *узлуксиз* дейилади. Хусусан, X топологик фазони тўғри чизиққа узлуксиз акс эттириш X фазодаги *узлуксиз функция* дейилади.

Бирор топологик фазони иккинчи бир топологик фазога акс эттиришнинг узлуксизлигини очиқ тўпламлар ёрдамида ҳам таърифлаш мумкин.

1- теорема. *(X, τ) топологик фазони (Y, t) топологик фазога акс эттириш узлуксиз бўлиши учун Y фазодаги ҳар бир очиқ тўпламнинг X даги асли очиқ бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. $f: X \to Y$ узлуксиз акс эттириш ва $G \subset Y$ бирор очиқ тўплам бўлсин. $f^{-1}(G)$ тўпламнинг X да очиқлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $x_0 \in f^{-1}(G)$ элементни оламиз. У ҳолда $f(x_0) \in G$ ва G тўплам очиқ бўлгани учун у ўзининг $f(x_0)$ нуқтасининг атрофи ҳамдир. Шунинг учун f акс эттиришнинг узлуксизлигидан x_0 нинг $f(U)\subset G$ шартни қаноатлантирувчи U атрофи мавжудлиги келиб чиқади. Бундан $U\subset f^{-1}$ (G) эканлиги ва, демак, f^{-1} (G) нинг очиқ тўпламлиги келиб чиқади.

Энди f акс эттириш учун Y даги ҳар бир очиқ тўпламнинг асли X да очиқ бўлса, у ҳолда f нинг узлуксизлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $x_0 \in X$ нуқтани олиб, $f(x_0)$ нинг бирор G атрофини олайлик. Умумиятликни бузмаган ҳолда G ни очиқ тўплам деб фараз қилишимиз мумкин. Агар f^{-1} (G) тўпламни U билан белгиласак, у ҳолда $x_0 \in U$ ва U очиқ тўплам, демак, у x_0 нинг атрофи ва $f(U)\subset G$.$_*$

Тўплам тўлдирувчисининг асли шу тўплам аслининг тўлдирувчисига тенг бўлгани учун 1-теоремадан қуйидаги теорема бевосита келиб чиқади.

2-теорема. *(X, τ) топологик фазони (Y, t) топологик фазога акс эттириш узлуксиз бўлиши учун Y даги ҳар бир ёпиқ тўпламнинг X даги асли ёпиқ бўлиши зарур ва кифоядир.*

Математик анализдан маълум бўлган узлуксиз функцияларнинг суперпозициялари узлуксиз бўлиши ҳақидаги теорема топологик фазоларни узлуксиз акс эттиришлари учун қуйидагича умумлаштирилади.

3-теорема. *X, Y, Z топологик фазолар ва $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ узлуксиз акс эттиришлар бўлсин. У ҳолда $(g_\circ f): X\to Z$ акс эттириш ҳам узлуксиздир (бу ерда $(g_\circ f)(x)=g(f(x))$).*

Теореманинг исботи 2-теоремадан бевосита келиб чиқади.

Таъриф. X топологик фазони Y топологик фазога f акс эттириш қуйидаги икки шартни қаноатлантирса, у *гомеоморф акс эттириш* ёки *гомеоморфизм* дейилади:

1) f ўзаро бир қийматли акс эттириш ва $f(X)=Y$
2) f ва f^{-1} —узлуксиз акс эттиришлар.

Бу ҳолда X ва Y фазолар *ўзаро гомеоморф топологик фазолар* дейилади.

Мисол. R ва $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ топологик фазолар гомеоморф фазолар, бунда $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ гомеоморфизмни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$f(x)=\operatorname{tg} x.$$

3.4- §. Компактлик

(X, τ) топологик фазо бўлсин. Агар A тўплам ва бирор $\{G_\alpha\}$ $\alpha \in I$ тўпламлар системаси учун $A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ муносабат бажарилса, $\{G_\alpha\}$ $\alpha \in I$ система A учун *қоплама* дейилади. Агар бу системанинг бирор қисми ҳам A учун қоплама бўлса, у *қисм қоплама* дейилади.

Агар $\{G_\alpha\}$ $\alpha \in I$ қопламага кирувчи ҳар бир G_α тўплам очиқ бўлса, бу қоплама A учун *очиқ қоплама* дейилади.

Таъриф. Агар A тўпламнинг ихтиёрий очиқ қопламасидан чекли қисм қоплама ажратиб олиш мумкин бўлса, *A компакт тўплам* дейилади.

$\{F_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ қисм тўпламлар системаси берилган бўлсин. Агар бу системанинг ихтиёрий чекли қисм системасининг кесишмаси бўш бўлмаса, бундай система *марказланган система* дейилади.

1-теорема. *(X, τ) топологик фазо компакт бўлиши учун ундаги ёпиқ тўпламлардан иборат ҳар қандай марказланган системанинг кесишмаси бўш бўлмаслиги зарур ва кифоядир.*

Исбот. Агар $\{G_\alpha\}$ $\alpha \in I$ очиқ тўпламлардан иборат система бўлса, у ҳолда $\{F_\alpha = X \setminus G_\alpha\}$ $\alpha \in I$ система ёпиқ тўпламлардан иборат. Теореманинг исботи қуйидаги дуаллик принципидан бевосита келиб чиқади: ихтиёрий $I_0 \subset I$ учун

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I_0} G_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I_0} F_\alpha .*$$

2-теорема. *Компакт фазонинг ёпиқ қисм тўплами компакт тўпламдир.*

Исбот. F тўплам X компакт фазонинг ёпиқ қисм тўплами ва $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ система F нинг ёпиқ қисм тўпламларидан иборат ихтиёрий марказланган система бўлсин. У ҳолда ҳар бир F_α, $\alpha \in I$ тўплам X да ҳам ёпиқ бўлади ва демак, $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ система X даги унинг ёпиқ тўпламларидан иборат марказланган системадир. Бундан $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \varnothing$ эканлиги келиб чиқади. 1-теоремадан F нинг компакт эканлиги келиб чиқади.$_*$

3-теорема. *Хаусдорф фазосининг компакт қисм тўплами ёпиқдир.*

Исбот. X Хаусдорф фазоси, K эса унинг компакт қисм тўплами бўлсин. Ихтиёрий $y \overline{\in} K$ нуқтани оламиз; унда ҳар бир $x \in K$ нуқта учун x ва y ларнинг мос равишда шундай очиқ бўлган V_x ва $U_y^{(x)}$ атрофлари мавжудки, $V_x \cap U_y^{(x)} = \varnothing$. $\{V_x : x \in K\}$ система K учун очиқ қоплама, демак, унинг чекли

$$V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}$$

қисм қопламаси мавжуд. Энди $U = U_y^{(x_1)} \cap U_y^{(x_2)} \cap \dots \cap U_y^{(x_n)}$ ва $V = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n}$ очиқ тўпламларни олсак, у ҳолда U_y тўплам y нуқтанинг очиқ атрофи бўлиб, $U_y \cap V = \varnothing$; бундан $U_y \cap K = \varnothing$ эканлиги, яъни $y \overline{\in} \overline{K}$ муносабат келиб чиқади. Шундай қилиб, $\overline{K} \subset K$ муносабат исботланди. Тўплам ёпилмасининг хоссаларига кўра $\overline{K} = K$ тенглик келиб чиқади.*

Компакт фазоларнинг узлуксиз акс эттиришлари қатор муҳим хоссаларга эга.

4-теорема. *Компакт фазонинг узлуксиз акс эттиришдаги тасвири компакт фазодир.*

Исбот. X компакт фазо, f эса X ни бирор Y фазога узлуксиз акс эттириш бўлсин. $f(X)$ фазонинг ихтиёрий $\{G_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ очиқ қопламасини оламиз, яъни $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha \subset f(X)$. Сўнгги муносабатдан $X = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} f^{-1}(G_\alpha)$ тенглик келиб чиқади. Бундан ва f нинг узлуксизлигидан $\{f^{-1}(G_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}$ система X нинг очиқ қопламаси эканлиги келиб чиқади ва, демак, ундан чекли қисм қопламани ажратиб олиш мумкин, яъни ушбу $\bigcup_{k=1}^{m} f^{-1}(G_{\alpha_k}) = X$ тенгликни ёзишимиз мумкин. Бундан $f(X) = \bigcup_{k=1}^{m} G_{\alpha_k}$ тенглик келиб чиқади, яъни $G_{\alpha_1}, G_{\gamma_2}, \dots, G_{\alpha_m}$ система $f(X)$ ни қоплайди, демак, $f(X)$ компактдир.

5-теорема. *X компакт фазони Y Хаусдорф фазосига ўзаро бир қийматли ва узлуксиз f акс эттириш гомеоморфизм бўлади.*

Исбот. Теоремани исботлаш учун f^{-1} нинг узлуксизлигини кўрсатиш кифоя. F тўплам X нинг ёпиқ қисм тўплами бўлсин. 2-теоремага кўра F компактдир. Энди 4-теоремани қўллаб, $f(F)$ нинг компакт эканлигини кўрамиз, ва, ниҳоят, 3-теоремага кўра $f(F)$ ёпиқдир. Демак ихтиёрий $F \subset X$ ёпиқ тўплам учун $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ ёпиқдир. 3.3-§ даги 2-теоремага асосан f^{-1} узлуксиз.*

6- теорема. *X компакт фазода f узлуксиз функция берилган бўлсин. У ҳолда f фукция X фазода чегараланган бўлиб, ўзининг аниқ юқори ва қуйи чегараларига эга.*

Исбот. X компакт фазода аниқланган f узлуксиз функция X ни Хаусдорф фазоси бўлмиш R га узлуксиз акс эттириш демакдир. 4- теоремага кўра $f(X)$ компактдир. Бундан $f(X)$ нинг R да чегараланган ва ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади, ва демак, f функция X да ўзининг аниқ юқори чегарасига ва аниқ қуйи чегарасига эришади.$_*$

3.5-§. Фазоларнинг топологик кўпайтмалари

X ва Y топологик фазолар бўлиб, $X\times Y$ эса уларнинг тўғри кўпайтмаси бўлсин, яъни

$$X\times Y=\{(x, y): x\in X,\ v\in Y\}.$$

Ихтиёрий $(x, y)\in X\times Y$ ни олиб, $B(x)$ ва $B(y)$ орқали мос равишда x ва y ларнинг барча атрофлари системасини белгилаймиз.

Энди $X\times Y$ тўпламдаги (x, y) нуқтанинг $B(x, y)$ атрофлари системасини қуйидагича киритамиз. Агар $A\subset X\times Y$ тўплам бирор $U_x\times U_y$ $(U_x\in B(x),\ U_y\in B(y))$ тўпламни ўз ичига олса, A ни $B(x, y)$ нинг элементи деб ҳисоблаймиз. Ҳосил бўлган $B(x, y)$ система 3.2- §, 2- теоремадаги 1) — 4) хоссаларга эга. Бунда 1) — 2)- хоссалар равшан. 3) — 4) хоссалар эса $B(x)$, $B(y)$ системаларнинг мос хоссаларидан келиб чиқади.

Демак 3.2- § даги 2- теоремага кўра $X\times Y$ тўпламда шундай ягона τ *топология* мавжудки, бу топологияда $B(x, y)$ система (x, y) нуқтанинг атрофларини ташкил қилади.

$(X\times Y, \tau)$ топологик фазони X ва Y топологик фазоларнинг топологик *кўпайтмаси* дейилади. τ топология эса X ва Y даги топологияларнинг *кўпайтмаси* дейилади.

Топологик кўпайтма тушунчасини сони чексиз топологик фазолар учун ҳам аниқлаш мумкин. $\{X_\alpha : \alpha\in A\}$ топологик фазолар системаси бўлсин. $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ орқали X_α $(\alpha\in A)$ фазоларнинг тўғри кўпайтмасини белгилаймиз, яъни $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ барча шундай $x=\{x_\alpha\}$ системалар тўпламики,

x нинг x_α координатаси X_α фазога тегишлидир. Бирор $x^0=\{x^0_\alpha\}\in\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ элементни оламиз. A тўпламдан ихтиёрий сони чекли $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ индексларни ва x^0 элементнинг $x^0_{\alpha_1}, x^0_{\alpha_2}, \ldots, x^0_{\alpha_n}$ координаталарини оламиз. $U_{x^0_{\alpha_1}}$, $U_{x^0_{\alpha_2}}, \ldots, U_{x^0_{\alpha_n}}$ тўпламлар мос равишда $x^0_{\alpha_1}, x^0_{\alpha_2}, \ldots, x^0_{\alpha_n}$ нуқталарнинг атрофлари бўлсин; қуйидаги тўпламни аниқлаймиз:

$$U_{x^0}=\{\{x_\alpha\}: x_{\alpha_k}\in U_{x^0_{\alpha_k}},\ k=\overline{1,n}\}. \tag{1}$$

$\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ тўпламдаги (1) кўринишга эга бўлган қисм тўпламлар системасини $F(x^0)$ билан белгилаймиз. Энди $B(x^0)$ системани қуйидагича аниқлаймиз. Агар W тўплам ва бирор $U_{x^0}\in F(x^0)$ учун $W\supset U_{x^0}$ муносабат ўринли бўлса, $W\in B(x^0)$ деб ҳисоблаймиз. $B(x^0)$ система 3.2- §, 2- теоремадаги 1) —4) хоссаларга эга. Ҳақиқатан, 1), 2) хоссалар равшан. 3) хоссани исботлаймиз. Агар $U, V\in B(x^0)$ бўлса, у ҳолда

$$U\supset U_{x^0}=\{\{x_\alpha\}: x_{\alpha_k}\in U_{x^0_k},\ k=\overline{1n}\},$$

$$V\supset V_{x^0}=\{\{x_\alpha\}: x_{\beta_i}\in V_{x^0_{\beta_i}},\ i=\overline{1,m}\}.$$

Демак,

$$U\cap V\supset U_{x^0}\cap V_{x^0}=\{\{x_\alpha\}: x_{\alpha_k}\in U_{x^0_{\alpha_k}},\ x_{\beta_i}\in V_{x^0_{\beta_i}},$$
$$k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}\}.$$

Равшанки, $U_{x^0}\cap V_{x^0}\in F(x^0)$ демак, $U\cap V\in B(x^0)$ 4) хосса ҳам шунга ўхшаш исботланади.

3.2- §, 2- теоремага кўра $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ тўпламда шундай ягона τ топология мавжудки, унда ихтиёрий $x\in\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ нуқтанинг барча атрофлари системаси вазифасини $B(x)$ бажаради. $F(x)$ эса $B(x)$ учун базис бўлади.

Таъриф $(\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha, \tau)$ топологик фазо X_α, $\alpha\in A$ топологик фазоларнинг *топологик* ёки *Тихонов кўпайтмаси* дейилади, τ топология эса *Тихонов топологияси* дейилади.

1- **теорема.** *Агар ҳар бир $\alpha \in A$ учун X_α Хаусдорф фазоси бўлса, у ҳолда уларнинг топологик кўпайтмаси ҳам Хаусдорф фазосидир.*

Исбот. Агар $x, y \in \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ ва $x \neq y$ бўлса, у ҳолда шундай $\alpha_0 \in A$ мавжудки, $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$ бўлади.

X_{α_0} Хаусдорф фазоси бўлгани учун x_{α_0} ва y_{α_0} нуқталарнинг мос равишда шундай $U_{x_{\alpha_0}}$ ва $V_{y_{\alpha_0}}$ атрофлари мавжудки, улар учун $U_{x_{\alpha_0}} \cap V_{y_{\alpha_0}} = \varnothing$. Ушбу

$$U_x = \{\{z_\alpha\} : z_{\alpha_0} \in U_{x_{\alpha_0}}\}, \quad V_y = \{\{z_\alpha\} : z_{\alpha_0} \in V_{y_{\alpha_0}}\}$$

тўпламлар мос равишда x ва y нуқталарнинг Тихонов топологиясидаги атрофлари бўлиб, $U_x \cap V_y = \varnothing$ шартни қаноатлантиради. Демак, $(\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau)$—Хаусдорф фазоси.*

Энди умумий топологиядаги энг муҳим теоремалардан бири бўлган А. Н. Тихонов теоремасини исботсиз келтирамиз[1].

2- **теорема** (А. Н. Тихонов теоремаси). *Агар ҳар бир $\alpha \in A$ учун X_α компакт топологик фазо бўлса, $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ ҳам компакт фазодир.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Уч элементдан иборат бўлган X тўпламдаги ҳамма топологияларни топинг.

2. Чекли тўпламдаги T_2 топология дискрет бўлишини исботланг. $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ тўпламда-чи?

3. (X, τ) топологик фазо, $\{x_n\}$ эса X даги кетма-кетлик бўлсин. $a \in X$ нинг ихтиёрий U атрофи учун $n > N$ бўлганда $x_n \in U$ бўладиган N сонлар топилса, a нуқта $\{x_n\}$ нинг *лимити* дейилади.

Хаусдорф фазосида кетма-кетликнинг лимити биттадан ортиқ бўлмаслигини кўрсатинг. Фазо Хаусдорф аксиомасини қаноатлантирмасачи?

4. Агар (Y, t) топологик фазо бўлиб, f акс эттириш X тўпламни Y фазога акслантирса, у ҳолда

$$f^{-1}(t) = \{f^{-1}(G) : G \in t\}$$

система X да топология бўлишини кўрсатинг. Бу топология t топологиянинг X даги „асли“ деб ҳам юритилади.

---

[1] Теореманинг исботи, масалан, [25] китобнинг 194- бетида келтирилган.

5. (X, τ) топологик фазо, $Y \subset X$, $i: Y \to X$ эса $i(y) =$ бўлган акслантириш дейлик. $i^{-1}(\tau)$ топология τ нинг га кўчирилгани эканлигини исботланг.

6. (X, τ) топологик фазони (Y, t) топологик фазог f акс эттириш узлуксиз бўлиши учун $f^{-1}(t)$ топологи τ топологиядан кучсизроқ бўлиши зарур ва кифоялигин кўрсатинг.

7. (X, τ) ва (Y, t) топологик фазоларнинг топологиялари метрикалар билан аниқланган бўлсин. Берилга $f: X \longrightarrow Y$ акс эттиришнинг узлуксизлик таърифи 2- бобд келтирилган метрик фазолардаги узлуксизлик таърифи билан тенг кучли эканлигини исботланг.

8. R да шундай τ_1, τ_2, τ_3 T_2- топологиялар киритингки, натижада ҳосил бўлган топологик фазолар гомеоморф бўлмасин.

9. R даги табиий топологияни $X = [0,1] \cup [2,3]$ ва $Y = [0,2]$ қисм тўпламларга кўчирайлик. X ни Y га акслантирувчи ўзаро бир қийматли, узлуксиз, лекин гомеоморфизм бўлмаган акслантириш қуринг.

10. R^n фазода бирор қисм тўплам компакт бўлиши учун у чегараланган ҳамда ёпиқ бўлиши зарур ва кифоя эканлигини исботланг.

11. Метрик фазолар учун 2- бобда киритилган компактлик тушунчаси шу бобдаги компактлик тушунчаси билан устма-уст тушишини кўрсатинг.

12. (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) — топологик фазолар, $\pi_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ акслантириш $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ $(i = 1,2)$ каби аниқлансин (проекциялар), $X_1 \times X_2$ даги Тихонов топологияси π_1 ва π_2 узлуксиз бўлган энг кучсиз топология бўлишини кўрсатинг.

13. Агар топологик фазода ҳар бир нуқтанинг атрофлари системасининг саноқли базиси мавжуд бўлса, топологик фазо *саноқлиликнинг биринчи аксиомасини қаноатлантирувчи фазо* дейилади. $\{X_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ топологик фазолар системаси бўлиб, ҳар бир X_α фазо R фазога гомеоморф бўлсин. У ҳолда $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ топологик фазони R^Δ билан белгилаймиз. R^Δ топологик фазо саноқлиликнинг биринчи аксиомасини қаноатлантириши учун Δ тўплам саноқли бўлиши зарур ва кифоялигини исботланг.

IV боб

НОРМАЛАНГАН ФАЗОЛАР

4.1- §. Нормаланган фазо таърифи ва унинг баъзи хоссалари

Таъриф. V вектор фазо бўлиб, p функционал V ни тўғри чизиққа акс эттирсин. p функционал ушбу шартларни қаноатлантирса, у *норма* дейилади:

1) $p(x) \geqslant 0$; фақат $x = \theta$ учун $p(x) = 0$;

2) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$;

3) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, λ — сон.

Норма киритилган вектор фазо *нормаланган фазо* дейилади, x элементнинг $p(x)$ нормаси одатда $\|x\|$ билан белгиланади. Агар $\rho(x, y)$ билан $\|x - y\|$ сонни белгиласак, $\rho(x, y)$ метрика эканлиги бевосита кўриниб турибди. Демак, ҳар қандай нормаланган фазо метрик фазодир.

Мисоллар.

1. λ ҳақиқий сон учун $\|\lambda\| = |\lambda|$ деб олсак, у ҳолда R, яъни тўғри чизиқ нормаланган фазо бўлади.

2. n ўлчамли R^n ҳақиқий фазода $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ элемент учун Евклид нормасини қуйидагича киритамиз:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}. \tag{1}$$

Бунда норманинг 1) ва 3) шартлари бажарилиши равшан, 2) шарт эса 2.1- § даги (2) тенгсизликдан келиб чиқади.

Шу R^n фазонинг ўзида қуйидаги нормаларни ҳам киритиш мумкин:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \tag{2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1<k<n} |x_k|. \tag{3}$$

n ўлчамли C^n комплекс фазода ҳам (1), (2), (3) каби нормаларни кўриш мумкин.

3. $C\,[a, b]$ фазода нормани қуйидагича аниқлаймиз:

$$\|f\| = \max_{a<t<b} |f(t)|.$$

Равшанки, бу норма учун ҳам 1) ва 3) шартлар бевосита бажарилади. 2) шартнинг бажарилишини кўрсатамиз. Ҳар қандай $t\in[a, b]$ нуқта ва f, g функциялар учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$|(f+g)\ (t)|=|f(t)+g(t)|\leqslant|f(t)|+|g(t)|\leqslant$$
$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|g(t)|=\|f\|+\|g\|.$$

t ихтиёрий бўлгани учун

$$\|f+g\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|(f+g)\ (t)|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

4. m вектор фазода $x=(x_1\ , x_2, \ , \dots , x_n, \dots)$ элементнинг нормаси деб ушбу

$$\|x\|=\sup_{1\leqslant n<\infty}|x_n|$$

сонга айтамиз. Норманинг аксиомалари бевосита текширилади.

Нормаланган V фазонинг V_0 вектор қисм фазоси ёпиқ бўлса, у ҳолда V_0 ни нормаланган V фазонинг қисм фазоси дейилади.

Учинчи мисолдаги $C[a, b]$ фазода $P(x)$ кўпҳадлар тўплами ёпиқ бўлмаган вектор қисм фазодир, демак, нормаланган фазо маъносида $P(x)$ фазо $C[a, b]$ нинг қисм фазоси эмас.

Нормаланган V фазода A тўпламнинг чизиқли қобиғи бўлган $L[A]$ вектор қисм фазони оламиз. $L[A]$ нинг ёпилмаси A тўпламнинг *чизиқли ёпилмаси* дейилади ва $\overline{L[A]}$ билан белгиланади. Агар $\{x_\alpha\}$ системанинг чизиқли ёпилмаси V фазога тенг бўлса, у ҳолда $\{x_\alpha\}$ *тўла система* дейилади.

Юқорида айтиб ўтганимиздек, нормаланган фазолар метрик фазоларнинг хусусий ҳолидир. Демак, бундай фазоларнинг тўла ёки тўла эмаслиги ҳақида гап юритиш мумкин. Норма ёрдамида фазонинг тўлалиги қуйидагича ифодаланади:

Ушбу $\|x_n-x_m\|\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий кетма-кетлик учун шундай $x_0\in E$ элемент мавжудки, $x_n\to x_0$ муносабат бажарилади.

Тўла нормаланган фазо *Банах фазоси* ёки *B-фазо* дейилади ва нормаланган фазолар ичида муҳим роль ўйнайди. Юқоридаги R, R^n, $C[a, b]$, m фазоларнинг тўлалиги

II бобда кўрсатилган эди, демак, улар Банах фазоларидир. Яна мисоллар кўрамиз.

5) $C^2[a, b]$ фазода (2.6- §) нормани қуйидагича киритамиз:

$$\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t)\, dt \right)^{1/2}.$$

Норма аксиомалари бевосита текширилади (фақат учбурчак аксиомасини кейинчалик умумий ҳолда исботлаймиз (Коши — Буняковский тенгсизлиги)). 2.6- § да бу фазонинг тўла эмаслиги кўрсатилган.

6) l_2 фазода нормани

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}, \quad x = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

кўринишда киритсак, l_2 фазо B фазога мисол бўлади.

V нормаланган фазо бўлиб, $\hat{V}$ фазо V ни ўз ичига олувчи B фазо бўлсин. Агар V фазо $\hat{V}$ нинг ҳамма ерида зич бўлса, у ҳолда $\hat{V}$ фазо V нинг *тўлдирувчиси* дейилади.

1-теорема. *Ихтиёрий нормаланган фазо ягона тўлдирувчига эга.*

Исбот. Метрик фазоларнинг тўлдирувчи фазоси ҳақидаги теоремага асосан V нинг тўлдирувчиси бўлган $\hat{V}$ метрик фазо мавжуд. Биз шу метрик фазога V даги алгебраик амалларни давом эттиришимиз керак. $\hat{V}$ нинг x, y элементларига яқинлашувчи бўлган ва V фазонинг элементларидан иборат $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларни оламиз ва $z_n = x_n + y_n$ элементларни тузамиз, $n = 1, 2, \ldots$. Ушбу

$$\|z_n - z_m\| \leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

муносабатдан $\{z_n\}$ кетма-кетликнинг фундаментал эканлиги кўриниб турибди. Демак, z_n кетма-кетлик $\hat{V}$ фазодаги бирор z элементга яқинлашувчидир, яъни $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$. Бу z элементни x ва y элементларнинг йиғиндиси деймиз, яъни $z = x + y$. Аниқланган z элемент $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларга боғлиқ эмас. Дарҳақиқат, агар $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$ мос равишда x ва y элементларга яқинлашувчи бошқа кетма-кетликлар бўлса, у ҳолда $z'_n = x'_n + y'_n$ учун

$$\|z_n - z'_n\| \leqslant \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

демак, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z'_n$.

Шунга ўхшаш $\hat{V}$ метрик фазода сонга кўпайтириш амалини киритиш мумкин. Бевосита кўриниб турибдики, $\hat{V}$ фазода киритилган алгебраик амаллар V фазода кўрилса, ундаги берилган амаллар билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, $\hat{V}$ вектор фазога айлантирилди. Энди $x \in \hat{V}$ элемент учун нормани ушбу

$$\|x\| = \rho(x, 0) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$$

$$(x_n \to x,\ x_n \in V)$$

кўринишда аниқласак, $\hat{V}$ нормаланган фазо бўлади. V фазо $\hat{V}$ нинг вектор қисм фазосини ҳосил қилади.

Киритилган норма $\hat{V}$ фазода метрикани ҳосил қилгани учун $\hat{V}$ фазо B-фазодир ва V нинг ҳамма ерида зичдир, яъни $\hat{V}$ фазо нормаланган V фазонинг тўлдирувчиси. Ниҳоят, тўлдирувчи фазонинг ягоналигини исботлаймиз. Тўлдирувчи $\hat{V}$ метрик фазонинг ягоналиги 2.7- § да исботланган. Демак, $\hat{V}$ фазодаги алгебраик амалларнинг ягоналигини исботласак бас. Бу эса амалларнинг узлуксизлигидан келиб чиқади. Дарҳақиқат, йиғинди $z = x +_1 y$ ва $z = x +_2 y$ кўринишларда аниқланган бўлсин. У ҳолда $x_n \to x$, $y_n \to y$ $(x_n, y_n \in V)$ муносабатдан $x_n + y_n \to x] +_1 y$ ва $x_n + y_n \to x +_2 y$. Яқинлашувчи кетма-кетлик ягона лимитга эга бўлгани учун $x +_1 y = x +_2 y$.

Шунга ўхшаш, сонга кўпайтириш амалининг ягоналиги кўрсатилади.*

Банах фазосига муҳим бир мисол кўрамиз. X компакт топологик фазо бўлиб, $C(X)$ фазо X да аниқланган узлук-

б) ихтиёрий е>0 учун ҳар бир х£Х нуқтанинг шундай V атрофа топиллдики, ушбу
тенгсизлик исталган у £ V ва /£Ф учун бажарилади, яъни Ф текис даражада узлуксиз.

У ҳолда Ф тўплая С(Х) Банах фазосида нисбий компакт тўплам бўлади.

И с бот. С (X) тўла бўлганлиги учун 2.8- § даги 2- тео-ремага асосан Ф нинг тўла чегаралангалигиня кўрсатиш кифоя.

Ихтиёрий е>0 оламиз. X фазо компакт бўлгани учун шундай хи х?, ... , хп£Х нуқталар мавжудки, уларнин

б) У ф й

у и ?,

б) хоссадаги Уи

п

X га тенг, яъни X = \] \Дх) -/(х,) | < '=

Бу тенгсизликдан ва а) чегаралангалиги, яъни

укр уди, уларнинг

Уп атрофларининг йиғиндиси

ва Ф, х 6 У{, 1 < /< п). (5)

шартдан Ф тўпламнинг текис

келиб чиқади.

О тўпламни қуйидагича аниқлаймиз:

(6)

Ҳар бир /£Ф функцияга миз, бу ерда

я сгС" нуқтани мос қўя-

Пп тўплам Сп фазода чегараланган, демак, у тўла чегара-ланган. Яъни шундай /,, /2, ... , /т£Ф функциялар топиладики, ҳар бир р(/) бирор р(/й) нуқтадан е дан кичик масофада жойлашган. Демак, ихтиёрий/^Ф учу шундай к топиладики (1^^^ т),

X фазонинг ҳар бир х нуқтаси бирор Уг ичида жойлаш-ган, демак, шу I учун

\/(х) - ДХ1) |<е ва |Л (х) -Л (х,) | <в. Булардан

Ш ~Ш | <\/(х) ~/(Х1) | + |/{Х{) -Л(^) | +

Пемак, ихтиёрий е учун чекли 3 е- тўр мавжуд, яъни Ф

л - чегараланган

Мазкур параграфни чекли ўлчамлн нормаланган фазо-ларни ўрганиш билан якунлаймиз.

Таъриф- Бирор Уи У% нормаланган фазолар орасида ,]/х-> У2 чизиқли изоморфизм мавжуд бўлсин. Агар фазолардаги нормаларга нисбатан и ва к~' узлуксиз бўлса, у ҳолда м нормаланган фазоларнинг изоморфи дейи-лади, ^1 ва ^а фазолар эса изоморф нормаланган фазо-лар 'дейилади.

4-теорема. Ихтиёрий ҳақиқий (комплекс) п ўл-иамли нормаланган фазо Эвклид нормали Нп (Сп) фазога изоморфдир.

Исбот. Теоремани ҳақиқий фазолар учун исботлаймиз (комплекс ҳолда исботи шунга ўхшаш). У нормаланган фазо п ўлчамли бўлиб, х{, х2, . ■ . , хп ундаги базис бўлсин. Бу фазонинг ихтиёрий х элемент ушбу

х = Е

кўринишгэ эга; ^^ ментга Нп фазодаги

Ъпхп

г = 1, 2, ... , п. Бундай х эле-

и(х) =х = (Ъи Ъа, . . . , 1п)

элементни мос қўямиз. Натижада ҳосил бўлган д,: V -> Я.п мослик чизиқли изоморфизм эканлиги равшан
Демак и ва п~х узлуксиз эканлигини исботлаш керак. Ихтиёрий х£ V учун
\\x\\ =
п
V
бУ ерда р = Учун
яъни
Хусусан,   ихтиёрий х, у £ V

Демак, $u^{-1}: R^n \to V$ узлуксиз акс эттириш. Энди R^n фазодаги

$$S=\left\{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\in R^n: \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1\right\}$$

бирлик сферада ушбу

$$f(\overline{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n\|$$

функцияни кўрамиз. S сферада $\xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ сонларнинг ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмагани ва $\{x_i\}$ векторлар чизиқли эркли бўлгани сабабли ихтиёрий $\overline{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\in S$ учун

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0.$$

Ушбу

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| = |f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| < \beta\|\overline{x} - \overline{y}\|$$

тенгсизликдан f узлуксиз функция эканлиги кўриниб турибди. S компакт бўлгани учун 2.8-§, 5-теоремага асосан бу функция S тўпламда ўзининг минимумига эришади. Равшанки, $\alpha = \min f(\overline{x}) > 0$. Демак, $x \in S$ учун

$$f(\overline{x}) = \|x\| \geqslant \alpha,$$

яъни ихтиёрий $\overline{x}\in R^n$ учун

$$f(\overline{x}) = \|x\| = \|\overline{x}\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i x_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}} \right\| \geqslant \|\overline{x}\|\alpha,$$

яъни

$$\|u(x)\| = \|\overline{x}\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|x\|.$$

Бундан кўриниб турибдики,

$$\|u(x) - u(y)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|x - y\|,$$

яъни u узлуксиздир.*

1-натижа. Ҳамма ҳақиқий (комплекс) n ўлчамли нормаланган фазолар ўзаро изоморфдир.

2-натижа. Ихтиёрий чекли ўлчамли нормаланган фазо тўладир.

Исбот. Теоремада биз аслида ихтиёрий чекли ўлчамли нормаланган фазонинг нормаси R^n (C^n) даги нормага эквивалент эканлигини кўрсатдик. Бундан ва R^n (C^n) фазонинг тўлалигидан ихтиёрий чекли ўлчамли фазонинг тўлалиги келиб чиқади.*

3-натижа. Нормаланган фазонинг ҳар бир чекли ўлчамли вектор қисм фазоси ёпиқдир.

Исбот. V нормаланган фазонинг чекли ўлчамли V_1 қисм фазосида яқинлашувчи $x_n \to x \in V$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Ихтиёрий яқинлашувчи кетма-кетлик фундаментал бўлгани сабабли $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам V_1 фазода фундаментал. 2-натижага асосан V_1 тўла, демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик бирон $x_0 \in V_1$ нуқтага яқинлашувчи бўлади. Лимитнинг ягоналигидан $x = x_0 \in V_1$, яъни V ёпиқ.*

4.2-§ Эвклид фазолари

Энди биз нормаланган фазонинг хусусий ҳоли бўлган ва функционал анализда кенг қўлланиладиган Эвклид фазосини ўрганамиз.

Ҳақиқий E вектор фазонинг $\{x, y\}$ жуфт элементларида аниқланган, (x, y) кўринишда белгиланувчи ва қуйидаги тўрт шартни (аксиомаларни) қаноатлантирувчи ҳақиқий функция *скаляр кўпайтма* дейилади:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, $\lambda \in R$;
4) $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Скаляр кўпайтма киритилган вектор фазо *Эвклид фазоси* дейилади. Скаляр кўпайтма ёрдами билан Эвклид фазосида норма қуйидагича киритилади:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

бу ерда арифметик илдиз назарда тутилади. Норманинг биринчи шарти скаляр кўпайтманинг тўртинчи аксиомасидан бевосита келиб чиқади. Норманинг учинчи шарти скаляр кўпайтманинг учинчи аксиомасининг натижасидир. Ҳақиқатан,

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda|\,\|x\|.$$

Норманинг иккинчи шартини исботлаш учун биз олдин қуйидаги Коши — Буняковский тенгсизлигини исботлаймиз:

$$|(x,\ y)| < \|x\|\ \|y\|. \qquad (1)$$

Бунинг учун ихтиёрий λ сон олиб, қуйидаги ифодани тузамиз:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y,\ \lambda x + y) = \lambda^2 (x,\ x) + 2\lambda(x,\ y) + (y,\ y) =$$
$$= \|x\|^2 \lambda^2 + 2(x,\ y)\ \lambda + \|y\|^2.$$

Ушбу $\varphi(\lambda) = \|\lambda x + y\|^2 \geqslant 0$ муносабатга кўра $\varphi(\lambda)$ квадрат учҳаднинг дискриминанти $(x,\ y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ мусбат эмас, яъни

$$(x,\ y)^2 \leqslant \|x\|^2\ \|y\|^2.$$

Бу тенгсизликдан керак бўлган (1) тенгсизлик келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\|x + y\|^2 = \varphi(1) = \|x\|^2 + 2(x,\ y) + \|y\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Яъни норманинг иккинчи аксиомаси

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

исботланди.

Скаляр кўпайтма ёрдами билан Эвклид фазосида икки элемент орасидаги бурчак тушунчасини қуйидагича киритиш мумкин:

$$\cos\psi = \frac{(x,\ y)}{\|x\|\ \|y\|},\quad 0 \leqslant \psi \leqslant \pi.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифоданинг абсолют қиймати Коши — Буняковский тенгсизлигига биноан бирдан катта эмас, яъни ҳар қандай нолдан фарқли x ва y учун ψ аниқланган. Агар $(x,\ y) = 0$ бўлса, $\psi = \frac{\pi}{2}$. Бу ҳолда x ва y *ортогонал векторлар* деб аталади.

Агар x элемент A тўпламнинг ҳар бир элементига ортогонал бўлса, x элемент A *тўпламга ортогонал* дейилади ва $x \perp A$ билан белгиланади.

A_1 тўпламнинг ҳар бир элементи A_2 тўпламнинг ихтиёрий элементига ортогонал бўлса, A_1 ва A_2 тўпламлар *ортогонал* дейилади ва $A_1 \perp A_2$ билан белгиланади.

Эвклид фазосининг айрим хоссаларини келтирамиз.

① Агар $x_n \to x$, $y_n \to y$ норма маъносида яқинлашса, у ҳолда $(x_n, y_n) \to (x, y)$ (скаляр кўпайтманинг узлуксизлиги).

Исботи. Коши — Буняковский тенгсизлигига асосан

$$|(x, y)-(x_n, y_n)| \leqslant |(x, y-y_n)| + |(x-x_n, y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|\,\|y-y_n\| + \|x-x_n\|\,\|y_n\|.$$

Яқинлашувчи $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг нормаси чегараланган бўлгани учун охирги ифода нолга интилади.

② Эвклид фазосининг ихтиёрий x, y элементлари учун

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

тенглик ўринлидир (параллелограмм формуласи).

Ҳақиқатан,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,\ x+y)+(x-y,\ x-y)=$$
$$=(x,\ x)+(x,\ y)+(y,\ x)+(y,\ y)+(x,\ x)-(x,\ y)-$$
$$-(y,\ x)+(y,\ y)=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

③ а) $x \perp y_1$ ва $x \perp y_2$ муносабатлардан $x \perp (\lambda y_1 + \mu y_2)$ муносабат келиб чиқади (λ, μ — ҳақиқай сонлар).

б) $x \perp y_n$ $(n=1,2, \ldots)$ бўлиб, y_n кетма-кетлик y элементга яқинлашса, у ҳолда $x \perp y$.

Дарҳақиқат, $x \perp y_n$ бўлгани учун $(x, y_n)=0$, $y_n \to y$ дан 1- хоссага асосан $(x, y_n) \to (x, y)$ демак, $(x, y)=0$, яъни $x \perp y$.

в) $x \perp A$ бўлса, у ҳолда $x \perp \overline{L[A]}$.

г) A тўпламнинг ҳар бир элементига ортогонал бўлган барча элементлар тўпламини $A^{\perp}$ билан белгилаймиз. 3 а) хоссага асосан $A^{\perp}$ тўплам E нинг вектор қисм фазосидир. 3 б) га асосан $A^{\perp}$ ёпиқдир. Демак, $A^{\perp}$ тўплам нормаланган E фазонинг қисм фазосидир. Нолдан фарқли бўлган векторларнинг $\{x_\alpha\}$ системаси ушбу

$$(x_\alpha,\ x_\beta)=0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

шартни қаноатлантирса, бу система *ортогонал система* дейилади.

Ҳар қандай ортогонал система чизиқли эрклидир. Ҳақиқатан, агар

$$a_1x_{\alpha_1}+a_2x_{\alpha_2}+\ldots+a_nx_{\alpha_n}=0$$

бўлса, у ҳолда ҳар қандай $x_{\alpha_i} (i = \overline{1, n})$ учун ушбу муносабат

$(x_{\alpha_i}, a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_1} + \ldots + a_n x_{\alpha_n}) = a_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i})$ ва $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$ бўлгани учун $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ тенглик келиб чиқади.

Тўла ортогонал система (4.1 - §) *ортогонал базис* дейилади. Агар шу системада ҳар бир элементнинг нормаси бирга тенг бўлса, бу система *ортонормаланган базис* ёки қисқача *ортонормал базис* дейилади.

Мисоллар. 1. n ўлчамли R^n фазода

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ ва } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

элементларнинг скаляр кўпайтмасини ушбу

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

кўринишда олсак, R^n Эвклид фазосига айланади.

Бу фазода қуйидаги элементлар ортонормал базис ҳосил қилади:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0\ 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0 \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

2. l_2 фазонинг элементлари ушбу

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

шартни қаноатлантирувчи $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ кетма-кетликлардир.

Бу фазода скаляр кўпайтма қуйидагича аниқланади:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Ўнг томондаги ифоданинг чеклилиги ушбу

$$2x_i y_i \leqslant x_i^2 + y_i^2$$

элементар тенгсизликдан келиб чиқади.

Скаляр кўпайтманинг хоссалари осонликча текширилади. Бу Эвклид фазосида қуйидаги векторлар ортонормал базис ташкил этади:

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0 \ldots),$$
$$e_2 = (0,\ 1,\ 0 \ldots),$$
$$e_3 = (0,\ 0,\ 1,\ \ldots).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Равшанки, бу система ортонормал. Биз унинг тўла эканлигини исботлаймиз. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$ ихтиёрий элемент ва

$$x^{(n)} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ 0,\ 0,\ \ldots)$$

бўлсин. Бу ҳолда $x^{(n)}$ ушбу $e_1, e_2, \ldots, e_n$ векторларнинг чизиқли комбинациясидир ва

$$\|x - x^{(n)}\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Яъни $\{e_n\}$ системанинг чизиқли ёпилмаси l_2 га тенгдир.

Юқоридаги мисолларда биз ортогонал базислар мавжудлигини кўрсатиб ўтдик. Қуйидаги икки теорема Эвклид фазосида ортогонал базиснинг мавжудлигига доирдир.

1-теорема. (ортогоналлаштириш теоремаси). *E Эвклид фазосида*

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots \tag{2}$$

чизиқли эркли система берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи

$$\varphi_1\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots \tag{3}$$

система мавжуд:

1) (3) система ортонормал,

2) ҳар бир φ_n элемент $f_1, f_2, \ldots, f_n$ элементларнинг чизиқли комбинациясидир, яъни

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + a_{n2} f_2 + \ldots + a_{nn} f_n;$$

3) ҳар бир f_n элемент $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ элементларнинг чизиқли комбинациясидир, яъни

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + b_{n2}\varphi_2 + \ldots + b_{nn}\varphi_n \text{ ва } b_{nn} \neq 0.$$

(3) системанинг ҳар бир элементи 1) —3) шартлар билан бир қийматли аниқланади (± 1 коэффициентини ҳисобга олмаганда).

Исбот. φ_1 элементни ушбу $\varphi_1 = a_{11}f_1$ кўринишда оламиз. Бу кўринишдаги a_{11} коэффициент қуйидаги муносабатлардан топилади:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \|\varphi_1\|^2 = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1.$$

Бундан

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}, \quad \varphi_1 = \frac{\pm f_1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}.$$

Шундай қилиб, φ_1 элементнинг ишораси ҳисобга олинмаса, у бир қийматли аниқланади.

Энди $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ элементлар топилади деб фараз қилайлик. У ҳолда f_n элементни ушбу

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn-1}\varphi_{n-1} + h_n$$

кўринишда оламиз; бу ерда $k < n$ бўлганда

$$(h_n, \varphi_k) = 0.$$

Ҳақиқатан, b_{nk} коэффициентлар ва, демак, h_n элемент ҳам қуйидаги шартлардан бир қийматли аниқланади:

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 - \ldots - b_{nn-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) =$$
$$= (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) = 0.$$

Равшанки, $(h_n, h_n) > 0$ (акс ҳолда (2) система чизиқли боғлиқ бўлар эди). Энди φ_n элементни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}.$$

Натижада h_n ва φ_n ҳам индукция ёрдами билан $f_1, f_2, \ldots, f_n$ орқали ифодаланади; яъни

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \ldots + a_{nn} f_n,$$

бу ерда $a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}}$. Бундан ташқари,

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1, \ (\varphi_n, \varphi_k) = 0 \ (k < n)$$

ва

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n, \quad (b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0).*$$

(2) системадан (3) системага ўтиш амали *ортогоналлаштириш процесси* дейилади.

Таъриф. E Эвклид фазоси метрик фазо сифатида сепарабел бўлса, *E сепарабел Эвклид фазоси* дейилади.

2-теорема. *Ҳар қандай чексиз ўлчамли сепарабел Эвклид фазосида саноқли ортонормал базис мавжуд.*

Исбот.

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots -$$

саноқли, ҳамма ерда зич тўплам бўлсин, деб фараз қилайлик. Бу системадан тўла чизиқли эркли $\{f_n\}$ системани танлаб оламиз. Бунинг учун, агар $\{\psi_n\}$ системадаги ψ_k элемент $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{k-1}$ элементларнинг чизиқли комбинацияси бўлса, уни бу системадан чиқариб ташлаймиз. Ҳар бир k учун шундай операцияни бажарсак, қолган элементлар чизиқли эркли бўлиб, система тўлалигича қолади. Энди шу тўла чизиқли эркли системага ортогоналлаштириш процессини қўлласак, ортонормал базис ҳосил бўлади.

E Эвклид фазосида

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \tag{3}$$

ортонормал система бўлсин. E фазонинг ихтиёрий f элементига қуйидаги сонли кетма-кетликни мос қўямиз:

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Бу сонларни f элементнинг $\{\varphi_k\}$ системага нисбатан *координаталари* ёки *Фурье коэффициентлари* деймиз. Ушбу

$$\sum_k c_k\varphi_k \tag{4}$$

қаторни f элементнинг *Фурье қатори* деймиз.

Энди биз шу (4) қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалани ўрганамиз. Бунинг учун $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k$ йиғиндининг α_i коэффициентлари қандай бўлганда $\|f - S_n\|$ масофа минимал бўлишини текширамиз. (3) система ортонормал эканлигини ҳисобга олсак, ушбу

$$\|f - S_n\|^2 = (f - S_n, f - S_n) = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k, f - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k\right) = (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\varphi_j\right) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2$$

тенгликлар келиб чиқади. Равшанки, бу ифода ўзининг минимал қийматига охирги йиғинди нолга тенг бўлгандагина эга бўлади. Демак, ушбу

$$a_k = c_k,\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

тенглик бажарилса, қуйидаги

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \qquad (5)$$

муносабат ўринли бўлади.

Шундай қилиб, S_n йиғиндилар орасида f элементга норма маъносида энг яқини бу Фурье қаторининг хусусий йиғиндисидир. $\|f - S_n\| \geqslant 0$ бўлгани учун (5) формуладан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \qquad (6)$$

Бу ерда n ихтиёрий бўлгани ва $\|f\|$ сон n га боғлиқ бўлмагани учун $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ қатор яқинлашувчи бўлади. Юқоридаги тенгсизликда лимитга ўтсак, қуйидаги Бессель тенгсизлиги келиб чиқади:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \qquad (7)$$

Таъриф. Агар ҳар қандай $f \in E$ элемент учун қуйидаги Парсеваль тенглиги

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 \qquad (8)$$

бажарилса, (3) система *ёпиқ система* дейилади.

Агар (3) система ёпиқ бўлса, у ҳолда (5) айниятдан кўриниб турибдики, ҳар қандай f элемент Фурье қаторининг хусусий йиғиндилари f га яқинлашади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\| =$$

3-теорема. *Сепарабел Эвклид фазосида ҳар қандай тўла ортонормал система ёпиқдир, ва аксинча, ҳар бир ёпиқ ортонормал система тўладир.*

Исбот. Сепарабел E Эвклид фазосида $\{\varphi_n\}$ ёпиқ система берилган бўлсин. Ҳар қандай $f \in E$ учун унинг

Фурье қаторининг хусусий йиғиндилари f га яқинлашади, яъни $\{\varphi_n\}$ системанинг элементларининг чизиқли комбинациялари E да зичдир, демак, $\{\varphi_n\}$ — тўла система.

Аксинча, $\{\varphi_n\}$ тўла система бўлсин, демак, ихтиёрий элементга ушбу $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k$ чизиқли комбинациялар ёрдамида исталган даражада яқинлашиш мумкин. Энди ушбу

$$\|f-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\| \leqslant \|f-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k\|$$

тенгсизликдан $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ қаторнинг f га яқинлашиши, яъни (8) Парсеваль тенглиги келиб чиқади.*

4.3- §. Гильберт фазолари

E Эвклид фазосини нормаланган фазо сифатида қарасак E тўла бўлиши ёки бўлмаслиги мумкин. Агар E тўла бўлмаса, унинг тўлдирувчиси бўлган Банах фазосини $\hat{E}$ билан белгилаймиз.

1-теорема. *Эвклид фазосининг тўлдирувчиси ҳам Эвклид фазосидир.*

Исбот Бу теореманинг исботи метрик фазоларнинг тўлдирувчиси ҳақидаги теоремага ўхшашдир. $\hat{E}$ нинг x ва y элементларини оламиз. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ E фазонинг элементларидан тузилган ва мос равишда x ва y га яқинлашувчи кетма-кетликлар бўлсин. (x_n, y_n) сонли кетма-кетликни қурамиз. Ушбу

$$(x_n, y_n)-(x_m, y_m)| \leqslant |(x_n, y_n-y_m)|+|(x_n-x_m, y_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n\|\ \|y_n-y_m\|+\|x_n-x_m\|\ \|y_m\|$$

тенгсизликдан $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетликнинг фундаментал кетма-кетлик эканлиги кўриниб турибди. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ мавжуд. Бу лимит $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ кетма-кетликларга эмас, балки фақат x ва y элементларгагина боғлиқлиги бевосита текширилади. Энди $\hat{E}$ да скаляр кўпайтмани қуйидагича аниқлаймиз:

$$(x, y)=\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n).$$

Бу ифоданинг скаляр кўпайтма эканлиги E даги скаляр кўпайтманинг 1) — 4) шартларидан лимитга ўтиш натижасида келиб чиқади. Масалан, 1) шарт

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n, x_n) = (y, x).$$

Шунга ўхшаш

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n, x_n)} = \sqrt{(x, x)}.$$

Демак, $\hat{E}$ Эвклид фазосидир.*

Таъриф. Тўла Эвклид фазоси *Гильберт фазоси* дейилади.

H Гильберт фазосида $\{\varphi_n\}$ ортонормал система берилган бўлсин. Бессель тенгсизлигига асосан $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ сонлар бирор $f \in H$ элементнинг Фурье коэффициентлари бўлиши учун $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ қатор яқинлашувчи бўлиши зарур, Гильберт фазосида бу шарт шу билан бирга кифоядир. Бошқача айтганда, қуйидаги теорема ўринли.

2-теорема (Рисс — Фишер теоремаси). *H Гильберт фазосида ихтиёрий $\{\varphi_n\}$ ортонормал система ва $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ шартни қаноатлантирувчи $\{c_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. У ҳолда шундай $f \in H$ элемент мавжудки, c_k сонлар f нинг Фурье коэффициентларидир, яъни $c_k = (f, \varphi_k)$* ва

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

Исбот. $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ деб оламиз. Бу ҳолда

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \dots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ қатор яқинлашувчи бўлгани учун $\{f_n\}$ фундаментал кетма-кетликдир. Демак, H тўла бўлгани учун $\{f_n\}$ бирор $f \in H$ элементга яқинлашувчи бўлади. Ушбу

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i) \qquad (1)$$

тенгликда $n \geqslant i$ бўлса, $(f_n, \varphi_i) = c_i$ ва

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \leqslant \|f - f_n\|\,\|\varphi_i\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Демак, (1) тенгликнинг чап томонидаги ифода n га боғлиқ бўлмагани учун $n \to \infty$ да лимитга ўтсак, 4.2-§, (5) тенгликка асосан қуйидаги муносабат келиб чиқади:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right) =$$

$$= \|f - f\|^2 \to 0,$$

яъни $(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$.*

Кўп ҳолларда қуйидаги теорема фойдалидир.

3-теорема. *Сепарабел H Гильберт фазосида ортонормал $\{\varphi_n\}$ система тўла бўлиши учун H да $\{\varphi_n\}$ системанинг ҳар бир элементига ортогонал бўлган нолдан фарқли элементнинг мавжуд эмаслиги зарур ва кифоя.*

Исбот. $\{\varphi_n\}$ тўла ва, демак, 4.2-§ даги 3-теоремага асосан ёпиқ система бўлсин деб фараз қилайлик. Агар f ҳар бир φ_n га ортогонал бўлса, унинг ҳамма Фурье коэффициентлари нолга тенгдир. Парсеваль тенглигига асосан

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0 \text{ ёки } f = 0.$$

Аксинча, агар $\{\varphi_n\}$ тўла бўлмаса, шундай $g \neq 0$ топиладики,

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (c_k = (g, \varphi_k)).$$

Рисс — Фишер теоремасига асосан

$$(f, \varphi_k) = c_k \text{ ва } (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

шартларни қаноатлантирувчи f элемент топилади. Бу ҳолда ҳар қандай φ_n учун

$$(f - g, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - (g, \varphi_n) = c_k - c_k = 0,$$

яъни $f - g$ ҳар бир φ_k га ортогонал ва

$$\|f\| = (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g) = \|g\|.$$

Демак, $f - g \neq 0$.*

H_1, H_2 Эвклид фазолари бўлиб, $x \longleftrightarrow y$ ($x \in H_1$, $y \in H_2$) улар орасидаги чизиқли изоморфизм бўлсин (1.6-§). Бу изоморфизм ушбу

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2), \ x_1, x_2 \in H_1, \ y_1, y_2 \in H_2$$

хоссага ҳам эга бўлса, у ҳолда унга H_1 ва H_2 Гильберт фазолари орасидаги *изометрик изоморфизм* дейилади.

4-теорема. *Ихтиёрий икки чексиз ўлчамли сепарабел Гильберт фазоси ўзаро изометрик изоморфдир.*

Исбот. Равшанки, теоремани исботлаш учун ҳар қандай чексиз ўлчамли сепарабел Гильберт фазосининг 4.2- § 2-мисолдаги l_2 фазога изометрик изоморфлигини кўрсатиш кифоя. 4.2-§ даги 2-теоремага асосан чексиз ўлчамли сепарабел H Гильберт фазосида $\{\varphi_n\}$ тўла ортонормал система мавжуд.

H нинг ҳар бир f элементига шу элементнинг $\{\varphi_n\}$ га нисбатан Фурье коэффициентлари $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ тўпламини мос қўямиз. Сўнгра

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) < \infty$$

бўлгани учун $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ кетма-кетлик l_2 фазонинг элементидир.

Аксинча, l_2 даги ихтиёрий $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ элементга Рисс — Фишер теоремасига асосан бирор $f \in H$ элемент мос келади ва f нинг Фурье коэффициентлари $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ га тенг. Бу мослик ўзаро бир қийматлидир. Агар

$$f \longleftrightarrow (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots), \quad g \longleftrightarrow (d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$$

мос қўйилса, у ҳолда, равшанки,

$$f + g \longleftrightarrow (c_1 + d_1, c_2, + d_2, \ldots, c_n + d_n, \ldots)$$

ва

$$\alpha f \longleftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, \ldots, \alpha c_n, \ldots)$$

Ниҳоят, Парсеваль тенглигидан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n.$$

Ҳақиқатан,

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

ва

$$(f+g,\ f+g) = (f,\ f) + 2(f,\ g) + (g,\ g) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2,$$

яъни

$$(f,\ f) + 2(f,\ g) + (g,\ g) = (f,\ f) + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + (g,\ g)$$

ва

$$(f,\ g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n.$$

4.4-§. Қисм фазолар. Ортогонал тўлдирувчилар

Равшанки, ҳар қандай Гильберт фазоси нормаланган фазодир. Гильберт фазосида ҳам қисм фазо тушунчаси нормаланган фазонинг қисм фазо тушунчаси каби киритилади. Яъни Гильберт фазосида ёпиқ бўлган вектор қисм фазо Гильберт фазосининг қисм фазоси дейилади.

Мисоллар.

1. H Гильберт фазосида h элементни оламиз. Шу элементга ортогонал бўлган элементлар H нинг қисм фазосини ташкил қилади. Бундай элементлар тўплами вектор фазо ҳосил қилиши скаляр кўпайтманинг 2), 3) шартларидан, ёпиқлиги эса скаляр кўпайтманинг узлуксизлигидан келиб чиқади.

2. l_2 Гильберт фазосининг элементлари $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ шартни қаноатлантирувчи $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ кетма-кетликлардан иборат. Бу фазода $x_1 = 0$ шартни қаноатлантирувчи кетма-кетликлар қисм фазо ташкил қилади. Ёки, масалан, тоқ координаталари нолга тенг бўлган элементлар тўплами ҳам l_2 нинг қисм фазосидир.

Гильберт фазосининг ихтиёрий M қисм фазоси ҳам Гильберт фазосидир. Агар H сепарабел бўлса, у ҳолда (2.5-§, 1-теоремага асосан) M ҳам сепарабел Гильберт фазосидир. Хусусан, M да ҳам тўла ортонормал система мавжуд.

Қуйидаги теорема Гильберт фазолари назариясида катта аҳамиятга эга.

1- теорема. *H_1 тўплам H Гильберт фазосининг қисм фазоси бўлсин. Ихтиёрий x элемент*

$$x = x' + x''(x' \in H_1,\ x'' \in H_1^{\perp}) \qquad (1)$$

кўринишда бир қийматли ёзилади. Бу ерда x' элемент қуйидаги хоссага эга:

$$\|x - x'\| = \rho(x, x') = \rho(x, H_1) = \inf\{\rho(x, x_1) : x_1 \in H_1\}. \qquad (2)$$

Исбот. H_1 тўпламдан x элементгача бўлган масофани d билан белгилаймиз, яъни

$$d = \rho(x, H_1). \qquad (3)$$

Ихтиёрий n сон учун ушбу

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2} \qquad (4)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган $x_n \in H_1$ элементни оламиз. 4.2- § даги 2) хоссага биноан (параллелограмм формуласи):

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 + \|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 &= \\ = 2[\,\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2\,]. \end{aligned} \qquad (5)$$

Сўнгра $\frac{x_n + x_m}{2}$ элемент H_1 га тегишли бўлгани учун

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geqslant 4d^2.$$

Бу муносабатдан, (4) ва (5) муносабатларни ҳисобга олсак, ушбу

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2\left[d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2}\right] - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}$$

тенгсизлик ўринли эканлиги кўринади, яъни $\{x_n\}$ — фундаментал кетма-кетлик.

H тўла бўлгани учун $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ элемент мавжуд. H_1 ёпиқ, демак, $x' \in H_1$. (4) тенгсизликда лимитга ўтсак,

$$\|x - x'\|^2 \leqslant d^2, \text{ яъни } \|x - x'\| \leqslant d$$

келиб чиқади. Демак, $\|x - x'\| = d$.

Энди y элемент H_1 га тегишли бўлсин. Ихтиёрий λ сон учун $x'+\lambda y\in H_1$ демак,

$$\|x-x'-\lambda y\|^2=\|x-(x'+\lambda y)\|^2\geqslant d^2,$$

яъни, агар $x''=x-x'$ белгилаш киритсак,

$$-\lambda(x'',\ y)-\lambda(y,\ x'')+|\lambda|^2((y,\ y)\geqslant 0.$$

Хусусан $\lambda=(x'',\ y)/(y,\ y)$ бўлганда

$$-\frac{|(x'',\ y)|^2}{(y,\ y)}-\frac{|(x'',\ y)|^2}{(y,\ y)}+\frac{|(x'',\ y)|^2}{(y,\ y)}\geqslant 0,$$

яъни $|(x'',\ y)|^2\leqslant 0$. Демак, $(x'',\ y)=0$ ва $x''\perp y$, яъни $x''\in H_1^{\perp}$. Шу билан (1) исботланади. Ниҳоят, (1) кўринишда ифодалаш ягоналигини исботлаймиз. Агар

$$x=x_1'+x_1''(x_1\in H_1,\ x_1''\in H_1^{\perp})$$

бўлса, у ҳолда $x'-x_1'=x_1''-x''$. Яъни H_1 нинг элементи бўлмиш $x'-x_1'$ элемент $H_1^{\perp}$ нинг $x_1''-x''$ элементига тенг, демак, у ўз-ўзига ортогонал, яъни $x'-$ $-x_1'=x_1''-x''=0.$*

Исботланган 1-теоремадаги x' ва x'' элементлар x элементнинг мос равишда H_1 ва $H_1^{\perp}$ фазоларга проекциялари дейилади. x элементга x' элементни мос қўювчи $P_{H_1}:H\to H_1$ акс эттириш H_1 га *проектор* дейилади (яъни $P_{H_1}(x)=x_1$). Равшанки, P_{H_1} — чизиқли оператор.

1-натижа. Ихтиёрий M қисм фазонинг ортогонал тўлдирувчисининг ортогонал тўлдирувчиси M нинг ўзига тенг, яъни

$$(M^{\perp})^{\perp}=M.$$

Шундай қилиб, M ва $M^{\perp}$ ўзаро ортогонал тўлдирувчи қисм фазолардир.

Агар $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик M даги тўла ортогонал система, $\{\varphi_n'\}$ эса $M^{\perp}$ даги тўла ортогонал система бўлса, у ҳолда бу тўпламларнинг йиғиндиси H да тўла ортогонал система ҳосил қилади. Демак, H даги ихтиёрий ортогонал система H да тўла бўлган ортогонал системагача кенгайтирилиши мумкин.

Агар ихтиёрий $f\in H$ элемент $f=h_1+h_2(h_1\in M,$ $h_2\in M^{\perp})$ кўринишда ёзилиши мумкин бўлса, у ҳолда H

ўзаро ортогонал бўлган M ва $M^{\perp}$ қисм фазоларнинг *тўғри йиғиндиси* дейилиб,

$$H = M \oplus M^{\perp} \tag{6}$$

кўринишда ёзилади.

Тўғри йиғинди тушунчаси ихтиёрий чекли ёки сони саноқли қисм фазолар учун ҳам киритилиши мумкин.

Таъриф. H Гильберт фазосининг

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

қисм фазолари берилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) Ҳар қандай M_i ва $M_j (i \neq j)$ фазолар ўзаро ортогонал, яъни M_i нинг ихтиёрий элементи M_j нинг ихтиёрий элементига ортогонал;

2) H нинг ихтиёрий f элементи ушбу

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots, \quad h_n \in M_n \tag{7}$$

кўринишда ёйилади (агар M_n ларнинг сони чексиз бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty$ шарт талаб қилинади). Бу ҳолда H ўзининг $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ қисм фазоларининг *тўғри йиғиндиси* дейилади ва $H = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ кўринишда ёзилади.

f элементнинг (7) кўринишда ёйилиши ягонадир. Дарҳақиқат, агар

$$f = h'_1 + h'_2 + \dots + h'_n + \dots$$

f нинг бошқа бир ёйилиши бўлса, у ҳолда

$$0 = f - f = (h_1 - h'_1) + (h_2 - h'_2) + \dots + (h_n - h'_n) + \dots$$

Ихтиёрий n учун $h_n - h'_n$ элемент M_n га тегишли. Шунинг учун юқоридаги тенгликни $h_n - h'_n$ га скаляр кўпайтирсак, ушбу

$$0 = (h_n - h'_n, h_n - h'_n)$$

тенглик ҳосил бўлади, бундан $h_n - h'_n = 0$, яъни ихтиёрий n учун

$$h_n = h'_n.$$

Тўғри йиғиндининг хоссаларидан

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2$$

тенглик ҳам осонликча келиб чиқади.

Шунга ўхшаш, сони чекли ёки саноқли Гильберт фазоларнинг тўғри йиғиндиси тушунчасини киритиш мумкин.

H_1, H_2 Гильберт фазолари бўлсин. Уларнинг тўғри йиғиндиси бўлган H Гильберт фазоси қуйидагича киритилади.

H нинг элементлари (h_1, h_2) кўринишдаги жуфтликлардан иборат $(h_1 \in H_1, h_2 \in H_2)$. H да скаляр кўпайтма қуйидагича киритилади:

$$((h_1, h_2), (h_1', h_2')) = (h_1, h_1') + (h_2, h_2').$$

Бундай аниқланган H фазо Гильберт фазосини ҳосил қилиши бевосита текширилади. Агар

$$H_1' = \{(h_1; 0) : h_1 \in H_1\}, \ H_2' = \{(0, h_2) : h_2 \in H_2\}$$

кўринишда олинса, у ҳолда H_1' ва H_2' ўзаро ортогонал бўлган H нинг қисм фазолари бўлиб, $H_1' \simeq H_1$, $H_2' \cong H_2$ изометрик изоморфизмлар ўринлидир. Равшанки,

$$H = H_1' + H_2'.$$

Шунга ўхшаш, сони чекли ёки сони саноқли

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$$

Гильберт фазоларининг тўғри йиғиндиси аниқланади.

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n.$$

H нинг *элементлари* деб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty, \ h_n \in H_n$$

шартни қаноатлантирувчи $(h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots)$ кетма-кетликларга айтилади. Сўнгра

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots), \ h_n \in H_n$$

ва

$$g=(g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots), \; g_n \in H_n$$

элементларнинг скаляр кўпайтмаси ушбу

$$(h, g)=\sum_{n=1}^{\infty}(h_n, g_n)$$

кўринишда киритилади.

4. 5-§. Комплекс Эвклид фазолари

Ҳақиқий Эвклид фазолари билан бир қаторда комплекс Эвклид фазоларини ҳам (яъни скаляр кўпайтмаси комплекс сон бўлган вектор фазоларни) қараш мумкин.

Таъриф. E комплекс вектор фазода қуйидаги тўрт шартни қаноатлантирувчи комплекс қийматли (x, y) функция киритилган бўлса, *E комплекс Эвклид фазоси* дейилади:

1) $(x, y)=\overline{(y, x)}$, бу ерда $\overline{\lambda}$ сон λ га қўшма комплекс сон;

2) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$;

3) $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)$;

4) $(x, x)\geqslant 0$ ва $x\neq 0$ бўлса, $(x, x)>0$.

Юқоридаги 1) ва 2) хоссалардан

$$(x, \lambda y)=\overline{\lambda}(x, y)$$

келиб чиқади. Ҳақиқатан

$$(x, \lambda y)=\overline{(\lambda y, x)}=\overline{\lambda(y, x)}=\overline{\lambda}(x, y).$$

Мисоллар.

1. n ўлчамли C^n комплекс фазода

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ ва } y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

элементларнинг скаляр кўпайтмасини

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}$$

кўринишда киритсак, C^n Эвклид фазоси бўлади.

2. l_2 комплекс фазо. Унинг элементлари ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^2|<+\infty$$

шартни қаноатлантирувчи комплекс сонлар кетма-кетликларидан иборат.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ва $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ элементларнинг скаляр кўпайтмаси ушбу

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

ифода билан аниқланади.

3. $L_2\,[a, b]$ комплекс фазо $[a, b]$ оралиқда квадрати билан жамланувчи комплекс функциялар фазоси. Бу фазода скаляр кўпайтма қуйидагича олинади:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

4. $L_2(D)$ комплекс фазо. $D = [a, b] \times [a, b]$ тўпламда квадрати билан жамланувчи икки ҳақиқий ўзгарувчили комплекс қийматли функциялар фазосини $L_2(D)$ билан белгилаймиз, яъни

$$(f(t, s) \in L_2(D)) \iff \left(\int_a^b \int_a^b |(f(t, s)|^2\,dtds < \infty\right).$$

Бу фазода скаляр кўпайтма 3-мисолдагидек киритилади:

$$(f, g) = \int_a^b \int_a^b f(t, s)\,\overline{g(t, s)}\,dtds.$$

$L_2\,[a, b]$ ва $L_2(D)$ фазоларда тўла ортонормал системаларни ўрганадиган бўлсак, улар орасида қуйидаги боғланиш бор.

Агар $\{\psi_n(t)\}$ система $L_2[a, b]$ фазода тўла ортонормал бўлса, у ҳолда $\{\varphi_{n,m}(t, s)\} = \{\psi_n(t)\,\psi_m(s)\}$ система $L_2(D)$ фазода тўла ва ортонормал бўлади.

Дарҳақиқат,

$$\int_a^b \int_a^b \varphi_{n,m}(t, s)\,\overline{\varphi_{k,l}(t, s)}\,dtds =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \psi_n(t)\,\psi_m(s)\,\overline{\psi_k(t)\,\psi_l(s)}\,dtds =$$

$$= \int_a^b \psi_n(t)\overline{\psi_k(t)dt}\int_a^b \psi_m(s)\overline{\psi_l(s)}ds =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{агар } k = n,\quad m = l \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{акс ҳолда}, \end{cases}$$

яъни $\{\varphi_{n,m}(t, s)\}$ — ортонормал система.

Бирор $f(t, s) \in L_2(D)$ функция ҳамма $\{\varphi_{n,m}(t, s)\}$ функцияларга ортогонал бўлса, у ҳолда ихтиёрий m, n учун

$$\int_a^b\int_b^b f(t, s)\overline{\psi_n(t)\psi_m(s)}\,dt\,ds = 0,$$

яъни

$$\int_a^b \overline{\psi_m(s)}\left(\int_a^b f(t, s)\,\overline{\psi_n(t)dt}\right)ds = 0.$$

Демак,

$$f_0(s) = \int_a^b f(t, s)\overline{\varphi_n(t)}\,dt \in L_2[a, b]$$

функция ҳамма $\{\psi_m(s)\}$ функцияларга ортогонал. Бу система тўла бўлгани сабабли $f_0(s) = 0$, яъни деярли барча $s_0 \in [a, b]$ учун

$$\int_a^b f(t, s_0)\,\overline{\psi_n(t)}\,dt = 0.$$

Яна $\{\psi_n(t)\}$ системанинг тўла эканлигидан фойдалансак, деярли барча $s_0 \in [a, b]$ учун $f(t, s_0)$ функция t га нисбатан деярли ҳамма ерда айнан нолга тенг эканлиги келиб чиқади. Демак, $f(t, s) = 0$. Бу эса $\{\varphi_{n,m}(t, s)\}$ системанинг тўлалигини билдиради.

Комплекс Эвклид фазосида элементнинг нормаси ҳақиқий Эвклид фазосидаги каби киритилади:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Элементларнинг ортогоналлиги тушунчаси ҳам одатдагидек киритилади, яъни $(x, y) = 0$ бўлса, x ва y *ўзаро ортогонал элементлар* дейилади.

E комплекс Эвклид фазосида $\{\varphi_n\}$.кетма-кетлик ортонормал система бўлсин, яъни
1) $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $i \neq j$,
2) $\|\psi_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$.
Агар $f \in E$ ихтиёрий элемент бўлса, у ҳолда

$$c_n = (f, \varphi_n)$$

лар f элементнинг $\{\varphi_n\}$ системага нисбатан *Фурье коэффициентлари* дейилади ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

ифода f элементнинг *Фурье қатори* дейилади. Ҳақиқий фазоларга ўхшаш, комплекс фазолар учун ҳам Бессель тенгсизлиги ўринлидир, яъни

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant (f, f).$$

Тўла комплекс Эвклид фазоси *комплекс Гильберт фазоси* дейилади.

Қуйидаги теорема 4.3- § даги 4- теоремага ўхшаш исботланади.

1- теорема. *Ихтиёрий икки чексиз ўлчамли сепарабел комплекс Гильберт фазоси изометрик изоморфдир.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Норманинг қуйидаги хоссаларини исботланг:
1) $\|x + y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$;
2) $\|x - x_n\| \to 0$ бўлса (яъни x_n кетма-кетлик x элементга норма бўйича яқинлашса),

$$\|x_n\| \to \|x\|$$

муносабатни исботланг.

2. V Банах фазосида M қисм фазо берилган бўлсин (яъни M ёпиқ вектор қисм фазо). $V_0 = V/M$ фактор фазода нормани қуйидагича аниқлаймиз:

$$\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\|, \ \xi \text{ — эквивалентлик синфи.}$$

Бу формула билан аниқланган функционалнинг норма эканлигини ва V_0 фазо шу нормага нисбатан тўла эканлигини исботланг.

3. Ҳақиқий функцияларнинг L_2 [0, 1] синфи деб, [0, 1] сегментда квадрати билан жамланувчи функциялар тўпламига айтилади.

а) Ушбу Буняковский — Шварц тенгсизлигини исботланг:

$$\left|\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \left\{\left[\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right]\left[\int_0^1 |g(x)|^2 dx\right]\right\}^{\frac{1}{2}};$$

б) $L_2[0, 1]$ фазода одатдаги алгебраик амалларни ва ушбу

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

скаляр кўпайтмани киритсак, бу фазо Эвклид фазосига айланишини исботланг;

в) $L_2[0, 1]$ Эвклид фазосида ортогонал бўлган икки элементга мисол келтиринг;

г) Ушбу $f(x) = x^{\alpha}$ функция α соннинг қандай қийматларида $L_2[0, 1]$ фазога тегишли бўлади?

4. Нормаланган V ҳақиқий фазода ушбу тенглик бажарилсин:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,[\,\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

Қуйидагича аниқланган функцияни скаляр кўпайтма эканлигини исботланг:

$$(x, y) = \frac{1}{4}\,(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

5. Сепарабел бўлмаган Гильберт фазосига мисол келтиринг.

6. Сепарабел бўлмаган Гильберт фазосида ҳам тўла ортонормал система мавжудлигини исботланг.

7. H Гильберт фазосида $\{\varphi_\alpha\}$ тўла ортонормал система бўлсин. Ихтиёрий $f \in H$ элемент учун ушбу

$$f = \sum_{\alpha} (f, \varphi_\alpha)\,\varphi_\alpha, \quad \|f\|^2 = \sum_{\alpha} (f, \varphi_\alpha)^2$$

тенгликлар ўринли эканлигини исботланг (бу ердаги йиғиндиларда нолдан фарқли элементларнинг сони чекли ёки саноқлидир).

8. l_2 Гильберт фазосида қуйидаги қисм фазони оламиз:

$$M_k = \{x = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) : a_1 = a_2 = \ldots = a_k\}.$$

$M_k^{\perp}$ қисм фазони топинг.

9. L_2 $[0, 1]$ Гильберт фазосида ўзгармас функциялардан ҳосил бўлган қисм фазонинг ортогонал тўлдирувчисини топинг.

10. Гильберт фазосида узлуксиз чизиқли f функционални олиб, қуйидаги тўпламни тузамиз:

$$V_0 = \{x \in V : f(x) = 0\}.$$

а) V_0 Гильберт фазоси маъносида қисм фазо эканлигини исботланг;

б) $V_0^{\perp}$ қисм фазонинг ўлчамини топинг.

11. L_2 $[a, b]$ комплекс фазода скаляр кўпайтмани қуйидагича аниқлаймиз:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

а) скаляр кўпайтманинг хоссаларини исботланг.

б) $C^2[a, b]$ Эвклид фазоси $L_2[a, b]$ фазонинг ёпиқ бўлмаган қисм фазоси эканлигини исботланг.

12. Сепарабел Гильберт фазоси бир ўлчамли қисм фазоларининг тўғри йиғиндиси бўлишини кўрсатинг.

13. Сепарабел Гильберт фазосида саноқли, лекин тўла бўлмаган ортогонал система қуринг.

14. Сепарабел Гильберт фазосида M ҳам, $M^{\perp}$ ҳам чексиз ўлчамли бўлган қисм фазо мавжудлигини исботланг.

15. $C[a, b]$ фазода унинг нормасини ҳосил қилувчи скаляр кўпайтма мавжуд эмаслигини исботланг.

V боб

ТОПОЛОГИК ВЕКТОР ФАЗОЛАР

5.1-§. Топологик вектор фазонинг таърифи ва баъзи хоссалари

E комплекс ёки ҳақиқий сонлар майдони K устидаги вектор фазо ва τ ундаги топология бўлсин.

Таъриф. (E, τ) жуфтлик *топологик вектор фазо* дейилади, агар $x+y$ ва $\lambda \cdot x$ алгебраик амаллар $x, y \in E, \lambda \in K$ ўзгарувчилар бўйича биргаликда τ топологияга нисбатан узлуксиз бўлса, яъни ихтиёрий $x, y \in E$ ва $\lambda \in K$ учун:

1) $x+y$ нуқтанинг ҳар бир $U(x+y)$ атрофи учун x ва y нинг мос равишда шундай $U(x)$ ва $U(y)$ атрофлари мавжудки, улар учун $U(x)+U(y) \subset U(x+y)$ муносабат ўринли;

2) λx нуқтанинг ихтиёрий $U(\lambda x)$ атрофи учун x нинг шундай $U(x)$ атрофи ва шундай $r>0$ сон мавжудки, $|\beta-\lambda|<r$ шартни қаноатлантирувчи барча β сонлар учун $\beta U(x) \subset U(\lambda x)$ муносабат ўринли.

Топологик вектор фазонинг топологияси *вектор топология* дейилади. (E, τ) топологик вектор фазо бўлсин. Ҳар бир $a \in E$ ва $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ учун $f_a(x)=x+a$ ва $g_\lambda(x)=\lambda x$ кўринишда аниқланган $f_a: E \to E$ ва $g_\lambda: E \to E$ акс эттиришларни оламиз.

1-теорема. f_a ва g_λ *акс эттиришлар (E, τ) нинг ўзини ўзига гомеоморф акс эттиради.*

Исбот. Вектор фазонинг таърифига кўра, f_a ва f_λ акс эттиришлар ўзаро бир қийматлидир. Сўнгра f_a учун тескари акс эттириш f_{-a}, g_λ учун эса $g_{\frac{1}{\lambda}}$ тескари акс эттириш бўлади.

Топологик вектор фазода алгебраик амалларнинг узлуксизлигидан f_a, g_λ, f_{-a}, $g_{\frac{1}{\lambda}}$ акс эттиришларнинг узлуксизлиги келиб чиқади. Демак, f_a ҳам, g_λ ҳам гомеоморфизмдир.*

Бу иборадан келиб чиқадики, агар $\Sigma=\{U\}$ система (E, τ) топологик вектор фазодаги нолнинг атрофлари системасининг базиси бўлса, у ҳолда $\sum_a=\{a+U : U \in \Sigma\}$ система (E, τ) фазодаги a нуқтанинг атрофлари системаси учун базис бўлади. Демак, топологик вектор фазонинг топологияси 3.2-§ даги 2-теоремага асосан нолнинг атрофлари системасининг базиси билан тўла аниқланар экан.

2-теорема. *Агар* (E, τ) *топологик вектор фазодаги* $\Sigma=\{U\}$ *нолнинг атрофлари системаси учун базис бўлса, у ҳолда*

1) ҳар бир U *ютувчи тўплам;*

2) ҳар бир $U\in\Sigma$ *учун шундай* $V\in\Sigma$ *мавжудки,* $V+V\subset U$;

3) нолнинг шундай мувозанатлашган W *атрофи мавжудки,* $W\subset U$.

Исбот. 1) $a\in E$ ва $f(\lambda)=\lambda a, \lambda\in K$ бўлсин. У ҳолда $f: K\to E$ акс эттириш $\lambda=0$ нуқтада узлуксиз бўлгани туфайли ихтиёрий $U\in\Sigma$ учун $0\in K$ нинг шундай $\{\lambda: |\lambda|\leqslant\varepsilon\}$ атрофи мавжудки, унинг f акс эттиришдаги тасвири U нинг қисми бўлади, яъни агар $|\lambda|\leqslant\varepsilon$ бўлса, $\lambda a\in U$ бўлади. Бундан, агар $|\mu|\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$ тенгсизлик бажарилса, $a\in\mu U$ эканлиги келиб чиқади;

2) $g(x, y)=x+y$; $(g: E\times E\to E)$ акс эттириш $(x, y)=(\theta, \theta)$ нуқтада узлуксиз бўлгани туфайли ихтиёрий $U\in\Sigma$ учун нолнинг шундай V_1 ва V_2 атрофлари мавжудки, агар $x\in V_1$ ва $y\in V_2$ бўлса, у ҳолда $x+y\in U$.

3.2-§, 2-теоремага асосан нолнинг шундай $V\in\sum$ атрофи мавжудки, $V\subset V_1\cap V_2$ бўлади, бундан эса $V+V\subset U$ эканлиги келиб чиқади;

3) Ушбу $h(\lambda, x)=\lambda x$ $(h: K\times E\to E)$ акс эттириш $(0, \theta)$ нуқтада узлуксиз бўлгани учун нолнинг шундай $V\in\Sigma$ атрофи ва $\varepsilon>0$ сон мавжудки, $|\lambda|\leqslant\varepsilon$ ва $x\in V$ шартларни қаноатлантирувчи λ ва x учун $\lambda x\in U$, яъни $\lambda V\subset U$. Сўнгра W сифатида ушбу $W=\bigcup\limits_{|\lambda|\leqslant\varepsilon}\lambda V$ тўпламни оламиз. Равшанки, W нолнинг атрофи ва $W\subset V$.

Ихтиёрий $x\in W$ учун шундай λ $(|\lambda|\leqslant\varepsilon)$ топиладики, $x\in\lambda V$. Бундан ихтиёрий $t\in E$ учун $tx\in t\lambda V$. Энди, агар $|t|\leqslant 1$ бўлса, у ҳолда $|\lambda t|\leqslant\varepsilon$, ва демак, $tx\in\mu V$, бу ерда $|\mu|\leqslant\varepsilon$. Шундай қилиб, $tx\in\bigcup\limits_{\lambda\geqslant\varepsilon}\lambda V=W$, яъни W тўплам нолнинг $W\subset U$ шартни қаноатлантирувчи мувозанатлашган атрофи экан.*

Натижа. Ҳар бир топологик вектор фазода нолнинг атрофлари системасининг мувозанатлашган атрофлардан иборат базиси мавжуддир.

Таъриф. Агар топологик вектор фазода нолнинг атрофлари системасининг қавариқ атрофлардан иборат базиси мавжуд бўлса, бундай топологик вектор фазо *локал қавариқ фазо* дейилади.

3-теорема. *Локал қавариқ фазода нолнинг атрофлари системасининг қуйидаги хоссаларга эга бўлган Σ базиси мавжуддир:*

1) ихтиёрий $U\in\Sigma$ ва $V\in\Sigma$ учун шундай $W\in\Sigma$ мавжудки, $W\subset U\cap V$;

2) агар $U\in\Sigma$ бўлса, барча $\lambda\neq0$ учун $\lambda U\in\Sigma$;

3) ҳар бир $U\in\Sigma$ абсолют қавариқ ва ютувчи тўпламдир.

Аксинча, агар E вектор фазода унинг қисм тўпламларидан иборат ва 1)—3) шартларни қаноатлантирувчи бўш бўлмаган Σ система берилган бўлса, у ҳолда E да шундай топология мавжудки, бу топологияда E локал қавариқ фазо бўлиб, Σ эса ундаги нолнинг атрофлари системаси учун базисни ташкил этади

Исбот. E локал қавариқ фазо бўлгани учун унда нолнинг қавариқ атрофларидан иборат Σ базис мавжуд. Фараз қилайлик, $U\in\Sigma$ ана шундай атрофлардан бири бўлсин. Ушбу $W=\bigcap\limits_{|\mu|=1}\mu U\subset U$ тўплам нолнинг абсолют қавариқ атрофи эканлигини исботлаймиз.

2-теоремадан ҳар бир $U\in\Sigma$ учун нолнинг мувозанатлашган $V\subset U$ атрофи мавжудлиги келиб чиқади. Бундан $\mu V\subset\mu U$ муносабат барча $|\mu|=1$ учун ўринли. Аммо V мувозанатлашган атроф бўлгани учун $\mu V=V$. Демак, $V\subset\bigcap\limits_{|\mu|=1}\mu U=W$ ва демак, W нолнинг атрофи экан. Ҳар бир μU қавариқ тўплам эканлигидан W нинг ҳам қавариқлиги келиб чиқади. Энди W нинг мувозанатлашган тўплам эканлигини кўрсатамиз, яъни барча λ ($|\lambda|\leqslant1$) учун $\lambda W\subset W$ муносабатни исботлаймиз. Ихтиёрий $x\in V$ элемент ва λ ($|\lambda|\leqslant1$) сонни оламиз. Маълумки, бундай комплекс сонни $\lambda=rt$ ($0\leqslant r\leqslant1$, $|t|=1$) кўринишда ёзиш мумкин. У ҳолда W қавариқ бўлгани учун $rx=rx+(1-r)\theta\in W=\bigcap\mu U$, яъни ихтиёрий μ ($|\mu|=1$) сон учун $rx\in\mu U$. Энди $|t^{-1}\mu|=1$ муносабатни ҳисобга олсак, $rx\in t^{-1}\mu U$, бундан $\lambda x=t\cdot r\cdot x\in\mu U$. Олинган $\mu(|\mu|=1)$ ихтиёрий бўлгани сабабли $\lambda x\in\bigcap\limits_{|\mu|=1}\mu U=W$. Шундай қилиб, W тўплам U нинг ичида жойлашган нолнинг бир вақтда ҳам қавариқ, ҳам мувозанатлашган, яъни абсолют қавариқ атрофи экан. Бундан локал қавариқ фазоларда нолнинг абсолют қавариқ атрофларидан иборат Σ базиси мавжуд эканлиги келиб чиқади. Ушбу $\Sigma'=\{\lambda V:\lambda\neq\neq0,\ V\in\Sigma\}$ системани олсак, у ҳам нолнинг атрофлари системаси учун абсолют қавариқ атрофлардан иборат ва 2) шартни қаноатлантирувчи базис бўлади. Σ' базис бўлган сабабли 1) шарт ўринлидир. Σ' нинг тузилишидан унинг 3) шартни ҳам қаноатлантириши келиб чиқади.

Аксинча, энди система 1)—3) шартларни қаноатлантирсин деб фараз қилайлик.

Ушбу $\Xi=\{V\subset E$: бирор $U\in\Sigma$ учун $U\subset V\}$ системани оламиз. У ҳолда $\Sigma_a=\{a+V : V\in \mathrm{E}\}$ система $a\in E$ нуқтанинг атрофлари системасининг 1)—4) хоссаларини қаноатлантиради (3.2-§). Ҳақиқатан ҳам 1)—3) шартларнинг бажарилиши равшан. 4) шартнинг бажарилишини текширамиз. Агар $a+V\in\Sigma_a$ бўлса, у ҳолда шундай $U\in\Sigma$ мавжудки, $U\subset V$ ўринли, бундан эса барча $b\in a+\frac{1}{2}U$ учун $a+V\in\Sigma_b$ эканлиги келиб чиқади, чунки $b+\frac{1}{2}U\subset a+U\subset a+V$. Демак, 4) хосса исботланди. Шундай қилиб, E фазода $a\in E$ нуқтанинг Σ_a атрофлари системаси билан аниқланган τ топология мавжуддир. Ниҳоят, шу топологиянинг вектор топология эканлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий

$$U\in\Sigma,\ x,\ y\in E \text{ учун} \left(x+\frac{1}{2}U\right)+\left(y+\frac{1}{2}U\right)\subset x+y+U$$

муносабат ўринли эканлигидан қўшиш амалининг узлуксизлиги келиб чиқади.

Энди λx кўпайтманинг узлуксизлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $a\in E$, $\alpha\in K$ ва $U\in\Sigma$ ни оламиз. U ютувчи тўплам бўлгани учун шундай $\mu>0$ мавжудки, $a\in\mu U$ бўлади. Сўнг $0<2\eta<\frac{1}{\mu}$ шартни қаноатлантирувчи η ва $0<2\delta<\frac{1}{|a|+\eta}$ шартни қаноатлантирувчи δ сонларни танлаймиз. Ушбу $|\lambda-\alpha|<\eta$ ва $x\in a+\delta U$ шартларни қаноатлантирувчи λ сон ва $x\in E$ учун

$$\lambda x-\alpha a=\lambda(x-a)+(\lambda-\alpha)a\in\delta(|\alpha|+\eta)U+\eta\mu U\subset U,$$

яъни скалярга кўпайтириш амали ҳам узлуксиздир.*

4-теорема. *Топологик вектор фазода қавариқ тўпламнинг ёпилмаси қавариқ, мувозанатлашган тўпламнинг ёпилмаси эса мувозанатлашган бўлади.*

Исбот. А қавариқ тўплам бўлсин. Нолнинг ҳар бир U атрофи учун 2-теоремага асосан мувозанатлашган шундай V атрофи мавжудки, $V+V\subset U$. Бирор $a,\ b\in\bar{A}$ нуқталарни олсак, у ҳолда $x\in A\cap(a+V)$ ва $y\in A\cap(b+V)$ нуқталар мавжуд. A тўплам қавариқ бўлгани туфайли ихтиёрий $r\,(0<r<1)$ сон учун

$$rx+(1-r)y\in[rA+(1-r)A]\cap[ra+(1-r)b+rV+$$

$+(1-r)V]\subset A\cap[ra+(1-r)b+V+V]\subset A\cap(ra+(1-r)b+U)$.

Демак, ихтиёрий U учун

$$(r\cdot a+(1-r)b+U)\cap A\neq\varnothing,$$

яъни $ra+(1-r)\,b\in\overline{A}$. Мувозанатлашган тўплам учун ҳам исбот шунга ўхшаш бўлади.*

1-натижа. Топологик вектор фазода абсолют қавариқ тўпламнинг ёпилмаси ҳам абсолют қавариқдир.

2-натижа. Топологик вектор фазода нолнинг атрофлари системасининг ёпиқ мувозанатлашган атрофлардан иборат базиси мавжуддир; локал қавариқ фазоларда эса нолнинг атрофлари системасининг ёпиқ абсолют қавариқ атрофлардан иборат базиси мавжуддир.

Исбот. Σ нолнинг мувозанатлашган атрофларидан ташкил топган базис бўлсин. $\Xi=\{\overline{U}:U\in\Sigma\}$ системани оламиз. 4-теоремадан Ξ нолнинг ёпиқ, мувозанатлашган атрофлари системаси эканлиги келиб чиқади. Энди Ξ нолнинг барча атрофлари системаси учун базис ташкил этишини исботлаймиз. U нолнинг ихтиёрий атрофи бўлсин. У ҳолда шундай $V\in\Sigma$ мавжудки, $V+V\subset U$ бўлади. Энди, агар $x\in\overline{V}$ бўлса, унда $(x+V)\cap V\neq\varnothing$ муносабат ўринли ва шунинг учун $x\in V-V=V+V\subset U$, яъни $\overline{V}\subset U$. Демак, Ξ ноль атрофларининг базисидир. Фазо локал қавариқ бўлгани ҳолда Σ сифатида 3-теоремадаги базисни олсак, 4-теореманинг 1-натижасига кўра ҳар бир $U\in\Sigma$ учун $\overline{U}$ абсолют қавариқдир; қолган хоссалар эса осонликча кўрсатилади.*

5-теорема. Σ *система* E *топологик вектор фазодаги нолнинг атрофлари системасининг базиси бўлсин.* E *нинг Хаусдорф фазоси бўлиши учун* $\bigcap\limits_{U\in\Sigma}U=\{\theta\}$ *шарт бажарилиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Агар E Хаусдорф фазоси ва $x\neq\theta$ бўлса, шундай $U\in\Sigma$ мавжудки, $x\,\overline{\in}\,U$ бўлади, яъни $\bigcap\limits_{U\in\Sigma}U=\{\theta\}$ шарт бажарилади. Аксинча, $\bigcap\limits_{U\in\Sigma}U=\{\theta\}$ бўлсин. Ихтиёрий $x\neq y$ учун $x-y\neq\theta$, демак, шундай $U\in\Sigma$ мавжудки, $x-y\,\overline{\in}\,U$ муносабат қаноатлантирилади. Сўнг $V+V\subset U$ шартни қаноатлантирувчи мувозанатлашган $V\in\Sigma$ атрофни оламиз. У ҳолда $(x+V)\cap(y+V)=\varnothing$. Дарҳақиқат, агар $z\in(x+V)\cap(y+V)$ элемент мавжуд бўлса эди, у ҳолда $x-y=(z-y)-(z-x)\in V-V=V+V\subset U$ бўлар эди. Бу эса $x-y\,\overline{\in}\,U$ муносабатга зид. Шундай қилиб, E Хаусдорф фазосидир.*

5.2-§. Яримнормалар

E вектор фазодаги *яримнорма* деб, Eда аниқланган ва қуйидаги икки шартни қаноатлантирувчи $p: E \to R$ ҳақиқий функцияга айтилади:

(1) $p(\alpha x)=|\alpha|\, p(x)$ барча $\alpha \in K$ ва $x \in E$ учун;

(2) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ барча $x, y \in E$ учун (ярим аддитивлик).

Агар ихтиёрий $x \neq \theta$ учун $p(x)>0$ бўлса, равшанки, p — нормадир.

1-теорема. *p функция E вектор фазодаги яримнорма бўлсин. У ҳолда*

1) $p(\theta)=0$;

2) $|p(x)-p(y)| \leqslant p(x-y)$ *барча* $x, y \in E$ *учун*;

3) $p(x) \geqslant 0$ *барча* $x \in E$ *учун*;

4) $\{x: p(x)=0\}$ *тўплам* E *нинг вектор қисм фазоси бўлади*;

5) $B=\{x: p(x)<1\}$ *тўплам абсолют қавариқ ва ютувчидир.*

Исбот. 1) хосса $p(\alpha x)=|\alpha|\, p(x)$ шартдан $\alpha=0$ бўлганда келиб чиқади;

2) p нинг яримнорма эканлигидан $p(x)=p(x-y+y) \leqslant p(x-y)+p(y)$, яъни $p(x)-p(y) \leqslant p(x-y)$. Шунга ўхшаш, $p(y-x) \geqslant p(y)-p(x)$ тенгсизлик ҳам ўринли. $p(x-y)=p(y-x)$ бўлгани учун юқоридагилардан $|p(x)-p(y)| \leqslant p(x-v)$ тенгсизлик келиб чиқади;

3) агар 2) хоссада $y=\theta$ деб олсак, $p(x) \geqslant |p(x)| \geqslant 0$ тенгсизлик келиб чиқади, яъни $\forall x \in E$ учун $p(x) \geqslant 0$;

4) энди $p(x)=p(y)=0$ ва $\alpha, \beta \in K$ бўлса,

$$0 \leqslant p(\alpha x+\beta y) \leqslant |\alpha|\, p(x)+|\beta|\, p(y)=0$$

муносабатдан $p(\alpha x+\beta y)=0$ тенглик келиб чиқади, яъни $\{x: p(x)=0\}$ тўплам E нинг вектор қисм фазоси экан;

5) ушбу $B=\{x: p(x)<1\}$ тўпламни олайлик. Равшанки, B мувозанатлашган. Агар $x, y \in B$ ва $0 \leqslant t \leqslant 1$ бўлса, $p(tx+(1-t)y) \leqslant tp(x)+(1-t)p(y)<t+1-t=1$ ўринли бўлади. Шунинг учун B қавариқдир, демак, B абсолют қавариқ тўплам экан. $x \in E$ ва $t>p(x)$ бўлса, у ҳолда $p\left(\frac{1}{t} x\right)=\frac{1}{t} p(x)<1$, яъни $t^{-1} x \in B$. Шундай қилиб, $x \in tB$. Демак B — ютувчи тўплам.*

Таъриф. Абсолют қавариқ ва ютувчи A тўплам берилган бўлсин. Ушбу $p_A(x)=\inf\{t>0: x \in tA\}$ функция

A тўпламнинг *Минковский функционали* дейилади. A тўплам ютувчи бўлгани сабабли барча $x \in E$ учун $p_A(x) < +\infty$.

2-теорема. *A тўплам E вектор фазодаги абсолют қавариқ ва ютувчи тўплам бўлсин. У ҳолда*

1) $p_A(x)$ функционал E да яримнорма бўлади;

2) $B = \{x : p_A(x) < 1\}$ ва $C = \{x : p_A(x) \leqslant 1\}$ тўпламлар учун $B \subset A \subset C$ ва $p_B = p_A = p_C$ муносабатлар ўринлидир.

Исбот. Ҳар бир $x \in E$ учун $H_A(x) = \{t > 0 : x \in tA\} \subset R$ тўпламни тузамиз. $t \in H_A(x)$ ва $s > t$ бўлсин. A тўплам қавариқ ва $\theta \in A$ бўлгани сабабли ихтиёрий $x \in A$ учун $\left(1 - \frac{t}{s}\right)\theta + \frac{t}{s}x \in A$ бўлади, яъни $tx \in sA$ муносабат ўринлидир. Бундан $tA \subset sA$ муносабат ва $H_A(x)$ тўпламнинг ярим тўғри чизиқдан иборат эканлиги келиб чиқади. Ихтиёрий $x, y \in E$ учун ушбу

$$p_A(x) < s \text{ ва } p_A(y) < t \qquad (1)$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий s ва t сонларни оламиз. У ҳолда $x \in sA$ ва $y \in tA$ бўлади; бундан эса A абсолют қавариқ тўплам бўлганлиги учун $x + y \in sA + tA \subset (s + t)A$ муносабат келиб чиқади. Шунга кўра $p_A(x + y) \leqslant s + t$. Бундан (1) тенгсизликлардаги s ва t сонлар ихтиёрий бўлгани учун $p_A(x + y) \leqslant p_A(x) + p_A(y)$ келиб чиқади. $p_A(\alpha x) = |\alpha| p_A(x)$ муносабат шунга ўхшаш кўрсатилади.

Агар $p_A(x) < 1$ бўлса, $1 \in H_A(x)$, яъни $x \in A$. Равшанки, агар $x \in A$ бўлса, $p_A(x) \leqslant 1$. Шуларга кўра $B \subset A \subset C$. Бундан ихтиёрий x учун $H_B(x) \subset H_A(x) \subset H_C(x)$, яъни

$$p_C(x) \leqslant p_A(x) \leqslant p_B(x). \qquad (2)$$

Энди ушбу

$$p_C(x) < s < t \qquad (3)$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий s, t сонларни оламиз. У ҳолда $\frac{x}{s} \in C$ ва, демак, $p_A\left(\frac{x}{s}\right) \leqslant 1$, шунга кўра $p_A\left(\frac{x}{t}\right) \leqslant \frac{s}{t} < 1$. Демак, $\frac{x}{t} \in B$, бундан $p_B\left(\frac{x}{t}\right) \leqslant 1$, яъни $p_B(x) \leqslant t$.

Юқоридаги (3) тенгсизликда s, t ихтиёрий бўлгани сабабли $p_B(x) \leqslant p_C(x)$. Бундан ва (2) муносабатдан $p_C(x) = p_B(x)$ тенглик келиб чиқади.*

E вектор фазода яримнормаларнинг бирор P системаси берилган бўлсин. Агар ҳар бир $x\neq\theta$ учун шундай $p\in P$ мавжуд бўлсаки, унинг учун $p(x)\neq 0$ шарт бажарилса, P система E вектор фазонинг нуқталарини *ажратувчи* система дейилади.

3-теорема. *Локал қавариқ E Хаусдорф фазосида ноль атрофлари системасининг абсолют қавариқ атрофлардан иборат бўлган Σ базисини оламиз, p_U эса $U\in\Sigma$ атрофнинг Минковский функционали бўлсин. У ҳолда $\{p_U,\ U\in\Sigma\}$ система E нинг нуқталарини ажратувчи узлуксиз яримнормалар системасини ҳосил қилади.*

Исбот. Агар $x\in E$ ва $x\neq\theta$ бўлса, шундай $U\in\Sigma$ мавжудки, $x\bar{\in}U$, яъни 2-теоремага асосан $p_U(x)\geqslant 1$. Шундай қилиб, $\{p_U,\ U\in\Sigma\}$ система E нинг нуқталарини ажратувчи яримнормалар системасидир.

Энди ихтиёрий $V\in\Sigma$ ва $\varepsilon>0$ оламиз. У ҳолда барча $x\in\varepsilon V$ учун $p_V(x)\leqslant\varepsilon$; бундан, агар $x-y\in\varepsilon V$ бўлса, $|p_V(x)-p^V(y)|\leqslant p_V(x-y)\leqslant\varepsilon$ эканлиги, яъни яримнорманинг узлуксизлиги келиб чиқади.*

4-теорема. *E вектор фазода P яримнормалар системаси берилган бўлсин. Ҳар бир $\varepsilon>0$ ва $p\in P$ учун $V(p,\varepsilon)=\{x: p(x)\leqslant\varepsilon\}$ тўпламни тузамиз. Σ система $V(p,\varepsilon)$ тўпламларнинг барча чекли кесишмаларидан иборат бўлсин. У ҳолда E да шундай τ вектор топология мавжудки, бу топологияда:*

1) E локал қавариқ фазо ва ҳар бир $p\in P$ узлуксиз;

2) Σ нолнинг барча атрофлари системаси учун базисдир;

3) агар P система E нинг нуқталарини ажратувчи бўлса, (E,τ) Хаусдорф фазоси бўлади.

Исбот. Ҳар бир $V(p,\varepsilon)$ тўплам абсолют қавариқ ва ютувчи бўлгани учун Σ нинг элементлари ҳам абсолют қавариқ ва ютувчи бўлади. Ихтиёрий $\alpha>0$ учун $\alpha V(p,\varepsilon)=V(p,\alpha\varepsilon)$ муносабат ўринли бўлганлигидан, ҳар бир $U\in\Sigma$ ва $\alpha>0$ учун $\alpha U\in\Sigma$ эканлиги келиб чиқади.

Энди агар U_1 ва $U_2\in\Sigma$ бўлса, шундай $U\in\Sigma$ топиладики, $U\subset U_1\cap U_2$ муносабат бажарилади. Шундай қилиб, 5.1-§ даги 3-теореманинг барча шартлари бажарилди, демак Eда теоремамизнинг 1 ва 2-хоссаларини қаноатлантирувчи τ топология мавжуддир. Энди $V(p,\varepsilon)$ тўпламларнинг аниқланишига кўра ҳар бир $p\in P$ яримнорманинг узлуксизлиги келиб чиқади. Ниҳоят, P яримнормаларнинг ажратувчи системаси бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда $\bigcap_{U\in\Sigma} U = \bigcap_{p\in P,\ \varepsilon>0} V(p, \varepsilon) = \{\vartheta\}$ бўлади, шундай қилиб, 5.1-§ нинг 5-теоремасига кўра (E, τ) локал қавариқ Хаусдорф фазосидир.*

Мисоллар. 1. Чекли ўлчамли фазолар. Агар n ўлчамли Эвклид фазосида топология $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ норма ёрдамида аниқланса, бу фазо локал қавариқ Хаусдорф фазоси бўлади. Бунда нолнинг барча атрофлари системасининг базиси сифатида ушбу $V_\varepsilon = \{x : \|x\| \leqslant \varepsilon\} (\varepsilon > 0)$ тўпламларни олиш мумкин.

2. Узлуксиз функциялар фазоси. а) $[a, b]$ сегментдаги барча узлуксиз ҳақиқий (ёки комплекс) функцияларнинг $C[a, b]$ тўпламида топология $\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)$ норма бўйича аниқланса, $C[a, b]$ ҳам локал қавариқ фазони ташкил этади;

б) M компакт, $C(M)$ тўплам бу компактдаги барча узлуксиз ҳақиқий (ёки комплекс) функциялардан иборат бўлсин. Ушбу $\|x\| = \max_{t\in M} |x(t)|$ норма ёрдамида киритилган топологияда $C(M)$ локал қавариқ фазо бўлади;

в) $C(R)$ тўғри чизиқдаги барча узлуксиз ҳақиқий (ёки комплекс) функциялар тўплами бўлсин. Ҳар бир $n \in N$ учун ушбу $p_n(x) = \max_{-n\leqslant t\leqslant n} |x(t)|$ яримнормани аниқлаймиз. $C(R)$ фазо $\{p_n : n = 1, 2 \ldots\}$ яримнормалар системаси билан аниқланган топологияда локал қавариқ Хаусдорф фазосидир.

3. Ҳар бир нормаланган чизиқли фазо ўзининг нормаси орқали киритилган топологияда локал қавариқ Хаусдорф фазоси бўлади, бунда ноль атрофларининг базиси вазифасини $\{x : \|x\| \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ система бажаради.

4. Чексиз дифференциалланувчи функциялар фазоси. а) $C^\infty[a, b]$ фазо $[a, b]$ сегментдаги чексиз дифференциалланувчи ҳақиқий (ёки комплекс) функцияларнинг вектор фазоси бўлсин. Ушбу $p_m(x) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x^{(m)}(t)|$, $(m \in N,\ x \in C^\infty[a, b])$ белгилашни киритамиз. У ҳолда $\{p_m : m\in N\}$ система $C^\infty[a, b]$ фазонинг нуқталарини ажратувчи яримнормалар системасини ташкил этади ва бу система ёрдамида киритилган топологияда $C^\infty[a, b]$ локал қавариқ Хаусдорф фазоси бўлади;

б) $C^{\infty}(R)$ тўғри чизиқдаги барча чексиз дифференциалланувчи ҳақиқий (ёки комплекс) функциялар тўплами бўлсин. $p_{mn}(x) = \max\limits_{-n\leqslant t\leqslant n} |x^{(m)}(t)|$ ифода яримнормани аниқлайди, бу ерда $m, n \in N$, $x \in C^{\infty}(R)$.

Бу ҳолда ҳам $\{p_{mn} : m, n \in N\}$ яримнормалар системаси $C^{\infty}(R)$ фазонинг нуқталарини ажратиб, унда локал қаварик Хаусдорф топологиясини аниқлайди.

5. Бирор p мусбат сон учун l_p фазо ушбу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^p < +\infty$ муносабатни қаноатлантирувчи барча кетма-кетликлардан иборат бўлсин. Ҳар қандай $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $0 < p < 1$ учун $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$ тенгсизлик ўринли бўлгани сабабли $d(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$ функция l_p да метрика бўлади. Бу метрика l_p да τ вектор топологияни аниқлашини, яъни (l_p, τ) топологик вектор фазо эканлигини кўрсатамиз.

Метриканинг кўринишидан равшанки,

$$\begin{aligned} &d(x+z,\ y+z) = d(x, y), \\ &d(\lambda x,\ \lambda y) = |\lambda|^p d(x, y), \end{aligned} \tag{4}$$

бу ерда $x, y, z \in l_p$, $\lambda \in R$.

Топологик вектор фазо таърифидаги 1) ва 2) аксиомаларни текширамиз.

Маълумки, X метрик фазода x нуқтанинг атрофлари $U(x, \varepsilon) = \{z \in X : \rho(x, z) < \varepsilon\}$ кўринишда олинади. Демак, 1) аксиоманинг бажарилишини исботлаш учун

$$U(x, \varepsilon/2) + U(y, \varepsilon/2) \subset U(x+y, \varepsilon) \tag{5}$$

муносабатни исботлаш кифоя. Ихтиёрий $z_1 \in U(x, \varepsilon/2)$ ва $z_2 \in U(y, \varepsilon/2)$ нуқталар учун $d(x, z_1) < \varepsilon/2$, $d(y, z_2) < \varepsilon/2$, Демак, (4) муносабатларнинг биринчисига асосан

$$\begin{aligned} &d(x+y,\ z_1+z_2) = d(x+y-z_1,\ z_2) = d(x-z_1,\ z_2-y) \leqslant \\ &\leqslant d(x-z_1,\ \theta) + d(\theta,\ z_2-y) = d(x,\ z_1) + d(y,\ z_2) < \varepsilon, \end{aligned}$$

яъни $z_1 + z_2 \in U(x+y, \varepsilon)$; шу билан (5) исботланди.

Энди 2) аксиоманинг бажарилишини исботлаймиз. Ихтиёрий $x \in l_p$ элементни ва $\lambda \in R$ сонни оламиз. $U(\lambda x, \varepsilon)$ атроф λx элементнинг ихтиёрий ε-атрофи бўлсин. Энди $\varepsilon_1 >$

>0 ва $r>0$ сонларни қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантирадиган қилиб оламиз:

$$r<\left(\frac{\varepsilon}{2d(x,\theta)}\right)^{\frac{1}{p}},\qquad \varepsilon_1<\left(\frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+r)^p}\right)$$

У ҳолда ихтиёрий $z\in U(x,\ \varepsilon_1)$ ва $\beta\in R$ ($|\lambda-\beta|<r$) учун (4) муносабатларга асосан

$$d(\lambda x,\ \beta z)=d(\lambda x-\beta x,\ \beta z-\beta x)\leqslant d(\lambda x-\beta x,\ \theta)+$$
$$+d(\theta,\ \beta z-\beta x)=|\lambda-\beta|^p d(x,\ \theta)+|\beta|^p d(x,\ z)<$$
$$<r^p d(x,\ \theta)+(|\lambda|+r)^p d(x,\ z)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Демак, $\beta z\in U(\lambda x,\varepsilon)$, яъни 2) аксиома ҳам бажарилади.

Шундай қилиб, $(l_p,\ \tau)$ — топологик вектор фазо. Аммо $(l_p,\ \tau)$ локал қавариқ фазо эмас. Шуни кўрсатамиз. Агар $(l_p,\ \tau)$ локал қавариқ фазо бўлганида эди, нолнинг $\{x: d(x,\ \theta)<1\}$ атрофида жойлашган ҳар бир V атроф учун унинг шундай қавариқ атрофи U ва $W=\{x: d(x,\ \theta)\leqslant\varepsilon\}$ атрофи мавжудки, улар ушбу $W\subset U\subset V$ муносабатларни қаноатлантирар эди. Қуйидаги кетма-кетликни тузамиз:

$$x^{(r)}=\{x_n^{(r)}\},\ \text{бу ерда}\ x_n^{(r)}=\begin{cases}1, & \text{агар } r=n \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } r\neq n \text{ бўлса.}\end{cases}$$

У ҳолда барча $r=1,\ 2,\ \dots$ учун $\varepsilon^{\frac{1}{p}}x^{(r)}\in W\subset U$. Энди U қавариқлигидан ҳар бир $n\in N$ учун

$$y=\frac{\sqrt[p]{\varepsilon}}{n}\sum_{r=1}^{n}x^{(r)}\in U\subset V$$

муносабат келиб чиқади. Аммо $d(y,\ \theta)=\varepsilon n^{1-p}$ масофа учун n етарлича катта бўлганда $d(y,\ \theta)>1$. Яъни $y\,\overline{\in}\,V$. Бу зиддият $(l_p,\ \tau)$ фазонинг локал қавариқ эмаслигини кўрсатади.

5.3-§. Хан—Банах теоремаси

E вектор фазо бўлсин. Мазкур параграфда биз E нинг бирор вектор қисм фазосида аниқланган чизиқли функционални унинг айрим хоссаларини сақлаган ҳолда бутун E фазога давом эттириш масаласини кўрамиз. Қуйида келтириладиган теоремалар топологик вектор фазолар назариясининг энг муҳим теоремаларидандир.

1-теорема (Хан—Банах теоремаси) *E ҳақиқий вектор фазо, p унда аниқланган яримнорма бўлиб, f_0 эса E нинг E_0 қисм фазосида аниқланган ва*

$$f_0(x) \leqslant p(x) \quad (x \in E_0) \tag{1}$$

шартни қаноатлантирувчи чизиқли функционал бўлсин. У ҳолда E фазода шундай f чизиқли функционал мавжудки, у f_0 нинг давомидир (яъни $f|E_0 = f_0$) ва

$$f(x) \leqslant p(x) \quad (x \in E). \tag{2}$$

Исбот. Агар $E_0 \neq E$ муносабат ўринли бўлса, f_0 функционални (2) шартни қаноатлантирадиган қилиб бирор $E_1 \supset E_0$ вектор қисм фазога давом эттириш мумкинлигини кўрсатамиз. Бирор $z \in E \setminus E_0$ элементни олиб, E_0 ва z билан ҳосил қилинган $E_1 = E_0 + Rz$ вектор қисм фазони кўрамиз. Таърифга асосан, E_1 фазонинг элементлари ушбу

$$tz + x, \quad x \in E_0, \quad t \in R$$

кўринишга эгадир. f_1 функционал f_0 функционалнинг E фазога бирор давоми бўлса, равшанки,

$$f_1(tz + x) = tf_1(z) + f_0(x).$$

Агар $c = f_1(z)$ белгилаш киритсак, у ҳолда ихтиёрий c учун f_1 чизиқли функционал f_0 функционалнинг давоми бўлади. Биз c сонни (2) шартни назарда тутиб танлаймиз, яъни бу сон ушбу

$$f_0(x) + tc \leqslant p(x + tz)$$

тенгсизликни ихтиёрий x ва t учун қаноатлантирсин. Мусбат t учун бу тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка эквивалент:

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \leqslant p\left(\frac{x}{t} + z\right)$$

яъни

$$c \leqslant p\left(\frac{x}{t} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right). \tag{3}$$

Манфий t учун эса ушбу

$$c \geqslant -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right) \tag{4}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Демак, (3) ва (4) шартларни бир вақтда қаноатлантирувчи c сон мавжудлигини исботлаш керак.

E_0 дан олинган ихтиёрий y', y'' элементлар учун (2) шартга асосан

$$f_0(y'')-f_0(y')=f_0(y''-y')\leq p(y''-y')=p((y''+z)-(y'+ \\ +z))\leqslant p(y''+z)+p(-y'-z),$$

яъни

$$-f_0(y'')+p(y''+z)\geqslant -f_0(y')-p(-y'-z).$$

Бу ерда y' ва y'' ихтиёрий бўлгани сабабли

$$c''=\inf_{y''\in E_0}(-f_0(y'')+p(y''+z))\geqslant c'=\sup_{y'\in E_0}(-f_0(y')-p(- \\ -y'-z)).$$

Агар $c''\geqslant c\geqslant c'$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бирор c сонни олсак, у ҳолда ихтиёрий y', $y''\in E_0$ учун

$$-f_0(y'')+p(y''+z)\geqslant c\geqslant -f_0(y')-p(-y^1-z).$$

Хусусан $y'=y''=\frac{x}{t}$ бўлганда, (3) ва (4) тенгсизликлар ўринли бўлади.

Шундай қилиб, f_0 функционални (2) шартни қаноатлантирадиган қилиб E_1 вектор қисм фазога давом эттириш мумкин.

Энди теореманинг исботини Цорн леммаси (6.1-§) ёрдамида якунлаймиз. Бунинг учун (L, g) жуфтликлардан иборат бўлган Ω тўпламни кўрамиз, бу ерда:

1) L тўплам $E_0\subset L\subset E$ муносабатни қаноатлантирувчи вектор қисм фазо;

2) g чизиқли функционал бўлиб, f_0 нинг L вектор қисм фазога давомидир;

3) ихтиёрий $x\in L$ учун $g(x)\leqslant p(x)$.

Ω тўплам бўш эмас, чунки $(E_0, f_0)\in\Omega$. Ω тўпламда қисман тартиб киритамиз: агар $L_2\supset L_1$ бўлиб, g_2 функционал g_1 функционалнинг давоми бўлса, у ҳолда $(L_1, g_1)\leqslant\leqslant(L_2, g_2)$ деб ҳисоблаймиз. Қисман тартибланган Ω тўпламда Цорн леммасининг шартлари бажарилади. Ҳақиқатан, $\Omega_0\subset\Omega$ ихтиёрий чизиқли тартибланган тўплам бўлсин. Ушбу

$$L_0=\bigcup\{L:(L, g)\in\Omega_0\}$$

тўплам E нинг вектор қисм фазосидир. Дарҳақиқат, x, $y\in L_0$ элементларни олсак, шундай L_1, L_2 вектор қисм фазолар топиладики, $x\in L_1$, $y\in L_2$ бўлади ва (L_1, g_1), $(L_2, g_2)\in\Omega_0$. Ω_0 чизиқли тартибланган бўлгани сабабли ё

$(L_1, g_1) \geqslant (L_2, g_2)$ ёки $(L_2, g_2) \geqslant (L_1, g_1)$. Масалан, $(L_1, g_1) \geqslant \geqslant (L_2, g_2)$ деб фараз қилайлик, у ҳолда $L_1 \supset L_2$ ва демак, x, $y \in L_1$ яъни ихтиёрий λ, μ ҳақиқий сонлар учун $\lambda x + + \mu y \in L_1 \subset L_0$.

L_0 нинг ихтиёрий x элементи бирор $L((L, g) \in \Omega_0)$ га тегишли; $g_0(x) = g(x)$ деб олсак, L_0 вектор қисм фазода бирор g_0 чизиқли функционал аниқланган бўлади. Равшанки, $(L_0, g_0) \in \Omega$ ва (L_0, g_0) элемент Ω_0 тўплам учун юқори чегарадир. Цорн леммасига асосан Ω тўпламда максимал элемент $(L_{\max}, f_{\max})$ мавжуд. Агар биз $L_{\max} = E$ тенгликни исботласак, у ҳолда $f_{\max}$ кeракли функционал бўлади. Агар $L_{\max} \subset E$, $L_{\max} \neq E$ бўлганда эди, биз исботнинг бошида кўрсатилган йўл билан $f_{\max}$ функционални бирор $E_1 \supset E_{\max}$ вектор қисм-фазога давом эттирган бўлар эдик, бу эса $(L_{\max}, f_{\max})$ максимал элемент эканлигига зид. Демак, $L_{\max} = E$ ва $f_{\max} = f$ — керак бўлган функционал.$_*$

Энди Хан—Банах теоремасини комплекс вектор фазолар учун исботлаймиз.

2-теорема. *E комплекс вектор фазода p бирон яримнорма бўлиб, E нинг бирор E_0 вектор қисм фазосида аниқланган f_0 чизиқли функционал*

$$|f_0(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in E_0)$$

шартни қаноатлантирсин. У ҳолда E да аниқланган шундай f функционал мавжудки, у қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad x \in E, \tag{5}$$
$$f(x) = f_0(x), \quad x \in E_0$$

Исбот. Маълумки, ихтиёрий комплекс фазони ҳақиқий вектор фазо сифатида қараш мумкин. E_R ва E_{0R} билан мос равишда ҳақиқий фазо сифатида олинган E ва E_0 фазоларни белгилаймиз. Равшанки, p яримнорма E_R фазода ҳам яримнормадир ва $f_{0R}(x) = \mathrm{Re} f_0(x)$ функционал (f_0 нинг ҳақиқий қисми) E_{0R} фазода ушбу

$$|f_{0R}(x)| \leqslant p(x)$$

шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий функционалдир. Демак, E_{0R} фазода f_{0R} функционал

$$f_{0R}(x) \leqslant p(x)$$

тенгсизликни қаноатлантиради, яъни E_R, E_{0R}, f_{0R} лар учун 1-теореманинг шартлари ўринлидир. Шу теоремага асосан E_R фазода аниқланган ушбу

$$f_R(x) \leqslant p(x),\ x \in E_R, \qquad (6)$$
$$f_R(x) = f_{0R}(x),\ x \in E_{0R}$$

хоссаларга эга ҳақиқий функционал мавжуд. Ушбу

$$-f_R(x) = f_R(-x) \leqslant p(-x) = p(x)$$

тенгсизликка асосан қуйидаги тенгсизликка эгамиз:

$$|f_R(x)| \leqslant p(x),\ x \in E_R.$$

Энди f функционални E фазода қуйидагича аниқлаймиз:

$$f(x) = f_R(x) - i f_R(ix).$$

Бу $f(x)$ комплекс чизиқли функционал эканлиги бевосита текширилади. f учун ушбу

$$f(x) = f_0(x),\ x \in E_0.$$
$$Re f(x) = f_R(x),\ x \in E$$

муносабатлар ўринли. Дарҳақиқат, $x_0 \in E_0$ учун

$$f(x_0) = f_R(x_0) - i f_R(ix_0) = f_{0R}(x_0) - i f_{0R}(ix) =$$
$$= Re f_0(x_0) - i\mathrm{Re} f_0(ix_0) = \mathrm{Re} f_0(x_0) - i\mathrm{Re}(i f_0(x_0)) =$$
$$= \mathrm{Re} f_0(x_0) + i\mathrm{Im} f_0(x_0) = f_0(x_0).$$

Иккинчи муносабат ихтиёрий $x \in E$ учун $f_R(x)$ ҳақиқий сон эканлигидан келиб чиқади.

Ниҳоят, $|f(x)| \leqslant p(x)$ тенгсизликни исботлаш керак. Аксини фараз қилсак, бирор $x_0 \in E$ учун ушбу $|f(x_0)| > p(x_0)$ тенгсизлик ўринли бўлади. Маълумки, ихтиёрий λ комплекс сонни $\lambda = re^{i\varphi}$ $(r > 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ кўринишда ёзиш мумкин. Хусусан, $f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$. Агар $y_0 = e^{-i\varphi} x_0$ элементни олсак, у ҳолда

$$f_R(y_0) = \mathrm{Re} f(y_0) = \mathrm{Re}[e^{-i\varphi} f(x_0)[= \rho > p(x_0) = p(y_0).$$

Бу эса (6) муносабатга зид. Демак, ихтиёрий $x \in E$ учун $f(x)| \leqslant p(x)$.*

5.4-§. Топологик вектор фазоларни метрикалаштириш ва нормалаштириш

(E, τ) топологик вектор фазо бўлсин. Агар E да шундай $\rho(x, y)$ метрика мавжуд бўлсақ, бу метрика ёрдамида киритилган топология τ топология билан устма-уст тушса, бу фазони *метрикалаштириш мумкин* дейилади.

Агар ихтиёрий x, y, z элементлар учун $\rho(x+z, y+z)=\rho(x, y)$ тенглик бажарилса, ρ *инвариант метрика* дейилади. Агар (E, τ) топологик вектор фазода топология бирор бир инвариант метрика билан аниқланган бўлиб, бу метрикада E тўла фазо бўлса, у Φ фазо дейилади. Локал қавариқ Φ фазо *Фреше фазоси* дейилади. Равшанки, агар (E, τ) метрикаланган топологик вектор фазо бўлса, у ҳолда ноль атрофларининг саноқли базиси мавжуд бўлади. Бунга тескари бўлган қуйидаги ибора ҳам ўринли.

1-теорема. *Агар (E, τ) Хаусдорф топологик вектор фазосида нолнинг атрофлари системаси учун саноқли базис мавжуд бўлса, у ҳолда E да шундай d метрика мавжудки:*

а) d метрика ёрдамида киритилган топология E нинг τ топологияси билан устма-уст тушади;

б) маркази нолда бўлган ихтиёрий очиқ шар мувозанатлашгандир;

в) d инвариант, яъни барча x, y, $z \in E$ учун

$$d(x+z,\ y+z)=d(x,\ y)$$

Агар E фазо локал қавариқ ҳам бўлса, d метрикани шундай танлаш мумкинки, у а) — в) шартлардан ташқари қуйидаги шартни ҳам қаноатлантиради;

г) барча очиқ шарлар қавариқдир.

Исбот. Теореманинг шартига кўра E фазода ноль атрофлари системасининг

$$V_{n+1}+V_{n+1}\subset V_n\ (n=1,\ 2,\ \dots) \qquad (1)$$

муносабатларни қаноатлантирувчи саноқли базиси $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ мавжуддир. Агар E локал қавариқ фазо бўлса, V_n ларни абсолют қавариқ қилиб танлаш мумкин. D билан қуйидаги икки шартни қаноатлантирувчи барча рационал сонлар тўпламини белгилаймиз:

1) ҳар бир $r \in D$ ни ушбу

$$r=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(r)2^{-n} \qquad (2)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $c_n(r)=0$ ёки 1;

2) юқоридаги (2) қаторда кўпи билан сони чекли $c_n(r)$ коэффициентлар нолдан фарқли.

Шундай қилиб, ҳар бир $r \in D$ учун $0 \leqslant r < 1$ тенгсизлик ўринли. Ихтиёрий $r \in D$ сон учун қуйидаги тўпламни киритамиз:

$$A(r) = c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + c_3(r)V_3 + \ \ldots \qquad (3)$$

2) шартга кўра (3) тенгликнинг ўнг томонидаги нолдан фарқли ҳадларнинг сони чекли. Ихтиёрий $r \geqslant 1$ учун $A(r) = E$ деб қабул қиламиз. Ҳар бир V_i тўплам очиқ бўлгани учун $A(r)$ $(r \neq 0)$ ҳам очиқ.

Сўнг $f(x) = \inf \{r : x \in A(r)\}$ $(x \in E)$ функцияни тузамиз ва $d(x, y) = f(x - y)(x \in E, \ y \in E)$ белгилашни киритамиз.

d нинг керакли хоссаларга эга бўлиши ушбу

$$A(r) + A(s) \subset A(r + s) \quad (r, \ s \in D) \qquad (4)$$

муносабатга асосланади.

Бу муносабатни исботлашдан олдин, қандай қилиб бу муносабатдан теореманинг ўринли эканлиги келиб чиқишини кўрсатамиз. Ҳар бир $A(s)$, $s \in D$ учун $\theta \in A(s)$ ва (4) муносабатдан келиб чиқадики, агар $r < t$ бўлса, у ҳолда

$$A(r) \subset A(r) + A(t - r) \subset A(t). \qquad (5)$$

Шундай қилиб, $\{A(r)\}$ тўпламлар оиласи „$\subset$“ муносабатга нисбатан чизиқли тартиблангандир. Энди барча $x \in E$ ва $y \in E$ учун

$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y) \qquad (6)$$

тенгсизликни исботлаймиз. Бунинг учун умумиятликни чегараламасдан (6) нинг ўнг томонини 1 дан кичик деб фараз қилишимиз мумкин. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон оламиз. D тўпламда шундай r ва s сонлар топиладики, улар учун $f(x) < r$, $f(y) < s$ ва $r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon$ муносабатлар ўринли. Энди $x \in A(r)$, $y \in A(s)$ бўлса, (4) дан ушбу $x + y \in A\ (r + s)$ муносабат келиб чиқади. Бундан $f(x + y) \leqslant r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринлидир. $\varepsilon > 0$ ихтиёрий бўлгани учун бундан ўз навбатида (6) тенгсизлик келиб чиқади. Ҳар бир $A(r)$ мувозанатлашган бўлгани учун $f(x) = f(-x)$ бўлади. Равшанки, $f(\theta) = 0$. Агар $x \neq \theta$ бўлса, шундай $n \in N$ мавжудки, $x \overline{\in} V_n = A(2^{-n})$ муносабат бажарилади, яъни $f(x) \geqslant 2^{-n} > 0$.

$f(x)$ функциянинг бу хоссаларидан ва $d(x, y) = f(x - y)$ муносабатдан d нинг инвариант метрика эканлиги келиб чиқади.

Маркази нолда бўлган очиқ шарлар E нинг топологиясида очиқ бўлиши ушбу

$$B_\delta(0) = \{x : f(x) < \delta\} = \bigcup_{r<\delta} A(r)$$

тенгликдан келиб чиқади. Энди агар $\delta < 2^{-n}$ бўлса, $B_\delta(0) \subset V_n$ бўлади, яъни ҳар бир V_n тўплам E даги d метрика орқали киритилган топологияда нолнинг атрофи бўлади. Бу мулоҳазалар а) нинг ўринли эканлигини кўрсатади.

Ҳар бир $A(r)$ мувозанатлашган бўлгани учун $B_\delta(0)$ ҳам мувозанатлашган. Агар ҳар бир V_n қавариқ бўлса, ихтиёрий $r \in D$ учун $A(r)$ ҳам қавариқдир; бундан (5) муносабатга кўра ҳар бир $B_\delta(0)$ шарнинг қавариқлиги келиб чиқади.

Энди (4) формулани индукцияни қўллаб исботлаймиз. P_N қуйидаги тасдиқни билдирсин: агар $r + s < 1$ бўлиб, барча $n \geqslant N$ лар учун $c_n(r) = c_n(s) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$A(r) + A(s) \subset A(r + s). \qquad (7)$$

P_1 тасдиқ бевосита кўрсатилади. P_{N-1} тасдиқ бирор бир $N > 1$ учун ўринли бўлсин деб фараз қилайлик. Бирор $r \in D$, $s \in D$, $r + s < 1$ сонлар учун $n > N$ бўлганда $c_n(r) = c_n(s) = 0$ бўлсин. Биз r' ва s' сонларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$r = r' + c_N(r)2^{-N}, \quad s = s' + c_N(s)2^{-N}, \qquad (8)$$

у ҳолда, равшанки, $r' + s' \leqslant r + s < 1$, $c_n(r') = c_n(s') = c_n(r' + s') = 0$ $(n > N - 1)$ ва

$$A(r) = A(r') + c_N(r)V_N, \quad A(s) = A(s') + c_N(s)V_N. \qquad (9)$$

P_{N-1} тасдиқ ўринли бўлгани сабабли $A(r') + A(s') \subset A(r' + s')$. Шундай қилиб,

$$A(r) + A(s) \subset A(r' + s') + c_N(r)V_N + c_N(s)V_N \qquad (10)$$

муносабат ўринли бўлади.

Агар $c_N(r) = c_N(s) = 0$ бўлса, у ҳолда $r = r'$ ва $s = s'$ бўлиб, (10) муносабат (7) муносабатга келтирилади. Энди агар $c_N(r) = 0$ ва $c_N(s) = 1$ бўлса, (10) нинг ўнг томони қуйидаги кўринишга эга:

$$A(r' + s') + V_N = A(r' + s' + 2^{-N}) = A(r + s)$$

ва, демак, яна (7) муносабат ўринлидир.

$c_N(r) = 1$ ва $c_N(s) = 0$ бўлган ҳол шунга ўхшаш талқин қилинади. Энди агар $c_N(r) = c_N(s) = 1$ бўлса, у ҳолда (10) нинг ўнг томони қуйидагича

$$A(r' + s') + V_N + V_N \subset A(r' + s') + V_{N-1} = A(r' + s') + \\ + A(2^{-N+1}) \subset A(r' + s' + 2^{-N+1}) = A(r + s)$$

бўлади. (Бу ерда P_{N-1} тасдиқдан фойдаланилди.) Шундай қилиб, P_{N-1} тасдиқдан P_N тасдиқ келиб чиқар экан.$_*$

Таъриф. (E, τ) топологик вектор фазода A тўплам берилган бўлсин. Агар нолнинг ҳар бир V атрофи учун шундай $r > 0$ сон топилсаки, ушбу $A \subset t\,V$ муносабат ихтиёрий $t > r$ сон учун бажарилса, у ҳолда A *чегараланган тўплам* дейилади.

Равшанки, чегараланган тўпламнинг таърифидаги шартни нолнинг атрофлари системасининг бирор бир базиси учун талаб этиш кифоядир.

2-теорема. а) *агар A чегараланган тўплам бўлиб, $B \subset A$ бўлса, B ҳам чегараланганидир;*

б) агар A чегараланган тўплам бўлса, у ҳолда ҳар бир $\lambda \in K$ учун λA ҳам чегараланганидир;

в) агар A, B чегараланган тўпламлар бўлса, $A \cup B$ ва $A + B$ ҳам чегараланган тўпламдир.

Исбот. а) нинг исботи ўз-ўзидан равшан.

б) V нолнинг ихтиёрий атрофи бўлсин. Умумиятликни чегараламаган ҳолда V ни мувозанатлашган деб олишимиз мумкин.

A тўплам чегараланган бўлгани учун шундай $c > 0$ сон топиладики, $A \subset t\,V$ муносабат барча $t > \epsilon$ лар учун бажарилади.

Агар $\lambda = 0$ бўлса, λA тўплам чегараланганлиги равшан. Агар $\lambda \neq 0$ бўлса, $\lambda = r \cdot \alpha$ деб ёзиб олсак, бунда $r > 0$, $|\alpha| = 1$ ва барча $t > s$ лар учун $\lambda A \subset t\lambda V = tr \cdot \alpha V = t \cdot rV$, чунки V мувозанатлашган тўплам бўлганлигидан $\alpha(|\alpha| = 1)$ сон учун ушбу $\alpha V = V$ тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб, агар $t' > rs$ бўлса, $\lambda A \subset t'V$, яъни λA ҳам чегараланганидир.

в) V нолнинг ихтиёрий атрофи бўлсин. Нолнинг $U + U \subset V$ шартни қаноатлантирувчи U атрофини оламиз. A чегараланган бўлгани учун шундай $s_1 > 0$ сон топиладики, $A \subset tU$ шарт $t > s_1$ учун бажарилади; шунга ўхшаш шундай $s_2 > 0$ сон топиладики, $t > s_2$ бўлганда $B \subset tU$. Демак, $t > s = \max(s_1, s_2)$ сонлар учун $A \subset tU$, $B \subset tU$; бундан эса $A + B \subset tU + tU \subset tV$, $t > s$, яъни $A + B$ нинг чегараланганлиги келиб чиқади. $A \cup B$ нинг ҳам чегараланганлиги шунга ўхшаш кўрсатилади.$_*$

Агар (E, τ) топологик вектор фазода шундай норма мавжуд бўлсаки, бу норма ёрдамида киритилган топология τ топология билан устма-уст тушса, E *фазо нормаланувчи* дейилади.

3-теорема. (А. Н. Колмогоров теоремаси). *Хаусдорф топологик вектор фазоси нормаланувчи бўлиши учун бу фазода нолнинг чегараланган қавариқ атрофи мавжуд бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурлиги. Агар (E, τ) нормаланган фазо бўлса, нолнинг $V_1 = \{x : \|x\| < 1\}$ атрофи қавариқ ва чегаралангандир.

Кифоялиги. (E, τ) топологик вектор фазода V нолнинг қавариқ ва чегараланган атрофи бўлсин. 5.1-§ даги 3-теореманинг исботидаги каби $U = \bigcap\limits_{|\mu|=1} \mu V$ тўплам нолнинг абсолют қавариқ атрофи бўлади. U тўплам V нинг қисми бўлгани учун чегаралангандир. Энди p функционал U атрофнинг Минковский функционали бўлсин. p нинг норма эканлигини исботлаймиз.

Агар $x \neq \theta$ бўлса, нолнинг шундай W атрофи мавжудки, $x \overline{\in} W$ бўлади. U атроф чегараланган бўлгани учун $U \in tW$ муносабат бирор $t > 0$ учун ўринли бўлади, яъни $\frac{1}{t} U \subset W$. Бундан $x \overline{\in} \frac{1}{t} U$ ёки, бошқача қилиб айтганда, $p(x) \geqslant \frac{1}{t} > 0$ тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $p(x)$ норма экан. U атроф чегараланган бўлгани учун нолнинг ҳар бир W атрофи учун шундай $n \in N$ мавжудки, $\frac{1}{n} U \subset W$, яъни E даги норма бўйича киритилган топология τ билан устма-уст тушади.$_*$

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Ҳақиқий сонлар фазоси R ни ўзи устида вектор фазо сифатида оламиз. Бу фазода вектор топология бўлмаган топологияга мисол келтиринг.
2. Агар топологик вектор фазода бирор очиқ ва чегараланган тўплам мавжуд бўлса, у *локал чегараланган* фазо дейилади. Ихтиёрий нормаланган фазо локал чегараланган фазолигини исботланг.
3. Локал чегараланган бўлмаган топологик вектор фазога мисол келтиринг.
4. Топологик вектор фазода қуйидаги тасдиқлар тенг кучли эканлигини исботланг:

а) M тўплам чегараланган бўлиши учун ихтиёрий $\{x_n\} \subset M$ кетма-кетлик ва нолга интилувчи $\{\varepsilon_n\}$ мусбат сонлар кетма-кетлиги учун $\{\varepsilon_n x_n\}$ кетма-кетлик нолга интилиши зарур ва кифоядир;

б) ихтиёрий яқинлашувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегаралангандир.

5. Локал чегараланган фазода бири-бирини ютувчи тўпламлардан иборат нолнинг атрофлари базиси мавжудлигини исботланг.
6. Топологик вектор фазода U очиқ тўплам қавариқ бўлиши учун $U + U = 2U$ тенглик зарур ва кифоялигини исботланг.
7. Вектор фазодаги A қавариқ тўплам ютувчи бўлиши учун унинг Минковский функционали чекли бўлиши зарур ва кифоялигини исботланг.

VI боб

ҚИСМАН ТАРТИБЛАНГАН ФАЗОЛАР

6.1-§. Қисман тартибланган тўпламлар

Маълумки, ҳақиқий сонларнинг асосий хусусиятларидан бири уларни солиштириш мумкинлиги эди, яъни ҳар қандай икки ҳақиқий соннинг бир-биридан катта, тенг ёки кичиклигини аниқлаш мумкин. Шу маънода ҳақиқий сонлар тўплами чизиқли тартибланган, яъни ҳар қандай икки x ва y ҳақиқий сон учун қуйидаги уч муносабатдан бири ўринлидир:

$$x < y,\ x > y,\ x = y.$$

Аммо математиканинг турли соҳаларида одатда шундай объектлар учрайдики, уларнинг орасида чизиқли тартиб ўрнатилмаган. Уларнинг баъзи бир жуфт элементларинигина солиштириш мумкин. Масалан, F тўплам $[0, 1]$ ораликда аниқланган барча ҳақиқий функциялардан иборат бўлсин. Агар F дан олинган f ва g функциялар учун ҳар қандай $x \in [0, 1]$ нуқтада $f(x)$ сон $g(x)$ сондан кичик бўлмаса, $f(x)$ ни $g(x)$ дан катта ёки тенг деймиз. F тўпламни шу маънода *қисман тартибланган* деймиз. Бу мисол шуни кўрсатадики, F тўпламда ихтиёрий икки функцияни эмас, балки баъзи бир жуфт функцияларнигина солиштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар бирор нуқтада f функция g функциядан катта бўлиб, бошқа бир нуқтада f функция g функциядан кичик бўлса, биз бундай функцияларни солиштира олмаймиз.

Таъриф. Агар бирор X тўпламнинг баъзи жуфт x ва y элементлари учун бирон қоидага мувофиқ $x \geqslant y$ муносабат берилган бўлиб, у қуйидаги учта аксиомани қаноатлантирса, у ҳолда X тўплам қисман тартибланган, „$\geqslant$“ муносабат эса *қисман тартиб* ёки *тенгсизлик* дейилади:

1) $x \geqslant x$;

2) агар $x \geqslant y$ ва $y \geqslant x$ бўлса, у ҳолда $x = y$;

3) агар $x \geqslant y$ ва $y \geqslant z$ бўлса, у ҳолда $x \geqslant z$.

Келгусида $x \geqslant y$ муносабатни баъзан $y \leqslant x$ кўринишда ҳам ёзамиз. Бу ҳолда x катта ёки тенг y (y кичик ёки тенг x) деб ўқилади. Агар қисман тартибланган тўпламда x ва y элементлар учун ушбу $x \geqslant y$, $x \leqslant y$ муносабатларнинг бири ўринли бўлса, у ҳолда бу *элементларни солиштириш мумкин* дейилади.

Мисоллар. 1) R^n вектор фазода $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ векторлар учун $x_i \geqslant y_i$ муносабат ихтиёрий i-координатада бажарилса, $x \geqslant y$ деймиз. Юқоридаги 1) — 3) аксиомаларнинг бажарилиши бевосита текширилади.

2) m, s, l_2 фазоларда ҳам қисман тартиб координаталар ёрдамида биринчи мисолдагидек аниқланади.

3) N натурал сонлар тўплами бўлсин. Агар m сон n сонга бўлинса, $m \geqslant n$ деймиз. Масалан, $8 \geqslant 4$, $9 \geqslant 3$. Лекин 9 ва 6 сонларини бу маънода солиштириб бўлмайди. Демак, N тўплам бу маънода қисман тартибланган.

4) M ихтиёрий тўплам бўлиб, Ω система M нинг барча қисм тўпламларидан иборат бўлсин. $A, B \in \Omega$ элементлар учун $A \subset B$ муносабат бажарилса, $A \leqslant B$ деймиз. Бу ҳолда $(\Omega, \leqslant)$ жуфтлик қисман тартибланган тўплам бўлади.

Ихтиёрий тўпламда кисман тартибни турлича киритиш мумкин. Масалан, натурал сонлар тўпламида қисман тартибни одатдагича (бунда N чизиқли тартибланган бўлади) ва юқоридаги 3) мисолдагидек ҳам киритиш мумкин бўлиб, бу икки қисман тартиб турлидир.

Шунинг учун қисман тартибланган тўплам қурилганда тўплам билан бирга қандай тартиб киритилганлигини аниқлаб қўйиш зарур.

Таъриф. Агар қисман тартибланган тўпламнинг ҳар қандай икки элементини солиштириш мумкин бўлса, бу тўплам *занжир* ёки *чизиқли тартибланган* дейилади.

Масалан, R ҳақиқий сонлар тўплами чизиқли тартибланганлир.

Таъриф. Қисман тартибланган X тўпламнинг ҳар қандай $x, y \in X$ элементлари учун ушбу

$$z \geqslant x,\ z \geqslant y \quad (z \leqslant x,\ z \leqslant y)$$

муносабатларни қаноатлантирадиган $z \in X$ элемент мавжуд бўлса, у ҳолда X тўплам *юқорига (пастга) йўналган* дейилади.

Равшанки, ҳар қандай занжир ҳам юқорига, ҳам пастга йўналгандир.

Йўналган тўплам тушунчаси кетма-кетлик тушунчасини умумлаштиришда фойдалидир. Ҳар қандай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликни натурал аргументнинг функцияси деб ҳисоблаш мумкин, яъни $x_n = x(n): N \to X$.

Бирор $x = f(\alpha)$ функция қисман тартибланган A тўпламда аниқланган ва унинг қийматлари бирор X тўпламдан бўлсин деб фараз қилайлик. Қуйидаги таърифни бериш учун биз α аргументни индекс кўринишида, функцияни эса $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ кўринишда ёзамиз.

Таъриф. Агар A юқорига ёки пастга йўналган тўплам бўлса, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ функция *тўр*, x_α элементлар эса *тўрнинг ҳадлари* дейилади.

Мисоллар. 5) одатдаги $\{x_n\} \subset X$ кетма-кетлик тўрдир. Бу ерда $x_n = x(n)$ натурал сонлар тўпламида аниқланган функция. Натурал сонлар тўплами эса юқорига йўналган тўпламдир.

6) 4-мисолдаги Ω тўплам ихтиёрий A ва B элементлар билан бирга уларнинг $A \cap B$ кесишмасини ҳам ўз ичига олади. Демак, Ω пастга йўналган тўплам бўлади. Энди ҳар қандай $A \in \Omega$ учун A нинг бирор элементини танлаб олиб, уни $x(A) = x_A$ деб белгиласак, $\{x_A\}_{A \in \Omega}$ тўр ҳосил қилади.

Тўр тушунчаси айниқса топологияда муҳим роль ўйнайди.

X қисман тартибланган тўплам бўлсин. E тўплам X нинг қисми бўлиб, $y \in X$ шундай элемент бўлсаки, ҳар қандай $x \in E$ учун $y \geqslant x$ $(y \leqslant x)$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда y элемент E тўпламнинг *юқори чегараси (қуйи чегараси)* дейилади. Агар E тўпламнинг юқори (қуйи) чегараси мавжуд бўлса, E тўплам *юқоридан (қуйидан) чегараланган* дейилади. Юқоридан ҳамда қуйидан чегараланган тўплам *чегараланган тўплам* дейилади. Агар $y \in X$ шундай элемент бўлсаки, X тўпламда ундан катта (кичик) элемент мавжуд бўлмаса, у ҳолда v *максимал (минимал) элемент* дейилади. Шуни айтиш кераки, X тўпламда максимал элемент билан солиштириб бўлмайдиган элементлар мавжуд бўлиши мумкин.

Мисол. 7) Уч x, y, z элементдан иборат бўлган X тўпламда қисман тартибни қуйидагича киритамиз: $x<y$, $x<z$; y ва z ўзаро солиштириб бўлмайдиган элементлар. Бу тўпламда y ва z максимал элементлар, x эса минимал элемент.

Қуйида исботсиз келтирилган лемма математикада катта роль ўйнайди.

Цорн леммаси. Агар қисман тартибланган X тўпламда ҳар қандай занжир юқори чегарага эга бўлса, у ҳолда ҳар қандай $x_0 \in X$ элемент учун ундан катта ёки тенг бўлган максимал элемент мавжуд.

Таъриф. X қисман тартибланган тўплам бўлсин. Агар $E \subset X$ тўплам учун энг кичик юқори чегара мавжуд бўлса, бу элемент *супремум* ёки *аниқ юқори чегара* дейилади ва $\sup E$ (ёки VE) билан белгиланади. Яъни $\sup E$ шундай элементки:

(1) ҳар қандай $x \in E$ элемент учун $\sup E \geqslant x$;

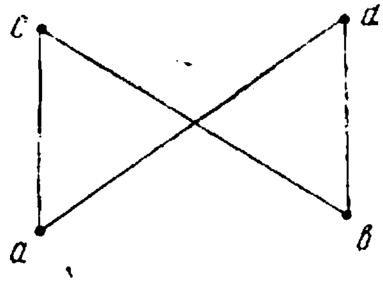
(2) агар ҳар қандай $x \in E$ учун $y \geqslant x$ бўлса, бу ҳолда $y \geqslant \sup E$.

Шунга ўхшаш, инфимум ёки аниқ қуйи чегара тушунчаси киритилади, яъни $\inf E$ (ёки) $\wedge E$) шундай элементки:

(1) ҳар қандай $x \in E$ элемент учун $\inf E \leqslant x$;

(2) агар ҳар қандай $x \in E$ элемент учун $y \leqslant x$ бўлса, у ҳолда $y \leqslant \inf E$.

Агар индексларга боғлиқ $\{y_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ система берилган бўлса, бу системанинг супремуми (инфимуми) $\sup\limits_{\xi \in \Gamma} y_\xi$ ёки $\bigvee\limits_{\xi \in \Gamma} y_\xi$ ($\inf\limits_{\xi \in \Gamma} y_\xi$ ёки $\bigwedge\limits_{\xi \in \Gamma} y_\xi$) билан белгиланади.



1- расм.

Шуни айтиб ўтиш кераккки, ҳар қандай тўплам супремумга ёки инфимумга эга бўлиши шарт эмас.

8) Масалан, тўрт элементли $\{a, b, c, d\}$ тўпламда қисман тартибни қуйидагича киритамиз (1-расм):

$$a \leqslant c, \ a \leqslant d, \ b \leqslant c, \ b \leqslant d,$$

a ва b, c ва d солиштириб бўлмайдиган элементлар. Бу мисолда $\{a, b\}$ ва $\{c, d\}$ тўпламлар супремумга ҳам, инфимумга ҳам эга эмас.

sup ва inf тушунчаларининг таърифларидан уларнинг қуйидаги хоссалари бевосита келиб чиқади:

а) агар E тўплам учун $\sup E$ ($\inf E$) мавжуд бўлса, у ягонадир;

б) агар $\sup E$ ва $\inf E$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\sup E \geqslant \inf E$;

в) агар $E_1 \subset E_2$ бўлса, ва $\sup E_1$, $\sup E_2$ ($\inf E_1$, $\inf E_2$) мавжуд бўлса, бу ҳолда $\sup E_1 \leqslant \sup E_2$ ($\inf E_1 \geqslant \inf E_2$);

г) агар ҳар қандай $x \in E_1$ ва $y \in E_2$ элементлар учун $x \leqslant y$ тенгсизлик бажарилиб, $\sup E_1$ ва $\inf E_2$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\sup E_1 \leqslant \inf E_2.$$

1-теорема (ассоциативлик қонуни). *Агар* $E = \bigcup\limits_{\xi \in \Gamma} E_\xi$ *бўлиб, ҳар қандай* $\xi \in \Gamma$ *учун* $\sup E_\xi = y_\xi$ ва $y = \sup\limits_{\xi \in \Gamma} y_\xi$ *мавжуд бўлса у ҳолда* $y = \sup E$, *яъни*

$$\sup E = \sup_{\xi \in \Gamma} (\sup E_\xi).$$

Исбот. Ҳар қандай $x \in E$ учун шундай $\xi \in \Gamma$ мавжудки, $x \in E_\xi$ ва $x \leqslant y_\xi \leqslant y$. Демак, y элемент E тўпламнинг юқори чегараси. Яна бирор z элементни E тўпламнинг юқори чегараси деб фараз қилайлик. $E_\xi \subset E$ бўлгани учун z ҳар қандай E_ξ тўпламнинг ҳам юқори чегараси, яъни $y_\xi \leqslant z$. Шунинг учун $y = \sup\limits_{\xi \in \Gamma} y_\xi \leqslant z$. Демак, $y = \sup E$.*

Ассоциативлик қонуни $\inf$ учун ҳам ўринли.

6.2-§. Панжаралар

Қисман тартибланган X тўпламда чекли $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ тўплам учун супремум (инфимум) мавжуд бўлса, уни ушбу

$$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \quad (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$$

кўринишда ёзамиз, яъни

$$\sup\{x_1, x_2, \ldots x_n\} = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n,$$
$$\inf\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$$

Таъриф. Қисман тартибланган X тўпламда ҳар қандай икки $x_1, x_2 \in X$ элемент учун супремум $x_1 \vee x_2$ ва инфимум $x_1 \wedge x_2$ мавжуд бўлса X *панжара* дейилади (математик адабиётда панжара термини ўрнига структура термини ҳам ишлатилади).

Математик индукциядан фойдаланиб, қуйидаги теоремани осонликча исбот қилиш мумкин.

1-теорема. *Ҳар қандай панжарада ихтиёрий чекли тўплам чегараланган бўлиб, супремум билан инфимумга эга.*

Мисоллар. 1) Ҳар қандай занжир панжарадир;

2) 6.1-§ даги 1)—4) мисоллар ҳам панжарага мисолдир. Масалан, 4) мисолда A, $B \in \Omega$ элементлар учун

$$A \vee B = A \cup B, \quad A \wedge B = A \cap B.$$

1) мисолда эса, агар

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \ x_2, \ldots, x_n), \\ y &= (y_1, \ y_2, \ldots y_n) \text{ бўлса}, \\ x \vee y &= (z_1, \ z_1, \ldots, \ z_n), \\ x \wedge y &= (w_1, \ w_2, \ldots, \ w_n), \end{aligned}$$

бу ерда

$$z_i = \begin{cases} x_i, & \text{агар } x_i \geqslant y_i \text{ бўлса}, \\ y_i, & \text{агар } x_i \leqslant y_i \text{ бўлса}, \end{cases}$$

$$w_i = \begin{cases} x_i, & \text{агар } x_i \leqslant y_i \text{ бўлса}, \\ y_i, & \text{агар } x_i \geqslant y_i \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Шунга ўхшаш 3) мисолдаги тўпламнинг ҳам панжаралиги кўрсатилади. Масалан, $n \wedge m$ сон n ва m сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси, $n \vee m$ эса энг кичик умумий бўлинувчисидир.

6.1-§ даги 8) мисол панжара эмас, чунки масалан, $a \vee b$ ва $c \wedge d$ мавжуд эмас.

Таъриф. *Агар панжарадаги ҳар қандай бўш бўлмаган тўплам супремум ва инфимумга эга бўлса, бу панжара тўла дейилади.*

Агар панжарадаги ҳар қандай бўш бўлмаган юқоридан чегараланган тўплам супремумга ва қуйидан чегараланган тўплам инфимумга эга бўлса, панжара *шартли тўла* дейилади.

6.1-§ даги 1)—3) мисоллардаги панжаралар тўла эмас, лекин шартли тўла. 4) мисолдаги панжара тўла панжарадир. Шартли тўла бўлмаган панжарага мисол 6.3-§ нинг 3) мисолида келтирилади.

Ҳар қандай тўла панжарада энг катта ва энг кичик элементларнинг мавжудлиги таърифдан бевосита келиб чиқади.

2-теорема. *Агар X панжарада ҳар қандай юқоридан чегараланган тўплам супремумга эга бўлса, бу панжара шартли тўла.*

Исбот. Теоремани исботлаш учун ҳар қандай қуйидан чегараланган тўпламнинг инфимумга эгалигини кўрсатиш керак. $E \subset X$ бўш бўлмаган, қуйидан чегараланган тўплам бўлсин. Бу ҳолда E нинг қуйи чегараларидан иборат I тўплам бўш бўлмайди ва юқоридан E нинг ҳар бир элементи билан чегараланган бўлади. Теореманинг шартига асосан $y = \sup_I$ мавжуд. Супремумнинг таърифига биноан ҳар қандай $x \in E$ учун $y \leqslant x$, яъни y элемент E тўпламнинг қуйи чегараларидан бири, демак, $y \in I$. Шунинг учун ва $y = \sup I$ бўлгани туфайли бу элемент E тўпламнинг энг катта қуйи чегарасидир, яъни $y = \inf E$.*

Таъриф. Ҳар қандай $x, y, z \in X$ элементлар учун ушбу

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \qquad (1)$$

муносабат ўринли бўлган панжара *дистрибутив панжара* дейилади.

3-теорема. *Дистрибутив панжарада ҳар қандай x, y, z элементлар учун қуйидаги муносабат ўринлидир:*

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \qquad (2)$$

(яъни (1) формулада $\vee$ ва $\wedge$ белгиларни ўзаро алмаштириш мумкин).

Исбот. (2) формуланинг ўнг томонини (1) формулага асосан қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$(x \vee z) \wedge (y \vee z) = [x \wedge (y \vee z)] \vee [z \wedge (y \vee z)] =$$
$$= [x \wedge (y \vee z)] \wedge z.$$

Квадрат қавс ичидаги ифодага яна (1) муносабатни ва ассоциативлик қонунини (6.1-§, 1-теорема) қўллаймиз:

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee z = [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \vee z =$$
$$= (x \wedge y) \vee [(x \wedge z) \vee z] = (x \wedge y) \vee z.$$

Бу ерда биз $(x \wedge z) \vee z = z$ тенгликдан фойдаландик.*

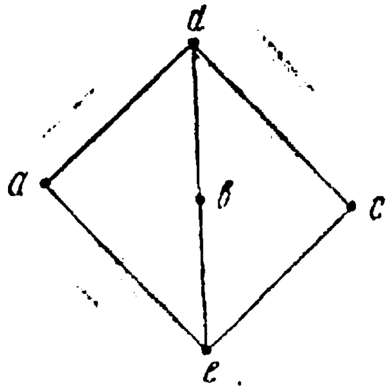
Мисоллар. 1) Ҳар қандай занжир дистрибутив панжарага мисолдир.

2) 6.1-§ даги 1), 2) ва 4) мисоллар ҳам дистрибутив панжарага мисоллардир. Масалан, 4) мисолда дистрибутив

қонун тўпламлар назариясидан маълум қуйидаги тасдиқдан келиб чиқади: M тўпламнинг ҳар қандай A, B, C қисм тўпламлари учун қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Қуйидаги панжара дистрибутив эмас (2- расм).



2- расм.

$$X = \{a, b, c, d, e\},$$

$$e \leqslant a \leqslant d,\ e \leqslant b \leqslant d,\ e \leqslant c \leqslant d.$$

Ҳақиқатан

$$(a \vee b) \wedge c = d \wedge c = c,$$
$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = e \wedge e = e.$$

Энди биз панжараларда тартиб бўйича яқинлашиш тушунчасини киритамиз.

Таъриф. X панжаранинг $\{x_n\}$ элементлари кетма-кетлиги учун шундай икки

$$\{y_n\};\ y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant \ldots \text{ (монотон ўсувчи)}.$$
$$\{z_n\};\ z_1 \geqslant z_2 \geqslant \ldots \geqslant z_n \geqslant \ldots \text{ (монотон камаювчи)}$$

кетма-кетлик мавжуд бўлсаки, булар учун ушбу

1) $x = \sup y_n = \inf z_n$;

2) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$

шартлар бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик x элементга (о)-*яқинлашувчи (тартиб бўйича яқинлашувчи)* дейилади ва $x_n \xrightarrow{(o)} x$ ёки $x = (o) \lim x_n$ билан белгиланади, x элемент эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг (о)-*лимити* дейилади. Масалан, тўғри чизиқда (о)-яқинлашиш оддий яқинлашиш билан тенг кучли.

4- теорема. *Монотон ўсувчи (камаювчи) $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг x элементга (о)-яқинлашиши учун $x = \sup x_n$ $(x = \inf x_n)$ шарт зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурлиги. $x_n \xrightarrow{(o)} x$ ва $\{x_n\}$ монотон ўсувчи бўлсин. Таърифдаги $\{y_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликларни оламиз. Бунда $x = \inf z_n$ ва ҳар қандай m ва n сонлар учун $z_m \geqslant x_n$ бўлгани туфайли ҳар қандай n учун $x \geqslant x_n$.

Бундан ташқари, агар бирон u элемент ва ҳар қандай натурал n учун $u \geqslant x_n$ бўлса, бу ҳолда ҳар қандай n

учун $u \geqslant y_n$ яъни $u \geqslant \sup y_n = x$. Супремумнинг таърифига асосан, $x = \sup x_n$.

Кифоялиги. $\{x_n\}$ монотон ўсувчи бўлиб, $x = \sup x_n$ бўлсин. Бу ҳолда ҳар қандай n натурал сон учун $z_n = x$ ва $y_n = x_n$ кетма-кетликлар таърифдаги кетма-кетликлар вазифасини бажаради.$_*$

Шуни айтиб ўтиш керакки, (о)- яқинлашувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегаралангандир, чунки ҳар қандай n учун $z_1 \geqslant x_n \geqslant y_1$.

5-теорема. $\{x_n\}$ ва $\{x'_n\}$ *кетма-кетликлар берилган бўлиб, ҳар қандай* n *натурал сон учун* $x_n \leqslant x'_n$ *бўлсин. Агар* $x = (o)\lim x_n$ *ва* $x' = (o)\lim x'_n$ *мавжуд бўлса, у ҳолда* $x \leqslant x'$.

Исбот. Лимитнинг таърифига асосан шундай $\{z'_n\}$, $\{y_n\}$ кетма-кетликлар мавжудки, z'_n монотон камаювчи бўлиб, $\inf z'_n = x'$; y_n эса монотон ўсувчи бўлиб, $\sup y_n = x$ ва $y_n \leqslant x_n$, $x'_n \leqslant z'_n$. Бу ҳолда ҳар қандай m ва n натурал сонлар учун

$$y_n \leqslant z'_m.$$

6.1- § даги г) хоссага асосан

$$x = \sup y_n \leqslant \inf z'_m = x'._*$$

Натижа. Берилган яқинлашувчи кетма-кетлик фақатгина битта (о)- лимитга эга бўлиши мумкин.

6.3- §. Буль алгебралари

Агар панжарада энг катта (энг кичик) элемент мавжуд бўлса, бу элемент *бир (ноль)* дейилади ва 1 (0) бир (ноль) элементи билан белгиланади. Дистрибутив панжараларнинг муҳим синфи Буль алгебраларидир.

Таъриф. Бир ва ноль $(0 \neq 1)$ элементларга эга бўлган дистрибутив E панжаранинг ҳар бир x элементи учун $x \vee Cx = 1$ ва $x \wedge Cx = 0$ тенгликларни қаноатлантирувчи Cx элемент мавжуд бўлса, E *Буль алгебраси* дейилади. Cx элемент x га нисбатан *тўлдирувчи элемент* дейилади.

1-теорема. *Буль алгебрасининг ҳар бир* x *элементи ягона тўлдирувчи элементга эга.*

Исбот. y ва z элементлар x элементнинг тўлдирувчилари деб фараз қилайлик, яъни $x \wedge y = x \wedge z = 0$, $x \vee y = x \vee z = 1$, у ҳолда 6.2- §, 3- теоремага мувофиқ,

$$y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z) = 1 \wedge (y \vee z) = y \vee z,$$
$$z = z \vee 0 = z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y) = 1 \wedge (z \vee y) = z \vee y,$$
яъни $y=z$.*

2-теорема. *Тўлдирувчи Cx элемент қуйидаги хоссаларга эга:*

а) *ҳар қандай $x \in E$ учун*

$$C(Cx)=x;$$

б) *агар $x \wedge y=0$ бўлса, у ҳолда $x \leqslant Cy$;*

в) *$x \leqslant y$ ва $Cx \geqslant Cy$ эквивалент тенгсизликлардир,*

г) *$M \subset E$ тўплам учун $\vee M$ (ёки $\wedge M$) мавжуд бўлса, у ҳолда $C(\vee M)=\wedge CM$ $(C(\wedge M)=\vee CM)$, бу ерда $CM=\{Cm : m \in M\}$.*

Исбот. а) хосса тўлдирувчининг таърифига биноан 1-теоремадан келиб чиқади;

б) $x \vee Cy$ элементни a билан белгилаймиз. Сўнгра

$$a \vee y=(x \vee Cy) \vee y=x \vee (Cy \vee y)=x \vee 1=1,$$
$$a \wedge y=(x \vee Cy) \wedge y=(x \wedge y) \vee (Cy \wedge y)=0 \vee 0=0$$

Кўриниб турибдики, $a=Cy$, демак, $Cy=x \vee Cy$, яъни $x \leqslant Cy$;

в) агар $x \leqslant y$ бўлса, бу ҳолда $x \wedge Cy=(x \wedge y) \wedge Cy=x \wedge (y \wedge Cy)=x \wedge 0=0$; б) хоссага биноан $x \wedge Cy=0$ дан $Cy \leqslant Cx$ келиб чиқади. Шунга ўхшаш, $Cy \leqslant Cx$ дан $x \leqslant y$ келиб чиқади;

г) $m \in M$ бўлса, у ҳолда $m \leqslant \vee M$, яъни $Cm \geqslant C(\vee M)$ ёки $C(\vee M)$ элемент CM тўплам учун қуйи чегара.

Агар z элемент CM тўплам учун қуйи чегара, яъни ҳар қандай $m \in M$ учун $z \leqslant Cm$ бўлса, у ҳолда $Cz \geqslant m$ ва $Cz \geqslant \vee M$. в) га биноан $z \leqslant C(\vee M)$. Бу тенгсизлик ихтиёрий қуйи чегара учун ўринли бўлгани туфайли, $\wedge CM=C(\vee M)$ келиб чиқади. Шунга ўхшаш, $\vee CM=C(\wedge M)$ тенглик ҳам исботланади.*

3-теорема. *$M \subset E$ тўплам учун $\vee M$ (ёки $\wedge M$) мавжуд бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда ҳар қандай $e \in E$ элемент учун қуйидаги тенгликлар ўринлидир:*

$$e \wedge (\vee M)=\bigvee_{m \in M}(e \wedge m) \quad \left(e \vee (\wedge M)=\bigwedge_{m \in M}(e \vee m)\right)$$

(умумлашган дистрибутив қонунлар).

Исбот. Ҳар қандай $m \in M$ учун $\vee M \geqslant m$ бўлгани туфайли $e \wedge (\vee M) \geqslant e \wedge m$, яъни $e \wedge (\vee M)$ элемент $\{e \wedge m,\ m \in M\}$ тўплам учун юқори чегарадир. Энди

$z \in E$ шу тўплам учун ихтиёрий юқори чегара бўлсин, яъни $z \geqslant e \wedge m$, $m \in M$. У ҳолда ҳар бир $m \in M$ учун

$$z \vee Ce \geqslant (e \wedge m) \vee Ce = (e \vee Ce) \wedge (m \vee Ce) = \\ = 1 \wedge (m \vee Ce) = m \vee Ce \geqslant m,$$

яъни $z \vee Ce \geqslant \vee M$. Бундан

$$z = z \vee 0 = z \vee (e \wedge Ce) = (z \vee e) \wedge (z \vee Ce) \geqslant \\ \geqslant (z \vee e) \wedge (\vee M) \geqslant e \wedge (\vee M).$$

Шундай қилиб, ихтиёрий z юқори чегара учун $z \geqslant e \wedge (\vee M)$ ўринли, демак, $e \wedge (\vee M)$—аниқ юқори чегара, яъни

$$\bigvee_{m \in M} (e \wedge m) = e \wedge (\vee M).$$

Шунга ўхшаш, $e \vee (\wedge M) = \bigwedge_{m \in M} (e \vee m)$ тенглик ҳам исботланади.*

Мисоллар. 1. Δ ихтиёрий тўплам бўлиб, E унинг барча қисм тўпламларидан иборат система бўлсин. Икки A, $B \in E$ тўплам учун $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $A \leqslant B$ дейилади. 6.1-§ даги 4-мисолда E нинг дистрибутив панжаралиги 142-бетда кўрсатилган эди. Бу панжарада 1 элемент Δ тўпламнинг ўзи, 0 элемент эса бўш тўпламдан иборат. $A \in E$ элементнинг тўлдирувчиси $CA = \Delta \setminus A$ тўпламдир. Ҳосил бўлган E Буль алгебраси 2^{Δ} билан белгиланади;

2) Z тўплам $I = [0,1]$ сегментнинг Лебег маъносида ўлчовли қисм тўпламларидан иборат бўлсин. Демак, $Z \subset 2^{I}$. Маълумки, $\varnothing$ $(=0)$, I $(=1)$ $\in Z$ ва a, $b \in Z$ бўлса, $a \cup b$ ва $a \cap b$ ҳам Z нинг элементлари бўлади. Демак, Z дистрибутив панжара ва 1,0 га эга. Лебег маъносида ўлчовли a тўпламнинг тўлдирувчиси $Ca = I \setminus a$ ҳам ўлчовли бўлгани учун Z Буль алгебрасидир;

3) Δ ихтиёрий чексиз тўплам бўлсин. E орқали Δ нинг чекли ёки тўлдирувчиси чекли бўлган қисм тўпламлари системасини белгиласак, бу система 1) мисолдаги 2^{Δ} Буль алгебрасининг қисми бўлади ва ўзи ҳам 2^{Δ} даги қисман тартибга нисбатан Буль алгебрасини ташкил қилади.

Таъриф. E Буль алгебрасининг ихтиёрий қисм тўплами (ихтиёрий саноқли қисм тўплами) супремумга эга бўлса, E *тўла* (*σ-тўла*) дейилади.

2-теоремадаги г) хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Тўла (σ-тўла) Буль алгебрасида ҳар қандай тўплам (ҳар қандай саноқли тўплам) инфимумга эгадир.

Мисоллар. 1) 2^{Δ} Буль алгебраси тўладир; 2) мисолдаги Z Буль алгебраси тўла эмас, лекин σ- тўладир; 3) мисолдаги E Буль алгебраси ҳатто σ-тўла эмасдир. Буни кўрсатиш учун Δ тўпламни ҳар бири чексиз бўлган Δ_1 ва Δ_2 тўпламларга ажратамиз. Сўнг $M \subset \Delta_1$ саноқли тўплам ва $B_m = \{m\}$, $(m \in M)$ бир нуқтадан иборат бўлган тўпламлар бўлсин. E нинг таърифига биноан $B_m \in E$. Аммо $\bigvee\limits_{m \in M} B_m \overline{\in} E$, чунки M тўпламнинг ўзи ҳам, тўлдирувчиси ҳам чексиз.

6.4-§. Вектор панжаралар

Таъриф. X тўплам бир вақтда вектор фазо ва панжара бўлсин. Қуйидаги шартлар бажарилса, X *вектор панжара* дейилади:

1) агар $x \geqslant y$ бўлса, ҳар қандай $z \in X$ элемент учун $x + z \geqslant y + z$;

2) агар $x \geqslant y$ бўлса, ҳар қандай $\lambda \geqslant 0$ ҳақиқий сон учун $\lambda x \geqslant \lambda y$.

Мисоллар. 1) R^n вектор фазода қисман тартибни қуйидагича киритамиз:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

агар $x_1 \geqslant y_1$, $x_2 \geqslant y_2$, $\ldots$, $x_n \geqslant y_n$ бўлса.

Равшанки, бундай қисман тартибга нисбатан R^n вектор панжара ҳосил қилади;

2) s фазо ҳам илгари киритилган алгебраик амаллар ҳамда қисман тартибга нисбатан вектор панжарага мисолдир;

3) l_p фазо, $p > 0$. Бу фазо қуйидаги шартни қаноатлантирувчи $\{x_n\}$ ҳақиқий сонлар кетма-кетликлари фазоси:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Бу фазода ҳам алгебраик амаллар ва қисман тартиб координаталар бўйича киритилади. Агар x, $y \in l_0$ бўлса, у ҳолда $x + y$ ва $x \vee y$ ҳам l_p нинг элементлари бўлишини исботлаш керак.

Ҳар қандай $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ ҳақиқий сонлар учун $\alpha + \beta \leqslant 2\alpha$

ёки $\alpha+\beta\leqslant 2\beta$, яъни $(\alpha+\beta)^p\leqslant 2^p\alpha^p$ ёки $(\alpha+\beta)^p\leqslant 2^p\beta^p$. Ҳар икки ҳолда ҳам:

$$(\alpha+\beta)^p\leqslant 2^p(\alpha^p+\beta^p).$$

Бу тенгсизликни x ва y элементларнинг мос координаталарига қўлласак, қуйидаги тенгсизлик ҳосил бўлади:

$$|x_n+y_n|^p\leqslant(|x_n|+|y_n|)^p\leqslant 2^p(|x_n|^p+|y_n|^p).$$

Бу тенгсизликларнинг n га нисбатан йиғиндиси олинса, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\leqslant 2^p\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)<+\infty$$

тенгсизлик келиб чиқади, яъни $x+y\in l_p$.

Ҳар қандай $n=1,2,\ldots$ учун

$$|x_n\vee y_n|\leqslant|x_n|\vee|y_n|\leqslant|x_n|+|y_n|,$$

яъни

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n\vee y_n|^p\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(|x_n|+|y_n|)^p<\infty.$$

Шунинг учун $x\vee y\in l_p$.

Вектор панжараларнинг баъзи элементар хоссаларини келтирамиз.

а) $x\geqslant y$ ва $x-y\geqslant\theta$ тенгсизликлар тенг кучлидир. Ҳақиқатан, $x\geqslant y$ бўлса, у ҳолда 1) га асосан $x+(-y)\geqslant y+(-y)$, яъни $x-y\geqslant\theta$. Аксинча $x-y\geqslant\theta$ бўлса, яна 1) га асосан $x-y+y\geqslant\theta+y$, яъни $x\geqslant y$.

б) агар $x\geqslant y$ бўлса, $-x\leqslant -y$. Дарҳақиқат, $x\geqslant y$ бўлса, у ҳолда $x-y\geqslant\theta$, яъни $(-y)-(-x)\geqslant\theta$. Демак, $-y\geqslant -x$.

в) агар $x\geqslant y$, $z\geqslant u$ бўлса, $x+z\geqslant y+u$. Ҳақиқатан, $x\geqslant y$ ва $z\geqslant u$ бўлгани учун $x-y\geqslant\theta$ ва $z-u\geqslant\theta$. 1) аксиомага асосан $(x-y)+(z-u)\geqslant\theta+z-u=z-u\geqslant\theta$. Тенгсизликнинг транзитивлик хоссасига биноан $(x-y)+(z-u)\geqslant\theta$; яъни

$$(x+z)-(y+u)=(x-y)+(z-u)\geqslant\theta.$$

Демак, $x+z\geqslant y+u$.

г) агар $x\geqslant y$ ва $\lambda<0$ бўлса, $\lambda x\leqslant\lambda y$. Дарҳақиқат, $\lambda<0$ бўлса, $-\lambda>0$; 1) га асосан $-\lambda x\geqslant -\lambda y$;

б) га асосан $\lambda x\leqslant\lambda y$.

1-теорема. *X вектор панжара, x_ξ ($\xi\in\Gamma$) унинг элементлари бўлиб, $y=\sup_{\xi\in\Gamma}(-x_\xi)$ мавжуд бўлса, у ҳолда $-y=\inf_{\xi\in\Gamma} x_\xi$*

Исбот. $y\geqslant -x_\xi$ бўлгани учун б) га биноан $-y\leqslant x_\xi$, $\xi\in\Gamma$. Энди $z\in X$ ҳар қандай x_ξ дан кичик элемент бўлса, у ҳолда $-z\geqslant -x_\xi$ ва $-z\geqslant y$, яъни $z\leqslant -y$. Бундан инфимумнинг таърифига асосан

$$-y=\inf_{\xi} x_\xi.*$$

2-теорема. *X вектор панжара ва x_ξ ($\xi\in\Gamma$) унинг элементлари бўлсин. Агар $\sup x_\xi$ мавжуд бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринлидир:*

1) $y+\sup_{\xi\in\Gamma} x_\xi=\sup_{\xi\in\Gamma}(y+x_\xi)$, $y\in X$;

2) $\lambda\sup_{\xi\in\Gamma} x_\xi=\sup_{\xi\in\Gamma}(\lambda x_\xi)$, $\lambda\geqslant 0$, $\lambda\in R$;

3) $\lambda\sup_{\xi\in\Gamma} x_\xi=\inf_{\xi\in\Gamma}(\lambda x_\xi)$, $\lambda\leqslant 0$, $\lambda\in R$.

Исбот. $\sup_{\xi\in\Gamma} x_\xi$ элементни x билан белгилаймиз. Равшанки, $y+x_\xi\leqslant y+x$ тенгсизлик ҳар қандай $\xi\in\Gamma$ ва $y\in X$ учун ўринлидир. Агар $z\in X$ шундай элемент бўлсаки, $y+x_\xi\leqslant z$ тенгсизлик ҳар қандай $\xi\in\Gamma$ учун бажарилса, у ҳолда $x_\xi\leqslant z-y$. Шунинг учун $x\leqslant z-y$ ёки $x+y\leqslant z$. Бундан $x+y=\sup_{\xi\in\Gamma}(y+x_\xi)$, яъни 1) тенглик ўринли.

Агар $\lambda=0$ бўлса, 2) тенглик ўз-ўзидан равшан. Шунинг учун $\lambda>0$ деб ҳисоблаймиз. Вектор панжаранинг таърифидаги 2) шартга биноан ҳар қандай $\xi\in\Gamma$ учун $\lambda x_\xi\leqslant\lambda x$ тенгсизлик бажарилади. Агар $z\in X$ шундай элемент бўлсаки, ҳар қандай $\xi\in\Gamma$ учун $\lambda x_\xi\leqslant z$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $x_\xi\leqslant\frac{1}{\lambda}z$, бундан $x\leqslant\frac{1}{\lambda}z$ ёки $\lambda x\leqslant z$. Шундай қилиб, $\lambda x=\sup_{\xi\in\Gamma}(\lambda x_\xi)$, яъни 2) тенглик исботланди.

Сўнг юқоридаги 2) тенгликка биноан

$$\sup_{\xi\in\Gamma}\{|\lambda|x_\xi\}=|\lambda|x.$$

1-теоремага асосан $\lambda<0$ бўлса,

$$\inf_{\xi\in\Gamma}\{\lambda x_\xi\}=-\sup_{\xi\in\Gamma}\{|\lambda|x_\xi\}=-|\lambda|x=\lambda x=\lambda\sup_{\xi\in\Gamma}x_\xi.*$$

Натижа. X вектор фазода қисман тартиб киритилган бўлиб, вектор панжара таърифидаги 1) ва 2) шартлар бажарилса ва ҳар қандай $x \in X$ учун $x \vee \theta$ мавжуд бўлса, у ҳолда X вектор панжарадир.

Бу натижа қуйидаги муносабатлардан келиб чиқади:

$$[(x-y) \vee \theta] + y = x \vee y, \; x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]._{*} \quad (1)$$

3-теорема. *Ҳар қандай* $x, y \in X$ *учун ушбу тенглик ўринлидир:*

$$(x \vee y) + (x \wedge y) = x + y.$$

Исбот. 2-теореманинг натижасидаги (1) формулага ва 2 теореманинг 1) иборасига биноан

$$x \vee y = [(x-y) \vee \theta] + y = [(-y) \vee (-x)] + x + y.$$

1-теоремага биноан

$$(-y) \vee (-x) = -(x \wedge y).$$

Шунинг учун

$$x \vee y = x + y - (x \wedge y),$$

яъни

$$(x \vee y) + (x \wedge y) = x + y._{*}$$

Таъриф. X вектор панжара ва x унинг бирор элементи бўлсин. $x_+ = x \vee \theta$ элемент x нинг *мусбат қисми*, $x_- = (-x) \vee \theta$ элемент x нинг *манфий қисми*, $|x| = x_+ + x_-$ элемент эса x нинг *модули* дейилади. Агар $x \geqslant \theta$ бўлса, x *мусбат элемент* дейилади.

Таърифдан равшанки, ҳар қандай $x \in X$ элемент учун x_+, x_-, $|x|$ мусбат элементлардир. Агар $x \geqslant \theta$ бўлса, у ҳолда $x_+ = x$, $x_- = \theta$, яъни $|x| = x$.

Мисол. 4) s фазода $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элемент берилган бўлсин. Бу ҳолда $x_+ = \{x_n^+\}_{n=1}^{\infty}$, $x_- = \{x_n^-\}_{n=1}^{\infty}$, бу ерда:

$$x_n^+ = \begin{cases} x_n, & \text{агар } x_n \geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_n < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$x_n^- = \begin{cases} 0, & \text{агар } x_n \geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ |x_n|, & \text{агар } x_n < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

R^n, l_p фазоларда ҳам x_+, x_- ва $|x|$ элементлар шунга ўхшаш аниқланади.

4-теорема. *X вектор панжарадаги ҳар қандай x элемент учун*

$$x=x_+-x_-.$$

Исбот. 3-теоремага асосан

$$x=x+\theta=(x\vee\theta)+(x\wedge\theta)=x_+-[(-x)\vee\theta]=x_+-x_-.{}_*$$

5-теорема. *Вектор панжарада қуйидаги муносабатлар ўринли:*

а) $(x+y)_+\leqslant x_++y_+$, $(x+y)_-\leqslant x_-+y_-$;

б) *агар* $\lambda\geqslant 0$ *бўлса*, $(\lambda x)_+=\lambda x_+$, $(\lambda x)_-=\lambda x_-$;

в) *агар* $\lambda\leqslant 0$ *бўлса*, $(\lambda x)_+=-\lambda x_-$, $(\lambda x)_-=-\lambda x_+$

г) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

д) $|\lambda x|=|\lambda|\cdot|x|$;

е) $|x|=\theta\Longleftrightarrow x=\theta$;

Исбот. а) $x_+\geqslant x$, $y_+\geqslant y$ бўлгани учун $x_++y_+\geqslant x+y$ ва $x_++y_+\geqslant\theta$ бўлгани учун $x_++y_+\geqslant(x+y)\vee\theta=(x+y)_+$.

Шунга ўхшаш $(x+y)_-\leqslant x_-+y_-$ тенгсизлик ҳам исботланади.

б) ва в) хоссалар 2-теоремадан келиб чиқади.

г) Исботланган а) хоссага биноан

$$(x+y)_+\leqslant x_++y_+ \text{ ва } (x+y)_-\leqslant x_-+y_-,$$

демак,

$$|x+y|=(x+y)_++(x+y)_-\leqslant x_++y_++x_-+y_-=|x|+|y|.$$

д) хосса б) ва в) хоссалардан келиб чиқади.

е) $|x|=\theta$ бўлса, бу ҳолда $x_+=x_-=\theta$, яъни $x=\theta.{}_*$

Энди ҳар қандай вектор панжаранинг дистрибутив панжара эканлигини исботлаймиз.

6-теорема. *Ҳар қандай X вектор панжарада умумлашган дистрибутив қонунлар ўринлидир, яъни мос равишда* $\sup\limits_{\xi\in\Gamma} y_\xi$ *ва* $\inf\limits_{\xi\in\Gamma} y_\xi$ *мавжуд бўлса, у ҳолда*

ж) $x\wedge(\sup\limits_{\xi\in\Gamma} y_\xi)=\sup\limits_{\xi\in\Gamma}(x\wedge y_\xi)$;

з) $x\vee(\inf\limits_{\xi\in\Gamma} y_\xi)=\inf\limits_{\xi\in\Gamma}(x\vee y_\xi)$.

Бу теоремани исботлашни қуйидаги леммадан бошлаймиз.

Лемма. $\{x_\xi\}_{\xi\in\Gamma}$ вектор панжара элементлари бўлиб, $x=\sup x_\xi$ мавжуд бўлсин. Бу ҳолда ушбу

$$x_+=\sup_{\xi\in\Gamma} x_\xi^+, \quad x_-=\mathrm{Inf}_{\xi\in\Gamma}\, x_\xi^-$$

тенгликлар ўринлидир.

Исбот. Ассоциативлик қонунига асосан (6.1-§, 1-теорема)

$$x_+=x\vee\theta=(\sup_{\xi\in\Gamma} x_\xi)\vee\theta=\sup_{\xi\in\Gamma}(x_\xi\vee\theta)=\sup_{\xi\in\Gamma} x_\xi^+.$$

Энди иккинчи тенгликни исботлаймиз, яъни

$$x_-=\mathrm{Inf}_{\xi\in\Gamma}\, x_\xi^-.$$

$x\geqslant x_\xi$ бўлгани сабабли $x_-\leqslant x_\xi^-$ тенгсизлик бажарилади. Агар $y\in X$ шундай элемент бўлсаки, у ҳар қандай x_ξ^- элементдан кичик, яъни $y\leqslant x_\xi^-$ $(\xi\in\Gamma)$ бўлса, у ҳолда $-y\geqslant -x_\xi^-=x_\xi-x_\xi^+$, яъни $x_\xi^+-y\geqslant x_\xi$. Бу тенгсизликда супремумга ўтсак ва юқорида исбот қилинган биринчи тенгликдан фойдалансак қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$x_+-y\geqslant x=x_+-x_-,$$

яъни $-y\geqslant -x_-$ ёки $y\leqslant x_-$. Шунинг учун Inf нинг таърифига асосан $x_-=\inf_{\xi\in\Gamma} x_\xi^-$. Лемма исботланди.

Теореманинг исботига ўтамиз.

ж) $y=\sup_{\xi\in\Gamma} y_\xi$ мавжуд деб фараз қилайлик. Бу ҳолда 2- теоремага асосан $y-x=\sup_{\xi\in\Gamma}(y_\xi-x)$, Леммага биноан

$$(y-x)_-=\inf_{\xi\in\Gamma}[(y_\xi-x)_-].$$

1- теоремага асосан,

$$-(y-x)_-=\sup_{\xi\in\Gamma}[-(y_\xi-x)_-],$$

яъни

$$(y-x)\wedge\theta=\sup_{\xi\in\Gamma}[(y_\xi-x)\wedge\theta].$$

Бу тенгликнинг икки томонига x элемент қўшилса, ушбу

$$y\wedge x=\sup_{\xi\in\Gamma}(y_\xi\wedge x)$$

тенглик ҳосил бўлади. Демак, ж) исботланди.

3) Исботланган ж) формулада x ўрнига $-x$, y_ξ ўрнига $-y_\xi$ ни олсак, қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$y\wedge(-x)=\sup_{\xi\in\Gamma}[(-y_\xi)\wedge(-x)] \text{ (бу ерда } y=\sup_{\xi\in\Gamma}(-y_\xi)),$$

ёки

$$-(-y\vee x)=\sup_{\xi\in\Gamma}[-(y_\xi\vee x)]=-\inf_{\xi\in\Gamma}(y_\xi\vee x) \text{ ёки}$$

$$-y\vee x=\inf_{\xi\in\Gamma}(y_\xi\vee x).$$

Аммо бу ерда 2-теоремадаги 3) га асосан

$$y=\sup_{\xi\in\Gamma}(-y_\xi)=-\inf_{\xi\in\Gamma}y_\xi .$$

Демак, $-y=\inf\limits_{\xi\in\Gamma}y_\xi$. Шунинг учун

$$(\inf_{\xi\in\Gamma}y_\xi)\vee x=\inf_{\xi\in\Gamma}(y_\xi\vee x)._*$$

Бу параграфни „бир"ли вектор панжараларни ўрганиш билан якунлаймиз.

Таъриф. X вектор панжаранинг „*бир*" элементи деб, ҳар қандай x мусбат элемент учун ушбу $x\wedge 1>\theta$ муносабатни қаноатлантирадиган мусбат 1 элементга айтилади.

Ҳар қандай вектор панжара ҳам бирга эга бўлавермайди. Масалан, X шундай ҳақиқий сонлар кетма-кетликларидан иборат бўлсинки, бу кетма-кетликларнинг нолдан фарқли координаталарининг сони чекли бўлсин. Бу ҳолда X вектор панжара, аммо бирга эга бўлмайди.

Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, агар 1 бир бўлса, бу ҳолда, масалан, $\lambda 1$ ҳам бир бўлади ($\lambda>0$ — ҳақиқий сон), яъни агар X вектор панжарада бир мавжуд бўлса, бу бирларнинг сони чексиздир. Шунинг учун бирли вектор панжара қурилганда, бир тайинланиб қўйилган деб фараз қиламиз ва уни 1 билан белгилаймиз.

Таъриф. X бирли вектор панжара бўлиб, e унинг бирор элементи бўлсин. Агар $e\wedge(1-e)=\theta$ бўлса, у ҳолда

e бирлик элемент дейилади. Бирлик элементлар тўпламини X нинг *базаси* деймиз ва $\nabla(X)$ билан белгилаймиз.

Равшанки, $e \geqslant \theta$ ва $1-e \geqslant \theta$, яъни ҳар қандай e бирлик элемент учун $\theta \leqslant e \leqslant 1$ тенгсизлик ўринлидир. θ ва 1 ҳам базанинг элементларидир.

Мисоллар. R^n ва s фазоларда базанинг элементлари координаталари 0 ва 1 дан иборат бўлган элементлардир. Бу фазоларда бир сифатида мос равишда $(1, 1, \ldots, 1)$ ва $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ элементлар олинади.

Базанинг таърифидан кўриниб турибдики, e базанинг элементи бўлса, $1-e$ ҳам базанинг элементидир.

7-теорема. *X бирли вектор панжара бўлиб, $\nabla(X)$ унинг базаси бўлсин. Бу ҳолда $\nabla(X)$ панжара ҳосил қилади. Агар $\{e_\xi\}$ бирлик элементлар тўплами бўлиб, $e=\sup\limits_{\xi\in\Gamma} e_\xi$, $(e'=\inf\limits_{\xi\in\Gamma} e_\xi)$ мавжуд бўлса, e (e') ҳам бирлик элементдир. Бундан ташқари, $\nabla(X)$ ўзидаги қисман тартибга нисбатан Буль алгебрасини ҳосил қилади ва $e \in \nabla(X)$ элемент учун $1-e$ элемент унинг тўлдирувчисидир.*

Исбот. $e=\sup\limits_{\xi\in\Gamma} e_\xi$ мавжуд деб фараз қилайлик. Ушбу $\theta \leqslant 1-e \leqslant 1-e_\xi$ муносабатлар ҳар бир индекс учун ўринли ва $e_\xi \wedge (1-e_\xi)=\theta$ бўлгани учун $e_\xi \wedge (1-e)=\theta$ ҳам ўринлидир. Дистрибутивлик қонунига асосан

$$e \wedge (1-e)=(\sup_{\xi\in\Gamma} e_\xi) \wedge (1-e)=\sup_{\xi\in\Gamma} [e_\xi \wedge (1-e)]=\theta,$$

яъни $e \in \nabla(X)$.

Агарда $e'=\inf\limits_{\xi\in\Gamma} e_\xi$ мавжуд бўлса, у ҳолда $-e'=\sup\limits_{\xi\in\Gamma} (-e_\xi)$ ва $1-e'=\sup\limits_{\xi\in\Gamma} (1-e_\xi)$. Сўнгра $1-e_\xi \in \nabla(X)$ бўлгани учун, юқорида кўрсатганимизга асосан, $1-e' \in \nabla(X)$, яъни $e' \in \nabla(X)$.

$\nabla(X)$ тўплам X панжаранинг қисми бўлиб, X да дистрибутивлик қонунлари ўринли бўлгани учун $\nabla(X)$ ҳам дистрибутив панжарадир, Бундан ташқари, $0=\theta$ ва 1 элементлар $\nabla(X)$ даги энг кичик ва энг катта элементлардир, чунки юқорида айтилганидек, ҳар бир e бирлик элемент учун $\theta \leqslant e \leqslant 1$ муносабат ўринлидир. Таърифга биноан $e \wedge (1-e)=\theta$. 3- теоремага асосан

$$[e \vee (1-e)]+[e \wedge (1-e)]=e+(1-e).$$

Демак,

$$e\vee(1-e)=1.$$

Яъни $1-e$ элемент e элементнинг тўлдирувчисининг хоссаларига эга, шунинг учун $Ce=1-e$. Шундай қилиб, $\nabla(X)$ Буль алгебрасидир.$_*$

6.5- §. Қисман тартибланган топологик вектор фазолар

E ҳақиқий вектор фазо бўлиб, унда бирор қисман тартиб киритилган бўлсин.

Таъриф. Агар E да қуйидаги икки шарт бажарилса, у *қисман тартибланган вектор фазо* дейилади.

1) агар $x\geqslant y$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $z\in E$ учун

$$x+z\geqslant y+z;$$

2) агар $x\geqslant y$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий мусбат сон $\lambda\in R$ учун

$$\lambda x\geqslant\lambda y.$$

Равшанки, ҳар бир вектор панжара қисман тартибланган вектор фазодир.

Қисман тартибланган вектор фазодаги тартибни конус ёрдамида ҳам киритса бўлади. Вектор фазонинг K қисми 1) $K+K\subset K$, 2) $\lambda K\subset K$ $(\lambda>0)$, 3) $K\cap(-K)=\{\theta\}$ шартларни қаноатлантирса, K *конус* дейилади. Равшанки, қисман тартибланган E вектор фазонинг мусбат элементлари тўплами $E_+=\{x\in E\colon x\geqslant\theta\}$ конусдир. Дарҳақиқат, ихтиёрий, $x,y\in E_+$ учун 1) шартга асосан $x+y\geqslant x\geqslant\theta$, яъни $E_++E_+\subset E_+$ ва 2) шартга асосан ихтиёрий $x\in E_+$ ва $\lambda\geqslant 0$ учун $\lambda x\in E_+$, яъни $\lambda E_+\subset E_+$. 3) шарт равшан.

Аксинча, E вектор фазода бирор K конус берилган бўлсин. E да қисман тартибни қуйидагича киритамиз:

$$(x\geqslant y)\Longleftrightarrow x-y\in K.$$

Бунда E қисман тартибланган вектор фазо ва $E_+=K$ эканлиги бевосита текширилади.

E қисман тартибланган вектор фазо, E_+ эса унинг мусбат элементларидан иборат конус бўлсин. Ушбу $[x,\ y]=(x+E_+)\cap(y-E_+)$ белгилашни киритамиз. Бунда $[x,\ y]=\{z\in E\colon\ x\leqslant z\leqslant y\}$ бўлиб, бу тўплам E даги *интервал* дейилади.

Агар E фазонинг A қисм тўплами бирор интервалда ётса, A тўплам *тартибан чегараланган*, қисқача, (о)-*чегараланган* дейилади.

А тўпламнинг қисман тартибланган фазода (о)- чегараланган бўлиши барча $x\in A$ учун $|x|\leqslant a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $a\in E$ элемент мавжудлигига тенг кучли.

Агар ихтиёрий $x,y\in A$ элементлар учун, $x\leqslant y$ эканлигидан $[x,y]\subset A$ бўлиши келиб чиқса, A тўплам (о)-*қавариқ* деб аталади. Масалан, ҳар бир интервал (о)-қавариқдир.

E нинг ихтиёрий A қисм тўплами бўйича

$$[A]=(A+E_+)\cap(A-E_+)=\bigcup_{x,y\in A}[x,y]$$

тўплам тузайлик. У A тўпламни ўз ичига олган энг кичик (о)- қавариқ тўплам эканлигини пайқаш осон. Шунинг учун $[A]$ тўплам A нинг (о)- *қавариқ қобиғи* дейилади. Доим $A\subset[A]$ муносабат ўринли. $A=[A]$ тенглик бажарилганда ва фақат шу ҳолда A тўплам (о)-қавариқ бўлади.

Агар ихтиёрий $x\in A$, $y\in E$ элементлар учун $|y|\leqslant|x|$ тенгсизликдан $y\in A$ муносабат келиб чиқса, A тўплам *жисмоний тўплам* дейилади. Ҳар бир жисмоний тўплам мувозанатланган эканлиги равшан. Жисмоний тўпламнинг қавариқ қобиғи яна жисмоний тўплам бўлишини кўрсатиш мумкин.

Мисол. s вектор панжарада жуфт номерли координаталари нолга тенг векторлардан иборат тўплам жисмонийдир. Ҳақиқатан, $y=\{y_i\}\in s$, $x=\{x_i\}\in s$ векторлар учун $|y|\leqslant|x|$ тенгсизлик бажариліб, $x_{2n}=0$ $(n=1, 2, \ldots,)$ бўлса, у ҳолда $y_{2n}=0$.

E қисман тартибланган вектор фазо бўлсин. $(x, y)\to$ $\to x\wedge y$, $(x,y)\longrightarrow x\vee y$ амаллардан иборат $E\times E$ нинг E га акслантиришлари ҳамда $x\to x_+$, $x\to x_-$, $x\to|x|$ мосликлардан иборат E нинг ўз-ўзига акслантиришлари (о)-*операциялар* [(о)- *амаллар*] дейилади.

1-теорема. *Фараз қилайлик, E, бир томондан, топологик вектор фазо, иккинчи томондан, қисман тартибланган вектор фазо бўлсин. У ҳолда (о)-операциялардан ихтиёрий бирининг узлуксизлигидан бошқаларининг узлуксизлиги келиб чиқади.*

Теореманинг ўринлилиги $x+y$, λx амалларнинг узлуксизлигидан ва ушбу

$$x\vee y=-\{(-x)\wedge(-y)\},\ x_-=(-x)_+,\ |x|=x+2x_-,$$
$$x\wedge y=-\frac{1}{2}\{|x-y|-(x-y)\}+y\ .$$

муносабатлардан бевосита келиб чиқади.$_*$

E қисман тартибланган топологик вектор фазо бўлсин. Агар E да ноль элементнинг (о)- қавариқ атрофлари базиси мавжуд бўлса, E_+ конус *нормал* конус дейилади. Нормал конусли E фазода нолнинг мувозанатланган атрофлари базиси топилади. Бунинг устига E локал қавариқ фазо бўлса, унда бир вақтда ҳам қавариқ, ҳам (о)- қавариқ атрофлари базисини қуриш мумкин.

Таъриф. Агар E топологик вектор фазо бир вақтда вектор панжара ҳосил қилиб, нолнинг жисмоний атрофлари базисига эга бўлса, у *топологик вектор панжара* дейилади. Агар шу билан бирга E нинг топологияси локал қавариқ бўлса, E *локал қавариқ вектор панжара* деб аталади. Тўла метрикаланувчи локал қавариқ вектор панжара, қисқача *Фреше панжараси* деб юритилади. Масалан, R^n ва s Фреше панжараларидир. E нормаланган фазо ва шу билан бирга вектор панжара бўлса, ва $|x|\leqslant|y|$ тенгсизликдан $\|x\|\leqslant\|y\|$ келиб чиқса, E *нормаланган панжара* дейилади. Тўла нормаланган панжара қисқача *Банах панжараси* деб юритилади.

Мисол. $C\,[a,b]$ Банах фазосида қисман тартибни қуйидагича киритамиз:

$$(f\leqslant g)\Longleftrightarrow f(t)\leqslant g(t),\ \forall\, t\in[a,b]\ f,g\in C\ [a,b].$$

Равшанки, бунда $C[a,b]$ вектор панжара ва $|f|\,(t)=[f(t)]$. Демак, $|f|\leqslant|g|$ бўлса, у ҳолда

$$\|f\|=\max_{t\in[a,b]}|f(t)|\leqslant\max_{t\in[a,b]}|g(t)|=\|g\|,$$

яъни $C[a,\,b]$—Банах панжараси.

Қуйидаги теорема берилган фазонинг топологик вектор панжара эканлигини амалда текширишда қулайлик яратади.

2-теорема. *E топологик вектор фазо ҳамда вектор панжара бўлсин. E топологик вектор панжара бўлиши учун унинг E_+ конуси нормал ва (о)-операциялар узлуксиз бўлиши зарур ҳам кифоя.*

Исбот. E топологик вектор фазо, $\sum=\{U\}$ ноль элементнинг жисмоний атрофлари базиси бўлсин. $U\in\sum$ атрофнинг жисмонийлиги туфайли $0\leqslant x\leqslant y$ ва $y\in U$ шартлардан $x\in U$ келиб чиқади. Нолнинг ихтиёрий V атрофига кўра, $U+U\subset V$ бўлган $U\in\sum$ атроф топамиз. Энди нолнинг $W-W\subset U$ шартни қаноатлантирувчи W атрофини топиб, $V^*=U\cap W$ тўпламни қараймиз. Агар $V^*\subset V$ эканлигини кўрсатсак, бундан E фазода нолнинг (о)- қавариқ атрофлари базиси мавжудлиги келиб чиқади. Шу мақсадда $x\in V^*$ деб фараз қилайлик, Бу ҳолда $x'\leqslant x\leqslant x''$ шартни қаноатлантирувчи x', $x''\in U\cap W$ элементлар топилади. $x''-x'\in W-W\subset U$ бўлгани учун $0\leqslant x-x'\leqslant x''-x'\in U$, демак, $x-x'\in U$. Шундай қилиб, $x=(x-x')+x'\in U+U\subset V$. Бундан E фазонинг E_+ конуси нормал эканлиги келиб чиқади.

Энди (о)- амалларнинг узлуксизлигини кўрсатамиз. 1- теоремага асосланиб, улардан бирининг, масалан, $x\to x_+$ амалнинг узлуксизлигини кўрсатиш етарли: $U\in\sum$ ва $x-x_0\in U$ бўлсин. $|x_++(x_0)_+|\leqslant|x-x_0|$ тенгсизликдан ва U атрофнинг жисмонийлигидан $x_+-(x_0)_+\in U$ келиб чиқади.

Шу билан теореманинг зарурийлик қисми исботланди. Аксинча, E фазонинг E_+ конуси нормал ва (о)- амаллар узлуксиз бўлсин, E топологик вектор фазода нолнинг жисмоний атрофлари базисини қурамиз. Бунинг учун нолнинг (о)- қавариқ мувозанатланган атрофлари базиси $\Xi=\{V\}$ ни оламиз. Ҳар бир $V\in\Xi$ учун $U+U\subset V$ бўлган $U\in\Xi$ атроф мавжуд. Бунга кўра $x\in W$ дан $x_+\in U$ келиб чиқадиган $W\in\Xi$ атроф танлаймиз. $x\to x_+$ нинг узлуксизлигига асосан бундай W атроф мавжуд.

Шундай қилиб, $x\in W$ бўлса, $-x\in W$, демак, $x_+\in U$, $x_-=(-x)_+\in U$. Бундан $|x|=x_++x_-\in U+U\subset V$. Ниҳоят, $|y|\leqslant|x|$, $x\in W$ бўлса, $y\in[-|x|, |x|]\subset V$ келиб чиқади. Бу эса W атрофнинг жисмоний қобиғи бўлган $\{y\in E$: бирор $x\in W$ учун $|y|\leqslant|x|\}$ тўплам V атрофда ётади, яъни ҳар бир $V\in\Xi$ атрофга нолнинг жисмоний атрофини жойлаштириш мумкин, демакдир. Талаб қилинган базис қурилди.*

3-теорема. *E топологик вектор панжарада унинг мусбат элементлари конуси E_+ ёпиқ тўпламдир.*

Исбот. $E_+=\{x\in E\colon x\geqslant\theta\}$ тенгликдан E_+ конус $x\to x_-$ узлуксиз акслантиришда θ нинг прообрази, шу сабабли ёпиқ тўплам бўлиши келиб чиқади.*

4-теорема. *E нормал конусли топологик вектор* *фазо бўлсин. Бу ҳолда ҳар бир (о)- чегараланган қисм тўплам топологик маънода чегараланган бўлади.*

Исбот. $\sum=\{U\}$ нолнинг (о)- қавариқ мувозанатланган атрофлари базиси дейлик. Агар $A\subset[a, b]\subset E$ бўлса, берилган U атроф учун $\lambda a\in U$, $\lambda b\in U$ бўладиган λ мусбат сонни танлаймиз, U нинг (о)- қавариқлигидан $\lambda[a, b]\subset U$. Бундан $[a, b]$ интервалнинг ва демак, унинг қисми бўлган A тўпламнинг топологик маънода чегараланганлиги келиб чиқади.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. R тўғри чизиқдаги x ва y элементлар учун $x-y$ айирма рационал сон бўлса, биз $x>y$ дейлик. Бу муносабат қисман тартиб бўладими?

2. R^n фазодаги қисман тартибда (6.1- §, 1- мисол) қандай тўпламлар чегараланган бўлади?

3. Текисликда (2- масала, $n=2$) маркази ноль нуқтада, радиуси бирга тенг бўлган ёпиқ шарни оламиз. Бу тўпламнинг супремумини, инфимумини, максимал ва минимал элементларини топинг.

4. Текисликда шундай қисман тартиб киритингки, бунда у чизиқли тартибланган (яъни занжир) бўлсин.

5. s, m фазолар координаталар бўйича киритилган қисман тартибга нисбатан панжара эканлигини исботланг.

6. Панжара бўлмаган қисман тартибланган тўпламга мисоллар келтиринг.

7. Бирор M тўпламнинг чекли қисм тўпламларидан иборат бўлган X тўпламда одатдаги қисман тартибни оламиз ($A\subset B \Rightarrow A\leqslant B$).

а) X нинг панжара эканлигини исботланг;

б) X панжара шартли тўлами? Қандай M тўпламлар учун X тўла панжара бўлади?

8. X ихтиёрий Буль алгебраси бўлсин. $|x-y|$ орқали $(x\wedge Cy)\vee(Cx\wedge y)$ элементни белгилаймиз. Қуйидаги муносабатларни исботланг.

а) $x=|y-|x-y||$;

б) $|x\vee y-x\vee z|\leqslant|y-z|$;

в) $|x\wedge y-x\wedge z|\leqslant|y-z|$;

г) $|x-y|=x\vee y-x\wedge y$.

Бу ерда $x-y=x\wedge Cy$.

9. 6.3- §, 3- мисолдаги Буль алгебраси тўла ҳам эмас,

σ- тўла ҳам эмаслигини кўрсатган эдик. Шу Буль алгебрасини ўз ичига олувчи тўла (σ- тўла) Буль алгебрасини топинг.

10. $C[a,b]$ вектор панжарада бир мавжудми?

11. $C[ab]$ вектор панжаранинг ҳамма бирлик элементларини топинг.

12. $S[a,b]$ орқали $[a,b]$ ораликда Лебег маъносида ўлчовли функциялар фазосини белгилаймиз ва S $[a, b]$ да қисман тартибни $C[a,b]$ фазодагидек аниқлаймиз. S $[a, b]$ вектор панжара эканлигини исботланг.

13. Юқоридаги 10, 11- масалаларни $S[a,b]$ вектор панжара учун ечинг.

II қисм

ОПЕРАТОРЛАР НАЗАРИЯСИ

VII боб

ТОПОЛОГИК ВЕКТОР ФАЗОЛАРДА УЗЛУКСИЗ ОПЕРАТОРЛАР

7.1-§. Узлуксиз чизиқли операторлар

E ва F топологик вектор фазоларнинг бирини иккинчисига акс эттирувчи T чизиқли оператор берилган бўлсин (1.6-§).

Агар E ва F даги топологияларга нисбатан T оператор узлуксиз бўлса, у *узлуксиз чизиқли оператор* дейилади.

1-теорема. *E топологик вектор фазони F топологик вектор фазога акс эттирувчи T чизиқли оператор узлуксиз бўлиши учун у ноль нуқтада узлуксиз бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурлиги ўз-ўзидан равшан.

Кифоялиги. $T\theta = \theta$[1] муносабатдан ва T операторнинг ноль нуқтада узлуксизлигидан F фазодаги θ элементнинг ихтиёрий V атрофи учун E фазода θ элементнинг шундай U атрофи мавжудлиги келиб чиқадики, улар учун ушбу

$$T(U) \subset V$$

муносабат ўринли бўлади. Агар $\Sigma = \{U\}$ — нолнинг атрофлари базиси ва $x \in E$ ихтиёрий элемент бўлса, у ҳолда x нинг атрофлари базиси $\{x + U\}$ кўринишга эга бўлади. Демак,

$$T(x + U) = Tx + T(U) \subset Tx + V.$$

Бу муносабатдан операторнинг ихтиёрий x нуқтада узлуксиз эканлиги бевосита кўриниб турибди.*

1-натижа. Агар T чизиқли оператор бирор $x_0 \in E$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда T узлуксиз чизиқли оператордир.

---

[1] Қулайлик мақсадида, E ва F фазоларнинг ноль элементларини битта θ ҳарфи билан белгилаймиз.

2-натижа. Агар E ва F метрикаланган топологик вектор фазолар бўлса, у ҳолда T чизиқли оператор узлуксиз бўлиши учун ушбу

$$x_n \to \theta \Rightarrow Tx_n \to \theta$$

муносабат бажарилиши зарур ва кифоядир.

Мисоллар. 1. R^n фазони ўзига акс эттирувчи чизиқли оператор Евклид нормасида узлуксиздир. Маълумки, $E = R^n$ фазони ўзига акс эттирувчи ихтиёрий T чизиқли оператор ушбу

$$T = (a_{ij})_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n}$$

кўринишдаги матрицалар ёрдамида аниқланади. Бу ҳолда бирор $x' \in R^n$ элементнинг тасвири бўлган $y' = Tx' = (y_1', y_2', \ldots, y_n')$ элемент қуйидагича аниқланади:

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k'.$$

Демак,

$$\|Tx - Tx'\| = \|T(x - x')\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}(x_k - x_k') \right)^2}.$$

Коши — Буняковский тенгсизлигига биноан

$$\|Tx - Tx'\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_k)^2} =$$
$$= M\,\|x - x'\|.$$

M ўзгармас сон бўлгани учун $x \to x'$ муносабатдан $Tx \to Tx'$ муносабат келиб чиқади. Яъни T — узлуксиз оператор.

R^n фазодаги ихтиёрий чизиқли функционалнинг узлуксизлиги ҳам шунга ўхшаш исботланади.

2. $E = F = C[0, 1]$ топологик вектор фазода T операторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$y = Tx = \int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds.$$

Бу ерда $K(t, s)$ функцияни $[0, 1] \times [0, 1]$ тўпламда узлуксиз деб фараз қиламиз.

Бевосита кўриниб турибдики, T оператор $C[0, 1]$ фазони $C[0, 1]$ фазога акс эттирувчи чизиқли оператордир. Энди биз T нинг узлуксиз эканлигини исботлаймиз.

$C[0, 1]$ метрикаланган топологик вектор фазо бўлгани учун 2- натижага кўра

$$x_n \to \theta \Rightarrow Tx_n \to \theta$$

муносабат ўринли эканлигини кўрсатиш кифоя. $[0, 1] \times [0, 1]$ тўплам компакт бўлгани учун $K(t, s)$ функция чегараланган:

$$|K(t, s)| \leqslant M.$$

У ҳолда

$$\rho(Tx_n, \theta) = \max_{0<t<1} \left| \int_0^1 K(t, s)\, x_n(s)\, ds \right| \leqslant M \cdot \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |x_n(s)| =$$

$$= M \cdot \rho(x_n, \theta).$$

Демак, $x_n \to \theta$ эканлигидан $Tx_n \to \theta$ келиб чиқади.

2-теорема. *E, F ҳақиқий топологик вектор фазолар бўлиб, T аддитив (яъни $T(x+y) = Tx + Ty$ хоссага эга бўлган) ва узлуксиз акс эттириш бўлсин. У ҳолда T чизиқли оператордир.*

Исбот. T операторнинг чизиқлилигини исботлаш учун унинг бир жинслилигини, яъни ихтиёрий λ ҳақиқий сон ва $x \in E$ учун $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ муносабат ўринли эканлигини кўрсатиш кифоя.

Агар $\lambda = n$ натурал сон бўлса, у ҳолда T операторнинг аддитивлигидан ушбу

$$T(nx) = T(x + x + \ldots + x) = Tx + Tx + \ldots + Tx = nTx$$

муносабат келиб чиқади. Ушбу

$$T(\theta) = T(\theta + \theta) = T(\theta) + T(\theta) = 2T(\theta)$$

тенгликдан $T(\theta) = \theta$ тенглик келиб чиқади. Бундан

$$T(-x) + T(x) = T(x - x) = T(\theta) = \theta, \quad \text{яъни}$$

$T(-x) = -T(x)$ муносабат келиб чиқади. m манфий бутун сон бўлса, у ҳолда $(-m)$ — натурал сон. Шунинг учун

$$T(mx) = -T(-mx) = -(-m)\, Tx = mTx,$$

яъни $T(mx) = mTx$ муносабат ихтиёрий m бутун сон учун бажарилади. Энди p/q — ихтиёрий рационал сон бўлсин, p, q — бутун сонлар; у ҳолда

$$T\left(\frac{p}{q}x\right) = T\left(p \cdot \frac{1}{q}x\right) = p\,T\left(\frac{x}{q}\right).$$

$\xi = \frac{x}{q}$ белгилаш киритсак, у ҳолда

$$T\left(\frac{x}{q}\right) = T(\xi) \text{ ва } T(x) = T(\xi \cdot q) = qT(\xi)$$

ёки

$$T\left(\frac{x}{q}\right) = T(\xi) = \frac{1}{q} T(x).$$

Демак,

$$T\left(\frac{p}{q} x\right) = \frac{p}{q} T(x).$$

Ниҳоят λ ихтиёрий ҳақиқий сон ва $\{\lambda_n\}$ кетма-кетлик λ сонга яқинлашувчи рационал сонлар кетма-кетлиги бўлсин. У ҳолда T узлуксиз бўлгани учун

$$T(\lambda x) = T(\lim_{n\to\infty} \lambda_n x) = \lim_{n\to\infty} T(\lambda_n x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n Tx = \lambda Tx.$$

Бу ерда биз топологик вектор фазода ҳақиқий сонга кўпайтириш амалининг узлуксизлигидан фойдаландик.$_*$

E топологик вектор фазони F топологик вектор фазога акс эттирувчи барча узлуксиз чизиқли операторлар тўпламини $L(E, F)$ билан белгилаймиз.

Бу тўплам 1.6- § да киритилган операторлар устидаги амалларга нисбатан вектор фазодир.

Икки узлуксиз операторнинг йиғиндиси ва узлуксиз операторнинг сонга кўпайтмаси узлуксиз операторлиги топологик вектор фазодаги амалларнинг узлуксизлигидан бевосита келиб чиқади.

Демак, $L(E, F)$ вектор фазо $Z(E, F)$ фазонинг (1.6- §) вектор қисм фазосидир.

Агар $E = F$ бўлса, $L(E, F)$ ўрнига $L(E)$ ёзамиз. Агар $F = K$ сонлар майдони бўлса, $L(E, K)$ фазони E' билан белгилаймиз ва E га *қўшма фазо* деймиз. Яъни E' қўшма фазо E да аниқланган узлуксиз чизиқли функционаллардан ташкил топган.

$E = F$ бўлган ҳолда $Z(E)$ ва $L(E)$ фазоларда кўпайтириш амали киритиб, уларни ҳалқага айлантириш мумкин. $Z(E)$ фазони ҳалқага айлантириш учун кўпайтма сифатида операторларнинг композицияси $A \cdot B$ ни оламиз:

$$A \cdot B = A \circ B, \text{ яъни } (AB)x = A(Bx).$$

Агар ихтиёрий $x \in E$ учун $Ax = Bx$ бўлса, A ва B операторлар бир-бирига тенг дейилади. Равшанки,

1) $A(BC) = (AB)C$;
2) $A(B+C) = AB + AC$;
3) $(B+C)A = BA + CA$,

яъни $Z(E)$ ҳалқа; бу ҳалқа *чизиқли операторлар ҳалқаси* дейилади. Узлуксиз операторлар кўпайтмасининг узлуксизлиги узлуксиз акс эттиришларнинг композицияси узлуксиз эканлигидан келиб чиқади. Демак, шу амалларга нисбатан $L(E)$ тўплам ҳам ҳалқадир. $Z(E)$ ва $L(E)$ ҳалқада бирлик элемент мавжуд. Бу элемент *бирлик оператор* деб аталади ва қуйидагича таърифланади: ихтиёрий $x \in E$ учун $Ix = x$. Ҳар бир $A \in Z(E)$ учун $AI = IA = A$ муносабат бевосита келиб чиқади. Агар $\dim E \neq 1$ бўлса, $Z(E)$ ҳалқа коммутатив эмас.

Бунга мисоллар келтирамиз. 1. $L(R^2)$ икки ўлчамли фазодаги чизиқли операторлар ҳалқаси бўлсин. Маълумки, бу ҳалқа иккинчи тартибли квадрат матрицалар ҳалқасидир. Алгебра курсидан маълумки, умумий ҳолда A ва B матрицалар учун AB матрица BA матрицага тенг эмас, Масалан,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицаларни қарасак,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Демак, $AB \neq BA$.

2. $L(C[a, b])$ операторлар ҳалқасида

$$Ax = \int_a^b tsx(s)ds,$$

$$Bx = tx(t)$$

деб олсак,

$$ABx = A(Bx) = \int_a^b ts(sx(s))ds = t\int_a^b s^2x(s)ds,$$

$$BAx = B(Ax) = t\int_a^b tsx(s)ds = t^2\int_a^b sx(s)ds,$$

яъни $AB \neq BA$.

I_E ва I_F операторлар мос равишда E ва F даги бирлик операторлар бўлсин. $A \in Z(E, F)$, $B \in Z(F, E)$ операторлар учун ушбу

$$BA = I_E \, (AB = I_F)$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда B оператор A операторга *чапдан (ўнгдан) тескари оператор* дейилади.

Агар A оператор учун чапдан тескари бўлган B оператор ва ўнгдан тескари бўлган C оператор мавжуд бўлса, у ҳолда $B = C$.

Дарҳақиқат,

$$B = BI_F = B(AC) = (BA)C = I_E C = C.$$

$B = C$ оператор A^{-1} билан белгиланади ва A га *тескари оператор* дейилади.

Агар A оператор узлуксиз бўлиб, унинг тескари оператори A^{-1} мавжуд бўлса, A^{-1} оператор умумий ҳолда узлуксиз бўлмаслиги ҳам мумкин.

Бунга мисол келтирамиз. Нолдан фарқли ҳадларининг сони кўпи билан чекли бўлган $x = \{x_n\}$ кетма-кетликлар фазоси X да нормани қуйидагича киритамиз:

$$\|x\| = \max_{n=1, 2, \ldots} |x_n|.$$

Бу нормаланган фазода $T: X \to X$ чизиқли операторни ушбу

$$Tx = \left\{\frac{x_n}{n}\right\}$$

тенглик билан аниқлаймиз. Равшанки,

$$\|Tx\| \leqslant \|x\|$$

демак, $x \to \theta$ да $Tx \to \theta$, яъни T — узлуксиз чизиқли оператор. Бу оператор учун тескари оператор мавжуд ва

$$T^{-1}x = \{nx_n\}.$$

Аммо T^{-1} узлуксиз эмас. Дарҳақиқат,

$$x^{(k)} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-1}, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots), \; k=1, 2, \ldots$$

элементлардан тузилган кетма-кетликни олсак,

$$\|x^{(k)}\| = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Лекин

$$T^{-1}x^{(k)} = (0,0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots),$$

яъни

$$\|T^{-1}x^{(k)}\| = 1 \not\to 0.$$

Демак, T^{-1} узлуксиз эмас. Қандай ҳолларда $A \in L(E, F)$ дан $A^{-1} \in L(E, F)$ келиб чиқиши кейинги параграфларнинг бирида кўрилади.

Энди E, F локал қавариқ фазолар бўлиб, $\{p\}$ ва $\{q\}$ мос равишда E ва F даги топологияларни аниқловчи ярим нормалар системаси бўлсин.

3-теорема. *$T: E \to F$ чизиқли оператор узлуксиз бўлиши учун қуйидаги шарт зарур ва кифоядир, ихтиёрий $q \in \{q\}$ яримнорма учун шундай $p \in \{p\}$ ярим-норма ва мусбат β сон топиладики, ушбу*

$$q(Tx) \leqslant \beta p(x)$$

муносабат ихтиёрий $x \in E$ элемент учун бажарилади.

Исбот. Кифоялиги. F фазода нолнинг атрофлари базисидан ихтиёрий

$$V = \{y \in F : q_i(y) < \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}\}$$

атрофни оламиз. (1) шартга кўра, шундай $p_i \in \{p\}$ ярим-нормалар ва β_i сонлар мавжудки,

$$q_i(Tx) \leqslant \beta_i p_i(x), \qquad i = \overline{1, n}.$$

Энди E фазода ушбу

$$U = \left\{x \in E : p_i(x) < \frac{\varepsilon_i}{\beta_i}, \quad i = \overline{1, n}\right\}$$

атрофни олсак, у ҳолда ихтиёрий $x \in U$ учун

$$q_i(Tx) \leqslant \beta_i p_i(x) = \beta_i \cdot \frac{\varepsilon_i}{\beta_i} = \varepsilon_i,$$

яъни $Tx \in V$. Демак, $T(U) \subset V$. Бу T нинг θ нуқтада узлуксизлигини кўрсатади.

1-теоремага асосан T узлуксиз оператордир.

Зарурлиги. T оператор θ нуқтада узлуксиз. Таърифга биноан ихтиёрий $q \in \{q\}$ яримнорма ва $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $p \in \{p\}$ яримнорма ва $\delta > 0$ сон топиладики, ушбу

$$p(x) \leqslant \delta$$

тенгсизликдан $q(Tx) \leqslant \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади.

Ушбу $\lambda p(x) \leqslant \delta$ шартни қаноатлантирувчи $\lambda > 0$) сонни танлаб оламиз. У ҳолда $p(\lambda x) \leqslant \delta$, демак, $q\ (T\ (\lambda x) \leqslant \varepsilon$, яъни $q(Tx) \leqslant \frac{\delta}{\lambda}$. Агар $p\ (x) = 0$ бўлса, λ сонни ихтиёрий равишда катта қилиб олиш мумкин, демак, $q(Tx) = 0$. Агар $p(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda = \frac{\delta}{p\ (x)}$ деб олиш мумкин. Бунда

$$q(Tx) \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{\delta} p(x) = \beta p(x)\ \left(\beta = \frac{\varepsilon}{\delta}\right). *$$

Натижа. *Локал* қавариқ E фазодаги f чизиқли функционал узлуксиз бўлиши учун қуйидаги шарт зарур ва кифоядир: шундай $p \in \{p\}$ яримнорма ва $\beta > 0$ сон мавжудки,

$$|f(x)| \leqslant \beta p(x) \tag{2}$$

тенгсизлик ихтиёрий $x \in E$ учун бажарилади.

Таъриф. E, F топологик вектор фазолар бўлсин. Агар $T: E \to F$ чизиқли оператор E даги ихтиёрий чегараланган тўпламни F даги чегараланган тўпламга акс эттирса, у *чегараланган* дейилади.

Ихтиёрий узлуксиз чизиқли оператор чегаралангандир. Дарҳақиқат, T узлуксиз бўлса, F даги нолнинг ихтиёрий V атрофининг асли $T^{-1}\ (V)$ тўплам E даги нолнинг атрофидир. E дан бирон чегараланган B тўплам олсак, чегараланганлик таърифига асосан шундай $\lambda > 0$ сон топиладики, ихтиёрий $\mu\ (|\mu| \leqslant \lambda)$ сон учун $\mu B \subset T^{-1}(V)$, демак, $\mu\, TB \subset V$, яъни TB тўплам F фазода чегараланган.

4-теорема. *E ва F локал қавариқ фазолар бўлиб, E метрикаланган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий чегараланган $T: E \to F$ чизиқли оператор узлуксиздир.*

Исбот. Даставвал E фазода бирор абсолют қавариқ A тўплам ихтиёрий чегараланган тўпламни ютувчи бўлса, у нолнинг атрофи эканлигини исботлаймиз. Агар E даги метрикани ρ билан белгиласак, у ҳолда

$$V_n = \left\{x \in E : \rho(\theta,\ x) \leqslant \frac{1}{n}\right\},\quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

тўпламлар E да ноль атрофларининг саноқли базисини ташкил қилади. Агар ихтиёрий $n = 1, 2, \ldots$ учун $V_n \subset nA$ бўлмаса, у ҳолда $x_n \in V_n$, $x_n \overline{\in} nA$ шартларни қаноатлантирувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик мавжуд. Демак, $x_n \to \theta$, бундан $\{x_n\}$ — чегараланган тўплам. Ихтиёрий $n = 1, 2, \ldots$ учун $x_n \in nA$ бўлгани сабабли A тўплам $\{x_n\}$ чегараланган тўпламни юта олмайди. Бу зиддият бирор n_0 учун $V_{n_0} \subset n_0 A$ муносабат бажарилишини кўрсатади, яъни $\frac{1}{n_0} V_{n_0} \subset A$. Демак, A нолнинг атрофи.

Энди $T: E \to F$ чегараланган чизиқли оператор бўлсин. F даги нолнинг ихтиёрий абсолют қавариқ V атрофини оламиз. Агар $B \subset E$ ихтиёрий чегараланган тўплам бўлса, у ҳолда V тўплам чегараланган TB тўпламни ютувчидир, яъни бирор n_0 натурал сон учун $TB \subset n_0 V$, бундан $B \subset n_0 T^{-1}(V)$. Демак, $T^{-1}(V) \subset E$ тўплам E даги ҳар қандай чегараланган тўпламни ютувчи тўпламдир. Юқоридаги мулоҳазаларга асосан $T^{-1}(V)$ нолнинг атрофидир, яъни T оператор нолда ва, демак, ҳар бир нуқтада узлуксиз.*

7.2- §. Текис чегараланганлик принципи. Очиқ акс эттириш ва ёпиқ график ҳақидаги теоремалар

Бу параграфда кўриладиган фазоларни Ф фазо (яъни тўла метрикаланган вектор фазо) деб фараз қиламиз. ρ бирор Ф фазодаги метрика бўлса, $|x| = \rho(\theta, x)$ белгилашни киритамиз.

1. Текс чегараланганлик принципи.

$\Gamma = \{\alpha\}$ индекслар тўплами бўлиб, $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ система E фазони F фазога акс эттирувчи узлуксиз чизиқли операторлар системаси бўлсин.

1-теорема. *Ихтиёрий $x \in E$ элемент учун $\{T_\alpha x, \alpha \in \Gamma\}$ тўплам F фазонинг чегараланган қисми бўлсин. У ҳолда*

$$\lim_{x \to \theta} T_\alpha x = \theta$$

муносабат α га нисбатан текис бажарилади, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжудки, ушбу $|T_\alpha x| \leqslant \varepsilon$ муносабат ихтиёрий x ($|x| \leqslant \delta$) элемент ва ихтиёрий $\alpha \in \Gamma$ учун ўринли.

Исбот. Ушбу белгилашни киритамиз:

$$E_k = \left\{x \in E: \left|\frac{1}{k} T_\alpha(x)\right| + \left|\frac{1}{k} T_\alpha(-x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\alpha\right\},$$

бу ерда $k = 1, 2, \ldots, \varepsilon > 0$. T_α операторлар узлуксиз бўлгани сабабли ҳар бир E_k ёпиқ тўпламдир. Теореманинг шартига биноан ихтиёрий x учун $\{T_\alpha x, \alpha \in \Gamma\}$ тўплам чегараланган бўлгани сабабли шундай k топиладики, $x \in E_k$, демак,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

E фазо тўла метрик фазо бўлгани учун Бэр теоремасига биноан (2.6-§, 3-теорема) шундай k_0 натурал сон топиладики, E_{k_0} тўплам F нинг бирор қисмида зич бўлади, яъни шундай $B = B(x_0, \delta)$ шар топиладики, ихтиёрий $y \in B$ элементнинг ихтиёрий U_y атрофи учун $U_y \cap E_k \neq \varnothing$ (яъни E_{k_0} тўплам B шарнинг ҳамма ерида зич). Шунинг учун $B \subset \overline{E_{k_0}} = E_{k_0}$ (чунки E_{k_0} — ёпиқ тўплам). Бу муносабатни қуйидагича ёзса ҳам бўлади:

$$x_0 + x \in E_{k_0} \quad (x_0 \in E_{k_0}, \ |x| \leqslant \delta)$$

Демак, ихтиёрий $\alpha \in \Gamma$ учун ушбу

$$\left|\frac{1}{k_0} T_\alpha (x + x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left|\frac{1}{k_0} T_\pi (-x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик ўринлидир. Демак,

$$\left|\frac{1}{k_0} T_\alpha (x)\right| \leqslant \left|\frac{1}{k_0} T_\alpha (x + x_0)\right| + \left|\frac{1}{k_0} T_\alpha (-x_0)\right| \leqslant \varepsilon,$$

яъни $|x| \leqslant \delta$ муносабатдан ихтиёрий $\alpha \in \Gamma$ учун ушбу

$$\left|T_\alpha\left(\frac{x}{k_0}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

муносабат келиб чиқади.

Ушбу $y = \frac{x}{k_0}$ белгилаш киритсак, юқоридаги хосса қуйидагича ёзилади: ихтиёрий $y \in E$ учун $|y| < \frac{\delta}{k_0}$ муносабатдан

$$|T_\alpha (y)| \leqslant \varepsilon$$

тенгсизлик α га нисбатан текис бажарилиши келиб чиқади, яъни

$$\lim_{y \to \theta} T_\alpha y = \theta. \ast$$

2-теорема (Банах — Штейнхаус теоремаси). *E фазони F фазога акслантирувчи $\{T_n\}$ узлуксиз чизиқли* *операторлар кетма-кетлиги ҳар бир нуқтада фундаментал бўлсин, яъни ихтиёрий $x \in E$ элемент учун $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик F фазода фундаментал бўлсин. У ҳолда ушбу*

$$\lim_{x\to\theta} T_n x = \theta$$

лимит n га нисбатан текисдир.

Исбот $\Gamma = N = \{1,2, \ldots\}$ деб оламиз. Ихтиёрий x элемент учун $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик фундаментал, демак чегараланган. Шуларни ҳисобга олсак, 2-теореманинг исботи 1-теоремадан бевосита келиб чиқади.$_*$

3-теорема. *Агар $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E, F)$ кетма-кетлик ҳар бир нуқтада фундаментал бўлса, у ҳолда шундай $T \in L(E, F)$ оператор топиладики, берилган кетма-кетлик T операторга ҳар бир нуқтада яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Теореманинг шартига кўра ихтиёрий $x \in E$ элемент учун $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик F фазода фундаменталдир.

F фазо тўла бўлгани учун $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик бирор $y_x \in F$ элементга яқинлашувчи бўлади. T операторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$Tx = y_x.$$

Равшанки, T оператор E фазони F фазога акс эттиради. T чизиқли оператордир, чунки

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\alpha T_n x_1 + \beta T_n x_2] = \alpha T x_1 + \beta T x_2.$$

Ниҳоят, T узлуксиз оператор ҳамдир. Ҳақиқатан, Банах — Штейнхаус теоремасини $\{T_n\}$ кетма-кетликка қўлласак,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 : |x| \leqslant \delta \Rightarrow |T_n x| \leqslant \varepsilon, \ \forall n \in N$$

муносабат келиб чиқади. Бу ерда n бўйича лимитга ўтсак, қуйидаги муносабат ҳосил бўлади:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 : |x| \leqslant \delta \Rightarrow |Tx| \leqslant \varepsilon,$$

яъни T узлуксиз оператордир.$_*$

2. Очиқ акс эттириш ҳақидаги теорема.

4-теорема. *$T: E \to F$ узлуксиз чизиқли оператор бўлиб, $T(E) = F$ тенглик бажарилсин. Бу ҳолда T очиқ оператордир, яъни E даги ихтиёрий G очиқ тўпламнинг тасвири TG тўплам F фазода очиқдир.*

Исбот. Қулайлик учун исботни уч қисмга бўламиз.

а) G тўплам E фазодаги θ нуқтанинг очиқ атрофи бўлсин. Бу ерда биз $\overline{TG}$ тўплам F фазода θ нуқтанинг атрофи эканлигини исботлаймиз. Топологик вектор фазода $a - b$ амали узлуксиз бўлгани учун θ нуқтанинг ушбу

$$U - U \subset G$$

шартни қаноатлантирадиган мувозанатдаги U атрофи мавжуд. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетлик нолга интилгани сабабли ихтиёрий $x \in E$ элемент учун шундай n топиладики, $\frac{x}{n}$ элемент U атрофга тегишли бўлади, яъни $x \in nU$. Демак,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU,$$

ва

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nTU.$$

F тўла бўлгани учун Бэр теоремасига асосан шундай n_0 натурал сон мавжудки, $n_0 TU$ тўплам F нинг бирор қисмида зич бўлади, яъни θ нинг V очиқ атрофи топиладики, ушбу

$$V \subset n_0 \overline{TU} \text{ ёки } \frac{1}{n_0} V \subset \overline{TU}$$

муносабат бажарилади. Сонга кўпайтириш амали узлуксиз бўлгани учун $W = \frac{1}{n_0} V$ тўплам θ элементнинг очиқ атрофидир ва

$$W \subset \overline{TU}.$$

Демак,

$$\overline{TG} \supset \overline{TU - TU} \supset \overline{TU} - \overline{TU} \supset W - W \ni \theta$$

ва $W - W = \bigcup_{a \in W} \{a - W\}$ — очиқ тўплам. Шунинг учун $W - W$ тўплам θ элементнинг атрофи, яъни $\overline{TG}$ тўплам θ элементнинг очиқ атрофини ўз ичига олади.

б) $B_\varepsilon \subset E$ ва $C_\varepsilon \subset F$ орқали маркази θ да ва радиуси ε га тенг бўлган шарларни белгилаймиз. Ихтиёрий $\varepsilon_0 > 0$ сон учун шундай $\varepsilon_i > 0$ сонлар топиладики, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_0$ тенгсизлик бажарилади. Юқоридаги а) пунктга биноан шундай $\eta_i > 0(\eta_i \to 0)$ сонлар топиладики, ушбу

$$\overline{TB_{\varepsilon_i}} \supset C_{\eta_i}, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (1)$$

муносабатлар бажарилади.

Энди қуйидагини исботлаймиз:

$$TB_{2\varepsilon_0} \supset C_{\eta_0},$$

яъни

$$\forall\, y \in C_{\eta_0}\ \exists\, x \in B_{2\varepsilon_0} : y = Tx.$$

Юқоридаги (1) муносабатда $i = 0$ деб, ихтиёрий $y \in C_{\eta_0} \subset \overline{TB_{\varepsilon_0}}$ да элементни оламиз. Демак, B_{ε_0} да

$$|y - Tx_1| < \eta_1$$

шартни қаноатлантирувчи x_1 элемент мавжуд. Бундан $y - Tx_1 \in C_{\eta_1}$. Юқоридаги (1) муносабатни $i = 1$ учун қўлласак, ушбу

$$|(y - Tx_1) - Tx_2| < \eta_2$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $x_2 \in B_{\varepsilon_1}$ элемент топилади, яъни

$$|y - T(x_1 + x_2)| < \eta_2,$$

ва ҳоказо. Шу тарзда давом эттириб, ҳар бир $B_{\varepsilon_{n-1}}$ шарда ушбу

$$\left| y - T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right| < \eta_n \qquad (2)$$

шартни қаноатлантирувчи x_n элемент топамиз. Энди $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ элементни z_n билан белгилаймиз. Ҳосил бўлган $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик фундаментал эканлигини исботлаймиз. Ихтиёрий m, n $(m < n)$ натурал сонлар учун ушбу

$$|z_n - z_m| = |x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_n| \leqslant |x_{m+1}| + \\ + \ldots + |x_n| \leqslant \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} + \ldots + \varepsilon_{n-1}$$

муносабатлар ўринли. Юқорида киритилган $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ қатор яқинлашувчи бўлгани учун $|z_n - z_m| \to 0$, $n, m \to \infty$. Бу муносабатдан $\{z_n\}$ нинг фундаментал эканлиги келиб чиқади. Бундан E тўла бўлгани учун $\{z_n\}$ кетма-кетлик бирон x элементга яқинлашади, яъни

$$x = \lim_{n \to \infty} z_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{l=1}^{n} x_l.$$

Энди $\eta_i \to 0$ шартни ва T нинг узлуксизлигини ҳисобга олсак, юқоридаги муносабатдан ушбу

$$y = Tx$$

тенглик келиб чиқади. Метрик фазода метриканинг узлуксизлигидан фойдаланиб, қуйидаги муносабатларни ёзишимиз мумкин:

$$\rho\ (\theta,\ x) = |x| = \lim_{n \to \infty} |z_n| \leqslant \lim_{n \to \infty} (|x_1| + \ldots + |x_n|).$$

Маълумки, $x_l \in B_{\varepsilon_{l-1}}$, яъни $|x_l| \leqslant \varepsilon_{l-1}$. Бу тенгсизликдан фойдаланиб, ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$x| = \rho\ (\theta,\ x) \leqslant \lim_{n \to \infty} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{l-1}) \leqslant \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0.$$

Демак,

$$x \in B_{2\varepsilon_0},\ \text{яъни}\ TB_{2\varepsilon_0} \supset C_{\eta_0}.$$

Шундай қилиб, E фазодаги θ элементнинг ихтиёрий атрофининг тасвири F фазода θ элементнинг атрофидир.

в) G тўплам E фазода ихтиёрий очиқ тўплам бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x \in G$ элемент учун θ элементнинг ушбу

$$x + M \subset G$$

шартни қаноатлантирувчи M атрофи топилади. б) га асосан θ элементнинг TM тўплам ичида бутунлай жойлашган U атрофи мавжуд. Демак,

$$TG \supset T(x + M) = Tx + TM \supset Tx + U,$$

яъни TG — очиқ тўплам.*

Қуйидаги теорема функционал анализнинг энг муҳим теоремаларидан биридир.

5-теорема (тескари оператор ҳақидаги теорема). *$T: E \to F$ чизиқли изоморфизм бўлсин* (1.6- §). *Агар*

T узлуксиз бўлса, у ҳолда T^{-1} ҳам узлуксиз чизиқли оператордир.

Исбот. T^{-1} нинг мавжудлиги теореманинг шартларидан бевосита кўриниб турибди. T^{-1} чизиқли оператор эканлигини исботлаш учун $x_1, x_2 \in E$ элементларни ва $\lambda \in K$ сонни оламиз. $Tx_1 = y_1$, $Tx_2 = y_2$ бўлсин, у ҳолда

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 = y_1 + y_2,$$

демак,

$$T^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = T^{-1}y_1 + T^{-1}y_2.$$

Сўнг $T(\alpha x_1) = \alpha Tx_1 = \alpha y_1$, бундан $T^{-1}(\alpha y_1) = \alpha x_1 = \alpha T^{-1} y_1$, яъни T^{-1} — чизиқли оператор. Энди E фазода ихтиёрий G очиқ тўпламни олсак, бу тўпламнинг T^{-1} операторга нисбатан олинган асли $(T^{-1})^{-1}(G) = TG$ га тенг. 4- теоремага асосан TG—очиқ тўплам, яъни T^{-1} — узлуксиз оператор.*

3. Ёпиқ график ҳақидаги теорема.

$T: E \to F$ чизиқли оператор E фазонинг $D(T) = \operatorname{dom} T$ вектор қисм фазосида аниқланган бўлсин, яъни $D(T)$ тўплам T операторнинг аниқланиш соҳаси бўлсин. Маълумки (1.6- §), ушбу

$$\operatorname{gr} T = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset E \times F$$

тўплам T операторнинг *графиги* дейилади. Агар gr T тўплам $E \times F$ фазода ёпиқ бўлса, T оператор *ёпиқ* дейилади. E, F фазолар Ф- фазолар бўлса, $E \times F$ фазо ҳам Ф- фазо бўлади: бу фазода $\alpha' = (x', y') \in E \times F$ ва $\alpha'' = (x'', y'') \in E \times F$ элементлар орасидаги масофа қуйидагича аниқланади:

$$\rho(\alpha', \alpha'') = |x' - x''| + |y' - y''|.$$

T операторнинг ёпиқлиги қуйидагича ифодаланади: агар $(x_n, Tx_n) \in \operatorname{gr} T$ ва $x_n \to x$, $Tx_n \to y$ бўлса, у ҳолда

$$x \in D(T) \text{ ва } y = Tx.$$

6- теорема (ёпиқ график ҳақидаги теорема). *E фазони F фазога акс эттирувчи ёпиқ T чизиқли оператор узлуксиздир.*

Исбот. T чизиқли оператор бўлгани учун gr T тўплам $E \times F$ фазонинг вектор қисм фазосидир 1.6- §, 2- теорема). gr T тўплам $E \times F$ фазонинг ёпиқ қисм фазоси бўлгани учун gr T нинг ўзи ҳам Ф- фазо ҳосил қилади.

gr T фазони E фазога акс эттирувчи pr_E операторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\mathrm{pr}_E(x,\ Tx) = x,\ (x,\ Tx)\in \mathrm{gr}\,T.$$

Равшанки, pr_E узлуксиз чизиқли оператор бўлиб, gr T фазони E фазога ўзаро бир қийматли акс эттиради ва унинг қийматлар соҳаси E фазога тенгдир. 5- теоремага мувофиқ узлуксиз чизиқли pr_E^{-1} оператор мавжуд. Ушбу

$$\mathrm{pr}_E^{-1}(x) = (x,\ Tx),\quad \mathrm{pr}_F(x,\ Tx) = Tx$$

муносабатлардан $\mathrm{T}=\mathrm{pr}_F\circ \mathrm{pr}_E^{-1}$ келиб чиқади, яъни T оператор узлуксиз операторларнинг композициясига тенг, демак, T ҳам узлуксиз.*

7.3- §. Нормаланган фазода чизиқли операторнинг нормаси

E ва F нормаланган фазолар бўлсин.

Таъриф. T чизиқли оператор учун ушбу

$$\|Tx\| \leqslant M\cdot\|x\|,\ \forall x\in E$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $M > 0$ сон мавжуд бўлса, у ҳолда T оператор *чегараланган* дейилади. Бу таъриф 7. 1-§ да киритилган чегараланганлик таърифига эквивалент.

1-теорема. *$T\colon E\to F$ чизиқли оператор узлуксиз бўлиши учун унинг чегараланган бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурлиги. T узлуксиз, аммо чегараланмаган бўлсин деб фараз қилайлик. Бу ҳолда ихтиёрий n натурал сон учун шундай $x_n\in E$ элемент мавжудки, ушбу

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|$$

тенгсизлик бажарилади. Равшанки, $x_n \neq \theta$. Ушбу $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ элементни олсак, бевосита кўриниб турибдики, $\|y_n\| = \frac{1}{n}\to 0$, яъни $y_n\to \theta$. T узлуксиз бўлгани учун $Ty_n\to \theta$. Аммо,

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\cdot\|Tx_n\| > \frac{1}{n\|x_n\|}\cdot n\cdot\|x_n\| = 1.$$

Демак, $\|Ty_n\| > 1$; зиддият ҳосил бўлди. •

Кифоялиги. T чегараланган чизиқли оператор бўлса у ҳолда таърифга асосан

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\| \ (M>0).$$

Агар x_n кетма-кетлик θ га интилса, у ҳолда $\|x_n\| \to 0$. Демак,

$$\|Tx_n\| \leqslant M\|x_n\| \to 0, \text{ яъни } Tx_n \to \theta.$$

Бундан T операторнинг θ нуқтада узлуксизлиги ва, демак, ҳар бир элементда узлуксизлиги келиб чиқади.*

Исботланган теоремадан $L(E, F)$ фазо чегараланган чизиқли операторлар тўпламига тенглиги келиб чиқади.

Таъриф. $T \in L(E, F)$ операторнинг *нормаси* деб қуйидаги сонга айтилади:

$$\|T\| = \inf\,\{M>0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|,\ \forall x \in E\}.$$

Норманинг тенг кучли таърифлари қуйидаги леммадан келиб чиқади.

Лемма.

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Исбот. Ихтиёрий M $(M > \|T\|)$ сон ва x $(\|x\| \leqslant 1)$ элемент учун $\|Tx\| \leqslant M$ ўринли, бундан

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| \leqslant M.$$

Демак,

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| \leqslant \|T\|,$$

яъни

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leqslant \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| \leqslant \|T\| \qquad (1)$$

Бундан $\|T\| = 0$ бўлганда лемма равшан. Агар $\|T\|>0$ бўлса, ушбу

$$0 < b < \|T\|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий b сонни оламиз. Таърифга асосан қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган x_0 элемент мавжуд:

$$\|Tx_0\| > b\|x_0\|,\ x_0 \neq \theta.$$

Демак, $y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ элементни олсак, у ҳолда $\|y_0\| = 1$ ва

$$\|Ty_0\| = \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} > b, \text{ бундан } \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| > b.$$

Олинган b сон $\|T\|$ дан кичик ихтиёрий сон бўлгани учун охирги тенгсизликдан ушбу

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\geqslant\|T\|$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизликни юқоридаги (1) тенгсизлик билан солиштирсак, исботланаётган тенглик келиб чиқади.*

Оператор нормасининг қуйидаги хоссалари юқоридаги леммадан осонликча келиб чиқади:

1) $\|T\|=0 \Longleftrightarrow T=O$;
2) $\|\lambda T\|=|\lambda|\cdot\|T\|,\ \lambda\in K,\ T\in L(E,F)$;
3) $\|T_1+T_2\|\leqslant\|T_1\|+\|T_2\|,\ T_1,\ T_2\in L(E,F)$.
4) $\|T_1\ T_2\|\leqslant\|T_1\|\ \|T_2\|$

Масалан, 3) хоссани исботлаймиз:

$$\|T_1+T_2\|=\sup_{\|x\|\leqslant1}\|(T_1+T_2)\ (x)\|=\sup_{\|x\|<1}\|T_1x+T_2x\|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\|x\|<1}(\|T_1x)\|+\|T_2x\|)\leqslant\sup_{\|x\|<1}\|T_1x\|+\sup_{\|x\|<1}\|T_2x\|=$$
$$=\|T_1\|+\|T_2\|.$$

Демак, L (E, F) фазо нормаланган фазодир.

Хусусан, $F=K$ бўлганда, узлуксиз чизиқли функционаллар фазоси нормаланган бўлиб, бу фазодаги норма ушбу кўринишда аниқланади:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant1}|f(x)|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|.$$

Мисоллар.

1. Ноль оператор $Ox=\theta$ ($x\in E$) тенглик билан аниқланади. Равшанки,

$$\|O\|=0.$$

2. I бирлик операторни оламиз. Ихтиёрий $x\in E$ элемент учун $Ix=x$ бўлгани сабабли ушбу

$$\|I\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ix\|=\sup_{\|x\|=1;}\|x\|=1$$

тенглик, яъни $\|I\|=1$ ўринлидир.

3. Нормаланган E фазода T чизиқли операторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$Tx=\lambda x,\ \lambda\in K$$

У ҳолда

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|=1}\|\lambda x\|=\sup_{\|x\|=1}|\lambda|\cdot\|x\|=|\lambda|,$$

яъни $\|T\|=|\lambda|$.

4. n ўлчамли E вектор фазода $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базисни, m ўлчамли F фазода эса $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ базисни оламиз.

Равшанки, $T: E \to F$ чизиқли операторни $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ базис элементларида аниқлаш кифоядир. Бунинг учун ўз навбатида $g_i = Te_i$ элементларнинг $\{e'_i\}_{i=1}^{m}$ базис бўйича координаталарини билиш етарлидир, яъни

$$g_i = Te_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}e'_k, a_{ik} \in K.$$

Агар $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in E$ ихтиёрий вектор бўлса, у ҳолда

$$y = Tx = T\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}e'_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i\right) e'_k = \sum_{k=1}^{m} \eta_k e'_k,$$

бу ерда $\eta_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \xi_i$ $(k=1, 2, \dots, m)$.

Демак, T оператор (a_{ij}) матрица ёрдамида аниқланиб, у $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ векторга ушбу кўринишда қўлланар экан:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_m \end{pmatrix} = Tx = T\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

E ва F фазоларда Евклид нормасини оламиз. Коши — Буняковский тенгсизлигидан ушбу

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right) = \left(\sum_{i,k} |a_{ik}|^2\right) \|x\|^2$$

муносабат, яъни ушбу

$$\|Tx\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2}\, \|x\|$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, T чегараланган чизиқли оператор ва $\|T\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,\,k} |a_{ik}|^2}$.

Хусусан, агар E ва F чекли ўлчамли фазолар Евклид нормаси билан қаралса, у ҳолда ихтиёрий $T: E \to F$ чизиқли оператор узлуксиздир.

5. $E = R^n$ ва $F = R^m$ фазоларда ушбу

$$\|x\| = \max_i |\xi_i|, \quad \|y\| = \max_k |\eta_k|$$

нормаларни олиб, $T = (a_{ik})$ чизиқли операторнинг нормасини ҳисоблаймиз. Ушбу

$$\|y\| = \|Tx\| = \max_k |\eta_k| \leqslant \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \cdot |\xi_i| \leqslant \|x\| \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$$

муносабатдан

$$\|T\| \leqslant \max \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \qquad (2)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Фараз қилайлик,

$$\sum_{i=1}^n |a_{ik_0}| = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

бўлсин. У ҳолда $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ векторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\xi_i^0 = \operatorname{sgn} a_{ik_0} = \begin{cases} 1, & a_{ik_0} > 0 \text{ бўлса}, \\ -1, & a_{ik_0} < 0 \text{ бўлса}, \\ 0, & a_{ik_0} = 0 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Бундан равшанки, $\|x_0\| \leqslant 1$ ва

$$\|T\| \geqslant \|Tx_0\| = \max_k \left| \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i^0 \right| = \sum_{i=} a$$

$$= \sum_{i=1}^n |a_{ik_0}| = \max_k \sum_{i=1}^n |$$

Бундан ва (2) тенгсизликдан

$$\|T\| = \max_k \sum_{i=1}^n |$$

6. E сепарабел Гильберт фазосида $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ ортонормал базис бўлсин. У ҳолда (4.3-§) ихтиёрий $x \in E$ элемент ушбу

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$$

кўринишга эга. Бирор $C > 0$ сон ва $\{\lambda_n\}$ ($|\lambda_n| \leqslant C$) сонли кетма-кетликни олиб, операторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i \xi_i) e_i. \tag{3}$$

Tx элементнинг мавжудлиги ушбу

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i \xi_i|^2 \leqslant C^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$$

тенгсизликдан ва Рисс — Фишер теоремасидан бевосита келиб чиқади (4.3-§).

T нинг чизиқли оператор эканлиги бевосита кўриниб турибди. (3) тенгликдан $Te_i = \lambda_i e_i$ тенглик келиб чиқади. Ушбу $\lambda = \sup_n |\lambda_n|$ белгилашни киритамиз. У ҳолда

$$\| Tx \|^2 = (T\lambda, Tx) = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i \xi_i|^2 \leqslant \lambda^2 \|x\|^2,$$

бундан

$$\| T \| \leqslant \lambda.$$

Ҳар бир e_i вектор бирлик шарга тегишли (яъни $\|e_i\| = 1$) бўлгани учун

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| Tx \| \geqslant \sup_n \| Te_n \| = \sup_n |\lambda_n| = \lambda.$$

Демак,

$$\| T \| = \lambda = \sup_n |\lambda_n|.$$

7. L_2 $[a, b]$ **фазода Фредгольм оператори.** D орқали ушбу тўпламни белгилаймиз:

$$D = [a, b] \times [a, b] = \{(t, s) : t \in [a, b],\ s \in [a, b]\}.$$

Бирор $K(t, s)$ функция $L_2(D)$ фазога тегишли, яъни ушбу

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 ds dt = K^2 < \infty \tag{4}$$

муносабат ўринли бўлсин. $K(t, s)$ функция ёрдамида $L_2[a, b]$ Гильберт фазосида чизиқли операторни қуйидагича аниқлаймиз: ихтиёрий $x(t)\in L_2[a, b]$ элемент учун

$$Tx = \int_a^b K(t, s)\,x(s)ds = y(t). \tag{5}$$

Даставвал, $y(t)$ функция L_2 $[a, b[$ фазонинг элементи эканлигини кўрсатамиз. Фубини теоремасига асосан деярли ҳамма $t\in[a, b]$ нуқталар учун $|K(t, s)|^2$ функция s аргументга нисбатан Лебег маъносида жамланувчидир. Демак, деярли ҳамма t учун $y(t)$ функция L_2 $[a, b]$ фазодаги икки элементнинг скаляр кўпайтмасига тенг, яъни чекли. Ушбу

$$|K(t)|^2 = \int_a^b |K(t, s)|^2 ds$$

функция жамланувчидир, чунки

$$\int_a^b |K(t)|^2 dt = \int_a^b\int_a^b |K(t, s)|^2 dsdt = K^2 < \infty.$$

Демак, Коши—Буняковский тенгсизлигига асосан

$$|y(t)|^2 = \left|\int_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |K(t, s)|^2 ds\right)\left(\int_a^b |x(s)|^2 ds\right) =$$

$$= |K(t)|^2\cdot\|x\|^2.$$

Шунинг учун ушбу

$$\int_a^b |y(t)|^2 dt \leqslant \int_a^b |K(t)|^2 dt\cdot\|x\|^2 = K^2\|x\|^2 \tag{6}$$

интеграл мавжуд, яъни $y(t)\in L_2[a, b]$. Демак, (5) формула L_2 $[a, b]$ фазода операторни аниқлайди.

Бу T оператор *Фредгольм оператори*, $K(t, s)$ функция эса унинг *ўзаги* дейилади. Юқоридаги (6) муносабатдан

$$\|T\| \leqslant K = \sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(t, s)|^2 dsdt}$$

тенгсизлик ва T узлуксиз операторлиги бевосита келиб чиқади.

7.4-§. Нормаланган фазоларда функционал анализнинг асосий принциплари

I. Банах—Штейнхаус теоремаси.

1-теорема. *E ва F Банах фазолари бўлиб, $\{T_n\} \subset L(E, F)$ операторлар кетма-кетлиги ҳар бир нуқтада фундаментал бўлсин. У ҳолда уларнинг нормалари кетма-кетлиги $\{\|T_n\|\}$ чегаралангандир.*

Исбот. Банах фазоси Ф-фазо бўлгани учун 7.2-§ даги 2-теореманинг шартлари бажарилади. Шу теоремага асосан ушбу

$$\lim_{x\to\theta} T_n x = \theta$$

муносабат n га нисбатан текис бажарилади, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжудки, $\|T_n x\| < \varepsilon$ муносабат ихтиёрий n натурал сон ва нормаси δ дан кичик бўлган x элемент учун бажарилади. Демак, ихтиёрий $\|x\| \leqslant 1$ элемент учун ($\|\delta x)\| \leqslant \delta$ муносабатни назарда тутсак) ушбу

$$\delta \|T_n x\| = \|T_n(\delta x)\| \leqslant \varepsilon,$$

яъни

$$\|T_n x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Оператор нормасининг таърифига асосан, ушбу

$$\|T_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$$

тенгсизлик ихтиёрий n учун ўринлидир.*

II. Хан—Банах теоремаси.

2-теорема. *Нормаланган E фазонинг E_0 вектор қисм фазосида узлуксиз f_0 чизиқли функционал берилган бўлсин. У ҳолда E фазода қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи узлуксиз f чизиқли функционал мавжуд:*

1) $f|_{E_0} = f_0$;

2) $\|f\| = \|f_0\|$.

Исбот. E фазода ушбу $p(x) = \|f_0\| \cdot \|x\|$ яримнормани киритамиз (аслида $p(x)$ — нормадир). Бу ҳолда ихтиёрий $x \in E_0$ элемент учун $|f_0(x)| \leqslant \|f_0\| \cdot \|x\| = p(x)$. 5.3-§ даги Хан — Банах теоремасига асосан қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи f чизиқли функционал мавжуд:

1) $f|_{E_0} = f_0$;

2) ихтиёрий $x \in E$ элемент учун $|f(x)| \leqslant p(x)$.

Демак,
$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} p(x) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f_0\| \cdot \|x\| = \|f_0\|,$$

яъни
$$\|f\| \leqslant \|f_0\|.$$

Бу муносабатдан f функционалнинг чегараланганлиги ва, демак, узлуксизлиги келиб чиқади. Ва ниҳоят,
$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in E_0}} |f(x)| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in E_0}} |f_0(x)| = \|f_0\|.$$

Демак, $\|f\| = \|f_0\|$.*

III. $L(E, F)$ фазонинг тўлалиги.

3-теорема. *E нормаланган фазо, F Банах фазоси бўлса, у ҳолда $L(E, F)$ фазо операторнинг нормасига нисбатан Банах фазосидир.*

Исбот. $L(E, F)$ фазонинг нормаланган фазолиги кўрсатилган эди. Бу фазо тўла эканлигини исботлаймиз. $\{T_n\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлсин, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N натурал сон мавжудки, ихтиёрий, n, $m \geqslant N$ натурал сонлар учун ушбу тенгсизлик ўринлидир:
$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Ихтиёрий $x(\|x\| \leqslant 1)$ элемент учун ушбу
$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \qquad (1)$$

тенгсизликдан $\{T_n x\}$ кетма-кетликнинг F фазода фундаментал эканлиги келиб чиқади. F фазо тўла бўлгани учун $Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x$ мавжуд. Ихтиёрий $z \in E$ элементни ушбу $z = \lambda x_0(\|x_0\| \leqslant 1)$ кўринишда ёзиш мумкин. Демак,
$$T_n z = T_n \lambda x_0 = \lambda T_n x_0 \to \lambda T x_0.$$

Бу z учун $Tz = \lambda T x_0$ деб оламиз. Бу билан $T: E \to F$ операторни аниқладик. Равшанки, T — чизиқли оператор. Энди T операторнинг узлуксизлигини кўрсатамиз. Бунинг учун T нинг чегараланган эканлигини исботлаш кифоядир. (1) тенгсизликда m бўйича лимитга ўтсак, ушбу
$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon \qquad (2)$$

муносабат келиб чиқади. Демак,

$$\|Tx\| = \|T_n x - (T_n x - Tx)\| \leqslant \|T_n x\| + \|T_n x - Tx\| \leqslant$$
$$\leqslant \|T_n x\| + \varepsilon \leqslant \|T_n\| + \varepsilon.$$

$\{T_n\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлгани учун $\{\|T_n\|\}$ кетма-кетлик чегараланган, яъни шундай M сон мавжудки, ихтиёрий n учун $\|T_n\| \leqslant M$. Демак, ихтиёрий $x(\|x\| \leqslant 1)$ элемент учун

$$\|Tx\| \leqslant M + \varepsilon.$$

бундан

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| \leqslant M + \varepsilon.$$

Шундай қилиб, T — чегараланган.

Энди юқоридаги (2) тенгсизлик ихтиёрий $x(\|x\| \leqslant 1)$ элемент учун ўринли эканлигини ҳисобга олсак, $n > N$ бўлганда ушбу

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon$$

муносабат келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n - T\| = 0,$$

яъни T_n кетма-кетлик норма бўйича T операторга яқинлашувчи экан.$_*$

Натижа. Ихтиёрий нормаланган E фазо учун $E' = L(E, K)$ қўшма фазо функционалнинг нормасига нисбатан Банах фазосидир.

Бу натижа $K=(R$ ёки $C)$ фазонинг тўлалигидан бевосита келиб чиқади.

IV. **Тескари оператор ҳақидаги теорема.**

4-теорема. *E ва F Банах фазолари бўлиб, $T: E \to F$ чизиқли изоморфизм бўлсин. Агар T узлуксиз оператор бўлса, у ҳолда T^{-1} ҳам узлуксиз чизиқли оператордир.*

Исбот. B-фазолар Ф-фазоларнинг хусусий ҳоли бўлгани учун бу теорема 7.2-§ даги 5-теоремадан бевосита келиб чиқади.

1-натижа. T_0 оператор E Банах фазосини F Банах фазосига акслантирувчи чегараланган чизиқли оператор бўлиб, T_0^{-1} унга тескари оператор бўлсин. $\Delta T: E \to F$ бирон чегараланган оператор бўлиб, $\|\Delta T\| < \frac{1}{\|T_0^{-1}\|}$ тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда $(T_0 + \Delta T)^{-1}$ оператор мавжуд ва чегараланган.

Исбот. Ихтиёрий $y \in F$ элементни оламиз ва ушбу

$$Bx = T_0^{-1} y - T_0^{-1} \Delta T x$$

формула билан аниқланган $B: E \to E$ акс эттиришни кўрамиз. Ихтиёрий $x_1, x_2 \in E$ учун

$$\|Bx_1 - Bx_2\| = \|T_0^{-1} \Delta T x_2 - T_0^{-1} \Delta T x_1\| \leqslant$$
$$< \|T_0^{-1} \Delta T\| \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

$\|\Delta T\| < \frac{1}{\|T_0^{-1}\|}$ тенгсизликдан B акс эттириш қисқартириб акс эттириш эканлиги бевосита келиб чиқади. Қисқартириб акс эттириш принципига асосан ушбу

$$x = Bx$$

шартни қаноатлантирувчи ягона нуқта топилади (2.9-§), яъни

$$x = Bx = T_0^{-1} y - T_0^{-1} \Delta T x,$$

демак,

$$T_0 x + \Delta T x = y.$$

Шундай қилиб, ихтиёрий $y \in F$ учун $T_0 x + \Delta T x = y$ тенглама ягона ечимга эга, яъни $(T_0 + \Delta T)^{-1}$ мавжуд. Тескари оператор ҳақидаги теоремага асосан $(T_0 + \Delta T)^{-1}$ — чегараланган оператор.*

2-натижа. E Банах фазосида I бирлик оператор, $T: E \to F$ чегараланган ва $\|T\| < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи оператор бўлсин. У ҳолда $(I - T)^{-1}$ оператор мавжуд бўлиб, у чегараланган ва ушбу кўринишга эга:

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Исбот. $(I - T)^{-1}$ мавжудлиги ва чегараланганлиги 1-натижадан бевосита келиб чиқади: ($T = I$, $\Delta T = T$).

$\|T\| < 1$ тенгсизликдан $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k < \infty$. E фазо тўла бўлгани учун $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\|$ қаторнинг яқинлашувчи эканлигидан $\sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k$ қаторнинг йиғиндиси ҳам чегараланган операторлиги келиб чиқади, чунки бу ҳолда 3-теоремага асосан $L(E, E)=L(E)$ — Банах фазоси. Ихтиёрий n учун ушбу

$$(I-T)\sum_{k=0}^{n} T^k=\sum_{k=0}^{n} T^k(I-T)=I-T^{n+1}$$

тенглик ўринли. Энди $\|T^{n+1}\|\leqslant\|T\|^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ муносабатдан

$$(I-T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k=\sum_{k=0}^{\infty} T^k(I-T)=I,$$

яъни

$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

келиб чиқади.*

Тескари оператор ҳақидаги яна бир иборани келтиришдан олдин қуйидаги леммани исботлаймиз.

Лемма. E нормаланган фазо, F Банах фазоси бўлсин, E фазонинг ҳамма ерида зич E_0 вектор қисм фазода аниқланган ихтиёрий чегараланган $T_0: E_0\to F$ чизиқли операторни унинг нормасини сақлаган ҳолда бутун E фазога ягона равишда давом эттириш мумкин.

Исбот. Ихтиёрий $x\in E$ учун унга яқинлашувчи $\{x_n\}\subset E_0$ кетма-кетлик мавжуд. F фазода $\{T_0x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликни кўрамиз. Ушбу

$$\|T_0x_n-T_0x_m\|\leqslant\|T_0\|\cdot\|x_n-x_m\|$$

тенгсизликка асосан $\{T_0x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик фундаменталдир ва F тўла бўлгани сабабли у бирор $\lim\limits_{n\to\infty} T_0x_n\in F$ лимитга эга. Бу лимит x элементга яқинлашувчи кетма-кетликка боғлиқ эмас, чунки агар $x_n'\to x$ бошқа бир кетма-кетлик бўлса, у ҳолда

$$\|T_0x_n'-T_0x_n\|\leqslant\|T_0\|\cdot\|x_n'-x_n\|\to 0,$$

яъни

$$\lim_{n\to\infty} T_0x_n'=\lim_{n\to\infty} T_0x_n.$$

Энди биз $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_0x_n$ деб олсак, у ҳолда T оператор x элементда аниқланган бўлиб, у шу тарзда бутун E фазога давом эттирилади. Равшанки, бу оператор чизиқли. Ушбу

$$\|T_0x_n\| \leqslant \|T_0\|\cdot\|x_n\|$$

тенгсизликда n бўйича лимитга ўтсак, $\|Tx\| \leqslant \|T_0\|\cdot\|x\|$ тенгсизлик, яъни $\|T\| \leqslant \|T_0\|$ муносабат келиб чиқади. Иккинчи томондан, T оператор T_0 нинг давоми бўлгани учун $\|T\| \geqslant \|T_0\|$, яъни $\|T\| = \|T_0\|$. Ниҳоят, T операторнинг ягоналигини исботлаймиз. Агар T' оператор T_0 нинг бошқа бир давоми бўлса, у ҳолда

$$T'x_n = T_0x_n = Tx_n.$$

Бу ерда n бўйича лимитга ўтсак, $T'x = Tx$, яъни $T' = T$ келиб чиқади.$_*$

Натижа. Агар E нормаланган фазони F Банах фазосига акслантирувчи T чизиқли оператор E нинг ҳамма ерида зич тўпламда нолга тенг бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x \in E$ учун $Tx = \theta$.

Энди исботланган леммадан фойдаланиб, тескари оператор ҳақидаги қуйидаги теоремани исботлаймиз.

5-теорема. *E, F Банах фазолари бўлиб, $T: E \to F$ чизиқли оператор бўлсин. T оператор чегараланган тескари операторга эга бўлиши учун қуйидаги икки шарт зарур ва кифоядир:*

1) $\operatorname{Im} T = \{Tx : x \in E\}$ *тўплам F нинг ҳамма ерида зич;*

2) бирор $C > 0$ сон ва ихтиёрий $x \in E$ учун

$$\|Tx\| \geqslant C\|x\|.$$

Исбот. Зарурлиги. Агар $T^{-1}: F \to E$ чегараланган бўлса, равшанки, $T(E) = \operatorname{Im} T = F$ ва $\|T^{-1}y\| \leqslant M\cdot\|y\|$, $y \in F$, $M > 0$. Бу ҳолда ихтиёрий $x \in E$ учун

$$\|T^{-1}(Tx)\| \leqslant M\|Tx\|,$$

яъни $\|x\| \leqslant M\|Tx\|$, бундан

$$\|Tx\| \geqslant \frac{1}{M}\|x\| = C\|x\| \ (C = \frac{1}{M} > 0).$$

Кифоялиги. Теореманинг шартлари бажарилган бўлса, T — мономорфизмдир, яъни $\ker T = \{\theta\}$. Дарҳақиқат агар $Tx = \theta$ бўлса, у ҳолда 2) шартга асосан $\|Tx\| \geqslant C\|x\|$, демак $\|x\| = 0$, яъни $x = \theta$. Шунинг учун $\operatorname{Im} T \subset F$ тўпламда T^{-1} оператор аниқланган. Бу оператор чегаралана ган. Ҳақиқатан, ихтиёрий $y = Tx \in \operatorname{Im} T$ учун 2) шартга асосан

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leqslant \frac{1}{C}\|Tx\| = \frac{1}{C}\|y\|.$$

Леммага асосан бу операторнинг нормасини сақлаган ҳолда бутун F фазога давом эттириш мумкин. Ҳосил бўлган оператор T оператор учун тескари оператордир.*

7.5-§. Чизиқли операторлар фазосида топологиялар

E ва F локал қаварик фазолар бўлиб, улардаги топологияларни аниқловчи яримнормалар системаси мос равишда $\{p\}$ ва $\{q\}$ бўлсин.

I. Оддий яқинлашиш топологияси (*нуқталарда яқинлашиш топологияси, s-топология*). *$L(E, F)$ фазодаги оддий яқинлашиш топологияси* деб, ушбу

$$r(T) = r(T, x_1, x_2, \ldots, x_n, q) = \sup_{1 < k \leqslant n} q(Tx_k)$$

яримнормалар билан аниқланган локал қаварик топологияга айтилади, бу ерда

$$T \in L(E, F),\ q \in \{q\},\ \{x_k\}_{k=1}^{n} \subset E.$$

$L(E,F)$ фазо оддий яқинлашиш топологияси билан қурилганда бу фазо $L_s(E,F)$ билан белгиланади. Агар $\{T_n\} \subset L(E,F)$ кетма-кетлик T операторга шу топология бўйича яқинлашса, буни ушбу кўринишда белгилаймиз:

$$T_n \xrightarrow{s} T.$$

Қуйидаги теорема таърифдан бевосита келиб чиқади.

1-теорема. *Қуйидаги икки ибора эквивалентдир:*

1) $T_n \xrightarrow{s} T$, T_n, $T \in L(E,F)$;

2) *ихтиёрий $x \in E$ элемент учун $T_n x$ кетма-кетлик F фазода Tx элементга яқинлашади.*

II. Текис яқинлашиш топологияси. (*b-топология*). Энди $L(E,F)$ фазода локал қаварик топологияни бошқачароқ киритамиз. $\Omega = \{B\}$ система E фазодаги чегараланган тўпламлар системаси бўлсин. T чизиқли операторнинг яримнормасини ушбу формула билан аниқлаймиз.

$$r(T) = r(T, B, q) = \sup_{x \in B} q(Tx),$$

бу ерда $T \in L(E,F)$, $q \in \{q\}$, $B \in \mathfrak{Q}$. Киритилган $\{r\}$ яримнормалар системаси локал қавариқ топологияни аниқлайди. Бу топология *b-топология* ёки *чегараланган яқинлашиш топологияси* (ёки *текис яқинлашиш топологияси*) дейилади. $L(E,F)$ фазо b-топология билан олинганда уни $L_b(E,F)$ билан белгилаймиз.

Таърифдан бевосита қуйидаги теорема келиб чиқади.

2-теорема. *Қуйидаги икки ибора эквивалентдир:*

1) $T_n \xrightarrow{b} T, T_n, T \in L(E,F)$;

2) *F фазодаги θ элементнинг ихтиёрий U атрофи ва ихтиёрий $B \in \mathfrak{Q}$ тўплам учун шундай $N = N(U,B)$ натурал сон мавжудки, ушбу*

$$T_n x - Tx \in U$$

муносабат ихтиёрий $x \in B$ элемент ва $n \geqslant N$ натурал сон учун бажарилади.

Агар E ва F нормаланган фазолар бўлса, оддий яқинлашиш топологияси *операторларнинг кучли топологияси* дейилади, чегараланган яқинлашиш топологияси эса *операторларнинг текис топологияси* дейилади.

Ихтиёрий чекли тўплам чегараланган бўлгани учун b-топология s-топологиядан кучлироқдир.

Таъриф. E топологик вектор фазода $\{x_n\}$ кетма-кетлик ва $x \in E$ берилган бўлсин. Агар нолнинг ихтиёрий U атрофи учун шундай $N(U)$ натурал сон топилсаки, барча $n \geqslant N(U)$ (n, $m \geqslant N(U)$) учун $x - x_n \in U$ ($x_m - x_n \in U$) муносабат бажарилса, x_n кетма-кетлик x элементга *яқинлашувчи (фундаментал)* дейилади.

Таъриф. Агар топологик вектор фазода ихтиёрий фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у *секвенциал тўла фазо* дейилади.

3-теорема. *E ва F Банах фазолари бўлса, $L_s(F,E)$ секвенциал тўла фазодир.*

Исбот. Банах фазолари Ф-фазоларнинг хусусий ҳоли бўлгани учун бу теорема 7.2- § даги 3-теореманинг натижасидир. $*$

4-теорема. *E ва F нормаланган фазолар бўлсин. Бу ҳолда $L(E, F)$ фазодаги операторларнинг текис топологияси $L(E, F)$ фазода операторларнинг нормаси билан аниқланган топологияга тенг кучли.*

Исбот. Равшанки, нормаланган E фазода B тўплам чегараланган бўлиши учун ушбу

$$\beta = \sup\{\|x\| : x \in B\} < \infty$$

муносабат зарур ва кифоядир. Демак, $B\in\Omega$ тўплам сифатида $B_1=\{x\in E: \|x\|\leqslant 1\}$ шарни олсак, қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$r(T, B_1, \|\cdot\|) = \sup_{x\in B_1}\|Tx\| = \|T\|.$$

Демак, операторларнинг текис топологияси норманинг топологиясидан кучлироқдир.

Энди текис топологияда θ элементнинг U атрофини оламиз, яъни

$$U=\{T: r(T, B, \|\cdot\|)<\varepsilon\} = \{T: \sup_{x\in B}\|Tx\| < \varepsilon\}\supset$$

$$\supset\{T: \sup_{\|x\|\leqslant\beta}\|Tx\|<\varepsilon\} = \{T: \beta\|T\|<\varepsilon\} = \{T: \|T\|<\frac{\varepsilon}{\beta}\}.$$

Бундан кўриниб турибдики, норманинг топологияси текис топологиядан кучлироқдир. Демак, бу топологиялар тенг кучли.*

Нормаланган фазоларда операторларнинг s-топологияда (яъни кучли топологияда) яқинлашиш шартини текширишда қуйидаги теорема фойдалидир.

5-теорема. *E Банах фазосини F Банах фазосига акс эттирувчи чегараланган чизиқли операторларнинг $\{T_n\}$ кетма-кетлиги берилган бўлсин $\{T_n\}$ кетма-кетлик бирон T операторга s-топологияда яқинлашиши учун қуйидаги икки шарт зарур ва кифоядир:*

1) $\{\|T_n\|\}$ *сонлар кетма-кетлиги чегараланган (яъни бирор $M>0$ учун* $\|T_n\|\leqslant M$, $n=1,2\cdots$);

2) *E фазода тўла бўлган* (4.1-§) *бирор Δ тўпламнинг ихтиёрий x элементи учун $n\to\infty$ да $T_nx\to Tx$.*

Исбот. Зарурлиги. 1) шарт 7.4- § даги Банах—Штейнхаус теоремасидан, 2) шарт эса таърифдан бевосита келиб чиқади.

Кифоялиги. Δ тўпламнинг E фазода тўлалиги унинг чизиқли қобиғи бўлган $L[\Delta]$ тўпламнинг E фазода зичлигидан иборатлигини эслайлик. 1) ва 2) шартлар бажарилган бўлсин. У ҳолда $\{T_n\}$ операторлар чизиқли бўлгани туфайли ушбу

$$T_nx\longrightarrow Tx$$

муносабат $L[\Delta]$ тўпламнинг ҳар бир x элементи учун ҳам бажарилади. Энди x_0 элемент E фазонинг ихтиёрий элементи бўлсин. $L[\Delta]$ тўплам E фазода зич бўлгани учун x_0 элементга яқинлашувчи $\{x_n\}\subset L\ [\Delta]$ кетма-кетлик мавжуд. 1) шартга асосан ушбу

$$\|T_n\|\leqslant M$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи M сон мавжуд. $M_0=\max(M, \|T\|)$ белгилаш киритамиз.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик x_0 га яқинлашувчи бўлгани сабабли ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай N натурал сон топиладики, ушбу

$$\|x_k-x_0\|<\varepsilon$$

тенгсизлик ихтиёрий $k>N$ натурал сон учун бажарилади. Демак, ушбу муносабатлар ўринлидир:

$$\|T_nx_0-Tx_0\|\leqslant\|T_nx_0-T_nx_k\|+\|T_nx_k-Tx_k\|+\|Tx_k-Tx_0\|\leqslant\|T_n\|\cdot\|x_0-x_k\|+\|T_nx_k-Tx_k\|+\|T\|\cdot\|x_k-x_0\|<M_0\varepsilon+\|T_nx_k-Tx_k\|+M_0\varepsilon=2M_0\varepsilon+\|T_nx_k-Tx_k\|.$$

Аммо ҳар бир x_k элемент $L\ [\Delta]$ га тегишли бўлгани учун $n\to\infty$ да ушбу

$$\|T_nx_k-Tx_k\|\to0$$

муносабат келиб чиқади, бундан

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nx_0-Tx_0\|\leqslant2M_0\varepsilon$$

ε ихтиёрий кичик сон булгани учун

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nx_0-Tx_0\|=0,$$

яъни $T_n\xrightarrow{s}T$.*

Энди юқорида киритилган $L(E,F)$ фазодаги топологияларни $L(E,K)=E'$ фазода қурамиз. E' фазо $L(E,F)$ фазонинг хусусий ҳоли бўлса-да, s-топология ва b-топология бу фазода бошқа номларга эгадир.

E локал қавариқ фазо бўлиб, $E'=L(E,K)$ унинг қўшма фазоси бўлсин.

E' фазода оддий яқинлашиш топологияси *суст топология* дейилади ва $\sigma(E',E)$ билан белгиланади. E' фазо $\sigma(E',E)$ топология билан олинса, уни биз $E'_w{}^*$ билан белгилаймиз. Қулайлик учун f функционалнинг x элементдаги қиймати $f(x)$ ни $\langle x,f\rangle$ билан белгилаймиз. Таърифга биноан $\sigma(E',E)$ топология қуйидаги кўринишдаги яримнормалар билан аниқланади:

$$r(f)=r(f;x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|f(x_i)|=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|\langle x_i,f\rangle|,$$

бу ерда $f \in E'$, $x_i \in E$, $i = 1,2,\cdots,n$. Демак, $E'_w{}^*$ фазода θ элементнинг атрофлари базисини ушбу

$$U(\varepsilon, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{f \in E' : | < x_i, f > | < \varepsilon, \\ i = 1,2, \ldots, n\}$$

кўринишдаги тўпламлар ҳосил қилади.

E' фазода чегараланган яқинлашиш топологияси *кучли топология* дейилади ва b билан белгиланади. E' фазо b-топология билан олинганда, уни $(E', b) = E'_b$ билан белгилаймиз. Бу топология ушбу

$$r(f, B) = \sup_{x \in B} | < x, f > |$$

кўринишдаги яримнормалар ёрдамида аниқланади, бу ерда B — чегараланган тўплам, $f \in E'$. Ноль элементнинг атрофлари базисини қуйидагича ёзамиз:

$$U(\varepsilon, B) = \{f \in E' : \sup_{x \in B} | < x, f > | < \varepsilon, \varepsilon > 0, B \in \Omega.\}.$$

Юқорида чизиқли операторлар учун исботланган теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

1) E' фазода $\{f_n\}$ кетма-кетлик $f \in E'$ элементга суст яқинлашиши учун ушбу

$$f_n(x) \to f(x)$$

муносабат ихтиёрий $x \in E$ да бажарилиши зарур ва кифоядир.

2) b-топология $\sigma(E', E)$-топологиядан кучлироқ.

3) E нормаланган фазо бўлса, у ҳолда E' фазодаги b-топология шу фазодаги норманинг (функционалнинг нормаси) топологияси билан тенг кучлидир. Хусусан, $(E', b) = (E', \|\cdot\|)$ Банах фазосидир (7.4-§ даги 3-теореманинг натижаси).

4) E Банах фазоси бўлсин. $\{f_n\} \subset E'$ кетма-кетлик $f \in E'$ элементга суст яқинлашиши учун қуйидаги икки шарт зарур ва кифоядир:

а) $\{\|f_n\|\}$ — чегараланган кетма-кетлик;

б) E фазода тўла бўлган бирор Δ тўпламнинг ихтиёрий x элементи учун ушбу

$$f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

муносабат ўринли.

Текис чегараланганлик принципидан ва 3- теоремадан қуйидаги теоремалар мос равишда келиб чиқади.

6-теорема. *E Банах фазоси бўлиб, ихтиёрий $x \in E$ учун $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, у ҳолда $\{\|f_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик ҳам чегаралангандир.*

7-теорема. *E Банах фазоси бўлса, $E_w^* = (E', \sigma(E', E))$ фазо секвенциал тўладир, яъни E' фазода суст топологиядаги ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик суст яқинлашувчидир.*

Мисоллар. 1. Сепарабел Гильберт фазосида 7.3-§, 6-мисолдаги T операторни кўрамиз. Бунда $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ элемент учун

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i \xi_i) e_i, \quad (|\lambda_i| < C, \ i = 1, 2, \dots).$$

Энди T_n операторни ушбу

$$T_n x = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_i - \frac{i}{n+i} \right) \xi_i e_i$$

кўринишда аниқлаймиз. Операторларнинг $\{T_n\}$ кетма-кетлиги T га s-топологияда яқинлашади. Дарҳақиқат, 7.3-§ даги 6-мисолга биноан

$$\|T_n\| = \sup_i \left|\lambda_i - \frac{i}{n+i}\right| \leqslant \sup|\lambda_i| + 1 = \|T\| + 1,$$

яъни $\{\|T_n\|\}$ кетма-кетлик чегараланган. Ихтиёрий e_i учун $n \to \infty$ да

$$\|T_n e_i - T e_i\| = \left\|\left(\lambda_i - \frac{i}{n+i}\right) e_i - \lambda_i e_i\right\| = \left|\frac{i}{n+i}\right| \to 0.$$

Ортонормал $\{e_i\}$ базис E фазода тўла тўплам бўлгани сабабли 5-теоремага асосан $T_n \to T$. Аммо $\{T_n\}$ кетма-кетлик T га b-топологияда (яъни, 4-теоремага асосан норма бўйича) яқинлашмайди. Ҳақиқатан, ихтиёрий n учун

$$\|T_n - T\| = \sup_i \left|\left(\lambda_i - \frac{i}{n+i}\right) - \lambda_i\right| = \sup_i \frac{i}{n+i} = 1 \not\to 0.$$

2. Агар 1-мисолда T_n операторни ушбу

$$T_n x = \sum \left(\lambda_i - \frac{1}{n}\right) \xi_i e_i$$

кўринишда олсак, у ҳолда

$$\|T_n - T\| = \sup_i |(\lambda_i - \frac{1}{n}) - \lambda_i| = \frac{1}{n} \to 0,$$

яъни $T_n \xrightarrow{b} T$.

3. $E = [C - 1, 1]$ узлуксиз функцияларнинг нормаланган фазоси бўлсин. Бу фазода δ чизиқли функционални қуйидагича киритамиз:

$$\delta(x) = x(0),\ x \in C[-1,1].$$

Равшанки, $\delta \in E'$. Бу фазода олинган $\{\varphi_n(t)\}$ кетма-кетлик ушбу шартларни қаноатлантирсин:

1) $\varphi_n(t) = 0$, $|t| > \frac{1}{n}$ учун; $\varphi_n(t) \geqslant 0$, $t \in [-1,1]$ учун;

2) $\int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(t)\,dt = 1$.

φ_n функциялар ёрдамида f_n чизиқли функционални қуйидагича киритамиз:

$$f_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(t)\,x(t)\,dt.$$

Равшанки, $f_n \in E'$. Математик анализдан маълум бўлган ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан ихтиёрий $x \in C[-1, 1]$ учун

$$f_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(t)\,x(t)\,dt = \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,x(t)\,dt =$$

$$= x(t_n) \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,dt = x(t_n),$$

бу ерда $-\frac{1}{n} \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{n}$. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x(t_n) = x(0) = \delta(x).$$

Шунинг учун $\{f_n\}$ кетма-кетлик δ функционалга суст топологияда яқинлашади.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. H Гильберт фазосида H_1 қисм фазони оламиз. Маълумки, ихтиёрий $h\in H$ элемент ягона усулда ушбу кўринишда тасвирланади:

$$h=h_1+h_2 \quad (h_1\in H_1,\ h_2\in H_1^{\perp}).$$

P проекторни ушбу

$$Ph=h_1$$

тенглик билан аниқлаймиз. P нинг узлуксизлигини исботланг.

2. $C[a, b]$ фазода T операторни қуйидагича аниқлаймиз:

$$T\varphi(t)=\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds,$$

бу ерда $k(t,s)$—икки ўзгарувчининг узлуксиз функцияси.

а) T оператор $L(C[a,b])$ нинг элементи эканлигини исботланг;

б) $C[a,b]$ фазода икки хил норма киритамиз:

1) $\|\varphi\|=\max\limits_{t\in[a,\,b]}|\varphi(t)|$;

2) $\|\varphi\|=\left[\int_a^b \varphi^2(t)\,dt\right]^{1/2}$.

Юқоридаги T оператор иккала нормада ҳам узлуксизлигини исботланг.

3. а) E, F, L топологик вектор фазолар. $A: E\to F$, $B: F\to L$ узлуксиз чизиқли операторлар бўлсин. У ҳолда $Cx=B(Ax)=B\circ A(x)$ оператор ҳам узлуксиз чизиқли оператор эканлигини исботланг;

б) агар A оператор $\mathrm{dom}\,A\subset E$ тўпламда, B оператор $\mathrm{dom}\,B\subset F$ тўпламда аниқланган бўлса,

$$\mathrm{dom}C=\mathrm{dom}A\cap A^{-1}(\mathrm{dom}\ B)$$

муносабатни исботланг;

в) агар $\mathrm{dom}\,A$ ва $\mathrm{dom}\,B$ вектор қисм фазолар бўлса, у ҳолда $\mathrm{dom}\,C$ ҳам E нинг вектор қисм фазоси эканлигини исботланг.

4. E, F нормаланган фазолар бўлиб, $A: E \to F$ узлуксиз оператор бўлса, у ҳолда унинг графиги бўлган grA тўплам $E \times F$ нинг ёпиқ қисми эканлигини исботланг.

5. E ва F фазолар сифатида $C[a,b]$ фазони оламиз. $D=\{x(t) \in E: x'(t) \subset E\}$ белгилаш киритамиз. D тўпламда T чизиқли операторни ушбу формула билан аниқлаймиз:

$$Tx=x'.$$

T оператор ёпиқ, аммо узлукли эканлигини исботланг.

6. $T: E \to F$ ёпиқ оператор бўлиб, T^{-1} тескари оператор мавжуд бўлсин. T^{-1} операторнинг ҳам ёпиқлигини исботланг,

7. X вектор фазода τ_1 ва τ_2 топологиялар берилган бўлиб, X уларнинг ҳар бирига нисбатан Ф-фазо бўлсин. Агар τ_1 топология τ_2 топологиядан кучлироқ бўлса, у ҳолда τ_1 ва τ_2 топологиялар тенг кучлидир, яъни $\tau_1=\tau_2$. Исботланг.

8. E, F, L нормаланган фазолар бўлиб, $A: E \to F$, $B: F \to L$ чегараланган чизиқли операторлар бўлсин. Ушбу тенгсизликни исботланг:

$$\|B \circ A\| \leqslant |B\| \cdot \|A\|.$$

9. $E=R^n$ ва $F=R^n$ фазоларда мос равишда қуйидаги нормалар берилган бўлсин:

$$\|x\|=\sum_{l=1}^{n} |\xi_i|, \quad \|y\|=\sum_{l=1}^{m} \||\eta_i|, \; x \in R^n, \; y \in R^m.$$

$A=(a_{ij}): E \to F$ чизиқли операторнинг нормасини ҳисобланг.

10. E, F Банах фазолари, $A_o: E \to F$ узлуксиз чизиқли оператор бўлиб, унинг узлуксиз A_o^{-1} тескари оператори мавжуд бўлсин. Агар $A \in L(E, F)$ оператор $\|A\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда $A_o + A$ оператор ҳам узлуксиз тескари операторга эга эканлигини исботланг.

11. H Гильберт фазосида H_o қисм фазони олиб, H_o га проекторни P билан белгилаймиз. Проекторнинг қуйидаги хоссаларини исботланг:

а) ихтиёрий $x \in H$ элемент учун Px ва $x-Px$ ўзаро ортогонал элементлардир;

б) $Px=x$ тенглик бажарилиши учун $x \in H_o$ муносабат зарур ва кифоя;

в) $Px = \theta$ тенглик бажарилиши учун $x \perp H_0$ муносабат зарур ва кифоя;

г) агар H_0 фазо $\{\theta\}$ дан фарқли бўлса, P нинг нормаси бирга тенг.

12. H Гильберт фазосида чегараланган $P: H \to H$ чизиқли оператор берилган бўлсин. P проектор бўлиши учун ушбу шартлар зарур ва кифоядир.

а) $P^2 = P$;

б) $\|P\| \leq 1$.

13. E, F локал қаварик фазолар бўлиб, B тўплам E фазонинг чегараланган қисми, q эса F фазода яримнорма бўлсин. Иктиёрий $A \in L\,(E, F)$ учун ушбу

$$r(A) = r(A, B, q) = \sup_{x \in B} q(Ax)$$

чекли сон бўлиб, унинг ярим норма эканлигини исботланг.

VIII боб

ЧИЗИҚЛИ ФУНКЦИОНАЛЛАР ВА ҚЎШМА ФАЗО

8.1 -§. Нормаланган фазоларда чизиқли функционаллар ва гипертекисликлар

1. **Чизиқли функционаллар ва гипертекисликлар орасида боғланиш.** E нормаланган фазо бўлиб, $f: E \to K$ чизиқли функционал ва $H = \ker f = f^{-1}(0)$ унинг ядроси бўлсин. Равшанки, H тўплам E нинг вектор қисм фазоси, a вектор H га тегишли бўлмаган ихтиёрий вектор бўлсин, яъни $f(a) \neq 0$. У ҳолда ихтиёрий $x \in E$ элемент учун ушбу

$$y = x - \frac{f(x)}{f(a)} a$$

вектор H нинг элементидир, чунки $f(y) = 0$. Демак, ихтиёрий $x \in E$ вектор ушбу

$$x = \lambda a + y \left(\lambda = \frac{f(x)}{f(a)}, y \in H\right)$$

кўринишда ёзилади. Бундай тасвирлаш бир қийматлидир. Ҳақиқатан, x бошқа бир

$$x = \mu a + y_1 \quad (\mu \in K,\ y_1 \in H)$$

кўринишда ҳам тасвирланса, у ҳолда

$$f(x) = \mu f(a) = \lambda f(a),$$

бундан $f(a) \neq 0$ бўлгани учун $\mu = \lambda$ ва демак, $y_1 = y$. Шунинг учун E фазо қуйидаги тўғри йиғинди (1,5- §) кўринишида тасвирланади:

$$E = Ka \oplus H.$$

Хусусан, $E/H \eqsim Ka$, яъни $\operatorname{codim} H = 1$ (1.5- §).

Таъриф. E вектор фазонинг H қисм фазоси учун $\operatorname{codim} H = 1$ бўлса, H *гипертекислик* дейилади.

Демак, юқоридаги мулоҳазаларга биноан нолдан фарқли ихтиёрий чизиқли функционал учун $H = \ker f$ қисм фазо E даги гипертекисликдир.

Аксинча, E фазода ихтиёрий H гипертекислик $f^{-1}(0) = H$ шартни қаноатлантирувчи бирор чизиқли функционални аниқлайди.

Дарҳақиқат, $\operatorname{codim} H = 1$ бўлгани туфайли иктиёрий $a \notin H$ учун

$$E = Ka \oplus H$$

тенглик ўринлидир, яъни ихтиёрий $x\in E$ қуйидаги кўринишда ёйилади:

$$x=\lambda a+h,\ h\in H,\ \lambda\in K.$$

Функционални бу элементда қуйидагича аниқлаймиз:

$$f(x)=\lambda.$$

Бевосита кўриниб турибдики f чизиқли функционал ва $f^{-1}(0)=H$.

Агар бошқа бир g чизиқли функционал учун ҳам $H=g^{-1}(0)$ бўлса у ҳолда шундай $\alpha\in K$ мавжудки, $g=\alpha f$. Ҳақиқатан,

$$g(x)=g(\lambda a+h)=\lambda g(a)=f(x)g(a)=\alpha f(x),$$

бу ерда $\alpha=g(a)$.

Ушбу $f(x)=0$ тенглама H *гипертекисликнинг тенгламаси* дейилади.

E топологик вектор фазода ихтиёрий H гипертекислик ёки ёпиқ, ёки E нинг ҳамма ерида зич. Дарҳақиқат, топологик вектор фазода қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари узлуксиз бўлгани сабабли E нинг вектор қисм фазосининг ёпилмаси ҳам вектор қисм фазодир. Демак, H нинг ёпилмаси $\overline{H}$ ҳам E нинг қисм фазоси. H гипертекислик бўлгани сабабли уни ўз ичига олувчи E дан фарқли қисм фазо мавжуд эмас. Бундан

$$\overline{H}=H \text{ ёки } \overline{H}=E.$$

1-теорема. *E нормаланган фазо бўлсин. $f(x)=0$ тенглама H гипертекисликнинг тенгламаси бўлсин. f чизиқли функционал узлуксиз бўлиши учун H ёпиқ бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурлиги. f узлуксиз чизиқли функционал ва $\{0\}$ тўплам K майдоннинг ёпиқ қисми бўлгани учун $f^{-1}(0)=H$ ёпиқдир.

Кифоялиги. H ёпиқ гипертекислик бўлиб, $f(x)=0$ унинг тенгламаси бўлсин. Ушбу

$$f(a)=1$$

шартни қаноатлантирувчи $a\in E$ элементни олсак, равшанки, $a+H$ ҳам ёпиқ тўпламдир ва $\theta\notin a+H$, чунки ихтиёрий $z=a+h$ $(h\in H)$ элемент учун $f(z)=f(a)=1$. Демак, θ элементнинг $a+H$ билан кесишмайдиган $B_\varepsilon=\{x:\|x\|\leqslant\varepsilon\}$ атрофи мавжуд, яъни

$$B_\varepsilon\cap(a+H)=\varnothing. \qquad (1)$$

Ихтиёрий $x\in B_\varepsilon$ учун $f(x)\neq 1$, чунки, агар $f(x)=1$ бўлса эди, у ҳолда $f(x-a)=f(x)-f(a)=0$, яъни $x\in a+H$; бу эса (1) га зид.

B_ε шарнинг ихтиёрий x элементи учун ушбу $|f(x)|<1$ тенгсизликни исботлаймиз. Аксинча, бирор $x_0\in B_\varepsilon$ элемент учун $|f(x_0)|=\alpha>1$ тенгсизлик бажарилсин деб фараз қилайлик. У ҳолда $f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)=1$ ва $\left\|\frac{x_0}{\alpha}\right\|=\frac{\|x_0\|}{\alpha}<\|x_0\|\leqslant\varepsilon$, яъни $\frac{1}{\alpha}x_0\in B_\varepsilon$, бу эса юқорида кўрсатилган $f(x)\neq 1\,(x\in B_\varepsilon)$ муносабатга зид. Демак, B_ε шарнинг ихтиёрий x элементи учун $|f(x)|<1$, яъни f чегараланган (яъни узлуксиз) функционал. *

2. Чизиқли функционал нормасининг геометрик маъноси. Нормаланган E фазода узлуксиз f чизиқли функционални оламиз. $c\in K$ сон учун ушбу

$$H_c=\{x\in E: f(x)=c\}=f^{-1}(c)$$

белгилаш киритамиз. Бевосита кўриниб турибдики, a элемент $f(a)=c$ тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда

$$H_c=a+H,\ H=f^{-1}(0).$$

d орқали H_1 тўплам билан θ нуқта орасидаги масофани белгилаймиз, яъни

$$d_1=\inf_{f(x)=1}\|x\|.$$

Ихтиёрий $x\in H_1$ элемент учун

$$f(x)=1\leqslant\|f\|\cdot\|x\|,$$

яъни

$$\|x\|\geqslant\frac{1}{\|f\|}.$$

Бундан

$$d\geqslant\frac{1}{\|f\|}. \tag{2}$$

Функционал нормасининг таърифига асосан ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $x_\varepsilon\in E$ элемент мавжудки, ушбу

$$|f(x_\varepsilon)|>(\|f\|-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|$$

тенгсизлик бажарилади, яъни

$$1>\frac{1}{|f(x_\varepsilon)|}(\|f\|-\varepsilon)\|x_\varepsilon\| = (\|f\|-\varepsilon)\left\|\frac{x_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)}\right\|.$$

Агар $a_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)}$ белгилаш киритсак, у ҳолда $a_\varepsilon \in H_1$ ва $1 > (\|f\| - \varepsilon)\|a_\varepsilon\|$, яъни $\|a_\varepsilon\| < \frac{1}{\|f\|-\varepsilon}$. Бундан

$$d = \inf_{a\in H_1}\|a\| < \frac{1}{\|f\|-\varepsilon}.$$

Бу тенгсизликда ε ихтиёрий бўлгани учун

$$d \leq \frac{1}{\|f\|}. \tag{3}$$

Юқоридаги (2) ва (3) тенгсизликлардан ушбу

$$d = \frac{1}{\|f\|} \text{ ёки } \|f\| = \frac{1}{d}$$

тенглик келиб чиқади. Натижада қуйидаги теорема исботланди.

2-теорема. *Узлуксиз f чизиқли функционалнинг нормаси $H_1 = \{x\in E : f(x) = 1\}$ тўплам билан 0 нуқта орасидаги масофанинг тескари қийматига тенг.*

7.4-§ да исботланган Хан—Банах теоремасидан қуйидаги натижа келиб чиқади.

3-теорема. *Нормаланган E фазонинг ихтиёрий $x_0 \neq 0$ элементи учун қуйидаги шартларни каноатлантирувчи узлуксиз f чизиқли функционал мавжуд.*

1 $f(x_0) = 1$;

2) $\|f\| = \|x_0\|^{-1}$.

Исбот. E фазонинг ушбу

$$L = \{tx_0,\ t\in K\}$$

қисм фазосини оламиз. L фазода f_0 функционални қуйидагича аниқлаймиз:

$$f_0(tx_0) = t.$$

Равшанки, $f_0(x_0) = 1$ ва

$$\|f_0\| = \sup_{\|tx_0\|=1}|f_0(tx_0)| = \sup_{|t|=\frac{1}{\|x_0\|}}|t| = \|x_0\|^{-1}.$$

Хан—Банах теоремасига асосан f_0 функционални E фазога нормасини сақлаган ҳолда давом эттириш мумкин. Ҳосил бўлган функционал 1) ва 2) шартларни қаноатлантирувчи функционалдир.*

Мисоллар. 1) R^n фазода ихтиёрий f функционал ушбу

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f_i\,(f_i=f(e_i))$$

кўринишда ифодаланади, бу ерда $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$, $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)$. (Бу мисол 7.3-§ даги 4-мисолнинг хусусий $m=1$ ҳоли.)

Чизиқли функционалнинг нормаси R^n фазодаги нормага боғлиқ. Бунга иккита мисол келтирамиз.

а) R^n фазода $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{1/2}$ нормани оламиз. У ҳолда

$$\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{n}f_i^2\right)^{1/2}.$$

Исбот. Коши—Буняковский тенгсизлигига асосан ихтиёрий $x\in R^n$ элемент учун ушбу

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i f_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2}\;\|x\|$$

тенгсизлик ўринлидир, яъни ушбу

$$\|f\|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2} \tag{4}$$

муносабатга эгамиз. Энди $x_0=(\xi_1^0,\xi_2^0,\dots,\xi_n^0)$ элементни

$$\xi_i^0=\frac{f_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|f_j|^2}},\quad i=\overline{1,n}$$

кўринишда олсак, у ҳолда $\|x_0\| = 1$ ва

$$|f(x_0)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i \xi_i^0\right| = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}.$$

Бундан

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geqslant |f(x_0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}.$$

Бу муносабатни юқоридаги (4) тенгсизлик билан солиштирсак, ушбу

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}$$

тенглик келиб чиқади.

б) R^n фазода нормани ушбу

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|$$

кўринишда олсак, бу мисол 7.3-§ даги 5-мисолнинг хусусий ҳоли ($m = 1$) бўлади. Демак,

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|.$$

Агар R^n фазода $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ норма олинса, $\|f\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i|$ эканлиги шунга ўхшаш келиб чиқади.

2) Нормаланган $C[0,1]$ фазода ушбу

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)$$

функционални оламиз, бу ерда $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ ихтиёрий нуқталар, $c_k \in R$ $(k=\overline{1,n})$. f—чизиқли функционал. Дарҳақиқат,

$$f(\lambda x_1+\eta x_2)=\sum_{k=1}^{n} c_k[\lambda x_1(t_k)+\eta x_2(t_k)]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} c_k\lambda x_1(t_k)+\sum_{k=1}^{n} c_k\eta x_2(t_k)=\lambda f(x_1)+\eta f(x_2).$$

Бу функционалнинг нормасини ҳисоблаймиз. Ушбу

$$|f(x)|=|\sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)|\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|\sum_{k=1}^{n}|c_k|=\sum_{k=1}^{n}|c_k|\ \|x\|$$

тенгсизликдан f функционалнинг узлуксизлиги ва қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$\|f\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|c_k|.$$

Энди $[0,1]$ оралиқда узлуксиз x_0 функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$x_0(t_k)=\operatorname{sgn} c_k, \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

ва $[t_k,t_{k+1}], k=\overline{1,n-1}$ оралиқларда $x_0(t)$ ни чизиқли функция, $[0,t_1]$ ва $[t_n,1]$ оралиқда $x_0(t)$ ни ўзгармас деб оламиз. Равшанки, $\|x_0\|\leqslant 1$ ва

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|\geqslant|f(x_0)|=\sum_{k=1}^{n} c_k x_0(t_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{sgn} c_k=\sum_{k=1}^{n}|c_k|,$$

яъни

$$\|f\|\geqslant\sum_{k=1}^{n}|c_k|.$$

Демак,

$$\|f\|=\sum_{k=1}^{n}|c_k|.$$

3) Ҳақиқий сонларнинг нолга яқинлашувчи кетма-кетликлари фазосини c_0 билан белгилаб, бу фазода $x=\{\xi_n\}$ элементнинг нормасини қуйидагича киритамиз:

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

Бу нормаланган фазога қўшма бўлган фазони топамиз. Агар ушбу

$$e^{(k)} = (\underbrace{0,0, \ldots 0,}_{k-1} 1, 0, \ldots) \in c_0$$

элементларни олсак, равшанки, ихтиёрий $x = \{\xi_n\}$ элементга ушбу

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{(k)} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0,0, \ldots)$$

элементлардан тузилган кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатан,

$$\lim_{n\to\infty} \|x-x^{(n)}\| = \lim_{n\to\infty} \|(0,0, \ldots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geqslant 1+n} |\xi_k|) = 0.$$

Энди ихтиёрий $f \in (c_0)'$ функционалга ушбу $\{t_k\} = \{f(e^{(k)})\}$ сонли кетма-кетликни мос қўйиб, $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ қатор яқинлашувчи эканлигини исботлаймиз. Агар $y^{(k)} = \sum_{l=1}^{k} (\mathrm{sgn} f_l) e^{(l)} \in$ $\in ç_0$ элементни олсак, равшанки $\|y^{(k)}\| \leqslant 1$. Демак;

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \geqslant \sup_k |f(y^{(k)})| = \sup_k \sum_{l=1}^{k} |f_l| = \sum_{l=1}^{\infty} |f_l|, \quad (5)$$

яъни $\sum_{l=1}^{\infty} f_l$ абсолют яқинлашувчи қатор. Шундай хоссага эга бўлган $\{f_k\} = \tilde{f}$ сонли кетма-кетликлар фазоси l_1 билан белгиланади ва $\{f_k\} \in l_1$ элементнинг нормаси деб $\|\tilde{f}\| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ олинади. Шундай қилиб, ҳар бир $f \in (c_0)'$

функционалга l_1 фазонинг $\{f_k\}=\tilde{f}$ элементи мос қўйилди. Ихтиёрий $x\in c_0$ учун

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} f\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{(k)}\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k f(e^{(k)}) =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k f_k=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f_k,$$

яъни f функционалнинг x элементдаги қиймати $\tilde{f}\in l_1$ элемент ёрдамида қуйидагича ҳисобланади:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f_k. \tag{6}$$

Аксинча, l_1 фазонинг ихтиёрий $\{f_k\}$ элементи (6) формула бўйича c_0 фазода чизиқли функционални аниқлайди. Унинг чеклилиги ва чегараланганлиги ушбу тенгсизликдан келиб чиқади:

$$|f(x)|=\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f_k\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k f_k|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_k|\xi_k|\sum_{k=1}^{\infty}|f_k| = \|x\|\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|. \tag{7}$$

Шу билан бирга

$$\|f\| = \sup_{\|x\|<1}|f(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|f_k| = \|\tilde{f}\|.$$

Бу тенгсизликни (5) тенгсизлик билан солиштирсак $\|f\|=\|\tilde{f}\|$ тенглик келиб чиқади. Демак, $f\to\tilde{f}$ мослик $(c_0)'$ фазони l_1 фазога акслантирувчи изометрик изоморфизм, яъни $(c_1)'=l_1$.

4) Энди 3-мисолда киритилган l_1 фазога қўшма фазо m фазо эканлигини исботлаймиз. l_1 фазода ушбу

$$g^k=(\underbrace{0,\ 0,\ \dots,\ 0}_{k-1},\ 1,\ 0,\ 0,\ \dots)$$

элементни олсак, ихтиёрий $f=\{f_k\}\in l_1$ учун

$$f^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}f_k g^k= (f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n,\ 0,\ 0,\ \dots)\in l_1$$

элементлардан тузилган $\{f^{(n)}\}$ кетма-кетлик f элементга норма бўйича яқинлашади. Дарҳақиқат, $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|$ қатор яқинлашувчи бўлгани сабабли

$$\|f - f^{(n)}\| = \|(0, 0, \ldots, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots)\| = \sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ихтиёрий $F\in(l_1)'$ функционалга $\tilde{F}=\{F_k\}=\{F(g^k)\}$ кетма-кетликни мос қўйиб, унинг чегараланганлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$\|F\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1}|F(f)| \geqslant \sup_k|F(g^k)| = \sup_k|F_k|, \qquad (8)$$

демак, $\tilde{F}=\{F_k\}\in m$. Шундай қилиб, ҳар бир $F\in(l_1)'$ функционалга m фазонинг $\tilde{F}$ элементи мос қўйилди. Ихтиёрий $f\in l_1$ учун

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F\left(f^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(\sum_{k=1}^{n} f_k g^k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k F_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k F_k,$$

яъни F функционалнинг f элементдаги қиймати ушбу формула ёрдамида ҳисобланади:

$$F(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k F_k. \qquad (9)$$

Аксинча, m фазонинг ихтиёрий $\tilde{F}=\{F_k\}$ элементи (9) формула орқали l_1 фазода чизиқли функционални аниқлайди. Унинг чеклилиги ва чегараланганлиги қуйидаги тенгсизликдан келиб чиқади:

$$F(f)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k F_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|f_k F_k| \leqslant \sup_k|F_k|\sum_{k=1}^{\infty}|f_k| = \sup_k|F_k|\cdot\|f\|. \qquad (10)$$

Энди m фазода $\tilde{F}=\{F_k\}$ элементнинг нормаси $\sup_k|F_k|$ эканлигини эсласак, (10) тенгсизликка биноан

$$\|F\|=\sup_{\|f\|\leqslant 1}|F(f)|\leqslant \sup_{k}|F_k|=\|\tilde{F}\|.$$

Буни (8) билан солиштирсак, $\|F\|=\|\tilde{F}\|$ тенглик келиб чиқади. Демак, $F\to\tilde{F}$ изометрик изоморфизмдир, яъни $(l_1)'=m$.

3. **Гильберт фазосида чизиқли функционаллар.** Энди Гильберт фазосида чизиқли функционалнинг умумий кўринишини топамиз. E Гильберт фазосидан бирор y элементни танлаб олсак, ушбу

$$f(x)=(x,\ y) \tag{11}$$

формула E фазода узлуксиз чизиқли функционални аниқлайди. Дарҳақиқат, f нинг чизиқли эканлиги скаляр кўпайтма аксиомаларидан, чегараланганлиги эса ушбу,

$$|f(x)|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\ \|y\|$$

Коши — Буняковский тенгсизлигидан келиб чиқади. Хусусан,

$$\|f\|\leqslant\|y\| \tag{12}$$

муносабат ўринлидир.

Аммо энг муҳими шундаки, Гильберт фазосида ҳар бир узлуксиз чизиқли функционал (11) кўринишга эга. Аниқроғи, қуйидаги теорема ўринлидир.

4-теорема (Рисс теоремаси). *E Гильберт фазосида ихтиёрий узлуксиз f чизиқли функционал учун (11) тенгликни қаноатлантирувчи ягона y_f элемент мавжуд ва шу y_f элемент учун ушбу муносабат ўринлидир:*

$$\|f\|=\|y_f\|. \tag{13}$$

Исбот. Юқоридаги 1-теоремага асосан $H=f^{-1}(0)$ тўплам E нинг ёпиқ қисм фазосидир. Агар $f\equiv 0$, яъни $H=E$ бўлса, $y_f=\theta$ деб олишимиз мумкин. $H\neq E$ ҳолни кўрайлик, яъни H тўплам E нинг хос қисм фазоси бўлсин. Ихтиёрий $y_0\tilde{\in}H$ элемент ушбу

$$y_0=y'+y''\quad(y'\in H,\ y''\in H^{\perp})$$

кўринишда ёзилади (4.4- §, 1-теорема).

Равшанки $y''\neq\theta$ ва $f(y'')\neq 0$. Демак, $f(y'')=1$ деб ҳисоблаш мумкин. Ихтиёрий $x\in E$ элементни олиб,

$f(x)$ сонни α билан белгилаймиз. У ҳолда $x' = x - \alpha y''$ элемент H нинг элементидир, чунки

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0.$$

Демак, $(x', y'') = 0$ ва

$$(x,\ y'') = (x' + \alpha y'',\ y'') = \alpha(y'',\ y'')$$

яъни

$$f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y''}{(y'',\ y'')}\right) = (x,\ y_f),$$

бу ерда

$$y_f = \frac{y''}{(y'',\ y'')}.$$

Шундай қилиб, (11) тенгликни қаноатлантирувчи y_f элемент топилади. Бу элементнинг ягоналиги бевосита келиб чиқади. Дарҳақиқат, агар ихтиёрий $x \in E$ элемент учун ушбу

$$(x,\ y_f) = (x,\ y'_f)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $(x,\ y_f - y'_f) = 0$, яъни $y_f - y_f' \perp E$, демак, $y_f - y'_f = 0$.

Ушбу

$$\|f\| \geqslant f\left(\frac{y_f}{\|y_f\|}\right) = \frac{(y_f,\ y_f)}{\|y_f\|} = \|y_f\|$$

тенгсизликни юқоридаги (12) тенгсизлик билан солиштирсак, (13) тенглик ҳосил бўлади.*

E Гильберт фазосининг ҳар бир элементига ушбу

$$(\tau y)\ (x) = (x,y)$$

формула бўйича τy чизиқли функционални мос қўйсак, ҳосил бўлган

$$\tau: E \to E' \qquad (14)$$

оператор *қўшма чизиқлидир*, яъни

$$\tau(\alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}\tau y_1 + \overline{\beta}\tau y_2.$$

Ҳақиқатан,

$$[\tau(\alpha y_1 + \beta y_2)](x) = (x, \alpha y_1 + \beta y_2) = (x, \alpha y_1) + (x,\ \beta y_2) =$$
$$= \overline{\alpha}(x,\ y_1) + \overline{\beta}(x,\ y_2) = (\overline{\alpha}\tau y_1 + \overline{\beta}\tau y_2)(x).$$

Энди $\tau: E \to E'$ мономорфизм эканлигини исботлаймиз.

Агар $\tau y = 0$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x \in E$ элемент учун

$$(x, y) = (\tau y)(x) = 0,$$

яъни $y \perp E$. Демак, $y = \theta$.

Юқорида исботланган 4-теоремага асосан τ эпиморфизм ва

$$\|\tau(y)\| = \|y\|,$$

яъни $\tau: E' \to E$ — изометрик изоморфизм (агар E комплекс Гильберт фазоси бўлса, τ — қўшма чизиқли изометрик изоморфизм).

Мисоллар. 1) $L_2 [a, b]$ Гильберт фазосида чизиқли функционалнинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$f(x) = (x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, x, \ y \in L_2 \ [a, b].$$

2) l_2 Гильберт фазосида чизиқли функционалнинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$f(x) = (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k},$$

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_2,$$

$$y = (\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots) \in l_2.$$

8.2-§. Иккинчи қўшма фазо ва рефлексивлик

E бирон нормаланган фазо ва E' унга қўшма фазо бўлсин. Маълумки, E' ҳам вектор фазо ва функционалнинг нормасига нисбатан Банах фазоси (7.4-§). Шу сабабли E' фазода аниқланган узлуксиз чизиқли функционалларни кўришимиз мумкин. Равшанки, бу функционаллар ҳам бирор E'' Банах фазосини ҳосил қилади; бу фазо E га *иккинчи қўшма фазо* дейилади.

E фазодан бирон x_0 элементни олиб, ушбу

$$\varphi_{x_0}(f) = f(x_0), \ f \in E' \qquad (1)$$

формула ёрдамида E' фазода бирон φ_{x_0} функционални аниқлаш мумкин.

1-теорема. *Юқоридаги (1) формула орқали аниқланган φ_{x_0} функционал E' фазода чизиқли узлуксиз функционалдир, яъни $\varphi_{x_0} \in E''$.*

Исбот. Равшанки, (1) формула ҳар бир $f \in E'$ функционалга бирор сонни мос қўяди, яъни ψ_{x_0} функционалдир. Ихтиёрий $f_1, f_2 \in E'$ ва α, β ҳақиқий сонлар учун ψ_{x_0} нинг таърифига асосан

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha\psi_{x_0}(f_1) + \beta\psi_{x_0}(f_2),$$

яъни ψ_{x_0} чизиқли функционалдир. Унинг узлуксизлиги эса ушбу

$$|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leqslant \|x_0\| \cdot \|f\| \tag{2}$$

тенгсизликдан бевосита кўриниб турибди.*

Бу теоремага асосан E фазонинг ҳар бир x_0 элементига E'' фазонинг бирор ψ_{x_0} элементи мос қўйилади. Бу мосликни π билан белгилаймиз, яъни

$$\pi(x_0) = \psi_{x_0}, \quad \pi : E \to E''.$$

Бу мослик E фазони E'' фазога *табиий акс эттириш* дейилади.

2-теорема. *$\pi : E \to E''$ акс эттириш мономорфизмдир.*

Исбот. π чизиқли акс эттириш эканлиги қуйидаги тенгликлардан келиб чиқади:

$$\pi(\alpha x_1 + \beta x_2)(f) = \psi_{\alpha x_1 + \beta x_2}(f) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) +$$
$$+ \beta f(x_2) = \alpha\psi_{x_1}(f) + \beta\psi_{x_2}(f) = \alpha\pi(x_1)(f) + \beta\pi(x_2)(f) =$$
$$= [\alpha\pi(x_1) + \beta\pi(x_2)](f).$$

Бу ерда $f \in E'$ ихтиёрий бўлгани сабабли

$$\pi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\pi(x_1) + \beta\pi(x_2).$$

Энди π нинг мономорфизм эканлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $x_1, x_2 \in E$ элементлар учун $x_1 \neq x_2$ бўлса, у ҳолда

$$x_0 = x_1 - x_2 \neq \theta.$$

8.1-§ даги 3-теоремага асосан шундай $f \in E'$ функционал мавжудки, унда ушбу

$$f(x_0) = 1$$

тенглик бажарилади, яъни

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \neq 0.$$

Демак, топилган $f \in E'$ учун

$$\pi(x_1)(f) = \psi_{x_0}(f) = f(x_1) \neq f(x_2) = \psi_{x_2}(f) = \pi(x_2)(f).$$

Демак, $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$, яъни π — мономорфизмдир.*

3-теорема. $\pi : E \to E''$ *акс эттириш изометриядир, яъни*

$$\|\pi(x)\| = \|x\|, \quad x \in E,$$

бу ерда $\|\pi(x)\|$ ифода E'' *фазодаги норма.*

Исбот. Ушбу

$$|\pi(x)(f)| = |\varphi_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\| \, \|f\|$$

муносабатга асосан функционал нормасининг таърифига кўра

$$\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|. \tag{3}$$

Ихтиёрий $x \in E (x \neq \theta)$ учун 8.1-§ даги 3-теоремага асосан ушбу

$$|f_0(x)| = 1 = \|f_0\| \cdot \|x\|$$

тенгликни қаноатлантирувчи $f_0 \in E'$ функционал мавжуд. Демак,

$$\|\pi(x)\| = \sup_{f \in E'} \frac{|\pi(x)(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in E'} \frac{|\varphi_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in E'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{|f_0(x)|}{\|f_0\|} = \frac{\|f_0\| \, \|x\|}{\|f_0\|} = \|x\|,$$

яъни $\|\pi(x)\| \geqslant \|x\|$. Бундан ва (3) тенгсизликдан керак бўлган ушбу

$$\|\pi(x)\| = \|x\|$$

тенглик келиб чиқади.*

Натижа. Ихтиёрий нормаланган E фазо иккинчи қўшма фазонинг бирор $\pi(E) \subset E''$ вектор қисм фазосига изометрик изоморфдир.

E ни $\pi(E)$ га айнан тенг деб ҳисоблаб, $E \subset E''$ муносабатга эга бўламиз.

Таъриф. Агар π акс эттириш E ни бутун E'' га акс эттирса, яъни $\pi(E) = E''$ бўлса, у ҳолда нормаланган E фазо *рефлексив фазо* дейилади.

Ихтиёрий нормаланган фазога қўшма фазо тўла бўлгани сабабли ихтиёрий рефлексив нормаланган фазо тўладир.

Мисоллар. 1) Ихтиёрий E Гильберт фазоси рефлексивдир. Чунки E фазо E' фазога қўшма изоморф (8.1-§, 4-теоремага асосан), E' эса ўз навбатида E'' фазога қўшма изоморф. Демак, E фазо E'' фазога изоморфдир.

2) Ўзи-ўзига қўшма бўлмаган рефлексив нормаланган фазога мисол келтирамиз. R^n фазода нормани қуйидагича киритамиз:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|.$$

Бу фазони R^n_1 билан белгилаймиз. Агар норма ушбу

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|$$

кўринишда олинса, буни R^n_∞ билан белгилаймиз, 8.1-§, 1, б) мисолга биноан $(R^n_1)' = R^n_\infty$, $(R^n_\infty)' = R^n_1$. Демак, $(R^n_1)'' = R^n_1$, $(R^n_\infty)'' = R^n_\infty$, яъни R^n_1 ва R^n_∞ рефлексив фазолардир.

3) Ҳақиқий сонларнинг нолга яқинлашувчи кетма-кетликлари фазоси c_0 рефлексив эмас. Чунки 8.1-§ даги 3-мисолга биноан $(c_0)' = l_1$, 4-мисолга биноан $(l_1)' = m$, яъни $(c_0)'' = m \neq c_0$.

4) Ҳар қандай рефлексив фазо тўла бўлгани сабабли ихтиёрий тўла бўлмаган нормаланган фазо рефлексив эмас.

8.3-§. Суст топология ва суст яқинлашиш

E ва E' мос равишда топологик вектор фазо ва унинг қўшма фазоси бўлсин. Сони чекли $f_1, f_2, \ldots, f_n \in E'$ функционаллар ва $\varepsilon > 0$ сон учун ушбу

$$U\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \varepsilon\} = \{x \in E : |f_i(x)| < \varepsilon;\ i = \overline{1, n}\} \quad (1)$$

тўплам θ нуқтани ўз ичига олувчи очиқ тўпламдир, яъни нолнинг атрофидир. (1) кўринишдаги чекли сондаги тўпламларнинг кесишмаси шу кўринишдаги бирор тўпламни ўз ичига олади. Масалан,

$$U(f_1, f_2, \ldots, f_n, \varepsilon) \cap U(g_1, g_2, \ldots, g_k, \delta) \supset$$
$$\supset U(f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_k, \min(\varepsilon, \delta)).$$

Демак, E фазода шундай топология киритиш мумкинки, унда ноль атрофларининг базиси (1) кўринишдаги тўпламлардан иборат бўлади. Бу топология $\sigma(E, E')$ билан белгиланади ва *суст топология* деб аталади. Чунки бу топология E' дан олинган ҳар бир функционалнинг E да узлуксиз бўлишини таъминловчи топологияларнинг ичида энг сустидир. Равшанки, бу топология E фазонинг ўзидаги топологиядан сустроқдир.

Ноль атрофларининг таърифига асосан, агар E да етарли даражада кўп узлуксиз чизиқли функционаллар мавжуд бўлса, яъни $\forall x\neq\theta\ \exists f\in E: f(x)\neq 0$ шарт бажарилса, у ҳолда суст топология Хаусдорф топологиясидир. Суст топологияда яқинлашиш *суст яқинлашиш* дейилади. Хусусан, $\{x_k\}\subset E$ кетма-кетлик $x_0\in E$ нуқтага суст яқинлашувчи бўлиши учун ушбу

$$f(x_k)\to f(x_0),\ \forall f\in E' \tag{2}$$

муносабат бажарилиши зарур ва кифоядир.

Дарҳақиқат, масалан, $x_0=\theta$ бўлган ҳолни кўрамиз. Агар ихтиёрий $f\in E'$ учун $f(x_k)\to 0$ бўлса, у ҳолда нолнинг ихтиёрий

$$U\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \varepsilon\}=U$$

атрофини аниқловчи ҳар бир f_i $(i=\overline{1, n})$ учун шундай N_i натурал сон топиладики,

$$|f_i(x_k)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ихтиёрий $k\geqslant N_i$ учун бажарилади. Демак, $N=\max\limits_{i=\overline{1, n}} N_i$ деб олсак, у ҳолда $k>N$ бўлганда ихтиёрий $i=\overline{1, n}$ учун $|f_i(x_k)|<\varepsilon$, яъни $x_k\in U$.

Аксинча, ихтиёрий U учун шундай N сон мавжуд бўлсинки, $x_k\in U$ муносабат ихтиёрий $k\geqslant N$ учун бажарилсин. У ҳолда ҳар бир $f\in E'$ учун $f(x_k)\to 0$, $k\to\infty$.

Суст яқинлашишдан фарқ қилиш учун E фазонинг ўз топологиясидаги яқинлашишни *кучли яқинлашиш* дейилади. Ҳар бир $f\in E'$ нинг узлуксизлигига ва (2) муносабатга асосан кучли яқинлашишдан суст яқинлашиш келиб чиқади. Хусусан, агар E нормаланган фазо бўлса, норма бўйича яқинлашишдан суст яқинлашиш келиб чиқади.

Нормаланган фазоларда суст яқинлашишни текшириш учун қуйидаги теорема фойдалидир.

1-теорема. *Нормаланган E фазода $\{x_n\}$ кетма-кетлик $x_0\in E$ нуқтага суст яқинлашувчи бўлиши учун қуйидаги икки шарт зарур ва кифоядир:*

1) $\|x_n\|\leqslant M$ бирор $M>0$ сон ва ихтиёрий n натурал сон учун ўринли;

2) E' фазода тўла бўлган бирор Δ тўпламнинг ихтиёрий f элементи учун ушбу муносабат ўринли

$$f(x_n)\to f(x_0).$$

Бу теорема 7.5-§ даги 5-теоремага ўхшаш исботланади.

Суст яқинлашишнинг моҳиятини қуйидаги мисолларда кўрамиз.

1. Чекли ўлчамли R^n фазода суст ва кучли яқинлашишлар эквивалент. R^n фазода $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормал базис оламиз. Ушбу $\{x_k\}$ кетма-кетлик бирор $x \in R^n$ элементга суст яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда ушбу

$$x_k = x_k^{(1)} e_1 + \ldots + x_k^{(n)} e_n,$$

$$x = x^{(1)} e_1 + \ldots + x^n e_n$$

тенгликлардан фойдаланиб, қуйидаги муносабатларни ёзишимиз мумкин:

$$x_k^{(1)} = (x_k, e_1) \to (x, e_1) = x^{(1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_k^{(n)} = (x_k', e_n) \to (x, e_n) = x^{(n)},$$

яъни $\{x_k\}$ кетма-кетлик x элементга координаталар бўйича яқинлашади. Демак, $k \to \infty$ да

$$\|x_k - x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_k^{(i)} - x^{(i)})^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

яъни $\{x_k\}$ кетма-кетлик x га кучли яқинлашади. Бундан кўриниб турибдики, суст яқинлашишдан кучли яқинлашиш келиб чиқади. Бунга тескари ибора доим ўринли бўлгани сабабли бу яқинлашишлар эквивалент.

2. H Гильберт фазосида ихтиёрий узлуксиз чизиқли функционал скаляр кўпайтма кўринишида ифодаланиши сабабли, $\{x_k\}$ кетма-кетлик H да бирор x элементга суст яқинлашувчи бўлиши учун ихтиёрий $y \in H$ элементга нисбатан ушбу

$$(x_k, y) \to (x, y)$$

муносабат бажарилиши зарур ва кифоядир.

3. l_2 фазода суст яқинлашиш. Маълумки, l_2 фазода ортонормал базис сифатида ушбу

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \; e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$$

векторлар системасини олиш мумкин. 2-мисолдаги y сифатида e_i ларни олсак, бирор $\{x_k\}$ кетма-кетликни x га суст яқинлашишидан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$(x_k, e_i) = x_k^{(i)} \to x^{(i)} = (x, e_i), \; i = 1, 2, \ldots \quad (3)$$

яъни суст яқинлашувчи кетма-кетлик координаталар бўйича ҳам шу элементга яқинлашувчи бўлади. Агар $\{x_k\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, у ҳолда (3) шарт кифоя ҳам бўлади. Дарҳақиқат, бунда 1-теореманинг шартлари қаноатлантирилиши учун Δ тўплам сифатида $\{e_i\}$ системани олиш керак ($\Delta \subset l_2' = l_2$).

Шундай қилиб, чегараланган кетма-кетликлар учун l_2 фазода суст яқинлашиш координаталар бўйича яқинлашиш билан тенг кучлидир.

Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, l_2 фазода суст яқинлашиш кучли яқинлашишдан фарқ қилади. Масалан, $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ кетма-кетлик l_2 фазода θ векторга суст яқинлашади, чунки ихтиёрий $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2$ элемент учун

$$(y, e_n) = y_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Аммо ихтиёрий n учун $\|e_n\| = 1 \not\to 0$, яъни $\{e_n\}$ кетма-кетлик θ га кучли яқинлашмайди.

4. c_0 фазода суст яқинлашиш. Бу фазода ҳам чегараланган кетма-кетликлар учун суст яқинлашиш координаталар бўйича яқинлашиш билан мос тушишини кўрсатамиз. Ҳар бир $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in c_0$ элементга унинг ξ_k координатасини мос қўювчи функционални g^k билан белгилаймиз. Равшанки, $g^k \in (c_0)' = l_1$ (8.1-§, 3, 4-мисоллар). Демак, агар бирор $\{x_n\} \in c_0$ кетма-кетлик x элементга суст яқинлашувчи бўлса, у ҳолда 1-теоремага асосан у норма бўйича чегараланган ва ихтиёрий k учун

$$\xi_k^{(n)} = g^k(x_n) \to g^k(x) = \xi_k, \quad n \to \infty.$$

Аксинча, агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик x элементга координаталар бўйича яқинлашиб, норма бўйича чегараланган бўлса, у ҳолда ихтиёрий k учун $g^k(x_n) \to g^k(x)$. 8.1-§ даги 4-мисолда кўрсатилганидек, ихтиёрий $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots) \in l_1 = (c_0)'$ учун

$$\lim_{n \to \infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k g^k\| = 0,$$

яъни $\{g^k\}_{k=1}^{\infty}$ тўплам $l_1 = (c_0)'$ фазода тўла. 1-теоремага асосан $\{x_n\}$ кетма-кетлик x элементга суст яқинлашувчи. Хусусан, бу фазода ҳам суст яқинлашишдан кучли яқинлашиш келиб чиқмайди. Масалан 8.1-§, 3-мисолдаги $\{e^k\}$ кетма-кетлик нолга суст яқинлашувчи, аммо ихтиёрий k учун $\|e^k\| = 1$.

8.4-§. Қўшма фазода суст топология ва чегараланган тўпламлар

E топологик вектор фазо, E' унинг қўшма фазоси бўлсин. 7.5-§ да қўшма фазода $\sigma(E', E)$ топология, яъни суст топология тушунчаси киритилиб, унинг айрим хоссалари ўрганилган эди. Бу топологияни E' фазодаги суст топологиядан, яъни $\sigma(E', E'')$ топологиядан ажратиш мақсадида уни **- суст топология* деймиз.

Ушбу параграфда E ни сепарабел нормаланган фазо деб оламиз ва шу фазога қўшма бўлган E' фазодаги чегараланган (функционалнинг нормаси маъносида) тўпламларнинг муҳим хоссаларини келтирамиз.

S^* орқали E' фазодаги ёпиқ бирлик шарни белгилаймиз, яъни

$$S^* = \{f \in E' : \|f\| \leqslant 1\}.$$

1-теорема. **-суст топологияни S^* шарда қаралса, бу топологияни метрикалаштириш мумкин.*

Исбот. E фазонинг бирлик шарида зич бўлган саноқли $\{x_n\}$ тўпламни оламиз. S^* фазода метрикани ушбу

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |< f - g, x_n >| \tag{1}$$

формула ёрдамида киритамиз. Бу ерда ушбу $< f, x > = f(x)$, $f \in E'$, $x \in E$ белгилашдан фойдаландик. Киритилган $\rho(f, g)$ функция ҳақиқатан ҳам метрика эканлиги бевосита кўриниб турибди. Ундан ташқари, бу метрика силжитишга нисбатан инвариант, яъни

$$\rho(f + h, g + h) = \rho(f, g), \ \forall h \in E'.$$

Энди S^* тўпламда $\sigma(E'\ E)$ топологиядаги нолнинг атрофлари системаси шу тўпламда ρ метрика ёрдамида аниқланган атрофлар системаси билан тенг кучли эканлигини кўрсатилиши кифоя. Бошқача қилиб айтганда, қуйидаги икки хосса исботланиши керак:

1) ихтиёрий $S_\varepsilon = \{f \in E' : \rho(f, \theta) < \varepsilon\}$ шар S^* билан нолнинг *- суст топологиядаги бирор атрофининг кесишмасини ўз ичига олади;

2) E' даги нолнинг $\sigma(E', E)$ топологиядаги ихтиёрий атрофи S^* шарнинг бирор S_ε шар билан кесишмасини ўз ичига олади.

Ушбу $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи N сонни танлаб, нолнинг *-суст топологиядаги қуйидаги атрофини оламиз:

$$V = V_{x_1, \dots, x_N, \varepsilon/2} = \{f : |\langle f, x_k\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N\}.$$

Ихтиёрий $f \in S^* \cap V$ учун

$$\rho(f, \theta) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}|\langle f, x_n\rangle| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}|\langle f, x_n\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

яъни $S^* \cap V \subset S_\varepsilon$. 1) хосса исботланди.

Нолнинг *-суст топологиядаги бирор

$U = U_{y_1, y_2, \dots, y_n; \delta} = \{f : |\langle y_k, f\rangle| < \delta, k = 1, 2, \dots, m\}$

атрофини оламиз ($\|y_k\| \leqslant 1$, $k = 1, \dots, m$). Олинган $\{x_n\}$ тўплам S нинг ҳамма ерида зич бўлгани сабабли шундай $n_1, \dots, n_m$ натурал сонлар топиладики, ҳар бир $k = 1, 2, \dots, m$ учун ушбу $\|y_k - x_{n_k}\| < \frac{\delta}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Агар $N = \max(n_1, \dots, n_m)$, $\varepsilon = 2^{-(N+1)}\delta$ деб олсак, у ҳолда $f \in S^* \cap S_\varepsilon$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|\langle x_n, f\rangle| < \varepsilon.$$

Бу тенгсизликдан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$|\langle x_n, f\rangle| < 2^n\varepsilon,$$

ва хусусан,

$$|\langle x_{n_k}, f\rangle| 2^{n}k\varepsilon \leqslant 2^{N\varepsilon} = \frac{\delta}{2}$$

Демак, ихтиёрий $k = 1, 2, \dots, m$ учун

$$|\langle y_k, f\rangle| \leqslant |\langle x_{n_k}, f\rangle| + |\langle y_k - x_{n_k}, f\rangle| < \frac{\delta}{2} +$$

$$+ \|f\| \|y_k - x_{n_k}\| < \delta,$$

яъни $S^* \cap S_\varepsilon \subset U$.*

2-теорема. *Сепарабел нормаланган фазонинг қўшма фазосидаги ёпиқ шар σ (E', E) топологияда компактдир.*

Исбот. Равшанки, бу теоремани S^* бирлик шар учун исботлаш кифоя. 1-теоремага асосан $*$-суст топология, S^* шарда метрика ёрдамида аниқланади. Демак, S^* шар 2.8-§ даги таъриф маъносида $*$-суст топологияда нисбий компакт ва ёпиқ эканлигини исботлаш керак.

а) S^* шарнинг нисбий компактлиги. E фазода зич бўлган бирор $\{x_n\}$ саноқли тўпламни оламиз. S^* шардаги ихтиёрий $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик учун ушбу

$$\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n(x_1),\ \ldots$$

сонли кетма-кетлик чегараланган, чунки

$$|\varphi_n(x_1)| \leqslant \|\varphi_n\| \, \|x_1\| \leqslant \|x_1\|;\ n = 1,\ 2,\ \ldots .$$

Демак, $\{\varphi_n\}$ кетма-кетликдан шундай

$$\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(1)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)},\ \ldots \qquad (2)$$

қисмий кетма-кетлиги танлаш мумкинки, ушбу

$$\varphi_1^{(1)}(x_1),\ \varphi_2^{(1)}(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)}(x_1),\ \ldots$$

сонли кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади. Шунга ўхшаш, (2) кетма-кетликнинг шундай

$$\varphi_1^{(2)},\ \varphi_2^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_n^{)2)},\ \ldots$$

қисм кетма-кетлиги топиладики,

$$\varphi_1^{(2)}(x_2),\ \varphi_2^{(2)}(x_2),\ \ldots,\ \varphi_n^{(2)}(x_2),\ \ldots$$

сонли кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади ва ҳоказо. Шу тарзда давом эттириб, ҳар бири олдингисининг қисмий кетма-кетлиги бўлган

$$\begin{array}{l}\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(1)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)},\ \ldots \\ \varphi_1^{(2)},\ \varphi_2^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(2)},\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

кетма-кетликлар системасини ҳосил қиламиз. Бунда $\{\varphi_n^{(1)}\}$ кетма-кетлик $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ нуқталарда яқинлашувчи бўлади. Энди

$$\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(n)},\ \ldots$$

„диагонал“ кетма-кетликни олсак, у ҳолда ихтиёрий x_k элемент учун

$$\varphi_1^{(1)}(x_k),\ \varphi_2^{(2)}(x_k),\ \ldots,\ \varphi_n^{(n)}(x_k),\ \ldots,$$

кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади. Чунки бу кетма-кетлик юқоридаги кетма-кетликларнинг ҳар бирининг бирон ердан бошлаб қисм кетма-кетлиги бўлади. $\{x_n\}$ тўплам E да зич бўлгани сабабли 7.5-§ даги 5-теореманинг 4) натижасидан $\{\varphi^{(n)}_n\}$ кетма-кетликнинг *-суст яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади, яъни S^* тўплам*-суст топологияда нисбий компактдир.

б) S^* шарнинг *-суст топологияда ёпиқлиги. Ихтиёрий $f_0 \overline{\in} S^*$ узлуксиз чизиқли функционални оламиз, яъни $\|f_0\| > 1$. Функционалнинг нормаси таърифига асосан $\|x\| = 1$ тенгликни қаноатлантирувчи шундай $x \in E$ элемент топиладики, $|f_0(x)| = \alpha > 1$ ўринли бўлади. Ушбу $U = \left\{f \in E : f(x) > \frac{\alpha + 1}{2}\right\}$ тўплам *-суст топологияда f_0 элементнинг атрофи бўлади (7.5-§) ва S^* шар билан кесишмайди, яъни S^* — ёпиқ.$_*$

Равшанки, юқорида исботланган теорема фақат бирликлар учун эмас, балки радиуси ихтиёрий бўлган шар учун ҳам ўринлидир. Бундан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Сепарабел нормаланган фазога қўшма бўлган фазода ихтиёрий чегараланган тўплам *-суст топологияда нисбий компактдир.

8.5-§. Қўшма операторлар

1. Топологик вектор фазоларда қўшма операторлар. E ва F топологик вектор фазолар, E' ва F' мос равишда уларнинг топологик қўшма фазолари бўлиб, $T: E \to F$ узлуксиз чизиқли оператор бўлсин. F фазода аниқланган узлуксиз g чизиқли функционални оламиз. Энди g ни Tx элементга қўлласак, ушбу $g(T\cdot): E \to K$ акс эттириш E да аниқланган узлуксиз чизиқли функционалдир. Дарҳақиқат,

$$g(T(\alpha x_1 + \beta x_2)) = g(\alpha T x_1 + \beta T x_2) =$$
$$= \alpha g(T x_1) + \beta g(T x_2),$$

яъни $g(Tx)$ — чизиқли функционал. Унинг узлуксизлиги g ва T нинг узлуксиз эканлигидан келиб чиқади. Демак,

$$g(Tx) = f(x), \; f \in E'.$$

Шундай қилиб, F' даги ихтиёрий g элементга E' даги f элемент ушбу

$$< x, f > = < Tx, \; g >$$

формула бўйича мос қўйилди. Бу мосликни биз T^* билан белгилаймиз, яъни $f = T^*g$, Демак, $T^*: F' \to E'$ акс эттириш қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$<Tx,\ g> = <x,\ T^*g>. \tag{1}$$

1-теорема. а) $T^* = F' \to E'$ — *чизиқли оператор*;
б) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$;
в) $(\lambda T)^* = \lambda T^*$, $\lambda \in K$.

Исбот. а) ихтиёрий α, $\beta \in K$ ва g_1, $g_2 \in F'$ учун (1) формулага асосан

$$\begin{aligned} &<x,\ T^*(\alpha g_1 + \beta g_2)> = <Tx,\ \alpha g_1 + \beta g_2> = \\ &= \alpha <Tx, g_1> + \beta < Tx,\ g_2> = \alpha <x,\ T^* g_1> + \\ &+ \beta <x,\ T^* g_2> = <x,\ \alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2>, \end{aligned}$$

яъни

$$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2.$$

б)
$$\begin{aligned} &<x, (T_1 + T_2)^* g> = <(T_1 + T_2)x,\ g> = \\ &= <T_1 x + T_2 x, g> = <T_1 x,\ g> + <T_2 x, g> = \\ &= <x, T_1^* g> + <x,\ T_2^* g> = <x,\ T_1^* g + T_2^* g> \end{aligned}$$

яъни

$$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*;$$

в)
$$\begin{aligned} &<x,\ (\lambda T)^* g> = <\lambda Tx, g> = <T(\lambda x), g> = \\ &= <\lambda x,\ T^* g> = <x,\ \lambda T^* g>, \end{aligned}$$

яъни

$$(\lambda T)^* = \lambda T^*.*$$

Юқорида киритилган T^* чизиқли оператор T га *қўшма оператор* дейилади.

1-мисол. $T: R^n \to R^m$ чизиқли оператор (a_{ij}) матрица ёрдамида берилган бўлсин. Демак, $y = Tx$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ бўлса, у ҳолда

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ m.$$

Маълумки, f чизиқли функционал

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j\, x_j$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Ушбу

$$f(x) = g(Tx) = \sum_{i=1}^{m} g_i y_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij}x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$$

тенгликдан қуйидаги муносабат бевосита келиб чиқади.

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}.$$

Аммо $f = T^*g$. Шундай қилиб, T^* оператор (a_{ij}) матрицага қўшма бўлган (a_{ji}) матрица билан аниқланади.

Агар E ва F нормаланган фазолар бўлса, у ҳолда E' ва F' ҳам нормаланган фазолар бўлади. Демак, T ва T^* операторларнинг нормалари ҳақида гапириш мумкин.

2-теорема. *Агар E ва F Банах фазолари бўлиб. $T: E \to F$ чегараланган чизиқли оператор бўлса, у ҳолда*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Исбот. Функционал ва оператор нормаси таърифига асосан ихтиёрий $g \in F'$ ва $x \in E$ элементлар учун ушбу

$$|T^*g(x)| = |<x, T^*g>| = |<Tx, g>| = |g(Tx)| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\| \, \|Tx\| \leqslant \|g\| \, \|T\| \, \|x\|$$

тенгсизлик, яъни ушбу

$$\|T^*g\| \leqslant \|T\| \, \|g\|$$

тенгсизлик ўринлидир. Демак,

$$\|T^*\| \leqslant \|T\| \qquad (2)$$

муносабатга эгамиз. Энди $x \in E (Tx \neq \theta)$ элементни олиб, $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ элементни қараймиз. Равшанки $\|y\| = 1$. 8.1-§ даги 3-теоремага асосан ушбу:

$$1) \ g(y) = <y, g> = 1;$$
$$2) \ \|g\| = \|y\|^{-1} = 1$$

шартларни қаноатлантирувчи $g \in F'$ функционал мавжуд. Демак,

$$1 = <y, g> = <\frac{Tx}{\|Tx\|}, g>, \text{ яъни} <Tx, g> = \|Tx\|.$$

ушбу

$$\|Tx\| = |< Tx,\ g >| = |< x,\ T^*g >| = \|T^*g(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|T^*g\|\ \|x\| \leqslant \|T^*\| \|g\| \|x\| = \|T^*\|\ \|x\|$$

тенгсизликдан $\|T\| \leqslant \|T^*\|$ муносабат келиб чиқади. Энди (2) ни ҳисобга олсак,

$$\|T\| = \|T^*\|.{}_*$$

2. Гильберт фазосида қўшма оператор. H Гильберт фазоси ва $T : H \to H$ чегараланган чизиқли оператор бўлсин. Энди $\tau : H \to H'$ 8.1-§ даги 3-пунктда келтирилган изометрик қўшма чизиқли изоморфизм бўлсин. τ қуйидагича аниқланганлигини эслатиб ўтамиз:

$$(\tau y)(x) = (x,\ y).$$

Сўнг $T^* : H' \to H'$ оператор $T : H \to H$ операторга қўшма оператор бўлсин. Ушбу

$$\overline{T^*} = \tau_0{}^{-1} T_0{}^* \tau : H \to H$$

акс эттириш чегараланган чизиқли оператор эканлиги бевосита кўриниб турибди. Равшанки, $\overline{T^*}$ оператор ушбу

$$(Tx,\ y) = (x,\ \overline{T^*}y) \tag{3}$$

хоссага эга. (3) формулани $\overline{T^*}$ операторнинг таърифи деб олиш ҳам мумкин. $\|T^*\| = \|T\|$ ва τ, τ^{-1} изометриялар бўлгани учун

$$\|\overline{T^*}\| = \|T\|$$

$\overline{T^*}$ оператор T оператор учун *Эрмит қўшма оператори* дейилади.

Қулайлик учун Гильберт фазолари кўрилгандагина, $\overline{T^*}$ операторни T га *қўшма оператор* деймиз ва T^* билан белгилаймиз. Бошқача қилиб айтганда, H Гильберт фазосидаги T оператор учун қўшма T^* оператор ушбу

$$(Tx,\ y) = (x,\ T^*y) \tag{4}$$

формула ёрдамида аниқланади.

Таъриф. Агар $T^* = T$ тенглик бажарилса, $T : H \to H$ оператор *ўз-ўзига қўшма* дейилади.

Демак, $T : H \to H$ чизиқли оператор ўз-ўзига қўшма бўлиши учун ушбу

$$(Tx,\ y) = (x,\ Ty)$$

тенглик ихтиёрий x, $y\in H$ элементлар учун бажарилиши керак.

Агар H ҳақиқий Гильберт фазоси бўлса, ўз-ўзига қўшма оператор *симметрик оператор* дейилади. Агар H комплекс Гильберт фазоси бўлса, ўз-ўзига қўшма оператор *Эрмит оператори* дейилади.

Таъриф. Ўз-ўзига қўшма T оператор ихтиёрий $x\in H$ учун ушбу $(Tx, x)\geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда T *мусбат оператор* дейилади.

2-мисол. H Гильберт фазоси, $H_0\subset H$ эса унинг қисм фазоси бўлсин. $P = P_{H_0}$ проекторни оламиз (4.4-§). P ўз-ўзига қўшма ва мусбат операторлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $y\in H$ учун $y - Py\perp H_0$, ихтиёрий $x\in H$ учун, $0 = (Px, y - Py) = (Px, y) - (Px, Py)$, яъни

$$(Px, y) = (Px, Py).$$

Шунга ўхшаш, $(x, Py) = (Px, Py)$, демак,

$$(Px, y) = (x, Py)$$

ва

$$(Px, x) = (Px, Px) = \|Px\|^2\geqslant 0,$$

яъни P—мусбат оператордир.

Ихтиёрий $T\in L(H)$ операторнинг T^* қўшма оператори ҳам чизиқли ва узлуксиз бўлгани учун T операторга T^* операторни мос қўйиш амали$^*: L(H)\rightarrow L(H)$ акс эттиришдир (бу амал *инволюция* дейилади). Энди H комплекс Гильберт фазоси бўлсин.

3-теорема. $^*: L(H)\rightarrow L(H)$ *амали қуйидаги хоссаларга эга:*

1) $(T^*)^* = T$;

2) $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \bar{\alpha}T_1^* + \bar{\beta}T_2^*$;

3) $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$;

4) T^*T — *мусбат оператор,* $T + T^*$ ва $i\,(T - T^*)$ — *Эрмит операторлари*;

5) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$;

6) $I^* = I$, $I: H\rightarrow H$ *бирлик оператор*;

7) *агар* T^{-1} *оператор мавжуд бўлса, у ҳолда* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Исбот. 1) Ихтиёрий x, $y\in H$ элементлар учун (4) формулага биноан $(Tx, y) = (x, T^*y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(y, T^*)^*x)} = ((T^*)^*x, y)$, яъни $((T^*)^*x - Tx, y) = 0$. Демак, $(T^*)^*x = Tx$, $(T^*)^* = T$;

$$2)\ (x,\ (\alpha T_1 + \bar{\beta} T_2)^* y) = ((\alpha T_1 + \beta T_2)x, y) =$$
$$= (\alpha T_1\ x,\ y) + (\beta T_2 x,\ y) = (T_1(\alpha x), y) +$$
$$+ (T_2(\beta x),\ y) = (\alpha x,\ T_1^* y) + (\beta x,\ T_2^* y) = (\bar{x}, \alpha T_1^* y) +$$
$$+ (x, \bar{\beta} T_2^* y) = (x,\ (\bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*) y),$$

$$\text{яъни } (\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \bar{\beta} T_2^*;$$

$$3)\ (x,\ (T_1 T_2)^* y) = (T_1 T_2 x,\ y) = (T_1(T_2 x),\ y) =$$
$$= (T_2 x,\ T_1^* y) = (x,\ T_2^*(T_1^* y)) = (x,\ T_2^*\ T_1^* y),$$

яъни $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$;

4) Ихтиёрий $x,\ y \in H$ элементлар учун $(T^*Tx,\ y) = (x, (T^*T)^* y) = (x,\ T^*(T^*)^* y) = (x,\ T^*Ty)$, яъни T^*T—Эрмит оператори ва $(T^*Tx,\ x) = (Tx,\ Tx) = \|Tx\|^2 \geqslant 0$,

яъни T^*T — мусбат оператор.

$$((T + T^*)x, y) = (x, (T + T^*)^* y) = (x, (T^* + T^{**})y) =$$
$$= (x,\ (T^* + T)y) = (x,\ (T + T^*)y),$$

яъни $T + T^*$ — Эрмит оператори.

Сўнг $(i(T - T^*)x,\ y) = ((T - T^*)(ix), y) =$
$= (ix,\ (T - T^*)^* y) = (ix,\ ((T^* - T)y)) =$
$= (x, \bar{i}(T^* - T)y), = (x,\ i(T - T^*)y)$, демак, $i(T - T^*)$ — Эрмит оператори.

5) Маълумки, ихтиёрий $T_1,\ T_2 \in L(H)$ операторлар учун $\|T_1\ T_2\| \leqslant \|T_1\|\ \|T_2\|$. Демак, $\|T^*T\| \leqslant \leqslant \|T^*\|\ \|T\| = \|T\|^2$.

Аммо Коши-Буняковский тенгсизлигидан ушбу тенгсизлик келиб чиқади:

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Tx, Tx) = \sup_{\|x\|=1} (x,\ T^*Tx) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\|=1} \|x\|\ \|T^*Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|T^*Tx\| = \|T^*T\|.$$

Демак, $\|T\|^2 = \|T^*T\|$. Энди T ўрнида T^* операторни олсак, ушбу

$$\|TT^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$$

тенглик ҳосил бўлади, яъни $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$.

6) Ўз-ўзидан равшан.

7) Агар $T^{-1}\ T = T\ T^{-1} = I$ бўлса, у ҳолда $(T^{-1}\ T)^* = (TT^{-1})^* = I^* = I$, яъни $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^* T^* = I$. Демак, $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Мисоллар. 3. T чизиқли оператор C^n фазони C^n фазога акс эттирувчи бўлиб, $T=(t_{ij})$ матрица ёрдамида берилган бўлсин.

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in C^n, \ y=Tx= \\ =(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in C^n$$

бўлса, у ҳолда

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j .$$

Худди 1-мисолдагидек, T^* оператор $(\overline{a}_{ji})$ матрица билан ифодаланишини кўрсатиш мумкин. Демак, T оператор Эрмит оператори бўлиши учун ушбу

$$a_{ij}=\overline{a}_{ji}$$

муносабат зарур ва кифоядир.

4. L_2 $[a, b]$ комплекс Гильберт фазосида Фредгольм операторини кўрамиз;

$$Tx(t)=\int_a^b K(t,s)\ x(s)ds, \tag{5}$$

бу ерда $x(t)\in L_2[a, b]$, $\int_a^b\int_a^b K^2\ (t,s)dsdt=K^2<\infty$.

Шу оператор учун қўшма операторни топамиз. L_2 $[a, b]$ фазода скаляр кўпайтма ушбу

$$(x, y)=\int_a^b x\ (t)\ \overline{y\ (t)}dt$$

кўринишда бўлгани учун

$$(Tx, y)=\int_a^b \overline{y(t)}\left[\int_a^b K(t, s)\,x(s)ds\right]dt.$$

Фубини теоремасига асосан

$$(Tx, y)=\int_a^b\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,\overline{y(t)}dtds= \\ =\int_a^b x(s)\left[\int_a^b K(t,s)\,\overline{y\ (t)}\,dt\right]ds=(x, z),$$

бу ерда

$$\overline{z\ (s)}=\int_a^b K(t,s)\,\overline{y\ (t)}\,dt,$$

яъни

$$z(t)=\int_a^b \overline{K(s,\ t)}\ y(s)ds.$$

Демак,

$$T^*y=\int_a^b \overline{K(s,\ t)}\ y(s)ds.$$

Натижада қуйидаги теорема исботланди.

4-теорема. *Агар* L_2 $[a,\ b]$ *фазода* T *Фредгольм оператори* $K(t,\ s)$ *ўзак билан аниқланса, у ҳолда* T^* оператор $\overline{K(s,\ t)}$ *ўзак билан аниқланади.*

Натижа. (5) формула билан аниқланган Фредгольм оператори Эрмит оператори бўлиши учун ушбу

$$K(t,\ s)=\overline{K(s,\ t)}$$

тенгликнинг ўринли бўлиши зарур ва кифоядир.

5. Ҳақиқий $L_2[a,\ b]$ фазода (5) формула ёрдамида аниқланган Фредгольм операторига қўшма оператор $K(s,\ t)$ ядро билан аниқланади ва T симметрик оператор бўлиши учун ушбу

$$K(t,\ s)=K(s,\ t)$$

муносабат зарур ва кифоядир.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. $C[a,\ b]$ фазода ушбу

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,dt,\quad x\in C[a,\ b]$$

тенглик билан аниқланган функционал узлуксиз ва чизиқли эканлигини исботлаб, унинг нормасини топинг.

2. Юқоридаги масалани ушбу

$$F(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)dt,\quad x\in C[a,\ b]$$

функционал учун ечинг, бу ерда $y_0(t)\in C[a,\ b]$ — бирор тайинланган функция.

3. $C\ [a,\ b]$ фазода δ_{t_0} функционални қуйидагича аниқлаймиз:

$$\delta_{t_0}(x)=x(t_0).$$

Унинг узлуксиз ва нормаси бирга тенг эканлигини исботланг.

4. Рефлексив нормаланган фазонинг ихтиёрий ёпиқ қисм фазоси ҳам рефлексив эканлигини исботланг.

5. Банах фазоси рефлексив бўлиши учун унинг қўшма фазоси рефлексив бўлиши зарур ва кифоялигини исботланг.

6. C^2 $[a, b]$ фазо рефлексив эмаслигини исботланг.

7. Бирор H Гильберт фазосида $\{x_n\}$ кетма-кетлик x элементга суст яқинлашиб, $\|x_n\| \to \|x\|$, $n \to \infty$ муносабат бажарилсин. Бу ҳолда x_n кетма-кетлик x элементга кучли яқинлашувчи эканлигини исботланг.

8. Юқоридаги масалани $\|x_n\| \to x\|$ шарт ўрнига $\|x_n\| \leqslant \|x\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ шарт олинганда исботланг.

9. Бирор Банах фазосида ёпиқ бўлган, аммо суст топологияда ёпиқ бўлмаган тўпламга мисол келтиринг.

10. Нормаланган фазода бирор тўплам суст топологияда чегараланган бўлиши учун у норма бўйича чегараланган бўлиши зарур ва кифоялигини исботланг.

11. C $[a, b]$ фазода $\{x_n\}$ кетма-кетлик x элементга суст яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ихтиёрий $t \in [a, b]$ учун $x_n(t) \to x(t)$ эканлигини кўрсатинг.

12. C $[a, b]$ фазо суст топологияда тўла эмаслигини кўрсатинг.

13. Нормаланган E фазо учун E' фазодаги σ (E', E'') топология σ (E', E) топологиядан кучлироқ эканлигини исботланг.

14. Агар E рефлексив Банах фазоси бўлса, у ҳолда ихтиёрий $T \in L$ (E) учун $T^{**} = T$ тенгликни исботланг.

15. T чизиқли оператор H Гильберт фазосида берилган бўлсин. Агар бирор $H_0 \subset H$ қисм фазонинг ихтиёрий h_0 элементи учун $Th_0 \in H_0$ бўлса, H_0 қисм фазо T операторга нисбатан *инвариант* дейилади. Агар H_0 қисм фазо T операторга нисбатан инвариант бўлса, у ҳолда $H_0^{\perp}$ қисм фазо T га Эрмит қўшма бўлган T^* операторга нисбатан инвариант эканлигини кўрсатинг.

16. H Гильберт фазосида чегараланган $P: H \to H$ оператор бирор H_0 қисм фазога проектор бўлиши учун у қуйидаги шартларни қаноатлантириши зарур ва кифоя эканлигини исботланг:

а) $P^2 = P$;
б) $P^* = P$.

IX боб

СПЕКТРАЛ АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Мазкур боб давомида учрайдиган барча вектор фазоларни C комплекс сонлар майдони устида қурамиз. Бу талаб комплекс сонлар майдонининг алгебраик ёпиқлиги билан боғлиқ.

9.1-§. Спектр ва резольвента

E комплекс Банах фазосида аниқланган ва қийматлари ҳам E да бўлган чегараланган чизиқли T оператор берилган бўлсин. λ комплекс параметрга боғлиқ бўлган $\{T-\lambda I\}$ операторлар системасини оламиз. Равшанки, ҳар бир λ учун $T-\lambda I$ чегараланган чизиқли оператор.

Таъриф. Агар $\lambda_0 \in C$ учун $(T-\lambda_0 I)^{-1}$ оператор мавжуд бўлиб, чегараланган бўлса, λ_0 сон T оператор учун *регуляр қиймат* дейилади. Регуляр қиймат бўлмаган комплекс сонлар тўплами T операторнинг *спектри* дейилади ва σ (T) билан белгиланади.

Демак, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ бўлса, ё $(T-\lambda_0 I)^{-1}$ мавжуд эмас, ёки $(T-\lambda_0 I)^{-1}$ чегараланмаган оператордир. Агар E чекли ўлчамли нормаланган фазо бўлса, $\sigma(T)$ спектр фақат шундай λ лардан иборатки, улар учун $(T-\lambda I)^{-1}$ мавжуд эмас, чунки чекли ўлчамли нормаланган фазода ҳар қандай чизиқли оператор чегараланган. Бу ҳолда чизиқли алгебра курсидан маълумки, $\lambda \in \sigma(T)$ учун $Tx=\lambda x$ тенглама нолдан фарқли x_0 ечимга эга, яъни

$$Tx_0=\lambda x_0, \; x_0 \neq \theta.$$

Демак, чекли ўлчамли фазода чизиқли операторнинг спектри фақат хос қийматлардан иборат ва уларнинг сони кўпи билан dim E га тенг.

Чексиз ўлчамли фазоларда масала мураккаброқ. VII бобдан бизга маълумки, чизиқли чегараланган $A: E \rightarrow E$ операторнинг тескариси мавжуд ва чегараланган бўлиши учун қуйидаги 2 шартнинг бажарилиши зарур ва кифоя:

1) A — қуйидан чегараланган, яъни шундай $m>0$ мавжудки,

$$\|Ax\| \geqslant m\|x\|, \quad \forall x \in E;$$

2) A операторнинг қийматларидан иборат тўплам E да зич:

$$\overline{\operatorname{Im} A} = E.$$

Шундай қилиб, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ бўлса, $A = T - \lambda_0 I$ оператор учун юқоридаги икки шартнинг камида бири ўринли эмас. Биринчи шартни қаноатлантирмайдиган λ лар тўпламини $\pi(T)$, иккинчи шартни қаноатлантирмайдиган λ лар тўпламини эса $\gamma(T)$ билан белгилаймиз. Демак,

$$\sigma(T) = \pi(T) \cup \gamma(T).$$

Таъриф. Чизиқли операторнинг хос қийматларидан иборат тўплам операторнинг *дискрет спектри* дейилади; уни $\pi_0(T)$ билан белгилаймиз. $\gamma(T) \setminus \pi_0(\mathrm{T}) = \sigma_{\text{қолд}}(T)$ тўплам операторнинг *қолдиқ спектри*, $\pi(T) \setminus [\gamma(T) \cup \pi_0(T)] = \sigma_{\text{узл}}(T)$ тўплам эса операторнинг *узлуксиз спектри* дейилади.

Тузилишига кўра $\pi_0(T)$, $\sigma_{\text{қолд}}(T)$ ва $\sigma_{\text{узл}}(T)$ тўпламларнинг ихтиёрий иккитаси ўзаро кесишмайди ва

$$\sigma(T) = \pi_0(T) \cup \sigma_{\text{қолд}}(T) \cap \sigma_{\text{узл}}(T).$$

Юқорида кўрдикки, чекли ўлчамли фазоларда $\sigma(T) = \pi_0(\mathrm{T})$. Демак, $\sigma_{\text{қолд}}(T) = \emptyset$ ва $\sigma_{\text{узл}}(T) = \emptyset$. Чексиз ўлчамли фазоларда, умуман айтганда, қолдиқ спектр ва узлуксиз спектр бўш бўлмаслиги мумкин. Буни тасдиқловчи бир неча мисол келтирамиз.

1) $C[0, 1]$ комплекс фазода, яъни $[0, 1]$ да аниқланган узлуксиз комплекс функциялар фазосида қуйидаги операторни оламиз:

$$Tx(t) = t \cdot x(t).$$

Равшанки, $T: C[0,1] \to C[0,1]$ оператор чизиқли ва чегараланган. Агар λ_0 комплекс сон учун $\lambda_0 \bar{\ni} [0, 1]$ бўлса, $T - \lambda_0 I$ операторнинг тескариси мавжуд ва чегараланган. Ҳақиқатан,

$$(T - \lambda_0 I)^{-1} x(t) = \frac{x(\mathrm{t})}{\mathrm{t} - \lambda_0}.$$

$t \in [0, 1]$ ва $\lambda_0 \bar{\in} [0, 1]$ бўлгани учун $t - \lambda_0 \neq 0$ ва $\left|\frac{1}{t - \lambda_0}\right|$ юқоридан чегараланган. Демак, $C \setminus [0, 1]$ тўплам регуляр нуқталардан иборат. Энди $\lambda_0 \in [0, 1]$ бўлсин. У ҳолда $T - \lambda_0 I$ оператор қуйидан чегараланмаган, яъни

$$\|(T - \lambda_0 I)x\| \geqslant m \cdot \|x\| \quad \forall x \in C[0, 1]$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи мусбат $m > 0$ мавжуд эмас. Дарҳақиқат, қуйидаги функциялар кетма-кетлигини оламиз:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, \text{ агар } t \overline{\in} \left[\lambda_0 - \frac{1}{n}, \ \lambda_0 + \frac{1}{n}\right] \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } t = \lambda_0 \text{ бўлса,} \\ \left[\lambda_0 - \frac{1}{n}, \ \lambda_0\right] \text{ ва } \left[\lambda_0, \ \lambda_0 + \frac{1}{n}\right] \text{ оралиқларда чизиқ-} \end{cases}$$

ли функция.

Равшанки, $x_n \in C[0, 1]$ ва $\|x_n| = 1$. Шу билан бирга

$$\|(T - \lambda_0 I)x_n\| = \max_{t \in [0,1]} |(t - \lambda_0)x_n(t)| < \frac{1}{n},$$

яъни $T - \lambda_0 I$ оператор қуйидан чегараланмаган. Демак, $\lambda_0 \in \pi(T)$. Иккинчи томондан, $T - \lambda_0 I$ операторнинг қийматларидан иборат тўплам $t = \lambda_0$ нуқтада 0 га айланувчи функциялардан ташкил топган. У ҳолда C $[0, 1]$ да норма бўйича яқинлашишдан ҳар бир $t \in [0, 1]$ нуқтада яқинлашиш келиб чиқиши туфайли $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda_0 I)} \neq C[0, 1]$. Белгилашимизга кўра $\lambda_0 \in \gamma(T)$. Шундай қилиб,

$$\sigma(T) = \pi(T) = \gamma(\mathrm{T}) = [0, 1].$$

Ниҳоят,

$$tx(t) = \lambda x(t), \ t \in [0, 1]$$

тенглама ($x(t)$ га нисбатан) нолдан фарқли ечимга эга эмас. Демак, $\pi_0(T) = \varnothing$ ва шунинг учун $Tx(t) = t \cdot x(t)$ операторнинг дискрет ва узлуксиз спектрлари бўш тўпламлар экан. Натижада

$$\sigma(T) = \sigma_{\text{қолд}}(T) = [0, 1]; \ \sigma_{\text{узл}}(T) = \pi_0(T) = \varnothing.$$

2. l_2 комплекс Гильберт фазосида диагонал оператор қуйидаги формула билан аниқланади:

$$T(\xi_1, \ \xi_2, \ldots) = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \ldots), \text{ бу ерда } (\xi_1, \xi_2, \ldots) = \\ = x \in l_2. \ \alpha_i, \in C, \ i = 1, 2, \ldots$$

T нинг диагонал оператор дейилишига сабаб, бу оператор l_2 нинг каноник базисида чексиз диагонал матрица кўринишида ёзилади:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & & \cdot\cdot\cdot \end{pmatrix}.$$

Агар $\sup \|\alpha_i\| < +\infty$ бўлса, T — чегараланган оператор (7,3-§, 6-мисол). $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ белгилашни киритиб, қуйидаги тенгликларни исбот қиламиз:

а) $\pi_0(T) = M$;
б) $\sigma_{\text{узл}}(T) = \overline{M} \setminus M$;
в) $\sigma(T) = \overline{M}$, $\sigma_{\text{қолд}} = \varnothing$.

а) $M \subset \pi_0(T)$ муносабат ўринли эканлиги равшан. $\pi_0(T) \subset M$ муносабатни кўрсатамиз. Агар $\lambda \in \pi_0(T)$ бўлса, шундай $x_0 \neq \theta$ мавжудки, $(T - \lambda\, I)x_0 = \theta$. Демак,

$$((\alpha_1 - \lambda)\ \xi_1,\ (\alpha_2 - \lambda)\ \xi_2,\ (\alpha_3 - \lambda)\ \xi_3,\ \ldots)) = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

$x_0 \neq \theta$ бўлгани учун бирор $\xi_k \neq 0$. У ҳолда $\lambda = \alpha_k \in M$.

Энди б) ва в) тенгликларни исботлаймиз. Аввал $\pi(T) = \overline{M}$ ва $\gamma(T) = \pi_0(T)$ тенгликларни кўрсатайлик. Агар $\lambda \in C \setminus \overline{M}$ бўлса, λ регуляр қиймат эканлиги равшан. Шунинг учун $\pi(T) \subset \overline{M}$. Агар $\lambda \in \overline{M}$ бўлса, λ га яқинлашувчи $\{\alpha_{n_k}\} \subset M$ қисм кетма-кетлик мавжуд. У ҳолда барча n лар учун ушбу

$$\| \lambda - \alpha_n | \geqslant \beta > 0$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи β мавжуд эмас. Демак, $T - \lambda\, I$ оператор қуйидан чегараланмаган, яъни $\lambda \in \pi(T)$. Шундай қилиб, $\pi(T) = \overline{M}$.

Энди $\gamma(T) = \pi_0(T)$ тенгликни исботлаймиз. Агар $\lambda \in \pi_0(T)$ бўлса, а) га кўра бирор k учун $\lambda = \alpha_k$. У ҳолда $\operatorname{Im}(T - \lambda I)$ тўплам k-координатаси 0 га тенг бўлган векторлардан иборат. Демак, $\overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq l_2$, яъни $\pi_0(T) \subset \gamma(T)$. Аксинча, $\lambda \in \gamma(T)$ бўлсин. У ҳолда

$$\overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq l_2.$$

Шундай қилиб, $(\overline{\mathrm{Im}(T-\gamma I)})^{\perp} \neq \{\theta\}$. Иккинчи томондан, ихтиёрий H Гильберт фазосида чегараланган B чизиқли оператор учун

$$(\overline{\mathrm{Im}B})^{\perp} = \ker B^*$$

тенглик ўринли; бу ерда $\ker B^*$ тўплам B^* қўшма операторнинг ядроси. Дарҳақиқат, ихтиёрий $x \in \ker B^*$ ва $y \in \mathrm{Im}\, B$ учун $B^*x = \theta$ ва $y = Bz$. Демак, $(x, y) = (x, Bz) = (B^* x, z) = (\theta, z) = 0$, яъни $x \perp \mathrm{Im}\, B$. Бундан $x \perp \overline{\mathrm{Im}\, B}$, яъни $\ker B^* \subset (\overline{\mathrm{Im}B})^{\perp}$.

Аксинча ихтиёрий $z \in (\overline{\mathrm{Im}\, B})^{\perp}$ ва $x \in l_2$ учун $Bx \in \mathrm{Im}\, B$, ва демак,

$$(B^* z, x) = (z, Bx) = 0.$$

Бу ерда x ихтиёрий бўлгани сабабли $B^*z = \theta$, яъни $z \in \ker B^*$. Бундан $\ker B^* \supset (\overline{\mathrm{Im}\, B})^{\perp}$. Демак, шундай $x_0 \in l_2 (x_0 \neq \theta)$ мавжудки,

$$(T - \lambda I)^* x_0 = \theta. \qquad (1)$$

T диагонал оператор бўлгани учун $T^*T = TT^*$. Қуйидаги

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) = \\ = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2$$

тенгликдан $\|Tx\| = \|T^*x\|$, $\forall x \in l_2$ келиб чиқади. Демак, (1) га кўра

$$\|(T - \lambda I)x_0\| = \|(T - \lambda I)^* x_0\| = 0,$$

яъни $Tx_0 = \lambda x_0$. Бундан эса $\lambda \in \pi_0(T)$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $\pi_0(T) = \gamma(T) = M$. У ҳолда, аниқланишига кўра

$$\sigma_{\text{узл}}(T) = \overline{M} \setminus M, \ \sigma(T) = \overline{M}, \ \sigma_{\text{қолд}}(T) = \varnothing.$$

Юқорида биз спектрнинг ички тузилишини мисолларда кўрдик. Энди спектрнинг асосий хоссалари билан танишамиз.

1-теорема. *Спектр ёпиқ тўпламдир.*

Исбот. Таърифга кўра, спектр — регуляр нуқталар тўпламининг тўлдирувчиси. Демак, регуляр нуқталар тўпламининг очиқлигини кўрсатиш кифоя. Ҳақиқатан, λ_0 регуляр нуқта бўлсин. У ҳолда $(T - \lambda_0 I)^{-1}$ оператор мавжуд ва чегараланган. Ушбу

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|} \qquad (2)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\lambda \in C$ учун $T - \lambda I$ операторни кўрайлик. Равшанки,

$$B = (T - \lambda_0 I)^{-1}[(T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)]$$

ифода маънога эга ва $B : E \to E$. Иккинчи томондан эса

$$\|B\| = \|(T - \lambda_0 I)^{-1}. [(T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)]\| = \\ = \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| \cdot |\lambda - \lambda_0|.$$

(2) га кўра $\|B\| < 1$. Модомики $\|B\| < 1$ экан, 7.4-§ дан маълумки, $(I + B)^{-1}$ мавжуд ва чегараланган. Агар B ни қуйидаги

$$B = (T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda_0 I) = \\ = (T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda I) - I$$

кўринишда ёзиб олсак,

$$I + B = (T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)$$

бўлади. Демак, $(T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)$ оператор тескариланувчи, яъни чегараланган тескари операторга эга. У ҳолда

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) \cdot [(T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)]$$

айниятга кўра $T - \lambda I$ оператор тескариланувчи, чунки

$$T - \lambda_0 I \text{ ва } (T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)$$

тескариланувчи. Шундай қилиб, (2) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча λ лар учун $(T - \lambda I)^{-1}$ мавжуд ва чегараланган оператор, яъни λ_0 регуляр қийматлар тўпламининг ички нуқтаси. Демак, спектр ёпиқ тўпламдир.*

2-теорема. *Ҳар қандай чегараланган T операторнинг спектри чегараланган тўплам ва радиуси $\|T\|$ га тенг доира ичида жойлашган.*

Исбот. Агар $|\lambda| > \|T\|$ бўлса, $\left\|\frac{1}{\lambda} T\right\| < 1$ тенгсизлик ўринли. Демак, $\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1}$ мавжуд ва чегараланган. У ҳолда

$$T - \lambda I = \lambda\left(\frac{1}{\lambda} T - I\right)$$

ҳам тескариланувчи. Шундай қилиб, $|\lambda| > \|T\|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча λ лар T оператор учун регуляр қийматдир, яъни қуйидаги муносабат ўринли:

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in C : |\lambda| \leqslant \|T\|\}.*$$

Спектрнинг яна ҳам чуқурроқ хоссаларини ўрганиш учун бир неча тушунчалар киритамиз.

Таъриф. λ регуляр қиймат учун

$$R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$$

оператор *резольвента* (аниқроғи, *T операторнинг резольвентаси*) дейилади.

Таърифга кўра $R(\lambda)$ комплекс аргумент λ нинг функцияси бўлиб, қийматлари эса E ни E га акслантирувчи чизиқли чегараланган операторлардан иборат. Демак,

$$R(\cdot): C\setminus\sigma(T) \to L(E),$$

бу ерда $L(E)$—чегараланган операторлар фазоси.

Таъриф. Комплекс текисликдаги G очиқ соҳада аниқланган ва қийматлари F Банах фазосига тегишли бўлган $g(\lambda)$ функция берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $f \in F'$ учун ушбу

$$\varphi(\lambda) = f(g(\lambda)),\ \varphi : G \to C$$

комплекс функция G да аналитик бўлса, у ҳолда $g(\lambda)$ бу соҳада *суст аналитик функция* дейилади.

3-теорема. $R(\lambda)$ *резольвента* $C\setminus\sigma(T)$ *очиқ соҳада ва* ∞ *нуқтада суст аналитик функция ҳамда* $R(\infty) = 0$.

Исбот. Ҳақиқатан, $\lambda_0 \in C\setminus\sigma(T)$ ва f Банах фазоси $L(E)$ да аниқланган чизиқли узлуксиз функционал бўлсин. Юқоридаги 1-теореманинг исботида кўрганимиздек, етарли кичик $|\lambda - \lambda_0|$ учун $R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$ мавжуд ва

$$T - \lambda I = [I - (T - \lambda_0 I)^{-1}(\lambda - \lambda_0)](T - \lambda_0 I)$$

тенгликка кўра

$$R(\lambda) = R(\lambda_0)[I - R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)]^{-1} \qquad (3)$$

айният ўринли. Демак, $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$ бўлса, $[I - R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)]^{-1}$ ифодани қуйидаги қаторга ёйишимиз мумкин:

$$[I - R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)]^n .$$

У ҳолда (3) га кўра f узлуксиз бўлгани сабабли

$$f(R(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda-\lambda_0)^n$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $a_n = f\{[R(\lambda_0)]^{n+1}\}$. Равшанки,

$$|a_n| = |f\{[R(\lambda_0)]^{n+1}\}| \leqslant \|f\cdot\|\,\|R(\lambda_0)\|^{n+1}.$$

Шундай қилиб, $|\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$ тенгсизликдан $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda-\lambda_0)^n$ қаторнинг абсолют яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Демак, $f(R(\lambda))$ аналитик функция, яъни $R(\lambda)$ — суст аналитик функция.

Энди ∞ нуқтанинг атрофини кўрайлик. Агар $\lambda \neq 0$ бўлса ушбу

$$T - \frac{1}{\lambda} I = -\frac{1}{\lambda}(I-\lambda T)$$

муносабатдан

$$R\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(T-\frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} = -\lambda(I-\lambda T)^{-1}$$

келиб чиқади, яъни

$$R\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\lambda(I+\lambda T+\lambda^2 T^2+\dots). \qquad (4)$$

Демак, $\lambda\to 0$ да $R(\infty)=0$ тенглик ўринли ва (4) га мувофиқ $R(\lambda)$ функция $\lambda=\infty$ нуқтада суст аналитик бўлади.*

4-теорема. *Ҳар қандай чегараланган чизиқли операторнинг спектри бўш бўлмаган тўпламдир.*

Исбот. $\sigma(T)=\varnothing$ деб фараз қилайлик. 3-теоремада исбот қилинганига кўра $R(\lambda)$ функция C комплекс текисликда ва ∞ нуқтада суст аналитик. Демак, $L(E)$ да аниқланган f узлуксиз чизиқли функционал учун $f(R(\lambda))$ комлекс функция аналитик бўлади. Агар $f(R(\lambda))$ функциянинг ∞ нуқтада аналитик эканлигини ва $f(R(\infty))=0$ тенгликни ҳисобга олсак, $f(R(\lambda))$ функция ∞ нуқтанинг атрофида чегараланганлиги келиб чиқади. Яъни шундай $M_1>0$ ва $r>0$ мавжудки, $\lambda\,(|\lambda|>r)$ учун ушбу

$$|f(R(\lambda))| \leqslant M_1$$

тенгсизлик ўринли. Демак. $f(R(\lambda))$ функция комплекс текисликда чегараланган. Лиувилль теоремасига кўра $f(R(\lambda))$ ўзгармас функция:

$$f(R(\lambda)) = \text{const}.$$

Агар $f(R(\infty)) = 0$ тенгликни инобатга олсак, ушбу

$$f(R(\lambda)) \equiv 0$$

айниятни ҳосил қиламиз. Бу ерда f ихтиёрий узлуксиз функционал бўлгани учун Хан-Банах теоремасининг натижасига кўра

$$R(\lambda) \equiv 0.$$

Иккинчи томондан эса

$$R(\lambda)\cdot(T - \lambda I) = I,$$

демак, $R(\lambda) \neq 0$. Шундай қилиб, $\sigma(T) = \varnothing$ фаразимиз зиддиятга олиб келди.*

Чизиқли операторларни ўрганишда спектрни локализациялаш (ажратиш) масаласи муҳим аҳамиятга эга. Юқоридаги 2-теоремада спектрнинг чегараланган тўплам эканлигини кўрсатдик.

Ушбу

$$\rho(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

сон T операторнинг *спектрал радиуси* дейилади.

5- теорема. *Ихтиёрий чегараланган чизиқли* T *оператор учун* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$ *мавжуд ва*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} = \rho(T). \tag{5}$$

Исбот. Агар ушбу

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} \geqslant \rho(T), \tag{6}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant \rho(T) \tag{7}$$

тенгсизликларни кўрсатсак, теорема исбот қилинган бўлади.

а) (6) тенгсизликнинг исботи. Ихтиёрий n натурал сон учун

$$\rho(T^n) = \sup_{\mu \in \sigma(T^n)} |\mu| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|^n = (\rho(T))^n \tag{8}$$

муносабат ўринли эканлигини текшириш қийин эмас. 2-теоремада исбот қилганимизга кўра

$$\rho(T^n) \leqslant \|T^n\|. \tag{9}$$

(8) ва (9) дан ихтиёрий n учун

$$\rho(T) \leqslant \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

тенгсизликни ҳосил қиламис. Демак, хусусан

$$\rho(T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

ва (6) тенгсизлик ўринли.

б) (7) тенгсизликнинг исботи. Агар λ_0 комплекс сон $|\lambda_0| < \frac{1}{\rho(T)}$ тенгсизликни қаноатлантирса, $\frac{1}{\lambda_0}$ регуляр қиймат бўлади. Демак, $R(\lambda)$ резольвента $\frac{1}{\lambda_0}$ нуқтада суст аналитик. У ҳолда ихтиёрий $f \in [L(E)]'$ учун (4) га асосан

$$f\left(R\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f(T^n). \tag{10}$$

Бу Тейлор қатори $|\lambda| < \frac{1}{\rho(T)}$ бўлганда Коши аломатига кўра яқинлашувчи. Қаторнинг яқинлашувчилигидан эса $|\lambda^n f(T^n)|$ сонларнинг нолга яқинлашиши келиб чиқади. Демак, ихтиёрий $f \in [L(E)]'$ учун $n \to \infty$ да $f(\lambda^n T^n) \to 0$, яъни $\{\lambda^n T^n\} \subset L(E)$ кетма-кетлик нолга суст яқинлашувчидир (8.3-§).

8.3-§ даги 1-теоремага асосан шундай $c > 0$ сон мавжудки,

$$\|\lambda^n T^n\| \leqslant c, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

яъни

$$|\lambda^n| \cdot \|T^n\| \leqslant c.$$

Охирги муносабатдан эса

$$|\lambda| \sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant \sqrt[n]{c}.$$

Энди $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}. \tag{11}$$

Шундай қилиб, (11) муносабат $|\lambda| < \frac{1}{\rho(T)}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча λ лар учун ўринли. Демак. (11) да $\lambda \to \frac{1}{\rho(T)}$ да лимитга ўтилса,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|T^n\|}\leqslant\rho(T)$$

келиб чиқади, яъни (7) тенгсизлик ўринли.*

Мисол сифатида Вольтерра операторини кўрайлик. Вольтерра оператори $C\,[a, b]$ фазода қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$(Tx)(t)=\int_a^t K(t, s)\,x(s)\,ds,$$

бу ерда $K\,(t, s)$ ўзак бўлиб, $\Delta=\{(t, s): a\leqslant t\leqslant b;\ a\leqslant s\leqslant b\}$ тўпламда аниқланган узлуксиз функция. Равшанки, $T: C[a, b]\to C[a, b]$ чегараланган чизиқли оператор. Вольтерра операторининг спектрал радиусини топиш учун ушбу белгилашни киритамиз:

$$\max_{(t, s)\in\Delta}|K(t, s)|=M.$$

Операторнинг тузилишига кўра

$$T^2x(t)=T(T\,x(t))=\int_a^t [K(t, s_1)\int_a^{s_1}K(s_1, s_2)\,x(s_2)\,ds_2]\,ds_1$$

ёки умумий ҳолда

$$T^nx(t)=\int_a^t[K(t, s_1)\int_a^{s_1}[K(s_1, s_2)\ \dots$$

$$\dots\int_a^{s_{n-1}}K(s_{n-1}, s_n)\,x(s_n)ds_n]\dots]\,ds_1.$$

Агар $|K(t, s)|\leqslant M$ тенгсизликни ҳисобга олсак,

$$|T^n x(t)|\leqslant M^n\cdot\int_a^t\Big[\Big[\int_a^{s_1}\dots\int_a^{s_{n-1}}ds_n\Big]ds_{n-1}\Big]\dots\Big]\,ds_1\cdot\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x\,(t)\,|.$$

Математик анализ курсидан маълумки,

$$\int_a^t\int_a^{s_1}\dots\int_a^{s_{n-1}}ds_n ds_{n-1}\dots ds_1=\frac{(t-a)^n}{n!}.$$

Демак,

$$\|T^n\| \leqslant \frac{M^n(b-a)^n}{n!},$$

яъни

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant \frac{M\cdot(b-a)}{\sqrt[n]{n!}} \to 0.$$

Шундай қилиб, Вольтерра операторининг спектрал радиуси 0 га тенг.

Юқорида биз спектр ва резольвента тушунчасини фақат комплекс фазода аниқланган оператор учун киритдик ва теоремаларни исбот қилишда бу талабдан фойдаландик. Лекин амалда эса (баъзан математик физика масалаларида) тўла бўлмаган ёки фақат ҳақиқий сонлар майдони устида қурилган нормаланган фазоларда аниқланган операторларнинг спектрини топиш масалалари учрайди. Қуйидаги иккита изоҳ ёрдамида бу масалалар ўрганилган ҳолга келтирилади.

1-изоҳ. E тўла бўлмаган комплекс нормаланган фазо ва $T: E \to E$ чизиқли чегараланган оператор бўлсин. Маълумки, E ни тўлдириш мумкин (4. 1-§, 1-теорема). Ҳосил бўлган комплекс Банах фазосини $\overline{E}$ билан белгилаймиз. E фазо $\overline{E}$ да зич бўлганлиги ва $T: E \to E$ чегараланган бўлганлиги учун T операторни $\overline{E}$ фазога нормасини сақлаган ҳолда давом эттиришимиз мумкин (7.4-§ даги лемма). Натижада ҳосил бўлган операторни $\overline{T}$ билан белгилаб, T операторнинг спектрини қуйидагича киритамиз:

$$\sigma(T) = \sigma(\overline{T}).$$

2-изоҳ. E ҳақиқий Банах фазоси бўлсин. Чизиқли алгебра курсидан маълум бўлган тензор кўпайтма тушунчасидан фойдаланиб, янги $\tilde{E}$ фазони қуйидагича киритамиз:

$$\tilde{E} = C \oplus E.$$

Киритилган фазо E фазонинг *комплексификацияси* дейилади (тензор кўпайтма билан таниш бўлмаган ўқувчилар $\tilde{E}$ ни формал равишда $E \oplus iE$ деб тушунишлари мумкин).

Равшанки, $\tilde{E}$ комплекс Банах фазоси ва ихтиёрий $x \in \tilde{E}$ элементни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = y + iz,\ y,\ z \in E.$$

Ўз навбатида, бу тенгликдан фойдаланиб, T операторни $\tilde{E}$ га давом эттиришимиз мумкин:

$$Tx = Ty + iTz.$$

Табиий равишда T операторнинг спектри қуйидаги формула орқали киритилади:

$$\sigma(T) = \sigma(\tilde{T}).$$

9.2-§. Проекцион операторлар

Қуйида биз Гильберт фазосида аниқланган операторларнинг махсус синфларини ўрганамиз.

Таъриф. H Гильберт фазосида аниқланган P чизиқли оператор

1) $P^2 = P$,
2) $P^* = P$

шартларни қаноатлантирса, у *ортогонал проекциялаш оператори* дейилади.

Ихчамлик мақсадида, бу бобда ортогонал проекциялаш оператори ибораси ўрнида *проектор* сўзини ишлатамиз.

1-теорема. *Ҳар қандай проектор чегараланган оператор ва $P \neq 0$ бўлса,* $\|P\| = 1$.

Исбот. Ушбу

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^*Px, x) = (P^2x, x) = (Px, x)$$

муносабатдан Коши—Буняковский тенгсизлигига кўра

$$\|Px\|^2 \leqslant \|Px\| \cdot \|x\|.$$

Демак,

$$\|Px\| \leqslant \|x\|,$$

яъни P чегараланган ва $\|P\| \leqslant 1$. Иккинчи томондан, $\|P\| = \|P^2\| \leqslant \|P\|^2$, яъни $P \neq 0$ бўлса $\|P\| \geqslant 1$. Шундай қилиб, $\|P\| = 1$.*

Мисол. L тўплам H нинг ёпиқ қисм фазоси, $L^{\perp}$ эса унинг ортогонал тўлдирувчиси бўлсин. У ҳолда, маълумки,

$$H = L \oplus L^{\perp},$$

яъни ихтиёрий $x \in H$ векторни ягона усул билан қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = y + z, \; y \in L, \; z \in L^{\perp}. \tag{1}$$

P операторни

$$Px = y$$

тенглик орқали аниқлаймиз, яъни P оператор ҳар бир $x \in H$ га унинг L даги проекциясини мос қўяди. Киритилган оператор проектор эканлигини кўрсатамиз.

а) P чизиқли оператор. Ҳақиқатан, x_1, $x_2 \in H$ ва

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + z_1, \; y_1 \in L, \; z_1 \in L^{\perp} \\ x_2 &= y_2 + z_2, \; y_2 \in L, \; z_2 \in L^{\perp} \end{aligned} \tag{2}$$

бўлсин. У ҳолда ихтиёрий α, $\beta \in C$ учун

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2),$$

бу ерда $\alpha y_1 + \beta y_2 \in L$, $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L^{\perp}$. Агар (1) ёйилмада y ва z ягона усул билан аниқланишини ҳисобга олсак,

$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2,$$

яъни P — чизиқли оператор.

б) $P^* = P$. Юқоридаги (2) тенгликларда $y_1 \perp z_2$ ва $y_2 \perp z_1$ бўлгани учун
$(Px_1, x_2) = (y_1 \; y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (x_1, Px_2)$. Шундай қилиб, ихтиёрий x_1, $x_2 \in H$ учун

$$(Px_1, x_2) = (x_1, Px_2),$$

яъни $P = P^*$.

в) $P^2 = P$. Агар $x \in L$ бўлса, (1) ёйилмада $z = \theta$. Шунинг учун $Px = x$. Ихтиёрий $x' \in H$ учун $Px' \in L$. Демак,

$$P^2 x' = P(Px') = Px',$$

яъни $P^2 = P$.

а), б) ва в) га асосан P — проектор.

Юқорида кўрган мисолимиз умумий характерга эга. Аниқроғи, ушбу теорема ўринли.

2-теорема. *Ҳар қандай P проектор учун H нинг шундай ёпиқ L қисм фазоси мавжудки, Px вектор x векторнинг L даги проекциясига тенг.*

Исбот. $Px = x$ тенгламанинг ечимларидан иборат бўлган тўпламни L орқали белгилайлик. P чизиқли оператор бўлгани учун L чизиқли қисм фазони ташкил қилади. L нинг ёпиқ эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\{x_n\} \subset L$ ва $x_n \to x_0$ бўлсин. У ҳолда

$$Px_n = x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Демак,

$$Px_0 - x_n = Px_0 - Px_n = P(x_0 - x_n).$$

Агар $\|P\| \leqslant 1$ муносабатни ҳисобга олсак,

$$\|Px_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_n\|,$$

яъни $n \to \infty$ да

$$\|Px_0 - x_0\| = 0, \quad Px_0 = x_0$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, L — ёпиқ қисм фазо.

$P^2 = P$ шартга кўра ихтиёрий $x \in H$ учун

$$P^2x = P(Px) = Px$$

тенглик ўринли. Бундан $Px \in L$. Теореманинг исботини якунлаш учун $z = x - Px$ векторнинг L га ортогонал эканлигини кўрсатиш кифоя. Ҳақиқатан, ихтиёрий $y \in L$ учун $y = Py$, демак,

$$(x - Px,\ y) = (x - Px,\ Py) = (P^*(I - P)x,\ y) =$$
$$= (P(I - P)x,\ y) = ((P - P^2)\ x,\ y) = (\theta,\ y) = 0.$$

Шундай қилиб, ихтиёрий $x \in H$ учун $Px \in L$ ва $x - Px \in L^{\perp}$, яъни P оператор L га ортогонал проекциялаш оператори.$_*$

Энди проекторлар устида амалларни кўрамиз. Умуман айтганда, проекторларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси проектор бўлиши шарт эмас.

3-теорема. *Агар P проектор бўлса, $I-P$ ҳам проектор.*

Исбот. Ҳақиқатан,

$$(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$$

ва

$$(I - P)^* = I^* - P^* = I - P.$$

Демак, $I - P$ — проектор.$_*$

Агар P проектор L қисм фазога проекциялаш бўлса, уни P_L кўринишида ёзамиз.

4-теорема. *Иккита P_{L_1} ва P_{L_2} проекторнинг кўпайтмаси проектор бўлиши учун*

$$P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}P_{L_1} \qquad (3)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва кифоя. Агар (3) шарт бажарилса, у ҳолда

$$P_{L_1}P_{L_2}=P_L, \qquad (4)$$

бу ерда $L=L_1\cap L_2$.

Исбот. 1) агар $P_{L_1}P_{L_2}$ проектор бўлса,

$$P_L\,P_{L_2}=(P_{L_1}P_{L_2})^*=P^*_{L_2}P^*_{L_1}=P_{L_2}P_{L_1},$$

яъни (3) ўринли. Энди (4) ни текширамиз. Ушбу

$$P_Lx=P_{L_1}(P_{L_2}x)\in L_1,$$
$$P_Lx=P_{L_2}(P_{L_1}x)\in L_2$$

муносабатлардан $P_Lx\in L_1\cap L_2$ келиб чиқади, яъни

$$L\subset L_1\cap L_2.$$

Иккинчи томондан, агар $x\in L_1\cap L_2$ бўлса,

$$P_Lx=P_{L_1}(P_{L_2}x)=x,$$

яъни

$$L_1\cap L_2\subset L.$$

Демак,

$$L=L_1\cap L_2.$$

2) (3) ўринли бўлсин. У ҳолда

$$(P_{L_1}P_{L_2})^2=(P_{L_1}P_{L_2})(P_{L_1}P_{L_2})=P^2_{L_1}P^2_{L_2}=P_{L_1}P_{L_2},$$

ва

$$(P_{L_1}P_{L_2})^*=P^*_{L_2}P^*_{L_1}=P_{L_2}P_{L_1}=P_{L_1}P_{L_2}.$$

Шундай қилиб, $P_{L_1}P_{L_2}$ проектор. Юқорида кўрганимиздек, бундан $P_{L_1}P_{L_2}=P_L$ тенглик келиб чиқади.*

5-теорема. *Чекли сондаги $P_{L_1},\dots,P_{L_n}$ проекторларнинг йиғиндиси проектор бўлиши учун L_1, $L_2,\dots,L_n$ қисм фазоларнинг ихтиёрий иккитаси ўзаро ортогонал бўлиши зарур ва кифоя. Бу шарт бажарилганда,*

$$P_{L_1}+\dots+P_{L_n}=P_L,$$

бу ерда $L=L_1\oplus\dots\oplus L_n$ — тўғри йиғинди.

Исбот. 1) $L_i \perp L_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$ бўлсин. У ҳолда 4-теоремага асосан

$$P_{L_i} P_{L_j} = P_{L_j} P_{L_i} = 0.$$

Демак,

$$(P_{L_1} + \ldots + P_{L_n})^2 = P_{L_1}^2 + \ldots + P_{L_n}^2 =$$
$$= P_{L_1} + \ldots + P_{L_n}.$$

Сўнгра

$$(P_{L_1} + \ldots + P_{L_n})^* = P_{L_1} + \ldots + P_{L_n}.$$

Шундай қилиб, $P_{L_1} + \ldots + P_{L_n}$ — проектор.

Энди $P_{L_1} + \ldots + P_{L_n} = P_L$ тенгликни текширайлик. Агар $x \in \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L_i$ бўлса, $x = x_1 + \ldots + x_n$ ва $x_i \perp x_j (i \neq j)$, $x_i \in L_i$. У ҳолда

$$P_L x = (P_{L_1} + \ldots + P_{L_n})(x_1 + \ldots + x_n) =$$
$$= P_{L_1} x_1 + \ldots + P_{L_n} x_n = x,$$

яъни $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} L_i \subset L$. $L \neq \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L_i$ деб фараз қилайлик. У ҳолда шундай $z \neq \theta$ мавжудки, $z \in L$ ва $z \perp \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L_i$. Энди $z \in L$ дан

$$P_L z = z \neq \theta. \tag{5}$$

$z \perp \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L_i$ муносабатга асосан

$$z \perp L_i, \ i = \overline{1, n}$$

ёки

$$P_L z = P_{L_1} z + \ldots + P_{L_n} z = \theta$$

келиб чиқади. Бу эса (5) га зид. Шундай қилиб, $L = \bigominus\limits_{i=1}^{n} L_i$, яъни $P_{L_1} + \ldots + P_{L_n} = P_L$.

2) $P_{L_1} + \ldots + P_{L_n}$ проектор бўлсин. Ихтиёрий $x \in H$ учун

$$\|x\|^2 \geqslant \|(P_{L_1} + \ldots + P_{L_n}) x\|^2 = ((P_{L_1} + \ldots + P_{L_n}) x,$$
$$(P_{L_1} + \ldots + P_{L_n}) x) = ((P_{L_1} + \ldots + P_{L_n}) x, x) =$$
$$= (P_{L_1} x, x) + \ldots + (P_{L_n} x, x) =$$
$$= \|P_{L_1} x\|^2 + \ldots + \|P_{L_n} x\|^2.$$

Ихтиёрий i ва j $(i \neq j)$ индекслар учун

$$\|P_{L_i} x\|^2 + \|P_{L_j} x\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{6}$$

Бу тенгсизликда x нинг ўрнига $P_{L_i} y$ ни қўйсак,

$$\|P_{L_i}^2 y\|^2 + \|P_{L_j} P_{L_i} y\|^2 \leqslant \|P_{L_i} y\|^2,$$

яъни $\|P_{L_j} P_{L_i} y\| \leqslant 0$ келиб чиқади. Бу ерда y ихтиёрий бўлгани учун

$$P_{L_j} P_{L_i} = 0.$$

Агар (6) тенгсизликда x ўрнига $P_{L_j} y$ ни қўйсак,

$$\|P_{L_i} P_{L_j} y\|^2 + \|P_{L_j}^2 y\|^2 \leqslant \|P_{L_j} y\|^2.$$

Бундан

$$P_{L_i} P_{L_j} = 0.$$

Натижада $P_{L_i} P_{L_j} = P_{L_j} P_{L_i} = 0$ бўлгани учун $L_i \perp L_j$ келиб чиқади.

Ҳақиқатан, ихтиёрий $x \in L_i$, $y \in L_j$ учун

$$(x, y) = (P_{L_i} x, P_{L_j} y) = (P_{L_j} P_{L_i} x, y) = (\theta, y) = 0.*$$

6-теорема. *P_{L_1} ва P_{L_2} проекторларнинг айирмаси проектор бўлиши учун $L_2 \subset L_1$ бўлиши зарур ва кифоя. Бу шарт бажарилганда*

$$P_{L_1} - P_{L_2} = P_L,$$

бу ерда $L = L_1 \ominus L_2$ (L_2 нинг L_1 гача ортогонал тўлдирувчиси.)

Бу теореманинг исботи юқоридаги теоремаларнинг исботига ўхшаш.

H Гильберт фазосидаги барча проекторлардан иборат тўпламни $\Pi(H)$ орқали белгилаймиз. $\Pi(H)$ тўпламда қисман тартибни қуйидаги усул билан киритамиз: агар $L_1 \subset L_2$ муносабат ўринли бўлса $P_{L_1} \leqslant P_{L_2}$. Бу билан $\Pi(H)$ қисман тартибланган тўпламга айланади.

Лемма. $P_{L_1} \leqslant P_{L_2}$ бўлиши учун $\|P_{L_1} x\| \leqslant \|P_{L_2} x\|$ тенгсизликнинг ихтиёрий $x \in H$ учун бажарилиши зарур ва кифоя.

Исбот. 1) $P_{L_1} \leqslant P_{L_2}$ бўлсин. У ҳолда $L_1 \subset L_2$ муносабатдан

$$P_{L_1} = P_{L_1} P_{L_2}$$

келиб чиқади. Демак, ихтиёрий $x \in H$ учун

$$P_{L_1} x = P_{L_1} P_{L_2} x.$$

Бундан

$$\|P_{L_1} x\| \leqslant \|P_{L_1}\| \cdot \|P_{L_2} x\| = \|P_{L_2} x\|.$$

2) аксинча, яъни ихтиёрий $x \in H$ учун

$$\|P_{L_1} x\| \leqslant \|P_{L_2} x\| \qquad (7)$$

бажарилган бўлсин. P_{L_2} проектор бўлгани учун

$$P_{L_2}(I - P_{L_2})x = \theta, \quad \forall x \in H.$$

Агар (7) тенгсизликни ҳисобга олсак,

$$\|P_{L_1}(I - P_{L_2})x\| \leqslant \|P_{L_2}(I - P_{L_2})x\| = 0.$$

Демак,

$$P_{L_1}(I - P_{L_2})x = \theta, \quad \forall x \in H,$$

яъни

$$P_{L} = P_{L_1}P_{L_2}.$$

У ҳолда 4-теоремага кўра, $L_1 = L_1 \cap L_2$, яъни

$$L_1 \subset L_2.*$$

7-теорема. *Ҳар қандай монотон ўсувчи проекторлар кетма-кетлиги* $\{P_{L_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *бирор P проекторга кучли яқинлашади.*

Исбот. Юқоридаги леммага кўра, $P_{L_1} \leqslant P_{L_2} \leqslant \ldots$ муносабатдан ихтиёрий $x \in H$ учун $\{\|P_{L_k}x\|\}_{k=1}^{\infty}$ сонли кетма-кетликнинг монотон ўсувчи эканлиги келиб чиқади. Иккинчи томондан, P_{L_k} нинг проекторлигидан

$$\|P_{L_k} x\| \leqslant \|x\|.$$

Демак, $\{\|P_{L_k} x\|\}_{k=1}^{\infty}$ яқинлашувчи кетма-кетлик. Бу фактдан фойдаланиб, $\{P_{L_k} x\}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетликнинг H да яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$\|P_{L_n} x - P_{L_m} x\|^2 = (P_{L_n} x - P_{L_m} x,\ P_{L_n} x - P_{L_m} x) =$$
$$= (P_{L_n} x,\ P_{L_n} x) - (P_{L_n} x,\ P_{L_m} x) - (P_{L_m} x,\ P_{L_n} x) +$$
$$+ (P_{L_m} x,\ P_{L_m} x).$$

Агар $m < n$ бўлса, у ҳолда

$$(P_{L_n} x,\ P_{L_m} x) = (P_{L_m} P_{L_n} x, x) = (P_{L_m} x, x) =$$
$$= (P_{L_m} x,\ P_{L_m} x) = \|P_{L_m} x\|^2.$$

Шундай қилиб,

$$\|P_{L_n} x - P_{L_m} x\|^2 = \|P_{L_n} x\|^2 - \|P_{L_m} x\|^2 \to 0.$$

Демак, $\{P_{L_k}x\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментал кетма-кетлик. Агар H нинг тўлалигини ҳисобга олсак, $\{P_{L_k}x\}$ нинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Ҳар бир $x \in H$ га $\lim\limits_{n\to\infty} P_{L_n}x \in H$ элементни мос қўювчи акслантиришни P орқали белгилаймиз. У ҳолда скаляр кўпайтманинг узлуксизлигидан P нинг проектор эканлиги келиб чиқади, ҳақиқатан,

а) $P(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} P_{L_n}(\alpha x + \beta y) = \alpha Px + \beta Py,$

яъни P чизиқли акслантириш;

б) $(Px, y) = \lim\limits_{n\to\infty}(P_{L_n}x, y) = \lim\limits_{n\to\infty}(x, P_{L_n}y) = (x, Py),$

яъни $P = P^*$;

в) $(Px, y) = \lim\limits_{n\to\infty}(P_{L_n}x, y) = \lim\limits_{n\to\infty}(P^2_{L_n}x, y) = (P^2x, y)$ ёки

$P = P^2$. Теорема исбот қилинди.*

Энди $[\alpha, \beta]$ чекли ёки чексиз оралиқ, $\{E_t\}$ эса $t \in [\alpha, \beta]$ параметрга боғлиқ проекторлар оиласи бўлсин.

Таъриф. *Бирнинг ёйилмаси* деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\{E_t\}_{t\in[\alpha,\beta]}$ проекторлар оиласига айтилади:

1) $E_\alpha = 0,\ E_\beta = I$;
2) $E_sE_t = E_{\min(t,s)}$;
3) $(s)\text{-}\lim\limits_{t\to t_0-0} E_t = E_{t_0}\ (\alpha < t_0 < \beta)$.

Изоҳ. Бу таърифда 2) шарт $\{E_t\}$ проекторлар оиласи t параметрнинг функцияси сифатида монотон ўсувчи эканлигини англатади. 3) шартга келсак, 3-теоремага кўра $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг ихтиёрий t_0 ички нуқтасида $(s)\text{-}\lim\limits_{t\to t_0-0} E_t$ мавжуд (кучли яқинлашиш маъносида). Шундай қилиб, таърифдаги 3) шарт E_t функциянинг чапдан узлуксизлигига эквивалент. Ниҳоят, агар $\alpha = -\infty$ ёки $\beta = +\infty$ бўлса:

$$E_{-\infty} = \lim_{t\to-\infty} E_t,$$

$$E_{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} E_t$$

деб оламиз. Бу лимитларнинг мавжудлиги яна юқоридаги 7-теоремадан келиб чиқади.

Математик анализ умумий курсидан маълум Стильтьес интеграли тушунчасидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликни ёза оламиз:

$$x = Ix = (E_\beta - E_\alpha)x = \int_\alpha^\beta dE_t x, \ \forall x \in H, \qquad (8)$$

бу ерда $\int_\alpha^\beta dE_t x$ ифода $E_t x$ функция учун $[\alpha, \beta]$' оралиқда тузилган Стильтьес интеграл йиғиндисининг H фазодаги кучли лимитига тенг. Лимитнинг мавжудлиги проекторларнинг юқорида исбот қилинган хоссаларидан бевосита келиб чиқади.

Шундай қилиб, бирлик операторни бирнинг ёйилмаси бўйича Стильтьес интеграли кўринишида ифодаладик:

$$I = \int_\alpha^\beta dE_t.$$

Умуман, чизиқли операторни Стильтьес интеграли кўринишида ифодалаш масаласи *спектрал теореманинг* мазмунини ташкил қилади. Бу масала устида кейинги параграфларда батафсилроқ тўхтаб ўтамиз.

9.3-§. Чекли ўлчамли Эвклид фазосида ўз-ўзига қўшма оператор учун спектрал теорема

Ушбу параграф кўпроқ методик аҳамиятга эга.

1-теорема. *Чекли ўлчамли Эвклид фазосида ҳар қандай ўз-ўзига қўшма A оператор учун қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ҳақиқий сонлар ва $P_1, \ldots, P_r$ проекторлар мавжуд:*

1) α_i *лар бир-биридан фарқли;*

2) $P_i \neq 0$ *ва* P_i *лар ўзаро ортогонал, яъни* $P_iP_j=0$ $(i \neq j)$;

3) $P_1 + \ldots + P_r = I$;

4) $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_r P_r = A$.

Исбот. Фазо чекли ўлчамли бўлгани учун A операторнинг спектри чекли ва фақат хос қийматлардан иборат. A операторнинг хос қийматларини, карралигини эътиборга олмай, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ орқали белгилайлик. P_i проектор сифатида

$$Ax = \alpha_i x$$

тенгламанинг ечимларидан иборат бўлган L_i қисм фазога ортогонал проекциялаш операторини оламиз. Киритилган $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ сонлар ва $P_1, \ldots, P_r$ проекторлар теореманинг шартларини қаноатлантиришини кўрсатамиз.

1) Аниқланишига кўра α_i лар бир-биридан фарқли. Агар A операторнинг ўз-ўзига қўшма эканлигини ҳисобга олсак, ушбу

$$\alpha_i(x_i, x_i) = (\alpha_i x_i, x_i) = (Ax_i, x_i) = (x_i, Ax_i) = \overline{\alpha}_i(x_i x_i)$$

тенгликлардан (бу ерда x_i вектор α_i га мос келувчи хос вектор) $x_i \neq \theta$ бўлгани учун $\alpha_i = \overline{\alpha}_i$ муносабат келиб чиқади. Демак, α_i лар ҳақиқий сонлар,

2) ни кўрсатиш учун ҳар хил хос қийматларга мос келувчи хос векторларнинг ўзаро ортогонал эканлигини кўрсатиш кифоя. Ҳақиқатан, агар x_i ва x_j мос равишда турли α_i ҳамда α_j хос қийматларга мос келувчи хос векторлар бўлса,

$$0 = (Ax_i, x_j) - (x_i\ Ax_j) = (\alpha_i - \alpha_j)\ (x_i, x_j), \quad i \neq j.$$

Демак, $(x_i, x_j) = 0$, чунки $\alpha_i \neq \alpha_j$. Шундай қилиб, $L_i \perp L_j$, $i \neq j$.

3) $L_i \perp L_j$ $(i \neq j)$ бўлгани учун $P_i P_j = P_j P_i = 0\,(i \neq j)$. Демак, 9.2- § даги 5-теоремага асосан $P_1 + \ldots + P_r$ — проектор. $P = P_1 + \ldots + P_r \neq I$ деб фараз қилайлик. У ҳолда $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_r \neq C^n$. Равшанки, L қисм фазо A операторга нисбатан инвариант, яъни $x \in L$ муносабатдан $Ax \in L$ келиб чиқади. Ҳақиқатан, агар $x \in L$ бўлса, шундай $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ сонлар мавжудки,

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i,$$

бу ерда $x_i \in L_i$ операторнинг α_i га мос келувчи хос вектори. У ҳолда

$$Ax = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A x_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha_i x_i \in L.$$

Фаразимизга кўра $L \neq C^n$. Бундан $L^{\perp} \neq \{\theta\}$. Иккинчи томондан, $L^{\perp}$ фазо A операторнинг инвариант қисм фазоси, чунки ихтиёрий $y \in L$ ва $x \in L^{\perp}$ лар учун

$$(Ax, y) = (x, Ay) = 0, \text{ яъни } Ax \in L^{\perp}.$$

У ҳолда $A : L^{\perp} \to L^{\perp}$ эканлигидан A операторнинг $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ лардан фарқли бўлган хос қийматининг мавжудлиги келиб чиқади. Бу эса $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ларнинг танлаб олинишига зид.

Шундай қилиб, $P_1 + \ldots + P_r = I$.

4) ихтиёрий $x \in C^n$ учун $P_i x = x_i$ деб белгилайлик. Равшанки, $x_i \in L_i$. У ҳолда $Ax_i = \alpha_i x_i$ $(i = \overline{1, r})$. Агар $P_1 + \ldots + P_r = I$ тенгликни ҳисобга олсак,

$$Ax = A(P_1 x + \ldots + P_r x) = \sum_{i=1}^{r} Ax_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i x,$$

яъни

$$A = \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_r P_r. * \qquad (1)$$

Теореманинг 1) —3) шартларини қаноатлантирувчи $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ сонлар ва $P, \ldots, P_r$ проекторлар учун

$$A = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i$$

формула A операторнинг *спектрал ёйилмаси* дейилади. Шундай қилиб, исбот қилинган 1-теорема ўз-ўзига қўшма операторнинг спектрал ёйилмасининг мавжудлиги ҳақидаги теоремадир. Навбатдаги масала спектрал ёйилманинг ягоналигини исбот қилишдан иборат.

Агар A оператор ва $p_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$, $(\alpha_i \in C,\ i = \overline{1, n})$ кўпҳад бўлса, у ҳолда

$$p_n(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n$$

ифода *оператор функция* (аниқроғи, *оператор кўпҳад)* дейилади. Равшанки, агар A чизиқли бўлса, $p_n(A)$ ҳам чизиқли. Шу билан бирга $p_n(A)$ коэффициентлари ҳақиқий бўлган кўпҳад ва $A^* = A$ бўлса, $p_n(A)$ ўз-ўзига қўшма оператордир.

2-теорема. *Агар* $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i$ *ўз-ўзига қўшма* A *операторнинг спектрал ёйилмаси бўлса, у ҳолда:*

1) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ тўплам A операторнинг барча хос қийматларидан иборат;

2) коэффициентлари ҳақиқий бўлган шундай $p_1(t), \ldots, p_r(t)$ кўпҳадлар мавжудки, улар учун:

а) $p_k(\alpha_i) = \delta_{ki}$ (δ_{ki} — Кронекер символи);

б) $p_k(A) = P_k$, $k = 1, \ldots, r$.

Исбот. 1) $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i P_i$ спектрал ёйилма бўлгани учун α_i сонлар ва P_i проекторлар 1- теореманинг 1) —4) шартларини қаноатлантиради. У ҳолда $P_k \neq 0$, яъни $L_k \neq \{\theta\}$ бўлгани учун, ихтиёрий $x \in L_k$, $x \neq \theta$ вектор A операторнинг α_i га мос келувчи хос вектори, чунки

$$Ax = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i x = \alpha_k P_k x = \alpha_k x.$$

Агар A операторнинг $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ сонлардан фарқли хос қиймати йўқ эканлигини кўрсатсак, 1) исботланган бўлади. Фараз қилайлик, λ сон A операторнинг хос қиймати ва $x \neq \theta$ унга мос келувчи хос вектор бўлсин:

$$Ax = \lambda x = \lambda \sum_{i=1}^{r} P_i x.$$

Спектрал ёйилмага кўра

$$Ax = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i x.$$

Охирги икки тенгликдан

$$\sum_{i=1}^{r} (\lambda - \alpha_i) P_i x = \theta.$$

$P_1, \ldots, P_r$ проекторлар ўзаро ортогонал бўлгани учун

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} (\lambda - \alpha_i) P_i x \right\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \| (\lambda - \alpha_i) P_i x \|^2 = 0. \qquad (2)$$

Агар $x \neq \theta$ ва $\sum_{i=1}^{r} P_i = I$ эканлигини ҳисобга олсак, бирор k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ учун $P_k x \neq \theta$, (2) га асосан шу k учун $\lambda = \alpha_k$.

2) $P_1, \ldots, P_r$ проекторларнинг ўзаро ортогоналлигидан фойдалансак,

$$A^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i \right) \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i \right) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \alpha_j P_i P_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 P_i$$

ва, умуман,

$$A^n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^n P_i \ (n = 1, 2, \ldots)$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, ҳар қандай $p_n(t)$ кўпҳад учун

$$p_n(A) = \sum_{i=1}^{r} p_n(\alpha_i) P_i . \qquad (3)$$

Агар

$$p_k(t) = \prod_{i \neq k} \frac{t - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}, \quad k = 1, 2, \dots, r$$

деб олсак,

$$p_k(\alpha_j) = \delta_{kj}$$

ва (3) га кўра $p_k(A) = P_k$.*

Натижа. Ўз-ўзига қўшма операторнинг спектрал ёйилмаси ягона усул билан аниқланади.

Ихтиёрий Гильберт фазосида аниқланган ўз-ўзига қўшма оператор учун спектрал теоремани келтириш мақсадида, чекли ўлчамли фазода исбот қилинган

$$A = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i$$

спектрал ёйилмани умумлаштириш учун қулай бўлган формада ёзамиз. Шу мақсадда қуйидаги белгилаш киритайлик:

$$E_k = P_1 + \dots + P_k, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

$P_1, \dots, P_r$ проекторлар ўзаро ортогонал бўлгани учун $E_1, \dots, E_r$ лар ҳам проекторлар бўлади. Агар $E_0 = 0$ деб қабул қилсак,

$$0 = E_0 < E_1 < \dots < E_r = I$$

ва

$$P_i = E_i - E_{i-1}, \quad i = \overline{1, r}.$$

У ҳолда A операторнинг спектрал ёйилмасини ушбу

$$A = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i [E_i - E_{i-1}]$$

кўринишда ёки $E_i - E_{i-1} = \Delta_i E(\alpha)$ белгилашдан сўнг,

$$A = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \Delta E(\alpha) \qquad (4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Охирги тенгликка қуйидагича талқин бериш мумкин. $\{1, 2, \dots, r\}$ чекли тўпламда қийматлари проекторлардан иборат бўлган монотон ўсувчи E_i функция берилган, E_i .функция ёрдамида

$$X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$$

тўпламнинг бир элементли қисм тўпламларида

$$\mu\{\alpha_i\} = \Delta_i E(\alpha) = E_i - E_{i-1}$$

тенглик орқали аниқланган функцияни аддитивлик бўйича X даги қийматлари оператор бўлган ўлчовгача давом эттирамиз. У ҳолда (4) тенгликни Стильтьес интеграли кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A = \int_X \alpha\, dE(\alpha)$$

ёки $X = \sigma(A)$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$A = \int_{\sigma(A)} \alpha\, dE(\alpha) \qquad (5)$$

кўринишда ёза оламиз. Демак, чекли ўлчамли фазода ҳар қандай ўз-ўзига қўшма A оператор учун бирнинг шундай ёйилмаси мавжудки, (5) тенглик ўринли. (5) кўринишдаги спектрал ёйилмани ихтиёрий Гильберт фазосида ҳам ўринли эканлигини 9.4- § да исбот қиламиз.

9.4- §. Спектрал теорема

1-теорема. *Ўз-ўзига қўшма операторнинг спектри ҳақиқий сонлардан иборат.*

Исбот. Агар $\beta \neq 0$ бўлса, $\lambda = \alpha + i\beta$ комплекс соннинг (α, β — ҳақиқий сонлар) A оператор учун регуляр нуқта эканлигини кўрсатиш кифоя. A операторнинг ўз-ўзига қўшма эканлигига асосан:

$$||A - \lambda I) x||^2 = ((A - \alpha I - i\beta I)x, (A - \alpha I - i\beta I)x) =$$
$$= ||A - \alpha I)x||^2 + ||\beta x||^2 \geqslant \beta^2||x||^2.$$

Демак, $(A - \lambda I)$ оператор қуйидан чегараланган:

$$||(A - \lambda I)x|| \geqslant |\beta|\cdot||x||. \qquad (1)$$

$A - \lambda I$ операторнинг бутун H да аниқланган $(A - \lambda I)^{-1}$ тескариси мавжудлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, L фазо $A - \lambda I$ операторнинг қийматларидан иборат қисм фазо бўлсин. Агар L қисм фазо H нинг ҳамма ерида зич бўлса, (I) тенгсизликка кўра $(A - \lambda I)^{-1}$ мавжуд бўлиб, у бутун H да аниқланган ва чегараланган оператор, яъни λ регуляр нуқтадир.

Энди $\overline{L} \neq H$ деб фараз қилайлик. Равшанки, L фазо $A - \lambda I$ оператор учун инвариант қисм фазо. У ҳолда ихтиёрий $x \in L^{\perp}$ ва $y \in L$ учун ўринли бўлган ушбу

$$((A - \lambda I) x, y) = (Ax, y) - \lambda (x, y) = (x, Ay) =$$
$$= (x, Ay) - \overline{\lambda}(x, y) = (x, (A - \lambda I) y) = 0$$

тенгликдан $L^{\perp}$ ҳам $A - \lambda I$ оператор учун инвариант қисм фазо эканлиги келиб чиқади. Фаразимизга кўра $\overline{L} \neq H$, яъни $L^{\perp} \neq \{\theta\}$. Агар, $z \in L^{\perp}$ ва $z \neq \theta$ бўлса, у ҳолда

$$(A - \lambda I)\ z \in L^{\perp} \cap L = \{\theta\}.$$

Ҳосил бўлган $(A - \lambda I) z = \theta$ тенглик (1) га зид. Демак, $\overline{L} \neq H$ бўлиши мумкин эмас. Шундай қилиб, ўз-ўзига қўшма A оператор учун

$$\sigma(A) \subset R._{*}$$

Фараз қилайлик, $\{E_\lambda\}$ бирор $[a, b]$ сегментда аниқланган бирнинг ёйилмаси бўлсин. Маълумки, $[a, b]$ сегментда жойлашган $[\alpha, \beta)$ кўринишдаги барча оралиқлар тўплами R ярим ҳалқани (Колмогоров, Фомин, [2], I боб, 5-§) ташкил қилади. Агар $\Delta = [\alpha, \beta) \in R$ бўлса ушбу

$$E(\Delta) = E_\beta - E_\alpha$$

тенглик билан R ярим ҳалқада аниқланган оператор қийматли функцияни ҳосил қиламиз. Киритилган функция қуйидаги хоссаларга эга:

1) ихтиёрий $\Delta \in R$ учун $E(\Delta)$ проектор;

2) $E(\varnothing) = 0$;

3) агар $\Delta_1, \ldots, \Delta_k \in R$, $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i \in R$ ва $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$ бўлса, $E(\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{k} E(\Delta_i)$, яъни $E(\Delta)$ функция аддитив.

Ҳақиқатан, 1) $E^{*}(\Delta) = E(\Delta)$ва $E^2(\Delta) = E(\Delta)$, чунки $E_\alpha E_\beta = E_\beta E_\alpha = E_\alpha$;

2) $E(\varnothing) = E([\alpha, \alpha)) = 0$;

3) $\Delta_1 = [\alpha_1, \beta_1)$, $\Delta_2 = [\alpha_2, \beta_2)$ ва $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$ бўлсин ($k = 2$ ҳолни қараяпмиз). Аниқлик учун, Δ_1 оралиқ Δ_2 дан чапда ётсин, яъни $\beta_1 \leqslant \alpha_2$. Равшанки, $\Delta_1 \cup \Delta_2 \in R$

бўлиши учун $\beta_1 = \alpha_2$ тенгликнинг бажарилиши зарурий шарт. У ҳолда

$$E(\Delta_1 \cup \Delta_2) = E_{\beta_2}' - E_{\alpha_1}' = E_{\beta_2} - E_{\alpha_2} + E_{\beta_1} - E_{\alpha_1} =$$
$$= E(\Delta_1) + E(\Delta_2).$$

Демак, R да аниқланган $E(\Delta)$ функция аддитив.

Ҳозиргача биз $\{E_\lambda\}$ бирнинг ёйилмаси λ параметр бўйича чапдан узлуксиз эканлигидан фойдаланмадик. Қуйида шундан фойдаланиб, $E(\Delta)$ функция учун 3) хоссанинг кенгроқ формада ўринли эканлигини кўрсатамиз.

1-лемма. $E(\Delta)$ саноқли аддитив (σ-аддитив) функция.

Исбот. Дарҳақиқат $\Delta_i = [\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ ихтиёрий иккитаси ўзаро кесишмайдиган оралиқлар системаси ва $\Delta = [\alpha, \beta) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i \in R$ бўлсин. Ихтиёрий n натурал сон учун $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i \subset \Delta$ муносабатдан

$$\sum_{i=1}^{n} E(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} (E_{\beta_i} - E_{\alpha_i}) \leqslant E_{\beta} - E_{\alpha} = E(\Delta) \qquad (2)$$

келиб чиқади (умуман айтганда, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta \overline{\in} R$, яъни $E(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i)$ ифода ҳозирча маънога эга эмас). $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ оралиқлар ўзаро кесишмайди, демак, $\{E(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ проекторларнинг ихтиёрий иккитаси ўзаро ортогонал. У ҳолда проекторларнинг хоссасига кўра (9.3- § даги 5- теорема) $\sum\limits_{i=1}^{n} E(\Delta_i)$ ҳам проектор. Шундай қилиб, $n \to \infty$ да $\sum\limits_{i=1}^{n} E(\Delta_i)$ монотон ўсувчи проекторлар кетма-кетлиги ва, демак, у яқинлашувчидир. Агар (2) тенгсизликда лимитга ($n \to \infty$) ўтсак,

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i) \leqslant E(\Delta) \qquad (3)$$

ни ҳосил қиламиз.

Агар тескари тенгсизлик

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i) \geqslant E(\Delta) \qquad (4)$$

ўринли эканлигини кўрсатсак, лемма исботланган бўлади.

Равшанки, $\Delta = \varnothing$ бўлса, $E(\Delta) = 0$ ва (4) тенгсизлик бажарилади. $\Delta \neq \varnothing$ ҳолни кўрайлик. Агар $\Delta = [\alpha, \beta) \neq \varnothing$ бўлса, $\alpha < \beta$ ва $\alpha < \beta' < \beta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи β' сон топилади. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ берилган бўлсин. H Гильберт фазосидан тайинланган x_0 векторни оламиз. E_λ бирнинг ёйилмаси α_n нуқтада чапдан узлуксиз бўлгани учун $\alpha < \alpha'_n < \alpha_n$ тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай α'_n мавжудки,

$$\|(E_{\alpha_n} - E_{\alpha'_n})x_0\| < \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

тенгсизлик бажарилади. Агар баъзи n лар учун $\alpha_n = a$ бўлса, $\alpha'_n = a$ деб оламиз ва бу ҳолда ҳам (5) тенгсизлик сақланиб қолади. Δ'_n орқали $\alpha'_n > a$ бўлган ҳолда (α'_n, β_n) интервални ва $\alpha'_n = a$ бўлган ҳолда $[a, \beta_n)$ оралиқни белгилайлик. У ҳолда $\{\Delta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ оралиқлар $[a, b]$ сегментга нисбатан очиқ тўпламлар системаси ва тузилишига кўра улар $[\alpha, \beta']$ сегментни қоплайди. Демак, $\{\Delta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ системадан $[\alpha, \beta']$ ни қопловчи $\Delta'_{n_1}, \ldots, \Delta'_{n_k}$, чекли қисм қоплама ажратиб олишимиз мумкин. Равшанки, $[\alpha'_{n_i}, \beta_{n_i})$, $i = \overline{1, k}$ оралиқлар $[\alpha, \beta')$ оралиқни қоплайди. Ҳар бир $i = \overline{1, k}$ учун шундай $[\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}) \subset [\alpha'_{n_i}, \beta_{n_i})$ оралиқлар танлашимиз мумкинки, $[\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i})$ $(i = \overline{1, k})$ оралиқлар системаси ҳам $[\alpha, \beta')$ ни қоплайди ва уларнинг ихтиёрий иккитаси ўзаро кесишмайди. $E(\Delta)$ функциянинг чекли аддитивлиги ва монотонлигини ҳисобга олсак,

$$E([\alpha, \beta')) \leqslant \sum_{i=1}^{k} E([\alpha''_{n_i}, \beta_{n_i})) \tag{6}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Иккинчи томондан, $[\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}) \subset$ $\subset [\alpha'_{n_i}, \beta_{n_i}]$ муносабатдан $E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}))$ ва $E([\alpha'_{n_i}, \beta_{n_i}))$ проекторлар учун

$$E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i})) \leqslant E([\alpha'_{n_i}, \beta_{n_i})) \tag{7}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. (диққат: (7) тенгсизликдан $\sum_{i=1}^{k} E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i})) \leqslant \sum_{i=1}^{k} ([\alpha'_{n_i}, \beta_{n_i}))$ тенгсизлик келиб чиқмайди.

Чунки, $[\alpha'_{n_i}, \beta_{n_i})$ оралиқлар ўзаро кесишиши мумкин бўлгани учун

$$\sum_{i=1}^{k} E([\alpha'_{n_i}, \beta_{n_i}))$$

ифода проектор бўлмаслиги мумкин. Биз „$\leqslant$“ муносабатни фақат проекторлар учун аниқлаган эдик.

Агар ихтиёрий иккита P_1 ва P_2 проектор учун $P_1 \leqslant P_2$ эканлигидан барча $x \in H$ учун $\|P_1 x\| \leqslant \|P_2 x\|$ тенгсизлик келиб чиқишини эсласак, (6) ва (7) тенгсизликлардан ушбу натижани ҳосил қиламиз:

$$\|E([\alpha, \beta'))x_0\|^2 \leqslant \|\sum_{i=1}^{k} E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}))x_0\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \|E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}))x_0\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \|E([\alpha''_{ni}, \beta_{n_i}))x_0\|^2.$$

Демак,

$$\|(E_{\beta'} - E_{\alpha})x_0\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \|(E_{\beta_{n_i}} - E'_{\alpha_{ni}})x_0\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|(E_{\beta_n} - E'_{\alpha_n})x_0\|^2.$$

Энди (5) тенгсизликдан фойдалансак,

$$\|(E_{\beta'} - E_{\alpha})x_0\|^2 \leqslant \|\sum_{n=1}^{\infty}(E_{\beta_n} - E_{\alpha_n} + E_{\alpha_n} - E'_{\alpha_n})x_0\|^2 <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \|(E_{\beta_n} - E_{\alpha_n})x_0\|^2 + \varepsilon \cdot M \cdot$$

Бу ерда M — ўзгармас сон, ε ихтиёрий бўлгани учун бу муносабатдан

$$\|(E_{\beta'} - E_{\alpha})x_0\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|(E_{\beta_n} - E_{\alpha_n})x_0\|^2 \tag{8}$$

келиб чиқади. Агар (8) тенгсизликда $\beta' \to \beta$ (чапдан) бўлса, E_λ нинг чапдан узлуксизлигига кўра

$$\|(E_{\beta'} - E_{\alpha})x_0\| \to \|(E_{\beta} - E_{\alpha})x_0\|^2.$$

$\{\Delta_i\}$ оралиқлар ўзаро кесишмагани учун $\{E(\Delta_i)\}$ проекторлар бир-бирига ортогонал. Шунинг учун

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|E(\Delta_i)x_0\|^2 = \|\sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i)x_0\|^2.$$

Бундан ва (8) дан

$$\|E(\Delta)x_0\| \leqslant \|\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)x_0\|.$$

$x_0 \in H$ ихтиёрий бўлгани учун охирги тенгсизликдан $E(\Delta)$ ва $\sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i)$ проекторлар орасида қуйидаги муносабат ўринли:

$$E(\Delta) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n). \qquad (9)$$

(3) ва (9) дан

$$E(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$$

келиб чиқади.

Натижа. $E(\Delta)$ функция R ярим ҳалқада аниқланган ва қийматлари проекторлардан иборат бўлган σ-аддитив ўлчовдир. R ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал σ-ҳалқани B орқали белгилайлик. Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси курсидан маълумки, B ҳалқа $[a, b]$ сегментда жойлашган барча Борель тўпламларидан иборат бўлиб, Борель алгебрасини ҳосил қилади. Ўқувчига маълум бўлган усул билан R ярим ҳалқада аниқланган σ-аддитив $E(\Delta)$ ўлчовни B даги σ-аддитив ўлчовгача давом эттириш мумкин. Мана шу давом эттириш натижасида ҳосил бўлган $E(\Delta)$ ўлчов $\{E_\lambda\}_{\lambda \in [a,b]}$ бирнинг ёйилмасига мос келувчи *спектрал ўлчов* дейилади.

Модомики, спектрал ўлчов тушунчаси киритилган экан, табиий равишда шу спектрал ўлчов бўйича интеграл тушунчасини аниқлаш мумкин. Дарҳақиқат, $f(\lambda)$ функция $[a, b]$ сегментда чегараланган ва Борель синфига тегишли бўлсин. Масалан, $[c, d]$ сегмент $f(\lambda)$ функциянинг ўзгариш соҳасини ўз ичига олсин: $c \leqslant f(\lambda) \leqslant d$. $[c, d]$ сегментни $c = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = d$ нуқталар ёрдамида бўлакчаларга бўламиз. $f(\lambda)$ Борель синфига тегишли функция бўлгани учун

$$\Delta = \{\lambda : c_{i-1} \leqslant f(\lambda) < c_i\} \in B, \quad i = \overline{1, n-1}$$

ва

$$\Delta_n = \{\lambda : c_{n-1} \leqslant f(\lambda) \leqslant c_n\} \in B.$$

Энди $[c_0, c_1)$, $[c_1, c_2)$, ..., $[c_{n-1}, c_n]$ бўлакчаларнинг ҳар биридан биттадан $c_1', c_2', \ldots, c_n'$ нуқталарни олиб, қуйидаги

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} c_i' \, E(\Delta_i) \qquad (10)$$

йиғиндини тузамиз.

Таъриф. Агар $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |c_{i-1} - c_i| \to 0$ бўлганда S_n операторлар кетма-кетлиги c_i' нуқталарнинг танлаб олиниш усулига боғлиқ бўлмаган ҳолда бирор S операторга кучли яқинлашса, S оператор $f(\lambda)$ функциядан *спектрал ўлчов бўйича олинган интеграл* дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$S = \int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda .$$

1-ибора. Тайинланган $x, y \in H$ учун $(E_\lambda x, y)$ скаляр кўпайтма λ нинг $[a, b]$ сегментда аниқланган ва ўзгариши чегараланган (умуман айтганда, комплекс) функциясидир ва $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} (E_\lambda x, y) \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$.

Исбот. $[a, b]$ сегментни чекли сондаги бўлакчаларга бўлиб, ҳосил бўлган ўзаро кесишмайдиган оралиқларни $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ орқали белгилаймиз. У ҳолда $(E_\lambda x, y)$ функциянинг Δ_i оралиқдаги тебраниши $|(E(\Delta_i)x, y)|$ га тенг. Демак,

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} (E_\lambda x, y) = \sup \sum_{i=1}^{n} |(E(\Delta_i)\, x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup \sum_{i=1}^{n} \|E(\Delta_i)\, x\| \cdot \|y\|,$$

бу ерда супремум барча чекли бўлинишлар бўйича олинади. $\{E(\Delta_i)\}$ проекторлар ўзаро ортогонал бўлгани учун

$$\sum_{i=1}^{n} \|E(\Delta_i)\, x\|^2 = \Big\| \sum_{i=1}^{n} E(\Delta_i)\, x\Big\|^2 = \|x\|^2 .$$

Шундай қилиб,

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} (E_\lambda x, y) \leqslant \|x\|\cdot\|y\|. *$$

Натижа. $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f(\lambda)$ функция ва $\{E_\lambda\}$ бирнинг ёйилмаси учун барча тайинланган x, $y \in H$ ларда ушбу

$$\int_a^b f(\lambda)\, d(E_\lambda x, y)$$

интеграл мавжуд.

Дарҳақиқат, $\int_a^b f(\lambda)\, d\,(E_\lambda x, y)$ Стильтьес интеграли бўлиб, унинг мавжудлиги ўқувчига ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси курсидан маълум ([ҲЎФН], XI боб, 39- §).

Аслида $\int_a^b f(\lambda)\; d\;(E_\lambda x, y)$ интегралнинг мавжуд бўлиши учун функцияга юқорида қўйилган талабни сусайтириш мумкин, лекин бизнинг мақсадимиз учун юқоридаги натижанинг ўзи кифоя.

Энди $\int_a^b f(\lambda)\, d(E_\lambda x,\; y)$ ифодани $x \in H$ ва $y \in H$ ларнинг функцияси сифатида қараймиз, яъни қуйидаги

$$\int_a^b f(\lambda) d(E_\lambda \cdot,\ \cdot) : H \times H \to C$$

акслантиришни ўрганамиз. Агар $B(x, y) = \int_a^b f(\lambda) d(E_\lambda x, y)$ белгилаш киритсак, қуйидаги муносабатларнинг ўринли эканлиги Стильтьес интегралининг хоссаларидан бевосита келиб чиқади:

1) $B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$;

2) $B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y)$;

3) $B(y, x) = \overline{B(x, y)}$;

4) шундай $M > 0$ мавжудки, $|B(x, y)| \leqslant M \cdot \|x\| \times \|y\|$, $\forall x, y \in H$.

Мисол учун 4) ни текширайлик. $f(\lambda)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлгани учун албатта чегараланган:

$$|f(\lambda)| \leqslant M.$$

У ҳолда

$$\left|\int_a^b f(\lambda)\, d\, (E_\lambda x,\ y)\right| \leqslant M \cdot \bigvee_a^b (E_\lambda x,\ y),$$

демак, 1- иборага кўра

$$|B(x,\ y)| \leqslant M \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Таъриф. 1) —4) шартларни қаноатлантирувчи икки ўзгарувчили $B(x,\ y)$ функционал *Эрмит формаси* дейилади.

2- ибора. Ихтиёрий Эрмит формаси учун шундай ягона T ўз-ўзига қўшма чегараланган оператор топиладики, барча $x,\ y \in H$ лар учун

$$B\ (x,\ y) = (Tx,\ y) \tag{11}$$

тенглик бажарилади.

Исбот. Тайинланган $y \in H$ учун $B\ (x,\ y)$ ифода x га нисбатан чегараланган чизиқли функционал. Чизиқли функционалнинг умумий кўриниши ҳақидаги Рисс теоремасига кўра ягона $z \in H$ топиладики,

$$B\ (x,\ y) = (x,\ z),\ \forall x \in H.$$

Ҳар бир $y \in H$ учун мос қўйилган ягона $z \in H$ элементни $z = Ty$ орқали белгилаймиз. Равшанки, $T: H \to H$ чизиқли оператор. Агар

$$|B\,(x,\ y)| = |(x,\ Ty)| \leqslant M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

тенгсизликда $x = Ty$ деб олсак,

$$\|Ty\|^2 \leqslant M \cdot \|Ty\| \cdot \|y\|,$$

яъни

$$\|Ty\| \leqslant M \cdot \|y\|,$$

демак, T — чегараланган оператор.

3) шартга кўра

$$(x,\ Ty) = B\ (x,\ y) = \overline{B\ (y,\ x)} = \overline{(y,\ Tx)} = (Tx,\ y) =$$
$$= (x,\ T^*y),\ \forall x,\ y \in H,$$

яъни T — ўз-ўзига қўшма оператор.

Ниҳоят, (11) тенгликни қаноатлантирувчи T операторнинг ягоналигини кўрсатиш учун тескарисини фараз қилайлик:

$$B\ (x,\ y) = (T_2x,\ y) = (T_1x,\ y),\ \forall x,\ y \in H.$$

Демак,

$$((T_1 - T_2)x,\ y) = 0.$$

Агар $y = (T_1 - T_2)x$ деб олсак, барча $x \in H$ учун

$$\|(T_1 - T_2)x\| = 0,$$

яъни $T_1 = T_2$.*

3-ибора. Ихтиёрий $f(\lambda)$ ҳақиқий узлуксиз функция учун $\int\limits_a^b f(\lambda)dE_\lambda$ чегараланган чизиқли ва ўз-ўзига қўшма оператор.

Исботи. Стильтьес интегралининг мавжудлиги ҳақидаги теореманинг исботидан фарқ қилмайди.

Натижа. $\int\limits_a^b \lambda dE_\lambda$ ўз-ўзига қўшма чегараланган чизиқли оператордир.

2-теорема (спектрал теорема). *Ҳар қандай ўз-ўзига қўшма чегараланган $T: H \to H$ чизиқли оператор учун бирор $[a, b]$ сегментда аниқланган бирнинг шундай $\{E_\lambda\}$ ёйилмаси мавжудки,*

$$T = \int\limits_a^b \lambda dE_\lambda$$

тенглик ўринли.

Исбот. 1-теорема ва 9.1-§ даги 1 ва 2-теоремаларга кўра $\sigma(T)$ ҳақиқий сонлар ўқида жойлашган компакт тўплам. $C(\sigma(T))$ орқали $\sigma(T)$ тўпламда аниқланган ҳақиқий узлуксиз функциялар фазосини белгилайлик. Q эса барча кўпҳадлар тўплами бўлсин. Ихтиёрий $p(t) \in Q$ учун $p(T)$ оператор кўпҳадни тузиб, ушбу

$$(p(T)x,\ y)$$

скаляр кўпайтмани кўрамиз. Агар

$$\|p(T)\| = \max_{t \in \sigma(T)} |p(t)| \tag{12}$$

формуладан (6-машққа қаранг) фойдалансак, тайинланган $x, y \in H$ лар учун $(p(T)\ x,\ y)$ ифода Q да чизиқли чегараланган функционал эканлиги келиб чиқади. Вейерштрасс теоремасига кўра Q тўплам $C(\sigma(T))$ фазонинг ҳамма ерида зич. Демак, Q тўпламда аниқланган

$$f(p) = (p(T)\ x,\ y)$$

чизиқли чегараланган f функционални ягона усул билан $C(\sigma(T))$ фазодаги чизиқли чегараланган функционалгача давом эттириш мумкин. Шундай қилиб, $C(\sigma(T))$ фазодаги чизиқли чегараланган функционалнинг умумий кўриниши ҳақидаги Рисс — Марков — Какутани теоремасига кўра, (ушбу теоремани Канторович, Акилов [1] китобининг VI боб, 3- § дан қаранг) $\sigma(T)$ тўпламнинг барча Борель қисм тўпламларида аниқланган шундай $\mu(.; x, y)$ ўлчов мавжудки,

$$(p(T)x, y) = \int\limits_{\sigma(T)} p(\lambda)d\mu(\lambda; x, y)$$

тенглик ўринли. Агар $p(\lambda) \equiv 1$ деб олсак, охирги тенгликдан

$$\left|\int\limits_{\sigma(T)} d\mu(\lambda; x, y)\right| = |\mu(\sigma(T); x, y)| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, ихтиёрий $M \subset \sigma(T)$ Борель тўплами учун

$$|\mu(M; x, y)| \leqslant \|x\|\cdot\|y\| \qquad (13)$$

тенгсизлик ўринли ($|\mu|$ ўлчовнинг монотонлигига асосан).

Энди M тўпламни тайинланган, $x, y \in H$ элементларни эса ўзгарувчи ҳисоблаб, ушбу $\mu(M; x, y)$ ифодани қараймиз. $\mu(M; x, y)$ — Эрмит формаси. Ҳақиқатан,

1) $$\int\limits_{\sigma(T)} p(\lambda)\, d\mu(\lambda; x_1 + x_2, y) = (p(T)(x_1 + x_2), y) =$$
$$= (p(T)x_1, y) + (p(T)x_2, y) = \int\limits_{\sigma(T)} p(\lambda)\, d\,[\mu(\lambda; x_1, y) +$$
$$+ \mu(\lambda; x_2, y)]$$

тенгликдан

$$\mu(\lambda; x_1 + x_2, y) = \mu(\lambda; x_1, y) + \mu(\lambda; x_2, y),$$

яъни

$$\mu(M; x_1 + x_2, y) = \mu(M; x_1, y) + \mu(M; x_2, y)$$

келиб чиқади.

2) $\mu(M; \alpha x, y) = \alpha\,\mu(M; x, y)$ тенглик ҳам шундай текширилади.

3) $\mu(M; x, y) = \overline{\mu(M; y, x)}$ муносабат эса ушбу

$$(p(T)x, y) = (x, p(T)y)$$

тенгликнинг натижасидир.

4) (13) тенгсизликка кўра $\mu(M; x, y)$ чегараланган. Демак, 2-иборага кўра Эрмит формасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\mu(M; x, y) = (E(M)x, y).$$

Бу ерда $E(M)$ — ўз-ўзига қўшма чегараланган оператор. Агар $p(\lambda) \equiv 1$ деб олсак,

$$(x, y) = \int_{\sigma(T)} d\mu(\lambda; x, y) = \mu(\sigma(T); x, y) = (E(\sigma(T))x, y),$$

яъни

$$E(\sigma(T)) = I.$$

Энди $E(M)$ нинг проектор эканлигини кўрсатамиз. Шу мақсадда ихтиёрий $q(\lambda)$ ҳақиқий кўпҳадни олиб, қуйидаги ёрдамчи ўлчов тузамиз:

$$\nu(M) = \int_M q(\lambda)\, d\mu(\lambda; x, y).$$

У ҳолда $p(T)$ ва $q(T)$ операторларнинг ўзаро коммутативлигидан

$$\int_{\sigma(T)} p(\lambda)\, d\nu(\lambda) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda)\, q(\lambda)\, d\mu(\lambda; x, y) =$$
$$= (p(T)q(T)x, y) = (q(T)p(T)x, y) =$$
$$= (p(T)x, q(T)y) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda)\, d\mu(\lambda; x, q(T)y)$$

келиб чиқади. Агар, $E(\lambda) = E((-\infty, \lambda) \cap \sigma(T))$ белгилаш киритсак,

$$\int_{\sigma(T)} p(\lambda)\, d\nu(\lambda) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda)\, d(E(\lambda)x, q(T)y).$$

Ўлчов назариясидаги давом эттириш конструкциясидан охирги тенгликнинг фақат $q(\lambda)$ кўпҳадлар учунгина эмас, балки ихтиёрий ҳақиқий чегараланган ўлчовли функциялар учун ўринли эканлиги келиб чиқади. Хусусан, $\chi_M(\lambda)$ функция M тўпламнинг характеристик функцияси бўлса,

$$\nu(M) = \int_{\sigma(T)} q(\lambda)\chi_M(\lambda)\, d(E(\lambda)x, y) =$$
$$= (E(M)x, q(T)y) = (q(T)E(M)x, y) =$$
$$= \int_{\sigma(T)} q(\lambda)\, d(E(\lambda)E(M)x, y).$$

Демак, ихтиёрий M, N Борель тўпламлари учун

$$(E(M\cap N)x,\ y)=\int\limits_{M\cap N} d(E(\lambda)x,y)=$$
$$=\int\limits_{N}\chi_M(\lambda)\,d(E(\lambda)x,y)=(E(N)E(M)x,y)$$

яъни

$$E(M\cap N)=E(N)E(M).$$

Агар $M=N$ бўлса, $E(M)=(E(M))^2$. Шундай қилиб, $E(M)$ проектор.

Ушбу

$$(E(M)x,y)=\mu(M;\ x,\ y)$$

тенгликдан μ ўлчовнинг саноқли аддитивлиги ва проекторларнинг хоссаларига кўра $E(M)$ нинг саноқли аддитивлиги келиб чиқади.

Ниҳоят, $E(\lambda)$ оператор функция $\sigma(T)$ тўпламда бирнинг ёйилмаси эканлигини кўрсатсак, спектрал теорема исбот қилинган бўлади, чунки

$$(\mathrm{T}x,\ y)=\int\limits_{\sigma(T)}\lambda\,d\mu(\lambda;x,y)=\int\limits_{\sigma(T)}\lambda\,d(E(\lambda)x,y).$$

Бу тенгликдан $E(\lambda)$ бирнинг ёйилмаси ва $f(\lambda)=\lambda$ узлуксиз бўлгани учун $\int\limits_{\sigma(T)}\lambda dE(\lambda)$ мавжуд ва

$$\mathrm{T}=\int\limits_{\sigma(T)}\lambda\,dE(\lambda)$$

тенглик ўринли.

$E(\lambda)$ бирнинг ёйилмаси эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $E(\lambda)$ нинг чапдан узлуксиз эканлигини кўрсатиш кифоя. Ихтиёрий $\lambda_0\in\sigma(T)$ нуқтада $E(\lambda_0-0)$ мавжуд, чунки $E(\lambda)$ монотон ўсувчи.

Агар $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ кетма-кетлик λ_0 га чапдан яқинлашса ва $\lambda_n\in\sigma(T)$ бўлса,

$$[\lambda_1,\ \lambda_0)=\bigcup_{l=2}^{\infty}[\lambda_1,\ \lambda_l).$$

$E(M)$ нинг саноқли аддитивлигига кўра

$$E(\lambda_0)=\lim_{n\to\infty}E(\lambda_n)=E(\lambda_0-0).*$$

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

(барча операторлар Гильберт фазосида аниқланган).

1. Агар A ва B операторларнинг камида биттаси тескариланувчи бўлса, $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ эканлигини кўрсатинг.

2. T операторнинг спектри $\sigma(T)$ бўлса, T^2 операторнинг спектрини топинг.

3. $T^{-1} = T^*$ муносабатни қаноатлантирувчи T оператор *унитар оператор* дейилади. Унитар операторнинг спектри комплекс текисликдаги $\{z : |z| = 1\}$ бирлик айланада ётишини кўрсатинг.

4. Проекцион операторнинг спектрини топинг.

5. Ўз-ўзига қўшма T оператор учун

$$\|T\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \rho(T)$$

тенглик ўринли эканлигини исбот қилинг.

6. Агар $p_n(\lambda)$ ҳақиқий коэффициентли кўпҳад ва T ўз-ўзига қўшма оператор бўлса,

$$\|p_n(T)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |p_n(\lambda)|$$

муносабатни исбот қилинг.

X боб

ТЎЛА УЗЛУКСИЗ ОПЕРАТОРЛАР ВА ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

10.1-§. Банах фазоларида тўла узлуксиз операторлар

Банах фазоларидаги чизиқли операторларнинг энг муҳим синфларидан бири тўла узлуксиз операторлардир. Бундай операторларнинг хоссалари чекли ўлчамли фазолардаги чизиқли операторларнинг хоссаларига яқин бўлгани сабабли улар яхши ўрганилган синфдир. Шу билан бирга тўла узлуксиз операторлар назарияси жуда муҳим татбиқларга эга. Бу бобда тўла узлуксиз операторлар назариясини ўрганиш билан бирга унинг интеграл тенгламаларга татбиқларини ҳам келтирамиз.

Таъриф. E Банах фазосини E_1 Банах фазосига акслантирувчи T чизиқли оператор E даги бирлик шарни E_1 даги нисбий компакт тўпламга акс эттирса, у ҳолда T *тўла узлуксиз (ёки компакт) оператор* дейилади.

Демак, $U_1=\{x\in E: \|x\|\leqslant 1\}$ бўлса, у ҳолда $\overline{T(U_1)}$ тўплам E_1 фазонинг компакт қисми бўлади.

Банах фазосида чегараланган тўпламнинг таърифидан қуйидаги натижа бевосита келиб чиқади: $T: E\to E_1$ *чизиқли оператор тўла узлуксиз бўлиши учун ихтиёрий чегараланган* $M\subset E$ *тўпламнинг тасвири* $T(M)$ *нисбий компакт бўлиши зарур ва кифоя.*

Мисоллар.

1. Чекли ўлчамли Банах фазосида ихтиёрий чизиқли оператор тўла узлуксиздир. Дарҳақиқат, бу оператор чегараланган бўлгани учун у ихтиёрий чегараланган тўпламни чегараланган тўпламга акс эттиради. Чекли ўлчамли фазода эса ихтиёрий чегараланган тўплам нисбий компактдир.

2. Банах фазоси чексиз ўлчамли бўлса, узлуксиз чизиқли оператор тўла узлуксиз бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, l_2 Гильберт фазосида $Ix=x$ бирлик операторни оламиз. Равшанки, I — узлуксиз оператор. Аммо I тўла узлуксиз эмас. Ҳақиқатан, I оператор U_1 бирлик шарни ўзини-ўзига акс эттиради, U_1 эса нисбий компакт эмас. Буни исботлаш учун l_2 фазода ортонормал базис ҳосил қилувчи $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ системани оламиз. Бу кетма-кетлик U_1 шарда жойлашган ва $i\neq j$ учун

$$\|e_i-e_j\|^2=(e_i-e_j,\ e_i-e_j)=\|e_i\|^2+\|e_j\|^2=2.$$

Демак, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб бўлмайди, яъни U_1 — нисбий компакт тўплам эмас.

3. Чизиқли узлуксиз T оператор E Банах фазосини унинг чекли ўлчамли E_0 қисм фазосига акс эттирса, у ҳолда бундай оператор тўла узлуксиз оператордир. Ҳақиқатан, T оператор E нинг ихтиёрий чегараланган M қисм тўпламини E_0 нинг чегараланган ва, демак, нисбий компакт (чунки E_0 чекли ўлчамли) қисм тўпламига акс эттиради.

H Гильберт фазосида бирон H_0 қисм фазога проектор тўла узлуксиз бўлиши учун H_0 нинг чекли ўлчамли бўлиши зарур ва кифоя.

4. $C[a, b]$ Банах фазосида қуйидаги чизиқли операторни оламиз:

$$\text{T}x = y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt.$$

Агар $K(s, t)$ функция $[a, b]\times[a, b] = \{(s, t) : a \leqslant s \leqslant b, a \leqslant t \leqslant b\}$ квадратда чегараланган ва унинг узилиш нуқталари ушбу

$$t = \varphi_k(s), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

эгри чизиқларда жойлашган бўлиб, φ_k узлуксиз функциялар бўлса, у ҳолда T оператор тўла узлуксиз бўлади.

Бу иборани исботлаймиз. Юқоридаги T операторнинг таърифидан интегралнинг мавжудлиги, яъни $y(s)$ функциянинг аниқланганлиги бевосита келиб чиқади. $K(s, t)$ нинг чегараланганлигига асосан

$$M = \sup_{a<t,\ s<b} |K(s, t)| < \infty.$$

$[a, b]\times[a, b]$ квадратда G тўпламни қуйидагича аниқлаймиз: агар (s, t) нуқта учун

$$|t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}$$

тенгсизлик камида битта $k = 1, 2, \ldots, n$ учун бажарилса, (s, t) нуқтани G нинг *элементи* деймиз. Равшанки, G — очиқ тўплам. Энди ушбу

$$G(s) = \bigcup_{k=1}^{n} \{t : |t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}\} \subset [a,b]$$

тўпламни оламиз.

G тўпламнинг $[a, b]\times[a, b]$ квадратдаги тўлдирувчисини F билан белгилаймиз, яъни

$$F=[a, b]\times[a, b]\setminus G.$$

F тўплам ёпиқ (чунки G — очиқ тўплам) ва чегараланган, яъни F компакт тўплам. $K(s, t)$ функция F тўпламда узлуксиз бўлгани учун $K(s, t)$ текис узлуксиз (II бобдаги Кантор теоремасига асосан). Демак, шундай $\delta>0$ мавжудки,

$$|s'-s''|+|t', t''|<\delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи (s', t'), $(s'', t'')\in F$ нуқталар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$|K(s', t')-K(s'', t'')|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Сўнг $|s'-s''|<\delta$ муносабат бажарилганда ушбу $|y(s')-y(s'')|$ қийматни баҳолаймиз:

$$|y(s')-y(s'')|=|\int_a^b K(s', t)x(t)dt-\int_a^b K(s'', t)\,x(t)dt|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b|K(s', t)-K(s'', t)|\cdot|x(t)|dt.$$

Энди P орқали $G(s')\cup G(s'')$ тўпламни белгилаймиз. У ҳолда

$$|y(s')-y(s'')|\leqslant\int_P|K(s', t)-K(s'', t)|\cdot|x(t)|dt+\int_{[a,b\setminus P]}|K(s', t)-$$

$$-K(s'', t)|\cdot|x(t)|dt.$$

P тўплам $G(s')$ ва $G(s'')$ тўпламларнинг йиғиндиси бўлгани учун P нинг ўлчови $G(s')$ ва $G(s'')$ тўпламларнинг ўлчовларининг йиғиндисидан катта эмас. $G(s)$ тўпламнинг аниқланишидан кўриниб турибдики, унинг ўлчови $l(G(s))$ учун ушбу

$$l(G(s))\leqslant n\cdot 2\cdot\frac{\varepsilon}{12Mn}=\frac{\varepsilon}{6M}$$

тенгсизлик ўринли. Демак, P нинг ўлчови $\frac{\varepsilon}{3M}$ сондан катта эмас. Шунинг учун

$$\int_P|K(s', t)-K(s'', t)|\cdot|x(t)|dt\leqslant\max_{t\in[a,b]}|x(t)|\cdot 2M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\frac{2\varepsilon}{3}\times$$

$\times \|x\| \cdot [a,b] \setminus P$ тўпламда эса $|K(s', t) - K(s'', t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ муносабат ўринли, демак,

$$\int\limits_{[a,b]\setminus P} |K(s', t) - K(s'', t)| \cdot |x(t)| dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \int\limits_{[a,b]\setminus P} |x(t)| dt \leqslant \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \times$$

$$\times \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|x\|.$$

Шундай қилиб, $|s' - s''| < \delta$ тенгсизликдан

$$|y(s') - y(s'')| < \varepsilon \|x\| \qquad (1)$$

муносабат келиб чиқади, яъни $y(s)$ функция узлуксиз. Демак, T оператор $C[a,b]$ фазони ўзини-ўзига акс эттиради. Сўнг (1) тенгсизликдан кўриниб турибдики, $C[a, b]$ фазода

$$U_1 = \{x(t) : \|x\| \leqslant 1\}$$

бирлик шарни олсак, у ҳолда ихтиёрий $x \in U_1$ учун $|s' - s''| < \delta$ бўлганда ушбу

$$|Tx(s') - Tx(s'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли, яъни $\{Tx\}_{x \in U_1}$ текис даражада узлуксиз функциялар системаси.

Ниҳоят, $x \in U_1$ учун

$$\|y\| = \sup_{s \in [a,b]} |y(s)| \leqslant \sup_{s \in [a,b]} \int\limits_a^b |K(s,t)| \cdot |x(t)| dt \leqslant M \cdot (b-a),$$

яъни $\{Tx\}_{x \in U_1}$ — текис чегараланган функциялар системасидир.

28-§ даги Арцела теоремасига асосан $\{Tx\}_{x \in U_1}$ — нисбий компакт тўпламдир.

5. Юқоридаги 4-мисолда кўрилган T операторга қайтиб, $K(s,t)$ функцияни $t > s$ бўлганда нолга тенг деб оламиз, $t < s$ бўлганда эса $K(s,t)$ узлуксиз деб ҳисоблаймиз. У ҳолда 4-мисолнинг шартлари $K(s,t)$ функция учун бажарилади, чунки $K(s,t)$ нинг узилиш нуқталари фақат биргина $t = s$ тўғри чизиқда жойлашган бўлиши мумкин.

$t > s$ бўлганда $K(s, t) = 0$ муносабатни ҳисобга олсак,

$$Tx = y(s) = \int\limits_a^s K(s, t) x(t) dt.$$

Бу оператор *чизиқли Вольтерра оператори* дейилади.

10. 2-§. Тўла узлуксиз операторларнинг хоссалари

E Банах фазоси бўлиб, $\{T_n\}$ кетма-кетлик E ни ўзини-ўзига акс эттирувчи чизиқли операторлар кетма-кетлиги бўлсин.

1-теорема. *Агар тўла узлуксиз операторларнинг $\{T_n\}$ кетма-кетлиги бирор T операторга норма бўйича яқинлашса, у ҳолда, T ҳам тўла узлуксиз оператордир.*

Исбот. E фазодаги бирлик шардан ихтиёрий $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликни оламиз. T операторнинг тўла узлуксизлигини кўрсатиш учун $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи бўлган қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкинлигини кўрсатиш кифоя.

T_1 оператор тўла узлуксиз, демак $\{T_1x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи

$$T_1x_1^{(1)}, T_1x_2^{(1)}, \; . \; . \; . \; . \; , \; T_1x_n^{(1)}, \; . \; . \; .$$

қисм кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин, бу ерда $\{x_n{}^{(1)}\}$ кетма-кетлик $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисм кетма-кетлигидир. Энди $\{T_2x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликни оламиз. T_2 тўла узлуксиз бўлгани сабабли $\{x_n^{(1)}\}$ кетма-кетликдан шундай $\{x_n^{(2)}\}$ қисм кетма-кетлик ажратиш мумкинки, ушбу

$$T_2x_1^{(2)}, \; T_2x_2^{(2)}, \; . \; . \; . \; , \; T_2x_n^{(2)}, \; . \; . \; .$$

кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади.

Шу тарзда давом эттириб, қуйидаги кетма-кетликлар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{l}
x_1^{(1)}, \; x_2^{(1)}, \; . \; . \; . \; , \; x_n{}^{(1)}, \; . \; . \; . \\
x_1^{(2)}, \; x_2^{(2)}, \; . \; . \; . \; , \; x_n^{(2)}, \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
x_1^{(k)}, \; x_2^{(k)}, \; . \; . \; . \; . \; , \; x_n^{(k)}, \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .
\end{array}$$

Бу ерда ҳар бир кетма-кетлик ўзидан олдинги кетма-кетликнинг қисм кетма-кетлигидир ва ихтиёрий k учун $\{T_k\,x_n{}^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ яқинлашувчи кетма-кетликдир. Юқоридаги кетма-кетликлар системасидан диагонал элементларни олиб, ушбу

$$x_1^{(1)}, \; x_2^{(2)}, \; x_3^{(3)}, \; . \; . \; . \; , \; x_n^{(n)}, \; . \; . \; .$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Ихтиёрий m натурал сон учун янги ҳосил бўлган кетма-кетлик биринчи m та ҳадни ҳисобга олмаганда

$$x_1^{(m)},\ x_2^{(m)},\ \ldots,\ x_n^{(m)},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг қисм кетма-кетлигидир. Демак, ихтиёрий m учун $\{T_m x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. Энди $\{Tx_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун $\{Tx_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликнинг фундаментал эканлигини исботлаш кифоя (чунки E—тўла фазо).

$\{x_n\}$ кетма-кетлик бирлик шардан олинганлиги туфайли $\|x_n\| \leqslant 1$ муносабат ихтиёрий n учун ўринли. $\{T_k\}$ кетма-кетлик T операторга норма бўйича яқинлашгани учун шундай k_0 натурал сон мавжудки, ушбу $\|T - T_k\| < \frac{\varepsilon}{3}$ тенгсизлик барча $k > k_0$ учун ўринли.

$\{T_k x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлгани туфайли, у фундаменталдир, яъни шундай N сон мавжудки, ушбу $\|T_k x_n^{(n)} - T_{k\,m}^{\ (m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ тенгсизлик ихтиёрий $n > N$ ва $m > N$ сонлар учун бажарилади. Демак, m, $n > N$ учун

$$\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\| \leqslant \|Tx_n^{(n)} - T_k x_n^{(n)}\| + \|T_k x_n^{(n)} - T_k x_m^{(m)}\| +$$
$$+ \|T_k x_m^{(m)} - Tx_m^{(m)}\| \leqslant \|T - T_k\| \cdot \|x_n^{(n)}\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_k\| \times$$
$$\times \|x_m^{(m)}\| < \varepsilon.$$

Шундай қилиб, $\{Tx_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ яқинлашувчи кетма-кетлик, яъни T—тўла узлуксиз.*

Натижа. Нормаланган $L(E)$ фазода тўла узлуксиз операторлар ёпиқ қисм фазо ҳосил қилади.

Дарҳақиқат, тўла узлуксиз операторларнинг чизиқли комбинацияси ҳам тўла узлуксизлиги бевосита текширилади. Чунки, агар $A, B \subset E_1$ компакт тўпламлар бўлса, у ҳолда $(x, y) \to \lambda x + \mu y (\lambda, \mu \in R)$ акс эттириш узлуксиз бўлгани сабабли, $\lambda A + \mu B$ тўплам ҳам компактдир. Бу қисм фазонинг оператор нормасига нисбатан ёпиқлиги 1-теоремадан келиб чиқади.

2-теорема. *T оператор E Банах фазосида тўла узлуксиз, B эса шу фазода чегараланган оператор бўлса, у ҳолда TB ва BT операторлар тўла узлуксиздир.*

Исбот. $U_1 \subset E$ бирлик шар бўлса, у ҳолда $B(U_1)$ чегараланган тўпламдир (чунки B — чегараланган оператор). Демак, $TB(U_1)$ — нисбий компакт тўплам, яъни TB — тўла узлуксиз. T тўла узлуксиз бўлгани учун $T(U_1)$ — нисбий компакт тўплам. B оператор узлуксиз бўлгани учун $BT(U_1)$ ҳам нисбий компактдир, яъни BT тўла узлуксиз оператор.*

Натижа. Чексиз ўлчамли нормаланган фазода тўла узлуксиз T оператор чегараланган тескари операторга эга эмас.

Дарҳақиқат, акс ҳолда бирлик оператор $I = T^{-1}T$ тўла узлуксиз бўлар эди. Демак, чексиз ўлчамли фазода бирлик шар нисбий компакт тўплам бўлар эди. Бу эса қуйидаги леммага зид.

Лемма. (Ф. Рисс леммаси). Нормаланган чексиз ўлчамли E фазода чизиқли эркли $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ элементларни олиб, E_n орқали $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементларнинг чизиқли қобиғини белгилаймиз. У ҳолда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ кетма-кетлик мавжуд:

1) $\|y_n\| = 1$, 2) $y_n \in E_n$, 3) $\rho(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}$, бу ерда $\rho(y_n, E_{n-1}) = \inf\limits_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\|$.

Исбот. y_1 сифатида $\frac{x_1}{\|x_1\|}$ векторни оламиз; $\{x_n\}$ система чизиқли эркли бўлгани учун $x_n \bar{\in} E_{n-1}$. Ихтиёрий чекли ўлчамли қисм фазо ёпиқ бўлгани туфайли $\rho(x_n, E_{n-1}) = \alpha > 0$.

E_{n-1} фазодан $\|x_n - x_0\| < 2 \cdot \alpha$ шартни қаноатлантирувчи x_0 векторни танлаб оламиз (Inf нинг хоссаларига асосан). Энди $y_n = \frac{x_n - x_0}{\|x_n - x_0\|} \in E_n$ векторни оламиз. Унинг учун 1) ва 2) шартларнинг бажарилиши равшан. Ушбу

$$\alpha = \rho(x_n, E_{n-1}) = \inf_{x \in E_{n-1}} \|x_n - x\| = \inf_{x \in E_{n-1}} \|(x_n - x_0) - (x - x_0)\| =$$
$$= \rho(x_n - x_0, E_{n-1} - x_0) = \rho\,(x_n - x_0, E_{n-1})$$

муносабатга асосан

$$\rho(y_n, E_{n-1}) = \rho\left(\frac{x_n - x_0}{\|x_n - x_0\|}, E_{n-1}\right) = \frac{\rho(x_n - x_0, E_{n-1})}{\|x_n - x_0\|} >$$
$$> \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Демак, y_n вектор учун 3) шарт ҳам бажарилади.*

Леммадан кўриниб турибдики, чексиз ўлчамли нормаланган фазонинг бирлик шарида $\rho(y_{n-1}, y_n)=\|y_{n-1}-y_n\|>$ $>\frac{1}{2}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик мавжуд, яъни бирлик шар нисбий компакт тўплам эмас.

3-теорема. *E, F Банах фазолари бўлсин. $T:E\to F$ чизиқли оператор тўла узлуксиз бўлиши учун унинг қўшма оператори $T^*:F'\to E'$ тўла узлуксиз бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. $T:E\to F$ тўла узлуксиз оператор бўлсин F' фазонинг бирлик шаридан бирор $\{y_n\}$ кетма-кетликни оламиз. F фазода f_n чизиқли функционални қуйидагича аниқлаймиз:

$$f_n(x) = < x, y_n >, \ x\in F.$$

Равшанки, $\{f_n\}$ тўплам ҳар бир $x\in F$ нуқтада чегараланган: $|f_n(x)| \leqslant \|x\|$.

Ушбу $|f_n(x)-f_n(x_0)| \leqslant \|x-x_0\|$ тенгсизликдан $\{f_n\}$ системанинг текис даражада узлуксизлиги келиб чиқади.

U_1 тўплам E фазодаги бирлик шар бўлса, $T(U_1)$ тўплам F фазода нисбий компактдир. Демак, $\{f_n\}$ функционаллар системаси $\overline{T(U_1)}$ компакт тўпламда текис даражада узлуксиз ва унинг ҳар бир нуқтасида бу система биргаликда чегараланган. Асколи теоремасига (4.1- §, 3-теорема) асосан $\overline{T(U_1)}$ тўпламда текис яқинлашувчи бўлган $\{f_n\}$ қисм кетма-кетлик мавжуд. Ушбу

$$\|T^*y_{n_j}-T^*y_{r_i}\|=\|T^*(y_{n_i}-y_{r_i})\|=\sup_{x\in U_1}|<x,T^*(y_{n_j}-y_{n_i})>|=$$

$$=\sup_{x\in U_1}|< Tx,\ y_{n_j}-y_{n_i}>|=\sup_{x\in U_1}|f_{n_j}(\mathrm{T}x)-f_{n_i}(\mathrm{T}x)|\xrightarrow[i,j\to\infty]{}0$$

муносабатлардан $\{T^*y_{n_i}\}$ кетма-кетликнинг фундаменталлиги келиб чиқади. E' тўла бўлгани учун $\{T^*y_{n_i}\}$ яқинлашувчи, яъни T^* — тўла узлуксиз.

T^* тўла узлуксиз бўлса, T ҳам тўла узлуксиз бўлиши шунга ўхшаш исботланади.$_*$

Параграфни тўла узлуксиз операторларнинг хос қийматларини ўрганиш билан якунлаймиз. $Tx=\lambda x$ тенгламани оламиз.

4-теорема. *E Банах фазосида аниқланган тўла узлуксиз T оператор ва ихтиёрий мусбат δ сон бе-*

рилган бўлсин. T операторнинг абсолют қиймати δ дан катта бўлган хос қийматларидан иборат тўпламни Λ_δ билан белгилаймиз. У ҳолда Λ_δ нинг элементларига мос келувчи чизиқли эркли хос векторларнинг сони чеклидир.

Исбот. Λ_δ тўпламдан бирор

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

кетма-кетлик танлаб оламиз (улар орасида тенглари ҳам бўлиши мумкин), яъни ҳар бир λ_n сон T нинг хос қиймати ва $|\lambda_n| > \delta$. Энди уларга мос келувчи $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ хос векторларнинг чизиқли эркилларининг сони чексиз деб фараз қилайлик. E_n орқали $x_1, x_2, \ldots, x_n$ векторларнинг чизиқли қобиғини белгилаймиз. Юқоридаги Ф. Рисс леммасига асосан ушбу

$$1)\ \|y_n\| = 1,\ 2)\ y_n \in E_n,\ 3)\ \rho(y_n, E_{n-1}) = \inf_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик мавжуд. Ихтиёрий n натурал сон учун ушбу

$$\left\|\frac{y_n}{\lambda_n}\right\| = \frac{\|\lambda_n\|}{|\lambda_n|} = \frac{1}{|\lambda_n|} < \frac{1}{\delta}$$

муносабатлар ўринли, яъни $\left\{\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ чегараланган кетма-кетлик. T тўла узлуксиз бўлгани учун $\left\{T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисм кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин.

Сўнгра $y_n \in E_n$ бўлгани учун $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Бундан

$$T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k T x_k}{\lambda_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \lambda_k x_k}{\lambda_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n = y_n + z_n.$$

Бу ерда

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k \in E_{n-1}.$$

Демак, ихтиёрий $p, q\ (p > q)$ натурал сонлар учун ушбу

$$\left\|T\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right) - T\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right)\right\| = \|y_p + z_p - (y_q + z_q)\| = \|y_p - (y_q + z_q - z_p\| > \frac{1}{2}$$

тенгсизлик ўринли (чунки $y_q + z_q - z_p \in E_{p-1}$). Яъни $\left\{T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right\}$ кетма-кетликдан ҳеч қандай яқинлашувчи қисм кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин эмас. Бу эса зиддиятга олиб келади. Шунинг учун $x_1, x_2, \ldots, x_n. \ldots$ векторлар системасининг фақат чекли қисмигина чизиқли эркли бўлиши мумкин.*

1- натижа. Банах фазосидаги тўла узлуксиз операторнинг нолдан фарқли хос қийматига мос келувчи чизиқли эркли хос векторларининг сони чеклидир.

2- натижа. Ихтиёрий тўла узлуксиз оператор учун Λ_δ тўплам чеклидир.

Хусусан, Банах фазосидаги тўла узлуксиз операторнинг хос қийматларининг сони кўпи билан саноқлидир ва уларнинг модулларини камайиш тартибида ёзиш мумкин:

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots.$$

Агар бу 'кетма-кетлик чексиз бўлса, у нолга интилади.

10.3- §. Гильберт фазосида тўла узлуксиз операторлар

Гильберт фазосидаги тўла узлуксиз операторлар кўпгина қўшимча хоссаларга эгадир. Бунда Гильберт фазоси ўз-ўзига қўшма фазо эканлиги катта роль ўйнайди. Қуйидаги теоремадан Гильберт фазосида тўла узлуксиз операторнинг бошқа тенг кучли таърифи келиб чиқади. Бу параграфда H сепарабел Гильберт фазоси деб фараз қиламиз.

1- теорема. *H Гильберт фазосидаги T оператор тўла узлуксиз бўлиши учун у ихтиёрий суст яқинлашувчи кетма-кетликни кучли яқинлашувчи кетма-кетликка акс эттириши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурлиги. $T: H \to H$ тўла узлуксиз оператор бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик $x \in H$ элементга суст яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик норма бўйича чегараланган (8.3- §, 1- теорема), демак, $\{Tx_n\}$ кетма-кетлик нисбий компактдир, яъни унинг ихтиёрий чексиз қисмидан кучли яқинлашувчи қисм кетма-кетлик танлаб олиш мумкин.

T узлуксиз бўлгани учун $\{Tx_n\}$ кетма-кетлик Tx элементга суст яқинлашувчидир, яъни $\{Tx_n\}$ кетма-кетлик фақатгина ягона лимит нуқтага эга. Демак, $\{Tx_n\}$ кетма-кетлик Tx элементга кучли яқинлашувчидир, акс ҳолда Tx дан фарқли нуқтага кучли (ва демак, суст) яқинлашувчи қисм кетма-кетлик танлаб олиш мумкин бўлар эди.

Кифоялиги. T оператор ихтиёрий суст яқинлашувчи кетма-кетликни кучли яқинлашувчи кетма-кетликка акс эттирсин деб фараз қилайлик. Бирор чексиз M тўплам H фазода чегараланган бўлса, 8.4- § даги 2- теореманинг натижасига асосан ундаги ихтиёрий чексиз тўпламдан суст яқинлашувчи кетма-кетлик ажратиш мумкин. Фаразимизга асосан бу суст яқинлашувчи кетма-кетликни T оператор кучли яқинлашувчи кетма-кетликка акс эттиради, яъни $T(M)$ — нисбий компакт тўплам.$_*$

Натижа. $T:H\to H$ оператор тўла узлуксиз, $\{x_n\}$ кетма-кетлик x элементга суст яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда

$$(Tx_n,\ x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(Tx,\ x).$$

Исбот. Ихтиёрий n натурал сон учун

$$\{(Tx_n,\ x_n)-(Tx,x)|\leqslant|(Tx_n,\ x_n)-(Tx,\ x_n)|+|(Tx,x_n)-$$
$$-(Tx,\ x)|=|(Tx_n-Tx,\ x_n)|+|(Tx,\ x_n-x)|\leqslant$$
$$\leqslant\|x_n\|\cdot\|Tx_n-Tx\|+|(Tx,\ x_n-x)|.$$

1- теоремага асосан $\{x_n\}$ кетма-кетлик x га суст яқинлашгани учун $\{Tx_n\}$ кетма-кетлик Tx га кучли яқинлашади, яъни $\|Tx_n-Tx\|\to 0$ ва 8.3- § даги 1- теоремага асосан $\|x_n\|$ чегараланганлиги сабабли $\|x_n\|\cdot\|Tx_n-Tx\|\to 0$. $\{x_n\}$ кетма-кетлик x га суст яқинлашишини ҳисобга олсак, ихтиёрий $y\in H$ учун $|(y,\ x_n-x)|\to 0$; хусусан, $|(Tx,\ x_n-x)|\to 0$. Демак,

$$|(Tx_n.\ x_n)-(Tx,\ x)|\to 0._*$$

Энди биз ўз-ўзига қўшма бўлган тўла узлуксиз операторларни батафсилроқ ўрганамиз. Хусусан, бундай операторлар учун чизиқли алгебра курсидан маълум бўлган матрицаларни диагонал кўринишга келтириш теоремасига ўхшаш теоремани исботлаймиз. Аввал қуйидаги икки леммани келтирамиз.

1- лемма. H комплекс Гильберт фазоси бўлиб, T ундаги ўз-ўзига қўшма бўлган оператор бўлсин. У ҳолда бу операторнинг хос қийматлари ҳақиқий бўлиб, ҳар хил хос қийматларга мос келувчи хос векторлар ортогоналдир.

Исбот. $\lambda \in C$ сон T оператор учун хос қиймат бўлса, у ҳолда

$$Tx = \lambda x, \quad x \neq \theta,$$

демак,

$$\lambda (x, x) = (Tx, x) = (x, T x) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x),$$

бу ерда $(x, x) = \|x\|^2 \neq 0$ бўлгани учун $\lambda = \bar{\lambda}$, яъни λ — ҳақиқий сон.

Энди λ, μ $(\lambda \neq \mu)$ сонлар T операторнинг хос қийматлари бўлиб, x ва y мос равишда уларнинг хос векторлари бўлсин. Бу ҳолда

$$\lambda (x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \mu y) = \mu (x, y),$$

$\lambda \neq \mu$ бўлгани учун $(x, y) = 0$, яъни $x \perp y$.*

2- лемма. T ўз-ўзига қўшма чегараланган чизиқли оператор ва $Q(x) = (Tx, x)$ бўлсин. Агар ушбу

$$|Q(x)| = |(Tx, x)|$$

функционал бирлик шарнинг x_0 нуқтасида максимумга эга бўлса, у ҳолда

$$(x_0, x) = 0$$

муносабатдан $(Tx_0, x) = (x_0, Tx) = 0$ тенглик келиб чиқади.

Исбот. Равшанки, $\|x_0\| = 1$. Дарҳақиқат, агар $\|x_0\| < 1$ бўлса, у ҳолда

$$|Q(\frac{x_0}{\|x_0\|})| = |(T \frac{x_0}{\|x_0\|}, \frac{x_0}{\|x_0\|})| = \frac{1}{\|x_0^2\|} \cdot |(T_0, x_0)| >$$
$$> (|Tx_0, x_0)| = |Q(x_0)|$$

муносабат $|Q(x_0)|$ максимал қиймат эканлигига зид бўлар эди (чунки $\left\|\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\| = 1$).

a — ихтиёрий ҳақиқий сон бўлсин. Ушбу

$$y = \frac{x_0 + ax}{\sqrt{1+a^2 \|x\|^2}}$$

элементни олсак, $\|x_0\| = 1$ ва $(x_0, x) = 0$ бўлгани сабабли $\|y\| = 1$. Энди

$$Q (y) = \frac{1}{1 + |a|^2 \|x\|^2} [Q(x_0) + 2a\mathrm{Re}(Tx_0, x) + a^2 Q (x)]$$

эканлигини ҳисоблаш осон, бу ерда $\mathrm{Re}(Tx_0, x)$ сон (Tx_0, x)

нинг ҳақиқий қисми. Олинган a сон чексиз кичик бўлганда

$$Q(y) = Q(x_0) + 2a\mathrm{Re}(Tx_0, x) + O(a^2).$$

Бу муносабатдан кўриниб турибдики, агар $(Tx_0, x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда a сонниг модулини ўзгартирмаган ҳолда ишорасини шундай танлаш мумкинки, $|Q(y)| > |Q(x_0)|$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса $|Q(x_0)|$ нинг максимал эканлигига зид. Демак, $(Tx_0, x) = 0$.$_*$

2- теорема. (Гильберт-Шмидт теоремаси) *H Гильберт фазосида тўла узлуксиз ўз-ўзига қўшма чизиқли T оператор берилган бўлиб, $\{\lambda_n\}$ унинг барча хос қийматлари бўлсин. H фазода шу хос қийматларга мос келувчи хос векторлардан иборат шундай ортонормал $\{\varphi_n\}$ система мавжудки, ихтиёрий $x \in H$ элемент ушбу*

$$x = \sum_k c_k \varphi_k + x' \qquad (1)$$

кўринишда ягона усулда ёйилади, бу ерда $x' \in \mathrm{ker}T$, яъни $Tx' = \theta$.

Агар шу билан бирга $\{\varphi_n\}$ чексиз система бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Исбот. Хос қийматлардан иборат $\{\lambda_n\}$ кетма-кетликни абсолют қиймати камайиши тартибида ёзиб: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots$, буларга мос равишда $\{\varphi_n\}$ системани индукция бўйича қуйидагича тузамиз.

2- леммадаги

$$|Q(x)| = |(Tx, x)|$$

функционални олиб, уни бирлик шарда максимумга эришишини исботлаймиз. Ушбу

$$\Lambda = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(Tx, x)|$$

белгилашни киритсак, у ҳолда супремумнинг хоссасига асосан шундай

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \|x_n\| \leqslant 1, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

кетма-кетлик мавжудки,

$$\lim_{n\to\infty} |(Tx_n, x_n)| = \Lambda.$$

Бирлик шар суст компакт бўлгани сабабли (8.4- § даги 2- теорема) $\{x_n\}$ кетма-кетликдан бирор $y\in H$ элементга суст яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисм кетма-кетликни ажратиш мумкин. 8.4- §, 2- теорема исботининг б) қисмига асосан $\|y\| \leqslant 1$. 1- теореманинг натижасига асосан

$$\lim_{k\to\infty}|(Tx_{n_k}, x_{n_k})| = |(Ty, y)|,$$

демак, $|(Ty, y)| = \Lambda$.

Кўриниб турибдики, $\|y\| = 1$, акс ҳолда (яъни $\|y\| < 1$ бўлса) $y' = \frac{y}{\|y\|}$ элемент бирлик шарнинг элементи бўлиб, $|(Ty', y')| > \Lambda$ зиддият ҳосил бўлар эди.

Энди φ_1 сифатида шу y элементни олиб, унинг T оператор учун хос вектор эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $T\varphi_1$ элементнинг $\{\lambda\varphi_1\}_{\lambda\in C}$ ва $\{\lambda\varphi_1\}^{\perp}_{\lambda\in C}$ қисм фазолар бўйича ортогонал ёйилмасини оламиз, яъни

$$T\varphi_1 = \lambda\varphi_1 + \psi_1;$$

бу ерда $\psi_1 \perp \varphi_1$. 2- леммага асосан $\psi_1 \perp T\varphi_1$, демак, $\psi_1 = \theta$. Бундан

$$T\varphi_1 = \lambda\varphi_1$$

ва

$$|(T\varphi_1, \varphi_1)| = |\lambda(\varphi_1, \varphi_1)| = |\lambda|\,\|\varphi_1\|^2 = |\lambda|$$

бўлгани сабабли $|\lambda| = \Lambda$; абсолют қиймат бўйича энг катта хос қиймат λ_1 бўлгани учун $\lambda = \lambda_1$. Шундай қилиб, $T\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ ва $|\lambda_1| = \Lambda$.

Энди $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ хос қийматларга мос келувчи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ хос векторлар топилган деб фараз қилайлик. Бу векторларнинг чизиқли қобиғини M_n билан белгилаймиз. Ушбу $|(Tx, x)|$ функционални $M_n^{\perp}$ қисм фазонинг бирлик шарида кўрамиз. M_n қисм фазо ўз-ўзига қўшма T операторга нисбатан инвариант бўлгани учун $M_n^{\perp}$ қисм фазо ҳам инвариантдир. Юқоридаги мулоҳазани $M_n^{\perp}$ қисм фазога қўлласак, $M_n^{\perp}$ қисм фазода T операторнинг φ_{n+1} хос вектори топилади.

Энди икки ҳол бўлиши мумкин:

1) бирор n_0 қадамдан сўнг ҳосил бўлган $M_{n_0}^{\perp}$ қисм фазодаги ихтиёрий x учун

$$(Tx, x) = 0;$$

2) ихтиёрий n учун $(Tx, x)\neq 0$ шартни қаноатлантирувчи $x\in M_n^\perp$ элемент мавжуд.

Биринчи ҳолда 2- леммага асосан $(Tx,x)=0$ муносабатдан $(Tx,Tx)=0$ тенглик келиб чиқади (чунки бу ҳолда леммадаги x_0 сифатида ихтиёрий $x\in M_{n_0}^\perp$ элементни олиш мумкин). Демак, ихтиёрий $x\in M_{n_0}^\perp$ учун $Tx=\theta$, яъни $M_{n_0}^\perp$ қисм фазо $\lambda=0$ хос қийматга мос келувчи хос векторлардан иборат, яъни $\{\varphi_n\}$ система чеклидир.

Иккинчи ҳолда чексиз $\{\varphi_n\}$ система ҳосил бўлиб, уларга мос келувчи λ_n сонлар нолдан фарқлидир. Энди ушбу $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$ муносабатни исботлаймиз. Ихтиёрий x элемент учун $c_n=(x,\varphi_n)$ сонлар x элементнинг $\{\varphi_n\}$ ортонормал системаси бўйича Фурье коэффициентлари бўлгани сабабли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ яқинлашувчи қатордир. Хусусан, ихтиёрий x элемент учун $(x,\varphi_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Демак, $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик θ элементга суст яқинлашувчидир. 1- теоремага асосан $(T\varphi_n\}$ кетма-кетлик θ элементга норма бўйича яқинлашади, яъни $\|T\varphi_n\|=\|\lambda_n\varphi_n\|=|\lambda_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Ниҳоят, (1) ёйилмани исботлаймиз.

M орқали $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ векторларнинг чизиқли қобиғининг ёпилмасини белгилаймиз. Бунда $M^\perp=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n^\perp$. Равшанки, ҳар қандай n учун $M^\perp\subset M_n^\perp$. Демак, ихтиёрий $x'\in M^\perp$ $(x'\neq\theta)$ ва n учун

$$|(Tx', x')| = \left|\left(T\frac{x'}{\|x'\|}, \frac{x'}{\|x'\|}\right)\right|\cdot\|x'\|^2 \leqslant \max_{\substack{\|y\|\leqslant 1\\ y\in M_n^\perp}} |(Ty, y)|\cdot\|x'\|^2 =$$

$$= \lambda_{n+1}\|x'\|^2.$$

Бунда n ихтиёрий бўлгани ва $\lambda_n\to 0$ туфайли

$$(Tx', x')=0.$$

Сўнг 2- леммани $M^\perp$ қисм фазога қўлласак, юқоридаги муносабатдан $(Tx', Tx')=0$ тенглик, яъни $Tx'=\theta$ келиб чиқади. Демак, $M^\perp\subset\ker T$. Бундан, бевосита кўриниб турибдики, ихтиёрий x вектор ушбу

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k+x',\ x'\in\ker T$$

кўринишга эгадир. Бу ерда c_k коэффициентлар ягона равишда топилиши $\{\varphi_k\}$ системанинг M фазода ортогонал базислигидан келиб чиқади, бундан эса x' ҳам ягоналиги кўриниб турибди.$_*$

Исботланган теорема кейинги параграфларда кўриладиган интеграл тенгламалар назариясида жуда муҳим роль ўйнайди.

10.4-§. Чизиқли интеграл тенгламалар

Функционал фазода (масалан, $C[a,b,]$, $L_2[a,b,]$, $C_2[a,b]$) тенглама берилган бўлиб, номаълум элемент функциядан иборат бўлса, бундай тенглама *функционал тенглама* дейилади. Агар функционал тенгламада номаълум функция интеграл остида бўлса, у ҳолда тенглама *интеграл тенглама* дейилади. Масалан, ушбу

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)g(\varphi(t), t)dt$$

тенглама φ га нисбатан интеграл тенгламадир, бу ерда $K(s,t)$, $g(s,t)$ — берилган функциялар.

Интеграл тенгламадаги ифода номаълум функцияга нисбатан чизиқли бўлган ҳолда тенглама *чизиқли интеграл тенглама* дейилади.

Қуйидаги тенгламалар чизиқли интеграл тенгламаларга мисолдир:

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt + f(s) = 0, \tag{1}$$

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt + f(s), \tag{2}$$

бу ерда φ — номаълум функция, $K(s, t)$ ва $f(s)$ — маълум функциялар, (1) ва (2) тенгламалар мос равишда *биринчи ва иккинчи тур Фредгольм тенгламалари* дейилади.

Хусусан, $K(s, t)$ функция $t > s$ қийматлар учун ушбу

$$K(s, t) = 0$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда (1) ва (2) тенгламалар мос равишда ушбу

$$\int_a^s K(s, t)\varphi(t)dt + f(s) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s, t)\varphi(t)dt + f(s) \tag{4}$$

кўринишларга эга бўлади. Бундай тенгламалар *биринчи ва иккинчи тур Вольтерра тенгламалари* дейилади. Вольтерра тенгламалари Фредгольм тенгламаларининг хусусий ҳоли бўлса-да, улар алоҳида ўрганилади, чунки Вольтерра тенгламалари ўзига хос бўлган хоссаларга эга.

Агар (1), (2), (3), (4) тенгламаларда f функция нолга тенг бўлса, бу тенгламалар *бир жинсли* дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(s)=\int\limits_0^s\frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha}dt\ (0<\alpha<1,\ f(0)=0)$$

тенглама *Абель тенгламаси* дейилади.

Бу тенглама Вольтерра тенгламасининг хусусий ҳоли бўлиб, 1823 йилда Н. Абель томонидан кўрилган.

Биринчи тур Фредгольм тенгламаларини ўрганиш иккинчи тур тенгламаларга қараганда анча қийинроқ. Масалан, бундай тенгламалар ҳар доим ечимга эга бўлавермайди.

Мисол сифатида ушбу

$$f(s)=\int\limits_0^s\varphi(t)\,dt$$

тенгламани $C[a, b]$ фазода кўрсак, бу тенглама биринчи тур Фредгольм тенгламаси бўлиб, унда

$$K(s, t)=\begin{cases}1, & t\leqslant s \text{ учун},\\ 0, & t>s \text{ учун}.\end{cases}$$

Агар f функция ҳосилага эга бўлса, у ҳолда, равшанки, $\varphi(s)=f'(s)$ функция тенгламанинг ечимидир. Акс ҳолда бу тенглама ечимга эга эмас.

Иккинчи тур Фредгольм тенгламалари кенгроқ ўрганилган.

Биз қуйида Фредгольм тенгламаларини текширишга ҳозиргача баён қилинган функционал анализ элементларини, хусусан Гильберт — Шмидт назариясини татбиқ қиламиз.

$L_2[a, b]$ комплекс фазода иккинчи тур Фредгольм тенгламаси, яъни (2) тенгламани оламиз. Бу тенгламада $f(s)$ маълум ва $\varphi(s)$ номаълум функциялар бўлиб, улар $L_2[a, b]$ фазонинг элементларидир.

Бу тенгламага L_2 $[a, b]$ фазода аниқланган

$$\psi = T\varphi = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)dt \tag{5}$$

Фредгольм операторини мос қуямиз (7.3- §).

Агар $K(s, t)$ функция $[a, b] \times [a, b]$ тўпламда квадрати билан жамланувчи, яъни

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dsdt < \infty \tag{6}$$

бўлса, у *Гильберт — Шмидт ўзаги*, унга мос T оператор эса *Гильберт—Шмидт оператори* дейилади.

1- теорема. *Гильберт—Шмидт оператори* L_2 $[a,b]$ *фазода тўла узлуксиз бўлиб, унинг нормаси қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:*

$$\|T\| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds\,dt}. \tag{7}$$

Исбот. T оператор L_2 $[a, b]$ фазода чегараланган ва унинг нормаси (7) шартни қаноатлантириши 7.3- § даги 7- мисолда кўрсатилган эди. Энди фақат унинг тўла узлуксиз эканлигини исботласак кифоя.

Бирор $\{\psi_n\}$ система $L_2[a, b]$ фазода тўла ортогонал бўлсин. У ҳолда (4.5- § даги 4- мисолга асосан) $\{\psi_m(s)\,\psi_n(t)\}$ кўпайтмалар системаси L_2 (D) фазода ортогонал система ташкил қилади (эслатамиз: $D = [a, b] \times [a, b]$) Демак, ушбу

$$K(s, t) = \sum_{n,\, m=1}^{\infty} a_{mn}\,\psi_m(s)\,\psi_n(t)$$

ёйилма ўринлидир. Қуйидаги функциялар кетма-кетлигини қарайлик:

$$K_N(s, t) = \sum_{m,\, n=1}^{N} a_{mn}\,\psi_m(s)\,\psi_n(t).$$

Бу ўзакка мос Фредгольм операторини T_N билан белгилаймиз. Равшанки, T_N оператор тўла ўзлуксиз, чунки у L_2 $[a, b]$ фазони чекли ўлчамли қисм фазога акс эттиради.

Ҳақиқатан, ихтиёрий $\varphi \in L_2\ [a, b[$ учун

$$T_N \varphi = \int_a^b K_N(s, t)\,\varphi(t)dt =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn}\,\psi_m(s)\int_a^b \varphi(t)\psi_n(t)\,dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \varphi_m(s) \sum_{n=1}^{N} a_{mn}\, b_n,$$

бу ерда $b_n = \int_a^b \varphi(t)\,\psi_n(t)\,dt.$

Демак, T_N оператор $L_2\ [a, b]$ фазони $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ функцияларнинг чизиқли қобиғи бўлган чекли ўлчамли фазога акс эттиради.

Таърифга асосан, $K_N(s, t)$ функциялар $K(s, t)$ функциянинг $\{\psi_m(s)\,\psi_n(t)\}$ система бўйича Фурье қаторининг хусусий йиғиндиларидан иборат. Шу туфайли $N \to \infty$ да

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_N(s, t)|^2\, dsdt \to 0.$$

Энди (7) тенгсизликни $T - T\ N$ операторга қўлласак,

$$\|T - T_N\| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_N(s, t)|^2\, ds\, dt} \to 0$$

муносабатга келамиз. Шундай қилиб, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ тўла узлуксиз операторлар кетма-кетлиги норма бўйича T операторга яқинлашади. 10.2- § даги 1- теоремага асосан T ҳам тўла узлуксиз.$_*$

Натижа. Ихтиёрий Гильберт — Шмидт оператори чекли ўлчамли операторларнинг норма бўйича лимитидир.

Гильберт фазосида қўшма операторларни ўрганганимизда $K(t, s)$ ўзакли Фредгольм оператори учун қўшма операторнинг ўзаги $\overline{K(s, t)}$ бўлишини кўрсатган эдик. Хусусан (5) формула билан аниқланган T оператор ўз-ўзига қўшма бўлиши учун

$$\overline{K(s, t)} = K(t, s) \qquad (8)$$

тенглик зарур ва кифоядир. (8) шартни қаноатлантирувчи ўзаклар *симметрик ўзаклар* дейилади.

Энди (8) шартни қаноатлантирувчи ўзакли тенгламани ўрганамиз. Юқорида айтилганидек, бу ҳолда

$$T\varphi = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt$$

оператор ўз-ўзига қўшма тўла узлуксиз оператор. Демак, бу операторга 10.3- § даги Гильберт — Шмидт теоремасини (2- теорема) қўллаш мумкин. (2) тенгламани қисқача ушбу

$$\varphi = T\varphi + f \tag{9}$$

кўринишда ёзамиз. Гильберт — Шмидт теоремасига асосан $\{\lambda_n\}$ хос қийматларга мос келувчи хос векторлардан иборат бўлган шундай ортонормал $\{\varphi_n\}$ система мавжудки, ихтиёрий $\xi \in L_2[a, b]$ элементни

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n + \xi'$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $\xi' \in \ker T$, яъни $T\xi' = \theta$. Хусусан,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n + f', \ f' \in \ker T. \tag{10}$$

(9) тенгламанинг ечимини ушбу

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n + \varphi', \ \varphi' \in \ker T \tag{11}$$

кўринишда излаймиз. (9) тенгламада f ва φ функцияларнинг (10), (11) ёйилмаларини ёзиб, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n + \varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\lambda_n\varphi_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n + f'$$

тенгламага келамиз, яъни

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n(1 - \lambda_n)\varphi_n + \varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n + f'.$$

Бундай ёйилма Гильберт — Шмидт теоремасига асосан ягона бўлгани сабабли

$$x_n(1-\lambda_n)=b_n,$$
$$\varphi'=f';$$

бундан $\lambda_n \neq 1$ бўлса, $x_n=\frac{b_n}{1-\lambda_n}$, ва $\lambda_n=1$ бўлса, $b_n=0$.

Кўриниб турибдики, $\lambda_n=1$ ҳолда $b_n=0$ шарт (9) тенгламанинг ечимга эга бўлиши учун зарур ва кифоядир. Бундай $\lambda_n=1$ учун x_n ихтиёрий.

Шунинг билан қуйидаги теорема исботланди.

2-теорема. *Агар 1 сони T оператор учун хос қиймат бўлмаса, у ҳолда (9) тенглама ихтиёрий f учун ягона ечимга эга. Агар 1 сони T оператор учун хос қиймат бўлса, у ҳолда (9) тенглама ечимга эга бўлиши учун f функция 1 сонига мос келувчи ҳамма хос функцияларга ортогонал бўлиши зарур ва кифоядир. Бу ҳолда (9) тенглама ечимларининг сони чексиздир.*

10.5- §. Фредгольм теоремалари

Бу ерда ҳам юқорида кўрилган ушбу

$$\varphi=T\varphi+f \tag{1}$$

тенгламани ўрганишни давом эттирамиз. Навбатдаги мулоҳазаларда T операторнинг интеграл кўриниши эмас, балки фақат унинг тўла узлуксизлиги роль ўйнайди. Шунинг учун H Гильберт фазосида бирон T тўла узлуксиз операторни олиб, (1) кўринишдаги тенгламани ўрганамиз. Бунинг учун $A=I-T$ операторни киритган ҳолда (I — бирлик оператор) (1) тенгламани ушбу

$$A\varphi=f \tag{2}$$

кўринишда ёзамиз. (2) тенглама билан бир қаторда бир жинсли бўлган

$$A\varphi_0=\theta \tag{3}$$

тенгламани ва буларга қўшма бўлган ушбу (2)

$$A^*\psi=g, \tag{2'}$$
$$A^*\psi_0=\theta \tag{3'}$$

тенгламаларни кўрамиз (бу ерда A^* оператор A операторга қўшма, яъни $A^* = (I - T)^* = I - T^*$.

Қуйида исботланадиган Фредгольм теоремалари шу тўрт тенгламанинг ечимлари орасидаги боғланишни кўрсатади.

1- теорема. (2) *тенглама ечимга эга бўлиши учун f вектор (3′) тенгламанинг ҳар бир ечимига ортогонал бўлиши зарур ва кифоядир,*

Исбот. $\ker A$ ва $\operatorname{Im} A$ лар A операторнинг мос равишда ядроси ва қийматлари соҳаси, яъни

$$\ker A = \{x \in H\colon\ Ax = \theta\} = A^{-1}(\theta),$$
$$\operatorname{Im} A = \{Ax\colon\ x \in H\} = A(H)$$

эканлигини эслатамиз. Маълумки, A узлуксиз бўлгани учун $\ker A$ тўплам H нинг ёпиқ қисм фазоси. $\operatorname{Im} A$ ҳам H нинг ёпиқ қисм фазоси эканлигини исботлаймиз.

$\{y_n\} \subset \operatorname{Im} A$ кетма-кетлик бирон $y \in H$ элементга яқинлашувчи бўлсин, деб фараз қилайлик. Демак, ушбу

$$y_n = Ax_n = x_n - Tx_n \to y \tag{4}$$

шартни қаноатлантирувчи $(x_n\}$ кетма-кетлик мавжуд. x_n векторларни $\ker A$ фазога ортогонал деб ҳисоблаш мумкин, акс ҳолда x_n ўрнига $x_n' = x_n - \mathrm{pr}\,x_n$ векторларни олиш мумкин; бу ерда $\mathrm{pr}\,x_n$ элемент x_n векторнинг $\ker A$ қисм фазога проекцияси. Бундан ташқари, $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегаралангандир. Дарҳақиқат, акс ҳолда $\|x_n\| \to \infty$ деб ҳисоблаш мумкин, демак, (4) га асосан

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{y_n}{\|x_n\|} \to \theta \tag{5}$$

муносабат ўринли.

Сўнг $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ кетма-кетлик бирлик шарга тегишли бўлгани ва T тўла узлуксиз эканлиги туфайли бирор $\{x_{n_k}\}$ қисм кетма-кетлик учун $T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right)$ бирор z элементга яқинлашувчи бўлади. Бундан (5) га асосан $\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$ кетма-кетлик ҳам шу z лимитга яқинлашувчи бўлади. Равшанки, $\|z\| = 1 \left(\text{чунки} \left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \right\| = 1\right)$ ва $Az = z - Tz =$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \lim_{k\to\infty} T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) = \lim_{k\to\infty}\left[\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) - T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right)\right] = \theta,$$

яъни $z \in \ker A$. Аммо ҳар бир x_n элемент $\ker A$ га ортогонал эди, демак, $z \perp \ker A$, бундан ва $z \in \ker A$ дан $z = \theta$ келиб чиқади, бу эса $\|z\| = 1$ тенгликка зид. Бу зиддият $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини кўрсатади. T оператор тўла узлуксиз бўлгани учун $\{Tx_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи бўлган $\{Tx_{n_l}\}$ қисм кетма-кетлик ажратиш мумкин. (4) га асосан $\{x_{n_l}\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлади. Бу лимитни x билан белгиласак, у ҳолда

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{l\to\infty} Ax_{n_l} = A\,(\lim_{l\to\infty} x_{n_l}) = Ax,$$

яъни $y \in \mathrm{Im}A$, демак, $\mathrm{Im}A$ ёпиқдир. 10.2- §, 3- теоремага асосан T^* оператор ҳам T билан бир қаторда тўла узлуксиз бўлгани сабабли $\mathrm{Im}\,A^*$ ҳам H нинг ёпиқ қисм фазоси.

Энди биз қуйидаги муносабатларни исботлаймиз

$$\ker A \oplus \mathrm{Im}\,A^* = H, \tag{6}$$
$$\ker A^* \oplus \mathrm{Im}\,A = H. \tag{7}$$

Равшанки, $\ker A$ ва $\mathrm{Im}\,A^*$ ўзаро ортогонал қисм фазолар. Ҳақиқатан, ихтиёрий $h \in \ker A$ ва $x \in H$ учун

$$(h, A^*x) = (Ah, x) = (\theta, x) = 0.$$

Демак, ҳеч қандай ($\neq \theta$) вектор бир вақтда $\ker A$ ва $\mathrm{Im}\,A^*$ қисм фазоларга ортогонал эмаслигини кўрсатсак бас. Агар бирор z вектор $\mathrm{Im}\,A^*$ га ортогонал бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x \in H$ учун

$$(Az, x) = (z, A^*x) = 0, \text{ яъни } Az = \theta,$$

демак, $z \in \ker A$.

Шунга ўхшаш (7) тенглик ҳам исботланади. (7) муносабатдан 1- теорема бевосита келиб чиқади, яъни $f \in \mathrm{Im}\,A$ бўлиши учун $f \perp \ker A^*$ зарур ва кифоядир.*

2- теорема. (Фредгольм альтернативаси). Ёки *(2) тенглама ихтиёрий $f \in H$ учун ягона ечимга эга, ёки (3) тенгламанинг нолдан фарқли ечими мавжуд.*

Исбот. k натурал сон учун H^k орқали $\operatorname{Im}(A^k)$ фазони белгилаймиз, хусусан $H^1 = \operatorname{Im} A$. H^k нинг тузилишидан равшанки, $A(H^k) = H^{k+1}$ ва

$$H \supset H^1 \supset H^2 \supset \ldots$$

1- теоремани исботлаш давомида кўрсатилганидек, ҳар бир H^k ёпиқдир.

Лемма. Шундай j натурал сон мавжудки, ушбу

$$H^{k+1} = H^k$$

тенглик ихтиёрий $k \geqslant j$ учун бажарилади.

Леммани исботи. Аксини фараз қилсак, ҳамма H^k фазолар ҳар хил бўлади. Бу ҳолда шундай $\{x_k\}$ ортонормал система мавжудки, $x_k \in H^k$ ва $x_k \perp H^{k+1}$. Демак, ихтиёрий l, k $(l > k)$ сонлар учун

$$Tx_l - Tx_k = -x_k + (x_l + Ax_k - Ax_l).$$

Бу ерда $x_l + Ax_k - Ax_l \in H^{k+1}$ бўлгани учун

$$\| Tx_l - Tx_k\|^2 = \| x_k\|^2 + \|x_l + Ax_k - Ax_l\|^2 \geqslant 1,$$

яъни $\{Tx_k\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи бўлган қисм кетма-кетликни ажратиш мумкин эмас. Бу эса T операторнинг тўла узлуксизлигига зид.*

Теореманинг исботини давом эттирамиз. Агар $\ker A = \{\theta\}$ бўлса (яъни (3) тенглама нолдан фарқли ечимга эга бўлмаса), у ҳолда A мономорфизмдир. Шунинг учун, агар $H^1 = \operatorname{Im} A \neq H$ деб фараз қилсак, у ҳолда $H^2 \neq H^1$, $\ldots$, $H^{k+1} \neq H^k$ муносабатлар ихтиёрий k учун ўринлидир. Бу эса леммага зид. Демак, $\operatorname{Im} A = H$, яъни (2) тенглама ихтиёрий f учун ягона ечимга эгадир.

Агар (2) тенглама ихтиёрий f учун ечимга эга бўлса, у ҳолда $\operatorname{Im} A = H$ ва 1- теоремадаги (7) муносабатга асосан $\ker A^* = \{\theta\}$. Бу тенгликдан, юқоридагидек $\operatorname{Im} A^* = H$ муносабат келиб чиқади. Энди (6) муносабатдан фойдалансак, $\ker A = \{\theta\}$, яъни (3) тенглама фақат нолга тенг ечимга эга эканлиги келиб чиқади.*

3- **теорема.** (*3*) *ва* (*3'*) *тенгламаларнинг чизиқли эркли бўлган ечимлари сони чекли ва ўзаро тенгдир. Бошқача қилиб айтганда,*

$$\dim(\ker A) = \dim(\ker A^*) < \infty.$$

Исбот. $\ker A$ фазонинг ўлчами чексиз деб фараз қилайлик. Бу ҳолда $\ker A$ да чексиз ортонормал $\{x_n\}$ система мавжуд. $x_n \in \ker A$, яъни $Ax_n = x_n - Tx_n = \theta$ бўлгани сабабли $x_n = Tx_n$ ва демак, $\|Tx_k - \mathrm{T}x_l\| = \sqrt{2}$. Яъни $\{Tx_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисм кетма-кетлик ажратиш мумкин эмас. Бу эса T нинг тўла узлуксизлигига зид. Шундай қилиб, $\dim \ker A < \infty$ (шунга ўхшаш $\dim \ker A^* < \infty$). Ушбу

$$\dim(\ker A) = \mu, \quad \dim(\ker A^*) = \nu$$

белгилаш киритамиз. Фараз қилайлик,

$$\mu < \nu$$

тенгсизлик бажарилсин. Сўнг $\ker A$ ва $\ker A^*$ фазоларда мос равишда

$$\{\varphi_1\ \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu\} \text{ ва } \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu\}$$

ортонормал базислар танлаб оламиз ва ушбу

$$Sx = Ax + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j$$

операторни қурамиз. S оператор A операторга чекли ўлчамли операторни қўшиш натижасида ҳосил бўлгани сабабли S оператор учун ҳамма юқорида исботланган фактлар ўринлидир. Бу оператор учун

$$Sx = \theta$$

тенглама фақат ноль ечимга эга. Ҳақиқатан,

$$Sx = Ax + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j = \theta$$

бўлса, 1- теоремадаги (7) муносабатга асосан $Ax \perp \psi_j$ (ихтиёрий j учун) демак,

$$Ax = \theta \text{ ва } (x, \varphi_j) = 0 \ (j = \overline{1, \mu}).$$

Шундай қилиб, бир томондан $x \in \ker A$, яъни x вектор $\{\varphi_j\}$ векторларнинг чизиқли комбинациясидир, иккинчи томондан, x бу векторларга ортогонал, бундан $x = 0$. Демак, $\ker S = \{0\}$. 2- теоремани S операторга қўллаган ҳолда $f = \psi_{\mu+1}$ деб олсак, ушбу

$$Ay + \sum_{j=1}^{\mu} (y, \varphi_j)\, \psi_j = \psi_{\mu+1}$$

тенглама бирор y ечимга эга. Бу тенгликни $\psi_{\mu+1}$ векторга скаляр кўпайтирсак, ушбу $0 = 1$ зиддият ҳосил бўлади (чунки $\operatorname{Im} A \perp \ker A^*$ ва $Ay \in \operatorname{Im} A$, $\psi_{\mu+1} \in \ker A^*$). Демак, $\mu < \nu$ деб фараз қилганимиз зиддиятга келтиради, яъни $\mu \geqslant \nu$. Шунга ўхшаш, A ўрнига A^* оператор олинса, $\mu \leqslant \nu$ тенгсизлик исботланади. Демак, $\mu = \nu$.*

Юқоридаги теоремаларда $T - I$ операторнинг тескари оператори мавжудлик шартларини кўрдик. Равшанки, бу теоремалар $T - \lambda I$ $(\lambda \neq 0)$ операторлар учун ҳам ўринлидир. Фредгольм теоремаларидан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Тўла узлуксиз операторнинг спектридан олинган ихтиёрий нолдан фарқли сон бу оператор учун чекли каррали хос қийматдир.

Мисол сифатида ўзаги „ажралган“ интеграл тенгламаларни кўрамиз. Ушбу

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt + f(s) \tag{8}$$

Фредгольм интеграл тенгламасининг ўзаги

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)\, Q_i(t) \tag{9}$$

кўринишга эга бўлса, у ҳолда $K(s, t)$ *ажралган ўзак* дейилади. Бу ерда P_i, Q_i функциялар $L_2[a, b]$ фазодан олинган. Равшанки, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ функцияларни чизиқли эркли деб ҳисобласак бўлади, акс ҳолда $K(s, t)$ ўзакни чизиқли эркли бўлган $P_1, \ldots, P_i$ $(i < n)$ лар орқали ифодалаш мумкин. (9) тенгликдан фойдаланиб, (8) тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\, \varphi(t)\, dt + f(s)$$

ва ушбу

$$\int_a^b Q_i(t)\varphi(t)\,dt = q_i, \qquad i = \overline{1, n}$$

белгилашларни киритамиз. Натижада (8) тенглама ушбу

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) \tag{10}$$

кўринишга келади. φ функциянинг бу ифодасини берилган интеграл тенгламага қўйсак, ушбу

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\left[\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + \right.$$

$$\left. + f(t)\right] dt + f(s),$$

яъни

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_j\right] \tag{11}$$

кўринишдаги тенгликка келамиз; бу ерда

$$a_{ij} = \int_a^b Q_i(t) P_j(t)\,dt, \qquad b_i = \int_a^b Q_i(t) f(t)\,dt.$$

Биз $P_i(s)$ функциялар чизиқли эркли деб фараз қилганимизни эсга олсак, (11) муносабатдан қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Агар биз бу чизиқли тенгламалар системасини q_i ларга нисбатан ечсак, у ҳолда (10) тенгликдан $\varphi(s)$ функция ҳам топилади. Шундай қилиб, ажралган ўзакли интеграл тенгламани ечиш масаласи (12) чизиқли тенгламалар системасини ечиш масаласига тенг кучли. Бундай тенгламалар ечимларининг хоссалари бизга чизиқли алгебра курсидан маълум. Уларни эслатамиз.

1. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системаси

$$Ax = y,\ A = (a_{ij})\ i, = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$$

ечимга эга бўлиши учун y вектор қўшма бир жинсли ушбу

$$A^*z = \theta \quad (A^* = (\overline{a_{ji}}))$$

системанинг ҳар бир ечимига ортогонал бўлиши зарур ва кифоядир.

2. Ёки $Ax = y$ система ихтиёрий y учун ягона ечимга эга ёки (a_{ij}) матрицанинг детерминанти нолга тенг (яъни $Ax = \theta$ системанинг нолдан фарқли ечими мавжуд).

3. $A = (a_{ij})$ ва $A^* = \overline{(a_{ji})}$ матрицаларнинг ранглари ўзаро тенг, яъни $Ax = \theta$ ва $A^*z = \theta$ системаларнинг чизиқли эркли ечимлари сони ўзаро тенг.

Кўриниб турибдики, ажралган ядроли Фредгольм тенгламалари учун Фредгольм теоремалари юқоридаги 1—3 иборалардан ҳам келиб чиқади.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Агар E нормаланган фазо ва ихтиёрий $T \in L(E)$ тўла узлуксиз оператор бўлса, $\dim E < +\infty$ эканлигини исбот қилинг.

2. $T = (t_{ij})_{i,\,j = 1,\,2,\,\ldots}$ матрица $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} t_{ij}^2 < +\infty$ шартни қаноатлантирса, $T: l_2 \to l_2$ операторнинг тўла узлуксизлигини кўрсатинг.

3. Агар $\{T_n\}$ тўла узлуксиз операторлар кетма-кетлиги T операторга кучли яқинлашса, яъни

$$T_n x \to Tx, \quad \forall x \in E$$

бўлса, у ҳолда T операторнинг тўла узлуксиз бўлиши шарт эмас. Мисол келтиринг.

4. $f: E \to R$ чизиқли функционал тўла узлуксиз оператор бўладими?

5. Қуйидаги интеграл тенгламалар ечилсин:

а) $$\varphi(x) = x = \int_0^x x\,t\,\varphi(t)\,dt$$

(Кўрсатма: дифференциал тенгламага келтиринг);

б) $$\varphi(x) = e^x \sin x + \int_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\,\varphi(t)\,dt;$$

в) $$\varphi(x) - 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\varphi(t)\,dt = 2x - \pi;$$

г) $$\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi/2} \sin x \cos t\,\varphi(t)\,dt = \sin x;$$

д) $$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \cos \pi x,$$

бу ерда

$$K(x, t) = \begin{cases} (x+1)\,t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\,x, & t < x \leqslant 1. \end{cases}$$

XI боб

БАНАХ АЛГЕБРАЛАРИ

11.1- §. Банах алгебраларининг таърифи

C комплекс сонлар майдони устида X вектор фазо берилган бўлсин.

Таъриф. Агар X вектор фазода яна бир амал — элементларни кўпайтириш амали киритилган бўлиб, у қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирса, X фазо *комплекс алгебра* дейилади:

1) $(xy)z = x(yz)$,
2) $x(y+z) = xy + xz$,
3) $\alpha\,(xy) = (\alpha\,x)\,y = x\,(\alpha y)$,

бу ерда $x, y, z \in X$, $\alpha \in C$.

Ушбу бобда фақат комплекс алгебралар кўрилгани сабабли комплекс алгебраларни, қисқача, *алгебралар* деймиз.

Агар ихтиёрий $x, y \in X$ учун $xy = yx$ тенглик бажарилса, X *коммутатив алгебра* дейилади.

Агар X алгебранинг шундай e элементи мавжуд бўлсаки, $ex = xe = x$ тенглик ихтиёрий $x \in X$ учун ўринли бўлса, e элемент *бирлик элемент*, ёки қисқача *бирлик*, X эса *бирлик алгебра* дейилади. Равшанки, алгебрада бирлик ягонадир, чунки e' ҳам бирлик бўлса, у ҳолда $e' = ee' = e$.

Агар X алгебранинг бирор $A \subset X$ қисм тўплами X даги амалларга нисбатан алгебра ҳосил қилса, у ҳолда A *қисм алгебра* дейилади.

Таъриф. X бирли алгебрада норма киритилиб, бу нормада X Банах фазоси бўлса ва ушбу

4) $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, $\quad x, y \in X$;
5) $\|e\| = 1$

муносабатлар бажарилса, X *Банах алгебраси* дейилади.

Баъзан Банах алгебрасининг таърифида бирлик элемент мавжуд эканлиги ҳамда 5) аксиоманинг бажарилиши талаб қилинмайди. Бу ҳолда алгебрани кенгайтириб бирлик элементли алгебра ҳосил қилиш мумкин. Дарҳақиқат, X алгебра 1) — 4) шартларни қаноатлантирсин ва бирликка эга бўлмасин. X_1 сифатида (x, α) $(x \in X, \alpha \in C)$ жуфтлик-лар тўпламини оламиз ва X_1 да алгебраик амаллар ва нормани қуйидагича киритамиз:

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta), \quad \gamma(x, \alpha) = (\gamma x, \gamma\alpha),$$
$$(x, \alpha)\cdot(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta),$$
$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|.$$

Равшанки, X_1 алгебра ва $e = (\theta, 1)$ элемент ундаги бирлик элементдир. Норманинг 5) хоссаси ўз-ўзидан равшан. 4) хосса эса ушбу муносабатлардан кўриниб турибди:

$$\|(x, \alpha)(y, \beta)\| = \|(xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)\| = \|xy + \alpha y + \beta x\| + |\alpha\beta| \leqslant \|xy\| + \|\alpha y\| + \|\beta x\| + |\alpha\beta| \leqslant \|x\|\,\|y\| + |\alpha|\,\|y\| + |\beta|\,\|x\| + |\alpha|\,|\beta| = (\|x\| + |\alpha|)(\|y\| + |\beta|) = \|(x, \alpha)\|\,\|(y, \beta)\|.$$

Ниҳоят X_1 алгебранинг тўлалиги X нинг ва C нинг тўлалигидан келиб чиқади. Демак, X_1 — Банах алгебраси. Равшанки, X алгебрани X_1 алгебранинг $(x, 0)$ кўринишдаги элементларидан иборат қисми сифатида қараш мумкин.

X, Y алгебралар, $F: X \to Y$ чизиқли акс эттириш бўлсин. Агар ихтиёрий $x, y \in X$ учун $F(xy) = F(x)\,F(y)$ муносабат бажарилса, F *гомоморфизм* дейилади. Ўзаро бир қийматли гомоморфизм *изоморфизм* дейилади. Агар F изоморфизм ихтиёрий $x \in X$ учун $\|F(x)'| = \|x\|$ тенгликни қаноатлантирса, у *изометрик изоморфизм* дейилади.

Банах алгебрасининг 4) аксиомасидан кўпайтириш амалининг узлуксизлиги келиб чиқади, яъни $x_n \to x$ ва $y_n \to y$ бўлса, у ҳолда $x_n y_n \to xy$. Дарҳақиқат,

$$\|x_n y_n - yx\| = \|(x_n - x)\,y_n + x\,(y_n - y)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|y_n\|\,\|x_n - x\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

чунки $\|y_n\|$ чегараланган кетма-кетлик. Хусусан, кўпайтириш амали ўнгдан ва чапдан узлуксиз, яъни $x_n \to x$, $y_n \to y$ учун

$$xy_n \to xy, \quad x_n y \to xy.$$

1-теорема. *X комплекс Банах фазоси ва шу билан бирга бирли алгебра бўлиб, ундаги кўпайтириш амали ўнгдан ва чапдан узлуксиз бўлсин. У ҳолда X даги нормага эквивалент бўлган шундай норма мавжудки, бу нормада X Банах алгебрасидир.*

Исбот. X нинг ҳар бир x элементига ушбу $M_x(z) = xz$ ($z \in X$) тенглик ёрдамида M_x операторни мос қўямиз. $\tilde{X}$ тўплам X фазода шу кўринишдаги операторлар тўплами бўлсин.

X даги кўпайтириш амали ўнгдан узлуксиз бўлгани учун $\tilde{X} \subset L(X)$ ($L(X)$ фазо X даги чегараланган операторларнинг Банах фазоси, 7.1-§). Равшанки, $x \to M_x$ мослик чизиқли ва таърифдаги 1) хоссага асосан $M_{xy} = M_x M_y$. Агар $x \neq y$ бўлса, у ҳолда

$M_x e = xe = x \neq y = ye = M_y e$, яъни $M_x \neq M_y$. Демак, $x \to M_x$ мослик X ни $\tilde{X}$ га акс эттирувчи изоморфизмдир.

$\tilde{X}$ қисм фазо $L(X)$ да ёпиқлигини ва, демак, тўла эканлигини кўрсатамиз. $\{T_n\} \subset \tilde{X}$ ва $T_n \to T \in L(X)$ бўлсин деб фараз қилайлик, бу ерда $T_n y = x_n y$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ Бундан

$$T_n y = x_n y = (x_n e) y = T_n(e) y, \quad y \in X.$$

X даги кўпайтириш амалининг чапдан узлуксизлигидан фойдалансак, юқоридаги тенгликдан $n \to \infty$ да

$$Ty = T(e)y$$

тенглик ҳосил бўлади. Энди $x = T(e)$ белгилаш киритамиз. У ҳолда $Ty = xy$, яъни $T \in \tilde{X}$. Шундай қилиб, $\tilde{X}$ — Банах фазосидир.

Ушбу

$$\|x\| = \|xe\| = \|M_x e\| \leq \|M_x\| \, \|e\|$$

тенгсизликка асосан $M_x \to x$ тескари мослик узлуксиздир.

7.4- § даги тескари оператор ҳақидаги теоремага асосан $x \to M_x$ мослик ҳам узлуксиз. Демак, шундай $C > 0$ сон мавжудки, $\|M_x\| \leq C \|x\|$, яъни

$$\frac{1}{\|e\|} \|x\| \leq \|M_x\| \leq C \|x\|. \qquad (1)$$

Агар X да нормани $\|x\|_1 = \|M_x\|$ тенглик билан аниқласак, (1) га асосан бу норма X даги асл нормага эквивалент. Бу нормада эса X Банах алгебрасидир, чунки оператор нормасининг хоссаларига асосан

$$\|xy\|_1 = \|M_{xy}\| = \|M_x M_y\| \leq \|M_x\| \, \|M_y\| = \|x\|_1 \, \|y\|_1,$$
$$\|e\|_1 = \|M_e\| = \|I\| = 1._{*}$$

Мисоллар. 1. C комплекс сонлар майдони Банах алгебрасига энг содда мисолдир, бунда

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z = x + iy).$$

2. C^n фазода алгебраик амалларни координаталар бўйича, нормани эса

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

кўринишда олсак, равшанки, C^n Банах алгебрасидир. Бунда бирлик $e = (1, 1, \ldots, 1)$.

3. K компакт Хаусдорф топологик фазосида аниқланган узлуксиз функциялар тўплами $C(K)$ да алгебраик амалларни одатдагидек киритиб, нормани эса ушбу

$$\|x\| = \max_{t \in K} |x(t)|, \quad x \in C(K)$$

кўринишда оламиз. $C(K)$ Банах алгебраси эканлигини кўрсатиш осон. Бу алгебрада бирлик элемент айнан бирга тенг функциядир.

4. l_1 алгебра. Бу алгебранинг элементлари абсолют жамланувчи икки томонга чексиз $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ кетма-кетликлар бўлиб, норма қуйидагичадир:

$$\|x\| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|. \tag{2}$$

Элементларнинг йиғиндиси ва сонга кўпайтириш амаллари ҳар бир координата бўйича аниқланади, x ва y элементларнинг $z = x \ast y$ кўпайтмасининг координаталари эса қуйидагича аниқланади:

$$z_n = (x \ast y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k}\, y_k. \tag{3}$$

Агар l_1 алгебранинг ҳар бир x элементига ушбу

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \tag{4}$$

тригонометрик қаторни мос қўйсак, у ҳолда (3) тенглик билан аниқланган z_n кетма-кетлик $x(t)$ ва $y(t)$ функцияларнинг кўпайтмасига мос келади. Абсолют яқинлашувчи (4) Фурье қаторига ёйилувчи функциялар алгебрасини W

билан белгилаб, бу алгебрада нормани (2) формула ёрдамида киритамиз. Бунда l_1 ва W Банах алгебралари эканлиги осонликча текширилади. Масалан, 4) аксиомани текширамиз:

$$\|x * y\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z_n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} y_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n-k}| \, |y_k| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_{n-k}| \right) |y_k| =$$

$$= \|x\| \, \|y\|.$$

Киритилган W ва l_1 Банах алгебралари ўзаро изометрик изоморф алгебралардир. W алгебрада бирлик элемент бу айнан бирга тенг $e(t) \equiv 1$ функциядир. Демак, l_1 алгебрада $e = \{e_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$

$$e_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

бирлик элемент.

Келтирилган 1—4- мисоллардаги алгебралар коммутатив алгебраларга мисоллардир. Энди коммутатив бўлмаган Банах алгебрасига мисол келтирамиз.

5. Бирор E Банах фазосида чегараланган операторларнинг $L(E)$ фазосини оламиз. 7.1 §- да кўрсатилганидек, бу фазода кўпайтириш амалини киритиш мумкин. Норма ушбу

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|, \quad A \in L(E)$$

тенглик билан аниқланган эди. Бу норма 4), 5) аксиомаларни қаноатлантириши ва $L(E)$ нинг бу нормага нисбатан тўла эканлиги 7.3- § да кўрсатилган.

11.2- §. Спектр ва резольвента

X Банах алгебраси бўлсин. Агар бирор $x \in X$ учун ушбу

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

тенгликни қаноатлантирувчи x^{-1} элемент мавжуд бўлса, x^{-1} элемент x га *тескари элемент*, x эса *тескариланувчи* дейилади.

Агар λ комплекс сон учун $\lambda e - x$ элемент тескари элементга эга бўлса, λ сон x элемент учун *регуляр нуқта* дейилади. Регуляр бўлмаган нуқталар тўплами x элементнинг *спектри* дейилади ва $\sigma(x)$ билан белгиланади. Демак, $\sigma(x)$ шундай λ сонлар тўпламики, $\lambda e - x$ элемент тескари элементга эга эмас. Регуляр нуқталарда ушбу

$$R_\lambda x = x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$$

тенглик билан аниқланган $R_\lambda : C \setminus \sigma(x) \to X$ акс эттириш x элементнинг *резольвентаси* дейилади. x элементнинг *спектрал радиуси* деб қуйидаги сонга айтилади:

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|.$$

Мисоллар. 1. $X = C$ Банах алгебрасида нолдан фарқли ҳар бир элемент тескарисига эга. Демак, $\alpha \in C$ учун $\sigma(\alpha) = \{\alpha\}$.

2. $X = C(K)$ Банах алгебрасида (11.1- §, 3- мисол) $x \in X$ тескари элементга эга бўлиши учун $x(t)$ функция ҳамма ерда нолдан фарқли бўлиши зарур ва кифоядир. Демак, $\sigma(x)$ тўплам $x(t)$ функциянинг қийматлари тўплами билан устма-уст тушади, резольвента ва спектрал радиус эса қуйидагича:

$$R_\lambda x = \frac{1}{\lambda - x(t)},$$

$$r(x) = \|x\| = \max_{t \in K} |x(t)|.$$

3. $X = L(E)$ Банах алгебрасида (11.1- §. 5- мисол) спектр, резольвента ва бошқа тушунчалар операторлар учун IX бобда киритилган мос тушунчалар билан устма-уст тушади. Аниқроғи, Банах алгебралари учун киритилган тушунчалар операторлар алгебраларидаги мос тушунчаларни абстракт ҳолда умумлаштирилишидир. Бу изоҳ қуйида келтириладиган теоремаларга ҳам тааллуқли.

1- теорема. *Банах алгебрасидаги x элементнинг нормаси бирдан кичик бўлса, у ҳолда $e - x$ элемент тескари элементга эга ва*

$$(e - x)^{-1} = e + x + \ldots + x^n + \ldots .$$

Исбот. Ушбу $s_n = e + x + \dots + x^n$ кўринишдаги элементларни оламиз. Равшанки,

$$\|s_n - s_{n+k}\| = \|x^{n+1} + \dots + x^{n+k}\| \leqslant \sum_{i=k}^{k} \|x\|^{n+i} =$$

$$= \frac{\|x\|^{n+1} - \|x\|^{n+k+1}}{1 - \|x\|} < \frac{\|x\|^{n+1}}{1 - \|x\|} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Демак, $\{s_n\}$ кетма-кетлик X да фундаменталдир. X тўла бўлгани сабабли бу кетма-кетлик бирор $s \in X$ элементга яқинлашади, ва

$$s(e - x) = \lim_{n \to \infty} s_n (e - x) = \lim_{n \to \infty} (e - x^{n+1}) = e.$$

Шунга ўхшаш $(e - x) s = e$.*

Натижа. Агар $x \to \theta$ бўлса $(e - x)^{-1} \to e$.

Дарҳақиқат,

$$\|(e - x)^{-1} - e\| = \|s - e\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x^k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x\|^k =$$

$$= \frac{\|x\|}{1 - \|x\|} \to 0.$$

2- теорема. *X Банах алгебрасидаги бирор x_0 элемент учун x_0^{-1} мавжуд бўлса, у ҳолда $\|\Delta x\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий Δx элемент учун $x_1 = x_0 + \Delta x$ элементнинг тескариси мавжуд ва*

$$x_1^{-1} = (e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1}.$$

Исбот. $\|x_0^{-1} \Delta x\| \leqslant \|x_0^{-1}\| \, \|\Delta x\| < \|x_0^{-1}\| \, \|x_0^{-1}\|^{-1} = 1$ тенгсизликдан 1- теоремага асосан $(e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1}$ нинг мавжудлиги келиб чиқади. Сўнгра

$$(e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1} x_1 = (e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1} (x_0 + \Delta x) =$$

$$= (e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} (e + x_0^{-1} \Delta x) = e$$

ва

$$x_1 (e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1} = (x_0 + \Delta x)(e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1} =$$

$$= (x_0 + \Delta x) [x_0 (e + x_0^{-1} \Delta x)]^{-1} = (x_0 + \Delta x)(x_0 +$$

$$+ \Delta x)^{-1} = e.$$

Демак, $x_0^{-1} = (e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1}$*

1- **натижа.** Банах алгебрасининг тескариланувчи элементлари тўплами очиқдир.

2- **натижа.** *$x(\lambda)$ резольвента $C \setminus \sigma(x)$ тўпламда λ га нисбатан узлуксиздир.*

Дарҳақиқат, 2- теоремада $\Delta x = \Delta\lambda \cdot e$, $x_0 = \lambda_0 e - x$ деб олсак,

$$x(\lambda_0 + \Delta\lambda) = (\lambda_0 e - x + \Delta\lambda e)^{-1} =$$
$$= (e + x(\lambda_0) \cdot \Delta\lambda)^{-1} x(\lambda_0).$$

Юқоридаги 1- теореманинг натижасига асосан, $\Delta\lambda \to 0$ бўлса,

$$(e + x(\lambda_0) \Delta\lambda)^{-1} \to e,$$

яъни

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} x(\lambda_0 + \Delta\lambda) = x(\lambda_0).*$$

3- **теорема.** *Агар λ, μ, $\lambda_0 \in C \setminus \sigma(x)$ бўлса, у ҳолда*

а) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = R_\mu x \cdot R_\lambda x$,

б) $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$.

в) $x'(\lambda_0) = \lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \dfrac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -x^2(\lambda_0)$.

Исбот а).

$$R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} =$$
$$= [(\mu e - x)(\lambda e - x)]^{-1} = [(\lambda e - x)(\mu e - x)]^{-1} =$$
$$= R_\mu x \cdot R_\lambda x.$$

б) $R_\lambda x = (\mu e - x)(\mu e - x)^{-1} R_\lambda x = (\mu e - x) R_\mu x R_\lambda x =$ $= (\mu e - x) R_\lambda x R_\mu x$ (а) га асосан.

Шунга ўхшаш

$$R_\mu x = (\lambda e - x) R_\lambda x R_\mu x.$$

Демак,

$$R_\lambda x = \mu R_\lambda x R_\mu x - x R_\lambda x R_\mu x,$$
$$R_\mu x = \lambda R_\lambda x R_\mu x - x R_\lambda x R_\mu x,$$

бундан

$$R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x R_\mu x,$$

б) хоссага асосан

$$x'(\lambda_0)=\lim_{\lambda\to\lambda_0} x(\lambda)\,x(\lambda_0)=-x^2(\lambda_0).$$

Қуйидаги теоремада спектрнинг асосий хоссалари келтирилган.

4- теорема. 1. *X Банах алгебрасидаги ихтиёрий узлуксиз чизиқли f функционал учун $F(\lambda)=f(x(\lambda))$ функция $C\setminus\sigma(x)$ соҳада аналитикдир ва* $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}|F(\lambda)|=0$.

2. *X даги ихтиёрий x элементнинг спектри бўш бўлмаган компакт тўпламдир ва*

$$r(x)\leqslant\|x\|.$$

Исбот. 1. Ихтиёрий $f\in X'$ учун $F(\lambda)=f(R_\lambda(x))$ деб олсак, у ҳолда 3- теоремага асосан ҳар бир λ_0 регуляр нуқтада

$$F'(\lambda_0)=\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{F(\lambda)-F(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}=\lim_{\lambda\to\lambda_0} f\left(\frac{x(\lambda)-x(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right)=$$

$$=f\left(\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{x(\lambda)-x(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right)=-f\left(x^2(\lambda_0)\right)$$

мавжуд ва, демак, $F(\lambda)$ шу λ_0 нуқтада аналитик.

Сўнгра

$$|F(\lambda)|=|f(x(\lambda))|\leqslant\|f\|\,\|x(\lambda)\|=\|f\|\,\|(\lambda e-x)^{-1}\|=$$

$$=\frac{\|f\|}{|\lambda|}\left\|\left(e-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right\|\xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{}0,$$

чунки

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left\|\left(e-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right\|=\|e\|=1.$$

2. $\sigma(x)=\varnothing$ деб фараз қилайлик. У ҳолда ихтиёрий $f\in X'$ учун $F(\lambda)=f(x(\lambda))$ функция $C\setminus\sigma(x)=C$ да аналитик ва

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}F(\lambda)=0.$$

Лиувилль теоремасига асосан $F(\lambda)\equiv0$. Бу ерда $f\in X'$ ихтиёрий бўлгани сабабли Хан — Банах теоремасига асосан $x(\lambda)\equiv\theta$. Бу эса $(\lambda e-x)\,x(\lambda)=e$ тенгликка зид. Демак, $\sigma(x)\neq\varnothing$.

Энди $\sigma(x)$ нинг компакт эканлигини исботлаймиз. Агар $|\lambda| > \|x\|$ бўлса, у ҳолда 1- теоремага асосан $\lambda e - x = \lambda\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)$ элемент учун тескари элемент мавжуд, чунки $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$. Бундан $\lambda \overline{\in} \sigma(x)$, яъни

$$\sigma(x) \subset \{\lambda \in C : |\lambda| \leqslant \|x\|\}.$$

хусусан, $r(x) \leqslant \|x\|$. Спектрнинг ёпиқлиги 2- теоремадан келиб чиқади. Ҳақиқатан, λ_0 сон x учун регуляр нуқта бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\Delta\lambda$ $(|\Delta\lambda| < \|x(\lambda_0)\|^{-1})$ учун $\lambda_0 + \Delta\lambda$ ҳам регулярдир, чунки

$$(\lambda_0 + \Delta\lambda)\, e - x = \lambda_0 e - x + \Delta\lambda e$$

ва

$$\|\Delta\lambda\, e\| = |\Delta\lambda| < \|x(\lambda_0)\|^{-1} = \|(\lambda_0 e - x)^{-1}\|^{-1}.$$

Регуляр нуқталар тўплами очиқ бўлгани сабабли $\sigma(x)$ ёпиқ (ва чегараланган), демак, компактдир.*

1- натижа. (Гельфанд — Мазур теоремаси). Банах алгебрасида нолдан фарқли ҳар бир элементнинг тескариси мавжуд бўлса, бу алгебра C майдонга изометрик изоморфдир.

Исбот. Ихтиёрий x элементни олайлик. 4- теоремага асосан $\sigma(x) \neq \varnothing$, яъни шундай $\lambda \in C$ мавжудки, $\lambda e - x$ элемент учун тескари элемент мавжуд эмас. Шартга асосан $\lambda e - x = \theta$, яъни $x = \lambda e$. Агар x элементга худди шу λ сонни мос қўйсак, $x \to \lambda$ мослик изоморфизмдир. Сўнгра $\|e\| = 1$ бўлгани учун $\|x\| = \|\lambda e\| = |\lambda|$, яъни $x \to \lambda$ изометрик изоморфизмдир.*

2- натижа. Ихтиёрий $T \in L(E)$ операторнинг спектри бўш эмас.

5- теорема (спектрал радиус ҳақидаги теорема). *Банах алгебрасида ихтиёрий x элементнинг спектрал радиуси учун қуйидаги формула ўринли:*

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}. \qquad (1)$$

Исбот. X фазодаги ихтиёрий f узлуксиз чизиқли функционал учун $F(\lambda) = f(x(\lambda))$ функция 4- теоремага асосан $C \setminus \sigma(x)$ соҳада, хусусан $\{\lambda : |\lambda| > r(x)\}$ соҳада аналитик. Демак, 1- теоремага асосан $|\lambda| > \|x\|$ бўлганда

$$x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}},$$

бундан

$$F(\lambda) = f(x(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

Аналитик функцияларнинг ягоналик хоссасига асосан, бу ёйилма ихтиёрий $|\lambda| > r(x)$ учун ҳам ўринли, демак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f\left(\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right)\right| = 0$, яъни $\left\{\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right\}$ кетма-кетлик нолга суст яқинлашади, демак, у норма бўйича чегараланган (8.3- §), яъни

$$\left\|\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right\| \leqslant C(\lambda),$$

бу ерда $C(\lambda)$ — мусбат сон. Бундан

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\lambda|^{n+1}C(\lambda)} = |\lambda|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\lambda|\,C(\lambda)} = |\lambda|.$$

Бу тенгсизлик ихтиёрий λ $(|\ | > r(x))$ учун ўринли бўлгани сабабли

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(x). \qquad (2)$$

Агар $\lambda \in \sigma(x)$ бўлса, у ҳолда $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Дарҳақиқат, агар $(\lambda^n e - x^n)^{-1}$ мавжуд бўлса эди, у ҳолда

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\lambda^n e - x^n)^{-1}(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \ldots + x^{n-1})$$

бўлар эди, бу эса $\lambda \in \sigma(x)$ муносабатга зид. Ихтиёрий $\mu \in \sigma(x)$ учун 4- теоремага асосан $|\mu| \leqslant \|x\|$. Энди $\mu = \lambda^n$ деб олсак, $\lambda \in \sigma(x)$ муносабатдан $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, яъни $|\lambda|^n \leqslant \|x^n\|$ келиб чиқади, демак, $|\lambda| \leqslant \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Бундан n ихтиёрий бўлгани сабабли

$$r(x) = \sup_{\lambda\in\sigma(x)}|\lambda| \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|x^n\|}$$

Бу тенгсизликни (2) тенгсизлик билан солиштирсак, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$ лимитнинг мавжудлиги ва (1) муносабат келиб чиқади.*

11.3- §. Идеаллар, фактор-алгебралар ва комплекс гомоморфизмлар

Ушбу параграфда X коммутатив Банах алгебрасидир.

Таъриф. I тўплам X нинг вектор қисм-фазоси бўлсин. Агар ихтиёрий $x\in X$ ва $y\in I$ учун $xy\in I$ бўлса, I тўплам *идеал* дейилади.

Равшанки, фақат θ элементдан ёки бутун X дан иборат тўпламлар идеаллардир. Бундай идеаллар *тривиал идеаллар* дейилади. Биз тривиал бўлмаган идеалларни ўрганамиз.

Агар I_0 идеал X нинг ўзидан бошқа идеалнинг хос қисми бўлмаса, I_0 *максимал-идеал* дейилади.

1-теорема. а) *идеалнинг ҳеч бир элементи тескари элементга эга эмас;*

б) *идеалнинг ёпилмаси ҳам тривиал бўлмаган идеалдир.*

Исбот. а) агар бирор $a\in I$ учун a^{-1} мавжуд бўлса, у ҳолда $e=a\,a^{-1}\in I$, демак, ихтиёрий $x\in X$ учун $x=xe\in I$, яъни $X=I$. Бу эса I нинг тривиал эмаслигига зид;

б) I идеал бўлса, маълумки, унинг ёпилмаси $\bar{I}$ қисм фазодир. Энди ихтиёрий $x\in X$ ва $y\in\bar{I}$ элементларни оламиз. Агар $\{y_n\}\subset I$ ва $y_n\to y$ бўлса, у ҳолда $xy_n\in I$. ва X да кўпайтириш амали узлуксиз бўлгани сабабли $xy_n\to xy$. Демак, $xy\in\bar{I}$, яъни $\bar{I}$ идеал. Энди фақат $I\neq X$ эканлигини кўрсатиш қолди. 11. 2-§ даги 2-теореманинг 1-натижасига асосан тескари элементга эга бўлган элементлардан иборат G тўплам очиқ ва а) га асосан $I\cap G=\varnothing$. Демак, $\bar{I}\cap G=\varnothing$, яъни $\bar{I}\neq X$.*

2-теорема. а) *Банах алгебрасининг ҳар қандай идеали бирор максимал идеалнинг қисмидир;*

б) *ихтиёрий максимал идеал ёпиқдир.*

Исбот. а) I_0 бирор идеал бўлсин. Уни ўз ичига олувчи идеаллар тўпламини Q билан белгилайлиз. Q система „$\subset$“ муносабат ёрдамида қисман тартибланган. Агар $P\subset Q$ бирор чизиқли тартибланган қисми бўлса, равшанки, $M=\bigcup\limits_{I\in P} I$ идеалдир. Ихтиёрий $I\in P$ учун $e\,\bar{\in}\, I$ бўлгани сабабли $e\,\bar{\in}\, M$, яъни $M\neq X$. Демак, ҳар қандай чизиқли тартибланган система юқори чегарага эга.

Цорн леммасига асосан (6. 1-§) Q да I_1 максимал элемент мавжуд. Демак, I_1 максимал идеал ва $I_0 \subset I_1$;

б) агар I максимал идеал бўлса, у ҳолда 1-теоремадаги б) га асосан $\overline{I}$ ҳам идеал ва $I \subset \overline{I} \neq X$. Демак, $I = \overline{I}$.$_*$

Натижа. Банах алгебрасида тескари элементга эга бўлмаган ҳар бир элемент бирор максимал идеалда жойлашган. Хусусан, агар X майдон бўлмаса, максимал идеаллар тўплами бўш эмас.

Дарҳақиқат, агар $x_0 \in X$ учун x_0^{-1} мавжуд бўлмаса, у ҳолда $I = x_0X = \{x_0\ x,\ x \in X\}$ тўплам идеалдир. $x_0 \neq \theta$ бўлгани учун $I \neq \{\theta\}$; сўнгра $e \overline{\in} I$ бўлгани сабабли $I \neq X$. 2-теоремага асосан шундай I_1 максимал идеал мавжудки,

$$I_1 \supset I \ni x_0.{}_*$$

X Банах алгебрасида бирор I идеални олиб, X/I фактор-фазони қурамиз (1. 5-§). Бу фактор-фазода кўпайтмани қуйидагича киритамиз. $\hat{x}$ ва $\hat{y}$ синфлардан x ва y вакиллар танлаб $\hat{x}\cdot\hat{y}$ кўпайтма деб xy элементни ўз ичига олувчи синфни айтамиз. Бу кўпайтма x ва y вакилларга боғлиқ эмас. Дарҳақиқат, агар x_1, y_1 бошқа вакиллар, яъни $x - x_1 \in I$, $y - y_1 \in I$ бўлса, у ҳолда $xy - x_1y_1 = xy - x_1y + x_1y - x_1y_1 = x_1(y - y_1) + (x - x_1)y \in I$, чунки I — идеал. Равшанки, киритилган амалларга нисбатан X/I коммутатив алгебра. Бу алгебра X нинг I га нисбатан фактор-алгебраси дейилади.

3-теорема. *X Банах алгебрасида I ёпиқ идеал бўлса, у ҳолда X/I фактор-алгебра ҳам Банах алгебрасидир.*

Исбот. Фактор-алгебрада нормани қуйидагича киритамиз.

$$\|\hat{x}\| = \inf_{x \in \hat{x}} \|x\| = \inf_{y \in I} \|x_0 + y\|, \qquad (1)$$

бу ерда $x_0 \in \hat{x}$.

Даставвал (1) формула нормани аниқлашини кўрсатамиз. Ихтиёрий $\hat{x} \in X/I$ учун $\|\hat{x}\| \geqslant 0$. Агар $\|\hat{x}\| = 0$ бўлса, у ҳолда $\inf\limits_{y \in I} \|x_0 + y\| = 0$. Демак, шундай $\{y_n\} \subset I$ кетма-кетлик мавжудки, $\|x_0 + y_n\| \to 0$, яъни $-y_n \to x_0$.

I ёпиқ бўлгани сабабли $x_0 \in I$, яъни $\hat{x} = \hat{\theta}$. Шундай қилиб, $\|\hat{x}\| \geqslant 0$ ва $\|\hat{x}\| = 0 \iff \hat{x} = \hat{\theta}$. Агар $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\|\lambda\hat{x}\| = \inf_{y \in I}\|\lambda x_0 + y\| = |\lambda| \inf_{y \in I}\left\|x_0 + \frac{y}{\lambda}\right\| = |\lambda|\,\|\hat{x}\|$$

агар $\lambda = 0$ бўлса, $\|\lambda\hat{x}\| = |\lambda|\,\|\hat{x}\|$ эканлиги ўз-ўзидан равшан.

Ихтиёрий $\hat{x}, \hat{y} \in X/I$ учун

$$\|\hat{x} + \hat{y}\| = \inf_{z \in I}\|x_0 + y_0 + z\| = \inf_{u,v \in I}\|x_0 + u + y_0 + v\| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{u \in I}\|x_0 + u\| + \inf_{v \in I}\|y_0 + v\| = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|$$

ва

$$\|\hat{x} \cdot \hat{y}\| = \inf_{z \in I}\|x_0 y_0 + z\| \leqslant \inf_{u,v \in I}\|(x_0 + u)(y_0 + v)\| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{u \in I}\|x_0 + u\| \cdot \inf_{v \in I}\|y_0 + v\| = \|\hat{x}\|\,\|\hat{y}\|.$$

Энди $\|\hat{e}\| = 1$ эканлигини кўрсатамиз, $\hat{e} = e + I$ бўлгани сабабли $\hat{e}^2 = e^2 + I = e + I = \hat{e}$. Демак, $\|\hat{e}\| = \|\hat{e}^2\| \leqslant$ $\leqslant \|\hat{e}\|^2$, яъни $\|\hat{e}\| \leqslant 1$. Агар $\|\hat{e}\| < 1$ бўлганда эди, у ҳолда ихтиёрий n натурал сон учун $\|\hat{e}\| = \|\hat{e}^n\| \leqslant \|\hat{e}\|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ бўлгани сабабли $\|\hat{e}\| = 0$ тенглик ҳосил бўлар эди, бу эса $e \in \bar{I}$ муносабатга зид. Демак, $\|\hat{e}\| = 1$.

Ниҳоят. X/I тўла эканлигини исботлаймиз. $\hat{x}_1$. $\hat{x}_2$, . . . , $\hat{x}_n$, . . . кетма-кетлик шу фазода фундаментал бўлсин. Ихтиёрий k натурал сон учун шундай n_k топиладики,

$$\|\hat{x}_{n_k + m} - \hat{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

тенгсизлик ихтиёрий m натурал сон учун бажарилади. Хусусан,, $\|\hat{x}_{n_2} - \hat{x}_{n_1}\| \leqslant \frac{1}{2}$, демак, шундай x_{n_1}, x_{n_2} вакиллар мавжудки, $\|x_{n_2}-x_{n_1}\|\leqslant 1$. Шунга ўхшаш шундай $x_{n3}, x_{n4}, \ldots, x_{nk}, \ldots$ вакиллар топиладики,

$$\|x_{n_k}-x_{n_{k-1}}\|\leqslant\frac{1}{2_{k-2}}.$$

Демак, $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетлик X фазода фундаментал. Чунки ихтиёрий k, m учун

$$\|x_{n_{k+m}}-x_{n_k}\|\leqslant\|x_{n_{k+m}}-x_{n_{k+m-1}}\|+\ldots+\|x_{nk+1}-$$
$$-x_{n_k}\|\leqslant\frac{1}{2^{k+m-2}}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}\leqslant\frac{1}{2^{k-2}}.$$

x тўла бўлгани сабабли

$$x_0=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$$

мавжуд ва

$$\|\hat{x}_{n_k}-\hat{x}_0\|=\inf_{y\in I}\|x_{nk}-x_0+y\|\leqslant\|x_{n_k}-x_0\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

яъни $\hat{x}_{nk}\to\hat{x}_0$. Олинган $\{\hat{x}_n\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлгани сабабли ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай n натурал сон топиладики, ҳар қандай $n_k\geqslant n$ учун $\|x_n-x_{nk}\|\leqslant\varepsilon$. Демак, $\|x_n-x_0\|\leqslant\|x_n-x_{nk}\|+\|x_{nk}-x_0\|\leqslant\varepsilon+$ $+\|x_{nk}-x_0\|$. Бундан $x_{nk}\to x_0$ бўлгани учун $\hat{x}_n\to\hat{x}_0$ Демак, X/I тўла.*

X Банах алгебрасини комплекс сонларнинг C Банах алгебрасига акс эттирувчи нолдан фарқли гомоморфизм *комплекс гомоморфизм* дейилади.

4-теорема *Агар $\varphi: X\to C$ комплекс гомоморфизм бўлса, у ҳолда*

а) *$\varphi(e)=1$ ва x^{-1} мавжуд бўлса, $\varphi(x)\neq 0$.*

б) *агар* $\|x\|\leqslant 1$ бўлса, у ҳолда $|\varphi(x)|\leqslant 1$, *хусусан, ихтиёрий комплекс гомоморфизм узлуксиздир* ва $\|\varphi\|=1$.

Исбот. а) Бирор $y\in X$ учун $\varphi(y)\neq 0$ бўлгани сабабли

$$\varphi(y)=\varphi(ye)=\varphi(y)\ \varphi(e),$$

демак, $\varphi(e)=1$. Агар $x\in X$ учун x^{-1} мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\varphi(x)\ \varphi(x^{-1})=\varphi(xx^{-1})=\varphi(e)=1,$$

яъни $\varphi(x)\neq 0$;

б) ихтиёрий $x \in X$ ($\|x\| \leqslant 1$) элементни оламиз. Агар $|\lambda| > 1$ бўлса, у ҳолда $\left|\frac{x}{\lambda}\right| < 1$. 11.2-§, 1-теоремага асосан $\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}$ элемент мавжуд, а) га асосан $\varphi\left(e - \frac{x}{\lambda}\right) \neq 0$, яъни $1 - \frac{1}{\lambda}\, \varphi(x) \neq 0$ ва $\varphi(x) \neq \lambda$. Олинган λ ($|\lambda| > 1$) ихтиёрий бўлгани сабабли $|\varphi(x)| \leqslant 1|$. Демак, $\|\varphi\| \leqslant 1$; $\varphi(e) = 1$ бўлгани учун $\|\varphi\| = 1$. Хусусан, φ чегараланган, яъни узлуксиз.*

Изоҳ. 4-теореманинг исботидан равшанки, бу теоремада X коммутатив бўлиши шарт эмас.

Қуйидаги теоремада комплекс гомоморфизмлар ва максимал идеаллар орасидаги боғланиш кўрсатилади.

5-теорема. *X коммутатив Банах алгебраси, Δ ундаги барча комплекс гомоморфизмлар тўплами бўлсин.*

а) *ҳар бир M максимал идеал бирор $h \in \Delta$ комплекс гомоморфизмнинг ядросидир;*

б) *ҳар бир комплекс гомоморфизмнинг ядроси максимал идеалдир;*

в) *$x \in X$ элементнинг тескариси мавжуд бўлиши учун, ихтиёрий $h \in \Delta$ да $h(x) \neq 0$. бўлиши зарур ва кифоя;*

г) *$x \in X$ элементнинг тескариси мавжуд бўлиши учун x ҳеч қандай идеалга тегишли эмаслиги зарур ва кифоя;*

д) *$\lambda \in \sigma(x)$ бўлиши учун $\lambda = h(x)$ тенглик бирор $h \in \Delta$ учун бажарилиши зарур ва кифоя.*

Исбот. а) M бирор максимал идеал бўлсин. M ёпиқ бўлгани сабабли X/M Банах алгебрасидир. (3-теорема). Бирор $x \in X \setminus M$ элементни оламиз. Равшанки, ушбу

$$I = \{ax + y : a \in X,\ y \in M\}$$

тўплам идеалдир ва $I \supset M$. Демак, $I = X$. Хусусан, бирор $a \in X$ ва $y \in M$ учун $ax + y = e$, яъни $ax - e = y \in M$. Фактор алгебранинг таърифига асосан $\hat{a}\hat{x} = \hat{e}$, яъни $\hat{a} = \hat{x}^{-1}$. Олинган $x \overline{\in} M$ ихтиёрий бўлгани сабабли X/M фактор алгебрада ҳар бир нолдан фарқли элементнинг тескариси мавжуд. Гельфанд—Мазур теоремасига асосан $X/M = C$ (аниқроғи изометрик изоморф).

Энди X дан олинган x элементга $\hat{x}$ синф билан аниқланувчи $h(x)$ комплекс сонни мос қўйсак, равшанки, $h: X \to C$ комплекс гомоморфизм бўлади ва $h^{-1}(0) = \hat{0} = M$;

б) агар $h \in \Delta$ бўлса, равшанки, $h^{-1}(0)$ идеал ва унинг коўлчами бирга тенг, демак, $h^{-1}(0)$ максимал идеалдир;

в) агар x^{-1} мавжуд бўлса, у ҳолда 4-теореманинг а) қисмига асосан ихтиёрий $h \in \Delta$ учун $h(x) \neq 0$. Аксинча x_0^{-1} мавжуд бўлмаса, $I = x_0 X = \{x_0 x:\ x \in X\}$ тўплам идеалдир ва $e \bar{\in} I$, демак, $I \neq X$. 2-теоремага асосан, I бирор M максимал идеалнинг қисми. Демак, $x_0 \in M$. а) га асосан шундай $h \in \Delta$ мавжудки, $M = h^{-1}(0)$, яъни $h(x_0) = 0$;

г) Равшанки, тескариси мавжуд бўлган ҳар қандай элемент ҳеч бир идеалга тегишли бўла олмайди. Аксинча, агар x_0^{-1} мавжуд бўлмаса, x_0 бирон идеалнинг элементи эканлиги в) да кўрсатилди;

д) агар бирор $h \in \Delta$ учун $\lambda = h(x)$ бўлса, у ҳолда $h(\lambda e - x) = 0$, демак, в) га асосан $(\lambda e - x)^{-1}$ мавжуд эмас, яъни $\lambda \in \sigma(x)$. Аксинча, $\lambda \in \sigma(x)$ бўлса, $(\lambda e - x)^{-1}$ мавжуд эмас. Демак, яна в) га асосан бирор $h \in \Delta$ учун $h(\lambda e - x) = 0$, яъни $h(x) = \lambda$.*

Мисоллар. 1. Компакт Хаусдорф K топологик фазосида узлуксиз функцияларнинг $C(K)$ Банах алгебрасини кўрамиз (II. 1-§, 3-мисол) ва шу алгебрадаги максимал идеалларни ўрганамиз.

K фазонинг бирон F қисмини олсак, равшанки, F тўпламнинг ҳар бир нуқтасида нолга тенг функциялардан иборат

$$M_F = \{x(t) \in C(K) : x(t) = 0\ \forall t \in F\} \subset C(K)$$

тўплам идеалдир.

Биз қуйидаги иборани исботлаймиз: *$C(K)$ алгебрада бирор тўплам максимал идеал бўлиши учун, у бирон тайинланган $\tau_0 \in K$ нуқтада нолга айланувчи барча функциялардан иборат бўлиши зарур ва кифоя.*

а) $M_{\tau_0} = \{x(t) \in C(K) : x(\tau_0) = 0\}$ тўплам идеал эканлиги равшан. Унинг максимал эканлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $y(t) \in C(K)$ учун

$$z(t) = y(t) - y(\tau_0)$$

функция M_{τ_0} нинг элементидир, чунки $z(\tau_0)=0$. Демак, ихтиёрий $y(t)\in C(K)$, ушбу

$$y(t)=z(t)+\alpha,\quad z(t)\in M_{\tau_0},\quad \alpha\in C$$

кўринишда ёйилар экан, яъни codim $M_{\tau_0}=1$. Демак, M_{τ_0} — максимал идеал;

б) аксинча, $M\subset C(K)$ бирор максимал идеал бўлсин. Шу идеалга тегишли бўлган барча функциялар бирор тайинланган нуқтада нолга тенг эканлигини кўрсатамиз. Агар бундай эмас деб фараз қилсак, у ҳолда ихтиёрий $\tau\in K$ учун шундай $x_\tau(t)\in M$ мавжудки, $x_\tau(\tau)\neq 0$. Бу функция узлуксиз бўлгани сабабли τ нуқтанинг шундай U_τ атрофи мавжудки, $x_\tau(t)\neq 0$ муносабат ихтиёрий $t\in U_\tau$ учун ўринли. K фазонинг $\{U_\tau\}_\tau\in K$ очиқ қопламасидан, K компакт бўлгани учун чекли $U_{\tau_1},\ldots U_{\tau_n}$ қисм қоплама ажратиш мумкин. M идеал эканлигини ҳисобга олсак,

$$x_0(t)=x_{\tau_1}(t)\overline{x}_{\tau_1}(t)+\ldots+x_{\tau n}(t)\overline{x}_{\tau_n}(t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|x_{\tau_k}(t)|^2\in M.$$

Равшанки, ихтиёрий $t\in K$ учун $x_0(t)>0$, демак, $\frac{1}{x_0(t)}$ мавжуд ва узлуксиз, яъни $\frac{1}{x_0(t)}\in C(K)$. Бу эса 1-теореманинг а) қисмига зид. Демак, шундай $\tau_0\in K$ мавжудки, $M\subset M_{\tau_0}$. M максимал бўлгани сабабли $M=M_{\tau_0}$.

2. Энди W (11. 1-§, 4-мисол) алгебрадаги максимал идеалларнинг умумий кўринишини топамиз. Бунинг учун 5-теоремага асосан W алгебрадаги комплекс гомоморфизмларнинг умумий кўринишини аниқлаш кифоя. Равшанки, $t_0\in[0,2\pi]$ сон $\varphi(x(t))=x(t_0)$ формула орқали комплекс гомоморфизмни аниқлайди. Аксинча ихтиёрий комплекс гомоморфизм шу кўринишга эга эканлигини кўрсатамиз.

Ҳар бир $\varphi: W\to C$ гомоморфизм ўзининг e^{it} функциядаги қиймати билан тўла аниқланади (чунки $\varphi\in\Delta$ учун $\varphi(e^{kit})=[\varphi(e^{it})]^k$ ға φ чизиқли ва узлуксиз бўлгани сабабли, у бутун W га ягона равишда давом эттирилади). $\varphi(e^{it})=\xi$ бўлса, $\varphi(e^{-it})=\varphi[(e^{it})^{-1}]=\xi^{-1}$. Демак, 4-теореманинг б) қисмига асосан

$$|\xi|=|\varphi(e^{it})|\leqslant\|e^{it}\|=1,$$

$$|\xi^{-1}|=|\varphi(e^{-it})|\leqslant\|e^{-it}\|=1.$$

Бундан $|\xi| = 1$, яъни $\xi = e^{it_0}$, $0 \leqslant t_0 \leqslant 2\pi$. Шундай қилиб, $\varphi(e^{it}) = e^{it_0}$ $(0 \leqslant t_0 \leqslant 2\pi)$, бундан $\varphi\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k^{ikt}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{ikt_0}$, яъни $\varphi(x(t)) = x(t_0)$.

Шундай қилиб, ҳар бир комплекс гомоморфизм ва, демак, 5-теоремага асосан ҳар бир максимал идеал $[0, 2\pi]$ оралиғидаги бирор t_0 сон билан аниқланади. Бунда M максимал идеал шу t_0 нуқтада нолга айланувчи барча $x(t) \in W$ функциялардан иборат.

Энди биз олинган натижани қуйидаги теоремани исботлашга татбиқ қиламиз:

Винер теоремаси. *$x(t)$ функция абсолют яқинлашувчи бўлган $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{kt}$ Фурье қаторига ёйилиб, ҳеч бир нуқтада нолга тенг бўлмасин. У ҳолда $y(t) = \frac{1}{x(t)}$ функция ҳам абсолют яқинлашувчи бўлган Фурье қаторига ёйилади.*

Исбот. Теореманинг шартига кўра $x(t) \in W$. Ихтиёрий $t \in [0, 2\pi]$ учун $x(t) \neq 0$ бўлгани сабабли ҳар бир $\varphi \in \Delta$ учун $\varphi(x) \neq 0$. 5-теореманинг в) иборасига асосан $y = x^{-1} \in W$ мавжуд. Демак,

$$\frac{1}{x(t)} = y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k e^{ikt} \in W.$$

11.4-§. Коммутатив Банах алгебраларини ифодалаш

Ушбу параграфда баъзи коммутатив Банах алгебралари бирор компакт Хаусдорф топологик фазосидаги узлуксиз функциялар алгебраси сифатида ифодаланиши мумкин эканлигини кўрсатамиз.

X коммутатив Банах алгебраси, Δ ундаги комплекс гомоморфизмлар тўплами бўлсин. X нинг ҳар бир x элементи Δ тўпламда ушбу

$$\hat{x}(h) = h(x) \quad (h \in \Delta) \tag{1}$$

формула ёрдамида $\hat{x} : \Delta \to C$ функцияни аниқлайди.

Барча $\hat{x}$ ($x \in X$) функциялар тўпламини $\hat{X}$ билан белгилаймиз.

11.3 § даги 4-теореманинг б) иборасига асосан ихтиёрий $\varphi \in \Delta$ учун $\varphi \in X'$ ва $\|\varphi\| \leqslant 1$ (X' фазо X га қўшма фазо). Агар X' даги бирлик шарни S билан белгиласак, равшанки, $\Delta \subset S$.

Энди Δ тўпламда топология киритамиз. Бунинг учун X' фазодаги *-суст топологияни, яъни $\sigma(X', X)$ топологияни (8.4-§) Δ тўпламда қурамиз. Бу топологияда $f_0 \in X'$ элементнинг атрофлари системаси қуйидаги кўринишга эга эди:

$$U(x_1, \ldots, x_m, \delta; f_0) = \{f \in X' : |f(x_k) - f_0(x_k)| < \delta, k = 1, 2, \ldots, m\}.$$

1-теорема. *Δ тўплам $\sigma(X', X)$ топологияда компактдир ва (1) формула билан аниқланган ҳар бир $\hat{x}(h)$ функция Δ тўпламда шу топологияга нисбатан узлуксиздир.*

Исбот. 8.4-§ да исботлаганимиздек, агар X Банах фазоси сепарабел бўлса, X' даги S бирлик шар $\sigma(X', X)$ топологияда компактдир. Бу ибора ихтиёрий X Банах фазоси учун ҳам ўринли (бу ерда биз бунинг исботига тўхталмаймиз). Демак, Δ тўплам компакт S тўпламнинг қисм тўпламидир. Шунинг учун Δ тўплам $\sigma(X', X)$ топологияда ёпиқ эканлигини кўрсатиш кифоя. $f_0 \in \bar{\Delta}$ деб фараз қилайлик. Демак, f_0 нинг (2) кўринишдаги ихтиёрий атрофида $h \in \Delta$ комплекс гомоморфизм мавжуд. f_0 нинг атрофини $U(x, y, xy, \delta; f_0)$ кўринишда олсак ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = xy$, $m = 3$), у ҳолда

$$|h(x) - f_0(x)| < \delta,$$
$$|h(y) - f_0(y)| < \delta,$$
$$|h(xy) - f_0(xy)| < \delta.$$

Демак, $h(xy) = h(x)h(y)$ муносабатни назарда тутган ҳолда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}|f_0(xy) - f_0(x)f_0(y)| &= ||f_0(xy) - h(xy)| + \\ &+ |h(x)h(y) - f_0(x)f_0(y)|| \leqslant |f_0(xy) - h(xy)| + \\ &+ |h(y) - f_0(y)||h(x)| + |h(x) - f_0(x)||f_0(y)| < \\ &< \delta + \delta\|h\|\|x\| + \delta\|f_0\|\|y\| = \delta(1 + \|x\| + \|f_0\|\|y\|).\end{aligned}$$

Бундан δ ихтиёрий кичик бўлгани сабабли

$$f_0(xy) = f_0(x)f_0(y).$$

Энди f_0 нинг $U(e, \delta; f_0)$ атрофини олсак,

$$|h(e) - f_0(e)| < \delta, \text{ яъни } |1 - f_0(e)| < \delta.$$

Бундан $f_0(e) = 1$, яъни $f_0 \in \Delta$. Шундай қилиб, Δ ёпиқ ва, демак, компакт.

Энди $\hat{x}(h)$ функция Δ да узлуксиз эканлигини кўрсатамиз. $h_0 \in \Delta$ элементнинг $U(x, \varepsilon; h_0)$ атрофини олсак, бу атрофда

$$|\hat{x}(h - \hat{x}(h_0)| = |h(x)| - h_0(x)| < \varepsilon,$$

яъни $\hat{x}$ функция h_0 нуқтада узлуксиз.*

$x \in X$ элементга $\hat{x}$ функцияни мос қўйсак, натижада $X \to \hat{X} \subset C(\Delta)$ акс эттириш ҳосил бўлади. Бу ерда $C(\Delta)$ Банах алгебраси компакт Хаусдорф топологик фазосидаги узлуксиз функциялар алгебрасидир. (11.1-§, 3-мисол).

2-теорема. $x \to \hat{x}$ мослик *гомоморфизмдир ва*

$$\|\hat{x}\| \leqslant \|x\|. \tag{3}$$

Исбот. Ихтиёрий $x_1, x_2 \in X$ учун

$$\widehat{(x_1 + x_2)}(h) = h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2) = \hat{x}_1(h) + \hat{x}_2(h),$$

яъни $\widehat{(x_1 + x_2)} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$. Шунга ўхшаш $\widehat{x_1 x_2} = \hat{x}_1 \hat{x}_2$, $\widehat{(\alpha x)} = \alpha \hat{x}$. Демак, $x \to \hat{x}$ гомоморфизм.

Энди (3) тенгсизликни исботлаймиз.

11.3-§ даги 5-теореманинг д) иборасига кўра $\lambda \in \sigma(x)$ бўлиши учун $\lambda = h(x) = \hat{x}(h)$ тенглик бирор $h \in \Delta$ учун бажарилиши зарур ва кифоя. Демак, $\sigma(x)$ тўплам $\hat{x}$ функциянинг қийматлар тўплами билан мос тушади. Бундан ва 11.2-§ даги 4-теоремадан

$$\|\hat{x}\| = \sup_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)| = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r(x) \leqslant \|x\|.*$$

Таъриф. Банах алгебрасининг барча максимал идеаллари кесишмаси $R = \bigcap M$ *радикал* дейилади.

Ихтиёрий M максимал идеал учун $\theta\in M$ бўлгани сабабли $\theta\in R$. Агар радикал фақат θ элементдангина иборат бўлса, алгебра *яримсодда алгебра* дейилади.

Таъриф. Агар коммутатив X Банах алгебрасида ихтиёрий $x\in X$ учун $\|x^2\|=\|x\|^2$ тенглик ўринли бўлса, X *регуляр алгебра* дейилади.

11.2-§ даги 1, 3-мисоллардаги C ва $C(K)$ алгебралар яримсодда ва регуляр алгебрага мисол бўлади. Бу 11.3-§, 1-мисолдаги ибoрадан бевосита келиб чиқади.

3-теорема. а) $x\to\hat{x}$ *мослик мономорфизм бўлиши учун X яримсодда алгебра бўлиши зарур ва кифоя;*

б) агар X регуляр алгебра бўлса, у ҳолда X ўзининг $C(\Delta)$ алгебрадаги акси, яъни $\hat{X}$ билан изометрик изоморф, хусусан, X яримсодда алгебрадир.

Исбот. а) X яримсодда алгебра бўлсин. Агар $x\in X$ учун $\hat{x}\equiv 0$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $h\in\Delta$ учун $h(x)=\hat{x}(h)=0$, яъни x ҳар бир максимал идеалга тегишли, ва демак, $x\in R$.

X яримсодда алгебра бўлгани учун $x=\theta$. Аксинча, $x\to\hat{x}$ мослик мономорфизм бўлсин. Агар $x\in R$ элементни олсак, у ҳар бир максимал идеалга тегишли. Демак, ихтиёрий $h\in\Delta$ учун $h(x)=\hat{x}(h)=0$, яъни $\hat{x}=0$. Бундан $x\to\hat{x}$ мономорфизм бўлгани учун $x=\theta$, яъни $R=\{\theta\}$;

б) X регуляр алгебра бўлсин. $\|x^2\|=\|x\|^2$ тенгликдан бевосита $\|x^{2^n}\|=\|x\|^{2^n}$ тенглик келиб чиқади, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|}=\|x\|$. Спектрал радиус ҳақидаги теоремага асосан (11. 2-§, 5-теорема)

$$r(x)=\|x\|. \tag{4}$$

Агар $x\in R$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $h\in\Delta$ учун $h(x)=0$, демак, $\sigma(x)=\{0\}$, яъни $r(x)=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(x)}|\lambda|=0$. (4) тенгликка асосан $\|x\|=r(x)=0$ ва, демак, $x=\theta$, яъни X—яримсодда алгебра. а) га асосан X ўзининг

$C(\triangle)$ даги $\hat{X}$ акси билан изоморф. Сўнг 11.3-§ даги 5-теоремага асосан

$$\|\hat{x}\| = \max_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)| = \max_{h \in \Delta} |h(x)| = \max_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r(x) = \|x\|.$$

Демак, $x \to \hat{x}$ изометрик изоморфизм.*

11.3-§ да кўрсатилганидек, комплекс гомоморфизмлар ва максимал идеаллар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Демак, Δ тўплам сифатида комплекс гомоморфизмлар тўпламини эмас, балки максимал идеаллар тўпламини олиш ҳам мумкин. Шуни назарда тутиб, юқоридаги теоремаларни қуйидагича ифодалаш ҳам мумкин.

4-теорема. *X Банах алгебраси, Δ ундаги максимал идеаллар тўплами бўлсин.*

а) Δ тўплам компакт Хаусдорф топологик фазосидир;

б) $x \to \hat{x}$ мослик X алгебрани $C(\Delta)$ алгебранинг бирор $\hat{X}$ қисмига акс эттирувчи гомоморфизмдир; бу гомоморфизмнинг ядроси X алгебранинг радикалига тенг. Хусусан, бу мослик мономорфизм бўлиши учун X яримсодда алгебра бўлиши зарур ва кифоя,

в) ихтиёрий $\hat{x} \in X$ учун $\|\hat{x}\| \leqslant \|x\|$. Агар X регуляр алгебра бўлса, $x \to \hat{x}$ мослик X билан унинг $C(\Delta)$ даги $\hat{X}$ акси орасидаги изометрик изоморфизмдир.

!Параграфни яримсодда алгебраларнинг баъзи хоссаларини келтириш билан якунлаймиз.

5-теорема. *X, Y коммутатив Банах алгебралари, $\varphi : X \to Y$ ихтиёрий гомоморфизм бўлсин. Агар Y яримсодда алгебра бўлса, ψ узлуксиздир.*

Исбот. X, Y Банах фазолари бўлгани сабабли 7.2-§ даги ёпиқ график ҳақидаги теоремага асосан ψ нинг графиги ёпиқлигини кўрсатиш кифоя. $\{x_n\} \subset X$ кетма-кетлик учун $x_n \to x \in X$ ва ψ $(x_n) \to y \in Y$ бўлса, $y = \psi(x)$ эканлигини исботлаш керак. Δ_X, Δ_Y мос равишда X ва Y даги комплекс гомоморфизмлар тўпламлари бўлсин. Ихтиёрий $h \in \Delta_Y$ ни олиб, $\psi = h_0$ ψ мураккаб акс эттиришни кўрамиз. Равшанки, $\psi \in \Delta_X$.

11.3-§ даги 4- теоремага асосан ф ва к узлуксиз. Де-мак,

к (у) - Нт к (ф (хп)) = Пт <|> (х„) - ф (х) - А (ф (х)),

яъни А (у — ф(х)) = 0. Бу ерда /г£Аг ихтиёрий бўл-гани учун у — ф (х)£/?. Энди К яримсодда эканлигини назарга олсак, у = <{>(.£)•*

Натижа. Яримсодда коммутатив Банах алгебра-лари орасидаги. ҳар бир изоморфизм гомоморфизм-дир.

11.5-§. Инволютив алгебралар

Х бирор комплекс алгебра бўлсин (коммутатив бў-лйши шарт эмас).

Таъриф. Х нинг ҳар бир х элементига бирор х*£Х элементни мос қўювчи акс эттириш қуйидаги тўрт шартни қаноатлантирса, у инволюция дейилади:

1) (х + у)*_=х*+у*.

2) (ах)* = Āх*.

. 3) (ху)* = у*х*, 4) х** = х,

бу ерда х, у£Х, Х£С.

Инволюция билан таъминланган алге^ра инволютив алгебра дейилади.

Масалан, С(Қ) алгебрада /-»■/ акс эттириш инволю-циядир (/ функция / га комплекс қўшма функция).

Инволюцияга энг муҳим мисоллардан бири бу ' Гильберт фазосидаги чегараланган оператордан унга қўш опе-раторга ўтиш амалидир.

Агар х£Х элемент учун х* = х тенглйк ўринли бўлса, х ўз-ўзига қўшма ёки Эрмит элементи дейи-лади.

1-теорема. Х инволютив Банах алгебраси бўл-син. У ҳолда ихтаёрий х£Х учун:

а) x -\- х*, I (x — х*), хх* элементлар Эрмит элементларидир;
б) х ягона равишда х = и-\- IV кўринищдх тасвир-ланади, бу ерда и, V Зрмшп элементлари;
в) е — Эрмит элементи;
г) х~х элемент мавжуд бўлиши уяун (х*)~х мав-жуд бўлшии зарур ва кифоя; бу ҳолда (х*)-'1 — (х"1)*;
д) А£а (х) бўлиши уяун >£о(х*) бўлиша зарур ва кифоя.

И сб от. а) (. Ц]унга ўхшаш
= 1(х — х*) ва

: хх*; б) равшанки, и, V сифатида мос равишда
- х':
Х+ Х*
ва
элементларни олиш мумкин.
I Энди х бошқа усул билан ёйилган бўлсин: х = и' +]-4- IV'. Агар о) = V' — V элементни олсак, равшанки, 1(0* = ш. Шу билан бирга ш = (х— и') — (х— и) = и — ч _- и! бўлгани уиун (^со)* = (и и') = ш. Иккинчи то-'%» мондан, (ш)* = Тя* = — ш, демак, ш = — ш. Бу тенг-1| ликдан оз = 6, яъни = V', и — и' келиб чиқади; 1 в) е* = ее* бўлгани учун а) га асосан (е*)* = е*, - яъни е = е*\
г) х-1 мавжуд бўлса, у ҳолда х* (х-1)* = (х-1 х)* = = е* = е, яъни (х-1)* = (х*)-1. Аксинча, (х*) ^1 ма жуд бўлса, у ҳолда х [(х*)-1]* = \(х'*) ~^*]* = е* = еь яъни х~х мавжуд;
д) Х£а(х) учун (ке — х)-1 мавжуд эмас."Демак, г) га
асосан [(1е — х)*\ ^1 = &е — х*)■~1 мавжуд эмас, яъни А£а(х*). Шунга ўхшаш Х£с(х*) бўлса, бу ҳолда 1£<з(х).*
2-теорема. Агар X яримсодда Банах алгебраси бўлса, у ҳолда X даги ҳар қандай инволюцияузлук-сиздир.
Исбот. X даги ихтиёрий А комплекс гомоморфизм-
ни оламиз. Равшанки, ф(х) = А(х*) ҳам X да комплекс гомоморфизмдир. Дарҳақиқат,
ср (х + У) - А(** + У*) = Л (х*) + Н (у*) = 1{^) +
= К
<р (ху) = А (у *
7р) (ф(х)ф(у).
*) = Хср (х), *) = ср (у) 7 {х) =
Демак, 11.3-§ даги 4-теоремага асосан Энди хя ->- х, хл* -> у бўлсин. У ҳолда
узлуксиз.
/гТҒ) = Ф (х) = Пт Ф (хп) = Н яъни Н (х* — у) = 0. /г ихтиёрий бўлгани сабабли х* —
21-239
«21
X яримсодда алгебра бўлгани учун х* = у Лемяк *->х* акс эттиришшшг графиги ёпиқ. Ёпиқ гl ҳақидаги теоремага асосан (бу теореманшг исботи ма чизиқли операторлар учун ҳам ўзгаришсиз бу акс эттириш узлуксиздир.* уишсил
Ш^ ИНВ0ЛЮ™В БЗНаХ ^брасвда ихти-
(1) (ёки
рав-(2)
ва
■!! -
. ||***ц = ||*||||**||. (3)
Аксинча, агар (2) ва (3) тенгликлар ўринли бўлса, рав-шанки, ||***11 = [|*,'|2.
Қуйидаги теорема В* — алгебралар назариясининг энг муҳим теоремаларидан бири.
3-т^'еорема. (Гельфанд — Наймарк теоремаси). X ихтиёрий коммутатив В*-алгебра, А ундаги мак-симал идеаллардан иборат компакт Хаусдорф топо-логик фазоса бўлсин. Бу ҳолда х-+х мослик (11. 4- §, 4-теоре X ни бутун С (А) га акс эттирувчи изометрик изоморфизмдир ва ихтиёрий х£Х учун
(**) - х.
(4)
л
Хусусан х Эрмит элементи бўлшии учун х£С (А) хациций функция бўлиши зарўр ва кйфоя.
Исбот. Агар и£Х Эрмит элементи бўлса, кхти-ёрий к£А учун Н (и) ҳақиқий сон эканлигини кўрсата-миз. ҳақиқий сон учун ушбу х = и -\- Ие кўриниш-даги элементларни оламиз. Агар Н(и) — а + 1\> (а, р —; ҳақиқий сонлар) бўдса, у ҳолда

Н (х) = <х +'/ (р + I), гг* == «2 + Ре. Демак,

322

ихтиёрий I ҳақиқий сон учун

ру ерда [|и||2 чекли, I ихтиёрий бўлгани сабаали Р=?0, К (и) — ҳақиқий сон. Шундай қилиб, агар и Эр-элементи бўлса, у ҳолда ихтиёрий /г£А учун

л л

^ (^) = Н (и) — ҳакккяй сон, яъни и ҳақиқий функция.

Энди х£Х ихтиёрий бўлса, у ҳолда х = ц + ^ ва

и = а*, г) = г»*. Демак,

Л Л /V" Л _

= (п + IV)* = («* — №*) = «— IV = (II + IV) — X%

шу билан (4) исботланди.

Бирор х£Х элементни олсак, у = *** элемент Эрмит элементидир, демак, || у2|| = ||у ||2. Индукция бўйича

||у2" !| = || у Ц2" тенгляк исботланади. Спектрал радиус ҳақидаги теоремага асосан

л л

|| у || = тах | у (А)| = тах \Н (у)\ — тах |/.| = г (у) =

Л

яъни || у | сабатдан

л

Энди у = *** тенгликдан ва (4) муно^ л = | * |2 тенгликни ҳосил қиламиз. Демак,

'=НУН = ,

яъни 1|х|| = ||*||. Шундай қилиб, х га акс эттирувчи

тўла

изометрик

л бўлгани сабабли X алгебра

у || = ||*** || = ||* ||[»,

л л

■х мослик X ни А'

изоморфизмдир. X фаза

С (А)

алгебрада л

ёпиц X = С(А) тенгликни исботлаш учун X тўплам С(А)дазич эканлигини исботлаш кифоя. Бунинг учун қуйидаги исботсиз келтирилган теоремадан фойдаланамиз,,. Стоун — Вейерштрасс теоремаси. С (К) алгебранинг ^11.1- §, 3-мисол^ А .цисм алгебргси қупи,-даги шартларни қаношплантирсин:

а) бирлик функция (е (I) — 1) А г% тггишли;

б) ихпшгрий 1Х, 1;*€.К(1хф^2) учун шундай х(1)^ А мавжудки, х(^) Ф х (12);

в) ихтиёрий х(1)^А уяун х(1)£А.

У ҳолда А қисм алгебра С (К) нанг ҳамма ерлда зич.

323

л

Энди 3- теореманинг исботини якунлаш учун X сг С (А) қисм алгебра учун а) —в) шартлар бажарилишини тек-шириш керак. а) ўз-ўзидан равшан, чунки е£Х ва л л е{к) € X;

б) ихтиёрий ки Л2£Д (к\фН^) учун шундай х£Х

л л

мавжудки кх (х)фк2 (х), яъни х (кх)фх (А2);

л л ~л л

в) ихтиёрий х£Х учун (4) га асосан х = л;*, яъни 7\ л

х£Х.

Стоун—Вейерштрасс теоремасининг ҳамма шартлари бажарилади. Демак,

МАШК УЧУН МАСАЛАЛАР

1. /С={2:|г|<1}с=С бирлик доирада узлуксиз ва К нинг ички нуқталарида аналитик "бўлган функциялар-да иборат тўпламни А билан белгилаймиз. А да алге: браик амалларни одатдагидек, нормани эса қуйидагичз киритамиз:

|| л: || = тах \х(г) \, х£ А

И

А коммутатив Банах алгебраси эканлигини исботланг.

2. А Банах алгебрасининг максимал идеаллари би-лан К = {г: \г\^ 1} бирлик доира нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик борлигини кўрсатинг. [3. А алгебра регуляр ва яримсодда эканлигини ис-ботланг.

4. [а, Ь] оралиқда п- тартибли ҳоеиласи мавжуд ва узлуксиз комплекс функциялар фазосини Сп [а, Ь] би-•. белгилаймиз. Алгебраик амаллар одатдагидек, норма эса ушбу

\х\\ = Ъъ

"[a, Ь}
формула билан киритилади. Сп[а, Ь\ Банах алгебраси экаклйгини исботланг.

5. Сп[а, Ь\ алгебранинг барча максимал идеалларини топинг. -

6. Сп [а, Ь~\ алгебрада инволюцияни х* (^) = х (£) деб олсак, С" [а, Ъ\ — яршсодда В* — алгеб
эканли-
гини исботланг.

7. Сп[а, Ь] Банах алгебрасининг барча ёпиқ идеал-
ларини топинг.

8. Яримсодда 65'лмаган Банах алгебрасига мисол кел-
тиринг.

9. Н Гильберт фазосидаги чегараланган операторлар-нинг I (И) алгебрасини оламиз. Бу алгебрадаги бирор ўз-ўзига қўшма То операторнинг барча даражаларининг чизиқли ёпилмасини В (То) билан . белгилаймиз. В (То) яримсодда В'~алгебра эканлигини исботланг.

10. Ь{Н) алгебра В*— алгебра эканлигини Исбот-
2 =
ланг.

11. X Банах алгебрасининг х элементи учун х2 = х тенглик бажаралса, х идемпотент дейилади. Агар х, у€Х (хфу) идемпотентлар учун ху = ух тенглик ўринли бўлса, || х — у || > 1 эканлигини исботланг.

12. X Банах алгебрасининг х, у элементлари учун ху == ух бўлса, у ҳолда
(у), г
г(х) г(у)
тенгсизликлар ўринли эканлигини кўрсатинг.

13. X Банах алгебраси, х, у унинг элементлари бўл
син.
а) х~х ва (ху)-1 элементлар мавжуд бўлса, у и исботланг;
а) х ва (ху) элер жуд бўлса, у эле-мент ҳам мавжудлигини исботланг;
б) (хуУх ва (ух)'1 мавжуд бўлса, х~х ва у~х эле-ментлар ҳам мавжудлигини исботланг;
в) агар (е — ху)-1 мавжуд бўлса, (е — ух)~г эле-мент ҳам мавжуд бўлишини кўрсатинг.

14. Умумий ҳолда ху = е Ф ух муносабат ўринли бў-лиши мумкинлигини мисолда кўрсатинг.

15'. Агар ху — е бўлса, ух : элемент нолдан фарқли идемпотент эканлигини исботланг.

16. Агар х~{ мавжуд бўлса, у ҳолда ихтиёрий у£Х учун о (ху) = а (ух) тенгликни исботланг.

17. Банах алгебрасида ихтигрий х, у элементлар учун г (ху) = г (ух) тенгликни исботланг ((ху)п = х(ух
1у тенгликдан фойдаланинг).

XII боб

УМУМЛАЛТАН ФУНКЦИЯЛАР. ФУРЬЕ АЛМАШТИРИШЛАРИ

12.1 -§. Умумлашган функция тушунчаси

"* I. Умумлашган функциялар дастлаб физикага доир илмий ишларда учраган. Машҳур физик П. Дирак дель-'та-функция деб аталувчи ва қуйидагича таърифланувчи 3 (х — х0) фуккцияни киритган: бутун тўғр
чизиқда аниқланган Ь(х — х0) функция х0 дан бошқа ҳар бир нуқтада нолга тенг ва х0 нуқтада эса қиймат
чексиз бўлиб, бутун тўғри чизиқ бўйича интеграли мавжуд ва бирга тенг, яъни
[X Хо) —
+ оо, X = Хо
ва
Ь(х ~ хо)йх =

Равшанкя, математик анализ курсида кўрилган функция йа интеграл таърифлари нуқтаи назаридан дельта
функ-циянинг хос^салари ўзаро зиддир.

Математикада умумлашган функцияларни биринчи марта машҳур совет математиги С. Л. Соболев 1936 й
да киритган. Француз математиги Л. Шварц 1950—1951 йилларда „Тақсимотлар назарияси" китобида умумлаш-ган функцияларни ўрганишга топологик вектор фазолар назариясини татбиқ қилиб, қатор муҳим
натижалар олди. Ҳозирги кунда умумлашган функциялар назарияси мате-матиканинг тез суръатлар бил-а
ривожланаётган соҳа-ларидан бири бўлиб, математиканинг бошқа соҳаларида ва физикада кўпгина муҳим
татбиқларга эга.

Маълумки, узлуксиз функция дифференциялланувчи бўлмаслиги мумкин. "Бирорта ҳам нуқтада ҳосилага
эга бўлмаган узлуксиз функцияларни биринчи марта К. Ве-йерштрасс тузган. Бундай функцияларга доир мисол, масалан, [ХЎФН] китобининг 5!5-§ ида келтирилган.

Умумлашган функциялар тушунчаси функция тушун-часининг шундай кенгайтирилишики, бунда ҳар қандай узлуксиз фўнкция дифференциалланувчи ва унинг ҳо-

силаси умумлашган функция бўлади. Шу билан бир қаторда ҳар қандай умумлашган функциянинг ўзи ҳам

дйффереииалланувчи бўлиб, унинг ҳосиласи ҳам умум-лашган функциядир. Ундан ташқари, умумлашга
функ-циялар соҳасида клас:йк математик анализда факат оғир шартларда бажариладчган бошқа кўп амалларни ҳам ба-жариш мумкин (масалан, умумлашган функцияларнинг яқинлашувчи қаторини ҳадм
ҳад дифференциаллаш
мумкин).

2. Асосий функциялар. Финит функцая деб„ ^ = (—оо, оо) ораликда аникланган ва бирор сегмент-дан ташқарида нолга тенг бўлган функцияга айтилади,

Асосий функция деб /? = (— оо, оо) оралиқда ҳамма ҳосилалари мавжуд бўлган финит функцияга айтилади»

Асосий функцияга мисол келтирамиз.

а- - I2

а) =

е,

Ю,

агар агар

а бўлса, - а бўлса.

Равшанки, барча асосий функдиялар тўплами функ-цияларнинг қўшиш ва сонга кўпайтириш амалларига нисбатан чизиқли фазодир.

Эндн бу фазода яқинлашиш тушунчасини киритамиз.

Агар асосий функциялардан иоорат {ф„(0} кетма-кет-' лик қуйидаги икки шартни қаноатлантирса, у <р (0
асосий функцияга яцинлашувчи дейилади:

1) шундай а > 0 сон мавжудки, ҳар бир п натурал сон ва г (И > а) учун фи (I) == 0.

2) {ф„ (()} кетма-кетлик ф (() функцияга ва ҳар бир т натурал сон учун {ф„(0} кетма-кетликнин
т- тар~ тибли ҳосилаларидан и'орат .{фпт)(0} кетма-кетлик Ф<т) (0 функцияга Я. — (— оо, +
оралиқда текис. яқинлашади.

Асоеий функцияларнйнг вектор фазосини киритилган яқинлашиш билан бирга кўрилганда Е билан белгилай-
миз.

Мисоллар. 1. Юқорида кўрилган ф(^, а) асосий
функцияни олиб, ф„(0 т= — ф (Ь, а) кетма-кетлмкни кўра-
миз.

Равшанки, бу кетма- кетликнинг ўзи ва ҳар қандай. т натурал сон учун {ф(п'п)(0} кетма-кетлик айнан нолга

XII боб

УМУМЛАШГАН ФУНКЦИЯЛАР. ФУРЬЕ АЛМАШТИРИШЛАРИ

12.1 -§. Умумлашган функция тушунчаси

/ I. Умумлашган функциялар дастлаб физикага доир ; илмий ишларда учраган. Машҳур физик П. Дирак дель-та-функция деб аталувчи ва қуйидагича таърифланувчи § (х—х,) фуккхияни киритган: бутун тўғри чизиқда аниқланган Ъ(х — х0) функция х0 дан бошқа ҳар бир нуқтада нолга тенг ва х0 нуқтада эса қийма
чексиз бўлиб, бутун тўғри чизиқ бўйича интеграли мавжуд ва бирга тенг, яъни

<х - Хо) =

ва

Ъ(х-хо)с1х =

РавшанКи, математик анализ курсида кўрилган функция ва интеграл таърифлари нуктаи назаридан дельта
функ-циянинг хоо.салари ўзаро зиддир.

Математикада умумлашган функцияларни биринчи марта машҳур совет математиги С. Л. Соболев 1936 й
да киритган. Француз математиги Л. Шварц 1950—1951 йилларда „Тақсимотлар назарияси" китобида умумлаш-ган функцияларни ўрганишга топологик вектор фазолар назарнясини татбиқ қилиб, қатор муҳим
натижалар олдк. Ҳозирги кунда умумлашган функииялар назарияси мате-матиканинг тез суръатлар билан
ривожланаётган соҳа-ларидан бири бўлиб, математиканинг бошқа соҳаларида ва физикада кўпгина муҳим
татбиқларга эга.

Маълукки, узлуксиз функция дифференциялланувчи бўлмаслиги мумкин. 'Биророта ҳам нуқтада ҳосилага
бўлмаган узлуксиз функцияларни биринчи марта К. Ве-йерштрасс тузган. Бундай функцияларга доир мис
масалан, [ҲЎФН] кйтобининг 1!5-§ ида келтирилган.

Умумлашган функциялар тушунчаси функция тушун-часининг шундай кенгайтирилишики, бунда ҳар қандай узлуксиз фўнкция дифференциалланувчи ва унинг ҳо-

силаси умумлашган функция бўлади. Шу бшп1 Р1 қаторда ҳар қандай умумлашган функц.иянинг уй ^аМ
дйффереииалланувчи бўлиб, унинг ҳосиласи 'ҳа лашган функциядир. Ундан ташқари, умумлашга) цияла
соҳаскда клас:ик математик анализда фаКТ ^ шартларда бажарилад-1ган бошқа кўп амалларнй ам а" жар
мумкин (масалан, умумлашган функцияаРНРНГ яқинлашувчи қаторини ҳадма-ҳад дифферен1Г:аллаш
мумкин). д б

2. Асосий функциялар. финит функци /^ = (— оо, оо) ораликда аникланган ва бирор с т" дан ташқарида нолга тенг бўлган функцияга ай

Асосий функция деб /?= (— оо, оо) ораликД:, ҳосилалари мавжуд бўлган финит функцияга а|"

Асосий функцияга мисол келтирамиз.

а- - I1

Ф

а) =

Ю,

агар |*| < а агар |*[>а

бўлса, бўлса .

Равшанки, барча асогий функолялар тўплами ^^™* цияларнинг қўшиш ва сонга кўпайтириш амг * нисбатан чизиқлифазодир. ютамиз

Энди бу фазода яқинлашиш тушунчасини ки" Агар асосий функциялардан иоорат (фл(*)} кс лик қуйида икки шартни қаноатлантирса, у <р(' функцияга яқинлашувш дейилади:

1) шундай а > 0 сон мавжудки, ҳар бир п н ^ Р сон ва Ц\Ц>а) учун ф„(0==0. б

2) {ф„ (*)} кетма-кетлик ф (I) функцияга ва у ғ ғ т натурал сон учун {фл(0} кетма-кетликнинг тиблк ҳосилаларидан и^орат {фл"г)(0} кетМ1

Ф<т) (0 функцияга /? = (— оо, -(- оо) ораликд яқинлашади. ятилган

Асосий функцияларнинг вектор фазосини кй]^ „ яқинлашиш билан бирга кўрилганда Е билан (г г миз.

Мисоллар. 1. Юқорида кўрилган ф (*,

функцияни олиб, ф„(0 т^ — Ф(^> а) кетма-кетляк1И

"

миз.

Равшанки, бу кетма- кетликнинг ўзи ва ҳа т натурал сон учун {ф(пт)(0} кетма-кетлик айн

|

1 г

32?

тенг функцияга (—∞, +∞) оралиқда текис яқинлашади. Демак, $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик E фазода нолга яқинлашади.

2. Энди яна ўша $\varphi(t, a)$ асосий функция ёрдамида тузилган $\varphi_n(t) = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{t}{n}, a\right)$ функциялардан иборат $\{\varphi_n(t)\}$ кетма-кетликни олсак, бу кетма-кетлик ва ҳар бир m натурал сон учун унинг m-тартибли ҳосилаларидан иборат $\{\varphi_n^{(m)}(t)\}$ кетма-кетлик $(-\infty, +\infty)$ оралиқда айнан нолга тенг функцияга текис яқинлашади.

Аммо $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик айнан нолга тенг функцияга E фазода яқинлашмайди, чунки бу кетма-кетлик учун E фазода яқинлашишнинг биринчи шарти бажарилмайди.

E фазода аниқланган ҳақиқий чизиқли f функционални оламиз. Агар E фазода φ га яқинлашувчи ҳар қандай $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик учун $f(\varphi_n)$ сонлар кетма-кетлиги $f(\varphi)$ сонга яқинлашса, бу функционал *узлуксиз чизиқли функционал* дейилади.

Қулайлик мақсадида f функционалнинг φ даги $(\varphi \in E)$ қийматини $(f(t), \varphi(t))$ билан белгилаймиз.

E даги узлуксиз чизиқли функционалларга мисоллар келтирамиз.

1) $R = (-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган ва бу оралиқнинг ҳар қандай чекли оралиғида Лебег интеграли мавжуд бўлган бирор функцияни қарайлик (бундай функциялар *локал интегралланувчи* дейилади). У ҳолда ҳар қандай $\varphi \in E$ учун

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

интеграл мавжуд, чунки $\varphi(t)$ аслида финит функция бўлгани сабабли интеграл чекли оралиқ бўйича олинган. Интеграл остидаги функциялар текис яқинлашганда интеграл остида лимитга ўтиш мумкинлиги учун кўрилаётган функционал E да узлуксиздир.

Бу бобда барча интеграллар $(-\infty, +\infty)$ оралиқ бўйича олингани учун бундан буён интеграллаш чегараларини кўпинча ёзмаймиз.

2) E фазода ушбу

$$(\delta(t), \ \varphi(t)) = \varphi(0)$$

чизиқли функционални кўрамиз. Бу функционалнинг узлуксизлиги равшан.

Шуниси қизиқки, бу функционални (1) кўринишда ифодалаб бўлмайди. Ҳақиқатан, бирор локал интегралланувчи $f(t)$ функция учун

$$\int f(t)\,\varphi(t)\,dt=\varphi(0)$$

ўринли бўлсин. Хусусан, юқорида қурилган $\varphi(t,\ a)$ асосий функция учун

$$\int f(t)\,\varphi(t,\ a)\,dt=\varphi(0,\ a)=e^{-1}. \qquad (2)$$

Аммо $a\to 0$ да чапдаги интеграл нолга интилади, бу эса (2) тенгликка зид.

Бу функционални *дельта-функция* деб аташ ва $\delta(t)$ орқали белгилаш қабул қилинган (ваҳоланки, ҳозир кўрганимиздек, (1) тенгликни қаноатлантирувчи функция мавжуд эмас).

Таъриф. E фазодаги узлуксиз чизиқли функционал *умумлашган функция* деб аталади.

Умумлашган функциялар фазосини E′ билан белгилаймиз.

(1) кўринишдаги умумлашган функциялар *регуляр функциялар*, қолганлари эса *сингуляр функциялар* деб аталади.

Ушбу

$$(f(t),\ \varphi(t))=c\int\varphi(t)\,dt=\int c\,\varphi(t)\,dt$$

тенглик билан аниқланган умумлашган функцияни *қиймати c га тенг ўзгармас умумлашган функция* дейилади. Хусусан,

$$(1,\ \varphi(t))=\int\varphi(t)\,dt.$$

3. Энди ҳар бир локал интегралланувчи $f(t)$ функцияга (1) формула билан аниқланган умумлашган функцияни мос қўямиз. Бу мосликда турли локал интегралланувчи $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларга турли функционалларнинг мос келишини кўрсатамиз.

Тескарисини фараз қилайлик. У ҳолда ҳар қандай $\varphi\in E$ учун

$$\int(f(t)\,\varphi(t)\,dt=\int g(t))\,\varphi(t)\,dt$$

ёки

$$\int(f(t)-g(t))\,\varphi(t)\,dt=0.$$

тенг функцияга $(-\infty, +\infty)$ оралиқда текис яқинлашади. Демак, $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик E фазода нолга яқинлашади.

2. Энди яна ўша $\varphi(t, a)$ асосий функция ёрдамида тузилган $\varphi_n(t) = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{t}{n}, a\right)$ функциялардан иборат $\{\varphi_n(t)\}$ кетма-кетликни олсак, бу кетма-кетлик ва ҳар бир m натурал сон учун унинг m-тартибли ҳосилаларидан иборат $\{\varphi_n^{(m)}(t)\}$ кетма-кетлик $(-\infty, +\infty)$ оралиқда айнан нолга тенг функцияга текис яқинлашади.

Аммо $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик айнан нолга тенг функцияга E фазода яқинлашмайди, чунки бу кетма-кетлик учун E фазода яқинлашишнинг биринчи шарти бажарилмайди.

E фазода аниқланган ҳақиқий чизиқли f функционални оламиз. Агар E фазода φ га яқинлашувчи ҳар қандай $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик учун $f(\varphi_n)$ сонлар кетма-кетлиги $f(\varphi)$ сонга яқинлашса, бу функционал *узлуксиз чизиқли функционал* дейилади.

Қулайлик мақсадида f функционалнинг φ даги $(\varphi \in E)$ қийматини $(f(t), \varphi(t))$ билан белгилаймиз.

E даги узлуксиз чизиқли функционалларга мисоллар келтирамиз.

1) $R = (-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган ва бу оралиқнинг ҳар қандай чекли оралиғида Лебег интеграли мавжуд бўлган бирор функцияни қарайлик (бундай функциялар *локал интегралланувчи* дейилади). У ҳолда ҳар қандай $\varphi \in E$ учун

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

интеграл мавжуд, чунки $\varphi(t)$ аслида финит функция бўлгани сабабли интеграл чекли оралиқ бўйича олинган. Интеграл остидаги функциялар текис яқинлашганда интеграл остида лимитга ўтиш мумкинлиги учун қурилаётган функционал E да узлуксиздир.

Бу бобда барча интеграллар $(-\infty, +\infty)$ оралиқ бўйича олингани учун бундан буён интеграллаш чегараларини кўпинча ёзмаймиз.

2) E фазода ушбу

$$(\delta(t), \ \varphi(t)) = \varphi(0)$$

чизиқли функционални кўрамиз. Бу функционалнинг узлуксизлиги равшан.

Шуниси қизиқки, бу функционални (1) кўринишда ифодалаб бўлмайди. Ҳақиқатан, бирор локал интегралланувчи $f(t)$ функция учун

$$\int f(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

ўринли бўлсин. Хусусан, юқорида қурилган $\varphi(t, a)$ асосий функция учун

$$\int f(t)\varphi(t, a)\,dt = \varphi(0, a) = e^{-1}. \qquad (2)$$

Аммо $a \to 0$ да чапдаги интеграл нолга интилади, бу эса (2) тенгликка зид.

Бу функционални *дельта-функция* деб аташ ва $\delta(t)$ орқали белгилаш қабул қилинган (ваҳоланки, ҳозир кўрганимиздек, (1) тенгликни қаноатлантирувчи функция мавжуд эмас).

Таъриф. E фазодаги узлуксиз чизиқли функционал *умумлашган функция* деб аталади.

Умумлашган функциялар фазосини E′ билан белгилаймиз.

(1) кўринишдаги умумлашган функциялар *регуляр функциялар*, қолганлари эса *сингуляр функциялар* деб аталади.

Ушбу

$$(f(t), \varphi(t)) = c\int \varphi(t)\,dt = \int c\varphi(t)\,dt$$

тенглик билан аниқланган умумлашган функцияни *қиймати с га тенг ўзгармас умумлашган функция* дейилади. Хусусан,

$$(1, \varphi(t)) = \int \varphi(t)\,dt.$$

3. Энди ҳар бир локал интегралланувчи $f(t)$ функцияга (1) формула билан аниқланган умумлашган функцияни мос қўямиз. Бу мосликда турли локал интегралланувчи $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларга турли функционалларнинг мос келишини кўрсатамиз.

Тескарисини фараз қилайлик. У ҳолда ҳар қандай $\varphi \in E$ учун

$$\int (f(t)\varphi(t)\,dt = \int g(t))\varphi(t)\,dt$$

ёки

$$\int (f(t) - g(t))\varphi(t)\,dt = 0.$$

Сўнг $f(t)-g(t)=h(t)$ белгилаш киритамиз ва ҳар қандай $\varphi\in E$ учун ўринли бўлган

$$\int h(t)\varphi(t)\,dt=0 \tag{3}$$

тенгликдан фойдаланиб, $h(t)$ нинг деярли ҳамма нуқталарда ноль эканлигини кўрсатамиз.

φ финит функция бўлгани сабабли шундай $[a, b]$ оралиқ мавжудки, t нинг $t\leqslant a$ ва $t\geqslant b$ қийматларида $\varphi(t)=0$. Шунга биноан

$$\int h(t)\varphi(t)\,dt=\int_a^b h(t)\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

Ушбу

$$\int_a^t h(s)\,ds=H(t)$$

белгилаш киритиб, (4) интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int_a^b h(t)\varphi(t)\,dt=H(t)\cdot\varphi(t)\Big|_a^b-\int_a^b H(t)\varphi'(t)\,dt. \tag{5}$$

Бундан $\varphi(a)=0$ ва $\varphi(b)=0$ эканлигини ҳисобга олган ҳолда (3) га асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b H(t)\varphi'(t)\,dt=0.$$

Энди $\varphi'(t)$ функция ҳам $[a, b]$ дан ташқарида ноль эканлигини ҳисобга олсак, ҳар бир $\varphi\in E$ учун

$$\int H(t)\varphi'(t)\,dt=0.$$

Агар бу муносабатдан $H(t)$ функциянинг ўзгармас эканлиги келиб чиқишини кўрсатсак исбора исботланади. Чунки бу ҳолда $H(t)$ функция жамланувчи функциянинг аниқмас интеграли сифатида [ҲЎФН] китобининг 43.6-натижасига биноан деярли ҳар бир $t\in(-\infty, +\infty)$ учун ҳосилага эга ва $H'(t)=h(t)=0$.

Шундай қилиб, тасдиқни исботлаш учун қуйидаги леммани исботлаш кифоя.

Лемма (Дю-Буа-Реймон леммаси). Агар бирор узлуксиз $H(t)$ функция ва $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\varphi\in E$ учун

$$\int_a^b H(t)\varphi'(t)\,dt=0 \qquad (7)$$

бўлса, $H(t)$ функция $[a, b]$ да ўзгармасдир.

Исбот. $H(t)$ функция ўзгармас бўлмасин. Бу ҳол E фазода (7) тенглик бажарилмаслигини кўрсатамиз.

$H(t)$ ўзгармас бўлмагани учун шундай t_1, $t_2\in[a, b]$ нуқталар мавжудки, $H(t_1)\neq H(t_2)$. Аниқлик учун, масалан, $H(t_1)<H(t_2)$ бўлсин. Бу сонлар орасидаги бирор C сонни оламиз. $H(t)$ узлуксиз бўлгани учун ўзаро кесишмайдиган шундай (a_1, b_1) ва (a_2, b_2) оралиқлар мавжудки, ҳар қандай $t'\in[a_1, b_1]$, $t''\in[a_2, b_2]$ нуқталар учун

$$H(t')<C<H(t'').$$

Энди $\varphi'(t)$ сифатида қуйидаги тўртта шартни қаноатлантирувчи барча ҳосилалари мавжуд бўлган функцияни оламиз;

1) (a_1, b_1) да мусбат;
2) (a_2, b_2) да манфий;
3) (a_1, b_1) ва (a_2, b_2) оралиқлардан ташқарида ноль;
4) ушбу

$$\int_a^b \varphi'(t)\,dt=\int_{a_1}^{b_1}\varphi'(t)\,dt+\int_{a_2}^{b_2}\varphi'(t)\,dt=0$$

тенглик ўринли.

Бундай $\varphi'(t)$ функцияни, масалан, юқорида қурилган $\varphi(t, a)$ асосий функция ёрдамида ҳам тузиш мумкин.

Ушбу

$$\varphi(t)=\int_a^t \varphi'(s)\,ds$$

функцияни олсак, равшанки, $\varphi\in E$ ва $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

Энди

$$\int_a^b (H(t)-C)\varphi'(t)\,dt=\int_{a_1}^{b_1}(H(t)-C)\,\varphi'(t)dt+$$

$$+\int_{a_2}^{b_2}(H(t)-C)\,\varphi'(t)\,dt<0,$$

чунки иккала ҳад ҳам манфий. Бундан 4) шартга биноан

$$\int_b^a H(t)\,\varphi'(t)\,dt=\int_a^b (H(t)-C)\,\varphi'(t)dt+C\int_a^b \varphi'(t)dt=$$

$$=\int_a^b (H(t)-C)\varphi'(t)\,dt<0.$$

Демак, топилган $\varphi\in E$ учун (7) тенглик ўринли эмас. Лемма исботланди.

Шундай қилиб, ҳар бир локал интегралланувчи $f(t)$ функцияга (1) формула билан аниқланган умумлашган функция мос қўйилди. Бу мосликда, юқорида кўрсатилганидек, турли локал интегралланувчи функцияларга турли умумлашган функциялар мос келади. Демак, барча локал интегралланувчи функциялар тўпламини барча умумлашган функциялар тўпламининг қисми деб қараш мумкин. Шу сабабли умумлашган функциялар учун ҳам $f(t)$ белгини ишлатиш қулай. Аммо бунда $f(t)$ умумлашган функциянинг айрим нуқталардаги қиймати маънога эга эмас. Ундан ташқари, баъзан $(f,\varphi)=$ $=(f(t),\varphi(t))$ белгининг ўрнига

$$\int f(t)\,\varphi(t)dt$$

белгини ҳам ишлатамиз, ваҳоланки, классик анализ нуқтаи назаридан бу интеграл маънога эга эмас.

12.2-§. Умумлашган функциялар устида амаллар

1. $f(t)$ умумлашган функциянинг α сонга кўпайтмаси деб ушбу

$$(\alpha f,\ \varphi)=\alpha(f,\ \varphi)=(f,\ \alpha\varphi)$$

узлуксиз чизиқли функционалга айтилади. Регуляр f

функционал учун бу амал локал интегралланувчи $f(t)$ функцияни α сонга кўпайтиришдан иборат.

2. Икки $f(t)$ ва $g(t)$ умумлашган функциянинг йиғиндиси деб, ушбу

$$(f+g, \varphi)=(f, \varphi)+(g, \varphi)$$

тенглик билан аниқланган $f+g$ функционалга айтилади. Агар f ва g лар регуляр бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси ҳам регуляр бўлиб, локал интегралланувчи $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларнинг йиғиндисига тенг.

3. f умумлашган функция ва умумлашган функцияларнинг $\{f_n\}$ кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар ҳар бир $\varphi \in E$ учун (f_n, φ) сонлар кетма-кетлиги $n \to \infty$ да (f, φ) сонга интилса, $\{f_n\}$ кетма-кетлик f га *яқинлашувчи* дейилади.

Агар f_n функциялар узлуксиз функциялар бўлиб, $\{f_n\}$ кетма-кетлик f узлуксиз функцияга текис яқинлашса, у ҳолда бу $\{f_n\}$ кетма-кетлик умумлашган функциялар катма-кетлиги сифатида ҳам f га яқинлашади. Ҳақиқатан, $\{f_n\}$ кетма-кетлик сифатида f га текис яқинлашгани сабабли ҳар қандай $\varphi \in E$ учун ушбу

$$\int f_n(t)\,\varphi(t)\,dt$$

интеграл остида лимитга ўтиш мумкин.

Киритилган яқинлашиш маълум яқинлашишларга нисбатан кенгроқ маънодаги яқинлашиш эканлигини мисолда кўрамиз.

Ушбу $f_n(t)=\sin nt$ функциялар кетма-кетлиги бирор функцияга на текис яқинлашади ва на ҳар бир нуқтада яқинлашади. Аммо бу кетма-кетлик умумлашган функциялар сифатида эса нолга яқинлашади. Ҳақиқатан, ушбу

$$(\sin nt, \varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} \sin nt\,\varphi(t)\,dt$$

сон φ функциянинг Фурье коэффициенти сифатида $n \to \infty$ да нолга яқинлашиши математик анализ курсидан маълум.

4. $f(t)$ умумлашган функция ҳосиласининг таърифини беришдан олдин $f(t)$ регуляр, унинг ҳосиласи мавжуд ва $f'(t)$ узлуксиз бўлган ҳолни кўрайлик. Бу ҳолда ушбу

$$(f', \varphi)=\int f'(t)\varphi(t)\,dt$$

функционални олишимиз мумкин. Бу интегрални бўлаклаб интеграллаб, $\varphi(t)$ функциянинг бирор $[a, b]$ оралиқнинг ташқарисида ноль эканлигини ҳисобга олсак,

$$(f', \varphi) = f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = (f, -\varphi'). \qquad (1),$$

Бу тенгликни умумлашган функция ҳосиласининг таърифи сифатида қабул қиламиз. Шундай қилиб, ушбу

$$(g, \varphi) = (f, -\varphi') \qquad (2)$$

тенглик билан аниқланган g умумлашган функция f нинг *ҳосиласи* деб аталади ва f' ёки $\frac{df}{dt}$ каби белгиланади.

1-теорема. *Ҳар қандай умумлашган функциянинг ҳосиласи мавжуд.*

Исбот. Ҳар бир $\varphi \in E$ учун $\varphi' \in E$ бўлгани сабабли g функционал бутун E да аниқланган. Унинг чизиқли эканлиги равшан. Узлуксизлигини кўрсатамиз. E да нолга яқинлашувчи бирор $\{\varphi_n\}$ кетма-кетлик оламиз. E даги яқинлашиш таърифига мувофиқ, бу ҳолда $\{-\varphi'_n\}$ кетма-кетлик ҳам нолга интилади. Бундан ва f функционалнинг узлуксизлигидан

$$(g, \varphi_n) = (f, -\varphi'_n) \to 0$$

яъни g ҳам узлуксиз.*

Натижа. Ҳар қандай умумлашган функциянинг ҳамма тартибли ҳосилалари мавжуд.

Ушбу

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2',$$
$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

қоидалар ўринли эканлиги равшан.

Агар $f(t)$ функция узлуксиз бўлиб, сони чекли нуқталардан бошқа барча нуқталарда оддий маънодаги ҳосиласи мавжуд ва $f'(t)$ интегралланувчи бўлса, $f(t)$ функциянинг умумлашган маънодаги ҳосиласи оддий маънодаги $f'(t)$ функцияга мос келувчи регуляр функцияга тенглиги бевосита кўрсатилади.

5. Ихтиёрий иккита умумлашган функциянинг кўпайтмаси тушунчаси умумий ҳолда киритилмаган.

Аммо ихтиёрий умумлашган функциянинг барча ҳосилалари мавжуд $h(t)$ функцияга кўпайтмасини таърифлаш мумкин. Барча ҳосилалари мавжуд $h(t)$ функциянинг $f(t)$ умумлашган функцияга *кўпайтмаси* деб, ушбу

$$(h\cdot f,\ \varphi) = (f,\ h\varphi)$$

тенглик билан аниқланган $h\cdot f$ функционалга айтилади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги функционал маънога эга, чунки ҳар қандай $\varphi(t)$ финит функциянинг $h(t)$ функцияга кўпайтмаси яна финит функциядир. Ундан ташқари, E фазода φ_n кетма-кетлик нолга интилса, шу фазода $h\varphi_n$ ҳам нолга интилади. Бундан таърифдаги $h\cdot f$ функционалнинг узлуксизлиги келиб чиқади. Демак, барча тартибли ҳосилалари мавжуд бўлган $h(t)$ функциянинг $f(t)$ умумлашган функцияга кўпайтмаси аниқланди. Агар $f(t)$ регуляр бўлса, унинг $h(t)$ га кўпайтмаси бу функцияларнинг одатдаги кўпайтмасига тенг. Ушбу

$$(h\cdot f)' = hf' + h'f$$

қоида ўринли эканлиги осон текширилади.

Мисоллар. 1. Ушбу Хевисайд функцияси

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{агар } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{агар } t < 0 \end{cases}$$

нинг ҳосиласини ҳисоблаймиз. Ҳосиланинг таърифига кўра

$$(\theta'(t),\ \varphi(t)) = (\theta(t), -\varphi'(t)) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(t)\,dt = \varphi(0).$$

12. 1-§ да берилган дельта-функциянинг таърифига мувофиқ

$$\theta'(t) = \delta(t).$$

Энди $\theta''(t)$ ни ҳисоблаймиз:

$$\theta''(t) = \delta'(t),\ (\delta',\ \varphi) = -(\delta,\ \varphi') = -\varphi'(0).$$

Шунга ўхшаш

$$(\delta^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (\delta, \varphi^{(m)}) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0)$$

муносабатлар исботланади.

Тайинланган t_0 учун $\theta(t-t_0)$ функциянинг ҳосиласи юқоридагига ўхшаш ҳисобланади:

$$\theta'(t-t_0) = \delta(t-t_0).$$

2. Энди бирор $f(t)$ функция биргина t_0 нуқтада узилишга эга бўлиб, бу узилиш биринчи турдаги узилиш бўлсин. Қолган барча нуқталарда унинг одатдаги $f'(t)$ ҳосиласи мавжуд бўлсин. $f(t)$ функциянинг t_0 нуқтадаги сакрашини p_0 билан белгилаймиз, бунда p_0 соннинг ишораси қуйидагича олинади: агар $\lim\limits_{t\to t_0-0} f(t) < \lim\limits_{t\to t_0+0} f(t)$ бўлса, p_0 мусбат ва акс ҳолда манфий, яъни

$$p_0 = \lim_{t\to t_0+0} f(t) - \lim_{t\to t_0-0} f(t).$$

Ушбу

$$g(t) = f(t) - p_0\theta(t-t_0)$$

функцияни олсак, у ҳамма ерда узлуксиз бўлиб, t_0 дан бошқа барча нуқталарда ҳосиласи мавжуд. Бу ҳолда

$$g'(t) = f'(t) - p_0\theta'(t-t_0),$$

яъни

$$g'(t) = f'(t) - p_0\delta(t-t_0)$$

ёки

$$f'(t) = g'(t) + p_0\delta(t-t_0).$$

Агар $f(t)$ нинг узилишлари битта эмас, балки бир нечта $t_1, t_2, \ldots, t_n$ нуқталарда бўлса, у ҳолда

$$f'(t) = g'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i\delta(t-t_i).$$

6. Ҳар бир умумлашган функцияга унинг ҳосиласини мос қўювчи акс эттириш E' фазони ўзини ўзига акслантирувчи чизиқли оператор эканлиги равшан. Бу оператор *дифференциаллаш оператори* дейилади.

2-теорема. E′ *фазода дифференциаллаш оператори узлуксиздир.*

Исбот. Умумлашган функциялар кетма-кетлиги $\{f_n\}$ умумлашган f функцияга яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi \in E$ учун

$$(f'_n, \varphi) = (f_n, -\varphi') \rightarrow (f, -\varphi') = (f', \varphi),$$

яъни $f'_n \rightarrow f'$.*

Математик анализ курсидан маълумки, оддий функциялардан тузилган текис яқинлашувчи кетма-кетликлар бундай хоссага эга эмас. Масалан, $f_n(t) = \frac{1}{n} \sin nt$ кетма-кетлик нолга текис яқинлашади-ю, аммо $f'_n(t) = \cos nt$ ҳосилалардан иборат кетма-кетлик ҳеч қандай функцияга текис яқинлашмайди. Умумлашган функциялар фазосида эса 2-теоремага асосан $f'_n(t)$ кетма-кетлик нолга яқинлашади; буни бевосита ҳисоблаб кўриш мумкин:

$$(f'_n, \varphi) = \int_a^b \cos nt\varphi(t)dt = -\frac{1}{n}\int_a^b \sin nt\, \varphi'(t)\, dt \rightarrow 0,$$

бунда $[a, b]$ шундай оралиқки, ундан ташқарида $\varphi(t)$ айнан нолга тенг.

Бу теоремадан бевосита қуйидаги натижа олинади.

Натижа. Агар g_n умумлашган функциялардан тузилган $g_1 + g_2 + \ldots + g_n + \ldots$ қатор g умумлашган функцияга яқинлашса, у ҳолда

$$g'_1 + g'_2 + \ldots + g'_n + \ldots = g'.$$

Демак, умумлашган функциялардан иборат яқинлашувчи қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин.

2-теореманинг татбиқига бир нечта мисол кўрамиз. Даври 2π бўлган локал интегралланувчи $f(t)$ функцияни олиб, унинг

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\, dt$$

Фурье коэффициентлари ёрдамида тузилган

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int} \qquad (3)$$

Фурье қаторини кўрамиз.

Математик анализ курсидан маълумки, (3) қатор $f(t)$ функцияга текис ёки ҳар бир нуқтада яқинлашмаслиги ҳам мумкин. Аммо умумлашган функциялар учун аҳвол бошқача.

3-теорема. (3) *қатор умумлашган функциялар фазосида $f(t)$ га яқинлашади.*

Исбот. Ушбу

$$f_1(t)=\int_0^t [f(t)-a_0]\,dt$$

функцияни олиб, унинг учун $f_1(2\pi)$ ни ҳисоблаймиз:

$$f_1(2\pi)=\int_0^{2\pi} f(t)\,dt-2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt=0.$$

f нинг даври 2π бўлгани учун $f_1(t)$ ҳам даври 2π бўлган функция. Бу функциянинг Фурье коэффициентларини кўрамиз:

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f_1(t)dt.$$

Энди

$$u=f_1(t),\ e^{-int}dt=dv,\ v=\frac{e^{-int}}{-in}$$

деб, охирги интегрални бўлаклаб интегралласак,

$$b_n=\frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi}[f(t)-a_0]e^{-int}dt,$$

яъни $b_0=0$ ва $n\neq0$ да

$$b_n=\frac{a_n}{in}. \tag{4}$$

Энди ушбу

$$f_2(t)=\int_0^t f_1(t)\,dt$$

функцияни олсак, у ҳам даврий бўлиб, дифференциалланувчи функциядир, чунки $f_1(t)$ функция жамланувчи $f(t)$ функциянинг аниқмас интеграли сифатида узлуксиздир. Сўнг $f_2(t)$ нинг Фурье коэффициентларини c_n билан белгилаб, $f_1(t)$ нинг коэффициентлари орқали (4) формула ёрдамида ифодаласак,

$$c_n=\frac{b_n}{in}$$

бўлади. Бу ерга (4) дан b_n нинг қийматларини қўйсак,

$$c_n = \frac{a_n}{-n^2}. \qquad (5)$$

Энди $f_2(t)$ дифференциалланувчи бўлгани учун математик анализ курсидан маълумки, унинг

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

Фурье қатори $f_2(t)$ функцияга текис яқинлашади:

$$f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}.$$

У ҳолда бу қатор f_2 га умумлашган функциялар фазосида ҳам яқинлашади.

Бу қаторни умумлашган функциялар қатори сифатида қараб, уни дифференциаллаймиз:

$$f'_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(e^{int}\right)'$$

Бундан

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} inc_n e^{int}.$$

Бу қаторни яна умумлашган функциялар қатори сифатида дифференциалласак,

$$f'_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in)^2 c_n e^{int}.$$

Бундан ва (5) дан $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$.

7. Умумлашган функциялар учун юқорида киритилган амаллар ҳар бир умумлашган $y(t)$ функция учун ушбу

$$-b(t) + a_0(t)y(t) + \dots + a_n(t)y^{(n)}(t)$$

кўринишдаги ифодаларни қарашга имкон беради. Агар бундай ифодани нолга тенгласак, умумлашган функциялар фазосидаги ушбу

$$a_0(t)y(t) + \dots + a_n(t)y^{(n)}(t) = b(t)$$

дифференциал тенгламага келамиз.

Дастлаб энг содда кўринишдаги ушбу

$$\frac{dy}{dt}=0 \qquad (6)$$

тенгламани умумлашган функциялар фазосида ечамиз.

4-теорема. (6) *тенгламанинг умумлашган функциялар фазосидаги умумий ечими* $y=C(=const)$, *яъни* $(y,\varphi)=\int C\varphi(t)dt$.

Исбот. (6) тенглама ушбу

$$(y',\varphi)=(y,-\varphi')=0 \qquad (7)$$

тенгламага эквивалент. Бу ерда $\varphi\in E$ ихтиёрий бўлгани сабабли $y(t)$ умумлашган функция бирор асосий функциянинг ҳосиласига тенг бўлган ҳар бир $\varphi(t)$ функцияда нолга тенг. Бундай $\varphi(t)$ функциялар тўпламини E_0 билан белгилаймиз. Энди $y(t)$ функционални E_0 қисм фазодан бутун E фазога қандай давом эттириш мумкинлигини текширамиз. Бунинг учун бирор асосий $\varphi(t)$ функциянинг бошқа бир $\varphi(t)$ асосий функциянинг ҳосиласи бўлиши шартларини топамиз. Бирор $\varphi\in E$ учун $\psi(t)=\varphi'(t)$ деб фараз қилайлик. Бундан ва φ нинг финитлигидан

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(t)\,dt=\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0,$$

яъни

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,dt=0. \qquad (8)$$

Аксинча, бирор $\varphi\in E$ учун (8) шарт бажарилса, у ҳолда ушбу

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}\psi(s)\,ds$$

функция финит ва $\varphi'(t)=\psi(t)$.

Энди ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(t)\,dt=1$$

шартни қаноатлантирувчи бирор $\varphi_1\in E$ функцияни оламиз. Ихтиёрий $\varphi\in E$ функцияни ушбу

$$\varphi=\alpha\varphi_1+\varphi_0,\quad \varphi_0\in E_0 \qquad (9)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Дарҳақиқат,

$$\alpha = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt \qquad (10)$$

деб олсак, у ҳолда $\varphi - \alpha\varphi_1 \in E_0$ ва φ_0 сифатида $\varphi - \alpha\varphi_1$ функцияни олиш кифоя.

Энди бевосита (6) тенгламани ечишга ўтамиз. f. умумлашган функция (6) тенгламанинг ихтиёрий ечими бўлсин. У ҳолда (9) дан фойдалансак,

$$(f, \varphi) = (f, \alpha\varphi_1 + \varphi_0) = \alpha(f, \varphi_1) + (f, \varphi_0) = \alpha(f, \varphi_1)$$

бўлади, чунки $(f, \varphi_0) = 0$. Бу ерда (f, φ_1) — ўзгармас. Уни C билан белгиласак, (10) га биноан

$$(f, \varphi) = \int C\varphi(t)\,dt.$$

Кўрамизки, (6) тенгламанинг умумлашган функциялар фазосидаги ҳар бир ечими оддий маънодаги функциядир, яъни регулярдир.*

Ечими сингуляр функция бўлган тенгламага мисол келтирамиз. Ушбу

$$t \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

тенгламани кўрамиз. Равшанки, бу тенгламанинг иккита чизиқли эркли ечими мавжуд:

$$y_1 = 1, \ y_2 = \theta(t),$$

бу ерда $\theta(t)$ функция 1-мисолда кўрилган Хевисайд функцияси. Умумий ечим бу ечимларнинг чизиқли комбинацияси эканлигини кўрсатиш мумкин.

Энди бир жинсли бўлмаган энг содда ушбу

$$\frac{dy}{dt} = f \qquad (11)$$

тенгламани кўрамиз.

5-теорема. *Ҳар қандай f умумлашган функция учун (11) тенглама умумлашган функциялар фазосида ечимга эга.*

Бу теореманинг исботи 4-теореманинг исботига ўхшаш. Агар умумлашган y_0 функция (11) тенгламанинг бирор ечими бўлса, у ҳолда 4-теоремага асосан бу тенгламанинг умумий ечими $y = y_0 + C$ бўлади.

12.3-§. Фурье алмаштириши

1. Математик анализ курсида даври 2π бўлган функцияларни ушбу

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \tag{1}$$

кўринишда тасвирлаш, яъни Фурье қаторига ёйиш масаласи кўрилган эди, бунда

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, e^{-ins} ds. \tag{2}$$

Агар $f(t)$ функциянинг даври бошқача, масалан, $2\pi l$ бўлса, у ҳолда (1) ва (2) формулалар мос равишда ушбу

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{i\frac{n}{l}t}, \tag{3}$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(s) e^{-is\frac{n}{l}} ds \tag{4}$$

кўринишга эга бўлади.

Қулайлик учун, (3) ифодада $e^{i\frac{n}{l}t}$ функция олдидаги a_n коэффициент ўрнига $a_{\frac{n}{l}}$ ёзамиз:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\frac{n}{l}}\, e^{i\frac{n}{l}t} \tag{5}$$

у ҳолда (4) ифода

$$a_{\frac{n}{l}}=\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(s)\, e^{-is\frac{n}{l}} ds \tag{6}$$

кўринишга эга бўлади. (5) ва (6) дан

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(s)\, e^{i\frac{n}{l}(t-s)} ds. \tag{7}$$

Бундан

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n-(n-1)}{l}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(s) e^{i\frac{n}{l}(t-s)} ds\right) \tag{8}$$

Энди $\sigma_n = \frac{n}{l}$ ва $\Delta\sigma_n = \frac{n}{l} - \frac{n-1}{l}$ белгилашларни киритсак, (8) дан ушбу

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\sigma_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(s)\, e^{\sigma_n(t-s)}\, ds \right) \qquad (9)$$

ифодага келамиз. (9) да l ни чексизга интилтирсак ва ундаги мос ифодаларнинг лимити мавжуд деб фараз қилсак, у ҳолда (9) кўринишдаги интеграл йиғиндилар

$$f(t) = \int_{\infty}^{\infty} d\sigma \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{i\sigma(t-s)}\, ds \right) \qquad (10)$$

интегралга яқинлашади.

Шунга ўхшаш, (3) ва (4) ифодалар мос равишда қуйидаги ифодаларга интилади:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma)\, e^{i\sigma t}\, d\sigma, \qquad (11)$$

$$\varphi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\sigma t}\, dt. \qquad (12)$$

Охирги ифода билан аниқланган $\varphi(\sigma)$ функция $f(t)$ функциянинг *Фурье алмаштириши (Фурье интеграли)* дейилади. (11) формула Фурье алмаштиришнинг *тескарилаш формуласи* ёки *Фурьенинг тескари алмаштириши* дейилади. Қулайлик учун, $f(t)$ функциянинг Фурье алмаштиришини $\hat{f}(\sigma)$ билан ва $f \to \hat{f}$ акс эттиришни F билан белгилаймиз. Демак,

$$\hat{f} = \mathrm{F}f.$$

F акс эттириш *Фурье алмаштириши* деб аталади.

2. Энди (10), (11) ва (12) интегралларнинг мавжудлиги масаласига ва F акс эттиришнинг хоссаларига тўхталамиз.

Даставвал, икки ёрдамчи нормаланган фазони киритамиз. $L_1(-\infty, \infty)$ фазо бутун $(-\infty, \infty)$ оралиқда интегралланувчи функциялардан иборат бўлиб, ундаги норма

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

га тенг.

C_0 $(-\infty, \infty)$ фазо бутун $(-\infty, \infty)$ оралиқда узлуксиз ва $|\sigma| \to \infty$ да нолга интилувчи $\varphi(\sigma)$ функциялардан иборат бўлиб, ундаги норма

$$\|\varphi\| = \max_{-\infty<\sigma<\infty} |\varphi(\sigma)|.$$

Агар $f(t)$ функцияни интегралланувчи деб фараз қилсак, у ҳолда ҳар бир $\sigma \in (-\infty, \infty)$ учун (12) интеграл мавжуд. Бунга асосан F акс эттиришни $L_1(-\infty, \infty)$ фазода аниқланган деб ҳисоблаймиз.

Бевосита кўринадики, F акс эттириш $L_1(-\infty, \infty)$ да аниқланган чизиқли оператордир.

1-теорема. *F Фурье алмаштириши L_1 $(-\infty, \infty)$ нормаланган фазони C_0 $(-\infty, \infty)$ нормаланган фазога акс эттирувчи узлуксиз чизиқли оператордир.*

Исбот. Даставвал, ҳар бир $f \in L_1(-\infty, \infty)$ учун $F(f) \in C_0(-\infty, \infty)$ эканлигини кўрсатамиз. $f(t)$ функциянинг интегралланувчилигидан ва (12) дан ушбу

$$|\hat{f}(\sigma)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt \tag{13}$$

тенгсизликни оламиз. (13) тенгсизликдан $\hat{f}(\sigma)$ функциянинг чегараланганлиги ҳамда

$$\sup_{-\infty<\sigma<\infty} |\hat{f}(\sigma)| \leqslant \|f\| \tag{14}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди $\hat{f}(\sigma)$ функциянинг узлуксизлигини ва $|\sigma| \to \infty$ да нолга интлишини даставвал поғонали функциялар учун кўрсатамиз.

Агар $f(t)$ функция (a, b) интервалнинг характеристик функцияси, яъни

$$f(t) \doteq \begin{cases} 1, & t \in (a, b), \\ 0, & t \bar{\in} (a, b) \end{cases}$$

бўлса, унинг учун

$$\hat{f}(\sigma) = \int_a^b e^{-i\sigma t}dt = \frac{e^{-i\sigma a} - e^{-i\sigma t}}{i\sigma}.$$

Бу ифодадан $\hat{f}(\sigma)$ функциянинг бутун $(-\infty, \infty)$ оралиқда узлуксизлиги ва $|\sigma| \to \infty$ да нолга интилиши келиб чиқади.

Ихтиёрий $f(t)$ поғонали функция характеристик функцияларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлгани сабабли, F акс эттиришнинг чизиқли операторлигидан $\hat{f}(\sigma)$ функциянинг бутун $(-\infty, \infty)$ оралиқда узлуксизлиги ҳамда $|\sigma| \to \infty$ да нолга интилиши келиб чиқади.

Энди ихтиёрий $f(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ функцияни олсак, у ҳолда поғонали функцияларнинг норма маъносида $f(t)$ функцияга яқинлашувчи $\{f_n(t)\}$ кетма-кетлиги мавжуд.

(14) тенгсизликдан фойдаланиб, бу $\{f_n\}$ кетма-кетлик учун ушбу

$$\sup_{-\infty<\sigma<\infty} |\hat{f}(\sigma) - \hat{f}_n(\sigma)| \leqslant \|f - f_n\| \qquad (15)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. (15) дан кўринадики, $\hat{f}_n(\sigma)$ функциялар кетма-кетлиги бутун $(-\infty, \infty)$ оралиқда $\hat{f}(\sigma)$ функцияга текис яқинлашади. Бундан $\hat{f}(\sigma)$ функциянинг $(-\infty, \infty)$ оралиқда узлуксизлиги ва $|\sigma| \to \infty$ да нолга интилиши келиб чиқади. Демак, агар $f \in L_1(-\infty, \infty)$ бўлса, $F(f) \in C_0(-\infty, \infty)$.

Ниҳоят, F чизиқли операторнинг узлуксизлиги (15) тенгсизликдан келиб чиқади.*

(1) қатор $f(t)$ функцияга яқинлашмаслиги мумкин бўлганидек, (11) муносабат ҳам ўринли бўлмаслиги мумкин. Фурье қаторлари назариясида (1) қаторнинг $f(t)$ га яқинлашиш шарти (Дини шарти) кўрилган. Бу шартга ўхшаш шарт Фурье интеграллари учун ҳам мавжуд.

Дастлаб ёрдамчи тушунчалар киритамиз. Агар бирор $\delta > 0$ учун

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(t+s) - f(s)|}{|s|}\, ds < \infty$$

ўринли бўлса, у ҳолда $f(t)$ функция учун t нуқтада *Дини шарти* бажарилган дейилади.

Ҳар бир $f \in L_1(-\infty, \infty)$ учун $\hat{f}(\sigma) \in C_0(-\infty, \infty)$ бўлгани туфайли, ҳар қандай N учун ушбу

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \hat{f}(\sigma)\, e^{i\sigma t}\, dt \qquad (16)$$

интеграл мавжуд. Бу интегрални $f_N(t)$ орқали белгилаймиз. Агар

$$\lim_{N\to\infty} f_N(t)$$

мавжуд бўлса, уни

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\sigma)\,e^{i\sigma t}\,dt$$

билан белгилаймиз.

2-теорема. *Агар* $f\in L_1(-\infty,\ \infty)$ *функция* t *нуқтада Дини шартини қаноатлантирса, у ҳолда*

$$\lim_{N\to\infty} f_N(t)$$

мавжуд ва

$$f(t)=\lim_{N\to\infty} f_N(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\sigma)\,e^{i\sigma t}\,dt.$$

Исбот. Дастлаб (16) интегрални $f(t)$ функция орқали ифодалаймиз:

$$f_N(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\hat{f}(\sigma)e^{i\sigma t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\ e^{i\sigma(t-s)}ds\right\}d\sigma. \tag{17}$$

Қавс ичидаги интеграл σ параметрга нисбатан текис яқинлашувчилигидан (17) ифодада σ ва s бўйича интегралларнинг ўрнини алмаштириш мумкин:

$$f_N(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\left\{\int_{-N}^{N}e^{i\sigma(t-s)}\,d\sigma\right\}ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,\frac{e^{iN(t-s)}-e^{-iN(t-s)}}{i(t-s)}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\frac{\sin N(t-s)}{t-s}\,ds.$$

Охирги интегралда $t-s=-h$ алмаштириш бажариб ушбу

$$f_N(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t+h)\ \frac{\sin Nh}{h}dh$$

интегралга келамиз.

(18) интегрални баҳолашда ихтиёрий N учун ушбу

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nh}{h}\,dh = 1$$

тенгликдан фойдаланамиз (бу тенглик, масалан, Фихтенгольц Г. М. „Математик анализ асослари“, 2-том, XVII боб. 3-§, 132-бетда исботланган).

Энди $f_N(t)-f(t)$ айирмани қуйидагича ёзиб оламиз.

$$f_N(t)-f(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(t+h)-f(t)]\,\frac{\sin Nh}{h}\,dt.$$

Бирор тайин $h_1>0$ сон олиб, бу интегрални қуйидаги икки интегралнинг йиғиндиси кўринишида ёзамиз:

$$f_N(t)-f(t)=\int\limits_{|h|\leqslant h_1}[f(t+h)-f(t)]\frac{\sin Nh}{h}\,dh+$$
$$+\int\limits_{|h|\geqslant h_1}[f(t+h)-f(t)]\,\frac{\sin Nh}{h}\,dh. \qquad (19)$$

Энди иккинчи интегрални қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$\int\limits_{|h|\geqslant h_1}f(t+h)\,\frac{\sin Nh}{h}\,dh-f(t)\int\limits_{|h|\geqslant h_1}\frac{\sin \overline{Nh}}{h}\,dh.$$

f интегралланувчи бўлгани учун берилган t да ва етарли катта h_1 да охирги ифода $N\geqslant 1$ нинг қандайлигидан қатъи назар исталганча кичик қилиниши мумкин.

(19) ифоданинг биринчи ҳади ушбу

$$\int\limits_{-h_1}^{h_1}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\sin Nh\,dh \qquad (20)$$

кўринишга эга.

1-теоремада (12) кўринишдаги интегралнинг $|\sigma|\to\infty$ да нолга интилишини кўрсатган эдик. Шунга ўхшаш, ҳар бир интегралланувчи $g\ (t)$ функция учун ушбу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(h)\sin Nh\,dh$$

интегралнинг $N\to\infty$ да нолга интилиши кўрсатилади.

Хусусан, (20) интеграл ҳам нолга интилади, чунки,

$$g(h) = \frac{f(t+h) - f(h)}{h}$$

функция интегралланувчи (Дини шарти).

Шундай қилиб, (19) ифоданинг иккала ҳади ҳам нолга интилади. Демак,

$$\lim_{N \to \infty} f_N(t) = f(t).*$$

Мисол. Ушбу

$$f(t) = e^{-at^2} (a > 0)$$

функциянинг Фурье алмаштиришини топамиз. Таърифга мувофиқ

$$\hat{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\sigma t}\, dt. \qquad (21)$$

Бу ифодани $e^{-az^2-i\sigma z}$, $z = x + iy$ аналитик функциядан Ox ўқ бўйича олинган интеграл деб қараш мумкин. Ушбу

$$\left| e^{-a(x+iy)^2 - i\sigma(x+iy)} \right| = e^{-ax^2+ay^2+\sigma y}$$

тенгликка мувофиқ ҳар бир $A_{y0} = \{y : |y| \leqslant y_0\}$ тўпламда ушбу

$$e^{-az^2-i\sigma z} \qquad (22)$$

функция $x \to \pm\infty$ да y га нисбатан текис нолга интилади. Шунинг учун аналитик функциялар назариясидаги Коши теоремасига асосан ҳисобланаётган (21) интеграл Ox ўққа параллел бўлган ихтиёрий тўғри чизиқ бўйича (22) функциядан олинган интегралга тенг:

$$\hat{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\sigma(x+iy)}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ay^2+\sigma y-2aixy-i\sigma x}\, dx =$$

$$= e^{ay^2+\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(a2y+\sigma)} dx.$$

Энди $y = -\frac{\sigma}{2a}$ деб оламиз. У ҳолда $ay^2 + \sigma y = -\frac{\sigma^2}{4a}$ ва

$$\hat{f}(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^1}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx.$$

Математик анализ курсидан ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

тенглик маълум. Бунга асосан

$$\hat{f}(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

3. Энди Фурье алмаштиришининг дифференциаллаш оператори билан боғланишини ўрганамиз. $f(t)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$;

2) $f(t)$ функция $(-\infty, \infty)$ ораликнинг ҳар бир нуқтаси атрофида абсолют узлуксиз;

3) $f(t)$ функциянинг $f'(t)$ ҳосиласи мавжуд ва

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,|\,dt < \infty.$$

Охирги шартга мувофиқ ушбу

$$f(t) = f(0) + \int_{t}^{0} f'(t)\,dt$$

функциянинг $t \to \infty$ да лимити мавжуд. Бу лимит нолга тенг, чунки акс ҳолда $f(t)$ функция интегралланувчи бўлмас эди. Худди шундай ҳолат $t \to -\infty$ да ҳам ўринли.

Энди $f'(t)$ функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисоблаймиз:

$$F(f') = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\sigma t} dt =$$

$$= f(t) e^{-it\sigma} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\sigma} dt, \qquad (23)$$

бу ерда бўлаклаб интеграллаш қўлланилди. (23) ифодадаги биринчи ҳад юқорида кўрсатилганига биноан нолга тенг. Бунга асосан (23) дан

$$F(f') = i\sigma F(f). \tag{24}$$

Шундай қилиб, $f(t)$ функциядан ҳосила олишга $\hat{f}(t)$ функцияни $i\sigma$ га кўпайтириш мос келар экан. Агар $f(t)$ функциянинг m-тартибгача ҳосилалари мавжуд бўлса, у ҳолда (24) га биноан

$$F(f^{(k)}) = (i\sigma)^k F(f). \tag{25}$$

Умуман, агар $P(x)$ бир аргументли бирор кўпҳад бўлса ва бу аргумент ўрнига $\frac{d}{dt}$ дифференциаллаш операторини қўйсак, у ҳолда $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ кўринишдаги оператор ҳосил бўлади. (25) формуладан фойдаланиб, ушбу

$$F\left(P\left(\frac{d}{dt}\right) f\right) = P(i\sigma) F(f)$$

умумий формулани топамиз.

4. Энди Фурье алмаштириши билан ўрама амали орасидаги муносабатни ўрганамиз.

Абсолют интегралланувчи $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ функциялар берилган бўлсин. Ушбу $\hat{f}_1(\sigma)\cdot\hat{f}_2(\sigma)$ кўпайтманинг шаклини ўзгартирамиз:

$$\hat{f}_1(\sigma)\cdot\hat{f}_2(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\sigma t}dt.\int_{-\infty}^{\infty} f_2(s)e^{-i\sigma s}ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(s)e^{-i\sigma(t+s)}dt\,ds,$$

бу ерда охирги каррали интеграл Фубини теоремасига ([ҲЎФН], 61-§) асосан яқинлашувчи. Охирги интегралда $s = h - t$ алмаштириш бажарсак,

$$\hat{f}_1(\sigma)\cdot\hat{f}_2(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(h-t)e^{-i\sigma h}dh\right]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma h}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(h-tdt\right]dh, \tag{25'}$$

бу ерда Фубини теоремасига асосан интегралларнинг ўрнини алмаштириш мумкин. Охирги ифодада қавс ичидаги интеграл, яъни

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(h)f_2(t-h)dh \qquad (26)$$

Фубини теоремасининг тасдиғига асосан мавжуд бўлиб, Фубини теоремасининг бошқа тасдиғига асосан абсолют интегралланувчи. (26) ифода билан аниқланган $f(t)$ функция f_1 ва f_2 функцияларнинг *ўрамаси* дейилади. (25′) формула кўрсатадики, $\hat{f}_1(\sigma)\cdot\hat{f}(\sigma)$ кўпайтма $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ функциялар ўрамасининг Фурье алмаштиришига тенг экан.

f_1 ва f_2 функцияларнинг ўрамаси одатда $f_1{*}f_2$ орқали белгиланади.

Ҳозиргина олинган натижани ушбу

$$F(f_1{*}f_2)=F(f_1)\cdot F(f_2)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бундан, хусусан, ўрама амалининг коммутатив ва ассоциатив эканлиги келиб чиқади.

5. Энди Фурье алмаштиришини иссиқлик ўтказиш тенгламасини ечишга қўллаймиз. $u(x,t)$ функция $(-\infty<x<\infty, t\geqslant0)$ соҳада аниқланган бўлсин. Ушбу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}, \text{ яъни } u_t(x,t)=u_{xx}(x,t) \qquad (27)$$

дифференциал тенглама *иссиқлик ўтказиш тенгламаси* дейилади. Одатда (27) тенгламанинг $t=0$ да берилган $u_0(x)$ функцияга тенг бўлган ечими изланади. Бу масаланинг маъноси қуйидагича: бир жинсли чексиз узун стерженнинг $t=0$ вақтдаги температурасини билган ҳолда ихтиёрий $t>0$ вақтдаги температураси топилсин. Бу масалани ечишда $u(x,t)$ функцияга қуйидаги шартларни қўямиз:

а) $u(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ функциялар ҳар бир $t\geqslant0$ нуқтада x га нисбатан $(-\infty,\infty)$ оралиқ бўйича интегралланувчи;

б) шундай $\Phi(x)$ функция мавжудки, ҳар бир $0\leqslant t\leqslant T$ оралиқда

$$|u_t(x,t)\leqslant|\Phi(x), \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\,dx<\infty.$$

Энди (27) тенгламанинг икки томонига x га нисбатан Фурье алмаштиришини татбиқ қиламиз. У ҳолда б) шартга асосан ушбу

$$F\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)\cdot e^{-i\sigma x}\, dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-i\sigma x}\, dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $u(x, t)$ нинг x га нисбатан Фурье алмаштиришини $v(\sigma, t)$ билан белгиласак,

$$F\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} F(u(x, t)) = v_t(x,t).$$

Энди а) шартга мувофиқ

$$F(u_{xx}(x, t)) = (i\sigma)^2 F(u(x, t)) =$$
$$= -\sigma^2 F(u(x, t)) = -\sigma^2 v(\sigma, t).$$

Натижада (27) тенглама ушбу

$$v_t(\sigma, t) = -\sigma^2 v(\sigma, t) \tag{28}$$

оддий дифференциал тенгламага келади.

(27) тенглама учун масаланинг қўйилишига мувофиқ (28) тенгламанинг шундай ечими топилиши керакки, у $t = 0$ да ушбу

$$v_0(\sigma) = F(u_0(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx$$

функцияга тенг бўлиши керак. Равшанки, бундай ечим ушбу

$$v(\sigma, t) = e^{-\sigma^2 t}\, v_0(\sigma)$$

кўринишга эга. Юқорида кўрган мисолимизга мувофиқ,

$$e^{-\sigma^2 t} = F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right).$$

(2-теоремадан кейин кўрилган мисолда a параметрни $\frac{1}{4t}$ га тенг деб олиш керак).

Ўрама амали формуласига мувофиқ,

$$v(\sigma, t) = F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) F(u_0) =$$
$$= F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right).$$

Энди $v(\sigma, t) = F(u(x, t))$ эканлигини эсласак,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u_0(x-s)ds.$$

Топилган бу ечим *Пуассон интеграли* дейилади.

6. Энди $L_2(-\infty,\infty)$ фазода Фурье алмаштириши билан шуғулланамиз.

Квадрати $(-\infty,\infty)$ оралиқда интегралланувчи бўлган функциялар тўпламини $L_2(-\infty,\infty)$ билан белгилаймиз. Бу фазони ушбу

$$||f|| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)|dt}$$

норма билан бирга қурамиз.

Агар $(-\infty,\infty)$ оралиқда аниқланган $f(t)$ функциянинг квадрати бу оралиқда интегралланувчи бўлса ҳам, лекин унинг ўзи бу оралиқда интегралланувчи бўлиши шарт эмас. Масалан, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ функциянинг квадрати $(-\infty, \infty)$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, ўзи эса интегралланувчи эмас.

Шунинг учун $f \in L_2(-\infty,\infty)$ функциянинг шу вақтгача қурилган маънодаги Фурье алмаштириши мавжуд бўлмаслиги мумкин.

Қуйидаги исботсиз берилган теорема $L_2(-\infty,\infty)$ фазода ҳам Фурье алмаштириши киритиш мумкинлигини кўрсатади.

Теорема (Планшерель теоремаси). *Ҳар бир* $f(t) \in L_2(-\infty,\infty)$ *функция учун ушбу*

$$\varphi_N(\sigma) = \int_{-N}^{N} f(t) e^{-it\sigma} dt$$

интеграл σ *аргументга нисбатан* $L_2(-\infty,\infty)$ *фазонинг элементи бўлиб,* $N \to \infty$ *да* $L_2(-\infty,\infty)$ *метрикасида бирор* $\varphi(\sigma) \in L_2(-\infty,\infty)$ *функцияга интилади. Бунда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\sigma)|^2 d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Агар $f(t) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$ *бўлса, у ҳолда* $\varphi(\sigma) = \hat{f}(\sigma)$.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Агар ҳар қандай $\varphi(t)$ асосий функция учун $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ бўлса, $f(t)$ ва $g(t)$ умумлашган функциялар *тенг* дейилади. Хусусан, агар ҳар қандай $\varphi(t)$ асосий функция учун

$$(f, \varphi) = 0$$

бўлса, $f(t)$ умумлашган функция нолга тенг дейилади.

а) Ушбу

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ агар } t \neq 1, 2, t \in R \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } t = 1 \text{ бўлса}, \\ 2, \text{ агар } t = 2 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

функция нолга тенг умумлашган функция эканини кўрсатинг.

б) Ушбу

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, \text{ агар } t < 0 \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } t \geqslant 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

ва

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 0, \text{ агар } t < 0 \text{ бўлса}, \\ 2, \text{ агар } t = 0 \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } t > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциялар умумлашган функциялар сифатида ўзаро тенг эканлигини кўрсатинг.

2. Ушбу

$$(f, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots$$

ифоданинг умумлашган функция эканлигини кўрсатинг.

3. Агар ҳар қандай манфий бўлмаган $\varphi(t)$ асосий функция учун

$$(f, \varphi) \geqslant 0$$

бўлса, $f(t)$ умумлашган функция *мусбат* дейилади.

Агар ҳар қандай манфий бўлмаган $\varphi(t)$ асосий функция учун

$$(f - g, \varphi) \geqslant 0$$

бўлса, f умумлашган функция g умумлашган функциядан *катта* дейилади ва $f \geqslant g$ каби ёзилади.

а) $\delta(t)$ функциянинг мусбат эканлигини кўрсатинг.

б) Ушбу

$$\delta(t) \geqslant \delta(2t)$$

тенгсизликни исботланг.

4. Қуйидиги функцияларнинг Фурье интегралини топинг:

а) $f(t)=\frac{1}{a^2+t^2}$,

б) $f(t)=\frac{\sin^2 at}{t^2}$.

5. Бирор $f(t)$ функциянинг Фурье алмаштириши $\varphi(\sigma)=\frac{1}{\sigma+\sigma_0+i\tau_0}$.

Функциянинг ўзини топинг.

6. Қуйидаги функциялар учун Фурьенинг тескари алмаштиришини топинг.

а) $\varphi(\sigma)=\frac{\sin a\sigma}{\sigma}$;

б) $\varphi(\sigma)=\frac{\sin^2 a\sigma}{\sigma}$.

7. Тўғри чизиқдаги (0, a) интервалнинг характеристик функциясини χ_a билан белгилаймиз, яъни

$$\chi_a(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\ a)\ \text{учун},\\ 0, & x\notin(0,\ a)\ \text{учун}.\end{cases}$$

Қуйидаги ўрамани ҳисобланг:

$$\chi_b(x)_*\frac{\chi_{a+h}(x)-\chi_a(x)}{h}.$$

8. Ихтиёрий $\varphi(x)\in L_1(-\infty,\ \infty)$ функция учун қуйидаги муносабатни исботланг:

$$\lim_{h\to 0}\varphi(x)_*\frac{\chi_{a+h}(x)-\chi_a(x)}{h}=\varphi(x-a)$$

(бу ерда яқинлашиш $L_1(-\infty,\ \infty)$ даги норма маъносида).

9. $L_1(-\infty,\ \infty)$ фазонинг бирон E ёпиқ қисм фазоси ҳар бир $\varphi(x)$ функция билан бирга ихтиёрий $h\in R$ учун $\varphi(x-h)$ функцияни ҳам ўз ичига олсин. Бу ҳолда ҳар қандай $\varphi\in E$ ва $\varphi\in L_1(-\infty,\ \infty)$ учун $\varphi_*\varphi\in E$ муносабатни исботланг.

XIII боб

НОРМАЛАНГАН ФАЗОЛАРДА ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ҲИСОБ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

13.1- §. Кучли ва суст дифференциаллар

Бирор нормаланган X фазонинг U очиқ тўпламида аниқланган ва қийматлари нормаланган Y фазога тегишли бўлган $F: X \to Y$ акс эттириш берилган бўлсин.

Таъриф. U тўпламнинг бирон x нуқтаси учун қуйидаги икки шартни қаноатлантирувчи чегараланган $L_x \in L(X, Y)$ чизиқли оператор мавжуд бўлса, у ҳолда F акс эттириш $x \in U$ нуқтада *дифференциалланувчи* дейилади:

1) $F(x+h) - F(x) = L_x h + \alpha(x, h)$, x, $h \in X$, $\alpha(x, h) \in Y$; (1)

2) $\|h\| \to 0$ да $\frac{\|\alpha(x, h)\|}{\|h\|} \to 0$. (2)

Ҳар бир $h \in X$ учун $L_x h$ элемент F акс эттиришнинг x нуқтадаги *кучли дифференциали* ёки *Фреше дифференциали* дейилади. L_x чизиқли оператор эса F акс эттиришнинг x нуқтадаги *кучли ҳосиласи* ёки *Фреше ҳосиласи* дейилади ва $F'(x)$ билан белгиланади.

1-теорема. *Агар $F: X \to Y$ акс эттириш бирор x нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ягона кучли ҳосилага эгадир.*

Исбот. $L_x^{(1)}$ ва $L_x^{(2)}$ чизиқли операторлар F нинг x нуқтадаги кучли ҳосилалари бўлсин. У ҳолда

$$F(x+h) - F(x) = L_x^{(1)} h + \alpha_1(x, h) = L_x^{(2)} h + \alpha_2(x, h)$$

яъни

$$L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h = \alpha_2(x, h) - \alpha_1(x, h).$$

Таърифдаги (2) шартга асосан

$$\|h\| \to 0 \text{ да } \frac{\|L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h\|}{\|h\|} \to 0. \quad (3)$$

Агар $L_x^{(1)} \neq L_x^{(2)}$ бўлса, у ҳолда бирон $h_0 \in X$ учун

$$\frac{\|L_x^{(1)}h_0 - L_x^{(2)}h_0\|}{\|h_0\|} = \lambda \neq 0.$$

Демак, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун

$$\frac{\|L_x^{(1)}(\varepsilon h_0) - L_x^{(2)}(\varepsilon h_0)\|}{\|\varepsilon h_0\|} = \lambda.$$

Олинган ε сонни ихтиёрий кичик қилиш мумкин бўлгани сабабли (3) муносабат ўринли бўлмайди. Демак, $L_x^{(1)} = L^{(2)}$.*

Ҳосиланинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари бевосита келиб чиқади.

1°. *Агар $F(x) = y_0 = \text{const}$ бўлса, у ҳолда $F'(x) \equiv 0$ (ноль оператор).*

2°. *Агар $F(x)$ узлуксиз чизиқли оператор бўлса, унинг ҳосиласи ўзига тенг.*

Дарҳақиқат,

$$F(x+h) - F(x) = F(h).$$

2-теорема (мураккаб функциянинг ҳосиласи). *X, Y Z нормаланган фазолар бўлиб, $U(x_0)$ тўплам бирор $x_0 \in X$ нуқтанинг атрофи, $F: U(x_0) \to Y$ узлуксиз акс эттириш бўлсин. Сўнг $y_0 = F(x_0)$ ва $V(y_0)$ тўплам $y_0 \in Y$ нуқтанинг атрофи, $G: V(y_0) \to Z$ ҳам узлуксиз акс эттириш бўлсин. Агар F акс эттириш x_0 нуқтада, G акс эттириш y_0 нуқтада дифференциалланувчи булса, у ҳолда x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган $H = GF$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчидир ва*

$$H'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0). \qquad (4)$$

Исбот. Нормаланган Y фазонинг элементи бўлган $\alpha(h)$ $(h \in X)$ ифода ушбу

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} = 0$$

шартни қаноатлантирса, уни $o(h)$ билан белгилаймиз. Шуни назарда тутган ҳолда қуйидагиларни ёзамиз:

$$F(x_0 + \xi) = F(x_0) + F'(x_0)\xi + o(\xi), \ \xi \in X$$
$$G(y_0 + \eta) = G(y_0) + G'(y_0)\eta + o(\eta), \ \eta \in Y$$

Энди $F'(x_0)$ ва $G'(y_0)$ чегараланган чизиқли операторлар эканлигидан фойдалансак,

$$H(x_0+\xi)=G(F(x_0+\xi))=G(y_0+F'(x_0)\xi+o(\xi))=$$
$$=G(y_0)+G'(y_0)(F'(x_0)\xi+o(\xi))+(F'(x_0)\xi+o(\xi))=$$
$$=G(y_0)+G'(y_0)F'(x_0)\xi+[G'(y_0)(o(\xi))+$$
$$+o(F'(x_0)\xi+o(\xi))]=G(y_0)+G'(y_0)F'(x_0)\xi+o(\xi).$$

Чунки

$$\frac{\|G'(y_0)(o(\xi))+o(F'(x_0)\xi+o(\xi))\|}{\|\xi\|}\leqslant\|G'(y_0)\|\frac{\|o(\xi)\|}{\|\xi\|}+$$
$$+\frac{\|o(F'(x_0))\xi+o(\xi))\|}{\|F'(x_0)\xi+o(\xi)\|}\cdot\frac{\|F'(x)\xi+o(\xi)\|}{\|\xi\|}\leqslant\|G'(y_0)\|\frac{\|o(\xi)\|}{\|\xi\|}+$$
$$+\left(\|F'(x_0)\|+\frac{\|o(\xi)\|}{\|\xi\|}\right)\frac{\|o(F'(x_0)\xi+o(\xi))\|}{\|F'(x_0)\xi+o(\xi)\|}\xrightarrow[\|\xi\|\to 0]{}0$$

(бу ерда биз $\|F'(x_0)\xi+o(\xi)\|\leqslant\|F'(x_0)\|\,\|\xi\|+\|o(\xi)\|\to 0$ муносабатдан фойдаландик).

Демак, $H'(x_0)=G'(y_0)F'(x_0)$.*

Теорема. 3-теорема. *X фазони Y фазога акслантирувчи F ва G узлуксиз акс эттиришлар берилган бўлсин. Агар F ва G бирон $x_0\in X$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $F+G$ ва aF (a—сон) акс эттиришлар ҳам шу нуқтада дифференциалланувчи ва*

$$(F+G)'(x_0)=F'(x_0)+G'(x_0),$$
$$(aF)'(x_0)=aF'(x_0).$$

Исбот. Акс эттиришларнинг йиғиндиси ва сонга кўпайтмасининг таърифига биноан

$$(F+G)(x_0+h)=F(x_0+h)+G(x_0+h)=F(x_0)+$$
$$+G(x_0)+F'(x_0)h+G'(x_0)hx+o_1(h)$$

ва

$$aF(x_0+h)=aF(x_0)+aF'(x_0)h+o_2(h).\ast$$

Энди суст дифференциал тушунчасига ўтамиз. X фазони Y фазога акслантирувчи $F:X\to Y$ акс эттириш берилган бўлсин. Норма маъносида ушбу

$$DF(x,h)=\frac{d}{dt}F(x+th)\Big|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит F акс эттиришнинг *суст дифференциали* ёки *Гато дифференциали* дейилади.

Умумий ҳолда, $DF(x, h)$ суст дифференциал h га нисбатан чизиқли бўлиши шарт эмас. Агар у чизиқли бўлса, яъни бирор T чегараланган чизиқли оператор учун

$$DF(x, h)=Th$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда *T суст ҳосила* ёки *Гато ҳосиласи* дейилади ва $F'_c(x)$ билан белгиланади. Суст ва кучли ҳосилалар орасидаги боғланишни ўрганадиган бўлсак, бу тушунчалар ҳатто чекли ўлчамли фазоларда ҳам турли тушунчалардир.

4-теорема. *Агар F акс эттириш кучли ҳосилага эга бўлса, у суст ҳосилага ҳам эга ва бу ҳосилалар ўзаро тенгдир.*

Исбот. F акс эттириш кучли ҳосилага эга бўлгани сабабли

$$F(x+th)-F(x)=F'(x)(th)+o(th)= \\ =tF'(x)h+o(th).$$

Демак,

$$\frac{F(x+th)-F(x)}{t}=F'(x)h+\frac{o(th)}{t}\xrightarrow[t\to 0]{} F'(x)h,$$

яъни бу лимит мавжуд ва h га нисбатан чизиқли. Демак, кучли ҳосила бир вақтда суст ҳосила ҳамдир.$_*$

Умумий ҳолда бу теореманинг акси ўринли эмас, яъни суст ҳосила мавжудлигидан кучли ҳосиланинг мавжудлиги келиб чиқмайди.

Мисол. Икки ўлчамли R^2 фазони R тўғри чизиққа акс эттирувчи ушбу

$$f(x_1, x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2}, & \text{агар } (x_1, x_2)\neq(0, 0)=\theta \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2)=(0, 0)=\theta \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни оламиз. Бу функция R^2 фазонинг ҳамма ерида узлуксиз. $(0, 0)\in R^2$ нуқтада унинг суст дифференциали мавжуд ва нолга тенг. Дарҳақиқат, $h=(h_1, h_2)$ учун

$$\lim_{t\to 0} f\frac{(\theta+th)-f(\theta)}{t})=\lim_{t\to 0}\frac{t^4h_1^3h_2}{t^5h_1^4+t^3h_2^2}=\lim_{t\to 0}\frac{th_1^3h_2}{t^2h_1^4+h_2^2}=0.$$

Демак, f акс эттиришнинг $(0, 0)$ нуқтада суст ҳосиласи нолга тенг.

Кучли ҳосила эса мавжуд эмас. Ҳақиқатан агар (0,0)-нуқтада кучли $f'(0)$ ҳосила мавжуд бўлса, 4-теорема, га асосан $f'(0) = 0$, яъни

$$f(h) - f(\theta) = f'(\theta)h + \alpha(\theta h) = \alpha(\theta,\ h).$$

Бундан

$$\lim_{h\to\theta} \frac{\|f(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Аммо $h=(h_1,\ h_2)$ векторни $h = (h_1,\ h_1^2)$ кўринишда олсак,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1^2}{2h_1^4\sqrt{h_1^2+h_1^4}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Бу зиддият f акс эттириш (0, 0) нуқтада кучли ҳосилага эга эмаслигини кўрсатади.

Суст ҳосила мавжудлигидан кучли ҳосила мавжудлиги келиб чиқиши учун қўшимча шартлар талаб қилинади.

5-теорема. *Агар F акс эттиришнинг $F_c'(x)$ суст ҳосиласи x_0 нуқтанинг бирор U атрофида мавжуд бўлиб, x га нисбатан x_0 нуқтада узлуксиз бўлса (оператор қийматли функция сифатида), у ҳолда x_0 нуқтада $F'(x_0)$ кучли ҳосила мавжуд ва суст ҳосилага тенг.*

Исбот. F акс эттириш суст ҳосилага эга бўлгани сабабли

$$DF(x_0,\ h) = F_c'(x_0)h.$$

Умумиятни чегараламаган ҳолда

$$U = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

деб ҳисоблаш мумкин. Агар $\|h\| < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда, равшанки, ихтиёрий $t \in [0,\ 1]$ учун $x_0 + th \in U$. Шундай h ни олиб, қуйидаги ифодани кўрамиз:

$$\omega(x_0,\ h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - F_c'(x_0)h \tag{5}$$

Y фазога қўшма бўлган Y' фазодан бирор y' элемент олинса, у ҳолда (5) га асосан

$$\begin{aligned} < \omega(x_0, h),\ y' > = < F(x_0 + h) - F(x_0),\ y' > - \\ - < F_c'(x_0)h,\ y' > . \end{aligned} \tag{6}$$

t сон аргументли ушбу

$$f(t) = < F(x_0 + th), y' >$$

функция t га нисбатан дифференциалланувчи ва

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} < \frac{F(x_0+th+\Delta th) - F(x_0+th)}{\Delta t}, y' > =$$

$$= < F'_c(x_0 + th)h, y' >.$$

Демак, $f(t)$ сонли функцияга математик анализдан маълум бўлган чекли орттирмалар формуласини қўлласак,

$$< F(x_0 + h) - F(x_0), y' > = f(1) - f(0) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=\tau} \cdot 1 =$$

$$= < F'_c(x_0 + \tau h)h, y' >,$$

бу ерда $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Бунга асосан (6) формулани қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин:

$$< \omega(x_0, h), y' > = < [F'_c(x_0 + \tau h) - F'_c(x_0)]h, y' >. \qquad (7)$$

8.2-§ дан маълумки, ихтиёрий $y \in Y$ учун

$$\| y \| = \sup_{\| y' \| = 1} | < y, y' > |,$$

хусусан

$$\| \omega(x_0, h) \| = \sup_{\| y' \| = 1} | < \omega(x_0, h), y' > |.$$

Демак, шундай $y' \in Y$ $(\|y'\| = 1)$ мавжудки,

$$\frac{1}{2} \| \omega(x_0, h) \| \leqslant | < \omega(x_0, h), y' > |.$$

Бу тенгсизликдан ва (7) муносабатдан

$$|\omega(x_0, h)\| \leqslant 2 | < \omega(x_0, h), y' > | = 2 | < F'_c(x_0 + \tau h) -$$

$$- F'_c(x_0)]h, y' > | \leqslant 2 \|F'_c(x_0 + \tau h) - F'(x_0)\| \cdot \| h \|.$$

Теореманинг шартига кўра $F'_c(x)$ ҳосила x га нисбатан x_0 нуқтада узлуксиз, бундан

$$\lim_{h \to 0} \|F'_c(x_0 + \tau h) - F'_c(x_0)\| = 0.$$

Демак, $\omega(x_0, h) = o(h)$ ва

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'_c(x_0)h + o(h),$$

яъни

$$F'_c(x_0) = F'(x_0). *$$

Агар кўрилаётган нормаланган фазоларнинг иккинчиси, яъни Y сонлар майдони бўлса, у ҳолда $F:X\to Y$ функционал бўлиб, биз дифференциалланувчи функционал тушунчасига келамиз. Бунда F нинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $F'(x_0)$ — чизиқли функционалдир, яъни $F'(x_0)\in X'$.

Мисол. H ҳақиқий Гильберт фазосида $F(x)=\|x\|^2$ функционални оламиз ва унинг Фреше ҳосиласини топамиз. Равшанки,

$$\|x+h\|^2-\|x\|^2=2(x,h)+\|h\|^2=(2x,\ h)+o(h).$$

Демак,

$$F'(x)=F'_c(x)\ =2x,\ \text{яъни}\ F'_c(x)(h)=(2x,\ h).$$

Чекли орттирмалар формуласи

X вектор фазода ушбу

$$[x_1,\ x_2]=\{x:x=x_1+t(x_2-x_1),\ 0\leqslant t<1\}$$

тўплам *кесма* дейилади.

Бирор $[x_0,\ x]$ кесмани ўз ичига олувчи U очиқ тўпламда аниқланган ва $[x_0,\ x]$ кесманинг ҳар бир нуқтасида F'_c суст ҳосилага эга бўлган $F:U\to Y$ акс эттириш берилган бўлсин. Сўнг $\Delta x=x-x_0$ белгилаш киритиб, ихтиёрий $\varphi\in Y'$ учун қуйидаги сонли функцияни тузамиз:

$$f(t)=\varphi(F(x_0+t\Delta x)),\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Бу функция $[0,\ 1]$ оралиқда дифференциалланувчи. Дарҳақиқат, φ чизиқли бўлгани сабабли

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\varphi\left(\frac{F(x_0+t\Delta x+\Delta t\Delta x)-F(x_0+t\Delta x)}{\Delta t}\right).$$

Энди φ нинг узлуксизлигини ҳисобга олган ҳолда $\Delta t\to 0$ да лимитга ўтсак,

$$f'(t)=\varphi(F'_c(x_0+t\Delta x)\Delta x).$$

Энди f функцияга $[0,\ 1]$ оралиқда чекли орттирмалар формуласини қўлласак,

$$f(t)-f(0)=f'(\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

яъни

$$\varphi(F(x)-F(x_0))=\varphi(F'_c(x_0+\tau\Delta' x)\Delta x)\tag{8}$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда τ сон φ га боғлиқ.

Шундай қилиб, (8) тенглик ихтиёрий $\varphi \in Y'$ учун ўринли. Бундан

$$|\varphi(F(x) - F)x_0))| \leqslant \|\varphi\| \sup_{0\leqslant\tau\leqslant1} \|F_0'(x_0 + \tau\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\|. \qquad (9)$$

Хан — Банах теоремасига асосан қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи нолдан фарқли $\varphi_0 \in Y'$ функционал мавжуд:

$$|\varphi_0(F(x) - F(x_0))| = \|\varphi_0\| \, \|F(x) - F(x_0)\|.$$

Бу муносабатни (9) га қўлласак, ушбу

$$\|F(x) - F(x_0)\| = \frac{|\varphi_0(F(x) - F(x_0))|}{\|\varphi_0\|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant1} \|F_c'(x_0 + \tau\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\|$$

тенгсизлик, яъни

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant1} \|F_c'(x_0 + \tau\Delta x)\| \cdot \|x - x_0\| \qquad (10)$$

муносабат келиб чиқади. (10) муносабатга чекли орттирмалар формуласи деб қараш мумкин. Агар (10) формулада $F(x)$ акс эттириш ўрнига $F(x) - F_c'(x_0)\Delta x$ акс эттиришни олсак, қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз:

$$\|F(x) - F(x_0) - F_c'(x_0)\,\Delta x\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant1} \|F_c'(x_0 + \tau\Delta x) - F_c'(x_0)\| \, \|\Delta x\| \qquad (11)$$

Бу муносабат бизга кейинчалик керак бўлади.

13. 2- §. Вектор функциялардан олинган интеграл

Ҳақиқий сонлардан иборат бирор X тўпламда аниқланган ва қийматлари Y Банах фазосига тегишли бўлган $F: X \to Y$ акс эттириш *вектор функция* дейилади.

Агар F вектор функция бирор $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлса, у ҳолда F функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича олинган интеграли тушунчасини киритиш мумкин. Бу интеграл сонли функциядан олинган интегралга ўхшаш киритилади. $[a, b]$ оралиқни

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

нуқталар билан бўлиб, ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ оралиқдан бирор ξ сон танлаймиз ва ушбу

$$\sigma_F = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\,(t_{k+1} - t_k) \in Y$$

интеграл йиғиндини ҳосил қиламиз. Агар бу интеграл йиғиндиларнинг $\lambda = \max |(t_{k+1} - t_k)|$ нолга интилганда $[a, b]$ ни бўлишга ва ξ_k^k ларни танлашга боғлиқ бўлмаган лимити мавжуд бўлса, у *F функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги интеграли* дейилади ва $\int_a^b F(t)\,dt$ билан белгиланади, яъни

$$\int_a^b F(t)\,dt = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1}-t_k).$$

Бунда $F(t)$ функция $[a, b]$ оралиқда *интегралланувчи* дейилади. Равшанки, $\int_a^b F(t)\,dt$ интеграл Y фазонинг элементи. Кўриниб турибдики, бу таърифнинг сонли функциялардан олинган Риман интеграли таърифидан деярли фарқи йўқ. Хусусан, агар $F(t)$ узлуксиз вектор функция бўлса, у ҳолда $\int_a^b F(t)\,dt$ доим мавжуд. Бу тасдиқ худди сонли функцияларникига ўхшаш исботланади.

Бу интегралнинг хоссалари Риман интеграли хоссаларига ўхшаш. Интегралнинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

1-теорема. *Агар Z бирэр Банах фазоси, $T: Y \to Z$ узлуксиз чизиқли оператор бўлса, ҳамда $F: [a, b] \to Y$ вектор функция учун $\int_a^b F(t)\,dt$ мавжуд бўлса,* у ҳолда

$$\int_a^b T(F(t))\,dt = T\left(\int_a^b F(t)\,dt\right).$$

Исбот. T операторнинг чизиқли эканлигига асосан

$$\sigma_{TF} = \sum_{k=0}^{n-1} T(F(\xi_k))(t_{k+1}-t_k) =$$

$$= T\left(\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1}-t_k)\right) = T(\sigma_F).$$

Бу тенгликда $\lambda = \max_k |t_{k+1} - t_k| \to 0$ да лимитга ўтсак, T нинг узлуксизлиги туфайли $\lim_{\lambda \to 0} T(\sigma_F) = T\left(\int_a^b F(t)dt\right)$ мавжуд, ва демак, $\lim \sigma_{TF}$ ҳам мавжуд ва ушбу

$$\int_a^b T(F(t))dt = T\left(\int_a^b F(t)dt\right)$$

тенглик ўринли.*

2-теорема. *Агар $F(t)$ вектор функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\left\| \int_a^b F(t)\, dt \right\| \leqslant \int_a^b \left\| F(t) \right\| dt.$$

Исбот. $F(t)$ функция узлуксиз бўлгани сабабли $\|F(t)\|$ узлуксиз сонли функциядир, ва демак, теоремадаги иккала интеграл ҳам мавжуд. Шу билан бирга

$$\|\sigma_F\| = \left\|\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|F(\xi_k)\| \cdot (t_{k+1} - t_k) = \sigma_{\|F\|}.$$

Бу тенгсизликда $\lambda \to 0$ да лимитга ўтсак, талаб қилинган тенгсизлик ҳосил бўлади.*

Таъриф. X, Y нормаланган фазолар, $F: X \to Y$ бирор акс эттириш бўлсин. Агар X фазода ихтиёрий чегараланган M тўплам учун $F(M)$ тўплам Y фазода чегараланган бўлса, у ҳолда F акс эттириш *чегараланган* дейилади.

Чизиқли бўлмаган чегараланган акс эттириш узлуксиз бўлиши шарт эмас, буни сонли функциялар мисолида ҳам кўриш мумкин. Масалан, $sgn: R \to R$.

X фазони Y фазога акслантирувчи чегараланган акс эттиришлар тўпламини $A(X, Y)$ билан белгилаймиз. Акс эттиришларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амалларига нисбатан $A(X, Y)$ вектор фазодир. Бу фазода нолнинг атрофлари базиси сифатида ушбу

$$U_{n, \varepsilon} = \left\{F : \sup_{\|x\| < n} \|F(x)\| < \varepsilon\right\}$$

тўпламларни олиб, топология киритамиз. Равшанки, бу топология $A(X, Y)$ нинг $L(X, Y)$ қисм фазосида кўрилса, у операторнинг нормаси билан аниқланган топологияга тенг.

X фазодаги бирон $I=[x_0,\ x_0+\Delta x)$ кесмада аниқланган ва қийматлари $A\ (X,\ Y)$ фазода бўлган узлуксиз F акс эттириш берилган бўлсин. Яъни ҳар бир $x\in I$ нуқтага бирор $F_x=F(x): X\to Y$ акс эттириш мос қўйилиб, бу мослик x параметрга нисбатан узлуксиз бўлсин. Равшанки, $F(x_0+t\Delta x)\in A(X,\ Y)$ акс эттиришнинг $\Delta x\in X$ элементдаги $F\ (x_0+t\Delta x)\,\Delta x$ қиймати Y фазонинг элементидир, яъни t га нисбатан $F(x_0+t\Delta x)\Delta x$ функция қийматлари Y га тегишли вектор функциядир. Бундан фойдаланиб, $F(x)$ нинг кесма бўйича олинган интегралини қуйидаги формула билан аниқлаш мумкин:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F(x)dx=\int_0^1 F\ (x_0+t\Delta x)\Delta x\,dt. \qquad (1)$$

Бу интегралнинг мавжудлиги $F(x_0+t\Delta x)\Delta x$ вектор функциянинг узлуксизлигидан келиб чиқади, ва равшанки, бу интеграл Y фазонинг элементидир.

Энди акс эттиришни унинг ҳосиласи ёрдамида тиклаш масаласини кўрамиз.

3-теорема. (Ньютон-Лейбниц формуласи). *$F: X\to Y$ акс эттириш $[x_0,\ x_0+\Delta x]$ кесмада x га нисбатан узлуксиз кучли $F'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда қуйидаги формула ўринли:*

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx=F(x_0+\Delta x)-F(x_0). \qquad (2)$$

Исбот. Интегралнинг таърифига асосан

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}F'(x_0+t_k\Delta x)\,\Delta x\,(t_{k+1}-t_k)=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}F'(x_k)(\Delta x_k),$$

бу ерда $x_k=x_0+t_k\Delta x,\quad \Delta x=(t_{k+1}-t_k)\Delta x,$

$$\lambda=\max_k\,(t_{k+1}-t_k).$$

Шу билан бирга, равшанки,

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}[F(x_0+t_{k+1}\Delta x)-$$

$$-F(x_0+t_k\Delta x)]=\sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1})-F(x_k)].$$

Демак, 13.1-§ даги (11) тенгсизликка асосан

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1})-F(x_k)+F'(x_k\Delta x]\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\Delta x\|\sum_{k-0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1}\|F'(x_k+\tau\Delta x)-F'(x_k)\|. \qquad (3)$$

Теореманинг шартига кўра $F'(x)$ акс эттириш $[x_0, x_0+ + \Delta x]$ кесмада узлуксиз, ва демак, текис узлуксиз. Бундан $\lambda \to 0$ да (3) тенгсизликнинг ўнг томонидаги ифода нолга интилади, чунки

$$\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\sup_{0\leqslant r\leqslant 1}\|F'(x_k+\tau\Delta x)-F'(x_k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1}\|F'(x_k+\tau\Delta x_k)-F'(x_k)\| \to 0,\ \lambda\to 0.$$

Демак,

$$\lim\ \|F(x_0+\Delta x)-F(x_0)\sum_{k=0}^{n-1}F'(x_k)\Delta x_k\| =$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\|\sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1})-F(x_k)-F'(x_k)\Delta x_k]\| = 0,$$

ьни

$$(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}F'(x_k)\Delta x_k=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}F_{,}(x)dx._{*}$$

13.3-§. Юқори тартибли ҳосилалар

Нормаланган X фазони нормаланган Y фазога акслантирувчи $F: X \to Y$ акс эттириш ҳар бир $x \in X$ нуқтада $F'(x)$ кучли ҳосилага эга бўлсин. Маълумки, $F'(x)$ ҳар бир x учун X фазони Y фазога акслантирувчи чизиқли чегараланган оператордир, яъни $F'(x) \in L(X, Y)$. Демак, F' акс эттириш X фазонинг x элементига $L(X, Y)$ фазонинг бирор $F'(x)$ элементини мос қўяди. Натижада $F': X \to L(X, Y)$ акс эттириш ҳосил бўлади. Агар F' акс эттириш ҳам дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи F акс эттиришнинг *иккинчи ҳосиласи* дейилади ва F'' билан белгиланади. Бунда, равшанки, $F''(x)$ оператор $L(X, L(X, Y))$ фазонинг элементидир.

Иккинчи ҳосила тушунчасини бошқа йўл билан, бичизиқли акс эттиришлар (1. 6- §) орқали ҳам киритиш мумкин. Шу масалага тўхталиб ўтамиз.

Таъриф. X фазонинг тартиб билан олинган ҳар бир жуфт (x, x') элементига Y фазонинг бирон B (x, x') элементи мос қўйилган бўлиб, қуйидаги икки шарт бажарилса, $B(x, x')$ *бичизиқли акс эттириш* дейилади:

1) ихтиёрий x_1, x_2, $x'_1, x'_2 \in X$ ва α, β сонлар учун

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, x'_1) = \alpha B(x_1, x'_1) + \beta B(x_2, x'_1),$$

$$B(x_1, \alpha x'_1 + \beta x'_2) = \alpha B(x_1, x'_1) + \beta B(x_1, x'_2);$$

2) шундай M мусбат сон мавжудки, ихтиёрий x, $x \in X$ учун

$$\|B(x, x')\| \leqslant M\|x\|\cdot\|x'\|. \tag{1}$$

Демак, 1.6-§ дан маълум бўлган 1) шартдан ташқари $B(x, x')$ акс эттиришнинг ҳар бир аргументи бўйича чегараланган бўлиши талаб қилинади. Хусусан, (1) тенгсизликдан, равшанки, $B: X \times X \to Y$ акс эттириш иккала аргументга нисбатан биргаликда узлуксиз. $B(x,x')$ бичизиқли акс эттиришнинг нормаси қуйидагича киритилади:

$$\|B\| = \inf\,\{M: \|B(x, x')\| \leqslant M\|x\|\cdot\|x'\|\}.$$

Бичизиқли акс эттиришларнинг йиғиндиси ва сонга кўпайтмаси ҳам бичизиқли эканлиги бевосита кўриниб турибди. Демак, бичизиқли акс эттиришлар нормаланган вектор фазо ҳосил қилади. Бу фазо $B(X^2, Y)$ билан белгиланади. Равшанки, Y Банах фазоси бўлса, $B(X^2, Y)$ ҳам Банах фазосидир.

$L(X, L(X, Y))$ фазонинг ҳар бир А элементига ушбу

$$B(x, x') = (Ax)(x')$$

тенглик ёрдамида $B(X^2, Y)$ фазонинг бирор B элементини мос қўямиз. Равшанки, $A \to B$ акс эттириш чизиқлидир. Аксинча, $B(X^2, Y)$ фазонинг ҳар бир B элементи учун $B(x, x')$ акс эттириш x элемент тайинлаб олинганда x' га нисбатан чегараланган чизиқли оператордир: $(Ax)(x') = B(x, x')$. Демак, $A \to B$ мослик $L(X, L(X,Y))$ ва $B(X^2, Y)$ фазолар орасидаги чизиқли изоморфизмдир. Биз унинг изометрик изоморфизм эканлигини исботлаймиз. Ихтиёрий x, $x' \in X$ учун

$$\|B(x, x')\| = \|(Ax)(x')\| \leqslant \|Ax\|\,\|x'\| \leqslant \|A\|\|x\|\|x'\|,$$

демак, $\|B\| \leqslant \|A\|$. Шу билан бирга

$$\|Ax\| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|(Ax)\ (x')\| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|B\ (x, x')\| \leqslant \|B\| \cdot \|x\|,$$

яъни $\|A\| \leqslant \|B\|$. Бундан $\|A\| = \|B\|$.

Шундай қилиб, $B(X^2, Y)$ ва $L(X, L(X, Y))$ ўзаро изометрик изоморф нормаланган фазолардир. Демак, $F: X \to Y$ акс эттиришнинг иккинчи ҳосиласини $B(X^2, Y)$ фазонинг элементи деб ҳисоблаш мумкин.

Шунга ўхшаш, $F: X \to Y$ акс эттиришнинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли ҳосилалари тушунчасини киритиш мумкин. Бунда n- тартибли ҳосила $(n - 1)$- тартибли ҳосиланинг ҳосиласи деб олинади. Равшанки, n- ҳосила

$$L(X, L(X, \ldots, L(X, Y) \ldots)$$

фазонинг элементи бўлади. Бу ҳосилага n- чизиқли акс эттириш деб қаралса бўлади.

Таъриф. X фазонинг элементларидан тузилган тартиб билан ёзилган ҳар бир n элементли $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системага Y фазонинг $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ элементи мос қўйилиб, қуйидаги икки шарт бажарилса, N акс эттириш *n- чизиқли дейилади.*

1) $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ҳар бир аргументга нисбатан чизиқли;

2) шундай M мусбат сон мавжудки, ихтиёрий $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ учун

$$\|N(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\| \ldots \|x_n\|.$$

Шундай қилиб, F акс эттиришнинг n- ҳосиласини n- чизиқли акс эттиришлар $B(X^n, Y)$ фазосининг элементи деб олиш мумкин.

Мисол. $X = R^m$, $Y = R^n$ чекли ўлчамли Евклид фазолари учун ҳар бир чизиқли $T: X \to Y$ оператор $(n \times m)$ матрицадир. Демак, $F: X \to Y$ акс эттиришнинг $x \in X$ нуқтадаги $F'(x)$ ҳосиласи x га боғлиқ бўлган T матрицадир. Агар X ва Y фазоларда мос равишда

$$e_1, e_2, \ldots, e_m \text{ ва } f_1, f_2, \ldots, f_n$$

базислар бўлса, у ҳолда $x \in X$, $y \in Y$ учун

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_m e_m,$$
$$y = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \ldots + y_n f_n.$$

Демак, $y = F(x)$ акс эттиришни ушбу

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ y_2 &= F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда

$$F'(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

$F''(x)$ иккинчи ҳосила эса қуйидаги $n \times m \times m$ та сон билан аниқланади:

$$a_{k,\, i,\, j} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Бу сонлар ёрдамида ушбу

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,\, i,\, j} x_i$$

формула орқали $X \to L(X, Y)$ чизиқли акс эттиришни

$$y_k = \sum_{i,j=1}^{m} a_{k,\, i,\, j} x_i x_j$$

формула орқали эса $X \times X \to Y$ бичизиқли акс эттиришни аниқлаш мумкин.

13.1-§ да $F : X \to Y$ акс эттиришнинг x нуқтадаги кучли дифференциали деб $F'(x)$ чизиқли операторнинг $h \in X$ элементдаги $dF = F'(x)\, h$ қийматига айтган эдик. F акс эттиришнинг иккинчи тартибли дифференциали деб $F''(x) \in B(X^2, Y)$ бичизиқли акс эттиришнинг (h, h) элементдаги қийматига айтилади, яъни $d^2F = F''(x)(h, h)$. Шунга ўхшаш n-тартибли дифференциал деб ушбу

$$d^n F = F^{(n)}(x)\ (h, h, \ldots, h) \in Y$$

элементга айтамиз $(F^{(n)}(x) \in B(X^n, Y))$.

Энди 13.1-§ даги (1) тенгликни умумлаштирадиган Тейлор формуласини келтирамиз.

1-теорема. *X фазонинг U очиқ тўпламида аниқланган $F: U \to Y$ акс эттиришнинг n-тартибли $F^{(n)}(x)$ ҳосиласи ихтиёрий $x \in U$ учун мавжуд бўлсин. Агар $F^{(n)}(x)$ акс эттириш U тўпламда x га нисбатан текис узлуксиз бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли:*

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h + \frac{1}{2!}F''(x)(h, h) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h, h, \ldots, h) + \omega(x, h), \qquad (2)$$

бу ерда $\|\omega(x, h)\| = o(\|h\|^n)$.

Исбот. Теоремани индукция ёрдамида исботлаймиз $n = 1$ учун (2) тенглик 13.1-§ даги (1) муносабат билан устма-уст тушади. Энди $(n-1)$ учун (2) тенглик ўринли деб фараз қилайлик. У ҳолда (2) тенгликни F' акс эттиришга $(n-1)$ учун қўлласак, ушбу

$$F'(x+h) = F'(x) + F''(x)(h) + \frac{1}{2!}F'''(x)(h, h) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}F^{(n)}(x)(h, x, \ldots, h) + \omega_1(x, h) \qquad (3)$$

тенглик келиб чиқади, бу ерда $\|\omega_1(x, h)\| = o(\|h\|^{n-1})$. Ҳосил бўлган (3) муносабатни $[x, x+h]$ кесма бўйича интеграллаб, Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдалансак (13.2-§, 3-теорема), у ҳолда

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'(x+th)h\,dt = \int_0^1 \{F'(x) +$$

$$+ tF''(x)(h) + \frac{1}{2!}t^2 F'''(x)(h, h) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}F^{(n)}(x)(h, h, \ldots, h)\}h\,dt + R_n,$$

бу ерда $R_n = \int_0^1 \omega_1(x, th)h\,dt$. Бундан

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h + \frac{1}{2!}F''(x)(h, h) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h, h, \ldots, h) + R_n$$

Шу билан бирга

$$\|R_n\| \leqslant \int_0^1 \|\omega, (x, th)\| \cdot \|h\| dt = o(\|h\|^n).$$

Теоремадаги (2) тенглик *Тейлор формуласи* дейилад

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Суст ҳосилалар учун мураккаб функцияни ди ференциаллаш қоидаси ўринли эмаслигини кўрсатувч мисол келтиринг.

2. Гильберт фазосида $\|x\|$ функционалнинг ҳосил сини топинг.

3. Вектор функция суст дифференциалланувчи бўлс у кучли дифференциалланувчи бўлишини исботланг.

4. $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган F вектор фун ция учун $\int_a^b F(t)\,dt$ интеграл доим мавжудлигини исбо ланг.

5. $[a, b]$ оралиқдаги F вектор функция учун $\|F(t$ интегралланувчи бўлса, қуйидаги тенгсизликни исбо ланг:

$$\left\|\int_a^b F(t)\,dt\right\| \leqslant \int_a^b \|F(t)\|\,dt.$$

6. Чегараланган, аммо узлукли акс эттиришга мис келтиринг.

7. Агар Y Банах фазоси бўлса, $B(X^2, Y)$ фазо тў эканлигини исботланг.

XIV боб

ВАРИАЦИОН ҲИСОБ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

14.1- §. Экстремумнинг зарурий ва етарли шартлари

Вариацион ҳисобнинг асосий масаласи — функционалларнинг экстремумларини топишдир. Бу параграфда вариацион ҳисобнинг бошланғич масалаларига тўхталиб ўтамиз.

1. Экстремумнинг зарурий шартлари.

F ҳақиқий функционал X Банах фазосида аниқланган бўлсин. Агар $x_0 \in X$ нуқтанинг бирор атрофидаги ихтиёрий x учун $F(x) - F(x_0) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) тенгсизлик бажарилса, F функционал x_0 нуқтада минимумга (максимумга) эга дейилади, x_0 нуқта эса минимум (максимум) нуқтаси дейилади. Максимум ва минимум нуқталари F учун экстремум нуқталари дейилади.

Математик анализдан маълумки, n ўзгарувчили f функция $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтада экстремумга эга бўлиб, дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $df = 0$, яъни

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Экстремумнинг бу зарурий шарти ихтиёрий нормаланган фазолар учун ҳам ўринли.

1- теорема. *Дифференциалланувчи F функционал x_0 нуқтада экстремумга эга бўлиши учун унинг x_0 нуқтадаги дифференциали ҳар бир h да нолга тенг бўлиши зарур, яъни*

$$F'(x_0)h \equiv 0.$$

Исбот. F дифференциалланувчи бўлгани сабабли

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + o(h).$$

Агар $F'(x^0)h$ бирор $h \in X$ учун нолдан фарқли бўлса, етарли даражада кичик λ ҳақиқий сон учун $F'(x_0)(\lambda h) + o(\lambda h)$ ифоданинг ишораси $F'(x_0)(\lambda h)$ нинг ишораси билан бир хил. $F'(x_0)$ чизиқли функционал бўлгани сабабли $F'(x_0)(\lambda h) = \lambda F'(x_0)h$. Демак, агар $F'(x_0)h \neq 0$ бўлса, $F(x_0 + h) - F(x_0)$ айирма h етарли кичик бўлганда мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин, яъни x_0 нуқтада F экстремумга эга эмас.

Мисоллар. 1. $C[a,b]$ фазода ушбу

$$F(x)=\int_a^b f(t,x(t))\,dt$$

функционални кўрамиз. Агар f функция биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, F функционал $C[a,b]$ фазода дифференциалланувчи. Ҳақиқатан,

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^b [f(t,x+h)-f(t,x)]\,dt=$$

$$=\int_a^b f'_x(t,x)\,h(t)\,dt+o(h).$$

Бундан

$$dF=\int_a^b f'_x(t,x(t))\,h(t)\,dt.$$

Агар ихтиёрий $h\in C[a,b]$ учун $dF=0$ бўлса, у ҳолда $f'_x(t,x)=0$. Ҳақиқатан, ихтиёрий $x(t)\in C[a,b]$ учун $f'_x(t,x)$ функция t га нисбатан узлуксиз. Агар у бирор $t_0\in[a,b]$ учун нолдан фарқли бўлса, яъни масалан, $f'_x(t_0,x(t_0))>0$ бўлса, у ҳолда t_0 нинг бирор (α,β) атрофининг ҳар бир t нуқтасида ҳам $f(t,x(t))>0$.
Демак, ушбу

$$h(t)=\begin{cases}(t-\alpha)(\beta-t), & \alpha\leqslant t\leqslant\beta,\\ 0, & \text{қолган } t\in[a,b] \text{ учун}\end{cases}$$

функцияни олсак, у ҳолда

$$\int_a^b f'_x(t,x(t))\,h(t)\,dt>0.$$

Бу зиддият $f'_x(t,x)=0$ эканлигини кўрсатади. Демак, $f'_x(t,x(t))=0$ тенглама F функционал экстремумга эга бўлиши мумкин бўлган $x(t)$ эгри чизиқнинг тенгламасидир.

2. $C[a, b]$ фазода бошқа функционални оламиз :

$$F(x) = \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_1)\, x(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

бу ерда $K(\xi_1, \xi_2)$ функция $K(\xi_1, \xi_2) = K(\xi_2, \xi_1)$ шартни қаноатлантирувчи узлуксиз функция. Сўнгра

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, [(x(\xi_1) +$$

$$+ h(\xi_1))(x(\xi_2) + h(\xi_2)) - x(\xi_1)\, x(\xi_2)]\, d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, [x(\xi_1)\, h(\xi_2) + x(\xi_2)\, h(\xi_1)]\, d\xi_1\, d\xi_2 +$$

$$+ \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, h(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_2)\, h(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2 +$$

$$+ \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, h(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= 2 \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 +$$

$$+ \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, h(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

бундан $dF = 2 \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2.$

Демак, $x \in C[a, b]$ экстремум нуқтаси бўлса, у ҳолда ихтиёрий $h \in C\ [a, b]$ учун

$$\int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = 0.$$

Бундан 1- мисолдагидек, ихтиёрий $\xi_2 \in [,a\ b]$ учун

$$\int_a^b K(\xi_1\ \xi_2)\, x(\xi_1)\, d\xi_1 = 0$$

тенглик келиб чиқади.

x га нисбатан бу тенгламанинг ечимларидан бири $x=0$. Бошқа ечимлар бор-йўқлиги $K(\xi_1,\xi_2)$ функцияга боғлиқ ва у қўшимча текширишларни талаб қилади.

2. Экстремумнинг етарли шартлари. Яна n ўзгарувчили функцияларга қайтсак, $df=0$ шартни қаноатлантирувчи $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нуқтада экстремум мавжудлиги иккинчи дифференциалга боғлиқ. Аниқроғи, қуйидаги иборалар ўринли:

1. Агар $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нуқтада минимумга (максимумга) эга бўлса ва d^2f мавжуд бўлса, у ҳолда бу нуқтада

$$d^3f\geqslant 0 \quad (d^2f\leqslant 0).$$

2. Агар $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нуқтада ушбу $df=0$,

$$d^2f=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{dx_i\,dx_k}dx_i\,dx_k>0\,(<0)\quad(\exists^i\colon dx_i\neq 0)$$

муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция бу нуқтада минимумга (максимумга) эга.

Бошқача қилиб айтганда, $df=0$ шартни қаноатлантирувчи нуқтада минимум (максимум) бўлиши учун $d^2f\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ бўлиши зарурий шарт, $d^3f>0$ (<0) бўлиши эса етарли шарт.

Энди шу масалаларни ихтиёрий Банах фазосидаги функционаллар учун кўрамиз.

2- теорема. *X Банах фазосида аниқланган F ҳақиқий функционал $x_0\in X$ нуқтанинг бирон атрофида узлуксиз иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлсин. Агар шу функционал x_0 нуқтада минимумга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $h\in X$ учун*

$$F''(x_0)(h,h)\geqslant 0.$$

Исбот. 13.3- § даги Тейлор формуласига асосан

$$F(x_0+h)-F(x_0)=F'(x_0)h+\frac{1}{2!}F''(x_0)(h,h)+o(\|h\|^2)\cdot$$

Функционал x_0 нуқтада минимумга эга бўлгани сабабли 1- теоремага асосан $F'(x_0)h=0$.

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{1}{2}F''(x_0)(h,h)+o(\|h\|^2).\quad(1)$$

Агар бирор $h\in X$ учун $F''(x_0)(h,h)<0$ бўлса, у ҳолда $F''(x_0)(\varepsilon h,\varepsilon h)=\varepsilon^2F''(x_0)(h,h)$ тенгликка асосан $F''(x_0)$

$(h, h) < 0$ шартни қаноатлантирувчи h векторнинг нормасини ихтиёрий кичик қилиб танлаш мумкин. Аммо $\|h\|$ кичик бўлганда $\frac{1}{2} F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2)$ ифоданинг ишораси $F''(x_0)(h, h)$ нинг ишорасига тенг, яъни

$$F(x_0 + h) - F(x_0) < 0.$$

Бу эса x_0 нинг минимум нуқтаси эканлигига зид.

Максимум нуқтаси учун ҳам шунга ўхшаш теорема ўринли.

Экстремум мавжудлигининг етарли шартини Банах фазоларига тўғридан-тўғри ўтказиш мумкин эмас. Яъни агар $F''(x_0)(h, h) > 0$ $(h \neq \theta)$ бўлса, x_0 нуқтада минимум бўлиши шарт эмас.

Мисол. l_2 фазода функционални қуйидагича киритамиз:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4, \quad x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2.$$

θ нуқтада биринчи дифференциал нолга тенг, чунки

$$F(\theta + h) - F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^4$$

ва

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^4 \right|}{\|h\|} < \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|h\|^2 + \|h\|^4}{\|h\|} = 0.$$

Иккинчи дифференциал эса $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3}$ қаторга тенг, яъни ихтиёрий h учун мусбат.

Аммо θ нуқтада функционал минимумга эга эмас. Ҳақиқатан,

$$F(\theta) = 0, \quad F\left(0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right) = \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} < 0,$$

яъни нолнинг ихтиёрий атрофида шундай x нуқта мавжудки,

$$F(x) < F(\theta).$$

Келтирилган мисолдан равшанки, функционал бирор нуқтада экстремумга эга бўлиши учун кучлироқ шартлар керак.

Агар $B(x,y)$ бичизиқли функционал бўлса, $B(x,x)$ функционал x га нисбатан квадратик функционал дейилади. Агар шундай $c > 0$ сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $x \in X$ учун $B(x,x) \geqslant c\|x\|^2$ тенгсизлик бажарилса, $B(x,x)$ квадратик функционал кучли мусбат дейилади.

3- теорема. *X фазодаги F функционал x_0 нуқтада минимумга эга бўлиши учун қуйидаги шартлар кифоядир:*

1) $dF(x_0) = 0$;

2) $d^2F(x_0)$ — *кучли мусбат квадратик функционал.*

Исбот. Ҳақиқатан, $d^2F(x_0)(h,h) \geqslant c\|h\|^2$ ва $c > 0$ бўлсин. ε мусбат сонни шундай танлаймизки, $\|h\| < \varepsilon$ бўлганда (1) формуладаги $o(\|h\|^2)$ сон учун $o(\|h\|^2) < \frac{c}{4}\|h\|^2$ тенгсизлик бажарилсин. Бу ҳолда (1) формулага асосан $\|h\| < \varepsilon$ учун

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2}F''(x_0)(h,h) + o(\|h\|^2) >$$

$$> \frac{1}{2}c\|h\|^2 - \frac{1}{4}c\|h\|^2 = \frac{1}{4}c\|h\|^2 > 0,$$

яъни x_0 минимум нуқтаси.

14. 2- §. $\int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,dt$ кўринишдаги функционалларни экстеремумга текшириш

Математика ва механиканинг турли масалалари

$$F(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,dt \tag{1}$$

функционалнинг $C^1[a,b]$ Банах фазосида экстремумини ҳисоблашга келтирилади. Агар интеграл остидаги $f(t, x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ мавжуд ва узлуксиз деб ҳисобласак, $F(x(t))$ функционал Фреше маъносида дифференциалланувчи бўлади. Аввалги параграфдаги экстремумнинг зарурий шартига биноан $F(x(t))$ функционалнинг экстремуми (агар у мавжуд бўлса)

$$F'(x_0(t)) = 0 \tag{2}$$

тенгламани қаноатлантиради. Демак, функционалнинг экстремал қийматини берувчи $x_0(t)$ функцияни фақат (2) тенгламанинг ечимлари орасида излашимиз керак. Хусусан, агар (2) тенглама ечимга эга бўлмаса, экстремум мавжуд эмас.

$F(x(t))$ функционалнинг кучли дифференциалини ҳисоблаб, ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$F'(x(t))\,h(t) = \int_a^b [f_x h(t) + f_{x'} h'(t)]\,dt,$$

бу ерда $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ва $f_{x'} = \frac{\partial f}{\partial x'}$.

Демак, (2) га кўра ихтиёрий $h(t) \in C^1[a, b]$ учун

$$\int_a^b [f_x h(t) + f_{x'} h'(t)]\,dt = 0 \qquad (3)$$

муносабат бажарилиши зарур. Агар $\frac{d}{dt} f_{x'}$ мавжуд ва узлуксиз деб фараз қилсак (аслида бу талаб ортиқча эканлигини кейинроқ кўрсатамиз), бўлаклаб интеграллаш ёрдамида ушбу

$$\int_a^b f_{x'} h'(t)\,dt = f_{x'} h(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} f_{x'} \cdot h(t)\,dt$$

тенгликка эга бўламиз. Демак, (3) қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[f_x - \frac{d}{dt} f_{x'}\right] h(t)\,dt + f_{x'}(b, x(b), x'(b))\,h(b) - \\ - f_{x'}(a, x(a), x'(a))\,h(a) = 0.\end{aligned}$$

Бу ерда $h(t) \in C^1[a, b]$ ихтиёрий бўлгани учун:

$$f_{x'}(a, x(a), x'(a)) = 0; \quad f_{x'}(b, x(b), x'(b)) = 0, \qquad (4)$$

$$\int_a^b [f_x - \frac{d}{dt} f_{x'}]\, h(t)\,dt = 0 \qquad (5)$$

шартларни ҳосил қиламиз.

Лемма (*Лагранж леммаси*). Агар $\varphi(t)$ узлуксиз функция бўлиб, ихтиёрий $h(t) \in C^1[a, b)$ функция учун

$$\int_a^b \varphi(t)\,h(t)\,dt = 0$$

тенглик бажарилса, $\varphi(t) \equiv 0$ бўлади.

Лемманинг исботи содда бўлгани учун буни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

Демак, леммага кўра (5) шартни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0. \tag{6}$$

Шундай қилиб, $x(t)$ функция (1) функционалнинг экстремумини бериши учун (4) ва (6) шартлар бажарилиши зарур. Равшанки, (6) шарт $x(t)$ га нисбатан иккинчи тартибли дифференциал тенглама. Одатда (6) тенглама *Эйлер тенгламаси* дейилади, тенгламанинг ҳар қандай ечими F функционалнинг экстремали дейилади.

Мисол.

$$F(x(t)) = \int_0^1 \{x^2(t) - 2tx(t) + [x'(t)]^2 - 2x'(t) + t\} dt$$

функционални экстремумга текширайлик. Бу ерда $f(t, x(t), x'(t)) = x^2(t) - 2tx(t) + [x'(t)]^2 - 2x'(t) + t$. Эйлер тенгламаси (6) қуйидаги кўринишга эга:

$$2x(t) - 2t - \frac{d}{dt}[2x'(t) - 2] = 0,$$

яъни $x''(t) - x(t) + t = 0$.

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$x(t) = t + c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Ўзгармас c_1 ва c_2 ларни топиш учун (4) шартлардан фойдаланамиз:

$$f_{x'} = 2x'(t) - 2,$$

яъни

$$2 \cdot x'(0) - 2 = 2x'(1) - 2 = 0,$$

демак

$$x'(0) = x'(1) = 0; \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Шундай қилиб, $F(x(t))$ функционал фақат $x(t) = t$ функциядангина экстремумга эришиши мумкин. Топилган ечим ҳақиқатан ҳам $F(x(t))$ функционалнинг минимумини бериши ушбу тенгсизликдан келиб чиқади:

$$F(x(t)) = \int_0^1 \{[x(t) - t]^2 + [x'(t) - 1]^2 + t - t^2 - 1\} dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 (t - t^2 - 1) dt = F(t); \quad \forall x(t) \in C^1 [0, 1].$$

Юқорида биз (1) функционални $C^1[a, b]$ фазода ҳеч қандай қўшимча шартлар қўймаган ҳолда экстремумини топиш масаласини кўрдик. Лекин кўпгина амалий масалалар экстремумни бутун $C^1[a, b]$ фазода эмас, балки баъзи қўшимча шартларни қаноатлантирувчи тўплам остида излашни тақозо қилади. Масалан, (1) функционалнинг экстремумини

$$M = \{x(t) \in C^1[a, b]: x(a) = A;\ x(b) = B\}$$

функциялар синфида топиш масаласи вариацион ҳисобнинг асосий масаласи дейилади. Бу ҳолда $h(t)$ орттирмани шундай танлашимиз керакки, натижада $x(t) \in M$ бўлса, $x(t) + h(t) \in M$ бажарилиши зарур. Демак, $h(a) = h(b) = 0$. Бу тенгликни ҳисобга олсак (3) дан

$$F'(x(t))\,h(t) = \int_a^b [f_x - \frac{d}{dt} f_{x'}]\,h(t)\,dt$$

ни ҳосил қиламиз. Яъни асосий масала учун экстремумнинг зарурий шарти (Эйлер тенгламаси) қуйидагидан иборат:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0;\quad x(a)\,A;\quad x(b) = B. \tag{7}$$

Мисол. Текисликда (a, A) ва (b, B) нуқталарни бирлаштирувчи ва узунлиги энг қисқа бўлган силлиқ чизиқни топинг. Равшанки, аналитик формада масала қуйидагича ёзилади:

$x(a) = A,\ x(b) = B,\quad x(t) \in C^1[a, b]$ функциялар ичида $\int_a^b \sqrt{1 + [x'(t)]^2}\,dt$ интегралнинг энг кичик қийматини берувчи функцияни топинг. Бу ерда $f(t, x(t), x'(t)) = \sqrt{1 + [x'(t)]^2}$. Демак, (7) га кўра:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}}\right) = 0;\quad x(a) = A,\quad x(b) = B,$$

яъни

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}} = c$$

$$x'(t) = c_1\quad \left(c_1 = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}\right).$$

Демак, $x(t) = c_1 t + c_2$. Ўзгармас c_1 ва c_2 ларни $x(a) = A$ ва $x(b) = B$ шартлардан топамиз. *Жавоб*:

$$x(t) = \frac{A-B}{a-b}t + \frac{aB-bA}{a-b}.$$

Юқорида Эйлер тенгламасини келтириб чиқаришда биз $\frac{d}{dt}f_{x'}$ ни мавжуд ва узлуксиз деб ҳисоблаган эдик. Равшанки, $\frac{d}{dt}f_{x'}$ мавжуд бўлиши учун $x''(t)$ мавжуд бўлиши зарур, яъни изланаётган ечим $x(t) \in C^2[a, b]$ бўлиши керак. Ҳақиқатан, агар $f(t, x, y)$ функция t, x, y лар бўйича етарлича силлиқ бўлса (масалан $f \in C^2$), ечим, $x(t) \in C^2[a, b]$ эканлигини исботлайлик.

Лемма (Дюбуа-Реймон леммаси.) Агар $\varphi(t)$, $\psi(t) \in C[a, b]$ бўлса ва $x(a) = x(b) = 0$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x(t) \in C[a, b]$ функция учун

$$\int_a^b [\varphi(t)x'(t) + \psi(t)x(t)]\,dt = 0 \tag{8}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $\varphi(t) \in C^1[a, b]$ ва $\varphi'(t) = \psi(t)$ бўлади.

Исбот. (8) тенгликнинг чап томонидаги интеграл остидаги иккинчи қўшилувчини бўлаклаб интегралласак:

$$\int_a^b [\varphi(t) - \int_a^t \psi(s)\,ds]\,x'(t)\,dt + x(t)\int_a^t \psi(s)\,ds \,\Big|_a^b =$$

$$= \int_a^b [\varphi(t) - \int_{-a}^t \psi(s)\,ds]\,x'(t)\,dt = 0.$$

Энди $g(t) = \varphi(t) - \int_{-a}^t \psi(s)\,ds$ белгилаш киритиб, $g(t) = \mathrm{const}$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, акс ҳолда шундай $\alpha, \beta \in [a, b[$ топиладики, у ҳолда $g(\alpha) \neq g(\beta)$. Аниқлик учун $g(\alpha) > g(\beta)$ бўлсин. Шартга кўра, $g(t)$ узлуксиз функция бўлгани учун α ва β ни $[a, b]$ сегментнинг ички нуқталари деб ҳисоблашимиз мумкин. Сўнгра $\delta > 0$ сонни шундай танлаб олайликки, натижада

$$[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset [a, b]; \quad [\beta, -\delta, \beta + \delta] \subset [a, b];$$

ва ихтиёрий $|s| \leqslant \delta$ учун

$$g(s + \alpha) - g(s + \beta) \geqslant \varepsilon > 0$$

шартлар бажарилсин.

Энди $x_0(t)$ функцияни қуйидагича оламиз:

$$x_0'(t)=\begin{cases} -(t-\alpha+\delta)(t-\alpha-\delta), & \text{агар } t\in[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]\\ (t-\beta+\delta)(t-\beta-\delta), & \text{агар } t\in[\beta-\delta,\ \beta+\delta]\\ 0, \ t \text{ нинг бошқа қийматларида,} & \end{cases} \qquad (10)$$

ҳамда $x_0(t)$ функция ($x_0(a)=0$ шартни қаноатлантирсин. Тузилишига кўра $x_0(t)\in C^1[a,b]$ ва

$$x_0(b)=\int_a^b x_0'(t)\,dt=0,$$

демак, $x_0(t)$ функция лемманинг шартларини қаноатлантиради. Лекин,

$$\int_a^b g(t)\,x_0'(t)\,dt=\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} g(t)x_0'(t)dt+\int_{\beta-\delta}^{\beta+\delta} g(t)x_0'(t)dt=$$

$$=\int_{-\delta}^{\delta}[g(\alpha+s)-g(\beta+s)](\delta-s)(\delta+s)\,ds\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}(\delta-s)(\delta+s)\,ds>0.$$

Охирги муносабат эса (9) га зид. Демак, $g(t)\neq\text{const}$ зиддиятга олиб келади. Шундай қилиб:

$$g(t)=\varphi(t)-\int_a^t\psi(s)\,ds=\text{const},$$

яъни

$$\varphi(t)=\int_a^t\psi(s)\,ds+\text{const}\in C^1[a,b],$$

ва $\varphi'(t)=\psi(t)$. Лемма исботланди.*

1-**теорема**. (Гильберт теоремаси). Агар $x_0(t)$ функция Эйлер тенгламаси (7) нинг ечими бўлиб, $x_0(t)$ бўйлаб

$$\frac{\partial^2 f(t,x,y)}{\partial y^2}\neq0;\quad x=x_0(t);\quad y=x_0'(t);\quad \forall t\in[a,b]$$

шарт бажарилса, $x_0(t)$ функция $C^2[a,b]$ га тегишли бўлади.

Исбот. Ошкормас функцияни дифференциаллаш ҳақидаги теоремага кўра:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = f_x - \frac{\partial^2 f(t,x,x')}{\partial x'^2}\cdot x'' - \frac{\partial^2 f(t,x.x')}{\partial x\,\partial x'} x' - \\ - \frac{\partial^2 f(t,x,x')}{\partial t\,\partial x} = 0,$$

яъни

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\cdot x'' + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x'}\cdot x' + \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \qquad (11)$$

Бу ерда $\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \neq 0$ ва $f(t, x, y)$ функция C^2 синфга тегишли бўлгани учун (11) тенгламанинг ечими $x_0(t) \in C^2[a, b]$ бўлади.

Асосий масала учун экстремумнинг қўшимча зарурий шартларидан яна бири қуйидаги теоремада келтирилган.

2- теорема. (Лежандр теоремаси). Эйлер тенгламаси (7) нинг ечими $x_0(t)$ функция (1) функционалнинг минимумини бериши учун ихтиёрий $t \in [a, b]$ да

$$f_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) \geqslant 0 \qquad (12)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарурий шарт.

Исбот. (1) функционалнинг Фреше маъносидаги иккинчи тартибли дифференциалини ҳисоблаб ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$d^2 F = \frac{1}{2}\int_a^b [f_{xx} h^2(t) + 2f_{xx'}\cdot h(t)h'(t) + f_{x'x'}(h'(t))^2]\,dt.$$

Ўртадаги қўшилувчини $h(a) = h(b) = 0$ эканлигини ҳисобга олган ҳолда бўлаклаб интеграллacак:

$$2\int_a^b f_{xx'} h(t)h'(t)\,dt = \int_a^b f_{xx'}\,dh^3(t) = -\int_a^b h^2(t)\cdot \frac{d}{dt} f_{xx'}\,dt.$$

Демак;

$$d^2 F = \int_a^b [P(t)h^2(t) + \frac{1}{2} f_{x'x'}(h'(t))^2]\,dt,$$

бу ерда $P(t) = \frac{1}{2}\left(f_{xx} - \frac{d}{dt} f_{xx'}\right)$.

Энди $x_0(t)$ — Эйлер тенгламасининг ечими бўлиб, (12) шарт бажарилмаган деб фараз қилайлик. Демак, бирор

$t_0 \in [a, b]$ учун $f_{x'x'}(t_0, x_0(t_0), x'(t_0)) < 0$ бўлсин. У ҳолда t_0 нинг етарли кичик атрофи U да ҳам $f_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) < 0$ бўлади. Танлаб олинган U атрофнинг ташқарисида нолга тенг бўлган $h_0(t) \in C'[a, b]$ функцияни шундай олайликки, бунда

$$\int_a^b [P(t) h_0^2(t) + \frac{1}{2} f_{x'x'} (h_0'(t))^2]\, dt < 0$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда $h_n(t) = \frac{1}{n} \cdot h_0(t)$, $n = 2, 3, \ldots$. орттирма учун Тейлор формуласига кўра:

$$F(x_0(t) + h_n(t)) - F(x_0(t)) = F'(x_0(t)) h_n(t) + \\ + \frac{1}{2!} F''(x_0(t)) (h_n(t), h_n(t) + R$$

бу ерда $\|R_2\| = 0(\|h_n\|^2)$. Иккинчи томондан $\|h_n(t)\| = \frac{1}{n} \|h_0(t)\| \to 0$ ва $x_0(t)$ — Эйлер тенгламасининг ечими бўлгани учун $F'(x_0(t)) h_n(t) = 0$. Демак, етарли катта n натурал сон учун

$$F(x_0(t) + h_n(t)) - F(x_0(t) = \frac{1}{2!} d^2 F + R_2 < 0,$$

яъни $x_0(t)$ функция $F(x(t))$ функционалнинг минимум нуқтаси бўла олмайди.

Юқоридаги (12) тенгсизлик *Лежандр—Клебш шарти* дейилади. Равшанки, максимум нуқтаси учун Лежандр—Клебш шарти қуйидагича ёзилади:

$$f_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Адабиётларда (1) функционалдаги интеграл остидаги $f(t, x(t), x'(t))$ функция лагранжиан дейилади. Лагранжианнинг баъзи хусусий ҳоллари учун Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли осонликча топилади. Мисол тариқасида қуйидаги икки ҳолни кўрайлик.

1) Лагранжиан фақат t ва $x'(t)$ га боғлиқ, яъни $f(t, x'(t))$ кўринишда бўлсин. У ҳолда Эйлер тенгламасига кўра:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0,$$

яъни биринчи тартибли

$$f_{x'} = \text{const} \qquad (13)$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Механикада $f_{x'}$ *импульс интеграли* дейилади ва $p(t)$ орқали белгиланади.

2) Лагранжиан фақат $x(t)$ ва $x'(t)$ га боғлиқ, яъни $f(x(t), x'(t))$ кўринишда бўлсин. У ҳолда Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли қуйидагича ёзилади:

$$x' \cdot f_{x'} - f = \text{const}.$$

Ҳақиқатан, $H(t) = x' \cdot f_{x'} - f$ белгилаш киритиб $\frac{dH}{dt}$ ҳосилани ҳисоблайлик. Мураккаб функцияни дифференциаллаш формуласига кўра:

$$\frac{dH}{dt} = x'' \cdot f_{x'} + x' \frac{d}{dt} f_{x'} - f_x \cdot x' - f_{x'} \cdot x'' = \left(\frac{d}{dt} f_{x'} - f_x\right) \cdot x'.$$

Эйлер тенгламасига биноан $f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0$. Демак,

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

яъни

$$H(t) = x' \cdot f_{x'} - f = \text{const}. \qquad (14)$$

Механикада $H(t)$ функция *энергия интеграли* дейилади.

14.3- §. Изопериметрик масала. Шартли экстремум

$C^1[a, b]$ фазода $F_0(x(t)) = \int_a^b f_0(t, x(t),(x'(t))\,dt$ функционалнинг

$$F_i(x(t)) = \int_a^b f_i(t, x(t), x'(t))\,dt = \alpha_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

ва $x(a) = A$; $x(b) = B$

шартларни қаноатлантирувчи функциялар синфида экстремумини топиш масаласи *изопериметрик масала* дейилади. Одатда изопериметрик масала қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$F_0(x(t)) = \int_a^b f_0(t, x(t), x'(t))\,dt \to \text{extr}$$

$$F_i(x(t)) = \int_a^b f_i(t, x(t), x'(t))\,dt = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad (1)$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B \qquad (2)$$

Интеграллар остидаги $f_0(t, x, y)$, $f_1(t, x, y), \ldots,$ $f_m(t, x, y)$ функцияларни t, x, y аргументлар бўйича биргаликда етарлича силлиқ (масалан, C^1 синфга тегишли) деб ҳисоблаймиз.

Равшанки, $C^1[a, b]$ фазода (1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи бирорта ҳам функция топилмаса, изопериметрик масала маънога эга эмас (хусусан, ечими мавжуд эмас). Агар (1) ва (2) шартларни фақат биргина $x_0(t) \in C^1$ $[a, b]$ функция қаноатлантирса, шу $x_0(t)$ функция изопериметрик масаланинг ечими бўлади. Тегишли мисолларни келтирайлик.

$$1. \begin{cases} \int\limits_0^1 f_0(t, x(t), x'(t))\,dt \to \text{extr} \\ \int\limits_0^1 \sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt = 2;\ x(0) = 0,\ x(1) = 2 \end{cases}$$

масала f_0 функция қандай бўлишидан қатъи назар ечимга эга эмас. Ҳақиқатан, $x(0) = 0$; $x(1) = 2$ ва $x(t) \in C^1[0,1]$ бўлгани учун $x(t)$ функциянинг графиги (0,0) ва (1,2) нуқталарни бирлаштирувчи ёйдан иборат. Демак, ёй узунлиги

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt \geqslant \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} > 2,$$

яъни

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt = 2;\ x(0) = 0$$

ва

$$x(1) = 2$$

шартларни қаноатлантирувчи функция мавжуд эмас.

$$2. \begin{cases} \int\limits_0^1 f_0(t, x(t), x'(t))\,dt \to \text{extr} \\ \int\limits_0^1 \sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt = \sqrt{5};\ x(0) = 0,\ x(1) = 2 \end{cases}$$

масаланинг ечими $x_0(t) = 2t$ бўлиб, f_0 функциянинг кўринишига боғлиқ эмас. Чунки, $C^1[0, 1]$ фазода

$$\int_0^1 \sqrt{1 + [x'(t)]^2}\, dt = \sqrt{5}; \quad x(0) = 0; \; x(1) = 2$$

шартларни фақатгина битта $x_0(t) = 2t$ функция қаноатлантиради.

Юқоридаги (1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи функциялар чексиз кўп бўлган ҳоли изопериметрик масаланинг қўйилиши учун характерли ҳол бўлиб, мазмунли назарияга олиб келади.

Энди изопериметрик масала учун экстремумнинг зарурий шартини ҳосил қилиш билан шуғулланамиз. Соддалик учун $m = 1$ ҳол билан чекланамиз. Бу ҳолда масаланинг қўйилиши қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} F_0(x(t)) = \int_a^b f_0(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{extr} & (3) \\ F_1(x(t)) = \int_a^b f_1(t, x(t), x'(t))\, dt = \alpha_1 & (4) \\ x(a) = A, \quad x(b) = B. & (5) \end{cases}$$

1-теорема. (Экстремумнинг зарурий шарти). Бирор $x_0(t)$ функция (3) — (5) масаланинг $C^1[a, b]$ фазодаги ечими бўлиши учун шундай λ_0 ва λ_1 сонларнинг топилиши зарурки:

1) λ_0 ва λ_1 ларнинг камида биттаси нолдан фарқли;

2) $\lambda_0 f_0(t, x_0(t), x'_0(t)) + \lambda_1 f_1(t, x_0(t), x'_0(t)) = L(t, x_0(t), x'_0(t))$ функция $L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$ Эйлер тенгламасини қаноатлантиради.

Исбот. $F_0(x(t))$ ва $F_1(x(t))$ функционалларнинг $x_0(t)$ нуқтадаги биринчи тартибли кучли дифференциалини ҳисоблайлик:

$$dF_0(x_0(t)) = \int_a^b [f_{0x}(t, x_0(t), x'_0(t) h(t) +$$

$$+ f_{0x'}(t, x_0(t), x'_0(t)) h'(t)]\, dt, \quad dF_1(x_0(t)) =$$

$$= \int_a^b [f_{1x}(t, x_0(t), x'_0(t)) h(t) +$$

$$+ f_{1x'}(t, x_0(t), x'_0(t)) h'(t)]\, dt,$$

бу ерда $h(t)$ орттирма $C^1[a, b]$ синфга тегишли ва $h(a) = h(b) = 0$ шартни қаноатлантирувчи функция.

Қуйидаги икки ҳолни кўрайлик:

1) Барча $h(t) \in C[a, b]$ ва $h(a) = h(b) = 0$ бўлган функциялар учун $dF_1(x_0(t)) \equiv 0$ бўлсин. У ҳолда $\lambda_0 = 0$ ва $\lambda_1 = 1$ деб олсак, теоремада келтирилган 1) ва 2) шартлар бажарилади. Демак, бу ҳолда теорема исбот қилинди.

2) Биронта $h_0(t) \in C[a, b]$ ва $h_0(a) = h_0(b) = 0$ функция учун $dF_1(x_0(t)) \neq 0$ бўлсин. Иккита ёрдамчи функция киритамиз:

$$\varphi_0(\alpha, \beta) = F_0(x_0(t) + \alpha h(t)) + \beta h_0(t),$$
$$\varphi_1(\alpha, \beta) = F_1(x_0(t) + \alpha h(t)) + \beta h_0(t),$$

сўнгра ушбу акслантиришни кўрамиз:

$$(\alpha, \beta) \to (\varphi_0(\alpha, \beta),\ \varphi_1(\alpha, \beta)). \qquad (6)$$

Равшанки, (6) акслантириш (0,0) нуқтанинг атрофида узлуксиз дифференциалланувчи ва қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади.

$$\frac{\partial \varphi_0(0,0)}{\partial \alpha} = F_0'(x_0(t))\, h(t), \quad \frac{\partial \varphi_0(0,0)}{\partial \beta} = F_0'(x_0(t))\, h_0(t),$$
$$\frac{\partial \varphi_1(0,0)}{\partial \alpha} = F_1'(x_0(t))\, h(t); \quad \frac{\partial \varphi_1(0,0)}{\partial \beta} = F_1'(x_0(t))\, h_0(t).$$

Энди ихтиёрий $h(t) \in C^1[a, b]$ ва $h(a) = h(b) = 0$ функция учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_0(0,0)}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \varphi_0(0,0)}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial \varphi_1(0,0)}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial \varphi_1(0,0)}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0$$

эканлигини исботлайлик. Ҳақиқатан, агар $\Delta \neq 0$ бўлса, тескари акслантириш ҳақидаги теоремага кўра (0,0) нуқтанинг етарли кичик атрофида (6) акслантиришнинг тескариси мавжуд. Хусусан, етарли кичик $\varepsilon > 0$ учун шундай $\bar{\alpha}$ ва $\bar{\beta}$ топиладики:

$$\varphi_0(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = F_0(x_0(t)) + \bar{\alpha} h(t) + \bar{\beta} h_0(t) = F_0(x_0(t)) - \varepsilon,$$
$$\varphi_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \varphi_1(0,0) = F_1(x_0(t)) = \alpha_1,$$

яъни $x_0(t)$ функция $F_0(x(t))$ функционал учун (4) ва (5) шартлар бажарилганда минимум нуқтаси бўлиши мумкин эмас. Худди шундай, агар $\varepsilon < 0$ деб танлаб олсак, $x_0(t)$ максимум нуқтаси ҳам бўла олмаслиги келиб чиқади.

Демак, $x_0(t)$ экстремум нуқтаси бўлса, албатта $\Delta = 0$ бўлади, яъни:

$$\begin{vmatrix} F_0'(x_0(t))\,h(t) & F_0'(x_0(t))\,h_0(t) \\ F_1'(x_0(t))\,h(t) & F_1'(x_0(t))\,h_0(t) \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Агар $F_1'(x_0(t))\,h_0(t) \neq 0$ эканлигини ҳисобга олсак, (7) дан

$$F_0'(x_0(t))\,h(t) - \frac{F_0'(x_0(t))\,h_0(t)}{F_1'(x_0(t))\,h_0(t)}\cdot F_1'(x_0(t))\,h(t) = 0$$

келиб чиқади. Демак, $\lambda_0 = 1$ ва $\lambda_1 = -\dfrac{F_0'(x_0(t))\,h_0(t)}{F_1'(x_0(t))\,h_0(t)}$ деб олсак:

$$\lambda_0 F_0'(x_0(t))\,h(t) + \lambda_1 F_1' x_0(t))\,h(t) = 0 \qquad (8)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (8) тенглик ихтиёрий $h(t) \in C^1[a, b]$ ва $h(a) = h(b) = 0$ функция учун бажарилишидан

$$\lambda_0 f_0(t, x_0(t), x_0'(t)) + \lambda_1 f_1(t, x_0(t), x_0'(t))$$

функция Эйлер тенгламасини қаноатлантириши келиб чиқади. Демак, теоремадаги 1) ва 2) шартлар бажарилган.*

14. 4- §. Экстремумни топишга доир мисоллар

1. *Дидона масаласи.* Қадимги грек афсоналаридан бирига кўра финикия маликаси Дидона ўз қўшинлари билан кемада душмандан қочиб келаётиб Ўртаер денгизининг ғарбий қирғоғида тўхтайди. Малика қирғоқда шаҳар қуриш ниятида маҳаллий аҳолидан ер беришни сўрайди. Маҳаллий аҳоли Дидонага фақат битта буқа териси билан чегаралай оладиган ер беришга рози бўлади. Айёр Дидона эса буқа терисидан ингичка тасмалар қирқиб, улардан узун арқон ясайди ва бу арқон билан қирғоқда жуда катта территорияни чегаралаб олиб, Карфаген шаҳрига асос солади.

Математик тилга кўчирсак, Дидона масаласи қуйидагича баён қилинади. Текисликда (—1,0) ва (1,0) нуқталарни бирлаштирувчи ҳамда узунлиги π га тенг бўлган барча силлиқ чизиқлар ичида шу чизиқ ва абсцисса ўқи билан чегараланган фигура юзасининг энг катта қийматини берувчи чизиқни топинг.

Ечими. Математик анализ курсидан маълумки, агар изланаётган чизиқнинг тенгламаси $x(t)$ бўлса, юза $s = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt$ ва узунлик $l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [x'(t)]^2}\,dt$ формулалар ёрдамида ҳисобланади. Демак, биз қуйидаги вариацион масалани ечишимиз керак:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} x(t)\,dt \longrightarrow \max \\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [x'(t)]^2}\,dt = \pi, \\ x(-1) = 0,\ x(1) = 0,\ x(t) \in C^1\,[a, b]. \end{cases}$$

Бирор $x_0(t) \in C'[a, b]$ функция масаланинг ечими деб фараз қилайлик. У ҳолда:

$$dF_0(x_0(t)) = \int_{-1}^{1} x_0(t)\,h(t)\,dt \not\equiv 0,$$

чунки $x_0(t) \not\equiv 0$. Демак, 14. 3- § даги теоремага кўра $\lambda_0 = 1$ деб олишимиз мумкин ва $x_0(t) + \lambda_1 \cdot \sqrt{1 + [x'(t)]^2}$ функция Эйлер тенгламасини қаноатлантириши керак. 14. 2- § даги (14) формулага асосан Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли мавжуд:

$$\lambda_1 \frac{[x_0'(t)]^2}{\sqrt{1+[x_0'(t)]}} - x_0(t) - \lambda_1 \cdot \sqrt{1 + [x_0'(t)]^2} = c \text{ (const)}.$$

Шу дифференциал тенгламани $x_0(t)$ га нисбатан ечамиз:

$$\lambda_1 [x_0'(t)]^2 - x_0(t) \sqrt{1 + [x_0'(t)]^2} - \lambda_1 - \lambda_1 [x_0'(t)]^2 =$$

$$= c\sqrt{1+[x_0'(t)]^2}\ \sqrt{1 + [x_0'(t)]^2} \cdot (c + x_0(t)) = -\lambda_1,$$

бу ердан $c + x_0(t) = y(t)$ деб белгиласак:

$$y' = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1^2 - y^2}{y^2}}$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Ўзгарувчиларни ажратиб:

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{\lambda_1^2 - y^2}} = \pm t + c_1$$

ёки

$$\lambda_1^2 - y^2 = (c_1 \pm t)^2$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$y(t) = \pm\sqrt{\lambda_1^2 - (c_1 \pm t)^2},$$

яъни

$$x_0(t) = \pm\sqrt{\lambda_1^2 - (c_1 \pm t)^2} - c.$$

Ўзгармас c_1 ва c ларни $x_0(-1) = x_0(1) = 0$ шартдан топамиз:

$$c_1 = 0;\ c = \pm\sqrt{\lambda_1^2 - 1}.$$

Демак,

$$x_0(t) = \pm\sqrt{\lambda_1^2 - t^2} \mp \sqrt{\lambda_1^2 - 1}.$$

Агар, $x_0(t) \geqslant 0$ эканлигини ҳисобга олсак:

$$x_0(t) = \sqrt{\lambda_1^2 - t^2} - \sqrt{\lambda_1^2 - 1}.$$

Энди

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [x_0'(t)]^2}\, dt = \pi$$

шартдан номаълум λ_1 ни ҳисоблаймиз:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - t^2}}\, dt = \pi$$

ёки

$$2 \arcsin|\lambda_1| = \pi,$$

бу ердан

$$\arcsin|\lambda_1| = \frac{\pi}{2}$$

ёки

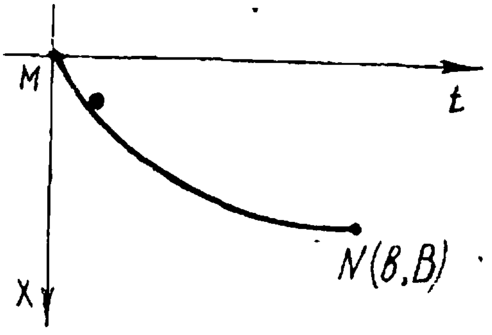
$$|\lambda_1| = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Демак, $\lambda_1^2 = 1$ ва

$$x_0(t) = \sqrt{1 - t^2},$$

яъни Дидона масаласининг ечими ярим доира бўлади.

2. *Брахистохрона ҳақида масала* (И. Бернулли масаласи).



3- расм

Вертикал жойлашган текисликда берилган M ва N нуқталарни бирлаштирувчи барча силлиқ чизиқлар орасида шундай чизиқни топинки, шу чизиқ бўйлаб моддий нуқта оғирлик кучи таъсирида энг қисқа вақтда M нуқтадан N нуқтага етиб келсин (албатта, масаланинг моҳиятига кўра M нуқта N нуқтадан юқорироқда жойлашган).

Масалани ечиш учун уни математик тилга кўчирайлик. Текисликда координаталар системасини қуйидагича киритамиз: координата боши M нуқтада, t—абсцисса ўқи одатдагича, x — ордината ўқи эса вертикал равишда пастга йўналган бўлсин (3- расм).

Энди M $(0,0)$ ва $N(b, B)$ нуқталарни бирлаштирувчи бирорта $x(t)$ силлиқ чизиқ олиб, шу чизиқ бўйлаб моддий нуқтанинг M $(0,0)$ дан $N(b, B)$ гача етиб келиши учун кетган вақтни ҳисоблайлик. Агар бошланғич тезлик $v_0 = 0$ эканлигини ҳисобга олсак, элементар физика курсидан маълумки, моддий нуқтанинг $(t, x(t))$ нуқтадаги тезлиги

$$v = \sqrt{2gx(t)} \quad (v = \sqrt{2gh}, \quad h = x(t))$$

формуладан топилади. Бу ерда $g \approx 9{,}8$ м/сек^2 — эркин тушиш тезланиши.

Вақтни τ орқали белгиласак,

$$d\tau = \frac{ds}{v}$$

тенгликни ҳосил қиламиз, яъни моддий нуқтанинг $ds = \sqrt{1 + [x'(t)]^2}\,dt$ ёй дифференциалини босиб ўтиш учун кетган вақтни топамиз. Демак,

$$d\tau = \frac{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}}{\sqrt{2gx(t)}}\,dt.$$

Охирги тенгликни интеграллаб изланаётган вақтни топамиз:

$$\tau = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}}{\sqrt{2gx(t)}}\,dt.$$

Шундай қилиб, брахистохрона ҳақидаги масала

$$\tau = F(x(t)) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+[x'(t)]^2}}{\sqrt{2g}\cdot\sqrt{x(t)}}dt$$

функционалнинг $x(0)=0$ ва $x(b)=B$ шартни қаноатлантирувчи узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфида минимумини топишга келтирилади. Агар $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ўзгармас коэффициент эканлигини ҳисобга олсак, масала қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\int_0^b \sqrt{\frac{1+[x'(t)]^2}{x(t)}}dt \to \min;\ x(0)=0 \text{ ва } x(b)=B.$$

Бу ерда $x(0)=0$ бўлгани учун $\int_0^b \sqrt{\frac{1+[x'(t)]^2}{x(t)}}dt$ хосмас интеграл эканлигига эътибор қилинг.

Интеграл остидаги ифода t га ошкор ҳолда боғлиқ бўлмагани учун Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли қуйидагича бўлади:

$$f - x' \quad f_{x'} = \frac{\sqrt{1+[x'(t)]^2}}{\sqrt{x(t)}} - \frac{[x'(t)]^2}{\sqrt{x(t)}\sqrt{1+[x'(t)]^2}} = C.$$

Бу ердан $x(t)$ ни топсак:

$$x(t) = \frac{C^2}{1+[x'(t)]^2}.$$

Охирги дифференциал тенгламанинг умумий ечими параметрик кўринишда

$$\begin{cases} t = c_1(\varphi - \sin\varphi) + c_2 \\ x = c_1(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

бўлиб, циклоидалар оиласини ташкил қилишини текширишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз. $x(0)=0$ ва $x(b)=B$ шартдан c_1 ва c_2 ўзгармасларни топамиз.

Демак, Брахистохрона ҳақидаги масаланинг ечими фақатгина циклоида (аниқроғи циклоиданинг бир қисми) бўлиши мумкин.

3. *Минимал айланма сирт ҳақидаги масала.* Текисликда (a, A) ва (b, B) нуқталарни бирлаштирувчи шундай силлиқ чизиқ топингки, шу чизиқни абсцисса ўқи атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган жисмнинг сирти энг кичик бўлсин.

Маълумки, $x(t)$ чизиқнинг абсцисса ўқи атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган жисмнинг сирти

$$F(x(t)) = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Демак, юқорида қўйилган масала ушбу кўринишда ёзилади:

$$2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt \longrightarrow \min;\ x(a) = A;\ x(b) = B.$$

Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли қуйидагича:

$$f - x' f_{x'} = x(t)\sqrt{1+[x'(t)]^2} - \frac{x(t)\cdot[x'(t)]^2}{\sqrt{1+[x'(t)]^2}} = c.$$

Содда алмаштиришлардан сўнг:

$$x'(t) = \sqrt{\left(\frac{x(t)}{c}\right)^2 - 1}.$$

Бу дифференциал тенгламанинг ечими:

$$x(t) = c\cdot\mathrm{ch}\left(\frac{t}{c} + c_1\right),$$

бу ерда $\mathrm{ch}t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ гиперболик косинус.

c ва c_1 ўзгармасларни $x(a) = A$ ва $x(b) = B$ шартдан топамиз. Одатда $x(t) = c\cdot\mathrm{ch}\left(\frac{t}{c} + c_1\right)$ функциянинг графиги *занжир чизиқ* дейилади. Демак, минимал сирт ҳақидаги масаланинг ечими фақатгина занжир чизиқ бўлиши мумкин.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Геодезик чизиқ ҳақидаги масала (хусусий ҳоли) $z = x^2 + y^2$ сиртда жойлашган ва (0, 0, 0) нуқта билан (1, 0, 1) нуқтани бирлаштирувчи энг қисқа силлиқ чизиқни топинг.

2. Қуйидаги масалани ечинг:

$$\int_a^b \frac{1+[x(t)]^2}{[x'(t)]^2}\,dt \longrightarrow \min:\ x(a) = A;\ x(b) = B.$$

3. Ушбу экстремал масала α — параметрнинг қайси қийматларида ягона ечимга эга:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x(t)\,(1+[x'(t)]^2)}\,dt \to \min; \quad x(-1) = x(1) = \alpha > 0.$$

4. Узунлиги l га тенг бўлган бир жинсли электр сими вертикал текисликнинг M ва N нуқталарида маҳкамланган. Шу симнинг оғирлик кучи таъсирида олган формасини топинг.

Кўрсатма. Агар сим формасининг тенгламасини $x(t)$ ва $M(a, A)$; $N(b, B)$ деб олсак, симнинг потенциал энергияси

$$V(x(t)) = \int_a^b mgx(t)\,ds = mg\int_a^b x(t)\sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt$$

формула бўйича ҳисобланади. Сим мувозанатда бўлгани учун унинг потенциал энергияси минимал қийматни қабул қилади. Демак, ушбу вариацион масалани ечиш керак:

$$\int_a^b x(t)\sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt \to \min; \quad \int_a^b \sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt = l,$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B \text{ ва } x(t) = C^1\,[a, b].$$

5. Ушбу масала:

$$B(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,dt + \varphi(x(a), x(b)) \to \min$$

Больца масаласи дейилади. Берилган $f(t, x, y)$ ва $\varphi(x, y)$ функциялар C^1 синфга тегишли бўлса, Больца масаласи учун минимумнинг зарурий шартини топинг.

6. $$\int_a^b f(t, x(t), x'(t), x''(t))\,dt \to \min; \quad x(a) = A_0;$$

$$x'(a) = A_1, \quad x(b) = B_0; \quad x'(b) = B_1$$

масала учун экстремумнинг зарурий шартини топинг.

7. $$\int_0^1 (x(t) + [x'(t)]^2)\,dt \to \min; \quad x(0) = 0; \quad x(1) = 1$$

вариацион масалани ечинг.

8. $\int\limits_1^2 (t\,[x'(t)]^2 - x(t))\,dt \to \min;\ x(1) = 0;\ x(2) = 1$

вариацион масалани ечинг.

9. $\int\limits_1^2 x'(t)\cdot[1 + t^2\,x'(t)]\,dt \to \min,\ x(1) = 3;\ x(2) = 1$

вариацион масалани ечинг.

10. $\int\limits_0^1 x'(t)\,dt \to \min;\ x(0) = 0;\ x(1) = 1$

вариацион масалани ечинг.

АДАБИЁТ

АСОСИЙ АДАБИЁТ

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ. „Наука“, М., 1977.

2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. „Наука„, М., 1968.

3. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа. „Наука“ М.„ 1965.

4. Рудин У. Функциональный анализ. „Мир“, М., 1975.

5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. „Мир“, 1969.

6. Саримсоқов Т. А., Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси „Ўқитувчи“, Т., 1982.

7. Қобулов В. Қ. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси, „Ўқитувчи“, Т., 1976.

ҚЎШИМЧА АДАБИЕТ

1. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, М., 1948.

2. Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А., Топологические алгебры Буля, Изд. АН УзССР, 1963.

3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, „Наука“. М., 1966.

4. Биркгоф Г., Теория решеток, М., 1984.

5. Бурбаки Н., Теория множеств, „Мир“, М., 1965.

6. Бурбаки Н., Общая топология, Основные структуры. „Наука“, М., 1968.

8. Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер., „Наука“, М., 1967.

9. Бурбаки Н., Спектральная теория. „Мир“, М., 1972.

10. Владимиров Д. А., Булевы алгебры, „Наука“, М., 1969.

11. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз. М., 1961.

12. Вулих Б. З., Введение в функциональный анализ. „Наука„ 1967.

13. Вулих Б. З., Краткий курс теории функций вещественной переменной. „Наука" М., 1973.

14. Гельфанд. И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормировочные кольца. М, Физматгиз, 1960.

15. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции. Вып. 1. *Обобщенные функции и действия над ними.* М., 1958

16. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.

17. Глазман И. М, Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.. „Наука", М., 1969.

18. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.

19. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. „Мир", М., 1966.

20. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы, „Мир"., М., 1974.

21. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. Мир, М. 1964.

22. Дэй М. М. Линейные нормированные пространства. ИЛ, М. 1961.

23. Иосида К. Функциональный анализ. „Мир", М., 1967.

24. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, М—Л, 1950.

25. Келли Дж. Л. Общая топология. „Наука" М., 1968.

26. Наймарк М. А. Нормированные кольца. „Наука", М., 1968.

27. Натансон И. П. *Конструктивная теория функций.* Гостехиздат. М., 1949.

28. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной, „Наука", М., 1974.

29. Рисс Ф., Секефальви—Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М, 1954.

30. Робертсон А. П., Робертсон В. Топологические векторные пространства, „Мир". М., 1967.

31. Халмош П. Теория меры. „Мир", М, 1953.

32. Хаусдорф Ф. Теория множеств. Гостехиздат, М., 1937.

33. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1962.

АСОСИЙ БЕЛГИЛАШЛАР

K — скалярлар майдони

R — ҳақиқий сонлар тўплами

C — комплекс сонлар тўплами

$\forall$ — умумийлик квантори

$\exists$ — мавжудлик квантори

$a \in A$ — a элемент 4 тўпламга тегишли

$a \overline{\in} A$ — a элемент A тўпламга тегишли эмас

$B \subset A$ — B тўплам A тўпламнинг қисм тўплами

$\varnothing$ — бўш тўплам

$\cup$ — тўпламларнинг йиғиндиси (бирлашмаси)

$\cap$ — тўпламларнинг кўпайтмаси (кесишмаси)

Π, $\times$ — тўпламларнинг тўғри (Декарт) кўпайтмаси

$A \setminus B$ — A тўпламдан B тўпламнинг айирмаси

$\Longleftrightarrow$ — эквивалентлик белгиси

$\Longrightarrow$ — мантиқий хулоса

χ_A — A тўпламнинг характеристик функцияси

$\geqslant$, $>$ — тартиб (қисман тартиб) белгиси

sup, $\vee$ — супремум

inf, $\wedge$ — инфимум

$\{x_n\}$ — кетма-кетлик

θ — вектор фазонинг ноль элементи

$L[A]$, — A тўпламнинг чизиқли қобиғи

E/E_0 — фактор фазо

$Z(E,F)$ — чизиқли операторлар фазоси

$L(E, F)$ — узлуксиз чизиқли операторлар фазоси

E^* — алгебраик қўшма вектор фазо

E' — топологик қўшма вектор фазо

$\oplus$ — тўғри йиғинди ортогонал тўғри йиғинди

$f: A \to B$ — акс эттириш

f^{-1} — тескари акс эттириш

$*$ — теорема исботининг тугаганлиги

22.162
С 32

Саримсоқов Т. А.

Функционал анализ курси: Математика ва амалий математика фак. студ. учун дарслик (Махсус муҳаррир. Ж. Хожиев.) — 2-қайта ишланган, тўлдирилган нашр. — Т.: Ўқитувчи, 1986. 400 б.

Сарымсаков Т. А. Курс функционального анализа: Учебник для студ. ун-тов и пед. ин-тов.

22.162я73

На узбекском языке

САРЫМСАКОВ ТАШМУХАМЕД АЛИЕВИЧ

КУРС ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебник для студентов университетов
и педагогических институтов

второе, переработанное и дополненное издание

Ташкент — „Ўқитувчи“ — 1986

Нашриёт редакторлари: *Ў. Ҳусанов, Р. Каримов*
Расмлар редактори *С. Соин*
Техредакторлар: *Т. Скиба, Ш. Вахидова*
Корректор *М. Тоирова*

Теришга берилди 20. 05 85. Босишга рухсат этилди 15. 07. 86. Формат 84×108/32. Тип. қоғози № 3. Литературная гарнитура. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 21. Шартли кр. отт. 21,0. Нашр. л. 17,3.
Тиражи 3000. Заказ 239. Баҳоси 90 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 9-45-85.

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасига қарашли 1- босмахонаси. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21.

Типография № 1 ТППО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Тошкент ул. Хамзы 21. 1986.