Жумаев Эркин Эргашевич

ГЕОМЕТРИЯ МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

I қисм

Ўзбекистан Республикаси Олий ва Ўрта махсус таълим вазирлиги Академик лицей талабалари учун ўқув қўлланма сифатида нашрга тавсия этган.

Тошкент - 2001

Аннотация

Мазкур қўлланмада Академик лицейда геометрия фанини ўқитиш жараёнида талабаларни ижодий қобилиятини ривожлантириш, ўзлаштирилиши лозим бўлган билимларнинг хусусиятини ва ҳажмини аниқлаш мақсадида масалалар тузилган бўлиб, дарсликдан олинган билимларни мустаҳкамлашни назарда тутади.

Тақризчилар:

1. Низомий номидаги ТДПУ "математика ва уни ўқитиш методикаси" кафедрасининг доценти, педагогика фанлари доктори М.Тожиев.
2. Термиз ДУ "Геометрия ва дифференциал тенгламалар" кафедрасининг доценти, ф-м.ф.н.Г.М.Аллаев.
3. ТТЕСИ Академик лицейининг олий тоифали ўқитувчиси А.Э.Танғиров ва ф-м. ф.н. Ҳ.Исаев.

Масъул муҳаррир: педагогика фанлари номзоди, доцент О.Мусурмонов

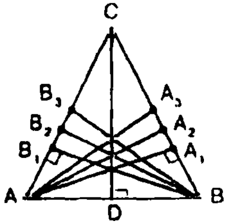
Кириш

Жамиятимизда юз бераётган иқтисодий-ижтимоий ўзгаришлар ҳар бир касб эгасидан “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” ва “Таълим тўғрисида” ги Қонун талаблари асосида иш кўришни тақозо этмоқда. Академик лицей талабалари учун мазкур масалалар тўплами 10 бўлимдан иборат бўлиб, ҳар бўлимда масалаларни ечиш учун фойдаланиш зарур бўлган назарий билимлар келтирилган. Талабалардан уйга берилган вазифаларни бажаришда дарс давомида олган билимларидан маҳорат билан фойдаланишни тақозо этади. Ўқув қўлланмада келтирилган масалани тузишда ва бу масалани ифодаловчи геометрик шаклни барча элементлари орасидаги боғланишни ифодалашга асосланган бўлиб оддийдан мураккабга тамойилларига амал қилади. Ушбу ўқув қўлланма масалалар тузишдаги биринчи тажриба бўлганлиги учун камчиликлардан холи эмас, албатта. Китобхондан ушбу қўлланма тўғрисидаги фикр ва мулоҳазаларини қуйидаги манзилга юборишларини сўраймиз: 733002. Термиз шаҳри Ф. Хўжаев 43уй, ТермизДУ. “Дифференциал тенгламалар ва геометрия” кафедраси. Ушбу қўлланмани ёзишда ўзларининг қимматли маслаҳатларини берган ф-м.ф.доктори О.Холмуҳаммедов, п.ф.д. проф. Т.Тўлаганов, ф-м.ф.н. Т.Собиров ларга миннатдорчилик билдираман.

Муаллифдан

1. Тенг ёнли учбурчак

1) Таъриф. Агар учбурчакнинг икки томони тенг бўлса, унга тенг ёнли учбурчак деб айтилади.



Агар AC=BC бўлса, ΔABC-тенг ёнли. AB-асоси, AC ва BC ён томонлари, D-эса асосининг ўртаси.

2) Хоссалари:

а) Тенг ёнли учбурчакнинг асосига ёпишган бурчаклари тенг; $\angle A = \angle B$;

б) Тенг ёнли учбурчакда CD медиана, баландлик ва биссектриса вазифасини бажаради;

в) Тенг ёнли учбурчакнинг асосига туширилган баландлиги, медианаси ва биссектрисаси устма-уст тушади.

3) Белгилари:

а) Агар ABC учбурчакда $\angle A = \angle B$ бўлса, унда AC=BC бўлади;

б) Агар $AA_1=BB_1$ бўлса, AC=BC бўлади, бу ерда AA_1, BB_1 - учбурчакнинг баландликлари;

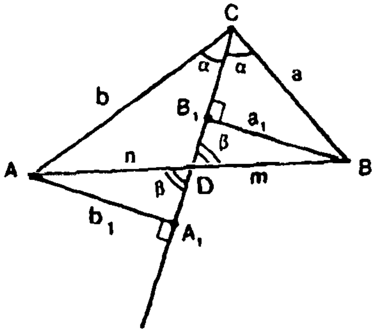
в) Агар $AA_2=BB_2$ бўлса, AC=BC бўлади, бу ерда AA_2, BB_2 - учбарчакнинг медианалари;

г) Агар $AA_3=BB_3$ бўлса, AC=BC бўлади, бу ерда AA_3, BB_3 - учбурчакнинг биссектрисалари.

4) Учбурчак биссектрисасининг хоссалари:

Учбурчак биссектрисаси қарама-қарши томонини колган икки томонига пропорционал бўлган кесмага ажратади.

Исбот: ABC учбурчакнинг биссектрисаси CD-бўлсин. A ва B учларидан CD га перпендикуляр AA_1 ва BB_1 ни ўтказамиз. $AC=b$, $BC=a$, $\angle ACD=\angle BCD=\alpha$, $AA_1=b_1$, $BB_1=a_1$, $AD=n$, $BD=m$ деб белгилаб олайлик. $\angle B_1DB = \angle A_1DA = \beta$ бўлгани учун ΔACA_1 дан $\sin\alpha = \frac{b_1}{b}$, ΔBCB_1 дан $\sin\alpha = \frac{a_1}{a}$, ни топамиз.



Бундан $\dfrac{b_1}{b} = \dfrac{a_1}{a}$ ёки

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1}{b_1}$ бўлади. ΔBDB_1 дан

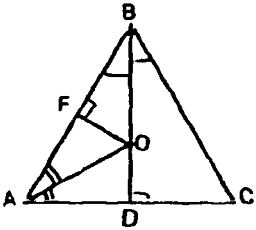
эса $\sin\beta = \dfrac{b_1}{n}$, ΔADA_1 дан

$\sin\beta = \dfrac{a_1}{m}$ ни топамиз.

Бундан, $\dfrac{b_1}{n} = \dfrac{a_1}{m}$ ёки $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{m}{n}$ бўлади.

Демак $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$ ёки $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BD}{AD}$.

1-масала. Тенг ёнли учбурчакнинг биссектрисалари кесишиш нуқтасидан ён томонига айирмаси 4 см га тенг бўлган кесма ажратувчи перпендикуляр ўтказилган. Бу нуқта асосига ўтказилган биссектрисани 5:3 иисбатда бўлади. Агар асосига ёпишган бурчаги 60^0 дан кичик бўлса, учбурчакнинг периметрини топинг.



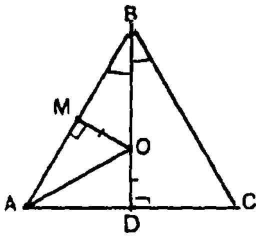
Ечиш. Айтайлик - ABC учбурчакда, AB=BC бўлсин. BD-AC асосга ўтказилган баландлик. AD=DC ва BD-B бурчакнинг биссектрисаси B ва A бурчакларнинг BD ва AO биссектрисаларини кесишган нуқтаси O бўлсин.

$OF\perp AB$ ни утказамиз, $F\in AB$, шартга кўра $OD\perp AC$. OA-биссектриса бўлгани учун OF=OD, $\angle A<60^0$, унда $\angle B>60^0$; $\angle OAF<30^0$, $\angle OBF>30^0$, яъни $\angle OAF<\angle OBF$. $AF=OF\text{ctg}\angle OAD$; $BF=OF\text{ctg}\angle OBF$, $\text{ctg}\angle OAD>\text{ctg}\angle OBF$. Унда AF>BF, шартга кўра AF-BF=4 см. A бурчакнинг AO биссектрисасининг хоссасига асосан ΔABD дан $\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD}$. Бундан, агар $AB>AD$ бўлса,

унда $BO>OD$ ҳамда $\frac{BO}{OD} = \frac{5}{3}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{5}{3}$ $AB = 5x$, $AD = 3x$

деб белгилайлик. AFO ва AOD учбурчакларнинг тенглигидан $AD = AF = 3x$, $BF = AB - AF = 5x - 3x = 2x$. Шартга кўра $AF - BF = 4$ ва $AF = 3x$, $BF = 2x$ ни хисобга олиб $3x - 2x = 4$; $x = 4$. $AB = 4 \cdot 5 = 20$см, $AD = 3 \cdot 4 = 12$ см, $AC = 24$ см. ABC учбурчакнинг P периметри қуйидагига тенг бўлади: $P = 20+20+24 = 64$ см. Жавоб: 64 см.

2-масала. Тенг ёнли учбурчакда ён томони ва асосининг йиғиндиси 78 см га тенг. Ён томони ва асосидан тенг узоқликда жойлашган биссектрисада ётувчи нуқта асосига ўтказилган биссектрисани 5:4 нисбатда бўлади. Учбурчакнинг асосини топинг.



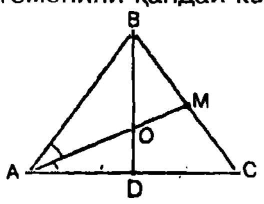
Ечиш. Айтайлик, ABC учбурчакда $AB=BC$, AC эса асоси бўлсин. Шартга кўра $AB+AC=78$ см, BD биссектрисасини ўтказамиз. $BD \perp AC$ ва $AD=DC$, $O \in BD$. $OM \perp AB$ ни ўтказамиз.

$\frac{OB}{OD} = \frac{5}{4}$ ва $OM = OD$ эканлигидан

OA-BAD бурчак биссектрисаси ва $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{AD} = \frac{5}{4}$

Агар $AB = 5x$, $AD = 4x$, $AC = 8x$ деб белгиласак, $5x + 8x = 78$, $x = 6$, $AC = 8 \cdot 6 = 48$ см ни топамиз. Жавоб: 48 см.

3-масала. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчак биссектрисаси асосига ўтказилган медианани 16,5 ва 27,5 смли кесмаларга ажратади. Бу биссектриса ён томонини қандай кесмаларга ажратади?



Ечиш. Айтайлик ABC учбурчакда $AB=BC$, AC-асоси, BD-медиана, AM-биссектриса BD ни O нуқтада кесиб ўтсин. Масала шартига кўра $OD=16,5$, $OB=27,5$ см деб олсак, $BD=OD+OB=$ $= 44$ см бўлади.

Биссектриса хоссасига асосан ΔABD дан $\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{DO}$; $\frac{AB}{AD} = \frac{27,5}{16,5} = \frac{5}{3}$ га эга бўламиз.

$AB=5x$, $AD=3x$ деб белгилаб, ΔABD дан $AB^2-AD^2 = BD^2$; $(5x)^2 - (3x)^2 = 44^2$; $x = 11$. $AB = 5\cdot11 = 55$ см, $BC = 55$ см ни топамиз. Биссектриса хоссасига асосан $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CM}$ ни ёзиб $CM = y$ деб $BM = 55-y$, $\frac{5}{6} = \frac{55-y}{y}$; $\frac{5}{6} = \frac{55}{y} - 1$; $\frac{55}{y} = \frac{11}{6}$; $y=30$; $CM=30$см, $BM=55-30=25$ см ни топамиз.

Жавоб: 30 см, 25 см.

Машқлар

1. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 13 см, асосига қарама-қарши бурчагининг биссектрисаси 12 см бўлса, унинг перимертини топинг.

2. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 10 см, унга ўтказилган медианаси 12 см га тенг бўлса, унинг периметрини топинг.

3. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бир учидан ўтказилган биссектриса ва баландлик орасидаги бурчак 30^0 га тенг бўлса, учбурчак бурчакларини топинг.

4. Тенг ёнли учбурчакда асосига ўтказилган баландлик ва асосидаги бурчак биссектрисаси орасидаги бурчак 55° га тенг бўлса, учбурчакнинг бурчакларини топинг.

5. Тенг ёнли учбурчакда қуйидагилар маълум бўлса, унинг периметрини топинг:

а) ён томони 25 см ва унга ўтказилган баландлиги 24 см;

б) асоси 30 см ва ён томонига ўтказилган баландлиги 24 см;

в) ён томонига ўтказилган баландлик уни 18 ва 7 смли кесмаларга ажратади;

г) асоси 30 см ва унга ўтказилган медианаси 20 см;

д) ён томони ва асосига ўтказилган баландликлар 20 см ва 24 см;

е) асосига ёпишган бурчаги 60^0 кичик бўлиб, биссектрисаси ён томонини 25 ва 30 см кесмаларга ажратади;

ж) ён томонини асосига нисбати 5:6 каби. Асосига ёпишган бурчак биссектрисаси асосига ўтказилган баландликни, айирмаси 4 см бўлган кесмаларга ажратади;

з) ён томони ва асосининг айирмаси 4 см. Биссектриса асосига ўтказилган медианани 5:3 нисбатдаги кесмаларга ажратади;

к) асосига туширилган баландликда ён томон учларидан тенг узоқликда жойлашган нуқта олинган бўлиб, уни 25 ва 7 см кесмаларга ажратади;

м) медианада олинган нуқтадан асосигача 14 см, асосининг учигача бўлган масофа 50 см.

к) биссектрисада ётган нуқтадан ён томонигача бўлган масофа 15 см, учигача бўлган масофа 25 см.

6. Қуйидагиларга кўра тенг ёнли учбурчак ясанг:

а) асосидаги бурчак ва шу бурчак биссектрисаси;

б) асосига туширилган баландлик ва ён томонига ўтказилган медианаси;

в) ён томонига туширилган баландлиги ва асосидаги бурчаги;

7. Қуйидаги элментлар маълум бўлса тенг ёнли учбурчакнинг асосини топинг:

а) перимерти 80 см, асосига ўтказилган баландлиги ?0 см;

б) асосига ўтказилган баландлиги 32 см, асосигача бўлган масофа 12 см.

в) перимерти 128 см, ён томонини асосига бўлган нисбати 5:4 каби;

8. Қуйидагиларга кўра тенг ёнли учбурчакнинг ён томонини топинг:

а) асосига ўтказилган медианаси 32 см, асосидаги бурчак биссектрисаси медианани учидан ҳисоблаганда 20 см масофада кесиб ўтади;

б) периметри 128 см, асосига туширилган баландлиги ?2 см;

9. Учбурчакнинг томонлари 25, 25 ва 30 см бўлса, катта томонига ўтказилган биссектрисани ҳисобланг.

10. Тенг ёнли учбурчакнинг перметри 128 см, асосини ён томонига нисбатан 6:5 каби бўлса, асосига ўтказилган баландлигини ҳисобланг.

11. Тенг ёнли учбурчакда медианалар кесишган нуқтадан асосига қарама-қарши учигача бўлган масофа 12 см, асоси 16 смга тенг. Ён томонига ўтказилган медианасини топинг.

12. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 40 см, асоси 48 см. Асосига ўтказилган медианада ётган нуқтадан асосининг учигача бўлган масофалар тенг бўлса, шу нуқтадан асосигача бўлган масофани топинг.

13. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчак биссектрисаси асосига ўтказилган баландлиги билан кесишиб, кесишиш нуқтасида уни 10 ва 6 см кесмаларга ажратади. Шу нуқтадан ён томонига ўтказилган перпендикуляр ажратган кесмаларни топинг.

Уйга вазифалар

1. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 55 см, асоси 66 см га тенг. Асосидаги бурчак биссектрисаси ён томонини қандай узунликдаги кесмаларга ажратади?

2. Асоси ва унга туширилган баландлиги 8:3 нисбатда ва периметри 5 см бўлган тенг ёнли учбурчакнинг асосига ўтказилган медианасини учидан кесишиш нуқтасигача бўлган масофани топинг.

3. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси унга туширилган баландлигидан 6 см га кўп, медианалар кесишиш нуқтасидан асосигача бўлган масофа 3 см га тенг бўлса унинг периметрини ҳисобланг.

4. Тенг ёнли учбурчакда асосидаги бурчак биссектрисаси асосига ўтказилган баландлигини 5:3 нисбатда бўлади. Агар тенг ёнли учбурчакнинг перимерти 48 см га тенг бўлса унинг баландлигини ҳисобланг.

5. Асоси ва ён томонига ўтказилган баландлиги бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

6. Ён томони ва унга ўтказилган баландлиги буйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

7. Асосига қарама-қарши бурчаги ва ён томонига ўтказилган биссектрисаси бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

8. Асосига қарама-қарши бурчаги ва ён томонига ўтказилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

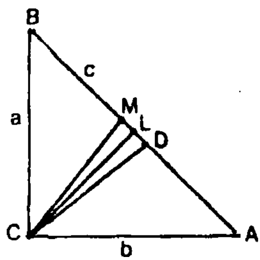
9. Ён томонлари ва унга ўтказилган медианалар ёрдамида учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

10. Асосига қарама-қарши бурчаги ва асосининг учларидан ўтказилган биссектрисалар ёрдамида тенг ёнли учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

11. Асосига қарама-қарши бурчаги ва ён томонларига ўтказилган баландликлар ёрдамида тенг ёнли учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

12. Асоси ва ён томонига ўтказилган баландликлари бўйича тенг ёнли учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

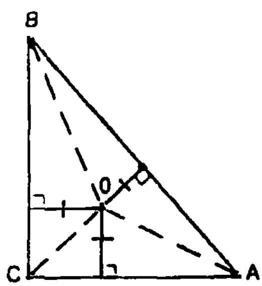
2. Тўғри бурчакли учбурчак



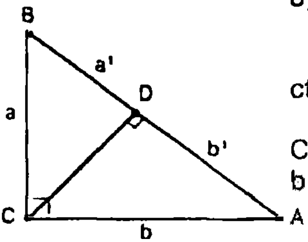
1) Айтайлик ACB-тўғри бурчакли учбурчак бўлсин. $\angle C=90^0$, AB-гипотенуза, AC ва BC-катетлари, AB=c, AC=b, BC=a; $CD \perp AB$, $CD=h_c$, M-AB ни ўртаси, $CM=m_c$, CL- биссектриса, яьни $CL=\ell_c$, L нуқта M ва D нуқталар орасида ётади. $\angle MCL = \angle DCL$,

$$CM = MA = MB.\ CM = \frac{1}{2} \cdot AB$$

$$\angle LCD = \frac{1}{2} \left| \angle A - \angle B \right| .$$



2) O нуқта - AB, AC ва BC томонлардан тенг узоқлашган нуқта, BO, AO, CO - биссектрисалар.

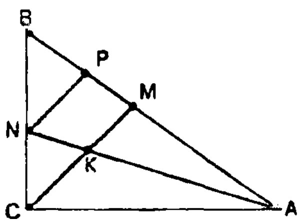


3) $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$; $tg\alpha = \dfrac{a}{b}$;

$ctg\alpha = \dfrac{b}{a}$. $a^2 + b^2 = c^2$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$CD \perp AB$, $CD = h_c$, $AD = b^1$, $BD = a^1$; $h^2 = a^1 b^1$; $a^2 = ca$; $b^2 = cb^1$; $ch = ab$.

1-масала. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 66 ва 88 см. Катта ўткир бурчак биссектрисаси гипотенузага ўтказилган медианани кесмаларга ажратади. Шу кесмаларни узунлигини топинг.



Ечиш. Айтайлик, ACB учбурчакда $\angle C = 90^0$ бўлсин, унда AC ва BC- катетлар, AB - гипотенуза бўлади. BC=66, AC=88 бўлгани учун BC<AC, унда $\angle A > \angle B$. $\angle A$ни биссектрисасини, CM медианани ўтказамиз ва уларни кесишиш нуқтасини K билан белгилаймиз.

Маълумки, CM=MB=AM, CK ва MK - кесмаларни узунлигини топамиз. ΔACB дан $AB^2 = AC^2 + BC^2$, AB=110 см,

$$CM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 110 = 55 \text{ см.}$$

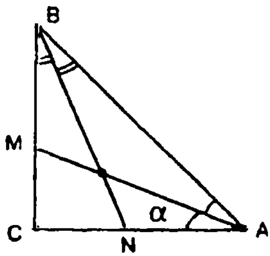
ΔCMA дан биссектриса хоссасига асосан $\dfrac{CK}{KM} = \dfrac{AC}{MA}$,

KM = x, CK=55-x деб, $\dfrac{55-x}{x} = \dfrac{66}{55} \Leftrightarrow x = 25$. KM = 25 см

CK = 55 - 25 = 30 см. Жавоб: 25 см, 30 см.

2-масала. Тўғри бурчакли учбурчакда ўткир бурчак биссектрисалари мос равишда $9\sqrt{5}$ ва $8\sqrt{10}$ см. Учбурчакнинг катетларини топинг.

Ечиш. Айтайлик, ABC тўғри бурчакли учбурчакда BC. AC-катетлар, AB гипотенуза бўлсин. AM ва BN биссектрисаларни ясаймиз.



$\ell_a=AM=9\sqrt{5}$, $\ell_b=BN=8\sqrt{10}$ см, $BC=a$, $AC=b$, $\angle A=2\alpha$, $\angle MAC=\alpha$, $\angle B=90^0-2\alpha$, $\angle NBC=45^0-\alpha$, ΔMAC дан $b=\ell_a\cos\alpha$, ΔNBCдан $a=\ell_b\cos(45^0-\alpha)$.

$$\frac{a}{b}=\mathrm{tg}2\alpha;\ \frac{a}{b}=\frac{\ell_b\cos(45^0-a)}{\ell_a\cos\alpha};$$

$$\frac{\ell_b}{\ell_a}=\frac{8\sqrt{10}}{9\sqrt{5}}=\frac{8}{9}\sqrt{2};\ \mathrm{tg}2\alpha=\frac{8}{9}\sqrt{2}\cdot\frac{\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha};$$

$$\mathrm{tg}^2 2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(45^0-\alpha)}=\frac{128}{81};\ \left(\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\right)^2\cdot\frac{1+\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\frac{128}{81};$$

$$\frac{1+\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\left(1+\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\right):\left(1+\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\right)=\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha+1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}:$$

$$:\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha+2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{(1+\mathrm{tg}\alpha)^2}=\frac{2}{(1+\mathrm{tg}\alpha)^2};\ \left(\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{(1+\mathrm{tg}\alpha)^2}=\frac{128}{81};\ \left[\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{(1-\mathrm{tg}^2\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)}\right]^2=\frac{64}{81};$$

$$\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{(1-\mathrm{tg}^2\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)}=\frac{8}{9};$$ Энди $\mathrm{tg}\alpha=y$ деб белгиласак,

$$\frac{y}{(1-y^2)(1+y)}=\frac{4}{9};\ 4(1-y^2+y-y^3)=9y;\ 4y^3+4y^2+5y-4=0.$$

$(2y-1)(2y^2+3y+4)=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$ чунки $2y^2+3y+4=0$ хакикий илдизга эга эмас.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{5}; \quad b = \ell_a\cos\alpha;$$

$$b=9\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=18 \text{ см.}$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}; \quad a=btg2\alpha; \quad a=18\cdot\frac{4}{3} = 24 \text{ см.}$$

Жавоб: **18 см, 24 см.**

Машклар

1. Қуйидаги элементларига кўра тўғри бурчакли учбурчакнинг периметрини ҳисобланг:

а) гипотенузаси 13 см, катети 12 см ;

б) катет ва гипотенуза 3:5 нисбатда ва иккинчи катети 16 см;

в) катетлар айирмаси 5 см, гипотенузаси 25 см;

г) катети 20, унга ўтказилган медианаси $5\cdot\sqrt{13}$ см;

д) гипотенузага ўтказилган баландлиги 24 см ва уни 9:16 нисбатда кесмаларга ажратади.

е) катет ва гипотенуза 4:5 нисбатда, ўткир бурчак биссектрисаси иккинчи катетни айирмаси 2 см бўлган кесмага ажратади.

2. Тўғри бурчакли учбурчакда қуйидаги элементлар берилган бўлса гипотенузасини топинг:

а) периметри 36 см, катетлар айирмаси 3 см;

б) ўткир бурчак биссектрисаси катетларидан бирини 8 ва 10 см кесмаларга ажратади;

в) тўғри бурчак биссектрисаси гипотенузани 3:4 нисбатда бўлади, перимерти 84 см;

г) катетларига ўтказилган медианалар $\sqrt{52}$ ва $\sqrt{73}$ см. бўлса.

3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 15 ва 20 см. Гипотенуза ўтказилган баландлигини топинг.

4. Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчак учидан утказилган биссектриса ва баландлик орасидаги бурчак 15°га тенг бўлса, учбурчак бурчакларини топинг.

5. Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчак учидан баландлик, медиана ва биссектриса ўтказилган. Агар баландлик ва медиана орасидаги бурчак 30° бўлса биссектриса ва баландлик орасидаги бурчакни топинг.

6. Қуйидаги элеметнларга кўра тўғри бурчакли учбурчак ясанг:

а) гипотенузага ўтказилган баландлиги ва ўткир бурчаги бўйича;

б) гипотенузага ўтказилган медианаси ва ўткир бурчаги бўйича;

в) гипотенуза ва унга ўтказилган баландлик бўйича;

г) битта катет ва гипотенузага ўтказилган баландлиги берилган бўлса.

Уйга вазифалар

1. Тўғри бурчакли учбурчакда катетлар йиғиндиси 35 см, гипотенуза ва унга ўтказилган баландликлар йиғиндиси 37 см бўлса, учбурчакнинг гипотенузасини топинг.

2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети 28 см, ҳар бир катетдан 12 см узоқликда гипотенузасида нуқта олинган бўлса, учбурчакнинг периметрини топинг.

3. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг қуйидаги мос элементларига кўра тенглигини исботланг:

а) гипотенузага ўтказилган баландлиги ва медианаси;

б) тўғри бурчак учидан ўтказилган баландлиги ва биссектрисаси;

в) катет ва унга ўтказилган медианаси;

г) катет ва иккинчи катетига ўтказилган медианаси;

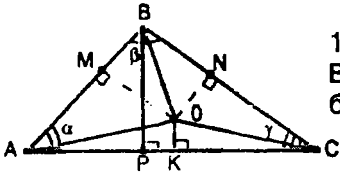
д) катет ва иккинчи катетига ўтказилган биссектрисаси;

ж) ўткир бурчак ва шу бурчак биссектрисаси бўйича.

4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ўтказилган медиана уни иккита тенг ёнли учбурчакка ажратишини исботланг.

5. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 45 ва 60 см. Биссектрисалар ва медианалар кесишиш нуқтаси орасидаги масофани топинг.

3. Турли томонли учбурчак



1. Айтайлик ABC учбурчакда AB=c, BC=a, AC=b, $\angle A=\alpha$. $\angle B=\beta$, $PC=\varphi$ бўлсин. Маълумки $\alpha+\beta+\varphi=180^0$.

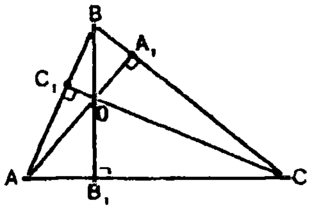
а) O нуқта AB, BC, AC-томонларнинг ўрта перпендикулярларини (медиатрисасини) кесишиш нуқтаси бўлсин. Унда AM =MB, BN =NC, KC=AC бўлади. Катта томон қаршисида катта бурчак ётади.

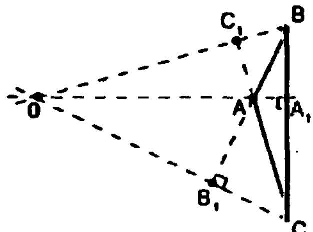
б) $c^2=a^2+b^2 - 2ab\cos\gamma$ (косинуслар теоремаси);

в) $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin b}=\dfrac{c}{\sin(\alpha+\beta)}$ (синуслар теоремаси);

г) $OM + ON + OK = BP = h_b$;

д) Учбурчак баландликлари ўтган тўғри чизиклар бир нуқтада кесишади, яъни $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$.





$AA_1=h_a$, $BB_1=h_b$, $CC_1=h_c$ - деб белгилайлик, унда

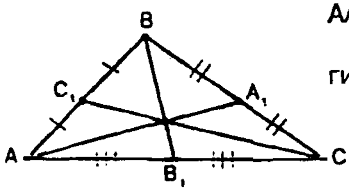
$$h_a=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2a},\quad h_b=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2b},$$

$$h_c=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2c}$$, бўлади, бу ерда $p=\dfrac{a+b+c}{2}$;

$b=\dfrac{\sqrt{x}}{2h^2_a h^2_c h_b}$, $a=\dfrac{\sqrt{x}}{2h^2_b h^2_c h_a}$, $c=\dfrac{\sqrt{x}}{2h^2_a h^2_b h_c}$ ни исботлаш мумкин, бу ерда $x = (h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)\cdot(h_a h_b + h_b h_c - h_a h_c)\cdot(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)^{*}\cdot(h_a h_c + h_b h_c - h_a h_b)$.

д) Учбурчак медианалари бир нуқтада кесишади, яъни

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$



$AA_1=m_a$, $BB_1=m_b$, $CC_1=m_c$ деб белгилайлик. $\frac{AO}{OA_1}=\frac{CO}{OC_1}=\frac{BO}{OB_1}=\frac{2}{1}$.

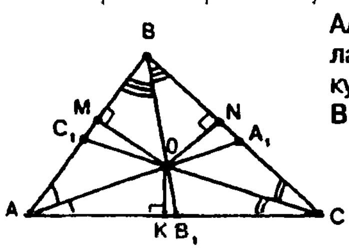
$$AO=\frac{2}{3}AA_1,\ OA_1=\frac{1}{3}AA_1.$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2};\ m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2};\ m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$$

$$c^2=\frac{4}{9}\left[2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2\right],\quad a^2=\frac{4}{9}\left[2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2\right].$$

$$b^2=\frac{4}{9}\left[2(m_a^2+m_c^2)-m_b^2\right].$$

е) Учбурчакда биссектрисалар бир нуқтада кесишади, яъни $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$



$AA_1=\ell_a$, $BB_1=\ell_b$, $CC_1=\ell_c$ деб белгилайлик. $OM=ON=OK$-ўрта перпендикулярлар.

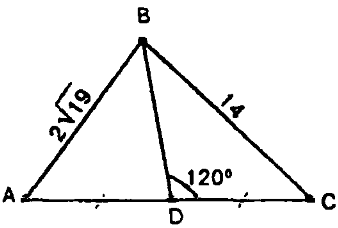
$BB_1^2=AB\cdot BC-AB_1\cdot B_1C$

$$\ell_a=\frac{2bc\cos\frac{\hat{A}}{2}}{b+c},\ \ell_b=\frac{2ac\cos\frac{\hat{B}}{2}}{a+c},\ \ell_c=\frac{2ab\cos\frac{\hat{C}}{2}}{a+c}.$$

$$\ell_a^2 = \frac{4p(p-a)bc}{(b+c)^2}, \quad \ell_b^2 = \frac{4p(p-b)ac}{(a+c)^2}, \quad \ell_c^2 = \frac{4p(p-c)ab}{(a+b)^2}.$$

1-масала. ABC учбурчакда $AB=2\sqrt{19}$ ва $BC=14$ см. Агар $\angle BDC=120^0$ бўлса, учбурчакни томонларини топинг, бу ерда BD медиана.

Ечиш: BD-умумий томон, $AD=DC$, $BC>AB$, $\angle ABC=60^\circ$ энди $AD=DC=x>0$, $BD=y>0$, деб белгилаймиз.



ΔADB дан $AB^2=AD^2+BD^2-$ $-2AD\cdot BD\cdot\cos 60^0$,

$$x^2+y^2-2xy\cdot\frac{1}{2}\ (2\sqrt{19})^2;$$

$x^2+y^2-xy=76$ (1).

ΔBDC дан $DC^2+BD^2+2DC\cdot BD\cdot$ $\cdot\cos 120^0 = BC^2$,

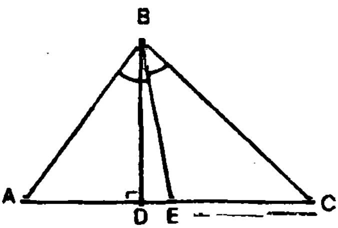
$$x^2+y^2-2xy\left(-\frac{1}{2}\right)=14^2, \quad x^2+y^2+xy=196 \ (2).$$

(1), (2) $\Rightarrow xy=60$ ни топамиз. Бундан $2x=20$ га эга бўламиз. $AC=2x$, $AC=20$ см. *Жавоб*: 20 см.

2-масала. ABC учбурчакнинг B учидан баландлик ва биссектриса ўтказилган. Агар баландлик томонни 7 ва 32 см кесмаларга ажратиб биссектриса шу томонни 5:8 нисбатда бўлса, убурчакнинг баландлигини ва периметрини топинг.

Ечиш. Шартга кўра BD - баландлик, BM - биссектриса $AD=7$ см, $DC = 32$ см бўлсин.

$AB<BC$, $AC=39$ см, $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{5}{8}$ ни ёза оламиз.



$5x>0$, $BC=8x>0$ деб олиб ΔABD дан $BD^2=AB^2-AD^2$ ва ΔBCD дан $BD^2=BC^2-CD^2$ ни топамиз. Бундан $AB^2-AD^2=BC^2-CD^2$ ва $BC^2-AB^2=$ $=BD^2-AD^2$ эканлигини ҳисобга олиб $(8x)^2-(5x)^2=32^2-7^2$, $13x\cdot 3x=$ $=39\cdot 25$; $x^2=25$; $x=5$ га эга бўламиз.

Шундай қилиб AB=25 см, BC=40 см.
P=25+40+39=104 см. $BD^2=25^2-7^2=32\cdot18=16\cdot36$;
BD = 4 • 6=24 см ни топамиз. Жавоб: 24 см, 104 см.

Машқлар

1. Қуйидаги элементларга кура учбурчакнинг периметрини ҳисобланг:

а) томони 35 см, қолган икки томони 8:3 каби ва 60^0ли бурчак хосил қилса;

б) томони 14 см, қолган икки томон айирмаси 10 см ва 60^0ли бурчак ҳосил қилса;

в) баландлиги 72 см ва у томонни 21 ва 30 см кесмаларга ажратса;

г) икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медианаси мос равишда 12, 14 ва 7 см бўлса.

2. Қуйидагилар маълум бўлса учбурчак томонларини топинг:

а) периметри 30 см, икки томони 5:3 нисбатда ва 120^0ли бурчак ташкил этса;

б) *икки томон айирмаси* 15 *см, учинчи томонига* туширилган баландлик уни 7 ва 32 см кесмаларга ажратса;

в) учидан туширилган баландлик $12\sqrt{3}$ см ва шу бурчакда 30^0 ва 45^0 ли бурчак ҳосил қилса;

3. Учбурчакнинг томонлари 13, 14 ва 15 см. 14 см ли томонига туширилган баландлигини топинг.

4. Учбурчакнинг томонлари 14, 18 ва 28 см. Катта томонига ўтказилган медианасини топинг.

5. Учбурчакнинг икки томони 7 ва 3 см. Катта томони каршисидаги бурчак 120^0 га тенг бўлса, унинг учинчи томонини топинг.

6. Учбурчакнинг томонлари 15, 20 ва 28 см. Катта томонига ўтказилган биссектриса уни қандай кесмаларга ажратади?

7. Учбурчакнинг икки томони 75 ва 78 см, учинчи томонига туширилган баландлиги 72 см. Бу баландлик шу томонини қандай кесмаларга ажратади?

8. Периметри 24 см бўлган учбурчак учларидан томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Ҳосил бўлган учбурчак периметрини топинг.

9. Куйидагиларга кўра учбурчак ясанг:

а) икки томони ва учинчи томонига утказилган баландлиги;

б) икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медианаси;

в) икки томони ва учинчи бурчак учидан ўтказилган баландлиги;

г) икки бурчаги ва учинчи бурчак учидан ўтказилган биссектрисаси.

Уйга вазифалар

1. Учбурчакнинг томони унга ўтказилган медианадан 4 см ортиқ ва қолган томонлари 28 ва 36 см бўлса, учбурчакнинг периметрини топинг.

2. Асосига туширилган баландлик, асос каршисидаги бурчакни 20^0 ва 30^0 бурчакларга ажратади. Асосига ёпишган бурчак биссектрисалари орасидаги бурчакни хисобланг.

3. Учбурчакнинг бурчаклари 5:6:7 каби. Катта томонига туширилган баландлик шу томон каршисидаги бурчакни қандай кисмларга ажратади?

4. Учбурчакнинг периметри 45 см, томонлари 4:5:6 нисбатда бўлса, унинг катта томонини топинг.

5. Учбурчакнинг томонлари 30 ва 40 см, учинчи томонига туширилган баландлиги 24 см бўлса, учинчи томонига туширилган медианасини топинг.

6. Учбурчакнинг томонлари 21 ва 24 см, улар орасидаги бурчак эса 120^0 га тенг бўлса, унинг периметрини хисобланг.

7. Икки томони орасидаги бурчак 60^0 ва улар 5:8 каби бўлиб, учинчи томони 21 см бўлса, унинг периметрини ҳисобланг.

8. Куйидагиларга кўра учбурчак ясанг:

а) учта медианаси буйича;

б) томони ва унга ўтказилган медианаси ва баландлиги бўйича.

9. Мос баландликлари тенг бўлган учбурчакларни ўзаро тенглигини исботланг.

10. Мос медианалари тенг бўлган учбурчакларнинг ўзаро тенглигини исботланг.

11. Куйидагиларга мос элементларига кўра учбурчакларнинг тенглигини исботланг:

а) икита бурчаги ва учинчи бурчак биссектрисаси;

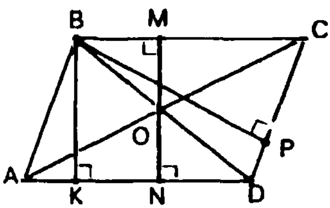
б) икки томони ва учинчи томонига ўтказилган баландлиги;

в) Икки бурчаги ва учинчи бурчак учидан туширилган баландлиги;

г) Бир учидан чиқувчи икки томони ва медианаси;

4. Параллелограмм ва унинг турли кўринишлари

1) Параллелограмм.



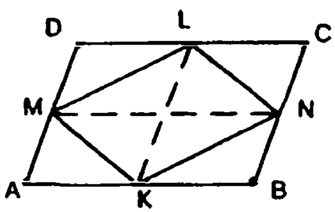
AC ABCD параллелограмм бўлсин. AB ॥ CD, BC ॥ AD, BD ва AC диагоналлари, O- диагоналлар кесишган нуқта, MN-BC ва AD га перпендикуляр бўлиб O нуқта орқали ўтади. BK ва BP лар AD ва DC ларга перпендикуляр бўлиб параллелограммнинг баландликлари бўлади.

$AD=BC=a$, $AB=CD=b$, $AC=d_1$, $BD=d_2$, $BK=h_a$, $BP=h_b$ деб белгиласак. $d^2_1+d^2_2=2(a^2+b^2)$; $a\cdot h_a= b\cdot h_b$

ABCD параллелограмм	<=>	$S_{AOB}=S_{DOC}$ ва $S_{BOC}=S_{AOD}$

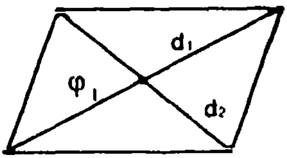
L, N, K, M - лар мос равишда DC, CB, AB, AD ларнинг ўртаси бўлсин.

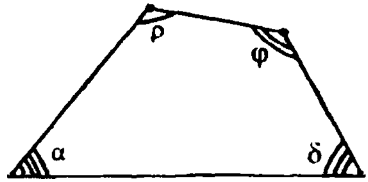
ABCD-параллелограмм	<=>	$LK+MN=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$



KMLN - параллелограмм.

2). Тўртбурчак.

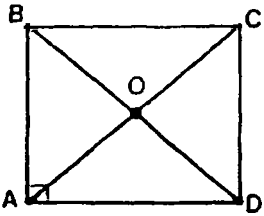




$S = \frac{d_1 d_2}{2} \sin\varphi$.

$\alpha+\beta+\varphi+\delta=360^0$.

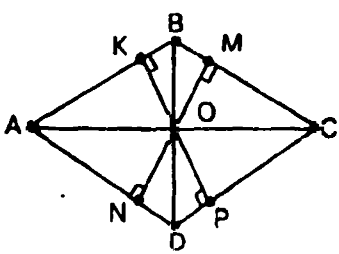
3) Тўғри тўртбурчак.



Томонлари AB=CD, BC=AD бўлган ABCD тўғри тўртбурчак бўлсин. BD=AC - диагонали; O - диагоналларининг кесишиш нуқтаси тўғри тўртбурчакнинг барча учларидан тенг узоқлашган нуқта OA=OB=OC=OD, AB=a, BC=b, AC=d деб белгиласак, $d^2=a^2+b^2$ ўринли.

ABCD га O марказли ички айлана чизиш имконияти хар доим бажарилмайди.

4) Ромб.



Томонлари AB=BC=CD=AD бўлган ABCD ромб бўлсин. Ромбнинг диагоналлари AC ва BD бўлиб $AC \perp BD$. AC ва BD диагоналларининг кесишиш нуқтасини O десак, AB,BC,CD ва AD томонларга туширилган OK, OM, OP ва ON перпендикуляр учун OK=OM=OP=ON тенглик ўринли.

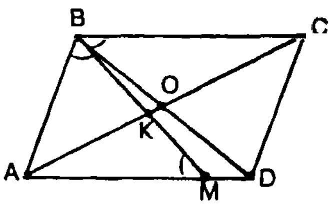
O нуқта ромбнинг томонларидан тенг узоқлашган нуқта. AB=a, AC=d_1,BD= d_2, десак $d_1^2+d_2^2=4a^2$ KP=MN=h ромбнинг баландлиги учун $2ah=d_2 \cdot d_1$ тенглик ўринли

$$\begin{cases} d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 \\ d_1 \cdot d_2 = 2ah \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \sqrt{a(a+h)} + a(a-h) \\ d_2 = \sqrt{a(a+h)} - a(a-h) \end{cases}$$

О марказли ташқи айлана чизиш ҳар доим бажарилмайди.

1-масала. ABCD параллелограммда $\angle B=120^0$, BM - биссектриса AD томонни 24 ва 16 см кесмаларга ажратади. Биссектриса AC диагоналнi қандай кесмаларга ажратади?

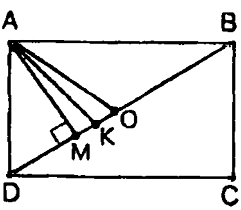
Ечиш. $\angle B=120^0$ бўлганда. AC катта диагонал бўлади.



Биссектриса AD ни M нуқтада кесиб ўтсин. Унда AM=24 см, MD=16см, бўлади. $\angle CBM=\angle ABM=\angle BMA=60^0$, $\angle BAD=60^0$, AB=AM=24, BC=AD==40см. ΔABCдан $AC^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120^0$ га асосан AC=56 см. Биссектриса хоссасига асосан:

$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC}$, AK = x десак, KC=56-x бўлади. Унда $\frac{24}{40} = \frac{x}{56-x}$ бўлиб, бундан x = 21 ни топамиз. Шундай қилиб, AK = 21см, KC = 56 - 21 = 35 см. Жавоб: 21 см, 35 см.

2-масала. ABCD тўғри тўртбурчак берилган. A учидан диагоналга туширилган перпендикуляр уни 63 ва 112 см кесмаларга ажратса, шу бурчак биссектриса диагоналнi қандай кесмаларга ажратади?



Ечиш. AB>AD бўлсин. BD-диагонал, O эса диагоналнинг ўртаси. AM $\perp$ DB ва AK - биссектрисани ўтказамиз. DM=63, MB=112 бўлгани учун BD=BM+ +MD=175. DM ва BM кесмалар AD ва AB нинг BD даги проекциялари.

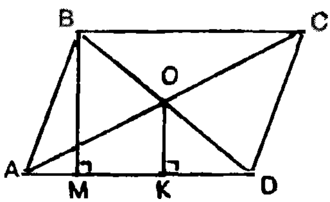
$AD^2=BD\cdot DM$; $AD^2=(5.7.3)^2$; AD=105 см. $AB^2=BD\cdot BM$; $AB^2=(5.7.4)^2$; AB=140. DK=x десак KB=175-x бўлади, AK-A бурчак биссектрисаси бўлгани учун

ΔABD дан $\dfrac{BK}{KD}=\dfrac{AB}{AD}$ Бундан $\dfrac{175-x}{x}=\dfrac{140}{105}$ $x=75$.

Шундай қилиб $DK=75$, $BK=100$. Жавоб 75 см, 100 см.

3-масала. Ромбнинг ўтмас бурчаги учидан туширилган перпендикуляр томонини айирмаси 11 см га тенг кесмаларга ажратади. Диагоналларнинг кесишиш нуқтасидан томонигача бўлган масофа 12 см бўлса, ромбнинг пириметрини топинг.

Ечиш. ABCD - ромб берилган бўлиб, O - диагоналлар кесишиш нуқтаси бўлсин.



$\angle B$ ўтмас бўлсин. B ва O нуқтадан AD томонига BM ва OK перпендикулярни ўтказамиз. AM ва MD учун шартга кўра $MD-MA=11$, $OK=12$, $AM=x$ десак, $MD=x+11$ ва $AD=AM+MD=2X+11$ бўлади. $OB=OD$ дан $MK=KD$.

$KD=\dfrac{1}{2}MD=\dfrac{1}{2}(x+11)$; $AK=AD-KD=(2x+11)-\dfrac{1}{2}(x+11)=\dfrac{1}{2}(3x+11)$.

$\angle AOD=90^0$ эканлигидан $OK^2=AK\cdot KD$; $12^2=\dfrac{1}{2}(3x+11)\dfrac{1}{2}(x+11)$.

Бундан $x=7$; $x=-\dfrac{65}{3}$ (шартни қаноатлиирмайди). Шундай қилиб $AD=25$, $p=4\cdot AD=100$. Жавоб: 100 см.

Машқлар

1. Қуйидаги элементлар маълум бўлса, ромбнинг диагоналларини топинг:

а) диагоналлар кесишган нуқтадан ўтказилган перпендикуляр томонини 16 ва 9 см кесмаларга ажратса;

б) ўтмас бурчак учидан туширилган перпендикуляр томонини 7 ва 18 см кесмаларга ажратса;

в) томони $12\sqrt{3}$, ўтмас бурчаги 120^0 бўлса;

г) томони 25 см, баландлиги 24 см бўлса;

д) диагоналлар айирмаси 10 см, томони 25 см бўлса;

е) диагоналлар орасидаги бурчак биссектрисаси томонини 30 ва 40 см бўлган кесмаларга ажратса;

ж) диагоналлар орасидаги бурчак биссектрисаси томонини 3:4 нисбатда бўлинувчи кесмаларга ажратади ва баландлиги 16,8 см бўлса.

2. Ромбнинг диагоналлари 30 ва 40 см. Унинг периметрини топинг.

3. Агар ромбнинг диагоналлари йиғиндиси 70 см, томони 25 см бўлса, унинг баландгини топинг.

4. Параллелограммнинг ўткир бурчаги 60^0, томонлари 10 ва 16 бўлса унинг кичик диагоналини топинг.

5. Параллелограммда диагоналлари орасидаги бурчак 60^0, диагоналлари 20 ва 12 см бўлса унинг катта томонини топинг.

6. Параллелограммда диагоналлар орасидаги бурчак 120^0, диагоналлари эса 60 ва 32 см бўлса, унинг кичик томонини топинг.

7. Параллелограммнинг диагоналлари 7 ва 11 см, кичик томони эса 6 см бўлса, иккичи томонини топинг.

8. Параллелограммнинг катта томонига туширилган баландлиги 24 см бўлиб, уни 7 ва 32 см бўлган кесмаларга ажратади. Параллелограммнинг кичик диагоналини ва периметрини топинг.

9. Иккита диагонали ва улар орасидаги бурчаги бўйича параллелограмм ясанг.

10. Кичик диагонали ва иккита қўшни бурчаклари бўйича параллелограмм ясанг.

Уйга вазифалар

1. Диагоналларининг айирмаси 10 ва томони 25 бўлган ромбнинг баландлигини топинг.

2. Ромбнинг баландлиги ва томонининг айирмаси 1 см, диагоналлари 3:4 нисбатда бўлса, унинг периметрини топинг.

3. Ромбнинг ўтмас бурчак учидан туширилган баландлиги томонини 7 ва 18 см бўлган кесмаларга ажратади. Ромбнинг диагоналини топинг.

4. Диагонали ва баландлиги бўйича ромб ясанг.

5. Диагоналлар йиғиндиси ва томони бўйича ромб ясанг.

6. Қуйидагиларга кўра параллелограммнинг диагоналларини топинг:

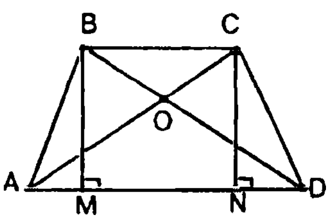
а) томонлари 7 ва 9 см, диагоналлари йиғиндиси 22 см бўлса;

б) томонлари 7 ва 9 см, диагоналлари 4:7 каби бўлса.

7. Параллелограммнинг ўткир бурчаги учидан диагоналига ўтказилган перпендикуляр, уни 18 ва 6 см бўлган кесмаларга ажратади. Агар параллелограмм томонларининг йиғиндиси 48 см бўлса, унинг диагоналларини топинг.

8. Икки диагонали ва ўткир бурчаги бўйича параллелограмм ясанг.

5. Трапеция



Айтайлик, ABCD трапеция бўлсин. Бунда BC ва AD- асослари бўлиб AD>BC бўлсин. AB ва CD ён томонлари. AC ва BD диагоналлари, BM=CN лар баландликлари. 0-диагоналлари кесишган нуқта.

$$\boxed{S_{ABCD} \text{ трапеция}} \iff \boxed{S_{AOB} = S_{DOC}}$$

Кичик асосига ёпишган бурчак ўтмас, катта асосига ёпишган бурчак ўткир бўлади. Агар $S_{BOC}=a$, $S_{AOD}=b$, бўлса $S_{ABCD}=(b-a)^2$ бўлади.

1. Агар AB=CD ва $\angle A=\angle D$ бўлса, ABCD га тенг ёнли трапеция дейилади. AD=a, BC=b, CD=AB=c, CP=MN=h деб белгиласак,

$QP=\frac{(a+b)}{2}$, $LE=\frac{(a-b)}{2}$ ни ёза оламиз, бу ерда QP ва LE лар трапециянинг ўрта чизиқлари.

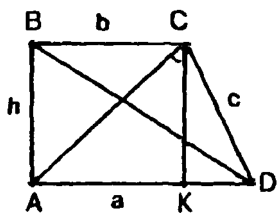
а) агар AC ⊥ CD бўлса. $CK^2=AK \cdot KD$. $h=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$;

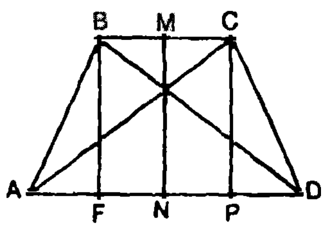
б) агар AC ⊥ CD бўлса, $h=\frac{(a+b)}{2}$;

в) агар AC A-бурчакни биссектрисаси бўлса, унда AB=CD=BC;

г) агар CA C-бурчакни биссектрисаси бўлса, унда CD=AB=AD бўлади.

2. Агар∠A=90° (ёки AB⊥AD) бўлса, ABCD га тўғри бурчакли трапеция дейилади.





AB⊥AD эканлигидан AD > AC бўлади.

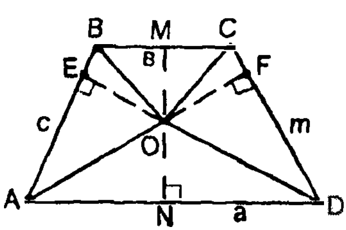
а) агар BD-CB бурчак биссектрисаси бўлса,унда BC=CD бўлади, яъни b = c;

б) агар BD-B бурчак биссектрисаси бўлса,унда BA=DA яъни h=a;

в) агар CA - C бурчак биссектрисаси бўлса, унда CD=AD бўлади, яъни a=c;

г) агар AC-A бурчак биссектрисаси бўлса, унда AB=BC бўлади, яъни h=b.

3. Айтайлик ABCD трапецияда AD ва BC асослари бўлиб AD >BC бўлсин. Агар трапеция томонларидан баробар узоқликда ётувчи O нуқта мавжуд бўлса, AB + CD = AD +BC тенглик ўринли бўлади.



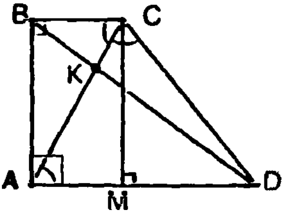
AO, BO, CO, DO лар A, B, C ва D бурчакларнинг биссектрисалари бўлганлиги учун

$\angle ABO+\angle BAO=\frac{1}{2}(\angle B+\angle A)=$

$\frac{1}{2} \cdot 180^0 = 90^\circ$.

яъни $\angle BOA = 90^0$ шунингдек, $\angle COD = 90^0$ бўлади. $OF^2 = CF \cdot FD$; $OC^2 = CD \cdot CF$; $OD^2 = CD \cdot DF$; $OC^2 + OD^2 = CD^2$

1-масала. Тўғри бурчакли трапециянинг диагонали ўтмас бурчакни тенг иккига ва иккинчи диагоналини 2:5 нисбатда бўлади. Агар баландли 24 см бўлса, трапециянинг периметрини топинг.

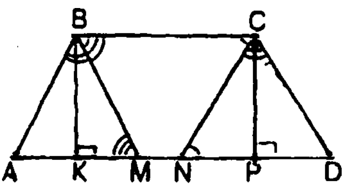


Ечиш. Айтайлик ABCD трапеция берилган, AD ва BC лар асослари бўлиб, AD> BC бўлсин. $\angle A = \angle B = 90^0$. $\angle C > 90^0$, $\angle D < 90^0$. CA- диагонал C бурчакни тенг иккига бўлса.
$\angle BCA = DCA$ ва $\angle ACD = \angle CAD$.

$\angle ACD = \angle CAD$ дан CD=AD келиб чиқади. CA диагонал BD ни K нуқтда кесиб ўтсин. BA<CD ва CD=AD эканлигидан BA<AD, бундан BK<BD ва $\frac{BK}{KD} = \frac{2}{5}$. BA=24. ΔBCD да CK- ΔBCD нинг биссектрисаси бўлгани учун $\frac{BC}{CD} = \frac{BK}{KD} = \frac{2}{5}$

BC = 2x, CD = 5x деб белгилайлик. CM $\perp$ AD ни ўтказамиз. CM=AB=24см, MD=3x, ΔCMD дан $CD^2 - DM^2 = CM^2$ ни тадбиқ қилиб x=6 (см) ни топамиз. p=24+12·6=96 см. Жавоб 96 см.

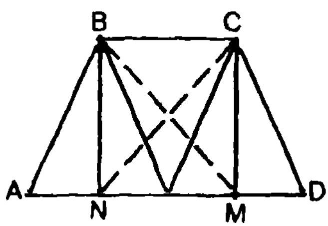
2-масала. Тенг ёнли трапецияда ўтмас бурчак биссектрисалари катта асосини 3 та тенг қисмга ажратади. Агар трапециянинг баландлиги $5\sqrt{3}$ см, асосига ёпишган бурчаклари 120^0 бўлса, унинг периметрини топинг.



Ечиш. Айтайлик ABCD трапецияда AD ва BC асослари бўлиб AD>BC ва AB=CD бўлсин. BK=CP=h=$5\sqrt{3}$ см. $\angle B = \angle C = 120^0$ BM ва CN лар B ва C бурчакларнинг биссектрисалари бўлгани учун AM = MN = ND. $\angle ABM=\angle MBC$; $\angle ABM=\angle CBM$. Бундан $\angle ABM=\angle AMB$ ва AB=AM.

$\angle BAM=\angle ABM=\angle AMB=60^0$. $AB = \dfrac{BK}{\sin 60^0} = 5\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}} =10$ см.

АД=3АМ=3 · 10=30(см). CN ∥ AB; BC=AN=2AM=2 · 10=20 (см) периметр p=70 см.

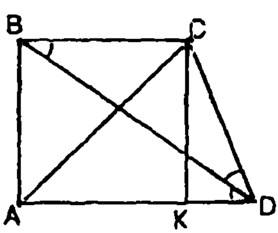


Иккинчи бир ҳол бўлиши мумкин. CN ва BM лар $\angle C$ ва $\angle B$ нинг биссектрисалари. AN=NM=MD. $\angle ABM = \angle BAM = \angle BMA =60^0$ ΔABM-тенг томонли. AN=NM дан BN медианани баландлик бўлишлиги келиб чиқади. BN=NM дан BN медианани баландлик бўлишлиги келиб чиқади.

$BN=5\sqrt{3}$ см; $AB=\dfrac{BN}{\sin60^0}=\dfrac{5\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}}=10$ см. AB=AM=10 см;

AN=5 см; AD=15 см, CN ∥ AB; AN=BC=5 см. Шундай қилиб p=40см. Жавоб: 70 см ёки 40 см.

3-масала. Тўғри бурчакли трапециянинг катта диагонали ўткир бурчак биссектрисаси бўлади. Трапеция асосларининг йиғиндиси 31 см, ён томонлари йиғиндиси 25 см бўлса, унинг асосларини ва баланлигини топинг.



Ечиш. Айтайлик, ABCD нинг асослари BC ва AD учун BC<AD бўлсин. $\angle A=\angle B=90^0$, $\angle C>90^0$, $\angle D <90^0$, AB ва CD ён томонлари ва CD > AB, BC + AD=31 см, AB + +CD = 25 см, D бурчакнинг биссектрисаси -DB, $\angle ADB=\angle CDB$,

$\angle CBD=\angle BDA$ бўлгани учун $\angle CBD=\angle CDB$ ва BC = CD DC = x, CB =x, AB = 25 - x, AD = 31 -x деб белгилаб олиб, KD = AD - AK = AD - BC = 31 - x - x = 31 - 2x, CK = 25-x ни ёзамиз. ΔCKD дан $CD^2 = CK^2 + KD^2$ дан фойдаланиб $x = 13$ ни аниқлаймиз. Шундай қилиб AB =12 см, BC = 13 см, AD=18см ни топамиз. Жавоб: 13 см, 18 см ва 12 см.

Машқлар

1. Тенг ёнли трапеция учун қуйидагилар маълум бўлса, унинг бурчакларини топинг;

а) ўтмас бурчак биссектрисаси ён томонларининг бирига параллел;

б) диагонали баландлигидан 4 марта катта ва ўткир бурчагини тенг иккига бўлади;

в) диагонал ён томонига перпендикуляр бўлиб ўткир бурчагини тенг иккига бўлади;

г) диагонал ён томонига перпендикуляр бўлиб ўтмас бурчагидан туширилган баландлиги билан 60^0 ли бурчак ташкил этади.

2. Қуйидаги элементлар бўйича тенг ёнли трапеция ясанг:

а) катта асоси ва ўтмас бурчак диагонали бўйича;

б) кичик асоси ва ўткир бурчак диагоналига кўра.

3. Тенг ёнли трапециянинг асослари 25 ва 7 см, диагонали эса ён томонига перпендикуляр бўлса, унинг ён томонини топинг.

4. Қуйидаги элементлар берилган бўлса тенг ёнли трапециянинг асосларини топинг:

а) ўрта чизиғи 15 см ва асослари 3:2 каби;

б) ён томони ва асослари 5:2:8 нисбатда ва баландлиги 16 см;

в) ён томони, баландлиги ва диагонали 13:12:20 нисбатда, ўрта чизиғи эса 32 см.

5. Тенг ёнли трапециянинг қуйидаги элементлари берилган бўлса, унинг периметрини топинг:

а) диагонал, ён томони ва ўрта чизиғи 20:13:16 нисбатда, баландлиги эса 24см;

б) диагонали, ён томони ва асосларининг айирмаси 20:13:10 нисбатда ва баландлиги 24 см;

в) ўткир бурчаги 60°, ўтмас бурчак биссектрисаси кичик асосини тенг иккига, 12 см ли кесмага ажратади;

г) ўтмас бурчаги 120°, ўткир бурчаги биссектрисаси кичик асосини тенг иккита, 12 см ли кесмага ажратади;

д) диагоналлари ўткир бурчак биссектрисаси бўлиб кесишиш нуқтасида 11:15 нисбатда бўлинади ва баландлиги 24 см.

6. Тенг ёнли трапециянинг баландлиги, ён томони ва диагонали мос равишда 12, 15 ва 26 см бўлса, унинг асосларини топинг.

7. Тўғри бурчакли трапециянинг ён томонлари ва диагонали мос равишда 12, 15 ва 20 бўлса, унинг асосларини топинг.

8. Асослари ва катта диагонали мос равишда 7, 16 ва 20 см бўлган тўғри бурчакли трапециянинг ён томонини топинг.

9. Қуйидаги элементларига кўра тўғри бурчакли трапециянинг периметрини топинг:

а) диагонали ўткир бурчагини тенг иккитага бўлади ва ўтмас бурчаги учидан туширилган баландлигини 9 ва 15 см ли кесмаларга ажратади;

б) кичик асоси 30 см ва диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлади, ўтмас бурчак учидан туширилган баландлигини 5:3 нисбатда бўлади;

в) диагонали ўтмас бурчагини тенг иккитага бўлади ва асослари 6 ва 15 см;

г) диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлиб, асослари 15 ва 24 см;

д) асосларининг айирмаси 9 см ва кичик диагонали $12\sqrt{2}$ см бўлиб тўғри бурчагини биссектрисаси бўлади.

10. Трапециянинг асослари 28 ва 11 см, ён томонлари 25 ва 26 см бўлса, унинг баландлигини топинг.

11. Трапециянинг асослари 6 ва 16 см. Ён томонларидан бири 10 см ва катта асоси билан 60^0 ли бурчак ташкил этади. Трапециянинг диагоналини топинг.

Уйга вазифалар

1. Тенг ёнли трапециянинг қуйидаги элементларига кўра унинг баландлигини топинг:

а) асослари 25 ва 39 см, диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлса;

б) диагонал ўтмас бурчагини тенг иккига бўлади ва ўрта чизиғини 3 ва 13 см бўлган кесмаларга ажратса.

2. Тенг ёнли трапециянинг қуйидаги элементларига кўра унинг периметрини ҳисобланг:

а) баландлиги 60 см, диагоналлари ўткир бурчакларининг биссектрисалари бўлиб кесишиш нуқтасида 13:5 нисбатда бўлинса;

б) баландлиги 48 см, диагоналлари ўтмас бурчак биссектрисалари бўлиб 3:13 нисбатда бўлинса;

в) диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлиб ўтмас бурчак учидан туширилган баландлигини 75 ва 21 см ли кесмаларга ажратса.

3. Қуйидаги элементлари бўйича тенг ёнли трапеция ясанг:

а) ўткир бурчаги ва ўтмас бурчак биссектрисаси бўлган диагонали бўйича;

б) ўтмас бурчаги ва ўткир бурчак биссектрисаси бўлган диагонали бўйича.

4. Қуйидаги элементлари бўйича тўғри бурчакли трапеция ясанг:

а) ўтмас бурчаги ва тўғри бурчак биссектрисаси бўлган кичик диагонали;

б) ўтмас бурчаги ва тўғри бурчак биссектрисаси бўлган катта диагонали.

5. Тўғри бурчакли трапециянинг кичик диагонали тўғри бурчак биссектрисаси, асосларининг айирмаси 30 см, ён томонларининг айирмаси 18 см бўлса унинг периметрини топинг.

6. Тўғри бурчакли трапециянинг кичик диагонали ўтмас бурчак биссектрисаси, асослари йиғиндиси 21 см, ён томонлари йиғиндиси 25 см бўлса, унинг баландлиги ва асосларини топинг.

7. Катта диагонали тўғри бурчакли трапециянинг ўткир бурчагини тенг иккига бўлиб, иккинчи диагоналини 13:18 каби кесмаларга ажратади. Агар баландлиги 36 см бўлса, унинг асосларини топинг.

8. Тўғри бурчакли трапециянинг асослари 25 ва 32см, катта диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлса, унинг периметрини топинг.

9. Тўғри бурчакли трапециянинг ўтмас бурчак биссектрисаси катта асосини 5 ва 15 см ли кесмаларга ажратади. Агар кичик асоси 11 см бўлса, унинг периметрини топинг.

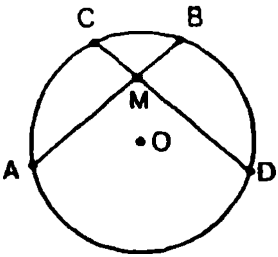
10. Трапециянинг асослари 20 ва 60 см, ён томонлари 13 ва 37 см бўлса, унинг баландлигини топинг.

11. Асослари 3 ва 14 см, диагоналлари 25 ва 26 см бўлган трапециянинг баландлигини топинг.

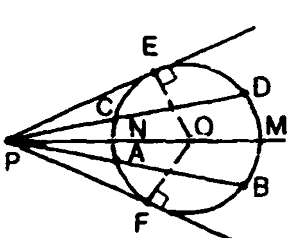
12. Трапециянинг ён томони 10 см ва узунлиги 22 см бўлган катта асоси билан 60^0ли бурчак ташкил этади. Агар асослари йиғиндиси 28 см бўлса, унинг иккинчи томонини топинг.

13. Кичик асоси ва ён томони 120^0 ли бурчак ҳосил қилади ва мос равишда 15 ва 10 см. Агар трапециянинг асослари йиғиндиси 46 см бўлса, унинг иккинчи ён томонини топинг.

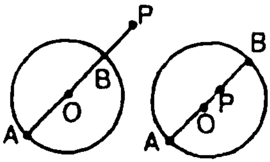
6. Айлана ва унинг элементлари



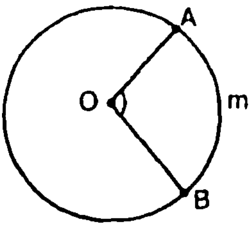
1) O марказли айлана берилган бўлиб, AB ва CD ватарларининг кесишиш нуқтасини M билан белгиласак. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ га эга бўламиз. Агар ватарлар кесишса, кесишиш нуқтасидан қандай нисбатда бўли-нишидан қатъий назар ватар кесмаларининг кўпайтмаси ўзгармас сон бўлади.



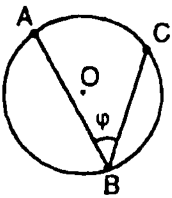
2) Айтайлик O- айлана маркази, P эса ундан ташқаридаги нуқта бўлсин. PM, PB, PD - кесувчи, PF ва PE уринмалари ўтказамиз. OF ва OE айлана радиуси, $EP = FP$, $BP \cdot AP = MP \cdot NP = DP \cdot CP$, FP ва AP, BP кесмалар учун $FP^2 = BP \cdot AP$ тенглик ўзгармас сон бўлади, яъни уринманинг квадрати кесувчининг ташқи кесмага кўпайтмасига тенг бўлади.



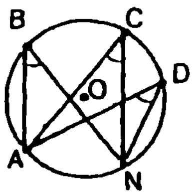
3) Айтайлик, O - айлана маркази, AB - диаметр бўлсин. Агар P нуқта айлана ташқарисида бўлса AP>AB, агар P нуқта айлана ичида ётса AP<AB бўлади.



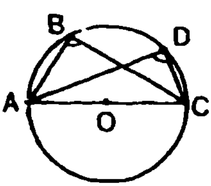
4) O - айлана марказида, A ва B лар айланада ётсин. Унда AOB-марказий бурчак, AB ёй $\smile AmB$. $\angle AOB = \smile AB$, марказий бурчак ўзи тиралган ёй билан ўлчанади.



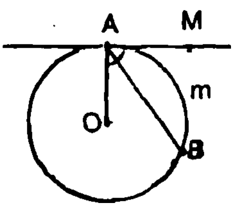
5) а) O - айлана маркази. A, B ва C нуқталар айланага тегишли бўлсин. Унда $\angle ABC$ - ички чизилган бурчак



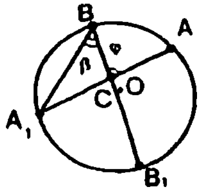
б) айтайлик, A, B, C ва D айланага тегишли бўлсин. Унда $\angle ABN = \angle ACN = \angle ADN$, яъни битта ёйга тиралган барча бурчаклар тенг бўлади



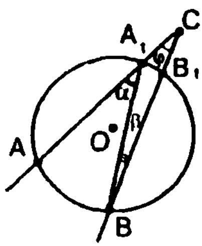
в) айтайлик, A, B, C ва D, O марказли айланада ётсин, AC-диаметрга тиралган ҳар қандай бурчак тўғри бурчак бўлади;



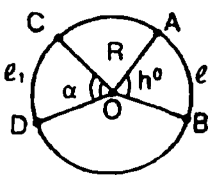
г) айтайлик, A, B нуқталар O марказли айланага тегишли ва AM уринма бўлсин.
Унда $\angle MAB = \frac{1}{2} \cdot \smile AmB$;



д) агар A, B, A_1, B_1 айланага тегишли бўлиб AA_1 ва BB_1 ватарлар C нуқтада кесишса $\varphi=\angle ACB$ бурчак ΔCBA_1 учбурчакнинг ташқи бурчаги бўлади. Унда $\varphi=\alpha+\beta$ бу ерада $\alpha=\angle AA_1B$, $\beta=\angle A_1BB_1$ бўлиб мос равишда AB ва A_1B_1 ёйларга тиралади;

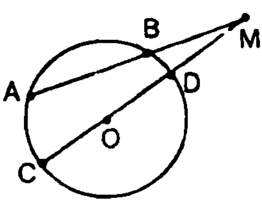


е) айтайлик A_1 ва B_1 нуқталар CA ва CB ларнинг айлана билан кесишган нуқталари бўлсин. $\alpha=\angle BA_1A$ ва $\beta=\angle A_1BC$ деб олсак $\alpha=\varphi+\beta$ ни ҳисобга олиб α ва β ни мос равишда AB ва A_1B_1 ёйларига тиралади ва $\varphi=\frac{1}{2}(\overset{\smile}{AB}-\overset{\smile}{A_1B_1})$ деб ёза оламиз;



ж) айлана радиуси R=OA, айлана узун- $C=2\pi R$. $\ell=\frac{2\pi R}{360}.n^0=\frac{\pi Rn}{180}^0$, бу ерда ℓ-AB ёй узунлиги n°ли марказий бурчакка тиралади. $\ell_1=\frac{2\pi R}{2\pi\alpha}=R\alpha$, ℓ_1-CD ёй узунлиги, α радианли марказий бурчакка тиралади.

1-масала. Айлана ташқарисидан ўтказилган кесувчининг ички ва ташқи кесмалари айирмаси 2 см, айланагача бўлган масофа 4 см га тенг. Агар айлана диаметри 32 см бўлса кесувчини узунлигини топинг.

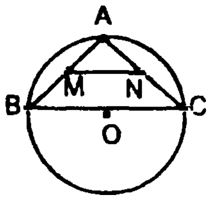


Ечиш. Айтайлик айлана ташқарисидаги M нуқтадан AM ва CM кесувчини ўтказайлик. CM кесувчи O нуқта орқали ўтади. AM кесувчининг ички кесмаси AB, ташқи кесмаси BM бўлгани учун

AB-BM=2 см. CD - диаметр, DM эса - M нуқтадан айланагача бўлган масофа.

CD=32 см, DM=4 см, CM=36 см. BM=x десак AB=x+2, AM=2x+2 (x>0) бўлади. Кесувчининг хоссасига асосан $AM \cdot BM = CM \cdot DM$, яъни $(2x+2) \cdot x = 36 \cdot 4$; $X_1 = 8$; $X_2 = -9$ бу масала шартини қаноатлантирмайди. Шундай қилиб $AM = 2 \cdot 8 + 2 = 18$ см. Жавоб: 18 см.

2-масала. Айланага тегишли нуқтадан 36 ва 40 см ли ватар ўтказилган. Агар ватарларни тенг иккига бўлувчи нуқталар орасидаги масофа 34 см бўлса айлананинг диаметрини топинг.



Ечиш. Айтайлик O марказли айлананинг A нуқтасидан AB=36 см ва AC=40 см ватар ўтказилган бўлсин. M ва N лар мос равишда ватарларнинг ўртаси бўлсин. Шартга кўра MN=34см; MN- ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлгани учун $BC = 2MN = 2 \cdot 34 = 68$.

$\angle BAC = \alpha$ деб белгилайлик. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$; $68^2 = 36^2 + 40^2 - 2 \cdot 36 \cdot 40 \cdot \cos\alpha$

Бундан $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $90^0 < \alpha < 180^0$.

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \cdot \quad \frac{BC}{\sin\alpha} = 2R,\ 2R = \frac{68}{0{,}8} = 85 \text{ см.}$$

Жавоб: 85 см.

3-масала. Худди шу масалани AB=52, BC=60 см, MN=8 см бўлган ҳол учун ечайлик.

BC=16. $R = \dfrac{abc}{4S}$ дан фойдаланамиз, бу ерда R-ташқи чизилган айлана радиуси; a, b, c - учбурчак томонлари,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, $p = 64$, $S = 8 \cdot 12 \cdot 4$.

Шундай қилиб, 2R=65. Жавоб: 65 см.

Машқлар

1. Айланага тегишли нуқтадан иккита ватар ўтказилган. Улардан бири 100^0 ли, иккинчиси 80^0 ли ёйга тиралади. Шу ватарлар орасидаги бурчакни топинг.

2. Ватар 80^0 ли ёйга тиралади. Шу ватар билан ватар учи орқали ўтувчи уринма орасидаги ўткир бурчакни топинг.

3. Ватар учларидан ўтказилган радиуслар орасидаги бурчак 40^0 га тенг. Шу ватар билан ватар учидан ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.

4. Иккинчи ватарни кесувчи ватар узунлиги 24 см бўлиб уни 10 ва 8 см кесмаларга ажратади. Биринчи ватар кесмаларини узунликларини топинг.

5. Узунлиги 30 см бўлган ватар диаметрга перпендикуляр бўлиб уни айирмаси 40 см бўлган кесмаларга ажратади. Айлана радиусини топинг.

6. Айлана нуқтасидан диаметрга перпендикуляр ўтказилган бўлиб уни 16 ва 9 см ли кесмаларга ажратса, перпендикуляр узунлигини топинг.

7. Айлана нуқтасидан диаметрга перпендикуляр ўтказилган бўлиб уни 4:9 нисбатда бўлади. Агар перпендикулярнинг узунлиги 12 см бўлса, айлана радиусини ҳисобланг.

8. Агар қуйидагилар маълум бўлса, айлана радиусини ҳисобланг:

а) айлана нуқтасидан диаметр учларигача бўлган масофа 16 ва 12 см бўлса;

б) айлана нуқтасидан диаметр учларигача бўлган масофалар нисбати 0,75 га, шу нуқтадан диаметргача бўлган масофа 12 см бўлса;

в) марказдан бир томонда иккита 48 ва 30 см ли ватарлар ўтказилган ва улар орасидаги масофа 13 см бўлса;

г) айлана ташқарисидаги нуқтадан кесувчи ўтказилган бўлиб ички ва ташқи кесмалар 8 ва 15 см. Шу нуқтадан айлана марказигача бўлган масофа 13 см бўлса;

д) айлана ташқарисидаги нуқтадан 32 см ли уринма ўтказилган ва шу нуқтадан айланагача бўлган масофа 24 см бўлса;

е) айлана нуқтасидан узунлиги 12,2 бўлган иккита ватар ўтказилган.Ватарнинг бири 90^0 ли ёйга тиралган бўлса.

9. Айланада ётган нуқтадан диаметр учларигача бўлган масофалар айирмаси 10 см, айлана радиуси 25 см бўлса, шу нуқтадан диаметргача бўлган масофани топинг.

10. Айланада ётган нуқтадан узунлиги 16 ва 12 см бўлган перпендикуляр ватарлар ўтказилган. Ватарларнинг учлари орасидаги масофани топинг.

11. Айланадан ташқарида олинган нуқтадан узунлиги 12 см бўлган уринма ўтказилган. Агар айлана радиуси 5 см бўлса, олинган нуқтадан айланагача бўлган масофани топинг.

12. Ватар иккинчи ватарни кесиб, уни узунлиги 6 ва 16 см бўлган кесмаларга ажратади ва ўзи 3:2 нисбатда бўлинади. Биринчи ватарни узунлигини топинг.

13. Айланадан ташқарида олинган нуқтадан уринма ва кесувчи чизиқ ўтказилган. Кесувчи кесмалар 18 ва 50 см. Уринмани узунлигини топинг.

14. Айлана ташқарисидан олинган нуқтадан ўтказилган кесувчининг ташқи қисми 8 см, ички қисми 4 см га тенг. Айлана диаметрини топинг.

15. Айланада ётган нуқтадан ватарлар учларигача масофалар 15 ва 20 см, улар орасидаги бурчак эса 90^0 га тенг. Шу нуқтадан ватаргача бўлган масофани топинг.

Уйга вазифалар

1. **Айлананинг** нуқталари уни 3:4:5:6 нисбатдаги **қисмларга ажратади**. Учлари шу нуқталарда бўлган қавариқ **тўртбурчакнинг** бурчакларини топинг.

2. Айланада ётган нуқтадан узунлиги 5 ва 8 см бўлган ватарлар ўтказилган. Бу ватарлар учлари орасидаги кесма 120° ли ёйга тиралади. Агар кесма ва нуқта айлана марказининг турли томонида ётса шу кесманинг узунлигини топинг.

3. Айлана ватари 60° ёйга тиралади. Агар айлана диаметри 24 см бўлса, ватарни топинг.

4. Айлана ётган нуқтадан узунлиги 10 ва $5\sqrt{3}$ см бўлган ватарлар ўтказилган. Ватарлар учларини бирлаштурувчи. кесма, 60° ли ёйга тиралади. Агар кесма ва нуқта айлана марказидан бир томонда ётса, айлана диаметрини ҳисобланг.

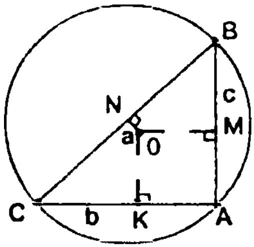
5. Узунлиги 24 см бўлган ватар диаметрга перпендикуляр ва уни айирмаси 7 см га тенг бўлган кесмаларга ажратади. Айлана радиусини ҳисобланг.

6. Айланада ётган нуқтадан диаметрига ўтказилган перпендикуляр уни 9:16 нисбатли кесмаларга ажратади. Айлана диаметри 50 см. Перпендикулярларнинг узунлигини ҳисобланг.

7. Айланада ётган нуқтадан айирмаси 8 см бўлган иккита перпендикуляр ватарлар ўтказилган. Агар айлана радиуси 20 см бўлса, шу ватарларни топинг.

8. Айланадан ташқаридаги нуқтадан ички ва ташқи қисмлари 3:2 каби нисбатда бўлган кесувчи ўтказилган. Агар шу нуқтадан айланагача бўлган масофа 10 см, айлана радиуси 7 см бўлса, шу кесувчининг узунлигини ҳисобланг.

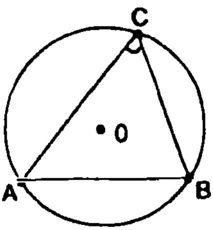
7. Айлана ва кўпбурчаклар



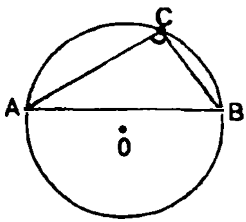
1) **Учбурчакка ташқи чизилган айлана, ABC** - учбурчак; а, в, с - унинг томонлари узунликлари; AB, AC, BC томонларига ўтказилган OM, ON, OK медианалари кесишган нуқтаси (ўрта перпендикулярлар) ёки ташқи чизилган айлана маркази.

OA=OB=OC=R - айлана радиуси. $R=\dfrac{a}{2\sin\widehat{A}}$, $R=\dfrac{abc}{4S}$, бу ерда S-ABC учбурчакнинг юзи.

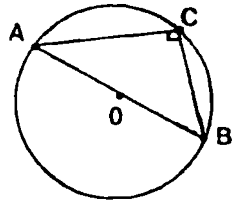
а) Ўткир бурчакли учбурчак | б) Ўтмас бурчакли учбурчак | в) Тўғри бурчакли учбурчак



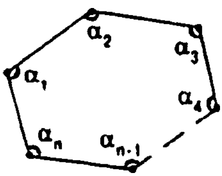
$\angle C<90^{\circ}$



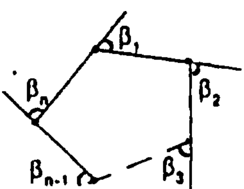
$\angle C>90^{\circ}$



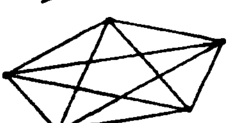
$\angle C=90^{\circ}$



n - бурчак ички бурчакларининг йиғиндиси $\alpha_1+\alpha_1+\alpha_1+....+\alpha_n=180^{\circ}$ (n-2) га тенг

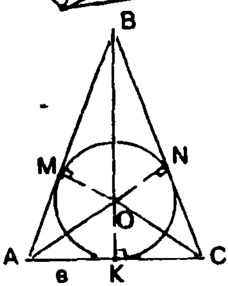


n - бурчак ташқи бурчакларининг йиғиндиси $\beta_1+\beta_1+\beta_1+....+\beta_n=360^{\circ}$ га тенг



n - бурчак диагоналалрининг сони

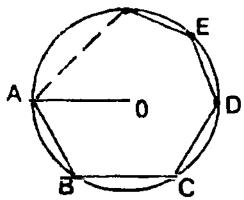
$$N = \frac{n(n-3)}{2}$$ ға тенг



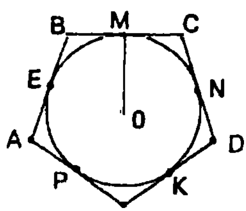
2) **Учбурчакка ички чизилган айлана.** O-A,B ва C бурчакларнинг AO, BO ва CD биссектрисалдарини кесишган нуқтаси. AB, BC ва AC томонларига OM, ON ва OK перпендикулярларни ўтказамиз. OM=ON=OK=r

ички чизилган айлана радиуси $r = \frac{2S}{a+b+c}$, S-ABC учбурчакнинг юзи.

3) Ички ва ташқи чизилган кўпбурчаклар.



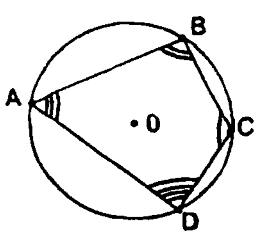
а) ички чизилган кўпбурчак (айлана, кўпбурчакка ташқи чизилган). Кўпбурчакнинг барча нуқталари айланада ётади. OA=OB=OC=OD=OE=R ташқи чизилган айлана радиуси;



б) ташқи чизилган кўпбурчак (айлана, кўпбурчакка ички чизилган). Барча томонлари айланага уринади. O нуқтадан AB, BC, CD, DE томонларга ON, OK, OF, OP, OM перпендикулярларни ўтказамиз ON=OK=OF=OP=OM=r ички чизилаган радиуси,

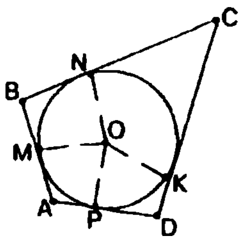
$r = \frac{2S}{P}$, бу ерда S ва P ташқи чизилган кўпбурчакнинг юзи ва периметри.

4) Ички ва ташқи чизилган тўртбурчаклар.



а) тўртбурчакка ташқи чизилган айлана (тўртбурчак айланага ички чизилган) A,B, C ва D айланада ётсин. ABCD - ички чизилган тўртбурчак. $\angle A+\angle C = 180^\circ$, $\angle B+\angle D=180^\circ$. Айланага ички чизилган кўпбурчакнинг қарама-қарши бурчаклари йиғиндиси 180° га тенг.

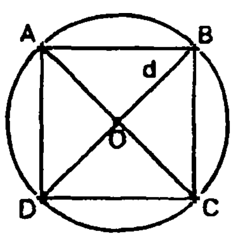
Агар тўртбурчакда қарама-қарши бурчаклари 180° га тенг бўлса, унда тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин ёки $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, $DC \cdot AB + AD \cdot BC = DB \cdot AC$;



б) тўртбурчакка ички чизилган айлана. Айланага ташқи чизилган кўпбурчакнинг қарама-қарши томонлари йиғиндиси тенг унда тўртбурчакка ички айлана чизиш мумкин ёки тўртта биссектриса бир нуқтада кесишади?

Айлана, ABC D тўртбурчакка ички чизилган	⇔	BC + A D = BA + C D ABC D - квадарат ⇑ ⇓ тўртта биссектрисса битта нуқтада кесишади.

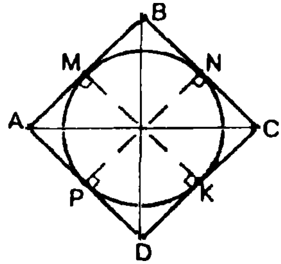
Айлана, ABC D Туртбурчакка ташки чизилган	⇔	$\angle BAD + \angle BCD = \angle CBA + \angle CDA$ ⇑ ⇓ $AM \cdot MC = BM \cdot MD$, M - диоганаллар кесишган нуқта



в) тўғри тўртбурчак ва айлана. ABCD тўғри тўртбурчак, AC=BD=d унинг диагонали. O-ташқи чизилган айлана маркази. O-AC ва BD диагоналларининг ўртаси AO=OC=OB=OD=R ташқи чизилган айлана маркази.

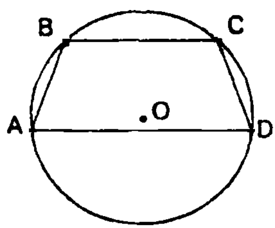
$R = \frac{d}{2}$. Тўғри тўртбурчакка ҳар доим ташқи айлана чизиш мумкин. Тўғри тўртбурчакка ҳар доим ички айлана чизиш мумкин эмас.

г) ромб ва айлана

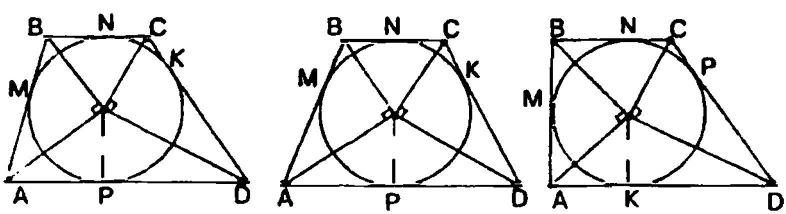


ABCD ромб, AC ва BD диагоналлари перпендикуляр. $AC \perp BD$, $AC = d_1$, $BD = d_2$. O диагоналлари кесишган нуқта. OM, ON, OK ва OP ромбнинг томонларига туширилган баландликлар.

MK = PN = **h** ромбнинг баландлиги. OM = ON = OP = =OK = r - ички чизилган айлана радиуси. $r = \frac{h}{2}$. ΔAOD дан $OP^2 = AP \cdot PD$. Ромбда ҳар доим ички айлана чизиш мумкин. Ромбга ҳар доим ташқи айлана чизиш мумкин эмас;



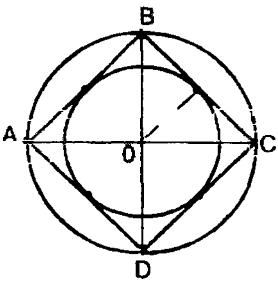
д) трапеция ва айлана. ABCD - ички чизилган трапеция. BC ва AD -унинг асослари. O ташқи чизилган айлана маркази. Агар AB=BC бўлса трапецияга ташқи айлана чизиш мумкин.



ABCD трапеция айланага ташқи чизилган. $AB \neq CD$.

Агар AD + BC = AB + CD бўлса трапецияга ички айлана чизиш мумкин. O - ички чизилган айлана маркази. A, B, C ва D бурчакларнинг биссектрисалари AO, BO, CO ва DO, OM, ON, OK, OP - трапеция томонларига, перпендикулярлар. OM = ON = OK = OP = r - ички чизилган айлана радиуси. $\angle AOB = \angle COD = 90°$. NP = h - трапециянинг баландлиги.

$$r = \frac{h}{2}; \quad OM = \frac{AO \cdot OB}{AB}; \quad OK = \frac{CO \cdot DO}{CD};$$

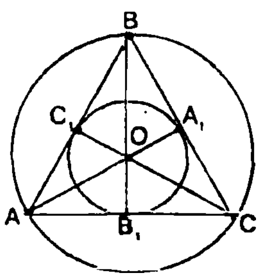


е) квадрат ва айлана. ABCD-квадрат, AB=a, 0-квадратнинг диагоналларини кесишиш нуқтаси; AO = 0B = OC = OD= = R - ташқи чизилган айлана радиуси:

$R= \frac{a}{\sqrt{2}}$ OM,ON,OP ва OK - квадратнинг томонларига ўтказилган перпендикулярлар. OM=ON=OP=OK=r - ички чизилган айлана радиуси:

$$r = \frac{a}{2}.$$

ABCD квадратга ҳар доим умумий марказлиички ва ташқи айланалар чизиш мумкин.



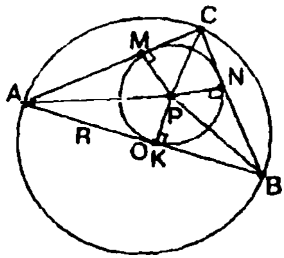
ж) тенг томонли учбурчак ва айлана. ABC-тенг томонли учбурчак. AB = BC = AC = a. 0-AA_1, BB_1, CC_1 биссектрисалар ёки медианалар ёки баландликлар кесишган нуқта. OA=OB=OC=R - ташқи чизилган айлана радиуси: $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$OA_1=OB_1=OC_1=r$ ички чизилган айлана радиуси:

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; \quad R=2r.$$

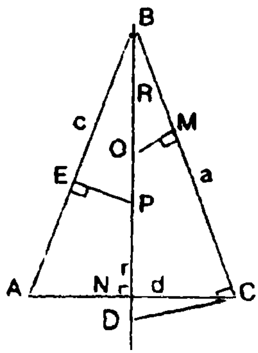
з) Тўғри бурчакли учбурчак ва айлана.

ABC-тўғри бурчакли учбурчак. AB=c - гипотенуза, AC=b, BC=a - катетлари. 0-ташқи чизилган айлана маркази,



$R = \dfrac{c}{2}$. O- гипотенуза ўртаси. Р-ички чизилган айлана маркази, r - ички чизилган айлана радиуси: $r = \dfrac{a+b-c}{r}$.

1-масала. Асоси а га, ён томони b га тенг бўлган тенг ёнли учбурчак берилган. Ички ва ташқи чизилган айлана радиусларини ва асосига ўтказилган баландлигини топинг.



Ечиш. Айтайлик, АВС - учбурчакда АВ=ВС бўлсин. Шартга кўра АВ=ВС=b ва АС=а, АС-асосига туширилган баландлик. BD, ВС ён томонининг ўртаси М, О, ОМ ва BD ўрта перпендикулярларининг кесишиш нуқтаси. О В = ОС = R ташқи чизилган айлана радиуси, Р нуқта АВС ва ВАС бурчакларнинг BD ва AD биссектрисалар кесишган нуқта РЕ-АВ томонга ўтказилган баландлик. ВД=РЕ=r - ички чизилган айлана радиуси. BD ни ташқи чизилган айланани N нуқтада кесгунча давом эттирамиз. BN-ташқи чизилган айлана диаметри. $\angle BCN = 90°$ бундан BCN учбурчак тўғри бурчакли. CD-BN диаметрга перпендикуляр. BD=h. $DC = \dfrac{a}{2}$;

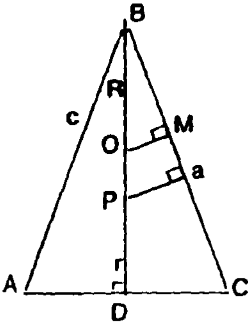
$AN = 2R - h$; $BP = h - r$. ΔABD дан $h^2 = b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$. ΔBCN дан $BC^2 = BD \cdot DN$, $BC^2 = BN \cdot BD$ ёки $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = h(2R-h)$ ва $b^2 = 2Rh$. AP - ABD учбурчакда А бурчак биссектрисаси бўлгани учун $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BP}{PD}$ ёки

$$b:\ \frac{a}{2} = \frac{h-r}{r}; \qquad \frac{2b}{a} = \frac{h}{r} - 1; \qquad r = \frac{a}{2b+a}\,h$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}; \qquad R = \frac{b^2}{2h} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}};$$

$$r = \frac{a}{2b+a}\cdot\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}};$$

2-масала. Тенг ёнли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси R ички чизилган айлана радиуси r бўлса, унинг томонларини топинг.



Ечиш. Айтайлик, ABC учбурчакда AB=BC, AC - асоси бўлсин. AB=a, AC=b, BD - асосига туширилган баландлик, BD=h ташқи чизилган айлана маркази O, ички чизилган айлана марказини P - билан белгилайлик. OA=OB=OC= R, PD=PK=r

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{2} = h(2R-h) \\ b^2 = 2Rh \\ \dfrac{h-r}{r} = \dfrac{b}{\frac{a}{2}} \end{cases}$$ уч номаълумли учта

тенгламa системасини тузамиз. $\left[\dfrac{h-r}{r}\right]^2 = \left[\dfrac{b}{\frac{a}{2}}\right]^2, \Leftrightarrow$

$= \dfrac{(h-r)^2}{r^2} = \dfrac{2R}{2R-h}$; содда

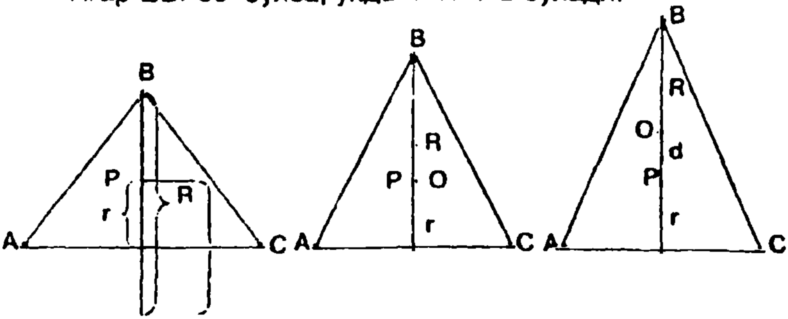
алмаштиришларни бажариб $h^2-2(R+r)h+r^2+4Rr = 0$ ни ҳосил қиламиз.

$h=R+r\pm\sqrt{(R+r)^2-r^2-4Rr}=R+r\pm\sqrt{R(R-2r)}$ $\sqrt{R(R-2r)}=d$ деб белгиласак $h=R+r\pm d$ бу ерда d - O ва P марказлар орасидаги масофа, яъни $OP=d$.

Агар $\angle B<60^\circ$ бўлса, унда $h==R+r+d$.

Агар $\angle B=60^\circ$ бўлса, унда $h=R+r$ ($d=0$ ёки $R=2r$).

Агар $\angle B>60^\circ$ бўлса, унда $h=R+r-d$ бўлади.



$\angle B > 60^\circ$ $\angle B = 60^\circ$ $\angle B < 60^\circ$

$h=R+r-d$ " $h=R+r$ $h=R+r+d$

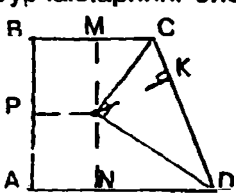
a ва b томонларни R ва r орқали қуйидагига ифодалаш мумкин:

1) $\frac{a}{2}=\sqrt{(h2R-h)},$ $a=2\sqrt{(R+r+d)(R-(r+d)}=2\sqrt{R^2-(r+d)^2}$

2) $b=\sqrt{2Rh}=\sqrt{2R(R+r+d)}$ *бу ерда* $d=\sqrt{R(R-2r)},$

3-масала. Тўғри бурчакли трапецияга ички чизилган айлана марказидан катта ён томони учларигача бўлган масофалар 15 ва 20 см бўлса, трапециянинг периметрини топинг.

Ечиш. Айтайлик ABCD трапецияда AD ва BC асослари бўлиб AD>BC бўлсин. $\angle A=\angle B=90^\circ$; ён томонлари CD ва AB, CD > AB. Трапецияца O марказли айлана ички чизилган ва OC = 15 см, OD = 20 см, CO ва DOлар ўз навбатида C ва D бурчакларнинг биссектрисалари.



$\angle C+\angle D=180^\circ$ $\angle OCD+\angle CDO=90^\circ$; $\angle COD=90^\circ$ COD учбурчак тўғри бурчакли AD, BC, CD ва AB томонларига мос равишда ON, OM, OK ва OP перпендикулярларни ўтказамиз.

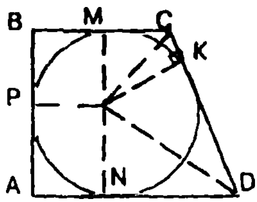
Ички чизилган айлананинг трапецияга уриниш нуқталари N, M, K ва P. ON=OM=OK=OR эса унинг радиуси. ΔOCD дан $CD^2=OD^2+OC^2$.

$$CD=(15^2+20^2)^{1/2}=25см.\ OK=\frac{OC\cdot OD}{CD};\ OK=\frac{15\cdot 20}{25}=12.$$

MN=2OM=24 см.

AB=MN=24см. AB+CD=AD + BC. Бундан p = 2(AB+CD)= = 2 · 49=98 см.

4-масала. Тўғри бурчакли трапецияга ички чизилган айлананинг уриниш нуқтаси катта ён томонини 9 ва 16 см бўлган кесмаларга ажратади. Айлана марказидан шу кесмалар учларигача бўлган масофани ва трапециянинг асосларини топинг.



Ечиш. Айтайлик, ABCD трапецияда BC ва AD асослари бўлиб AD > BC бўлсин. $\angle A = \angle B=90^\circ$; AB ва CD ён томонлари ва CD > AB. Трапецияга O марказли айлана ички чизилган. CD, BC AD ва AB томонларига мос OK, OM, ON ва OP перпендикулярларни ўтказамиз.

K, M, N ва P айланани шу томонлар билан уриниш нуқталари. CK = 9 см. DK = 16 см, OK = OM = ON = OP айлана радиуси C ва D бурчакларнинг биссектрисалари CO ва DO. $\angle C+\angle D=180^\circ$ $\angle DCO+\angle CDO=90^\circ$, $\angle COD=90^\circ$, ΔCOD - тўғри бурчакли учбурчак.

CD = CK + KD = 25 см. ΔCOD дан $OC^2 = CD\cdot CK$; OC = 15 см. $OD^2 = CD\cdot KD$; OD =20 см; $OK^2 = CK\cdot KD$; OK = 12 см, CK = MC = 9см. ND = KD = 16 см, BM =AN- OP= =ON=OM-OK= 2 см. BC=BM+MC=21см. AD=AN+ND=28 см.

Жавоб: 28 см, 21 см, 12 см

Машқлар

1. Тенг томонли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси $6\sqrt{3}$ см бўлса, унинг периметрини топинг.

2. Периметри $24\sqrt{3}$ см бўлган тенг томонли учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

3. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 40см, асоси эса 48 см, шу учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

4. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига туширилган баландлиги 16 см, шу учбурчакка ички чизилган айлана радиуси 6 см бўлса, унинг периметрини юпинг.

5. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 3:4 нисбатда, периметри эса 72 см бўлса, унга ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

6. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 48 см, гипотенузаси эса 20 смга тенг бўлса, унга чизилган ички айлана радиусини топинг.

7. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетларидан бири 12 см, унга ички чизилган айлана радиуси 4 см га тенг бўлса, ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

8. Учбурчакнинг томонлари 15, 26 ва 37 см бўлса, унга ички чизилган айлана радиусини топинг.

9. Учбурчакнинг томонлари 30, 26 ва 8 см га тенг бўлса, унга ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

10. Ромбнинг диагоналлари 40 ва 30 см бўлса, унга ички чизилган айлана радиусини топинг.

11. Ромбнинг диагоналлари 3:4 нисбатда, томони эса 25 см бўлса, ички чизилган айлана радиусини топинг.

12. Тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси 10 см бўлиб, периметри 56 см бўлса, унинг томонларини топинг.

13. Тенг ёнли трапециянинг баландлиги ва диагонали мос равишда 24 ва 40 см. Агар диагонали ён томонига перпендикуляр бўлса трапецияга ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

14. Тенг ёнли трапецияга ички чизилган айлана радиуси 12 см, ён томони эса 25 см бўлса, унинг асосларини топинг.

15. Тўғри бурчакли трапецияга ички чизилган айлана радиуси 12см, асослари айирмаси эса 7 см га тенг бўлса, унинг асосларини топинг.

Уйга вазифалар

1. Тенг томонли учбурчакнинг баландлиги 12 см бўлса, унга ташқи ва ички чизилган айлана радиусларини топинг.

2. Тенг ёнли учбурчакка ички чизилган айлананинг уриниш нуқтаси ён томонини асосининг учидан ҳисоблаганда 24 ва 16 см ли кесмаларга ажратса шу айлана радиусини топинг.

3. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлананинг уриниш нуқтаси гипотенузани 12 ва 8 см бўлган кесмаларга ажратса шу айлананинг диаметрини ҳисобланг.

4. Учбурчакнинг ён томонлари 78 ва 120 см, асосига ўтказилган баландлиги эса 72 см бўлса, унга ташқи чизилган айлана радиусини ҳисобланг.

5. Ромбга ички чизилган айлананиг уриниш нуқтаси унинг томонини 16 ва 9 см бўлган кесмаларга ажратса шу айлананинг диаметрини ҳисобланг.

6. Тўғри тўртбурчак томонларининг айирмаси 7 см, тўғри бурчак биссектриса эса диагоналини 3:4 нисбатда бўлади. Ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

7. Тенг ёнли трапециянинг периметри 100 см, кичик асоси 18 см бўлса, ички чизилган айлана радиусини ҳисобланг.

8. Трапецияга айлана ички чизилган бўлиб уриниш нуқталари ён томонларини 9 ва 16 см хамда 4:9 нисбатда бўлади. Трапециянинг асосларини топинг.

9. Тўғри бурчакли трапециянинг катта асоси учлари ички чизилган ийлана марказидан 15 в а 20 см масофада бўлса, унинг периметрини топинг.

8. Фигураларнинг ўхшашлиги

1. Учбурчакларнинг ўхшаш бўлишлик белгилари:

1) Агар бир учбурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг иккита бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади;

2) Агар бир учбурчакнинг икки томони иккинчи учбурчакнинг икки томонига мос равишда пропорционал бўлса ва бир томонига ёпишган бурчаклари тенг бўлган учбурчаклар ўхшаш бўлади;

3) Агар бир учбурчакнинг уч томони иккинчи учбурчакнинг уч томонига мос равишда пропорционал бўлса, бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади.

2. Тенг ёнли учбурчакларнинг ўхшашлиши:

1) агар иккита тенг ёнли учбурчакларда асосига қарама-қарши бурчаклар тенг бўлса, унда бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади;

2) агар иккита тенг ёнли учбурчакларда асосига ёпишган учбурчаклари тенг бўлса, унда учбурчаклар ўхшаш бўлади.

3. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлиги:

1) агар иккита тўғри бурчакли учбурчакларда биттадан тенг уткир бурчаклари бўлса, унда бу учбурчаклар ўхшаш бўлади;

2) агар иккита тўғри бурчакли учбурчакларда бирининг катетлари иккинчисининг катетларига мос равишда пропорционал бўлса, унда бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади.

3) Агар иккита тўғри бурчакли учбурчаклар учун бирининг гипотенузаси ва битта катети иккинчисининг гипотенузаси ва битта катетига пропорционал бўлса, унда бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади.

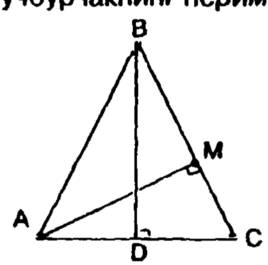
Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети гипотенуза ва шу катетининг гипотенузадаги проекциясининг ўрта пропорционали бўлади.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг баландлиги катетларининг гипотенузадаги проекцияларининг ўрта пропорционали бўлади.

4. Параллел тўғри чизиқларнинг хоссаси.

Бурчакнинг томонларини кесувчи параллел чизиқлар унинг томонларида пропорционал кесмалар ажратади.

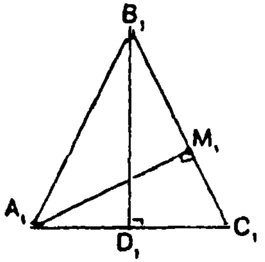
1-масала. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони ва периметри мос равишда 25 ва 80 см. Ён томонига туширилган баландлиги 48 см га тенг, унга ўхшаш бўлган учбурчакнинг периметрини ҳисобланг.



Ечиш. Айтайлик, ABC учбурчакда AB=BC, AC-асоси бўлсин. AB=25. 2AB+AC=80 см. AC=80-2·25=30 (см). BD - асосига туширилган баландлиги.

$AD=\frac{1}{2}\cdot AC$, AD = 15 (см). ΔABDдан

$BD^2=AB^2-AD^2$ яъни BD=20 (см).



$\Delta A_1B_1C_1 \sim ABC$. Унда $A_1B_1=B_1C_1$, A_1C_1 асоси. B_1D_1 - A_1C_1 га перпендикуляр; $A_1M_1=48$ см. $AM \perp BC$ ни ўтказамиз.

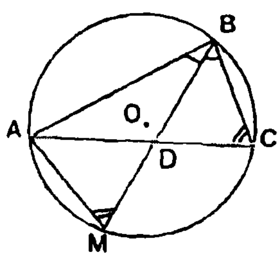
$$AM \cdot BC = BD \cdot AC,\ AM = \frac{20 \cdot 30}{25} = 24 \text{ (см)}.$$

$$\frac{AM}{A_1M_1} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{AM}{A_1M_1} = \frac{1}{2};\ P_1 = 2P = 2 \cdot 80 = 160.$$ Жавоб: 160см.

2-масала. ABC учбурчакда BD биссектриса ўтказилган. $BD^2=AB \cdot BC - AD \cdot DC$ тенгликни ўринли эканлигини исботланг.

Исбот. Айтайлик ABC учбурчакда BD биссектриса AC томонни AD ва DC кесмаларга ажратсин. $BD^2=AB \cdot BC-AD \cdot DC$ эканлигини исботлаймиз.



ABC учбурчакка ташқи айлана чизамиз. BD ни айлана билан M нуқтада кесишгунча давом эттирамиз. Кесишувчи ватарнинг кесмалари тўғрисидан хоссага асосан $BD \cdot DM = AD \cdot DC$ га эга бўламиз: $DM = BM - BD$. $BD(BM-BD)= =AD \cdot DC$. Бундан $BD^2 = BD \cdot BM - DC \cdot AD$. $\angle ABM = \angle CBD$, $\angle BCA = \angle AMB$. ABM ва BDC учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{BM}{BC} = \frac{AB}{BD}$$ Бундан $BD\ BM=AB \cdot BC$.

Шундай қилиб $BD^2=AB \cdot BC-AD \cdot DC$.

Машқлар

1. Бир учбурчакнинг томонлари 5:4:6 нисбатда, иккинчисининг 25, 20 ва 30 см бўлса улар ўхшашми?

2. Бир учбурчакнинг икки томони 15 ва 24 см бўлиб 45°ни ташқил этади. иккинчи учбурчакнинг икки томони мос

равишда 5:8 нисбатда бўлиб тўғри бурчакнинг ярмини ташкил этади. Бу учбурчаклар ўхшашми?

3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бурчакларидан бири 54°, иккинчи тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчаклар айирмаси 18° бўлса, улар ўхшашми?

4. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига қарши бурчаги 30°, иккинчи тенг ёнли учбурчакнинг асосига ёпишган бурчаклари 75° бўлса, улар ўхшашми?

5. Бир тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 15 ва 20 см, иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва унга ўтказилган баландлиги мос равишда 75 ва 36 см бўлса, улар ўхшашми?

6. Бир тўғри бурчакли учбурчакнинг катети ва гипотенузаси мос равишда 12 ва 15 см, иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ўтказилган баландлиги ва катети мос равишда 12 ва 25 см бўлса, улар ўхшашми?

7. Бир тенг ёнли учбурчакнинг ён томони ва асоси 15 ва 18 см га тенг, иккинчи тенг ёнли учбурчакнинг асоси ва унга ўтказилган медианаси 54 ва 36 см бўлса, улар ўхшашми?

8. Ромбнинг диагонали унинг томонига тенг. Иккинчи ромбнинг томони диагонали билан 30° ли бурчак ташкил этади. Бу ромблар ўхшаш бўладими?

9. Бир тўғри тўртбурчакнинг диагонали бурчагини 1:2 нисбатда бўлади, иккинчи тўғри тўртбурчакнинг томони ва диагонали 12 ва 24 см бўлса, бу тўғри тўртбурчаклар ўхшашми?

10. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига ёпишган бурчаги 72°. Шу бурчак биссектрисаси берилган учбурчакдан унга ўхшаш бўлган ўткир бурчакли учбурчак ажратишини исботланг.

11. Тўғри бурчакли учбурчакда гипотенузага ўтказилган баландлик уни иккита ўхшаш учбурчакка ажратишини исботланг?

12. Ўхшаш учбурчакларда барча мос чизиқли элементларини нисбатини тенг эканлигини исботланг?

Уйга вазифалар

1. Учбурчакнинг томонлари 6, 7 ва 8 см. Шу учбурчакка ўхшаш периметри 84 см бўлган учбурчакнинг томонларини топинг.

2. Убурчакнинг томонлари 8, 13 ва 15 см. Шу учбурчакка ўхшаш энг катта ва энг кичик томонлари айирмаси 21 см бўлган учбурчакнинг томонларини топинг.

3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва катети мос равишда 25 ва15 см. Унга ўхшаш гипотенузасига ўтказилган медианаси 25 см бўлган учбурчакнинг катетларини топинг.

4. Ромбнинг диагоналлари 6 ва 8 см. Унга ўхшаш баландлиги 48 см бўлган ромбнинг периметрини ҳисобланг.

5. Тўғри тўртбурчакнинг томони ва диагонали 8 ва 10 см. Кичик томони 24 см бўлган ўхшаш тўғри тўртбурчакнинг периметрини ҳисобланг.

6. Учбурчакнинг томонлари 5 ва 8 см, улар орасидаги бурчак 60°. Унга ўшаш периметри 60 см бўлган учбурчакнинг томонларини топинг.

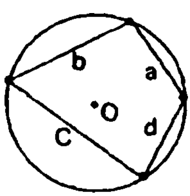
7. Мос диагоналлари нисбати тенг бўлган икки ромбнинг ўхшашлигини исботланг.

8. Мос баландлик ва томонларининг нисбати тенг бўлган ромбнинг ўхшашлигини исботланг.

9. Иккита тўғри бурчакли учбурчакда мос катетлари нисбати тенг бўлса, уларни ўхшашлигини исботланг.

10. Мос катет ва гипотенузасининг нисбатлари тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг ўхшашлигини исботланг.

11. Иккита тўғри бурчакли трапецияда ўтмас бурчаклари тенг, диагонали эса шу бурчакнинг биссектрисаси бўлса, уларнинг ўхшашлигини исботланг.



9. Фигуранинг юзи

1. $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, бу ерда $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ ярим периметри.

2. Тўғри тўртбурчакнинг юзи.

$S=a\cdot b$, бунда a ва b тўғри тўртбурчакнинг томонлари.

$S=\dfrac{1}{2}d^2$, бунда d- тўғри тўртбурчакнинг диагонали.

3. Параллелограммнинг юзи.

$S=ah$, бунда a-унинг томони, h-шу томонига ўтказилган баландлиги. $S=ab\cdot\sin\alpha$, бунда a, b-параллелограммнинг томонлари, α-улар орасидаги бурчак.

4. Учбурчакнинг юзи.

$S=\frac{1}{2}a\cdot h$, бунда a - унинг томони, h-томонига ўтказилган баландлиги.

$S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha$, бунда a, b- учбурчакнинг томонлари α - эса шу томонлари орасидаги бурчак.

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, бунда a, b ва c - учбурчакнинг томонлари, $p=\frac{a+b+c}{2}$ - ярим периметри.

5. Трапециянинг юзи.

$S=\frac{(a+b)}{2}\cdot h$ бунда a, b - трапециянинг асослари, h - унинг баландлиги.

6. Ўхшаш фигуралар юзаларининг нисбати мос чизиқли элементлари нисбатининг квадрати каби бўлади.

$\frac{S_1}{S_2}=к^2$, бунда S_1, S_2 - иккита ўхшаш фигуранинг юзалари, к-эса ўхшашлик коэффиценти.

7. Доиранинг юзи.

$S_{доира}=\pi R^2$, бунда R - доира радиуси.

8. Қўшимча формулалар.

а) ромбнинг юзи: $S=\frac{1}{2}d_1{*}d_2$ бунда d_1, d_2 ромбнинг диагоналлари;

б) тенг томонли учбурчакнинг юзи: $8=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, бунда а - учбурчакнинг томони;

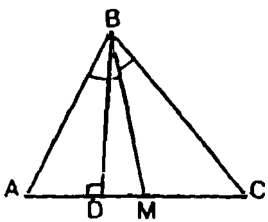
в) квадратнинг юзи: $S=a^2$, бунда а- квадратнинг томони.

г) доиравий секторнинг юзи:

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n,$$ бунда n - n° ли марказий бурчак.

$$S=\frac{\pi R^2}{2\pi}=\frac{R^2\alpha}{2}$$ бунда α, α - радианли марказий бурчак.

1-масала. Учбурчакнинг ён томонлари 25 ва 40 см га тенг, асосига утказилган баландлиги 24 см. Асосига ўтказилган биссектриса ажратган учбурчакларнинг юзларини топинг.

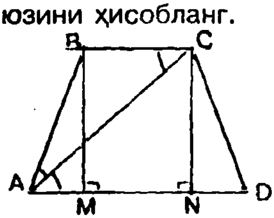


Ечиш: ABC-учбурчакда AB=25 см, BC=40 см, BD⊥AC бўлиб BD=24 гм ва AB<BC, AD<DC бўлсин.
ΔABD дан $AD^2 = AB^2 - BD^2$, AD = 7 см.
ΔBDC дан $CD^2 = BC^2 - DC^2$, CD = 32см => AC = 39 см. BM- биссектрисани ўтказамиз

ва $\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{BC}=25:40 \Rightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{5}{8}$; AM =5x ,

MC = 8x деб белгилаб, 5x + 8x = 39, x = 3 ни топамиз.
AM=15 см, MC=24 см. $S_{\Delta ABM}=180$ см². $S_{\Delta BMC}=288$ см².

2-масала. Тенг ёнли трапециянинг асослари айирмаси 14 см. Диагонали эса ўткир бурчак биссектрисаси бўлади. Агар трапециянинг периметри 114 см бўлса, унинг юзини ҳисобланг.



Ечиш: ABCD - трапецияда AD ва BC асослари бўлиб AD > BC бўлсин. AD - BC = 14 см. AB=CD, ∠A ўткир AB+BC+ +CD+AD=114см. AC-биссектриса ∠BAC=∠CAD ва ∠BCA=∠CAD. Бундан ∠BAC=∠BCA ва AB=BC, BM ⊥ AD,

$CN \perp AD$ ни ўтказамиз. $BC=MN$; $AM=ND$. Энди $AB=BC=CD=x$ десак $AD=114-3x$.

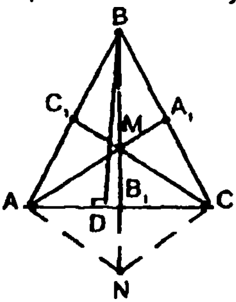
Унда $AM=ND=\frac{1}{2}(AD-MN)=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{1}{2}\cdot 14=7$см.

$AM=\frac{1}{2}(114-3x-x)=57-2x$; $57-2x=7$; $x=25$; $AB=25$см $\triangle ABM$

дан $BM^2=AM^2-AM^2$; $BM=24$см. $AD=39$см ёки $AD=114-3\cdot 25$ $=39$ см.

$S=\frac{BC+AD}{2}BM=768$ см^2 Жавоб: 768 см^2.

3-масала. Учбурчакнинг медианалари мос равишда *24, 30 ва 18 см бўлса, унинг юзини ҳисобланг.*



Ечиш: Айтайлик, ABC учбурчакда AA_1, BB_1, CC_1- медиана бўлсин, яъни $AA_1=24$ см, $BB_1=30$ см, $CC_1=18$ см. M - медианалар кесишган нуқта бўлса

$AM=\frac{2}{3}\cdot 24=16$см, $CM=\frac{2}{3}\cdot 18=12$см,

$MB=\frac{1}{3}30=10$см. MB_1ни B_1N масофада давом эттирамиз, бунда $MB_1=B_1N=10$ см, $MN=20$см. $AB_1=B_1C$ ва $MB_1=B_1N_1$ шунинг учун $AMCN$-параллелограмм, бунда AC ва MN-параллелограммнинг диагоналлари, AM ва MC унинг томонлари.

$2(AM^2+MC^2)=AC^2+MN^2$ $AC^2=400$см. $AC=20$ см. Герон формуласидан фойдаланиб AMC - учбурчакнинг юзини топамиз.

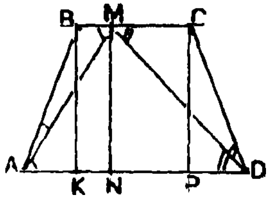
$S_{\triangle ABC}=96$ см^2, $BD \perp AC$, $MK \perp AC$ ни ясаб, $\frac{BD}{MK}=\frac{BB_1}{MB_1}=\frac{3}{1}$

ни топамиз.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMC}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot BD}{\frac{1}{2}AC\ MK}=\frac{BD}{MK}=3\text{ см}\quad S_{\triangle ABC}=3\cdot 96=288(\text{см}^2)$$

Жавоб: 288 см^2.

4-масала. Ён томонлари ва баландлиги мос равишда 25, 30 ва 24 см бўлган трапеция бурилган. Ўткир бурчак биссектрисалар иккинчи асосида ётувчи нуқтада кесишади. Трапециянинг юзини ҳисобланг.



Ечиш. ABCD- трапецияда AD ва BC- асослари бўлиб BC < AD бўлсин. AB= =25см, CD=30 см. $MN \perp AD$, $BK \perp AD$, $CP \perp AD$ ни ўтказамиз. BK=CP=24 см. AM ва DM биссектрисаларни ясаймиз. $\angle BAM=\angle MAD$; $\angle BMA=\angle MAD$. Бундан, $\angle BAM=\angle BMA$ ва AB=BM=25 см

Шунга ўхшаш CD=MC=30. ΔABK дан $AK^2=AB^2-BK^2$; яъни AK=7см. ΔCPD дан $PD^2 = CD^2 - CP^2$; яъни PD=18 см.

BC=55 см. AD=80см. Бундан $S=\frac{AD+BC}{2}$. BK=1620(см²).

Жавоб: 1620 см².

Машқлар.

1-масала. Агар тенг ёнли учбурчакнинг қуйидаги элементлари берилган бўлса, унинг юзини топинг:

а) ён томони 25 см, асосига ўтказилган баландлиги 20 см;

б) асоси 30 см, ён томонига ўтказилган баландлиги 24 см;

в) ён томонига ўтказилган баландлиги уни асосига қарши учидан ҳисобланганда 7 ва 18 бўлган кесмаларга ажратса;

г) периметри 80 см, ён томони 25 см;

д) периметри 80 см, асоси 30 см;

е) ён томони ва асоси 5:6 нисбатда, асосига ўтказилган баландлиги 24см;

ж) асоси ва унга ўтказилган баландлиги 3:2 нисбатда.ён томони эса 24см.

2-масала. Тўғри бурчакли учбурчакнинг қуйидаги элементлари маълум бўлса, унинг юзини ҳисобланг :

а) гипотенузага ўтказилган баландлиги уни 16 ва 9 см бўлган кесмаларга ажратади;

б) гипотенузаси 25 см, катетлари 3:4 нисбатда;

в) гипотенуза ва катет 5:4 нисбатда, иккинчи катети 15 см;

г) гипотенузаси 10 см, катетлари айирмаси 2 см;

д) тўғри бурчак биссектрисаси гипотенузани 15 ва 20 см бўлган кесмаларга ажратади.

3-масала. Учбурчакнинг қуйидаги элементларига кўра юзасини ҳисобланг:

а) томонлари 13, 14 ва 15 см га тенг;

б) икки томони 25 ва 40 см га, учинчи томонига ўтказилган баландлиги 24 см га тенг;

в) икки томони 5:8 нисбатда, учинчи томонига ўтказилган баландлиги уни 7 ва 32 см бўлган кесмаларга ажратади.

4-масала. Параллелограммнинг юзини топинг, агар:

а) томонлари 12 ва 8 см, улар орасидаги бурчаги 30°;

б) диагоналлари 15 ва 20 см, улар орасидаги бурчак 30°;

в) баландликлари 12 ва 15 см, томонлари орасидаги бурчак 30°;

г) томонлари 12 ва 15 см, баландликлари орасидаги бурчак 30°

5-масала. Ромбнинг юзини ҳисобланг, агар:

а) диагоналлари 3:4 каби, томони 25 см;

б) диагоналлари айирмаси 10 см, томони 25 см.

в) диагоналлар кесишган нуқтадан томонига ўтказилган перпендикуляр уни 9 ва16 см бўлган кесамаларга ажратади;

г) ўтмас бурчак учидан ўтказилган баландлик томонини 7 ва 18 бўлган кесмаларга ажратади;

д) диагоналлар йиғиндиси 34 см, томони эса 13 см;

е) баландлиги 24 см, диагоналлари 3:4 нисбатда;

ж) томони 25 см, диагоналлар айирмаси 10 см.

6-масала. Тўғри тўртбурчакнинг юзини ҳисобланг, агар:

а) учидан диагоналига ўтказилган перпендикуляр уни 9 ва 16 см бўлган кесмаларга ажратса;

б) бурчак биссектрисаси диагоналини 20 ва 15 см бўлган кесмаларга ажратса;

в) биссектриса томонини 12 ва 8 см бўлган кесмаларга ажратса;

г) биссектриса томонини 1:3 нисбатда бўлиб, диагонали 20 см бўлса;

д) томонлари айирмаси 7 см, диагонали эса 13 см;

е) томонлари 3:4 нисбатда, диагонали эса 15 см;

ж) периметри 70 см, учидан диагоналгача бўлган масофа 8 см.

7-масала. Тенг ёнли трапециянинг қуйидаги элементларига кўра унинг юзини топинг:

а) асослари 50 ва 14 см, диагонали 40 см;

б) асослари 39 ва 15 см, диагоналлари ён томонига перпендикуляр.

8-масала. Тўғри бурчакли трапециянинг юзини ҳисобланг, агар:

а) ён томонлари 4:5 каби, асосларининг айирмаси 18 см, кичик диагонали 26 см бўлса;

б) асослари 15 ва 33 см, диагонали эса ўткир бурчагининг биссектрисаси бўлса.

Уйга вазифалар

1. Агар тенг ёнли учбурчакнинг қуйидаги элементлари берилган бўлса, унинг юзини топинг:

а) ён томонига ўтказилган баландлиги уни айирмаси 11 см бўлган кесмаларга ажратади. Ён томонини асосига нисбати 5:6 каби;

б) ён томонига ўтказилган баландлиги 24 см, ён томонини асосига нисбати 5:6 каби;

в) асосига ва ён томонига ўтказилган баландликлар айирмаси 4 см, ён юмонини асосига нисбати 5:6 каби;

г) асосига ва ён томонига ўтказилган баландликлар айирмаси 4 см бўлиб ён томонини асосига нисбати 5:6 каби.

2. Ромбнинг ўтмас бурчаги учидан ўтказилган баландлик томонини 7 ва 18 см бўлган кесмаларга ажратади. Шу баландлик ажратган қисмларининг юзасини топинг.

3. Ромбнинг диагоналлари 3:4 нисбатда бўлиб периметри 100 см бўлса, унинг юзини топинг.

4. Тўғри бурчакли трапециянинг кичик диагонали тўғри бурчагининг биссектрисаси бўлади. Асосларининг айирмаси 30 см. Агар ён томонлар айирмаси 18 см бўлса трапециянинг юзини ҳисобланг.

5. Трапециянинг асослари 60 ва 20 см, ён томонлари эса 13 ва 37 см. Трапециянинг юзини ҳисобланг.

6. Трапециянинг асослари 8 ва 42 см, диагоналлари эса 30 ва 40 см бўлса, унинг юзини ҳисобланг.

2. $A_1(x_1, y_1)$ ва $A_2(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги d-масофа $d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ га тенг.

3. Радиуси R га, маркази $A(a,в)$ нуқтада бўлган айлана тенгламаси $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ бўлади.

4. Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси: $ax+by+c=0$, бу ерда a ва b лар бир вақтда нолга тенг бўлмайдиган сонлар, c эса ихтиёрий сон.

5. Тўғри чизиқнинг бурчак коэфциентли тенгламаси: $y=кx+\ell$,

бунда $к=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=tg\alpha$; $\ell=-\frac{c}{b}$, $k=-\frac{a}{b}$ бўлиб тўғри чизиқнинг бурчак коэффиценти дейилади.

6. Турли $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$ бўлади.

7. $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтувчи $a(a_1,a_2)$ йўналтирувчи векторига эга бўлган тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}$$ бўлади.

8. $ax+by+c=0$ тўғри чизиқ учун $\vec{a}(-b,a)$ вектори йўналтирувчи вектор (коллениар) бўлади. $\vec{b}(a, b)$ эса $\vec{a}(-b, a)$ векторига перпендикуляр бўлади.

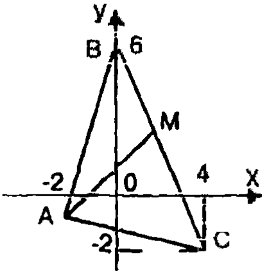
9. Координата ўқларини йўналиши ўзгармаган ҳолда $A(x, y)$ ни $A^1(x^1, y^1)$ нуқтага кўчиришни $x^1=x+a$, $y^1=y+b$ билан бажариш мумкин.

10. λ ва μ ҳақиқий сони ва коллениар бўлмаган a, b - векторлари учун $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ тенгликни ёзиш мумкин.

11. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $a\cdot b=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$ бу ерда $\alpha=(\vec{a}, \vec{b})$

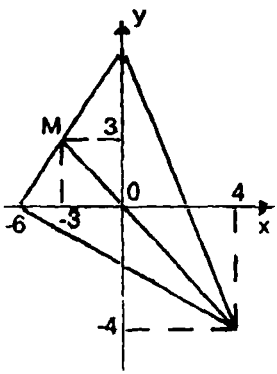
а) агар $a(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ ва $\vec{b}(b_1, b_2)$ бўлса $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ ўринли бўлади. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади:
$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ёки $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$.

б) агар $\vec{a}(a_1, a_2)$ ва $\vec{b}(в_1, в_2)$ векторлар учун $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda$ бўлса $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ лар коллениар бўлади.



1-масала. Учбурчакнинг учлари А(-2: -1),В(0:6), С(4;-2) бўлса АМ медианасини узунлигини топинг. $M_0(x_0, y_0)$ нуқта ВС нинг ўртаси бўлгани учун $x_0=2$, $y_0=2$ бўлади. Шундай қилиб $d=|AM|=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-2)^2}=5$ бўлади.

2-масала. Учбурчакнинг учлари А(4;-4), В(-6; 0), С(0; 6) бўлса, унинг томонларини ва АМ медианасини тенгламасини тузинг.



Ечиш. $M_0(x_0,y_0)$ нуқта ВС нинг ўртаси бўлганлиги учун $x_0=-3$, $y_0=3$ бўлади.

Шундай қилиб $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ формуладан

$$AB: \frac{x-4}{-10}=\frac{y+4}{4} \Leftrightarrow 2x+5y+12=0$$

$$BC: \frac{x+6}{6}=\frac{y}{6}\ x-y+6=0;\ AC: \frac{x-4}{-4}=\frac{y+4}{10}$$

$\Leftrightarrow 5x+2y-12=0$ AM: $\dfrac{x-4}{-7}=\dfrac{y+4}{7} \Leftrightarrow x+y=0$ ни топамиз.

Машқлар

1. Абсциссалар ўқида (2, 3) ва (1, -2) нуқталардан тенг узоқликда ётган нуқтани топинг.
2. (2 : -1) ва (-1: 3) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.
3. 2x-y=0 ва x+y=3 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини кординаталарини топинг.
4. $x^2+y^2=1$ айланани x+y=3 тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарини топинг.
5. (-1:2) марказли (2:-2) нуқтадан ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

6. Учлари A(-1:-2), B(2:-5), C(1:-2), D(-2:1) нуқтада бўлган тўртбурчакни параллелограмм эканлигини исботланг.

7. Параллелограммнинг учлари A(1:3), B(2:0), C(-1:-3), $D(x_0,y_0)$ бўлса x_0, y_0 ни топинг.

8. Параллел кўчиришда (-1:1) нуқта (2:3) нуқтага ўтса, (1:-2) нуқта қайси нуқтага ўтади?

9. A(0:1), B(1:0), C(1:2), D(2:1) нуқталар берилган. AB ва CD векторларни тенглигини исботланг.

10. Учбурчакнинг A(-2:1), B(-2:4), C(2:1) учлари бўлса, унинг бурчак косинусларини топинг.

11. $\vec{a}(3:4)$ ва $\vec{b}(x:6)$ векторлар x нинг қандай қийматларида перпендикуляр бўлади?

12. a(1:-1) ва b(-2:y) векторлар. Унинг қандай қийматларида коллениар бўлади:

13. Агар $\vec{a}(2:-1)$ ва $\vec{b}(-1:2)$ бўлса, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{n}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}$ векторларни топинг.

Уйга вазифалар

1. Учлари A(-2:4), B(2:1), C(-2:-2) нуқталарда бўлган учбурчакнинг периметрини топинг.

2. Учлари A(2:1), B(-2:4), C(-2:-2) нуқталарда бўлган учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлигини исботланг.

3. Агар учбурчак томонларининг ўртаси A_1(-1:3), B_1(0:-1), C_1(1; 2) бўлса, унинг учларини координаталарини топинг.

4. Тўртбурчакнинг учлари A(-1:1), B(3:3), C(3:-3), D(1:-3) бўлса унинг ромб эканлигини исботланг.

5. $x^2+y^2+2x4y-4=0$ айланани радиуси ва марказини топинг.

6. Учбурчакнинг томонлари: $x-2y+3=0$, $4x+y-15=0$, $3x+5y+20=0$ медианалари кесишган нуқтасини топинг.

7. $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=8$, $\varphi=120^\circ=(\vec{a},\vec{b})$ бўлса $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ни скаляр кўпайтмасини топинг.

8. $\vec{a}(0:2)$ ва $\vec{b}(3:6)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

9. Векторлардан фойдаланиб ромбни диагоналларини перпендикуляр эканлигини исботланг.

Жавоблар

1. Тенг ёнли учбурчак

Машқлар.	Уйга вазифа
1. 36 см, 2. 36 см, 3. 80°:80°:20° 4. 70°; 70°; 40° 5 а) 80 см, б) 80 см, в) 80 см, г) 80 см, д) 80 см, е) 176 см, ж) 64 см, з) 64 см, к) 128 см, m) 256 см, п) 128 см, 7. а) 30 см, б) 48 см, в) 48 см. 8. а) 20 см, б) 48 см, 9. 20 см, 10. 32 см, 11. 15 см,	1. 30 см, 25 см, 2. 10 (2/3) см, 3. 54 см, 4. 12 см.

2. Тўғри бурчакли учбурчак

Машқлар.	Уйга вазифа
1. а) 30 см, б) 48 см, в) 60 см, г) 60 см, д) 120 см, е) 72 см, 2. а) 15 см, б) 30 см, в) 35 см. 3. 12 см. 4. 30°, 60°, 90°, 5. 15°.	1. 25 см, 2. 84 см, 3. 5 см.

3. Турли томонли учбурчак

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. а) 90 см, б) 36 см, в) 204 см, г) 48 см, 2. а) 6 см, 10 см, 14 см, б) 25 см, 39 см, 40 см, в) 24 см, $12\sqrt{6}$, $12(1+\sqrt{3})$ см. 3. 12 см. 4. 8 см. 5. 5 см. 6. 12 см, 16 см. 7. 30 см, 21 см. 8. 48 см.	1.96 см. 2. 65° 3.30°, 40° 4. 18 см. 5. 25 см. 6. 84 см. 7. 60 см.

4. Параллелограмм ва унинг турли кўринишлари.

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. а) 30 см, 40 см. б) 30 см, 40 см, в)$12\sqrt{3}$, 36 см г) 30 см, 40 см. д) 30 см, 40 см, е) 84 см, 112 см, ж) 21 см, 28 см. 2. 100 см. 7. 7 см. 3. 24 см. 8.40 см,128см. 4. 42 см. 5. 14 см. 6. 26 см,	1. 24 см. 2. 100 см. 3. 30 см, 40 см, 6. а) 14 см, 8 см. б) 14 см, 8 см. 7. 24 см, 42 см.

5. Трапеция

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. а) 60°, 120° б) 60°,120°. в) 60°,120. г) 60°, 120° 3. 15 см. 4. а) 12 см, 18 см. б) 8 см, 32 см. в) 22 см, 42 см. 5. а) 116 см. б) 88 см. в) 30см. г) 42см. д) 156см. 6. 3 см, 17 см. 7. 7 см, 16 см. 8. 12 см, 15 см. 9. а) 132 см. б) 132 см. в) 48см. г) 66см. д) 60см. 10. 24 см 11. 14 см, 14 см.	1. а) 24 см. б) 24 см. 2. а) 560 см. б) 168 см. в) 456 см. 5. 112 см. 6. 12 см, 8 см, 13 см. 7. 39 см, 54 см. 8. 106 см. 9. 58 см. 10. 12 см. 11. 24 см. 12. 7 см. 13. 14 см.

6. Айлана ва унинг элементлари

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. 90° 2. 40° 3. 20° 4. 4 см, 20 см. 5. 25 см 6. 12 см. 7. 24 см, 8. а) 10 см, б) 12,5 см, в) 25 см, г) 7 см, д) $9\frac{1}{3}$ см, е) 12 см, 9. 24 см. 10. 20 см, 12. 20 см, 13. 30 см, 14. 32 см, 15. 12 см.	2. 7 см. 3. 12 см. 4. 70 см. 5. 12,5 см. 6. 24 см. 7. 24 см, 32 см. 8. 20 см.

7. Кўпбурчак ва айлана

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. 54 см. 2. 4 см. 3. 25 см. 4. 64 см 5. 15 см. 6. 4 см. 7.10 см. 8. 4 см. 9. 4 см. 10. 12 см. 11. 12 см. 12. 12 см, 16 см. 13. 25 см. 14. 18 см, 32 см. 15. 21 см, 28 см.	1. 8 см, 4 см. 2. 12 см. 3. 8 см. 4. 64 см 5. 24 см. 6. 17,5 см. 7. 12 см. 8. 34 см, 17 см. 9. 98 см.

8. Фигураларнинг ўхшашлиги

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. 24 см, 28 см, 32 2. 24 см, 39 см, 45 21см. 3. 40 см, 30 см. 4. 200 см. 5. 112 см. 6. 15 см, 24 см.	

9. Фигураларнинг юзи

Машқлар.	Уйга вазифа.
1. а) 300 $см^2$ б) 300 $см^2$ в) 300 $см^2$. г) 300 $см^2$. д) 300 $см^2$. е) 432 $см^2$. ж) 300 $см^2$. 2. а) 150 $см^2$. б) 150 $см^2$. в) 150 $см^2$. г) 24 $см^2$. д) 294 $см^2$. 3. а) 84 $см^2$. б) 468 $см^2$. в) 468 $см^2$. 4. а) 48 $см^2$. б) 75 $см^2$. в) 360 $см^2$. г) 90 $см^2$. 5. а) 600 $см^2$. б) 600 $см^2$. в) 600 $см^2$. г) 600 $см^2$. д) 120 $см^2$. е) 600 $см^2$. ж) 600 $см^2$. 6. а) 300 $см^2$. б) 388 $см^2$. в) 160 $см^2$. г) 192 $см^2$. д) 60 $см^2$. е) 108 $см^2$. ж) 300 $см^2$. 7. а) 768 $см^2$. б) 486 $см^2$. 8. а) 456 $см^2$. б) 228 $см^2$	1. а),б),в),г)-300 $см^2$. 2. 84 $см^2$, 516 $см^2$. 3. 600 $см^2$. 4. 496 $см^2$. 5. 480 $см^2$. 6. 600 $см^2$.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати:

1. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна - решения разные. К.: Рад.шк., 1988.171 с.

2. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Наука, 1986. 512 с.

3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1. М.: Наука, 1986. 272 с.

4. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (планиметрия). М.: Наука, 1986.224 с.

5. Погорелов А.В. Геометрия /учебник для 7-11 классов средней школы, 2-е издание. - М.: Просвещение, 1991. - 383 с.

6. Академик лицейлар учун чуқурлаштирилган ўқув дастури /Геометрия. Т., 1999.-11 б.

7. Ғуломов С., Назиров Э., Халилов Н. Ўқув адабиётини яратиш ва уни баҳолаш мезонлари. Тошкент 1998. ЎАЖБНТ маркази. 42 бет.

8. Жумаев Э.Э. Развитие творческого мышления учащихся в процессе составления задач. Депон. ГРНТБ украины, 20 с.

9. Жумаев Э.Э., Михайловский В.И. Геометрия. Киев, 1997, 58 с.

10. Жумаев Э.Э. Развитие творческого мышления учащихся в процессе решения геометрических задач. Автореф. Киев, 1997, 19 с.

11. Аллаев Г.М., Жумаев Э.Э. Геометрия (методические указания к решению геометрических задач). Термез, 2000, 58 с.

Мундарижа

Э.Э.Жумаев

Геометрия масалалар тўплами
I қисм

Ўзбекистан Республикаси Олий ва Ўрта махсус таълим вазирлиги Академик лицей талабалари учун ўқув қўлланма сифатида нашрга тавсия этган.

Босишга рухсат этилди 28.09.2000 Й.
Буюртма №53. Адади 1000. Босма табоғи 4,5.
ФТДК ДИТАФ босмахонасида чоп этилди.
Тошкент, Олмазор 171-уй.