O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

O‘RTA MAXSUS, KASB-HUNAR TA’LIMI MARKAZI

Abduxalil Meliqulov, Parda Qurbonov,
Parda Ismoilov

MATEMATIKA

II qism

Kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma

3- nashri

„O‘QITUVCHI“ NASHRIYOT-MATBAA IJODIY UYI
TOSHKENT — 2014

UO'K:51(075)
KBK 22ya721
M41

T a q r i z c h i l a r : **M. Mirsaburov** — fizika-matematika fanlari doktori, professor;
I.A. Allakov — fizika-matematika fanlari doktori, dotsent.

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tizimidagi akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun matematika fanidan tasdiqlangan o'quv dasturi asosida yozilgan. Qo'llanma kasb-hunar kollejlari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda nazariy materiallarni mustahkamlashga doir yetarlicha misol va masalalar berilgan. Ularning ko'pchiligi sanoat va qishloq xo'jaligi yo'nalishidagi mutaxassisliklarga mos keladi.

O'quv qo'llanmadan akademik litsey va umumta'lim maktablarining yuqori sinf o'quvchilari hamda oliy o'quv yurtlariga kiruvchilar ham foydalanishlari mumkin.

ISBN 978-9943-02-804-3

SO‘ZBOSHI

Ushbu o‘quv qo‘llanma Kadrlar tayyorlash Milliy dasturiga muvofiq uzluksiz ta’lim tizimida o‘quv adabiyotlari uchun tasdiqlangan Davlat ta’lim standartlari va matematika fani bo‘yicha uzviy bog‘langan o‘quv dasturi asosida tayyorlangan bo‘lib, kasb-hunar kollejlari uchun mo‘ljallangan.

Kitobning mazkur ikkinchi qismi 5 ta bobdan iborat bo‘lib, har bir bob paragraflarga, paragraflar esa bandlarga bo‘lingan. Nazariy materiallarni mustahkamlash maqsadida har bir bandda yetarlicha misol-masalalar yechilishlari bilan keltirilgan. Har bir bob oxirida mustaqil yechish uchun misol va masalalar javoblari bilan berilgan.

Qo‘llanmada dasturda ko‘rsatilgan quyidagi boblar to‘liq yoritilgan:

— funksiyaning limiti, hosilasi va ularning tatbiqlari;

— trigonometriya;

— integral va uning xossalari;

— kombinatorika elementlari;

— ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari.

Mazkur kitobning «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari» bobini tayyorlashda Termiz davlat universiteti «Matematik analiz» kafedrasining katta o‘qituvchisi Qodir Mengniyozov yaqindan yordam berdi.

Ushbu kitob haqidagi tanqidiy fikr-mulohazalarni mualliflar chuqur mamnuniyat bilan qabul qiladilar va oldindan tashakkur bildiradilar.

I BOB. FUNKSIYALARNING LIMITI, UZLUKSIZLIGI VA HOSILASI

1- §. Sonli ketma-ketliklar va ularning berilish usullari

Sonli ketma-ketlik haqida 9- sinf matematika kursida boshlang‘ich ma’lumotlar berilgan. Biz arifmetik va geometrik progressiya tashkil qiluvchi sonli ketma-ketliklar haqida tasavvurga egamiz. Masalan, bizga tanish bo‘lgan musbat butun sonlarning (natural sonlarning)

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots \tag{1}$$

ketma-ketligi birinchi hadi $a_1 = 1$ va ayirmasi $d = 1$ bo‘lgan arifmetik progressiya tashkil qiladi. Shuningdek, toq va juft natural sonlarning

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-1,\ \ldots \tag{2}$$

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots \tag{3}$$

ketma-ketliklari ham ayirmasi 2 ga, birinchi hadi, mos ravishda, 1 va 2 ga teng bo‘lgan arifmetik progressiya tashkil qiladi.

Agar har bir natural sonni kvadratga ko‘tarsak, u holda natural sonlarning kvadratlaridan tashkil topgan yangi sonli ketma-ketlikni olamiz:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2\ \ldots \tag{4}$$

Bunday misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Masalan, geometriyadan ma’lumki, k ta tomonga ega bo‘lgan qavariq ko‘pburchak ichki burchaklarining yig‘indisi $S_k = 2d\,(k-2)$ formula bo‘yicha hisoblanadi. Bu formuladagi k natural sonlardan iborat qiymatlarni qabul qiladi. Shuningdek, $k \geq 3$ bo‘lishi kerak. Chunki eng kam tomonli qavariq ko‘pburchak — uchburchakdir. Agar k ga 3, 4, 5, 6, ... qiymatlar bersak,

$$2d,\ 4d,\ 6d,\ 8d,\ 10d,\ \ldots,\ 2d(n-2),\ \ldots \tag{5}$$

sonli ketma-ketlikni hosil qilamiz. Yuqorida keltirilgan misollarning barchasiga xos bo‘lgan muhim bir xususiyat bor:

har bir n natural songa bitta va faqat bitta $f(n)$ haqiqiy son mos keladi, bu yerda $f(n)$ — natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiya.

T a ' r i f. Natural sonlar to'plami N da aniqlangan $f(n)$ sonli funksiya *cheksiz sonli ketma-ketlik* deyiladi.

Cheksiz ketma-ketlik umumiy ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

Agar $a_n = f(n)$ desak, u holda ketma-ketlikning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Ko'pchilik hollarda ketma-ketlik $\{a_n\}$ yoki a_n, $n \in N$ ko'rinishida belgilanadi. Bunda a_1 son ketma-ketlikning birinchi hadi, a_2 — ikkinchi hadi, ...; a_n — n- hadi (umumiy hadi). 1, 2, 3, ..., n sonlar ketma-ketlik hadlariga mos keluvchi nomerlardir. Sonli ketma-ketlikning berilishi uchun har bir natural songa bitta va faqat bitta haqiqiy sonni mos qo'yadigan qoida (qonun) berilishi kerak. Bu qoida $n \Rightarrow a_n$ yoki $a_n = f(n)$ ko'rinishda yoziladi.

Ketma-ketlik berilishining asosiy usullarini eslatib o'tamiz.

1. Analitik (formula) usul. Bunda ketma-ketlikning n-hadi formula ko'rinishida beriladi. Ketma-ketlikning barcha qolgan hadlari bu formula bo'yicha hisoblanadi. Masalan, yuqorida qaralgan (1)—(5) sonli ketma-ketliklarni mos ravishda quyidagi formulalar bilan berish mumkin:

1) $a_n = n$, $n \in N$; 2) $a_n = 2n - 1$, $n \in N$;
3) $a_n = 2n$, $n \in N$; 4) $a_n = n^2$, $n \in N$;
5) $a_n = 2d(n-2)$, $n \in N$ $(d = 90°)$.

1 - m i s o l. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ $(n \in N)$ formula bilan berilgan ketma-ketlikni tuzaylik.

Berilgan formula bo'yicha ketma-ketlikning istalgan hadini hisoblash mumkin:

$$a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{1^2} = \frac{(-1)^2}{1^2} = 1; \qquad a_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{2^2} = \frac{(-1)^3}{4} = -\frac{1}{4};$$

$$a_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{3^2} = \frac{(-1)^4}{9} = \frac{1}{9}; \qquad a_4 = \frac{(-1)^{4+1}}{4^2} = \frac{(-1)^5}{16} = -\frac{1}{16}$$

va hokazo.

Berilgan ketma-ketlik

$$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \ldots$$

ko'rinishga ega.

2-m i s o l. $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n \in N)$ formula bilan

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots, 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$$

ketma-ketlik berilgan.

3-m i s o l. $a_n = 7$, $n \in N$ bo'lsin. Bu formula bilan

$$7, 7, 7, \ldots 7, \ldots$$

ketma-ketlik berilgan. Bu ketma-ketlikning barcha hadlari bir xil qiymat qabul qiladi.

Agar ketma-ketlikning barcha hadlari o'zaro teng qiymatlar qabul qilsa, bunday ketma-ketlik *o'zgarmas ketma-ketlik* deyiladi.

2. Rekurrent usul. Bu usulning mazmuni quyidagicha:

a) ketma-ketlikning birinchi yoki dastlabki bir nechta hadi berilgan bo'ladi;

b) ketma-ketlikning oldingi berilgan hadlari bo'yicha uning istalgan keyingi hadini topishga imkon beradigan formula beriladi.

Ketma-ketlikning bunday berilishiga doir misollar keltiraylik.

4-m i s o l. $a_{n+1} - a_n = d$ (d — o'zgarmas son) rekurrent formula bilan $a_1 = a$ bo'lganda arifmetik progressiya tashkil qiluvchi sonlar ketma-ketligi beriladi:

$$a, a+d, a+2d, \ldots a+d(n-1), a+dn, \ldots .$$

Ravshanki,

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = a + dn - a - dn + d = d$$

bo'ladi. Shuningdek, bu ketma-ketlik $a_n = a + d(n-1)$ $(n \in N)$ formula bilan ham beriladi.

5-misol. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ (q — o'zgarmas son) formula va $b_1 = b$ boshlang'ich qiymat bilan geometrik progressiya tashkil qiluvchi sonlar ketma-ketligi beriladi:

$$b,\ bq,\ bq^2,\ ...bq^{n-1},\ bq^n,\ ...$$

Bu ketma-ketlik uchun

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = ... = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{bq^n}{bq^{n-1}} = q$$

teng kasrlar hosil bo'ladi. Bu teng kasrlardan tuzilgan hosila proporsiya uchun ham

$$\frac{b_2+b_3+...+b_n+b_{n+1}}{b_1+b_2+...+b_{n-1}+b_n} = \frac{bq+bq^2+bq^3+...+bq^n}{b+bq+bq^2+...+bq^{n-1}} = q$$

bo'ladi.

6-misol. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ rekurrent formula va $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ boshlang'ich qiymatlar bilan uchinchisidan boshlab har bir hadi undan oldingi turgan ikkita had yig'indisiga teng bo'lgan ketma-ketlik beriladi. Agar rekurrent formuladagi n ga 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... qiymatlarni bersak, bu ketma-ketlikning hadlarini topamiz:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 0 + 1 = 1; \quad a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 1 + 2 = 3; \quad a_6 = a_5 + a_4 = 2 + 3 = 5;$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 5 + 3 = 8 \text{ va h.k.}$$

Shunday qilib, rekurrent formula bilan berilgan sonli ketma-ketlik 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ko'rinishga ega bo'lib, u *Fibonachchi sonlari* deb ataluvchi sonlardan tuzilgan ketma-ketlik bo'ladi.

Sonli ketma-ketliklar grafik va jadval usullaridan ham beriladi. Masalan, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning hadlari $\sqrt{2}$ sonning ortig'i bilan olingan o'nli yaqinlashishlaridan iborat bo'lsa, bu ketma-ketlik quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 1{,}5,\ a_3 = 1{,}42,\ a_4 = 1{,}415,\ ...$$

2- §. Sonli ketma-ketliklarning turlari

1. Monoton ketma-ketliklar

1-ta'rif. *Agar n har qanday natural son bo'lganda* $\{a_n\}$ *ketma-ketlikning barcha hadlari uchun* $a_{n+1} \geq a_n (a_{n+1} > a_n)$ *tengsizlik bajarilsa, u holda* $\{a_n\}$ ***o'suvchi (qat'iy o'suvchi)*** *ketma-ketlik deyiladi.*

2-ta'rif. *Agar n har qanday natural son bo'lganda* $\{a_n\}$ *ketma-ketlikning barcha hadlari uchun* $a_{n+1} \leq a_n (a_{n+1} < a_n)$ *tengsizlik bajarilsa, u holda* $\{a_n\}$ ***kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi)*** *ketma-ketlik deyiladi.*

O'suvchi (qat'iy o'suvchi), kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketliklar *monoton* ketma-ketliklar deyiladi.

1-misol. Umumiy hadi $a_n = \frac{n-1}{n}$ bo'lgan

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots,\ 1-\frac{1}{n},\ \ldots$$

ketma-ketlik o'suvchi ekanligini ko'rsataylik.

Yechish. $a_n = \frac{n-1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

Umumiy hadlarining farqini topamiz:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Ayirma musbat bo'lgani tufayli $a_{n+1} > a_n$ bo'ladi. Demak, berilgan $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik 1-ta'rifga asosan qat'iy o'suvchi ketma-ketlikdir. 1 dan kichik kasrlar o'suvchi sonli ketma-ketlik tashkil qilar ekan.

2-misol. $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligini ko'rsating.

Yechish. Berilgan ketma-ketlikni yoyib yozamiz:

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \ldots,\ \frac{n+1}{n},\ \frac{n+2}{n+1},\ \ldots$$

$$a_n=\frac{n+1}{n},\quad a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}.$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)}=$$
$$=\frac{-1}{n(n+1)}=-\frac{1}{n(n+1)}<0.$$

Demak, $a_{n+1}<a_n$ bo'lgani tufayli $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik qat'iy kamayuvchi ketma-ketlik bo'ladi. 1 dan katta kasrlar kamayuvchi sonli ketma-ketlik tashkil qilar ekan.

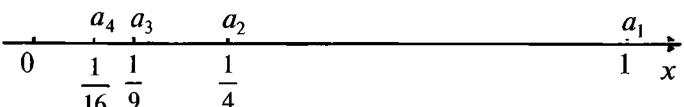
3-misol. $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligini ko'rsating.

Yechish. $a_n=\frac{n}{2^n}$, $a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$ umumiy hadlari ayirmasini topamiz:

$$a_n-a_{n+1}=\frac{n}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{2n-n-1}{2^{n+1}}=\frac{n-1}{2^{n+1}}\geq 0.$$

Demak, $a_n-a_{n+1}\geq 0 \Rightarrow a_n\geq a_{n+1}$ bo'lgani uchun berilgan $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'ladi.

4-misol. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ketma-ketlik kamayuvchi. Chunki barcha n lar uchun $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}$ tengsizlik hamma vaqt bajariladi. Bu ketma-ketlikning hadlarini son o'qida tasvirlasak, a_{n+1} hadga mos keluvchi nuqta a_n hadga mos keluvchi nuqtaga nisbatan chaproqda joylashgan bo'ladi (1-rasm).



1- rasm.

2. Chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar

3- ta'rif. *Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lib, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni $\forall n \in N$ uchun $x_n \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlik* ***yuqoridan chegaralangan*** *deyiladi.*

4- ta'rif. *Agar shunday o'zgarmas m son mavjud bo'lib, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan kichik bo'lmasa, ya'ni $\forall n \in N$ uchun $x_n \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlik* ***quyidan chegaralangan*** *deyiladi.*

5- ta'rif. *Agar ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday o'zgarmas m va M sonlar topilib, $\forall n \in N$ uchun $m \le a_n \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlik* ***chegaralangan*** *deyiladi.*

Geometrik nuqtayi nazardan $\{a_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, shunday $[m; M]$ kesma mavjudki, bu ketma-ketlikning barcha hadlari shu kesmada joylashgan bo'ladi. Bu mulohazaning o'rinli bo'lishi chegaralangan ketma-ketlikning barcha hadlari $m \le a_n \le M$ tengsizlikni qanoatlantirishidan kelib chiqadi. Ko'pincha 5- ta'rifni quyidagicha ham aytish mumkin: shunday K musbat son mavjud bo'lib, n natural sonning barcha qiymatlarida $|a_n| \le K$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi. Bu ta'rifdagi K sonni $|m|$ va $|M|$ sonlarning kattasiga teng qilib olish mumkin.

5- misol.

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \ldots, 1-\frac{1}{n}, \ldots \qquad (1)$$

ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatan, n natural son qanday bo'lmasin $1-\frac{1}{n}<1$ tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlik ketma-ketlikning barcha hadlari uchun bajariladi.

6-misol. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, ..., 1+\frac{1}{n}, ...$ (2)

ketma-ketlikning quyidan chegaralanganligini ko'rsating.

Yechish. n natural sonlarning barchasi uchun $1-\frac{1}{n}<1+\frac{1}{n}\le 2$ tengsizlik o'rinli. Shunday qilib, birdan kichik bo'lgan kasrlar o'suvchi ketma-ketlik tashkil qilib, uning istalgan hadi 1 dan katta kasrlardan tashkil topgan ketma-ketlikning istalgan hadidan kichik bo'ladi. 1 dan katta kasrlardan tashkil topgan ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, uning istalgan hadi 1 dan kichik kasrlardan tashkil topgan ketma-ketlikning istalgan hadidan katta bo'ladi. Boshqacha aytganda, (2) ketma-ketlikning istalgan hadi (1) ketma-ketlik uchun yuqori chegara bo'ladi. (1) ketma-ketlikning istalgan hadi esa (2) ketma-ketlikning quyi chegarasi bo'ladi.

7-misol. $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, ..., \frac{n^2}{n^2+1}, ...$ ketma-ketlikning chegaralanganligini ko'rsating.

Yechish. $\frac{n^2}{n^2+1}=\frac{n^2+1-1}{n^2+1}=1-\frac{1}{n^2+1}<1.$

Demak, $\forall n \in N$ uchun $0<\frac{n^2}{n^2+1}<1.$

Bu esa berilgan ketma-ketlikning quyidan va yuqoridan chegaralanganligini bildiradi: $m=0$; $M=1$.

6-ta'rif. *Agar n natural sonning barcha qiymatlarida $\{a_n\}$ ketma-ketlikning istalgan hadi uchun $|a_n|\le K$ tengsizliklar bajariladigan K musbat sonni tanlash imkoniyati bo'lmasa, u holda $\{a_n\}$ ketma-ketlik* ***chegaralanmagan*** *deyiladi.*

Masalan, $\{n^2\}$ ketma-ketlik chegaralanmagandir. Chunki K qanchalik katta musbat son bo'lmasin, $|n^2|=|n|^2>M=K$ tengsizlikni qanoatlantiradigan n natural sonni ko'rsatish mumkin.

Shuningdek, umumiy hadlari $a_n = 2^n$ va $b_n = n^n$ bo‘lgan sonli ketma-ketliklarga nisbatan ham shunday xulosani chiqarish mumkin.

3- §. Sonli ketma-ketlikning limiti

Ushbu $a_n = \frac{2n-1}{3n}$, $n \in N$ ketma-ketlikni qaraylik. Bu ketma-ketlikning hadlari n o‘sib borgan sayin $\frac{2}{3}$ ga yaqinlashishligini ko‘rish qiyin emas. Ketma-ketlikning n- hadini $a_n = \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3n}$ ko‘rinishda ifodalasak, yuqoridagi fikrimiz yanada oydinlashadi. n nomer oshib borishi bilan ikkinchi qo‘shiluvchi nolga yaqinlashib boradi. Shuning uchun $\frac{2}{3} - \frac{1}{3n}$ ayirma n o‘sib borishi bilan $\frac{2}{3}$ soniga intiladi. Bunday nolda istalgan musbat ε son uchun shunday N natural sonni topish mumkinki, $n > N$ bo‘lganda $\left|a_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Yana bir misolni tahlil qilaylik. 6,9; 6,99; 6,999; ...; 6,999...9; ... ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Bu ketma-ketlikning barcha hadlari 7 dan kichik bo‘lib, 7 soniga intilishini isbotlaylik.

Y e c h i s h: 7 soni bilan berilgan ketma-ketlik hadlari orasidagi farqlar 0 soniga intiladigan 0,1; 0,01, 0,001; 0,0001; ... ketma-ketlikni tashkil qiladi. Bu ketma-ketlikning hadlarini ε_n orqali belgilaylik. 0,001 soni berilgan bo‘lsin. Bu sonni ε_N bilan belgilaylik. Bu yerda N uning nomeri, n o‘sib borganda $|a_n - a|$ ayirma qanday o‘zgarishini ko‘rsataylik:

$$(a = 7)(a_n = 6{,}99...9)\,\varepsilon_n = 0{,}001.$$

$$|6{,}9 - 7| = 0{,}1; \quad |6{,}99 - 7| = 0{,}01 \text{ va h.k.}$$

$$0{,}1 > \varepsilon_N;\ 0{,}01 > \varepsilon_N;\ 0{,}001 = \varepsilon_N;\ 0{,}0001 < \varepsilon_N;$$
$$0{,}00001 < \varepsilon_N; ...$$

Demak, $n > N$ nomerlar uchun $|a_n - a| < \varepsilon_N$ bo‘lishi ravshan. Endi ε_N soni yanada kichikroq son bo‘lsin. Masalan, $\varepsilon_n = 0{,}000001$ bo'lsin. Yuqoridagidek mulohaza yuritib,

$$0{,}1 > \varepsilon_N;\ 0{,}01 > \varepsilon_N;\ ...;\ 0{,}00001 > \varepsilon_N;\ 0{,}000001 = \varepsilon_N;$$

$$0{,}0000001 < \varepsilon_N;\ ...;\ 10^{-10} < \varepsilon_N, ...$$

va h.k. bo'lishini topamiz.

Shunday qilib, ε musbat son qanchalik kichik bo'lmasin, qaralayotgan jarayonda shunday bir holat yuz beradiki, bu holatdan boshlab, barcha $n > N$ bo'lgan hollar uchun $|a_n - a| < |6{,}99...9 - 7| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

1-ta'rif. *Agar istalgan ε musbat son uchun shunday N natural son topilsaki, barcha $n > N$ uchun*

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, a son $\{a_n\}$ ketma-ketlikning ***limiti*** *deyiladi va quyidagicha yoziladi:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \qquad (2)$$

Bu ta'rifni simvolik ko'rinishda quyidagicha yozish ham mumkin:

$$\forall\varepsilon,\ \exists N,\ \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Keltirilgan misollar va ta'rifga ko'ra, N nomerni tanlash ε songa bog'liq bo'ladi, ya'ni $N = N(\varepsilon)$.

Yuqorida ko'rilgan misollarni kiritilgan belgilashdan foydalanib, quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 7.$$

3-misol. $n \to \infty$ da $\left\{\frac{3n+2}{5n+3}\right\}$ ketma-ketlik $\frac{3}{5}$ limitga ega bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Agar berilgan ketma-ketlikni yoyib yozsak, u

$$\frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{11}{18}, \ldots, \frac{3n+2}{5n+3}, \ldots$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$a_n = \frac{3n+2}{5n+3}, a = \frac{3}{5},$$

$$a_n - a = \frac{3n+2}{5n+3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5(5n+3)}.$$

Endi n ning qanday qiymatida $\frac{1}{5(5n+3)} < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishini aniqlaymiz. Buning uchun oxirgi tengsizlikni n ga nisbatan yechamiz:

$$\frac{1}{5n+3} < 5\varepsilon \to \frac{1}{5\varepsilon} < 5n + 3 \to \frac{1}{5\varepsilon} - 3 < 5n \to \frac{1-15\varepsilon}{5\varepsilon} < 5n \to$$

$$\to n > \frac{1-15\varepsilon}{25\varepsilon}.$$

Demak, $n > \frac{1-15\varepsilon}{25\varepsilon}$ bo'lganda $\left|a_n - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+3} = \frac{3}{5}$.

Bu yerda $N(\varepsilon)$ nomer sifatida $\frac{1-15\varepsilon}{25\varepsilon}$ sonning butun qismi olinadi, ya'ni $N(\varepsilon) = \left[\frac{1-15\varepsilon}{2{,}5\varepsilon}\right]$. Endi $N(\varepsilon)$ nomerni ε ning aniq qiymatlarida hisoblaylik.

1) $\varepsilon = 0{,}1$ bo'lsin, u holda $N = \left[\frac{1-15\cdot 0{,}1}{25\cdot 0{,}1}\right] = \left[\frac{1-1{,}5}{2{,}5}\right] = \left[\frac{-0{,}5}{2{,}5}\right] = 0.$

Demak, $n > 0$ bo'lganda $\left|a_n - \frac{3}{5}\right| < 0{,}1$ tengsizlik o'rinli.

2) $\varepsilon = 0{,}01$ bo'lsin. $N = \left[\frac{1-15\cdot 0{,}01}{25\cdot 0{,}01}\right] = \left[\frac{0{,}85}{0{,}25}\right] = 3.$

Demak, $n > 3$ bo'lganda $\left|a_n - \frac{3}{5}\right| < 0{,}01$ tengsizlik o'rinli.

3) $\varepsilon = 0{,}001$ bo'lsin. $N = \left[\dfrac{1-15\cdot 0{,}001}{25\cdot 0{,}001}\right] = \left[\dfrac{0{,}085}{0{,}025}\right] = 39.$

Demak, $n > 39$ bo'lganda $\left|a_n - \dfrac{3}{5}\right| < 0{,}001$ tengsizlik o'rinli.

4) $\varepsilon = 0{,}0001$ bo'lganda,

$$N = \left[\frac{1-15\cdot 0{,}0001}{25\cdot 0{,}0001}\right] = \left[\frac{0{,}09985}{0{,}0025}\right] = 399$$

bo'ladi.

ε va $N(\varepsilon)$ larning qiymatlarini jadval ko'rinishida yozish mumkin:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N	0	3	39	399	...

4- m i s o l. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ bo'lishini isbotlang.

Y e c h i s h. $\varepsilon > 0$ sonni olamiz va $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ tengsizlikni qaraymiz.

$\forall n$ natural son uchun $2^n \geq 1 + n$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda $\dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{1+n}$ bo'ladi. Demak, $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ tengsizlik o'rniga $\dfrac{1}{1+n} \leq \varepsilon \to \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ tengsizlikni olish mumkin.

Bunday holda $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ bo'ladi. $\forall n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ uchun $\left|\dfrac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$ bo'ladi.

Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ ekanini bildiradi.

2- rasm.

2-ta'rif. *Limitga ega bo'lgan ketma-ketlik* ***yaqinlashuvchi****, limitga ega bo'lmagan (limiti mavjud bo'lmagan) ketma-ketlik* ***uzoqlashuvchi*** *deyiladi.*

Ketma-ketlik yaqinlashishining geometrik ma'nosini tushuntiraylik. Buning uchun nuqtaning atrofi tushunchasini kiritamiz.

Son to'g'ri chizig'ida ixtiyoriy a nuqtani olaylik. Son to'g'ri chizig'ining markazi a nuqtada bo'lgan istalgan oralig'i a nuqtaning *atrofi* deyiladi (2-rasm).

a nuqta cheksiz ko'p intervallarning markazi bo'ladi. Shunday ekan a nuqtaning atrofi butun son to'g'ri chizig'ini ham o'z tarkibiga olishi mumkin.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bo'lsa, u holda a nuqtaning $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$ atrofi qanday bo'lmasin, shunday bir N natural son mavjudki, $n > N$ bo'lgan hollar uchun $\{a_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari bu atrofga tegishli bo'ladi. Haqiqatan, $n > N$ bo'lganda $|a_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \rightarrow$ $\rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ tengsizlikka teng kuchli. Bundan esa $n > N$ bo'lganda $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari (ya'ni a_{N+1}, a_{N+2} ... hadlari) a nuqtaning ε- atrofi deb ataluvchi $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$ intervalga tushadi.

4- §. Cheksiz kichik ketma-ketliklar. Cheksiz kichik ketma-ketliklar haqida asosiy teoremalar

Limitlar haqidagi teoremalarni isbotlashni, shuningdek, limitlarni hisoblash ishlarini cheksiz kichik ketma-ketlik tushunchasi yanada yengillashtiradi.

Ta'rif. *Limiti nolga teng bo'lgan ketma-ketlik* ***cheksiz kichik ketma-ketlik*** *deyiladi.*

Masalan, $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ ketma-ketliklarning har biri cheksiz kichik ketma-ketliklardir. Chunki bu ketma-ketliklar har birining limiti nolga teng:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0.$$

1-teorema. *Ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning yig'indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.*

Isbot. $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ — ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. Bunday holda $\varepsilon>0$ son uchun shunday N_1 nomer topiladiki, barcha $n>N_1$ lar uchun $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. Shuningdek, shunday N_2 nomer topiladiki, barcha $n>N_2$ uchun $|b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. $N=\max\{N_1, N_2\}$ desak, istalgan $n>N$ uchun $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ va $|b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bir vaqtda bajariladi. Shuning uchun istalgan $n>N$ lar uchun $|a_n+b_n|\le|a_n|+|b_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. $\varepsilon>0$ sonni ixtiyoriy tanladik, bunday holda $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$ bo'ladi, ya'ni $\{a_n+b_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'ladi. Istalgan chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig'indisi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lishi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2-teorema. *Cheksiz kichik ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlikka ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.*

Isbot. $\{b_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin, ya'ni barcha n natural sonlar uchun

$$|b_n|\le M \qquad (1)$$

bo'lsin. $\{a_n\}$ esa cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsin. Bunday holda har qanday $\varepsilon > 0$ musbat son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topiladiki, barcha $n > N$ uchun

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (2)$$

tengsizlik bajariladi. (1) va (2) tengsizliklardan istalgan $n > N$ uchun

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$ bo'lishini bildiradi, ya'ni $\{a_n b_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lar ekan.

Cheksiz kichik ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Isbotlangan 2-teoremadan ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lishi kelib chiqadi. Shuningdek, cheksiz kichik ketma-ketlikning o'zgarmas songa ko'paytmasi ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Ba'zan $\{a_n\}$ ketma-ketlikni o'zgaruvchan miqdor ham deyiladi. $\{a_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda uni cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Yuqorida isbotlangan teoremalarni va ularning natijalarini cheksiz kichik miqdorlarga nisbatan quyidagicha aytish mumkin:

1) chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig'indisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi;

2) cheksiz kichik miqdorning o'zgarmas songa ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi;

3) ikkita cheksiz kichik miqdorning ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi;

4) cheksiz kichik miqdorni o'zgarmas songa bo'lishdan chiqqan bo'linma cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Masalan, α cheksiz kichik miqdor bo'lsa, u holda $\alpha : \frac{1}{100}$ bo'linma ham cheksiz kichik miqdor bo'ladi, chunki bu bo'linma $\alpha \cdot 100$ ko'paytmaga, ya'ni cheksiz kichik miqdorning o'zgarmas son bilan ko'paytmasiga teng. Cheksiz kichik miqdorni ikkinchi bir cheksiz kichik miqdorga bo'lishdan chiqqan bo'linma ba'zan o'zgarmas songa teng bo'lishi, ba'zan cheksiz kichik miqdor bo'lishi, ba'zan esa cheksiz katta miqdor (son) bo'lishi mumkin; bularning hammasi bo'linuvchi va bo'luvchilarning qanday qonunga asosan kamayishiga bog'liqdir. Masalan, shunday uchta bo'linmani qaraylik:

$$\frac{2\alpha}{\alpha} = 2, \quad \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha, \quad \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}.$$

Agar α ni cheksiz kichik miqdor deb faraz qilsak, u holda birinchi bo'linma 2 ga teng bo'lgan o'zgarmas son, ikkinchi bo'linma α ga teng bo'lib, cheksiz kichik miqdor, uchinchi bo'linma $\frac{1}{\alpha}$ ga teng bo'lib, cheksiz katta miqdor, chunki surati o'zgarmas bo'lib, maxraji cheksiz kamayadigan kasr cheksiz ortadi.

3-teorema. *Limitga ega bo'lgan ketma-ketlikni (o'zgaruvchi miqdorni) o'zining limiti bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning (cheksiz kichik miqdorning) yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.*

Isbot. Haqiqatan, $\{a_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega, ya'ni $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ bo'lsin. Bunday holda berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural sonni topish mumkinki, barcha $n > N$ uchun $|a_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bunday holda $a_n - a$ ayirma cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Agar bu ayirmani a_n desak, $a_n - a = \alpha_n$ bo'lib, $a_n = a + \alpha_n$ bo'ladi. Bu yerdagi α_n cheksiz kichik miqdor. Teorema isbotlandi.

4-teorema (teskari teorema). *Agar a_n o'zgaruvchi miqdorni $a_n = a + \alpha_n$ (α_n — cheksiz kichik miqdor) yig'indi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda a son a_n o'zgaruvchi miqdorning limiti bo'ladi.*

I s b o t. Agar $a_n = a + \alpha_n$ desak, bu yerda a — berilgan son, α_n — cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Bundan $a_n - a$ ayirmaning cheksiz kichik miqdor bo'lishi kelib chiqadi. Bunday holda berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural sonni topamizki, barcha $n > N$ uchun $|a_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ deganidir. Demak, $a_n = a + \alpha_n$ tenglikning bajarilishi a_n o'zgaruvchining limitga ega bo'lish belgisini ifodalaydi.

5- §. Ketma-ketliklarning limitlari haqidagi teoremalar. Limitlarni hisoblash

Limitlarni hisoblashda ko'pincha yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmaning limiti haqidagi teoremalardan foydalaniladi. Quyida shu teoremalarni keltiramiz.

1-t e o r e m a. Agar $\{a_n\}$ *va* $\{b_n\}$ *ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\{a_n + b_n\}$ *ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \text{ bo'ladi.}$$

I s b o t. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ bo'lsin. Yuqorida isbotlangan 4- §, 3- teoremaga ko'ra: $a_n = a + \alpha_n$, bunda $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik; $b_n = b + \beta_n$, bunda $\{\beta_n\}$ cheksiz ketma-ketlik.

Bu tengliklarni hadlab qo'shamiz:

$$a_n + b_n = (a + b) + \alpha_n + \beta_n.$$

Cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig'indisi ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lishini e'tiborga olsak, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

4- §, 3- teoremaga teskari bo'lgan teoremaga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Matematik induksiya usulidan foydalanib, chekli sondagi ketma-ketliklar yig'indisining limiti bu ketma-ketliklar limitlarining yig'indisiga teng bo'lishini isbotlash mumkin.

2-t e o r e m a. Agar $\{a_n\}$ *va* $\{b_n\}$ *ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\{a_nb_n\}$ *ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)$ bo'ladi.

I s b o t. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ bo'lsin. 3- teoremaga (4- §) ko'ra: $a_n=a+\alpha_n$ va $b_n=b+\beta_n$ tengliklarga ega bo'lamiz. Bu yerda $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar. Oxirgi tengliklarni hadlab ko'paytirib, $a_nb_n=ab+(b\alpha_n+a\beta_n+\alpha_n\beta_n)$ ga ega bo'lamiz.

2-t e o r e m a (4- §) va uning natijalariga ko'ra $\{b\alpha_n+a\beta_n+\alpha_n\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Bundan:

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right).$$

Matematik induksiya usulidan foydalanib, chekli sondagi yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ko'paytmasining limiti ular limitlarining ko'paytmasiga teng bo'lishini isbotlashimiz mumkin.

1- n a t i j a. *O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisi oldiga chiqarish mumkin:* $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

I s b o t. 2-teoremaga ko'ra:

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n)=\lim_{n\to\infty}c\lim_{n\to\infty}a_n=c\lim_{n\to\infty}a_n,$$

bunda $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$.

2-n a t i j a. *Agar* $\{a_n\}$ *va* $\{b_n\}$ *ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\{a_n-b_n\}$ *ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi va* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Isbot. 1-teoremaga ko'ra:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\left[a_n + (-1)b_n\right] = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-1)b_n.$$

1- natijani e'tiborga olsak,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

kelib chiqadi.

3-teorema. *Agar* $\{a_n\}$ *va* $\{b_n\}$ *ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,* $b_n \neq 0$ *va* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ *bo'lsa, u holda* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ *ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b}$ *bo'ladi.*

Yuqorida isbotlangan teoremalarni va ularning natijalarini misollar yechishga qo'llaylik.

1-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n-5}{13n+4}$ ni toping.

Yechish. $a_n = \frac{7n-5}{13n+4}$ ketma-ketlikning surat va maxraji uzoqlashuvchi ketma-ketliklarni ifodalaydi, ya'ni ular chegaralanmagan. Shuning uchun ketma-ketlikning limitini hisoblashga to'g'ridan to'g'ri bo'linmaning limiti haqidagi teoremani qo'llab bo'lmaydi. Bunday holda ketma-ketlikning limitini hisoblashga teoremalarni qo'llash uchun uning ko'rinishini o'zgartiramiz. Buning uchun kasrning surat va maxrajini n ga bo'lamiz. Bu bilan kasrning miqdori o'zgarmaydi.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n-5}{13n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7n}{n}-\frac{5}{n}}{\frac{13n}{n}+\frac{4}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 13 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}} = \frac{7-0}{13+0} = \frac{7}{13}.$$

Quyidagi limitlar ham yuqoridagiga o'xshash hisoblanadi.

2-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$$

$$\frac{2-0+0}{1+0}=2.$$

3-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+3n^4}{n-6n^4}\right)^3=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+3n^4}{n-6n^4}\right)^3=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^4}+3}{\frac{1}{n^3}-6}\right)^3=$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}.$$

6-§. Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma-ketlik limiti

Yuqorida ketma-ketlikning chegaralanganligi uning limitga ega bo'lishi uchun zaruriy shart bo'lishini o'rnatgan edik. Limitga ega bo'lgan ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Lekin teskari mulohaza noto'g'ri bo'lishi mumkin. Har qanday chegaralangan ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lavermaydi. Limiti mavjud bo'ladigan ketma-ketlik chegaralangan bo'lishdan tashqari yana qandaydir xususiyatga ega bo'lishi kerak. Ketma-ketlikning bunday xususiyati uning *monotonligidir.* Ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lishining asosiy belgisi uning bir vaqtda chegaralangan va monoton bo'lishidir. Chegaralanganlik va monotonlik cheksiz ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishining yetarli shartlarini ifodalaydi. Shunday ekan biz berilgan ketma-ketlikning monotonlik xususiyatini va chegaralanganligini ko'rsata olsak, albatta, bunday ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi. Keyingi vazifa esa limitni hisoblash usulini tanlab, uni topishdan iboratdir.

T e o r e m a (Veyershtrass). *Har qanday monoton chegaralangan ketma-ketlik limitga ega bo'ladi.*

Bu teoremaning isbotini keltirmaymiz. Veyershtrass teoremasi ketma-ketlik limitining mavjud bo'lishining yetarli shartlarini ifodalaydi. Lekin limitni topish usulini ko'rsata olmaydi. Ko'pchilik hollarda ketma-ketlik limitining mavjudligi haqida ma'lumot berish bu limitni topish uchun yetarli bo'ladi.

1- m i s o l . Agar $|q|<1$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(q^n\right)=0$ bo'lishini isbotlang.

Y e c h i s h . $q>0$ bo'lsin. Bunday holda $0<q^n<1$ bo'ladi, ya'ni $\{q^n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Shuningdek, bu ketma-ketlik monoton kamayadi, ya'ni $q^{n+1}=q\cdot q^n<q^n$. Demak, berilgan ketma-ketlik uchun Veyershtrass teoremasining barcha shartlari bajariladi. Bu ketma-ketlik limitga ega. Bu limitni a orqali belgilaymiz: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=a.$ Ammo

$$\lim_{n\to\infty}(q)^n=\lim_{n\to\infty} q\lim_{n\to\infty}\left(q^{n-1}\right)=q\lim_{n\to\infty}\left(q^{n-1}\right)=qa,$$

$$a=qa\to a(1-q)=0,$$

bunda $1-q\neq 0$, u holda $a=0$.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(q^n\right)=0$.

2- m i s o l . Umumiy hadi $a_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}$ bo'lgan ketma-ketlikning limiti mavjudligini ko'rsating.

Y e c h i s h . $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2^{n+1}+1}$ tenglikdan a_n o'zgaruvchining o'suvchi ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $a_{n+1}>a_n$

$(n\in N)$. Bu o'zgaruvchining yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz. Istalgan n natural son uchun $\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$ tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlikni $n=1, 2, 3, \dots$ bo'lgan hollar uchun qo'llab,

$$a=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\dots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}$$

tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikning o'ng qismi birinchi hadi $\frac{1}{2}$, maxraji ham $\frac{1}{2}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya dastlabki n ta hadining yig'indisini tashkil qiladi:

$$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1.$$

Demak, $a_n<1$. Berilgan ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan. Bunday ketma-ketlik chekli limitga ega.

Endi matematikada muhim ahamiyatga ega bo'lgan $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlikning umumiy hadi $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bilan ish ko'ramiz. Bu ketma-ketlikka Veyershtrassning „*Istalgan yuqoridan (quyidan) chegaralangan o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi*" degan teoremasini qo'llab, uning kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralanganligini, shuningdek, uning o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralanganligini, ya'ni istalgan n natural son uchun $2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ bo'lishini ko'rsatish mumkin. ($a_n=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma-ketlikning aniq chekli limitga ega bo'lishini ko'rsatish bizning bilim doiramizdan chiqadi.)

a_n o‘zgaruvchining $n \to \infty$ dagi limitini L. Eyler „*e*“ harfi orqali belgilashni tavsiya qilgan:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

e soni matematika, tabiatshunoslik va texnikada katta ahamiyatga ega. Bu irratsional son bo‘lib, uning 10^{-4} aniqlikdagi qiymati $e = 2{,}7183$ ga teng.

7- §. Funksiyaning limiti

1. Funksiyaning nuqtadagi limiti

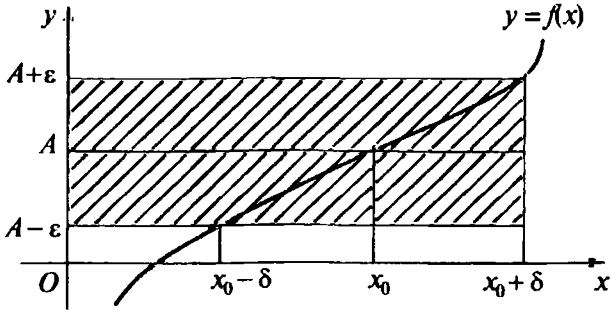
Oldingi mavzularda cheksiz sonli ketma-ketlik va uning limiti haqida tushunchaga ega bo‘ldik. Endi funksiyaning limiti tushunchasini o‘rganishga o‘tamiz.

$y = f(x)$ funksiya biror $]a; b[$ oraliqda berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. *Agar istalgan $\varepsilon > 0$ musbat son uchun shunday $\delta > 0$ sonni topish mumkin bo‘lib, x argumentning barcha $x \neq x_0$ qiymatlari uchun $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikning bajarilishidan $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqsa, o‘zgarmas A son f(x) funksiyaning* ***x_0 nuqtadagi ($x \to x_0$ dagi) limiti*** *deyiladi va $\lim\limits_{n\to x_0} f(x) = A$ ko‘rinishda yoziladi.*

Bu ta’rifni geometrik nuqtayi nazardan quyidagicha aytish mumkin: Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lib, x argumentning qiymatlari x_0 nuqtaning δ- atrofiga tushishi bilan $f(x)$ funksiya qiymatlari A nuqtaning ε- atrofiga tushsa, o‘zgarmas A son $f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ *dagi limiti* deyiladi (3-rasm).

2-ta’rif. *Agar $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $M > 0$ sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lib, $|x| > M$ tengsizlikdan $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqsa, o‘zgarmas A son f(x)*



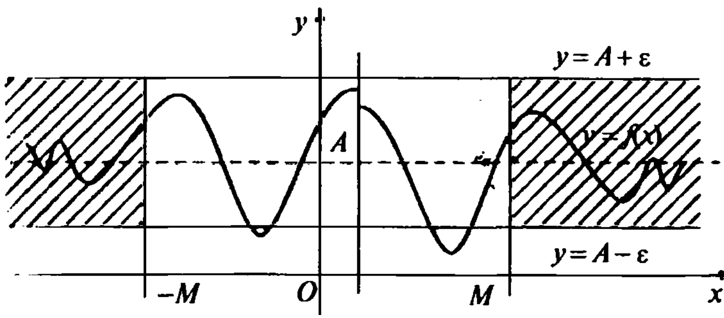
3- rasm.

funksiyaning $x \to \infty$ ***dagi limiti*** *deyiladi va* $\lim\limits_{n \to x_0} f(x) = A$ *ko'rinishda yoziladi.*

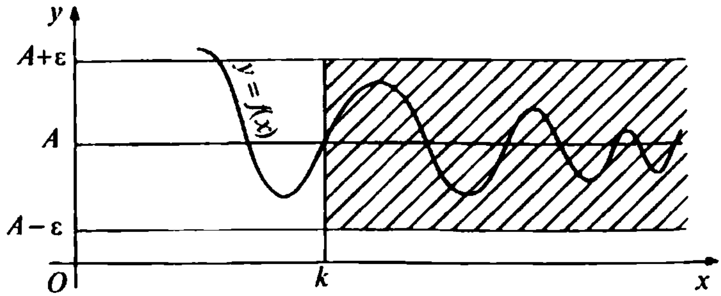
$f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ da A limitga ega bo'lishi geometrik nuqtayi nazardan quyidagi ma'noga ega: shunday M son mavjudki, $|x| > M$ bo'lganda $f(x)$ funksiya grafigi $y = A - \varepsilon$ va $y = A + \varepsilon$ to'g'ri chiziqlar orasida yotadi (4-rasm).

Yuqoridagi ta'riflarga o'xshash, $f(x)$ funksiyaning $x \to +\infty$ va $x \to -\infty$ dagi limitlari ham ta'riflanadi.

3-ta'rif. *Agar* $\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* $K > 0$ *haqiqiy son topilsaki,* $x > K$ *bo'lganda* $|f(x) - A| < \varepsilon$



4- rasm.



5- rasm.

tengsizlik bajarilsa, A son f(x) funksiyaning $x \to +\infty$ ***dagi limiti*** *deyiladi va* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = A$ *ko'rinishda yoziladi.*

$|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ tengsizliklarga teng kuchli bo'ladi. Bunday holda limitik o'tishga quyidagicha geometrik mazmun berish mumkin:

$x \to \infty$ da $y = f(x)$ funksiyasining grafigi $y = A$ to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashadi, ya'ni $\varepsilon > 0$ qanday bo'lmasin, shunday K son topiladiki, $x > K$ bo'lganda $y = f(x)$ funksiya grafigi, $y = A - \varepsilon$ va $y = A + \varepsilon$ to'g'ri chiziqlar orasida yotadi (5-rasm).

Funksiya limitining nuqtadagi ta'rifidan agar $x \to x_0$ da $f(x) \to A$ bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da $f(x) - A \to 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

$\alpha(x) = f(x) - A$ belgilashni kiritsak, $f(x) = A + \alpha(x)$ bo'ladi. Bunda $x \to x_0$ da $\alpha(x) \to 0$ bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = 0$. Shunday qilib, $f(x)$ funksiyani $f(x) = A + \alpha(x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da A o'zgarmas sondan iborat limitga ega bo'lar ekan. Shuni alohida qayd qilamizki, A limit qaralayotgan x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Chunki funksiyaning limitini topishda funksiyaning bu nuqtadagi qiymati qaralmaydi.

Funksiyaning nuqtadagi limiti ta'rifidan foydalanib, ba'zi bir funksiyalarning limitlarini topamiz.

1-misol. O'zgarmas funksiyaning limiti shu o'zgarmas songa teng bo'ladi.

Yechish. $f(x) = C$ bo'lsin. Limitning ta'rifiga ko'ra $\varepsilon > 0, \delta > 0$ va barcha $x \in \,]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ uchun $|f(x) - C| =$ $|C - C| = 0 < \varepsilon$.

Demak, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} C = C.$

2-misol. $f(x) = x$ funksiya berilgan. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$ bo'lishini isbotlang.

Yechish. $\varepsilon > 0$ — istalgan son bo'lsin. $\delta = 0$ desak, $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta$, ya'ni $|x - x_0| < \varepsilon$.

Demak, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

3-misol. Funksiyaning nuqtadagi limiti ta'rifidan foydalanib, $\lim\limits_{x \to x_2} \left(x^2 - 3x - 1\right) = -3$ bo'lishini isbotlang.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib, shunday $\delta > 0$ sonni topamizki, x ning barcha qiymatlari uchun $|x \quad 2| < \delta$ tengsizlik bajarilishi bilan

$$\left|\left(x^2 - 3x - 1\right) - (-3)\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

tengsizlik bajarilsin. Modul ostida qatnashayotgan ifodaning ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$(x - 3x - 1) - (-3) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Demak,

$$\left|(x-1)(x-2)\right|<\varepsilon \to |x-2||x-1|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Hozircha δ ni aniqlaganimizcha yo'q. Agar $|x-2|<\delta$ desak, u holda $|x-1|=\left|(x-2)+1\right|\le|x-2|+1<\delta+1$ bo'lib,

$$|x-2|\left|(x-1)\right|<\delta(\delta+1). \qquad (2)$$

(1) va (2) ni taqqoslab, δ ning qiymati sifatida $\delta(\delta+1)=\varepsilon$ tenglamaning musbat ildizini olish mumkin. Buning uchun $\delta^2+\delta-\varepsilon=0$ tenglamani yechamiz:

$$a=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\varepsilon}=\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}-1}{2}.$$

Xususiy hollarda $\varepsilon=2$ desak, $\delta=1$; $\varepsilon=6$ desak, $\delta=2$; $\varepsilon=0{,}01$ bo'lsa, $\delta=0{,}009$ va h.k. bo'ladi. Shunday qilib, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun (*) tengsizlik $|x-2|<$ $<\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}-1}{2}$ tengsizlik bajarilishi bilan bajariladi. Bu esa $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x-1\right)=-3$ bo'lishini isbotlaydi.

Berilgan funksiyaning berilgan nuqtadagi limiti funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng ekanini ko'rish qiyin emas. Quyidagi umumiy xulosani chiqarish mumkin: $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko'phadning biror $x=x_0$ nuqtadagi limitini topish uchun bu ko'phadning $x=x_0$ dagi qiymatini hisoblash yetarli:

$$f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\right)=$$

$$=a_0x_0^n+\ldots+a_{n-1}x_0+a_n.$$

2. Funksiya limitining yagonaligi haqidagi teorema

T e o r e m a. *Funksiya nuqtada ikkita har xil limitga ega bo'lmaydi.*

I s b o t. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da ikkita har xil limitga ega bo'lsin: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$.

Bunday holda bir tomondan $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta_1 > 0, \forall x = x_0$ bo'lganda, $|x - x_0| < \delta_1$ tengsizlikning bajarilishi bilan $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, boshqa tomondan esa $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta_2 > 0, \forall x = x_0$ uchun $|x - x_0| < \delta_2$ tengsizlik bajarilishidan $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi, ya'ni birdan ikkita tengsizlik bajariladi: $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ va $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. $|A - B|$ sonni qaraymiz, bu son bir tomondan manfiy emas, chunki qilingan farazga ko'ra $A \neq B$, boshqa tomondan

$$|A - B| = |(A - f(x)) + (f(x) - B)| \le |A - f(x)| +$$
$$+ |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ya'ni istalgan musbat sondan kichik. Bunday son faqat nol soni bo'lishi mumkin, shuning uchun

$$|A - B| = 0 \to A - B = 0 \to A = B.$$

Bu esa farazimizga zid. Shunday qilib, berilgan funksiya berilgan nuqtada bittadan ortiq limitga ega bo'lmas ekan.

3. Bir tomonlama limitlar. Funksiya limitining mavjudligi

$y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi limitini qarayotganimizda x argument $x = x_0$ nuqtaning atrofidagi x_0

qiymatdan tashqari uning chap va o'ng qismida yotgan qiymatlarni qabul qilishini ko'rgan edik.

Agar limitni topishda x argument x_0 dan chapda yotgan qiymatlarni qabul qilsa, bunday limit funksiyaning *chap limiti* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Agar x argument x_0 $(x > x_0)$ dan o'ngda yotgan qiymatlarni qabul qilsa, bunday limit funksiyaning *o'ng limiti* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x + 0).$$

Chap va o'ng limitlar *bir tomonlama* limitlar deyiladi. Agar bir tomonlama limitlar $x_0 = 0$ nuqtada $(x \to 0)$ o'rganilsa, yuqoridagi yozuvlar ixchamlashadi: chap bir tomonlama limit $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = f(-0)$, o'ng bir tomonlama limit $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = f(+0)$ ko'rinishda yoziladi. Endi bir tomonlama limitlarga aniq ta'rif beramiz va x_0 nuqta $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ atrofni $]x_0 - \delta; x_0[$ chap va $]x_0; x + \delta[$ o'ng yarim atroflarga ajratishini e'tiborga olamiz.

1-ta'rif. *Agar istalgan* $\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* $\delta > 0$ *sonni topish mumkin bo'lib,* $f(x)$ *funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan* x *ning barcha qiymatlari uchun* $x_0 - \delta < x < x_0$ *tengsizlikning bajarilishidan* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *tengsizlik kelib chiqsa,* A *son* $f(x)$ *funksiyaning* $x \to x_0$ *dagi* ***chap limiti*** *deyiladi.*

2-ta'rif. *Agar istalgan* $\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* $\delta > 0$ *sonni topish mumkin bo'lib,* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *tengsizlikni qanoatlantiradigan* $f(x)$ *funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan* x *ning barcha qiymatlari uchun* $|f(x) - A| < \varepsilon$

*tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ dagi **o'ng limiti** deyiladi.*

Endi funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi bir tomonlama limitlari bilan funksiyaning shu nuqtadagi limiti orasidagi bog'lanishni o'rnatamiz.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning atrofida aniqlangan bo'lib, shu x_0 nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi mumkin, ya'ni funksiya $]a; x_0[$ va $]x_0; b[$ yarimintervallarda aniqlangan bo'lishi mumkin.

Ta'rifga ko'ra, agar $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti mavjud bo'lsa, bunday holda

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \tag{1}$$

Shuningdek, x_0 nuqtada $f(x_0+0)$ va $f(x_0-0)$ bir tomonlama limitlar mavjud bo'lib,

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = A \tag{2}$$

bo'ladi. Teskari tasdiq ham o'rinli: agar (2) o'rinli bo'lsa, u holda (1) ham o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti mavjudligini o'rnatish uchun quyidagi uchta shartlarning bajarilishini tekshirish zarur va yetarli:

1) chap limitning mavjudligi; 2) o'ng limitning mavjudligi; 3) bir tomonlama limitlarning tengligi.

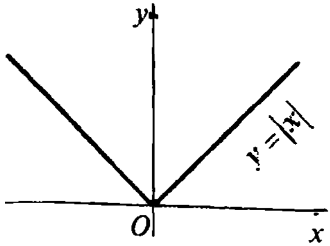
1 - misol. $f(x) = |x|$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada limiti mavjud bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Berilgan funksiya butun son o'qida aniqlangan. Absolut qiymatning ta'rifiga ko'ra:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Berilgan funksiyaning $x = 0$ nuqtada chap va o'ng limitlarini hisoblaylik:

$$f(-0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-x) = \lim_{x \to -0} (-x) = 0,$$



6- rasm.

$$f(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=\lim_{x\to +0} x=0.$$

Demak, $f(0)=f(-0)=0$, ya'ni bir tomonlama limitlar $x=0$ nuqtada ustma-ust tushadi, bunday holda $|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi limiti mavjud bo'lib, bu limit funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymatiga teng (6- rasm), ya'ni $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

2 - m i s o l. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ agar } x\le 0,\\ \sin x, \text{ agar } 0<x\le\pi,\\ x-2, \text{ agar } x>\pi \end{cases}$

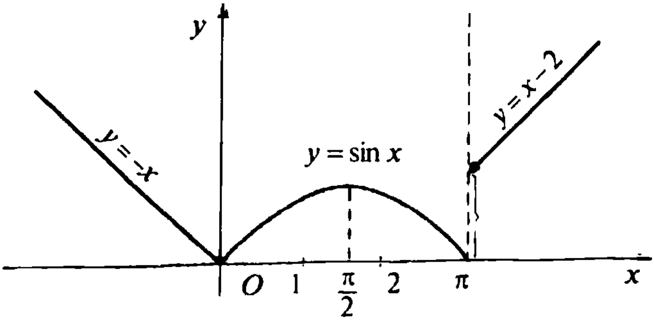
funksiya berilgan. Funksiyaning $x=0$ va $x=\pi$ nuqtalarda limiti mavjud bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlang.

Y e c h i s h. $]-\infty;0[$ oraliqda $f(x)=-x$ funksiya, $]0;\pi[$ oraliqda $f(x)=\sin x$ funksiya va $]\pi;+\infty[$ oraliqda esa $f(x)=x-2$ funksiya aniqlangan. Funksiyani oraliqlarning $x=0$ va $x=\pi$ chegara nuqtalarida tekshiramiz. Bu nuqtalarda funksiyaning chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x=0=f(0),$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin x=0=f(0).$$

Demak, $x=0$ nuqtada chap va o'ng limitlar mavjud va ular teng, shuningdek, ular funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymatiga ham teng. $x=\pi$ nuqtada funksiyaning chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz:



7- rasm.

$$\lim_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} \sin(x) = \sin 0 = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi}} (x - 2) = \pi - 2 \approx 3{,}14 - 2 = 1{,}14.$$

x = π nuqtada chap va o'ng limitlar mavjud bo'lib, ular teng emas. Shuning uchun berilgan funksiya $x = \pi$ nuqtada limitga ega emas (7- rasm).

4. Funksiyaning limitlari haqidagi teoremalar

Limitlarni hisoblash ishlarini yengillashtiradigan funksiyalarning limitlari haqidagi teoremalar ham ketma-ketliklarning limitlari haqidagi teoremalarga o'xshashdir.

1 - t e o r e m a. *Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning limitlari mavjud bo'lsa, u holda ular yig'indisining (ayirmasining) ham limiti mavjud va*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

2 - t e o r e m a. *Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning limitlari mavjud bo'lsa, u holda ular ko'paytmasining ham limiti mavjud va*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

N a t i j a. *O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni*

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim_{x\to x_0} f(x)$$

($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *mavjud deb qaraladi*).

3- t e o r e m a. *Agar* $x\to x_0$ *da* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalarning limitlari mavjud bo'lib,* $g(x)\neq 0$ *va* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ *bo'lsa, u holda bu funksiyalar bo'linmasining ham limiti mavjud bo'ladi va*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

4- t e o r e m a (oraliq funksiyaning limiti haqida). *Agar* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x) = A$ *bo'lib,* x_0 *nuqtaning biror atrofida* (x_0 *nuqtada bajarilmasligi mumkin*) $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ *tengsizliklar bajarilsa, u holda* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ *bo'ladi.*

Bu teoremalar ketma-ketliklar uchun keltirilgan teoremalardan kelib chiqqanligi tufayli, ularni isbotsiz qabul qilamiz va misollar yechishga qo'llaymiz.

1- m i s o l. $\lim\limits_{x\to 2}(11x^2 - 7x + 3)$ ni toping.

Y e c h i s h. Yig'indi, ayirma va ko'paytmaning limiti haqidagi teoremalarni qo'llaymiz:

$$\lim_{x\to 2}(11x^2 - 7x + 3) = \lim_{x\to 2} 11x^2 - \lim_{x\to 2} 7x + \lim_{x\to 2} 3 =$$

$$= 11\lim_{x\to 2} x^2 - 7\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 = 11\lim_{x\to 2} x\cdot\lim_{x\to 2} x - 7\cdot 2 + 3 =$$

$$= 11\cdot 2\cdot 2 - 14 + 3 = 44 - 11 = 33.$$

2- m i s o l. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3 - 6x^2 + 11 - 6}{x^2 - 3x + 2}$ ni toping.

Yechish. $x \to 1$ da maxraj nolga aylanadi. Shuning uchun bo‘linmaning limiti haqidagi teoremani qo‘llab bo‘lmaydi. Kasrning surat va maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3-6x^2+11x-6=x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6=$$
$$x^2(x-1)+(x-1)(-5)+6(x-1)=(x-1)(x^2-5x+6)=$$
$$(x-1)(x-2)(x-3).$$

$$x^2-3x+2=x^2-x-2x+2=x(x-1)-2(x-1)=$$
$$(x-1)(x-2).$$

$x=1$ nuqtada limitni topishda $x \neq 1$ va $x \neq 2$ deb qaraladi. Kasrni $(x-2)(x-1)$ ga qisqartirish mumkin:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x+11x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=$$
$$\lim_{x\to 1}(x-3)=1-3=-2.$$

3-misol. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ ni hisoblang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-1-4)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

4-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ ni hisoblang.

Yechish. Uchta holni alohida-alohida qaraymiz: a) $n<m$; b) $n=m$ va d) $n>m$.

a) $n<m$ bo‘lsin, u holda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a_0}{x^{m-n}}+\frac{a_1}{x^{m-n+1}}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...}$$

b) $n=m$ bo‘lsin, u holda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+}$$

d) $n>m$ bo‘lsin, u holda

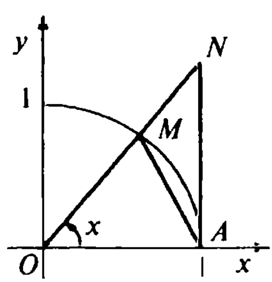
$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+..}{\frac{b_0}{x^{n-m}}+\frac{b}{x^{n-m+1}}}$$

J a v o b: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\begin{cases}0, \text{ agar} \\ \frac{a_0}{b_0}, \text{ aga} \\ \infty, \text{ agar}\end{cases}$

5. Birinchi ajoyib limit

$x\to 0$ da $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning limitin
ya’ni $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ bo‘lishini isbotlaymiz.

$x>0$ bo‘lgan holni qaraymiz. $x\to 0$ e



8- rasm.

olsak, $0<x<\frac{\pi}{2}$ de

Radiusi $R=1$ bo
olamiz; $R=OA=1$;
dian bo‘lsin (8- ra

Shaklda hosil b
OAM sektor va to
uchburchak OAN ni
soblaymiz:

$$S_{\Delta OAM} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|OM|\sin x = \frac{1}{2}\sin x;$$

$$S_{sekOAM} = \frac{1}{2}R^2 x = \frac{1}{2}x;$$

$$S_{\Delta OAN} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|ON| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

$S_{\Delta OAN} < S_{sekOAM} < S_{\Delta OAN}$ bo'lganligidan

$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ tengsizliklarni olamiz. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lgani uchun $\sin x > 0$ bo'ladi.

Bunday holda oxirgi tengsizlikdan

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (1)$$

tengsizlikni olamiz. $x \to 0$ da oldingi bandning 4-teoremasiga ko'ra quyidagini olamiz:

$$\lim_{x\to 0}\cos x < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} 1.$$

Bu yerda $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ bo'lishini funksiyaning nuqtadagi limiti ta'rifidan foydalanib ko'rsatish mumkin. Ravshanki, $\lim_{x\to 0} 1 = 1$. Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremaga ko'ra:

$$\lim_{x\to 0\ (x\neq 0)}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (2)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shuni sezish qiyin emaski, x ni $-x$ ga almashtirganda (1) tengsizlik o'z kuchida qoladi, ya'ni buzilmaydi. Shuning uchun (1) tengsizlik $\frac{-\pi}{2} < x < 0$ oraliqda ham o'rinli bo'ladi. Juda ko'plab limitlarni topishda *ajoyib limit* deb nom olgan (2) limitdan foydalaniladi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ limitni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=$

$=1\cdot 1=1.$

2-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ limitni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

3-misol. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ limitni toping.

Yechish. $1-x=y$ almashtirishni bajaramiz, u holda $x\to 1$ da $y\to 0$ va $x=1-y$. Demak,

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to 0}y\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi(1-y)}{2}=\lim_{y\to 0}y\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}y\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}=\frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}\cdot 1=\frac{2}{\pi}.$$

4-misol. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-(1+\cos 2x)}{\sin x-\cos x}=$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x\cos x-2\cos^2 x}{\sin x-\cos x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

8- §. Funksiyaning uzluksizligi

1. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi

Funksiyaning uzluksizligi tushunchasidan „uzluksiz funksiya“ atamasini ishlatmasdan elementar funksiyalarning xossalarini o‘rganishda va ularning grafiklarini yasashda foydalandik. Masalan, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = ax^3$ va h.k. funksiyalarning argument qiymatlariga mos keluvchi funksiya qiymatlarini hisoblab, nuqta usuli bilan ularning grafiklarini chizdik. Bu grafiklar uzluksiz yaxlit chiziqlardan iborat bo‘lishiga ham ishonch hosil qildik. Funksiyalar uzluksiz bo‘lganligi tufayli ham ularning grafiklari uzluksiz silliq chiziqlardan iborat bo‘ladi. Endi funksiyaning uzluksizligi tushunchasini mukammal o‘rganamiz va bu tushunchadan funksiyalarni tekshirishda foydalanamiz.

$y = f(x)$ funksiya $]a;\ b[$ oraliqda berilgan bo‘lsin.

1 - t a ’ r i f. *Agar $f(x)$ funksiya o‘z aniqlanish sohasida tegishli bo‘lgan $x = x_0$ nuqtada chekli limitga ega bo‘lib, bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi $f(x_0)$ qiymatiga teng bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya* $\boldsymbol{x = x_0}$ ***nuqtada uzluksiz*** *deyiladi va quyidagicha yoziladi:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

1- ta’rifdan $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun quyidagi uchta shart bajarilishi kerakligi kelib chiqadi:

1) $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo‘lishi;

2) $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti mavjud bo‘lishi;

3) $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lishi.

Masalan, $f(x) = x^3$ funksiya barcha haqiqiy sonlar to‘plamida aniqlangan va $\lim\limits_{x \to 1} x^3 = 1$. Shuningdek, $f(1) = 1$, ya’ni funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi qiymati uning $x \to 1$

dagi limitiga teng. Ta'rifga ko'ra $f(x)=x^3$ funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz.

Agar funksiyaning qaralayotgan nuqtadagi chap va o'ng limitlari ta'riflaridan foydalansak, funksiyaning chapdan va o'ngdan uzluksizligini aniqlash mumkin.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *chapdan uzluksiz* deyiladi, agar $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=$ $=f(x_0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *o'ngdan uzluksiz* deyiladi.

$y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun uning x_0 nuqtadagi chap va o'ng limitlari teng bo'lib, ular funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0) \tag{2}$$

bo'lishi zarur va yetarli.

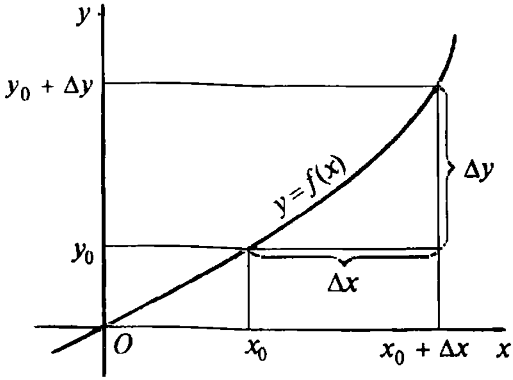
Endi funksiyaning nuqtadagi uzluksizligining amaliyot uchun juda qulay bo'lgan ta'rifini keltiramiz. Buning uchun argument va funksiya orttirmalari tushunchalarini kiritamiz.

x argumentning ikkita qiymati ayirmasiga uning *orttirmasi* deyiladi. x argument orttirmasini Δx orqali belgilasak, ta'rifga ko'ra argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi $\Delta x=x-x_0$ ayirmaga teng bo'ldi.

$y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi argument orttirmasi Δx ga mos keluvchi Δy orttirmasi deb funksiyaning $x=x_0+\Delta x$ va $x=x_0$ nuqtalardagi ayirmasiga aytiladi.

Bu ayirma (funksiya orttirmasi) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-$ $-f(x_0)$ formula bo'yicha topiladi (9- rasm).

2- t a ' r i f. *Agar $f(x)$ funksiya argumentining cheksiz kichik Δx orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik Δy orttirmasi mos kelsa, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$* ***funksiya*** $x\in\,]a;b[$ ***nuqtada uzluksiz*** *deyiladi.*



9- rasm.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya $x_0 \in]a; b[$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun funksiyaning bu nuqtadagi Δy orttirmasi $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik miqdor bo'lishi kerak ekan.

Agar $y=f(x)$ funksiya $]a; b[$ oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, bunday holda funksiya oraliqda uzluksiz deyiladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $]a; b[$ intervalda uzluksiz bo'lib, a nuqtada o'ngdan va b nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz deyiladi.

1- m i s o l. $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$ funksiyaning ixtiyoriy x nuqtada uzluksiz bo'lishini isbotlang.

Haqiqatan ham, istalgan butun koeffitsiyentli algebraik ko'phadning aniqlanish sohasi butun son o'qidagi nuqtalar to'plamidan iborat bo'ladi. Shuning uchun ham berilgan funksiyaning ixtiyoriy x nuqtada uzluksizligini ko'rsatish talab qilingan.

a) x ga Δx orttirma berib, funksiyaning $x + \Delta x$ nuqtadagi yangi qiymatini topamiz:

$$f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 6 = 3x^2 + 6x\Delta x + \\ + 3\Delta x^2 + 5x + 5\Delta x + 6;$$

b) funksiyaning orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 5x +$$
$$+ 5\Delta x + 6 - 3x^2 - 5x - 6 = 6x\Delta x + 5\Delta x + 3\Delta x^2;$$

d) funksiya orttirmasining $\Delta x \to 0$ dagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (6x\Delta x + 5x\Delta x + 3\Delta x^2) = 0.$$

Shunday qilib, berilgan funksiya istalgan x nuqtada uzluksiz ekan.

2. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Biror oraliqda uzluksiz bo'lgan funksiyani qaraymiz va uning xossalari haqidagi teoremalarni keltiramiz.

1-teorema. *Biror $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lgan chekli sondagi funksiyalarning yig'indisi ham shu $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

2-teorema. *$x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lgan chekli sondagi funksiyalarning ko'paytmasi ham shu $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

3-teorema. *Biror $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lgan ikkita funksiyaning bo'linmasi, agar maxrajdagi funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi qiymati noldan farqli bo'lsa, uzluksiz bo'ladi.*

1-misol. $f(x) = x^n$ $(n \in N)$ funksiya butun son o'qida uzluksizdir. Haqiqatan ham, $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{n \text{ ta ko'paytuvchi}}$ funksiya chekli sondagi uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasidan iborat bo'lgani uchun, 2- teoremaga ko'ra barcha haqiqiy sonlar to'plamida uzluksiz bo'ladi.

2-misol. $f(x) = cx^n$ (c — o'zgarmas son) funksiya ham 2- teorema va 1- misolga ko'ra butun son o'qida uzluksizdir.

4-teorema. *Ko'phad R haqiqiy sonlar to'plamida uzluksiz funksiyadir.*

Isbot. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ (1) bo'lsin. Bu funksiya R to'plamda $f_0(x)=a_0x^n$, $f_1(x)=a_1x^{n-1}$,..., $f_{n-1}(x)=a_{n-1}x$,..., $f_n(x)=a_n$ uzluksiz funksiyalarning yig'indisidan iborat bo'lgani uchun 1- teoremaga ko'ra (1) ko'phad R to'plamda uzluksiz funksiya bo'ladi.

5-teorema. *Istalgan kasr-ratsional funksiya aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz bo'ladi.*

Isbot. Kasr-ratsional funksiya $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ko'rinishga ega bo'lsin. Bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ – ko'phadlar.

4- teoremaga ko'ra bu ko'phadlar R to'plamda uzluksiz bo'lganligi tufayli 3- teoremaga ko'ra ularning bo'linmasi o'zining aniqlanish sohasida $(Q(x)\neq 0,\ x\in R)$ uzluksiz bo'ladi.

3-misol. $f(x)=\dfrac{11x}{x^2-5x+6}$ funksiya son o'qining maxraj nolga aylanadigan $x=2$ va $x=3$ nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarida uzluksiz bo'ladi.

4-misol. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+2}{x^2+x+1}$ funksiya R to'plamda uzluksizdir. Chunki bu kasr-ratsional funksiyaning maxraji R to'plamning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalar qator xossalarga ega. Bu xossalarni ifodalovchi ba'zi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1. Uzluksiz funksiya ishorasini faqat noli orqali o'tganda o'zgartiradi.

x argumentning qiymatlarini a dan b gacha bo'lgan oraliqda ketma-ket o'zgartirilganda uzluksiz $y=f(x)$ funksiya o'z ishorasini qancha o'zgartirsa, uning grafigi Ox (abssissalar) o'qini shuncha marta kesib o'tadi. Egri chiziqning abssissalar o'qi bilan kesishish nuqtasida funksiya qiymati nolga aylanadi.

Uzluksiz funksiyaning bu xossasidan ratsional va kasr-ratsional tengsizliklarni yechishda foydalaniladi. Yuqori darajali bir noma'lumli ratsional va kasr-ratsional tengsizliklarni yechishda qo'llaniladigan interval usuli uzluksiz funksiyaning yuqorida izohlangan xossasiga asoslangan usul hisoblanadi.

5- m i s o l. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35} > 0$ tengsizlikni yeching.

Y e c h i s h. $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}$ deylik. Kasrning ko'rinishini o'zgartiramiz. Buning uchun uning surat va maxrajidagi kvadrat uchhadlarni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3); \; x^2 - 12x + 35 = (x-5)(x-7).$$

Natijada berilgan tengsizlik $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-7)} > 0$ ko'rinishni oladi.

$f(x)$ ifoda $x = 2$ va $x = 3$ nuqtalarda nolga aylanadi; $x = 5$ va $x = 7$ nuqtalarda aniqlanmagan (uzilishga ega). Bu nuqtalar son o'qini beshta qismga ajratadi:

$$]-\infty; 2[\cup]2; 3[\cup]3; 5[\cup]5; 7[\cup]7; +\infty[.$$

$f(x)$ funksiya bu oraliqlarning ichki nuqtalarida uzluksiz bo'lib, doimiy ishorani saqlaydi. Bu ishoralarni aniqlash maqsadida bizni qiziqtirgan oraliqdan istalgan nuqtani olib, bu nuqtadagi funksiyaning ishorasini aniqlaymiz:

agar $x \in]-\infty; 2[$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

agar $x \in]2; 3[$ bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]3; 5[$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

agar $x \in]5; 7[$ bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]7; \infty[$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi.

Javobni ikki usulda yozish mumkin:

1) $]-\infty; 2[\cup]3; 5[\cup]7; +\infty[$;

2) $-\infty < x < 2; \; 3 < x < 5; \; 7 < x < +\infty$.

2. $[a; b]$ da uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) $f(x)$ funksiya $[a; b]$ da chegaralangan;

2) $f(x)$ funksiya $[a; b]$ da eng katta va eng kichik qiymatga ega;

3) agar $m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$ bo'lsa, u holda $m < c \le M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi c son uchun shunday $x_0 \in]a; b[$ nuqta mavjudki, $f(x_0) = c$ bo'ladi. Xususiy holda, agar $f(a) \cdot f(b) < 0$ bo'lsa, u holda $]a; b[$ oraliqda shunday $x = c$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(c) = 0$ bo'ladi.

6- m i s o l. $x^5 - 18x + 2 = 0$ tenglama $[-1; 1]$ kesmaga tegishli bo'lgan ildizga egami?

Y e c h i s h. $f(x) = x^5 - 18x + 2$ funksiya butun son o'qida, shuningdek, $[-1; 1]$ kesmada ham uzluksizdir. U kesmaning chegaraviy nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi:

$$f(-1) = (-1)^5 - 18 \cdot (-1) + 2 = -1 + 18 + 2 = 19 > 0,$$

$$f(-1) = 1^5 - 18 \cdot 1 - 2 = 1 - 18 + 2 = -15 < 0.$$

Demak, $]-1; 1[$ oraliqda shunday $x_0 \, (-1 < x_0 < 1)$ nuqta borki, bu nuqtada $f(x_0) = 0$ bo'ladi.

Javob. Berilgan tenglamaning $[-1; 1]$ kesmaga tegishli ildizi bor.

3. Ba'zi bir elementar funksiyalarning uzluksizligi

Yuqorida uzluksiz funksiyaning ta'rifidan va xossalaridan foydalanib, ba'zi bir funksiyalarning uzluksizligini tekshirdik. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligini ifodalovchi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{2}$$

munosabatlardan foydalanib, asosiy elementar funksiyalar va ulardan tuzilgan ba'zi bir elementar funksiyalarning nuqtadagi uzluksizligini tekshiramiz.

1. $y = a^x$ funksiya barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan va uzluksizdir.

Argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi funksiyaning orttirmasi Δy ni topamiz: $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

Ravshanki, $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ bo'ladi va (2) munosabat bajariladi. Shuning uchun $y = a^x$ funksiya o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz.

2. $y = \log_a x$ funksiya barcha musbat haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan va uzluksizdir.

Argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi funksiya orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan barcha x lar uchun $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ bo'ladi. Shuning uchun $y = \log_a x$ funksiya aniqlanish sohasida uzluksizdir.

3. $y = x^\alpha$ ($\alpha > 0$ — istalgan haqiqiy son) funksiya $0 < x < +\infty$ sohada uzluksiz. Chunki uzluksiz elementar funksiyalardan tuzilgan $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ murakkab funksiya $0 < x < +\infty$ sohada uzluksiz.

4. $y = \sin x$ funksiya barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan va uzluksiz. Argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi funksiya orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1 \text{ va } \left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1 \text{ bo‘lganidan istalgan } x$$

uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ bo‘ladi.

Shunday qilib, $y=\sin x$ funksiya haqiqiy sonlar to‘plamida, ya’ni $-\infty<x<+\infty$ oraliqda uzluksiz.

5. $y=\cos x$ funksiya ham $-\infty<x<+\infty$ oraliqda uzluksizdir. Chunki uzluksiz funksiyalardan tuzilgan murakkab $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ funksiya uzluksizdir.

6. $y=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $y=\operatorname{ctg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$,

$y=\sec x=\frac{1}{\sin x}$ funksiyalarning har biri aniqlanish sohasida uzluksiz funksiyalarning bo‘linmasidan iborat bo‘lgani tufayli ular ham o‘z aniqlanish sohalarida uzluksiz bo‘ladi.

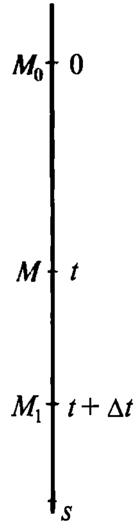
Shunday qilib, barcha elementar funksiyalar o‘z aniqlanish sohalarida uzluksiz bo‘ladi.

9- §. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar. Hosilaning ta’rifi

Hosila matematik analiz kursining muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. Matematika, tabiatshunoslik va texnikaning ko‘pgina masalalari bu tushunchaga keltiriladi. Bunday masalalardan ba’zi birlarini keltiraylik.

1. Erkin tushayotgan jismning tezligi haqidagi masala

Biror moddiy nuqta (jism) vertikal yo‘nalishda pastga tushayotgan bo‘lsin. Bu nuqta $t=0$ paytda M_0 holatda bo‘lib, s $s(t)=\frac{gt^2}{2}$ — qonun bo‘yicha harakatlanadi. M nuqta harakatining tezligini topamiz. Vaqtning t va $t+\Delta t$



10- rasm.

daqiqalarini qaraymiz. Harakat boshlanib, t vaqt o‘tgandan keyin nuqta M holatni olib, $s(t)$ masofani bosib o‘tadi. $t+\Delta t$ paytda esa M_0 nuqta M_1 holatni egallab, $s+\Delta s = s(t+\Delta t)$ yo‘lni bosib o‘tadi. Nuqtaning $\Delta t = (t+\Delta t) - t$ vaqt ichida bosib o‘tgan yo‘lini topish uchun $s(t)$ funksiyaning orttirmasini topish kerak:

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \frac{g}{2}t^2 =$$

$$= \frac{g}{2}t^2 + gt\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

Δs masofa yetarlicha kichik bo‘lganda M_0 nuqtaning harakatini tekis deb hisoblash mumkin. Fizika kursidan ma’lumki, $[t;\ t+\Delta t]$ oraliqda M nuqtaning o‘rtacha tezligi $\upsilon_{\text{o‘rt.}} =$

$$= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2}{\Delta t} gt + \frac{g}{2}\Delta t$$ bo‘ladi. Δs masofa qancha kichik bo‘lsa, jismning tezligi shuncha aniq bo‘ladi (10-rasm). Agar $\Delta t \to 0$ bo‘lsa, u holda $(t+\Delta t) \to t$ bo‘ladi. $\Delta t \to 0$ da $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatning limiti mavjud bo‘lsa, bu limit M nuqtaning t paytdagi oniy tezligi deyiladi.

Shunday qilib, erkin tushayotgan M_0 nuqta harakatining tezligi t paytda $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(gt + \frac{g}{2}\Delta t\right) = gt$ ga teng bo‘ladi.

2. Radioaktiv yemirilish tezligini aniqlash masalasi

Radioaktiv moddalarning massasi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarib turadi. Radioaktiv moddaning massasi t vaqtning funksiyasi, ya’ni $m = m(t)$ bo‘lib, bu massa vaqt o‘tishi bilan kamayib boradi. Δt vaqt oralig‘ida o‘rtacha yemirilish tezligi

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t}$$

nisbat bilan ifodalanadi. t paytdagi oniy yemirilish tezligi

$$\upsilon=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

bo'ladi.

3. Jismning qizitilganda isishi

Issiqlik miqdori Q temperatura τ ga bog'liq: $Q=f(\tau)$. Issiqlik miqdorining τ temperaturaga bog'liq ravishdagi o'zgarish tezligi C ushbu

$$C_{\text{o'rt.}}=\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}=\frac{Q(\tau+\Delta\tau)-Q(\tau)}{\Delta\tau}$$

nisbat bilan ifodalanadi. Haqiqiy oniy o'zgarish tezligi esa $\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}$ nisbatning $\Delta\tau\to 0$ dagi limiti bilan ifodalanadi:

$$C=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{Q(\tau+\Delta\tau)-Q(\tau)}{\Delta\tau}.$$

Bu tezlik fizikada jismning issiqlik sig'imi deyiladi.

Shunday qilib, biror jarayonning tez yoki sekin borishi $y=f(x)$ funksiya Δy orttirmasining argument orttirmasi Δx ga bo'lgan nisbatiga va bu nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi mavjud limitiga bog'liq bo'lar ekan. Bunday nisbat 1- masalada $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, 2- masalada $\frac{\Delta m}{\Delta t}$, 3- masalada esa $\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}$ ga teng bo'ldi. Endi $y=f(x)$ funksiyani $]\,a;\,b\,[$ oraliqda qaraymiz. Bu funksiya $x=x_0$ nuqtada $y=f(x_0)$ qiymatga ega bo'lsin. $x_0+\Delta x$ nuqtada esa $(y+\Delta y)=f(x_0+\Delta x)$ qiymatga ega bo'ladi. Bu yerda Δy — funksiyaning Δx argument orttirmasiga mos keluvchi orttirmasi:

$$\Delta y=(y+\Delta y)-y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Bunday holda $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ayirmali nisbat funksiya o'zgarishining o'rtacha tezligini, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ limit esa (agar bu limit mavjud bo'lsa) fiinksiya o'zgarishining oniy tezligini ifodalaydi.

1- t a ' r i f. *$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi **hosilasi** deb $\Delta x \to 0$ da*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

ayirmali nisbat intilgan songa aytiladi.

Matematikada hosilaning turlicha belgilanishlari mavjud. Biz y' va $f'(x)$ kabi belgilashlardan foydalanamiz. Demak,

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Funksiyaning nuqtadagi limiti ta'rifiga ko'ra (1) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x),$$

bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha(x) \to 0$ bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Natijada ushbu formulani olamiz:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha(x)]\Delta x,$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x, \qquad (2)$$

bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha(x) \to 0$.

(2) formula matematik analiz va tabiatshunoslikning ko'p sohalarida muhim ahamiyatga ega.

2- t a' r i f. *Agar $y=f(x)$ funksiya $[a; b]$ oraliqning har bir nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x \in [a; b]$ **oraliqda hosilaga ega** deyiladi.*

x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lgan funksiya shu nuqtada *differensiallanuvchi* funksiya deyiladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning hosilasini topish uni *differensiallash* deyiladi.

Hosilaning ta'rifidan uni hisoblash qoidasi ham kelib chiqadi. Biror $y=f(x)$ funksiyaning $x_0 \in \,]a; b[$ nuqtadagi hosilasini quyidagi tartibda topish mumkin:

1) funksiyaning $x_0+\Delta x$ nuqtadagi qiymati topiladi:

$$y+\Delta y=f(x_0+\Delta x);$$

2) funksiyaning orttirmasi topiladi:

$$\Delta y=(y+\Delta y)-y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

3) funksiya orttirmasining argument orttirmasiga bo'lgan nisbati (ayirmali nisbat) topiladi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

4) $\Delta x\to 0$ da ayirmali nisbatning limiti topiladi:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Endi oldin qaralgan masalalarga qaytsak, $\upsilon=\frac{ds}{dt}=gt$ hosila vertikal tushayotgan nuqtaning (jismning) tezligini, $\gamma=\frac{dm}{dt}$ hosila radioaktiv yemirilish jarayonining tez yoki sekin borishini, $c=\frac{dQ}{d\tau}$ hosila esa issiqlik miqdorining tez yoki sekin o'zgarishini ifodalashini ko'ramiz.

Hosilani hisoblash qoidasidan foydalanib misollar yechamiz.

1- m i s o l. $f(x)=C$, bunda $x\in R$, C — o'zgarmas son. $f'(x)$ hosilani toping.

Y e c h i s h. 1) funksiyaning $x+\Delta x$ nuqtadagi qiymatini topamiz:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)=C;$$

2) Δy orttirmani topamiz:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0;$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni topamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0;$$

4) limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

Demak, $f'(x)=(C)'=0$.

2 - m i s o l . $f(x)=kx+b$ chiziqli funksiyaning hosilasini $x\in R$ ixtiyoriy nuqtada toping.

Y e c h i s h . 1) funksiyaning $x+\Delta x$ nuqtadagi qiymatini topamiz:

$$y+\Delta y=k(x+\Delta x)+b;$$

2) funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y=k(x+\Delta x)+b-(kx+b)=k\Delta x;$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatini tuzamiz: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{k\Delta x}{\Delta x}=k$;

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi limitini topamiz:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}k=k.$$

Demak, $f'(x)=(kx+b)'=k$.

3 - m i s o l . $y=ax^2$ funksiya berilgan, uning y' hosilasini: a) $x\in R$ ixtiyoriy nuqtada; b) $x=2$ nuqtada toping.

Y e c h i s h . *a*) hosila ta'rifidan foydalanib topamiz.

1) argumentning $x+\Delta x$ qiymati uchun funksiya qiymatini topamiz:

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)^2;$$

2) funksiyaning orttirmasini topamiz:

$$\Delta y=a(x+\Delta x)^2-ax^2=ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2-ax^2=$$
$$=2ax\Delta x+a\Delta x^2;$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni topamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2ax\Delta x+a\Delta x^2}{\Delta x}=2ax+a\Delta x;$$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limitini topamiz:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax.$$

Demak, $y' = (ax^2)' = 2ax$.

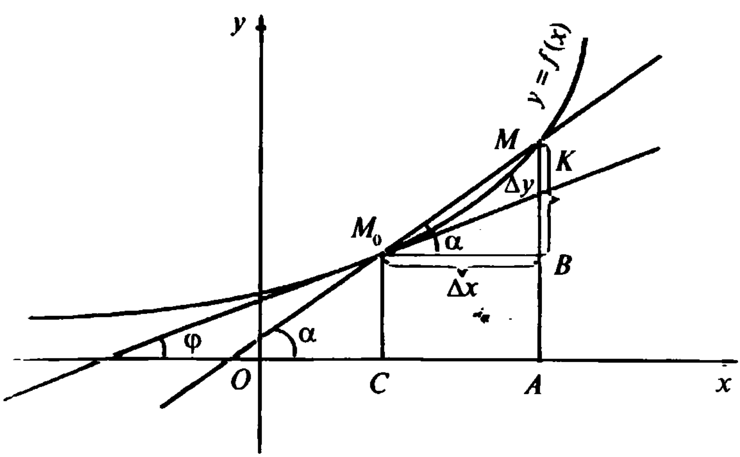
b) $x = 2$ bo'lganda $y'(2) = 4a$.

10- §. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari

$y = f(x)$ tenglama bilan aniqlanadigan egri chiziqda tayin $M_0(x_0;\ y_0)$ va boshqa ixtiyoriy $M(x;\ y)$ nuqtani qaraymiz. M_0M kesuvchini o'tkazamiz va bu kesuvchining abssissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagini α orqali belgilaymiz. M nuqta $y = f(x)$ chiziq bo'ylab M_0 nuqtaga intilganda M_0M kesuvchi M_0 nuqta atrofida burilib, shunday bir M_0K holatni egallaydiki, α burchak φ ga teng burchakka intiladi (11- rasm).

Rasmdan:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ bunda } \Delta x = x - x_0,\ \Delta y = f(x) - f(x_0).$$



11- rasm.

M_0M kesuvchining M nuqta egri chiziq bo‘ylab harakatlanib, M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlashgandagi limitik holati egri chiziqqa M_0 *nuqtada o‘tkazilgan urinma* deb ataladi.

Ma’lumki, to‘g‘ri chiziqning k burchak koeffitsiyenti (xususiy holda urinmaning) to‘g‘ri chiziqning (urinmaning) abssissalar o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil qilgan burchagining tangensiga tengdir. Agar $\Delta x \to 0$ bo‘lsa, u holda $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$ bo‘ladi, shuning uchun

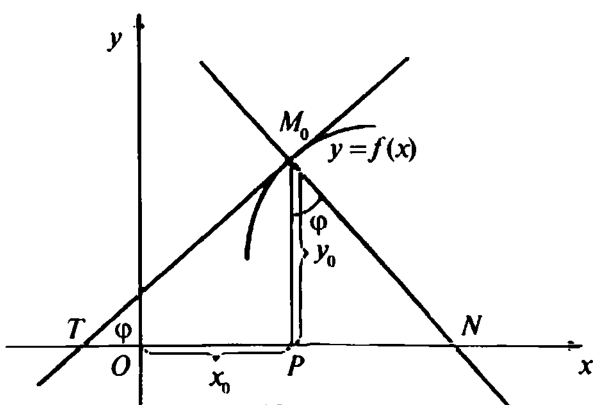
$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiya hosilasining geometrik ma’nosini quyidagicha ta’riflash mumkin: y' hosilaning $x = x_0$ nuqtadagi qiymati funksiya grafigiga $x = x_0$ abssissali nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi = k. \qquad (1)$$

Berilgan nuqtada $y = f(x)$ egri chiziqqa o‘tkazilgan urinmaga perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziq egri chiziqning shu nuqtadagi *normali* deyiladi (12- rasm).

Ta’rifga ko‘ra, normal urinmaga perpendikular. Shuning uchun ularning burchak koeffitsiyentlari ikkita to‘g‘ri



12- rasm.

chiziqning perpendikularlik shartini ifodalovchi munosabat bilan bog'langan bo'ladi, ya'ni ularning burchak koeffitsiyentlari ko'paytmasi (–1) ga teng. $k \cdot k_n = -1$.

Bundan $k_n = -\frac{1}{k}$, ya'ni $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

Berilgan chiziq $y = f(x)$ tenglamaga ega bo'lsin. Bu chiziqda $M_0(x_0; y_0)$ nuqtani olamiz. Egri chiziqqa bu nuqta orqali o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzamiz. k burchak koeffitsiyentli M_0 nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini olamiz:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Urinma uchun $k = f'(x_0)$ bo'ladi. Bunday holda urinma tenglamasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

ko'rinishga ega.

$f'(x_0) \neq 0$ bo'lganda, $k_n = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_0)}$ bo'lishini e'tiborga olsak, normal tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (3)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

1 - masala. $y = 2x^2 + 1$ parabolaga $M(3; 6)$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing.

Yechish. Avvalo, berilgan funksiyaning hosilasini topamiz: $y' = 4x$. Hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra urinma to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti hosilaning $x = 3$ nuqtadagi qiymatiga teng: $k = y' = 4 \cdot 3 = 12$.

Bizning holda $x_0 = 3$; $y_0 = 6$. (2) tenglamadan foydalanib, urinma tenglamasini tuzamiz:

$$y - 6 = 12(x - 3) \rightarrow y - 6 = 12x - 36 \rightarrow 12x - y - 30 = 0.$$

Endi normalning burchak koeffitsiyentini topamiz:

$$k_n = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{12}.$$

Normal tenglamasini tuzamiz:

$$y - y_0 = k_n(x - x_0) \to y - 6 = -\frac{1}{12}(x - 3) \to$$
$$\to x - 3 + 12y - 72 = 0 \to x + 12y - 75 = 0.$$

2- m a s a l a. $y = x^3 - 3x + 5$ egri chiziqda unga o'tkazilgan urinma:

a) $y = -2x$ to'g'ri chiziqqa parallel;

b) $y = -\frac{1}{9}x$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan nuqtalarni toping.

Y e c h i s h. Izlanayotgan nuqtalarni topish uchun urinish nuqtasida urinmaning burchak koeffitsiyenti shu nuqtadagi $y' = 3x^2 - 3$ hosilaning qiymatiga tengligini e'tiborga olamiz:

a) to'g'ri chiziqlarning parallellik shartiga ko'ra $3x^2 - -3 = -2$ tenglamani topamiz. Uning ildizlari $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ bo'ladi.

Izlanayotgan nuqtalar:

$$M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ 5 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right),\ M_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ 5 - \frac{8\sqrt{3}}{9}\right);$$

b) to'g'ri chiziqlarning perpendikularlik shartidan $3x^2 - 3 = 9$ tenglamani topamiz. Uning ildizlari $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ bo'ladi. Izlanayotgan nuqtalar: $M_1(-2;\ 3)$, $M_2(2;\ 7)$.

Endi hosilaning mexanik ma'nosini aniqlaymiz. Nuqtaning to'g'ri cbiziqli harakatida $s = f(t)$ tenglama s yo'l bilan t vaqt orasidagi bog'lanishni ifodalasin. Hosilaga berilgan ta'rifga ko'ra $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ tenglik bilan nuqtaning t paytdagi harakat tezligi aniqlanadi. Bu limit esa $s = f(t)$ funksiyaning t nuqtadagi hosilasidan iboratdir:

$$\upsilon = f'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Shunday qilib, to'g'ri chiziqli harakatning tezligi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi. Hosilaning mexanik ma'nosi tabiatshunoslik va texnikada muhim ahamiyatga ega. Yuqorida qaralgan harakatdagi nuqtaning tezligini aniqlash va berilgan egri chiziqqa berilgan nuqtada urinma o'tkazish masalalari XVII asrda differensial va integral hisobning asosiy tushunchalarini shakllantirishga olib keldi.

11- §. Differensiallanuvchi funksiyalarning uzluksizligi

Differensiallanuvchi funksiyalar sinfi bilan uzluksiz funksiyalar sinfi orasidagi bog'lanishni o'rnatamiz.

T e o r e m a. *Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

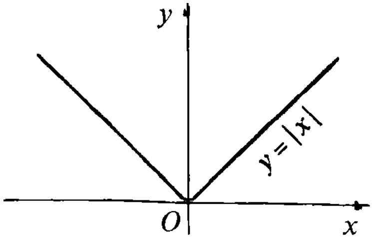
I s b o t. Shartga ko'ra $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$. $\Delta x\to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x_0)$ bo'lgani uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $f'(x_0)$ hosiladan α cheksiz kichik miqdorga farq qiladi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(x)\to \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\,\Delta x,$$ bunda

$\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ bo'ladi. Bu esa $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi.

Isbotlangan teoremani quyidagicha ifodalash mumkin. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu nuqtada uning orttirmasini $\Delta y=(f'(x_0)+\alpha)\Delta x$ ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda $\Delta x\to 0$ da $\alpha(x)\to 0$.

Isbotlangan teoremadan muhim bog'lanishni sezish mumkinki, qaralayotgan nuqtada differensiallanuvchi funksiya albatta bu nuqtada uzluksiz bo'ladi, ya'ni funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligidan uning shu nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi. Lekin teskari mulohaza hamma vaqt ham o'rinli bo'lavermaydi, ya'ni nuqtada



13- rasm.

uzluksiz bo'lgan funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lmasligi mumkin.

Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, lekin bu funksiya $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emas (13- rasm).

Modulning ta'rifiga ko'ra:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, \text{ agar } x \geq 0, \\ -x \text{ agar } x < 0. \end{cases}$$

Bu funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz. Haqiqatan,

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0} x=0; \quad \lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}(-x)=0;$$

$\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ mavjud va nolga teng: $f(0)=0$.

Shunday qilib, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz. Lekin bu funksiya $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emas, ya'ni bu funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas. Haqiqatan ham, $\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|\Delta x|$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases} +1, \text{ agar } \Delta x > 0, \\ -1, \text{ agar } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Bundan

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1; \quad \lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1.$$

$x=0$ nuqtada funksiyaning chap va o'ng limitlari mavjud bo'lib, ular teng emas. Demak, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ya'ni funksiya $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emas. Geometrik nuqtayi nazardan aytganda $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada urinmaga ega emas.

12- §. Hosilani hisoblash qoidalari

1. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish

T e o r e m a . *Agar* $\varphi(x) = af(x)$ *bo'lib, bunda a — biror son,* $f(x)$ *esa ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda* $\varphi(x)$ *funksiya ham differensiallanuvchi bo'ladi.*

I s b o t . $\varphi'(x) = af'(x)$ (1) bo'lishini ko'rsatamiz.

$\dfrac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = a\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ tenglikni qaraymiz.

Haqiqatan, $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$. Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$ ham mavjud va y $af'(x)$ ga teng. (1) munosabat isbotlandi.

Shunday qilib, o'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqarisiga chiqarish mumkin.

M i s o l l a r . $(5x)' = 5(x)' = 5 \cdot 1 = 5$;
$(-6{,}25x^3)' = -6{,}25(x^3)' = -6{,}25 \cdot 3x^2 = -18{,}75x^2$.

2. Funksiyalar yig'indisining hosilasi

Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar yig'indisining hosilasi ular hosilalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$y = u(x) \pm \upsilon(x) \to y' = u'(x) \pm \upsilon'(x). \qquad (2)$$

Isbotlash uchun funksiyalar yig'indisining orttirmasini hisoblaymiz. Agar x ga Δx orttirmani bersak, u, υ va y funksiyalar, mos ravishda, Δu, $\Delta \upsilon$, Δy orttirmalarni oladi. Hosilani hisoblash qoidalariga ko'ra:

1) $y + \Delta y = (u + \Delta u) + (\upsilon + \Delta \upsilon)$;

2) $\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u) + (\upsilon + \Delta \upsilon) - (u + \upsilon) = u + \Delta u + \upsilon + \Delta \upsilon - u - \upsilon = \Delta u + \Delta \upsilon$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta x}$;

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta x} = u' + \upsilon'$.

Biz ikkita funksiya yig'indisining hosilasi uchun formula chiqardik. Shunga o'xshash ikkita funksiya ayirmasining hosilasi uchun ham formula hosil qilish mumkin:

$$(u(x) - \upsilon(x))' = u'(x) - \upsilon'(x).$$

Bu oxirgi formulani, agar $(u(x) - \upsilon(x))$ ifodani $(u(x)) + (-\upsilon(x))$ yig'indi deb qaralsa, yig'indining hosilasi formulasidan chiqarsa ham bo'ladi.

Yuqorida isbotlangan 2-teoremaning istalgan chekli sondagi qo'shiluvchilari bo'lgan yig'indi uchun ham o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin: $(u_1 + u_2 + ... + u_n)' = u_1' + u_2' + ... + u_n'$.

M i s o l l a r. 1) $(x^2 + 2x - 7)' = (x^2)' + (2x)' + (-7)' = 2x + 2$;

2) $((3 - 2x)(x - 6))' = (3x - 2x^2 - 18 + 12x)' = (-2x^2 + 15x - 18)' = (-2x^2)' + (15x)' + (-18)' = -4x + 15.$

3. Differensiallanuvchi funksiyalar ko'paytmasining hosilasi

Ikkita funksiya ko'paytmasining hosilasi

$$y' = (u(x) \cdot \upsilon(x))' = u'(x) \cdot \upsilon(x) + u(x) \cdot \upsilon'(x) \quad (3)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

x argumentga Δx orttirmani bersak, $u(x)$, $\upsilon(x)$ va $y(x)$ funksiyalar ham mos ravishda Δu, $\Delta\upsilon$ va Δy orttirmalarni oladi. Hosilani topish qoidasiga ko'ra:

1. $y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (\upsilon + \Delta\upsilon)$.

2. $\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u) \cdot (\upsilon + \Delta\upsilon) - u \cdot \upsilon = u\,\Delta\upsilon + \upsilon\,\Delta u + \Delta u \cdot \Delta\upsilon$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{u\,\Delta\upsilon + \upsilon\,\Delta u + \Delta u \cdot \Delta\upsilon}{\Delta x} + u\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \upsilon\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

4. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(u\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x}\right) + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\upsilon\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x}\right) =$

$$= u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x} + \upsilon\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x} = u\upsilon' + \upsilon u'.$$

($\lim\limits_{x\to 0}\Delta u = 0$, chunki $u = u(x)$ funksiya qaralayotgan nuqtada uzluksiz).

Shunday qilib, *ikkita funksiya ko'paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiyaga kopaytmasi bilan birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasiga ko'paytmasining yig'indisiga teng.*

Misollar. 1) $(x^2+1)(3-5x^2)$ funksiya hosilasini toping.

$$y' = \left((x^2+1)(3-5x^2)\right)' = (x^2+1)'(3-5x^2) +$$

$$+(x^2+1)(3-5x^2)' = 2x\left(3-5x^2\right)+\left(x^2+1\right)\cdot\left(-10x\right) =$$

$$6x-10x^3-10x-10x^3 = -20x^3-4x;$$

2) $y = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$;

$$y' = (x^2-x+1)(2x+1)+(x^2+x+1)(2x-1) = 2x^3-$$

$$2x^2+2x+x^2-x+1+2x^3+2x^2+2x-x^2-x-1 =$$

$$4x^3+2x.$$

4. Differensiallanuvchi funksiyalar bo'linmasining hosilasi

Ikkita differensiallanuvchi $u(x)$ va $\upsilon(x)$ funksiyalar bo'linmasi $y(x) = \dfrac{u(x)}{\upsilon(x)}$ $(\upsilon(x)\neq 0)$*ning hosilasi*

$$y' = \left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2} \qquad (4)$$

formula bo'yicha topiladi.

(4) formulani (3) formuladan foydalanib chiqaramiz:

$y = \dfrac{u}{\upsilon} \to u = y\upsilon \to u' = (y\upsilon)' = y\upsilon' + \upsilon y'$, bundan $\upsilon y'$ ni topamiz:

$$\upsilon y' = u' - y\upsilon' = u' - \frac{u}{\upsilon}\upsilon' = \frac{\upsilon u' - u\upsilon'}{\upsilon},$$

bu yerdan $y' = \dfrac{\upsilon u' - u\upsilon'}{\upsilon^2} \to y' = \left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{\upsilon u' - u\upsilon'}{\upsilon^2}.$

Shunday qilib, agar u va υ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, υ noldan farqli nuqtalarda $\frac{u}{\upsilon}$ nisbat ham differensiallanuvchi bo'lib, (4) formula ma'noga ega bo'ladi.

M i s o l l a r. 1) $y=\frac{1-x}{1+x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Y e c h i s h. $y'=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}=$

$=\frac{(-1)(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=-\frac{2}{(1+x)^2}\ (x\neq -1).$

2) $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Y e c h i s h. $y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{(1)'\cdot x-1\cdot (x)'}{x^2}=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$.

5. Darajali funksiyaning hosilasi

Oldingi paragraflarda $y=x^n$ darajali funksiyaning hosilasini $n=1$ va $n=2$ bo'lganda $(x)'=1$, $(x^2)'=2x$ bo'lishini topdik. Ikkita funksiya ko'paytmasining hosilasi haqidagi teoremadan foydalanib, x ning istalgan natural darajalarining hosilasini topish mumkin:

$(x^3)'=(x^2x)'=(x^2)'x+x^2(x)'=2xx+x^2=3x^2;$
$(x^4)'=(x^3x)'=(x^3)'x+x^3(x)'=3x^2x+x^3=4x^3;$
$(x^5)'=(x^4x)'=(x^4)'x+x^4(x)'=4x^3x+x^4=5x^4;$
. . . .
$(x^k)'=kx^{k-1}.$

Endi $(x^{k+1})'=(k+1)x^k$ bo'lishini ko'rsatamiz.

Induksiya prinsipiga ko'ra fikrimizning $n=k+1$ hol uchun to'g'riligi $n=k$ holdan kelib chiqishini isbotlaymiz.

$(x^{k+1})'=(x^kx)'=(x^k)'x+x^k(x)'=kx^{k-1}x+x^k=kx^k+x^k=$
$=(k+1)x^k.$

Demak, fikrimiz $\forall n$ natural son uchun to'g'ri ekan. $y=x^n$ funksiyaning hosilasini topish uchun, n ko'rsatkichni koeffitsiyent qilib, x ning darajasini bitta kamaytirish kerak, ya'ni

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (5)$$

Darajali funksiyaning hosilasini topishning aniqlangan qoidasi natural sonlar uchungina emas, balki har qanday ko'rsatkichlar uchun ham, ya'ni har qanday haqiqiy α son uchun ham o'rinlidir

$$y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (6)$$

Bu formulaning isbotiga keyinchalik to'xtaymiz.

M i s o l l a r. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping.

a) $y = x^{20}$; *b*) $y = \sqrt{x}$; *d*) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Y e c h i s h. *a*) $y' = (x^{20})' = 20x^{19}$;

b) $y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

d) $y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} =$

$-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \ (x > 0)$.

6. Ko'phadning hosilasi

n- darajali ko'phadning ko'rinishi quyidagicha bo'lsin:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

bunda a_n — ozod had, a_0, a_1, ..., a_{n-1} — mos ravishda, x^n, x^{n-1},..., x lar oldidagi koeffitsiyentlar, shu bilan birga $a_0 \neq 0$. Bunday ifodani $(n+1)$ ta a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, ..., $a_{n-1}x$, a_n funksiyalarning yig'indisi deb ham qarash mumkin. Shu sababli ko'phadning hosilasi bu funksiyalar hosilalarining yig'indisiga teng:

$$P_n'(x) = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + (a_2x^{n-2})' + \ldots + (a_{n-1}x)' + (a_n)'.$$

a_n o'zgarmas son bo'lgani uchun uning hosilasi nolga teng. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkinligidan va har qanday natural k uchun

$(x^k)' = kx^{k-1}$ bo'lishidan foydalanib, qolgan hosilalarni osongina topish mumkin. Shunday qilib:

$$(a_0x^n)' = a_0(x^n)' = a_0nx^{n-1};$$
$$(a_1x^{n-1})' = a_1(x^{n-1})' = a_1(n-1)x^{n-2};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(a_{n-1}x)' = a_{n-1}(x)' = a_{n-1};$$
$$(a_n)' = 0.$$

Bundan: $(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)' = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$.

Masalan, $(5 - 6x + 17x^4)' = (5)' - (6x)' + (17x^4)' = 68x^3 - 6$;

$$((x^7 + x)^2)' = (x^{14} + 2x^8 + x^2)' = 14x^{13} + 16x^7 + 2x.$$

7. Murakkab funksiyaning hosilasi

Biz oldingi bandda ratsional funksiyalar, jumladan, ko'phadlarning hosilasini topishni o'rgandik. Ammo $f(x) = (3x+5)^{90}$ funksiya hosilasini hisoblashni ko'phadning hosilasini hisoblashga keltirish mumkin. Lekin $(3x+5)^{90}$ ifodani ko'phad ko'rinishida tasvirlab, uning hosilasini topmoqchi bo'lsak, hosil bo'lgan yig'indining 91 ta hadini differensiallashga to'g'ri keladi. Bunday usul bilan berilgan funksiyaning hosilasini hisoblash uchun juda ko'p ishlarni bajarish talab qilinadi. Murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasini isbotlash bilan bu va bunga o'xshash masalalarni yechishni ancha soddalashtirish mumkin.

T e o r e m a. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $g(x)$ funksiya esa $y_0 = f(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $h(x) = g(f(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada*

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \tag{7}$$

hosilaga ega bo'ladi.

(7) formulani isbotlash uchun $\Delta x \neq 0$ da $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ nisbatni qarash va $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta h}{\Delta x} \to g'(f(x_0))f'(x_0)$ bo'lishini isbotlash kerak. $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$ desak, u holda

$\Delta h = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = \Delta g$ bo'ladi. $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$, chunki f funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi. Endi isbotni x_0 nuqtaning biror atrofida $\Delta f \neq 0$ bo'lganda f funksiya uchun keltiramiz. Bunday holda $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y}\frac{\Delta f}{\Delta x} \to g'(y_0)f'(x_0)$ bo'ladi, chunki $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$, $\Delta y \to 0$ da esa $\frac{\Delta g}{\Delta y} \to g'(y_0)$ bo'ladi. Bunda $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$.

Endi bir xususiy holni qaraylik. $f(ax + b)$ funksiyaning hosilasini topaylik. Bunda a va b berilgan sonlar. Agar $\varphi(x) = f(ax + b)$ desak, hosilaning ta'rifiga ko'ra:

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[a(x+\Delta x)+b] - f(ax+b)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[(ax+b)+a\Delta x] - f(ax+b)}{\Delta x}.$$

$ax + b$ ni y bilan belgilab, ushbuni hosil qilamiz:

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y+a\Delta x) - f(y)}{\Delta x}.$$

Bu ifodaning surat va maxrajini a songa ko'paytiramiz:

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y+a\Delta x) - f(y)}{a\Delta x} a.$$

Endi $a\Delta x = h$ desak, $\Delta x \to 0$ da $h = a\Delta x \to 0$ bo'ladi va

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y+h) - y(x)}{h} f'(y).$$

Shunday ekan, $\varphi'(x) = af'(y)$, $y = ax + b$ bo'lgani uchun $\varphi'(x) = af'(ax + b)$. Shunday qilib, $[f(ax + b)]' = af'(ax + b)$.

$f(ax + b)$ funksiyaning hosilasini topish uchun uni $f(x)$ funksiyani differensiallash qoidasi bo'yicha differensiallash va natijani $ax + b$ ifodaning hosilasiga, ya'ni a soniga ko'paytirish yetarlidir.

M i s o l. $\left[(2x+3)^{11}\right]' = 11(2x+3)^{10}(2x+3)' =$

$= 11(2x+3)^{10} \cdot 2 = 22(2x+3)^{10}.$

(7) formulani qo'llashga doir misollar keltiraylik.

1) $h(x) = (5x+6)^{200}$ funksiyaning hosilasini toping.

Y e c h i s h . $h(x)$ funksiyani murakkab funksiya ko'rinishida tasvirlaylik:

$$h(x) = g(f(x)), \text{ bunda } g(y) = y^{200}, \ y = f(x) = 5x + 6;$$

$f'(x) = 5$ va $g'(y) = 200y^{199}$ bo'lgani uchun, ushbuni olamiz:

$$h'(x) = 5 \cdot 200y^{199} = 1000(5x+6)^{199}.$$

2) $y = \sqrt{x^3 + a^3}$ berilgan. $y'(x)$ hosilani toping.

Y e c h i s h . $y = f(u) = \sqrt{u}$; $u = x^3 + a^3 \to y' =$

$$= f'(u)u'(x) = (\sqrt{u})'(x^3 + a^3)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+a^3}}.$$

8. Teskari funksiyaning hosilasi

T e o r e m a . *Agar biror oraliqda berilgan $y = f(x)$ funksiya va shu berilgan oraliqda unga teskari bo'lgan $x = \varphi(y)$ funksiya hosilalarga ega bo'lsa, u holda*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{8}$$

(8) *ni quyidagicha yozish mumkin:* $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$ *yoki* $x' = \dfrac{1}{y'}.$

I s b o t . $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiyani $\varphi(y) = f^{-1}(y)$ desak, $f^{-1}(f(x))$, $x \in]a; b[$ murakkab funksiyaga ega bo'lamiz. Teskari funksiyani hosil qilish qoidasiga ko'ra: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in]a; b[$.

Murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi teoremaga ko'ra $\frac{df^{-1}(y)}{dy}\cdot\frac{df(x)}{dx}=1$ yoki $\frac{d\varphi(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=1$ bo'ladi. Bu yerdan (8) formulani olamiz. Teorema isbotlandi.

Misol. $y=x^{\frac{1}{3}}$ $(x>0)$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Berilgan funksiya $x=y^3$, $y>0$ funksiyaga teskari funksiya bo'ladi, demak,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

9. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi

Teorema. $f(x)=a^x$, $x\in R$, $a>0$, $a\neq 1$ *ko'rsatkichli funksiya son o'qining istalgan nuqtasida differensiallanuvchi va uning hosilasi*

$$(a^x)'=a^x\ln a \tag{9}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Isbot. Hosilani hisoblash qoidasiga ko'ra:

$$y+\Delta y=a^{x+\Delta x};\quad \Delta y=(y+\Delta y)-y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1);$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}a^x\ln a.$$

Bunda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a. \tag{10}$$

(10) tenglikni isbotlaymiz. $a=10$ bo'lganda, $a^x=10^x$ bo'ladi.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{1}{M},\quad M\approx 0,4343\ldots$$

$$(10^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10^{x+\Delta x}-10^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}10^x\,\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$$

$$10^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{10^x}{M}.$$

Shunday qilib,

$$(10^x)' = \frac{1}{M}10^x \qquad (11)$$

formulaga ega bo'ldik. $0 < a \neq 1$ bo'lganda asosiy logarifmik $a^{\log_a b} = b$ ayniyatdan foydalanib, yoza olamiz:

$$a^x = 10^{\lg a^x} \to a^x = 10^{x\lg a}.$$

Bunday holda $(a^x)' = (10^{x\lg a})'$ tenglikdan foydalanib, olingan murakkab funksiyaning hosilasini topamiz:

$$(10^{x\lg a})' = \frac{1}{M}10^{x\lg a}(x\lg a)' = \frac{\lg a}{M}10^{x\lg a} = \frac{\lg a}{M}a^x.$$

Demak,

$$(a^x)' = \frac{\lg a}{M}a^x. \qquad (12)$$

(9) va (12) tenglamalarni taqqoslab, $\frac{\lg a}{M} = \ln a$ tenglikni olamiz.

Haqiqatan, $\log_e a = \frac{\lg a}{\lg e} \to \frac{\lg a}{M} = \frac{\lg a}{\lg e} = \log_e a = \ln a.$

Shunday qilib, (10) tenglik o'rinli va (9) formula $\forall x \in R$ da ma'noga ega:

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a.$$

Agar $y = e^x$ bo'lsa, u holda $y' = (e^x)' = e^x$ bo'ladi.

10. Logarifmik funksiyaning hosilasi

$y = \log_a x$ *logarifmik funksiyaning hosilasi*

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (13)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

(13) formulani keltirib chiqarish uchun $g(x) = \log_a x$ logarifmik funksiya ko'rsatkichli funksiyaga teskari funksiya ekanligidan foydalanamiz.

$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$ bo'lishini bilamiz. Teskari funksiyaning hosilasini topish formulasidan va asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(\log_a x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \cdot \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Xususiy hol: $a = e$ bo'lganda, ($\log_e x = \ln x$) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ formulani olamiz.

M i s o l l a r. 1) $f(x) = \log_5(8x + 3)$ funksiyaning hosilasini toping.

Y e c h i s h. $f'(x) = (\log_5(8x+3))' = \frac{1}{8x+3} \cdot \frac{(8x+3)'}{\ln 5} = \frac{8}{(8x+3)\ln 5}$;

2) $f(x) = (x^2 + 5)\log_7(2x + 1)$ funksiyaning hosilasini toping.

Y e c h i s h. Ikkita funksiya ko'paytmasi, darajali va logarifmik funksiyalarning hosilalarini hisoblash formulalaridan foydalanib topamiz:

$$f'(x) = \left[(x^2+5)\log_7(2x+1)\right]' = (x^2+5)'\log_7(2x+1) +$$

$$+ (x^2+5)\log_7'(2x+1) = 2x\log_7(2x+1) +$$

$$+ (x^2+5) \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{(2x+1)'}{\ln 7} = 2x\log_7(2x+1) = \frac{2(x^2+5)}{(2x+1)\ln 7}.$$

5- banddagi (6) formulani chiqaramiz.

α ixtiyoriy haqiqiy son bo'lganda $f(x) = x^\alpha$ funksiyaning hosilasi $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ formula bo'yicha hisoblanadi.

Agar x ni $x = e^{\ln x}$ ko'rinishda ifodalash mumkinligini e'tiborga olsak, $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ murakkab funksiyaga ega bo'lamiz. Bu murakkab funksiyaning hosilasini topamiz:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(a \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Demak, ixtiyoriy α haqiqiy son uchun $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

11. $y = u^v$ ($u = u(x)$, $v = v(x)$) ko'rsatkichli-darajali funksiyaning hosilasi

Bunday funksiyaning hosilasini topish uchun $y(x) > 0$ va $u(x) > 0$ deb, uni oldin logarifmlab, keyin esa murakkab funksiyaning hosilasini topish kerak.

$$\ln y = \upsilon \ln u \to \frac{1}{y} \cdot y' = \upsilon' \ln u + \upsilon \ln' u \to y' =$$

$$= y(\upsilon' \ln u + \upsilon(\ln u)').$$

Bu funksiyaning hosilasini boshqacha ham topish mumkin:

$$y' = (u^{\upsilon})' = (e^{\upsilon \ln u})' = e^{\upsilon \ln u}(\upsilon \ln u)' =$$

$$= u^{\upsilon}(\upsilon' \ln u + \upsilon(\ln u)') \to y' = y(\upsilon' \ln u + \upsilon(\ln u)').$$

Misollar. 1) $y = x^x \cdot y' = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' =$

$$= x^x\left(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1);$$

2) $y = (\sin x)^{\cos x} (\sin x > 0)$,

$$y' = [(\sin x)^{\cos x}]' = (e^{\cos x \ln \sin x})' = e^{\cos x \ln \sin x}(\cos x \ln \sin x)' =$$

$$= (\sin x)^{\cos x}(-\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}) =$$

$$= (\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x).$$

12. Asosiy funksiyalarni differensiallash formulalari

1. $(C)' = 0.$
2. $(x)' = 1.$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}.$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
6. $(a^x)' = a^x \ln a.$
7. $(e^x)' = e^x.$
8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
10. $(u^{\upsilon})' = u^{\upsilon}(\upsilon' \ln u + \upsilon(\ln u)').$

13- §. Funksiyaning differensiali

1. Funksiya differensiali uning orttirmasining bosh qismi ekanligi

Quyidagi masalani qaraymiz: kub shakldagi metall sterjenning qirrasi $x \approx 5{,}00$ sm. Qizdirish natijasida metall sterjen qirrasining uzunligi $\Delta x \approx 0{,}01$ sm ga oshdi. Bu qizdirish natijasida kub hajmi qancha oshgan?

Bu masalani turli usullar bilan yechish mumkin.

M a s a l a kubning hajmini ifodalovchi $y=x^3$ funksiyaning orttirmasini topish orqali juda qulay yechiladi:

$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 \to$

$\to \Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 \to \Delta y = 3 \cdot 5^2 \cdot 0{,}01 +$

$+ 3 \cdot 5 \cdot 0{,}01^2 + 0{,}01^3 = \mathbf{0{,}75} + \mathbf{0{,}0015} + \mathbf{0{,}000001} =$

$= 0{,}751501 \approx 0{,}75.$

Ikkinchi qo'shiluvchi birinchi qo'shiluvchiga nisbatan 500 marta kichik, uchinchi qo'shiluvchi esa birinchi qo'shiluvchidan 750000 marta kichik.

Ravshanki, natijaga uchinchi va ikkinchi qo'shiluvchilar sezilarli ta'sir qilmaydi. Δx kichik miqdor bo'lganda natijaga birinchi qo'shiluvchi, ya'ni $3x^2\Delta x$ ifodaning qiymati asosiy ta'sirni ifodalaydi.

Ana shu birinchi $3x^2\Delta x$ qo'shiluvchi x^3 funksiya orttirmasining *bosh qismi* deb ataladi. x ning doimiy qiymatlarida $3x^2\Delta x$ miqdor Δx orttirmaga proporsional bo'lib, x^3 funksiya orttirmasining *chiziqli qismi* deyiladi va u taqriban Δy orttirmaga teng bo'ladi:

$$\Delta y \approx 3x^2\Delta x;\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 = 3x^2.$$

Ma'lumki, $3x^2$ funksiya x^3 funksiyaning hosilasidan iborat. $\Delta x \to 0$ da $(3x\Delta x^2 + \Delta x^3)$ miqdor $3x^2\Delta x$ miqdorga nisbatan tezroq nolga intiladi, boshqacha aytganda u $3x^2\Delta x$ miqdorga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir.

Demak, $\Delta y = y'\Delta x$. Shunday qilib, bosh chiziqli qism $3x^2\Delta x$ ni bilgan holda $3x^2$ hosilani topish mumkin, shuningdek, hosilani bilgan holda uni Δx ga ko'paytirib bosh chiziqli qismni topish mumkin. Hosilaga ega bo'lgan istalgan $y=f(x)$ funksiyaning orttirmasini $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ (*) ko'rinishda ifodalash mumkinligini ilgari ko'rgan edik.

Bu yerdagi α miqdor Δx ga bog'liq bo'lib, $\Delta x \to 0$ da y miqdor ham nolga intiladi, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Bunday holda $\alpha \cdot \Delta x$ ko'paytma Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Bu ko'paytmaning cheksiz kichik miqdor ekanligini $f'(x) \neq 0$ bo'lganda uni Δy bilan taqqoslab ham ishonch hosil qilish mumkin:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\alpha \cdot \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = 0 \cdot \frac{1}{f'(x)} = 0.$$

Shunday qilib,

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x \tag{1}$$

taqribiy munosabatni yozish mumkin. Bu tenglik Δx ning birinchi darajasiga proporsional.

T a ' r i f. *$y = f(x)$ funksiya* ***differensiali*** *deb Δx argument orttirmasiga chiziqli bog'liq bo'lgan $f'(x)\Delta x$ funksiya orttirmasining bosh qismiga aytiladi.*

$y = f(x)$ funksiya differensialini dy ko'rinishda belgilash qabul qilingan (bu d ning y ga bo'lgan ko'paytmasini bildirmaydi). Argument differensiali esa dx ko'rinishda belgilanib, u argument orttirmasiga aynan teng $dx = \Delta x$. Shuning uchun (1) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$dy = f'(x) dx \to dy = y' dx. \tag{2}$$

Shunday qilib, funksiya differensiali uning hosilasi bilan argument differensiali ko'paytmasiga teng.

(2) formuladan hosilani topish mumkin:

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad dx = \frac{1}{y'} dy.$$

Shunday qilib, funksiyaning hosilasi funksiya differensialining argument differensialiga bo'lgan nisbatiga teng bo'lar ekan.

Differensialning asosiy xossalari

1) $dC = 0$, bunda $C = \text{const}$;

2) $d(Cu) = Cdu$;

3) $d(u \pm \upsilon) = du \pm d\upsilon$;

4) $d(u \cdot \upsilon) = ud\upsilon + \upsilon du$;

5) $d\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon du - ud\upsilon}{\upsilon^2} \ (\upsilon \neq 0)$;

6) $df(u) = f'(u)du$.

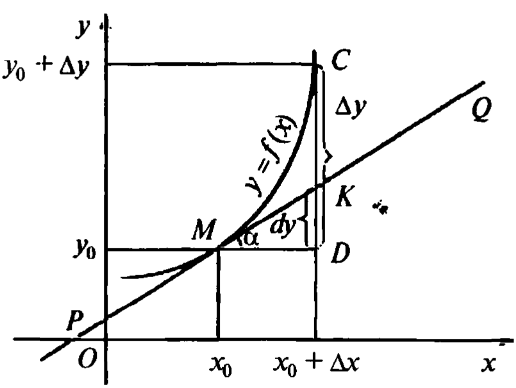
2. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi

$y = f(x)$ funksiya $M(x;\ y)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu nuqta orqali burchak koeffitsiyenti $k = \text{tg}\alpha = y' = f'(x)$ hosilaga teng bo'lgan urinma o'tkazamiz.

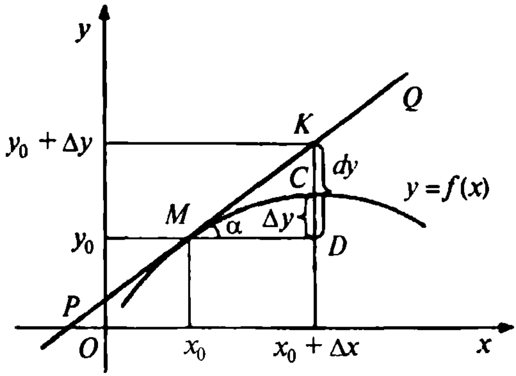
Agar x abssissaga $\Delta x = dx$ orttirma bersak, y ordinata ham Δy orttirmani oladi. Urinmaning ordinatasi esa dy orttirma oladi. To'g'ri burchakli $\triangle MKD$ dan (14- rasm):

$$dy = \Delta x \,\text{tg}\,\alpha = \Delta x \cdot k = y'dx.$$

(*) ning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi $\alpha(x) \cdot \Delta x$ $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik miqdor bo'lib, C nuqtani M nuqtaga qancha yaqin olsak, bu miqdor nolga shunchalik tez yaqinlashadi. Funksiya differensiali berilgan nuqtada



14- rasm.



15- rasm.

uning orttirmasidan kichik (14- rasm), shuningdek, katta ham bo'lishi mumkin (15- rasm).

Shunday qilib, agar x argumentga Δx orttirma berib o'zgartirganimizda geometrik nuqtayi nazardan funksiyaning $dy=|KD|$ differensiali funksiya grafigiga $M(x;\ y)$ nuqtada o'tkazilgan PQ urinmaning orttirmasiga, funksiya orttirmasi $\Delta y=|CD|$ esa $y=f(x)$ egri chiziq ordinatasining orttirmasiga teng bo'lar ekan.

3. Funksiya differensialining taqribiy hisoblashlarga tatbiqi

Yuqorida Δx argument orttirmasi absolut qiymat jihatidan kichik bo'lganda, $\Delta y \approx dy$ taqribiy formula o'rinli bo'lishiga ishonch hosil qildik. Bunday hol esa differensialni funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblashga qo'llash imkoniyatini beradi. Funksiyaning qiymatini taqribiy hisoblashga imkon beradigan formula ham chiqarish mumkin.

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar $x-x_0=\Delta x$ desak, u holda: $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ va $dy=f'(x_0)\Delta x$ bo'ladi. $\Delta y \approx dy$ bo'lgani uchun,

$$f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \text{ yoki } f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \qquad (3)$$

taqribiy formulaga ega bo'lamiz.

(3) formula hosilaga ega bo'lgan ixtiyoriy funksiyani chiziqli funksiyaga almashtirish imkonini beradi. Bunday almashtirishda x nuqta x_0 nuqtaga qanchalik yaqin bo'lsa, aniqlik shuncha katta bo'ladi, ya'ni yo'l qo'yiladigan xato shunchalik kichik bo'ladi.

Geometrik nuqtayi nazardan bunday almashtirish quyidagi mazmunga ega: $(x_0;\ y_0)$ nuqta atrofida $y=f(x)$ egri chiziqning yoyi shu nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan $k=f'(x_0)$ burchak koeffitsiyentiga ega bo'lgan $y-y_0 = k(x-x_0)$ urinmaning kesmasiga almashtiriladi.

Xususiy holda, agar $x_0=0$ bo'lsa, u holda «funksiyani chiziqlashtiradigan» (3) taqribiy formula

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x \tag{4}$$

ko'rinishni oladi.

(4) formulada $f(x)$ ning o'rniga navbat bilan

$$\sin x,\quad \operatorname{tg} x,\quad e^x,\quad \ln(1+x),\quad (1+x)^\alpha$$

funksiyalarni qo'ysak,

$$\sin x\approx x,\quad \operatorname{tg}x\approx x,\quad e^x\approx 1+x,\quad \ln(1+x)\approx x,\quad (1+x)^\alpha\approx$$
$$\approx 1+\alpha x$$

taqribiy formulalarni olamiz.

Bu taqribiy formulalarda x o'zgaruvchining qiymati nolga qancha yaqin bo'lsa, aniqlik shunchalik yaxshi bo'ladi va yo'l qo'yiladigan xato shunchalik kichik bo'ladi.

Masalan, $f(x)=e^x$ bo'lsa, $f'(x)=e^x$ bo'lib, $x=0$ da $f(0)=1$ va $f'(0)=1$ bo'ladi va $e^x\approx 1+x$ taqribiy formulani olamiz. Geometrik nuqtayi nazardan bu taqribiy formula quyidagi imkoniyatni beradi: $x=0$ nuqta atrofida $f(x)=e^x$ egri chiziq yoyining uzunligini shu nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan $y=1+x$ urinma kesmasining uzunligini hisoblash orqali istalgan aniqlikda topish mumkin.

1- m i s o l. $\sqrt[3]{27,0081}$ ni taqribiy hisoblang.

Y e c h i s h. Agar 27,0081 o'rniga 27 ni olsak, $\sqrt[3]{27}=3$ bo'ladi. Agar $y=\sqrt[3]{x}$ funksiyani qarasak, $x=27,0081$ bo'lib, $dx=\Delta x=27,0081-27=0,0081$ bo'lganda dy ni topamiz:

$$dy=\left(\sqrt[3]{x}\right)'dx=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'dx=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}dx=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}}\cdot 0,0081=\frac{1}{3\cdot 9}\cdot 0,0081=0,0003.$$

Demak, $\sqrt[3]{27,0081}=3+dy\approx 3+0,0003=3,0003.$

Aniqlik darajalarini bilmasdan hisoblangan natijalar qator amaliy masalalarni yechish uchun to'liq yetarli bo'ladi.

Yuqoridagi misolni (3) formuladan kelib chiqadigan

$$\sqrt[n]{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{n}\Delta x \tag{5}$$

taqribiy formuladan foydalanib ham yechish mumkin:

$$\sqrt[3]{27,0081}=\sqrt[3]{27+0,0081}=\sqrt[3]{27(1+0,0003}=3\sqrt[3]{1+0,0003}\approx$$

$$\approx 3\left(1+\frac{1}{3}\cdot 0,0003\right)=3+0,0003=3,0003.$$

2- m i s o l. (3) formuladan ushbu

$$(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x \tag{6}$$

taqribiy formulani keltirib chiqaring.

Y e c h i s h. $f(x)=x^n$ funksiyani qaraymiz. $x_0=1$ va $x=x_0+\Delta x=1+\Delta x$ deb olamiz. Bunday holda $f(x_0)=1$, $f'(x)=nx^{n-1}$ bo'lib, $f'(x_0)=n$ bo'ladi. (3) formulaga ko'ra:

$$f(x)=(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x.$$

Masalan, $1,002^{100}=(1+0,002)^{100}\approx 1+100\cdot 0,002=$ $=1,2.$

3- m i s o l . $\frac{1}{0{,}997^{30}}$ ning qiymatini hisoblash uchun $n=-30$, $\Delta x=-0{,}003$ deb olib, (6) formuladan foydalanish qulay:

$$\frac{1}{0{,}997^{30}}=(1-0{,}003)^{-30}\approx 1+(-30)(-0{,}003)=1+0{,}09=$$
$$=1{,}09.$$

4- m i s o l . Agar 3^4 darajaning asosi 0,0063 ga kamaysa, uning qiymati qanchaga kamayadi?

Y e c h i s h . Δy funksiya orttirmasini tuzamiz. Buning uchun $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$ formuladan foydalanamiz. Agar $y=x^4$ funksiyani qarasak, $y'=4x^3$ bo'lib, $dy=4x_0{}^3\Delta x$, $x_0=3$; $\Delta x=0{,}0063$.

$$\Delta y=dy=4x_0{}^3\Delta x=4\cdot 3^3 0{,}0063=108\cdot 0{,}0063=0{,}6804.$$

J a v o b : $\Delta y\approx 0{,}6804$.

14- §. Yuqori tartibli hosilalar

$y=f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyani x bo'yicha differensiallab, uning $f'(x)$ hosilasini topamiz. Bu hosila $f(x)$ funksiyaning birinchi (birinchi tartibli) hosilasi deyiladi. Birinchi hosiladan olingan hosila ikkinchi (ikkinchi tartibli) hosila, ikkinchi hosiladan olingan hosila uchinchi (uchinchi tartibli) hosila deyiladi va h. k.

Ikkinchi hosiladan boshlab, barcha hosilalar *yuqori tartibli hosilalar* deyiladi.

Ular quyidagicha belgilanadi:

$$y^{\mathrm{II}},\ y^{\mathrm{III}},\ y^{(\mathrm{IV})},\ y^{(\mathrm{V})},\ \ldots \text{ yoki } \frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\ldots$$

Shunday qilib, ikkinchi tartibli hosila birinchi tartibli hosiladan olinadi: $y^{\mathrm{II}}=(y')'$ yoki $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Uchinchi tartibli hosila ikkinchi tartibli hosiladan olinadi:

$$y^{III} = (y^{II})' \text{ yoki } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \text{ va h.k.}$$

n- tartibli hosila $(n-1)$- tartibli hosiladan olinadi:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \text{ yoki } \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

1- misol. $y = x^4$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi: $y' = 4x^3$; ikkinchi tartibli hosilasi: $y^{II} = (y')' = (4x^3)' = 12x^2$; uchinchi tartibli hosilasi: $y^{III} = (y^{II})' = (12x^2)' = 24x$; to'rtinchi tartibli hosilasi: $y^{(IV)} = (y^{III})' = (24x)' = 24$; beshinchi tartibli hosilasi: $y^{(V)} = (y^{(IV)})' = (24)' = 0$. Berilgan funksiyaning beshinchi tartibli hosilasi va undan yuqori tartibli hosilalarining barchasi nolga teng.

2- misol. Ushbu $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ n- darajali ko'phadni ketma-ket differensiallab quyidagilarni topamiz:

$$y' = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)^{n-3} + \ldots + a_{n-2}2x + a_{n-1};$$

$$y^{II} = a_0n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} +$$
$$+ a_2(n-2)(n-3)x^{n-4} + \ldots + a_{n-2} \cdot 2 \cdot 1;$$

. . . .

. . . .

n- qadamda: $y^{(n)} = a_0n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots \cdot 3 \times 2 \cdot 1 = a_0n!$

n- tartibli hosiladan yuqori tartibli hosilalarning barchasi nolga teng.

3- misol. $y = e^{kx}$ funksiyaning n- tartibli hosilasini toping.

Yechish. $y' = ke^{kx}$, $y^{II} = k^2e^{kx}$, $y^{III} = k^3e^{kx}$, $\ldots, y^{(n)} = k^ne^{kx}$.

Agar $k = 1$ bo'lsa, $y = e^x$ funksiya uchun

$$y' = e^x,\ y^{II} = e^x,\ y^{III} = e^x,\ y^{(IV)} = e^x,\ \ldots,\ y^{(n)} = e^x.$$

Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi

Moddiy nuqta $s=f(t)$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsin. Bunday harakatlanayotgan nuqtaning oniy tezligi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng bo'lishini aniqlagan edik:

$$v = s' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Δt vaqt oralig'ida jismning tezligi Δv ga o'zgarsin, ya'ni $v(t)$ funksiya Δv orttirma olsin.

Δt vaqt oralig'ida jismning o'rtacha tezlanishi deb, Δv tezlik orttirmasining Δt vaqt orttirmasiga bo'lgan nisbatiga aytiladi:

$$a_{\text{o‘rt.}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Berilgan paytdagi jismning oniy tezlanishi deb tezlik orttirmasining vaqt orttirmasiga bo'lgan nisbatining vaqt orttirmasi nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$a_{\text{oniy}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = (s')' = s'' = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Shunday qilib, ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosini quyidagicha ta'riflash mumkin: *to'g'ri chiziqli harakatning tezlanishi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga yoki tezlikdan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.*

M a s a l a . Agar erkin tushayotgan jismning bosib o'tgan yo'li s bilan t vaqt orasidagi bog'lanish $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$ formula bilan berilgan bo'lsa, jismning tezligi v, tezlanishi a ni toping.

$$g = 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\; s_0 = s\big|_{t=0};\; v\big|_{t=0} = v_0.$$

Y e c h i s h . $v = s' = gt + v_0$. Vaqtning $t=0$ qiymatida $v = v_0$ bo'ladi. Bunda $a = v' = s'' = g = 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

15- §. Hosilaning funksiyalarni tekshirishga tatbiqi

1. Funksiya o'sishi va kamayishining zaruriy shartlari

Elementar matematikaning ko'pgina masalalarini hosila yordamida yechish mumkin. Xususan, hosiladan algebraik ifodalarni ayniy almashtirishda, ko'paytuvchilarga ajratishda, ayniyatlarni isbotlashda, yig'indilarni hisoblashda, tenglik va tengsizliklarni isbotlashda, parametrlarga bog'liq masalalarni yechishda, funksiyalarni tekshirishda foydalanish mumkin.

Hosilaning funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini topishda qo'llanilishini ko'rib chiqamiz.

1- t e o r e m a. *Agar* $I =]a;\ b[$ *oraliqda differensiallanuvchi funksiya shu oraliqda o'suvchi bo'lsa, u holda istalgan* $x \in I$ *uchun* $f'(x) \geq 0$ *bo'ladi.*

I s b o t. I oraliqda o'suvchi funksiyaning ta'rifiga ko'ra, agar $x > x_0$ bo'lsa, u holda $f(x) > f(x_0)$, agar $x < x_0$ bo'lsa, $f(x) < f(x_0)$ bo'ladi. Bunday holda I oraliqdan olingan istalgan x_0 va x uchun $x \neq x_0$ bo'lganda $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $f(x)$ funksiya I oraliqda differensiallanuvchi, bunday holda $x \to x_0$da oxirgi tengsizlikda limitga o'tsak, $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

2- t e o r e m a. *Agar* $I =]a;\ b[$ *oraliqda differensiallanuvchi funksiya kamayuvchi bo'lsa, u holda istalgan* $x \in I$ *uchun* $f'(x_0) \leq 0$ *bo'ladi.*

I s b o t. Teorema shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya kamayuvchi, u holda $F(x) = -f(x)$ funksiya o'suvchi bo'ladi. Isbotlangan 1- teoremaga ko'ra $F'(x_0) = -f'(x_0) \geq 0$, $(x_0 \in I)$ bo'ladi. Bu yerdan istalgan $x_0 \in I$ uchun $f'(x_0) \leq 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Funksiya o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lgan oraliqlar bu funksiyaning *monotonlik oraliqlari* deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $I =]a; b[$ oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, a va b nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, bu funksiyaning $[a; b]$ kesmada o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishini ham isbotlash mumkin.

2. Lagranj teoremasi va formulasi

Funksiya monotonligining yetarli shartlarini isbotlashda Lagranj nomi bilan ataluvchi teoremadan foydalanish mumkin. Biz bu teoremani isbotsiz keltirib, uning geometrik mazmunini ochib beramiz.

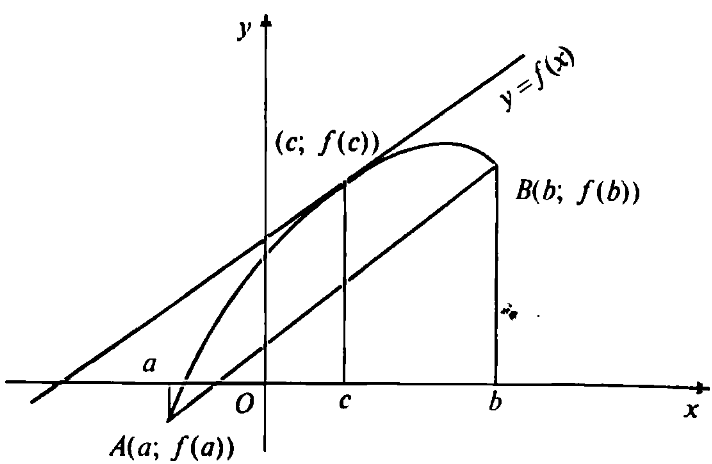
Lagranj teoremasi. *Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz va $]a; b[$ intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shunday bir $c \in]a; b[$ nuqta topiladiki, bu nuqtada*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \qquad (1)$$

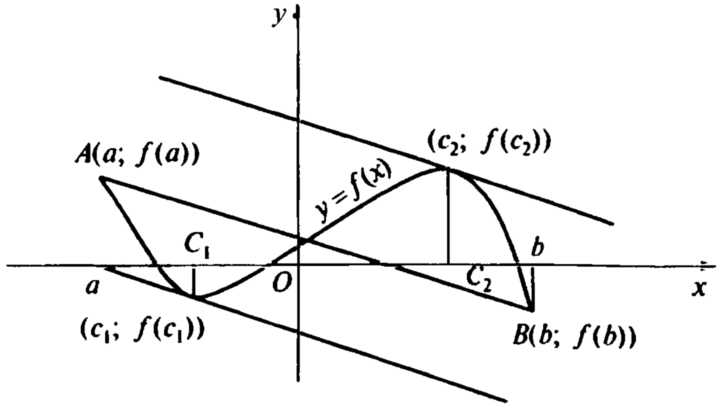
formula o'rinli bo'ladi.

(1) formula *Lagranj* yoki *chekli orttirmalar formulasi* deb ataladi.

Lagranj teoremasining geometrik mazmuni quyidagicha: AB chiziq $A(a; f(a))$ va $B(b; f(b))$ nuqtalarni tutashtiruvchi vatar bo'lsin (16- a rasm). Bunday holda $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



16- *a* rasm.



16- b rasm.

nisbat A va B nuqtalardan o‘tuvchi kesuvchining Ox o‘qqa og‘ish burchagining tangensiga teng, $f'(c)$ hosila esa $y=f(x)$ funksiya grafigiga $(c; f(c))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning Ox o‘qqa og‘ish burchagining tangensiga teng bo‘ladi.

Boshqacha so‘z bilan aytganda, $[a; b]$ kesmada uzluksiz va $]a; b[$ intervalda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya grafigida kamida bitta $(c; f(c))$ nuqta mavjudki, bu nuqta orqali o‘tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo‘ladi (16- b rasm).

3. Funksiya o‘sishi va kamayishining yetarli shartlari

Avvalo funksiya o‘sishining yetarli sharti haqidagi teoremani ta’riflaymiz va isbotlaymiz.

1 - t e o r e m a . *Agar $f(x)$ funksiya $I=]a; b[$ oraliqning har bir nuqtasida musbat hosilaga ega bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya bu oraliqda o‘suvchi bo‘ladi.*

I s b o t . x_1 va x_2 lar $]a; b[$ oraliqdan olingan va $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiruvchi ikkita ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. Bunday holda Lagranj teoremasiga ko‘ra shunday $c \in]x_1; x_2[$ nuqta mavjudki, bu nuqtada $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$ tenglik bajariladi. Teorema shartiga ko‘ra $f'(c)>0$ va $x_2-x_1>0$, bunday holda $f(x_2)>f(x_1)$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bu tengsizlik o'suvchi funksiyaning ta'rifiga ko'ra, $f(x)$ funksiya $]a;\ b[$ oraliqda o'suvchi bo'lishini bildiradi. Teorema isbotlandi.

Yuqoridagi teoremaga o'xshash funksiya kamayishining yetarli sharti haqidagi teoremani ham isbotlash mumkin.

2- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $I =]a;\ b[$ oraliqning har bir nuqtasida manfiy hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya bu oraliqda kamayuvchi bo'ladi.*

4. Monotonlik intervallarini topish qoidasi

Funksiyaning monotonlik oraliqlarini topishda quyidagi qoidalarga rioya qilish tekshirish ishlarini ixchamlashtiradi:

1) berilgan $f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini hisoblaymiz, keyin $f'(x)$ hosila nolga aylanadigan yoki mavjud bo'lmaydigan nuqtalarni topamiz. Bunday nuqtalar $f(x)$ funksiyalar uchun *kritik nuqtalar* deyiladi;

2) kritik nuqtalar bilan $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi oraliqlarga bo'linadi. Bu oraliqlarning har birida $f'(x)$ hosila o'z ishorasini saqlaydi. Bu intervallar *monotonlik intervallari* deyiladi;

3) $f'(x)$ hosilani topilgan intervallarning har birida tekshiramiz. Agar qaralayotgan intervalda $f'(x) > 0$ bo'lsa, bu intervalda $f(x)$ funksiya o'sadi, agar $f'(x) < 0$ bo'lsa, bu intervalda $f(x)$ funksiya kamayadi.

1- misol. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. 1) berilgan funksiya butun son o'qida aniqlangan va differensiallanuvchi.

$f'(x) = x^2 - 5x + 6$ ni topamiz va $x^2 - 5x + 6 = 0$ tenglamani yechib, kritik nuqtalarni aniqlaymiz: $x_1 = 2$ va $x_2 = 3$;

2) kritik nuqtalar aniqlanish sohasini uchta qismga ajratadi: $]-\infty; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[$.

Bu oraliqlar berilgan funksiyaning monotonlik oraliqlari bo'ladi;

3) har bir oraliqda $f'(x)$ hosilaning ishorasini aniqlaymiz:

$x \in]-\infty; 2[$ da $f'(x) = (x-2)(x-3) > 0$;
$x \in]2; 3[$ da $f'(x) = (x-2)(x-3) < 0$;
$x \in]3; +\infty[$ da $f'(x) = (x-2)(x-3) > 0$;

Shunday qilib, berilgan funksiya $]-\infty; 2[$ va $]3; +\infty[$ oraliqlarda o'suvchi,]2; 3[oraliqda esa kamayuvchi bo'ladi.

2-m i s o l. $f(x) = 2x^2 - \ln x$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Y e c h i s h. 1) berilgan funksiya $]0; +\infty[$ intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi. Berilgan funksiyaning hosilasini va kritik nuqtalarni topamiz:

$f'(x) = 4x - \frac{1}{x}$; $4x - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{4x^2-1}{x} = 0$ tenglamadan $x = \frac{1}{2}$ yagona kritik nuqtani topamiz ($x = -\frac{1}{2}$ va $x = 0$ nuqtalar funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli emas);

2) monotonlik oraliqlari $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ va $\left]\frac{1}{2}; \infty\right[$ bo'ladi.

3) har bir oraliqda hosilaning ishorasini aniqlaymiz:

$$x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\text{ da } f'(x) = \frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x} < 0;$$

$$x \in \left]\frac{1}{2}; \infty\right[\text{ da } f'(x) = \frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x} > 0.$$

Shunday qilib, berilgan funksiya $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ intervalda kamayuvchi, $\left]\frac{1}{2}; \infty\right[$ oraliqda esa o'suvchi bo'ladi.

5. Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti

Qo'llanmaning birinchi qismida funksiyaning maksimum va minimumi haqida to'xtalib o'tgan edik. Hozir esa ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy shartini o'rnatamiz.

F e r m a t e o r e m a s i . *Agar x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lib, bu nuqtada $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda bu hosila x_0 nuqtada nolga teng bo'ladi.*

I s b o t . Aniqlik uchun x_0 — maksimum nuqta bo'lsin. Bunday holda ta'rifga ko'ra x_0 nuqtaning shunday δ atrofi mavjudki, bu atrofdagi barcha $x \neq x_0$ uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajariladi.

Teorema shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega. Shuning uchun bir tomondan $x \in]x_0 - \delta; x_0[$ chap yarimatrofda barcha $x \neq x_0$ uchun $x - x_0 < 0$ va $f(x) - f(x_0) < 0$ bo'lganda

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

bo'ladi.

Boshqa tomondan esa $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ o'ng yarimatrofda barcha $x \neq x_0$ uchun $x - x_0 > 0$ va $f(x) - f(x_0) < 0$ bo'lganda

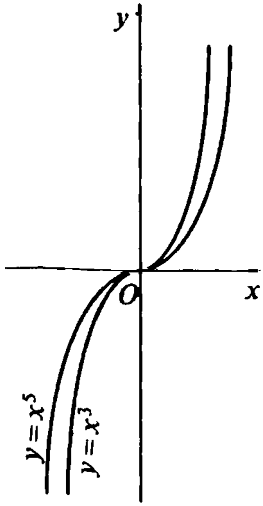
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

bo'ladi. Demak, $f'(x_0) = 0$.

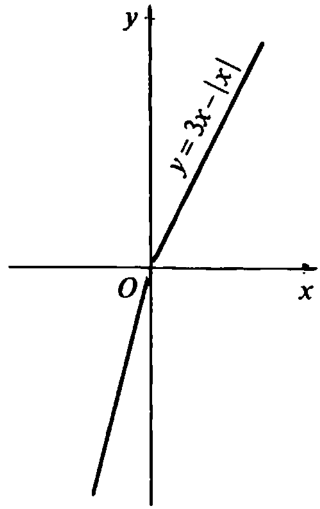
Minimum nuqta uchun teoremaning isboti yuqoridagiga o'xshash amalga oshiriladi.

Ferma teoremasi faqatgina ekstremumning zaruriy shartini o'rnatadi, ya'ni funksiya ekstremumga erishadigan nuqtalarni ajratadi. Bunday nuqtalarda hosila nolga aylansada, lekin funksiya ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin.

Masalan, x^3, x^5 funksiyalarning hosilalari $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi. Lekin bu funksiyalar $x = 0$ nuqtada ekstremumga ega emas. Ular o'z aniqlanish sohalarida o'suvchi funksiyalardir (17- rasm). Boshqa bir misolni tahlil qilaylik. $F(x) = 3x - |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas, ya'ni $x = 0$ nuqta berilgan funksiya uchun kritik nuqta bo'ladi. Barcha $x < 0$ bo'lgan hollar uchun $f(x) < f(0)$. Barcha $x > 0$ bo'lgan hollar uchun esa



17- rasm.



18- rasm.

$f(x) > f(0)$ bo'lib, berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada ekstremumga ega emas (18- rasm).

6. Ekstremum mavjudligining yetarli shartlari

Ushbu mulohazani kelishib olamiz: agar x_0 nuqtaning shunday $]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[$ atrofi mavjud bo'lib, x_0 nuqtadan chapda joylashgan, ya'ni $x \in]x_0 - \delta;\ x_0[$ nuqtalar uchun $f(x) > 0$ bo'lib, x_0 nuqtadan o'ngda joylashgan, ya'ni $x \in]x_0,\ x_0 + \delta[$ nuqtalar uchun $f(x) < 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya o'z ishorasini x_0 nuqtadan o'tishda plusdan minusga o'zgartiradi deyiladi.

Shunga o'xshash x_0 nuqtadan o'tishda funksiya ishorasini minusdan plusga o'zgartirishini ham shartlashish mumkin.

1- teorema. *$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, uning δ-atrofida hosilaga ega bo'lsa, x_0 nuqtaning o'zida hosilaga ega bo'lmasligi ham mumkin.* Bunday holda:

a) *agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'zining ishorasini plusdan minusga o'zgartirsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo'ladi;*

b) *agar* $f'(x)$ *hosila* x_0 *nuqtadan o'tishda ishorasini minusdan plusga o'zgartirsa, u holda* x_0 *nuqta* $f(x)$ *funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi;*

d) *agar* x_0 *nuqtaning shunday* $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ *atrofi mavjud bo'lib, bu atrofda* $f'(x)$ *hosila ishorasini o'zgartirmasa, u holda* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada ekstremumga erishmaydi.*

Isbot. Aytaylik, $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini plusdan minusga o'zgartirsin. Bunday holda shunday $\delta>0$ son mayjudki, $]x_0-\delta;\ x_0[$ yarimintervaldan olingan x lar uchun $f'(x)>0$ va $]x_0;\ x_0+\delta[$ yarimintervaldan olingan barcha x lar uchun $f'(x)<0$ bo'ladi. Barcha $x\in]x_0-\delta;\ x_0[$ uchun $f'(x)>0$ bo'lsa, u holda 3-bandning 1- teoremasiga ko'ra $]x_0-\delta;\ x_0[$ intervalda $f(x)$ funksiya o'sadi va $]x_0-\delta;\ x_0[$ intervaldan olingan barcha x lar uchun $f(x)<f(x_0)$ tengsizlik bajariladi. Agar $x\in]x_0;\ x_0+\delta[$ uchun $f'(x)<0$ bo'lsa, u holda 3- bandning 2- teoremasiga ko'ra $]x_0;\ x_0+\delta[$ intervalda $f(x)$ funksiya kamayadi.

Shuning uchun $]x_0;\ x_0+\delta[$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x)<f(x_0)$ tengsizlik bajariladi. Shunday qilib, $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ intervaldan olingan barcha $x\neq x_0$ uchun $f(x)<f(x_0)$ tengsizlik o'rinli. Bunday holda maksimum nuqta ta'rifiga ko'ra x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo'ladi. b) va d) hollar ham a) holga o'xshash isbotlanadi.

Isbotlangan teorema natijalarini quyidagi jadval ko'rinishida ham berish mumkin:

Hosilaning ishorasi			Xulosa
$x\in]x_0-\delta;\ x_0[$	x_0	$x\in]x_0;\ x_0+\delta[$	x_0
+	$\to$	+	ekstremum nuqta bo'la olmaydi
+	$\to$	–	maksimum nuqta
–	$\to$	+	minimum nuqta
–	$\to$	–	ekstremum nuqta bo'la olmaydi

Differensiallanuvchi funksiya ekstremumining yetarli shartlarini ikkinchi tartibli hosiladan foydalanib ham o'rnatish mumkin.

2- t e o r e m a . *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo'lib, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtada $f''(x_0)<0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga, $f''(x_0)>0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.*

7. Funksiyaning ekstremumlarini topish qoidalari

1- qoida. $y=f(x)$ funksiya $]a;\ b[$ intervalda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bunday holda funksiyaning ekstremumlarini topish uchun:

1) birinchi hosilani nolga tenglashtirib, olingan $f'(x)=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlarini va $f'(x)$ hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarini topish kerak. Bu topilgan nuqtalar kritik (statsionar) nuqtalar bo'ladi;

2) topilgan ildizlar va hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni o'sish tartibida joylashtirib, har bir kritik nuqtaning δ-atrofida $f'(x)$ hosilaning ishorasini tekshirish kerak. Agar $f'(x)$ hosila tekshirilayotgan nuqtadan o'tayotganda ishorasini o'zgartirsa, funksiya bu nuqtada ekstremumga ega bo'ladi. Agar ishorasini minusdan plusga o'zgartirsa, funksiya bu nuqtada minimumga, agar ishorasini plusdan minusga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya bu nuqtada maksimumga erishadi. Agar $f'(x)$ hosila qaralayotgan nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya bu nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

1- m i s o l. $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ funksiyaning ekstremum qiymatlarini toping.

Y e c h i s h. 1) funksiyaning kritik nuqtalarini izlaymiz. $f'(x)=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ hosila $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtalarda nolga aylanadi va $x_{3,4}=\pm 1$ nuqtalarda mavjud emas. x_1 va x_2 nuqtalar kritik nuqtalar bo'ladi. Chunki bu nuqtalar berilgan funksiya aniqlanish sohasi — $[-1;\ 1]$ ning ichida yotadi. x_3 va x_4 nuqtalar kritik nuqtalar bo'lmaydi, chunki ular funksiya aniqlanish sohasining ichki nuqtalari emas, balki chegaraviy nuqtalaridir.

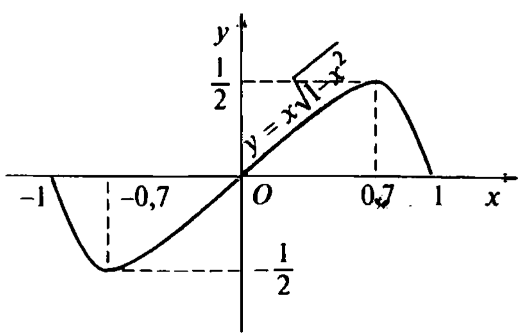
2) kritik nuqtalarda $f'(x)$ hosilaning ishorasini tekshiramiz va tekshirish natijalarini quyidagi jadval ko'rinishida yozamiz:

x	$-0{,}9$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$0{,}9$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	kamayuvchi	min	o'suvchi	max	kamayuvchi

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, berilgan funksiya ikkita nuqtada ekstremum qiymatga ega: $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtada minimumga ega:

$y_{\min}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtada esa maksimumga ega:

$y_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ (19-rasm).



19- rasm.

2- qoida. Funksiyaning ekstremum qiymatlarini topish uchun:

1) birinchi hosilani topib, uni nolga tenglashtirib, olingan tenglamaning ildizlarini va birinchi hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni topish kerak;

2) har bir kritik (statsionar) nuqtada ikkinchi tartibli hosilaning qiymatini hisoblash kerak: agar ikkinchi tartibli hosilaning qiymati musbat bo'lsa, u holda bu nuqta berilgan funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi; agar ikkinchi tartibli hosilaning qiymati manfiy bo'lsa, u holda bu nuqta berilgan funksiyaning maksimum nuqtasi bo'ladi; agar ikkinchi tartibli hosilaning qiymati nolga teng bo'lsa, bunday holda funksiyaning ekstremumi 1-qoida bo'yicha topiladi.

2- misol. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+5$ funksiyaning ekstremum qiymatlarini toping.

Yechish. 1) birinchi hosilani hisoblaymiz:

$$f'(x)=x^3-2x=x(x^2-2).$$

Statsionar nuqtalarni topamiz. Buning uchun $x(x^2-2)=0$ tenglamani yechamiz. Uning ildizlari: $x_1=-\sqrt{2}$; $x_2=0$; $x_3=\sqrt{2}$ bo'ladi;

2) ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $f''(x)=3x^2-2$, bu hosilaning qiymatlarini statsionar nuqtalarda hisoblaymiz:

$f''(-\sqrt{2})=3\cdot 2-2=4>0$; $f''(0)=-2<0$; $f''(\sqrt{2})=$
$=3\cdot 2-2=4>0$; shunday qilib, berilgan funksiya $x=-\sqrt{2}$ va $x=\sqrt{2}$ nuqtalarda minimumga erishadi:

$y_{\min}=\frac{1}{4}(\pm\sqrt{2})^4-(\pm\sqrt{2})^2+5=1-2+5=4$, chunki $f''(-\sqrt{2})=$
$=f''(\sqrt{2})>0$;

$x=0$ nuqtada esa berilgan funksiya maksimumga erishadi:

$y_{\max}=\frac{1}{4}\cdot 0-0^2+5=5$, chunki $f''(0)<0$.

8. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Ko'pgina amaliy masalalar kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topishga keltirilib hal qilinadi. $[a; b]$ kesmada differensiallanuvchi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlash uchun berilgan kesmaning ichida yotgan barcha kritik nuqtalar topiladi. Funksiyaning kritik nuqtalardagi va kesmaning oxirgi nuqtalaridagi qiymatlari hisoblanadi. Funksiyaning bu qiymatlari orasidan eng kattasi va eng kichigi ajratib olinadi. Bordi-yu, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ da o'suvchi bo'lsa, u holda $f(a)$ funksiyaning eng kichik qiymati, $f(b)$ esa $f(x)$ funksiyaning eng katta qiymati bo'ladi. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ da kamayuvchi bo'lsa, u holda $f(a)$ son $f(x)$ funksiyaning eng katta qiymati, $f(b)$ esa bu funksiyaning eng kichik qiymati bo'ladi.

1- misol. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(2-x)$ funksiyaning a) $[-6; -1]$ va b) $[-2; 1]$ kesmalardagi eng kichik va eng katta qiymatini toping.

Yechish. Berilgan funksiya barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan. Bu funksiyaning $f'(x)=\dfrac{4-5x}{3\sqrt[3]{x}}$ hosilasi faqat $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, $x=0{,}8$ nuqtada nolga aylanadi. $x=0$ va $x=0{,}8$ nuqtalar funksiyaning kritik nuqtalari bo'ladi.

a) $[-6; -1]$ kesmada funksiya kamayuvchi, chunki istalgan $x \in [-6; -1]$ uchun $f'(x)<0$ bo'ladi. Shuning uchun $x=-6$ nuqtada eng katta, $x=-1$ nuqtada esa eng kichik qiymatga ega bo'ladi:

$$f_{\text{eng katta}}=f(-6)=8\sqrt[3]{36},\quad f_{\text{eng kichik}}=f(-1)=3;$$

b) ikkala kritik nuqta ham $[-2; 1]$ kesmaga tegishli. Shuning uchun funksiyaning $[-2; 1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun uning qiymatlarini kritik nuqtalar va kesmaning oxirgi nuqtalarida hisoblaymiz:

$$f(-2)=4\sqrt[3]{4};\quad f(0)=0;\quad f(0{,}8)=\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}};\quad f(1)=1.$$

$$f_{\text{eng kichik}} = f(0) = 0, \quad f_{\text{eng katta}} = f(-2) = 4\sqrt[3]{4}.$$

2- m a s a l a. Perimetri $2p$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan yuzi eng katta bo'lganini toping.

Y e c h i s h. Perimetri $2p$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar cheksiz ko'p, ya'ni ular cheksiz to'plamni tashkil qiladi. Bizning vazifamiz bu to'g'ri to'rtburchaklarning cheksiz to'plamidan yuzi eng katta bo'lganini ajratib olishdir. Agar bunday to'g'ri to'rtburchakning bir tomoni x ga teng bo'lsa, ikkinchi tomoni $p-x$ ga teng bo'ladi. To'g'ri to'rtburchakning S yuzi $x(p-x)$ ga teng bo'ladi. $S=x(p-x)$, $x \in [0;\ p]$ funksiyaning kritik nuqtasini topamiz. $S' = p - 2x \to p - 2x = 0 \to x = p/2$. Demak, $\frac{p}{2} \in [0;\ p] \cdot \left[0;\ \frac{p}{2}\right]$ kesmada S funksiya o'sadi, $\left[\frac{p}{2};\ p\right]$ kesmada esa kamayadi. $x = p/2$ bo'lganda S yuz eng katta bo'ladi.

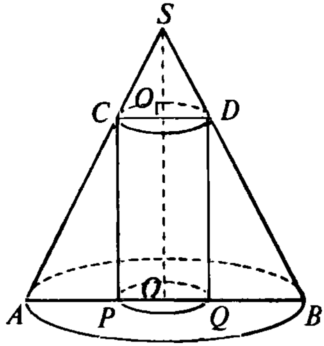
Shunday qilib, $2p$ perimetrli to'g'ri to'rtburchaklardan yuzi eng kattasi — tomoni $\frac{p}{2}$ ga teng bo'lgan kvadratdan iborat ekan.

3- m a s a l a. Asosining radiusi 6 ga va balandligi 12 ga teng bo'lgan konusga eng katta hajmli silindr ichki chizilgan. Silindrning asosi konus asosida yotadi. Silindr asosining radiusini va balandligini toping.

Y e c h i s h. $|OA| = R = 6, |OS| = H = 12 \cdot |OP| = r$ va $|OO_1| = h$ bo'lsin. Ekstremumi tekshiriladigan funksiya silindrning hajmi bo'ladi: $V_s = \pi r^2 h$. Masala shartiga ko'ra chizma chizaylik (20- rasm). $OS = 12$, $O_1S = 12 - h$. $\triangle ASO$ uchburchak $\triangle CSO_1$ uchburchakka o'xshash bo'lgani uchun ularning mos tomonlari proporsional bo'ladi:

$$\frac{O_1C}{OA}=\frac{O_1S}{OS}\rightarrow\frac{r}{6}=\frac{12-h}{12}\rightarrow$$

$$\rightarrow h=12-2r.$$



20- rasm.

Ekstremumi tekshiriladigan funksiya $V_s=\pi r^2(12-2r)$ ko'rinishni oladi. Bu funksiyaning r bo'yicha hosilasini topamiz:

$$V_s'=\pi(24r-6r^2)=6\pi r(4-r).$$

Bu hosilani nolga tenglab, hosil bo'lgan tenglamani r ga nisbatan yechib, $r_1=0$; $r_2=4$ kritik nuqtalarni topamiz.

Agar $r\in(0;\,4)$ bo'lsa, u holda $V_s'(r)>0$ bo'lib, $V_s(r)$ funksiya o'sadi; agar $r\in(4;\,+\infty)$ bo'lsa, u holda $V_s'(r)<0$ bo'lib, $V_s(r)$ funksiya kamayadi.

Demak, $r=4$ maksimum nuqta bo'ladi.

Shunday qilib, $r_{max}=4$, $h_{max}=12-2r_{max}=12-2\cdot4=4$ bo'lganda, berilgan konusga ichki chizilgan silindrning hajmi eng katta bo'ladi (20- rasm).

9. Funksiyani hosila yordamida to'la tekshirish va grafigini yasash

Nuqta usuli bilan funksiyani tekshirib, uning grafigini yasashda funksiyaning barcha xossalarini tekshirish imkoniyatiga ega emas edik. Hosila funksiyani tekshirishning kuchli analitik usulini yaratish imkoniyatini beradi. Funksiyani tekshirish ishini quyidagicha rejaga ko'ra olib borish mumkin:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasi oldindan ko'rsatilmagan bo'lsa, uning aniqlanish sohasini topish.
2. Funksiyaning juft va toqligini aniqlash.
3. Funksiyaning davriy va davriy emasligini aniqlash.
4. Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish.
5. Funksiyaning o'zgarmas ishorali oraliqlarini topish.

6. Funksiyaning monotonligini tekshirish.

7. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini topish va ekstremum qiymatlarini hisoblash.

8. Funksiya grafigining egilish nuqtalarini, qavariqlik va botiqlik oraliqlarini topish.

9. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.

10. Funksiya grafigini yasash.

Bu reja tekshiriladigan funksiya xossalariga va tekshirishning maqsadiga bog'liq bo'ladi. Berilgan funksiyani tekshirish davomida bu rejaning ba'zi bandlarini qo'shib yuborish mumkin. Funksiyaning berilishiga qarab, rejaning ba'zi bandlariga to'xtashning hojati bo'lmasligi mumkin. Masalan, funksiya davriy bo'lmasligi aniq bo'lsa, 3-bandni, agar funksiyaning aniqlanish sohasi $x=0$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lmasa, 2-bandga to'xtashning hojati bo'lmaydi.

1- m i s o l. $y=x^4-5x^2+4$ funksiyani tekshiring va grafigini yasang.

Y e c h i s h. 1. Berilgan funksiya haqiqiy sonlar to'plami R da aniqlangan. Uning grafigi vertikal asimptotaga ega bo'lmaydi.

2. Funksiyaning aniqlanish sohasi simmetrik sonlar to'plamidan iborat bo'lib, u juft funksiyadir:

$$y(-x)=(-x)^4-5(-x)^2+4=x^4-5x^2+4=y(x).$$

3. Funksiya davriy emas.

4. Funksiya grafigi Oy o'qni (0; 4) nuqtada kesadi. Ox o'qni kesadigan nuqtalari esa $x^4-5x^2+4=0$ tenglamaning ildizlaridan iborat bo'ladi. Bu tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$x^4-5x^2+4=0 \rightarrow (x^2-1)(x^2-4)=0 \rightarrow (x^2-1)(x-$$
$$-2)(x+2)=0 \rightarrow x_1=-2;\ x_2=-1;\ x_3=1;\ x_4=2.$$

Funksiya grafigi abssissalar o'qini (–2; 0), (–1; 0), (1; 0) va (2; 0) nuqtalarda kesadi.

5. Funksiya qiymatlarining o'zgarmas ishora oraliqlarini topamiz. Funksiyaning nollari uning aniqlanish sohasini 5 qismga ajratadi:

$$]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[;$$

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)(x+2)(x-1)(x-2).$$

Agar $x \in]-\infty; -2[$ bo'lsa, $f(x) > 0$;
agar $x \in]-2; -1[$ bo'lsa, $f(x) < 0$;
agar $x \in]-1; 1[$ bo'lsa, $f(x) > 0$;
agar $x \in]1; 2[$ bo'lsa, $f(x) < 0$;
agar $x \in]2; +\infty[$ bo'lsa, $f(x) > 0$.

$]-\infty; -2[$, $]-1; 1[$ va $]2; +\infty[$ oraliqlarda $f(x) > 0$. $]-2; -1[$ va $]1; 2[$ oraliqlarda $f(x) < 0$ bo'ladi. Funksiya grafigi gorizontal va og'ma asimptotalarga ega emas.

6. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini va qiymatlarini topamiz. $f'(x)$ hosilani topamiz va uni nolga tenglab, olingan tenglamani yechib, kritik nuqtalarni topamiz.

$$f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5) = 4x\left(x^2 - \frac{5}{2}\right) =$$

$$= 4x\left(x + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{5}{2}}\right);$$

$$4x\left(x + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 0 \to x_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Demak, $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right] \cup \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}; 0\right] \cup \left[0; \sqrt{\frac{5}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{5}{2}}; +\infty\right[$.

agar $x \in \left]-\infty; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right[$ bo'lsa, $f'(x) < 0$;

agar $x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{2}}; 0\right[$ bo'lsa, $f'(x) > 0$;

agar $x \in \left]0; +\sqrt{\frac{5}{2}}\right[$ bo'lsa, $f'(x) < 0$;

agar $x \in \left]+\sqrt{\frac{5}{2}}; +\infty\right[$ bo'lsa, $f'(x) > 0$.

$$x_{\min} = -\sqrt{\frac{5}{2}};\ x_{\min} = \sqrt{\frac{5}{2}};\ x_{\max} = 0;\ y_{\min} = y\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) =$$

$$= y\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = -\frac{9}{4} = -2,25;\ y_{\max} = y(0) = 4.$$

7. Funksiya grafigining egilish nuqtalarini, qavariqlik va botiqlik oraliqlarini topamiz. Buning uchun funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz. Bu hosilani nolga tenglab, olingan tenglamaning haqiqiy ildizlarini topamiz:

$$f''(x) = 12x^2 - 10 \to f''(x) = 12\left(x^2 - \frac{5}{6}\right) \to 12\left(x^2 - \frac{5}{6}\right) =$$

$$= 0 \to x^2 - \frac{5}{6} = 0 \to x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Demak, $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{5}{6}}\right[\cup \left]-\sqrt{\frac{5}{6}}; \sqrt{\frac{5}{6}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$.

Agar $x \in \left]-\infty; -\sqrt{\frac{5}{6}}\right[$ bo'lsa, $f''(x) > 0$;

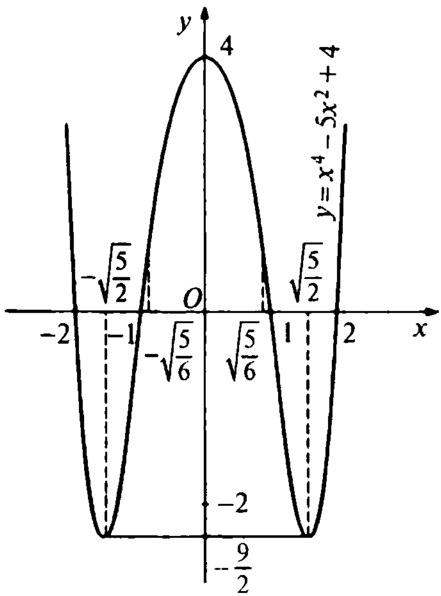
agar $x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{6}}; \sqrt{\frac{5}{6}}\right[$ bo'lsa, $f'(x) < 0$;

agar $x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$ bo'lsa, $f''(x) > 0$;

$\left]-\infty; -\sqrt{\frac{5}{6}}\right[$ va $\left]-\sqrt{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq, $\left]-\sqrt{\frac{5}{6}}; \sqrt{\frac{5}{6}}\right[$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq;

$x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$ egilish nuqtalarining abssissalari bo'ladi.

8. Tekshirish natijalaridan foydalanib, funksiya grafigini chizamiz (21- rasm).



21- rasm.

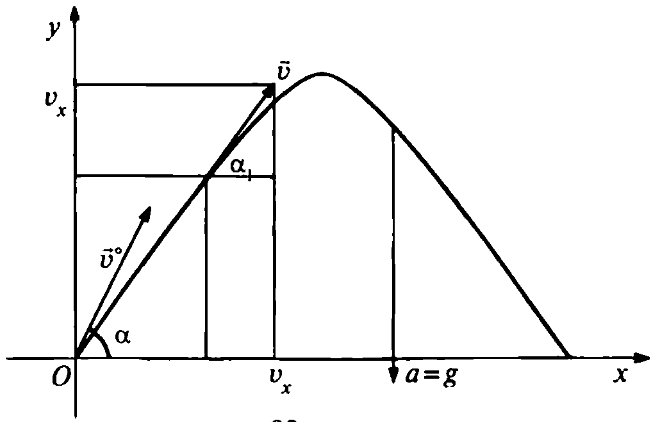
16-§. Hosilaning turli tatbiqlariga doir masalalar yechish

Mexanika va fizika, kimyo va biologiyada, umuman, tabiatshunoslikdagi turli amaliy masalalarni hosiladan foydalanib yechish mumkin.

Yuqorida eslatganimizdek, hosiladan foydalanib algebraik ifodalarni ayniy almashtirish, ko'paytuvchilarga ajratish, ayniyatlarni isbotlash, yig'indilarni hisoblash, tenglama va tengsizliklar va ularning sistemalarini yechish, sonli ifodalarning (funksiyalarning) qiymatlarini taqqoslash mumkin.

Bunday tatbiqlarning asosida oldingi bandlarda o'rganilgan qator tushunchalar va teoremalar yotadi.

1- m a s a l a . Snaryadning vertikal tekislikdagi harakati $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$ tenglamalar bilan ifodalanadi. Snaryadning vaqtning boshlang'ich paytdagi tezligi va



22- rasm.

tezlanishini toping ($g = 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, v_0 va α — berilgan sonlar). Agar $v_0 = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\alpha = 45°$ bo'lsa, harakat boshlangandan 1 sekunddan keyin snaryad tezligini toping.

Y e c h i s h . Snaryadning tezligini topamiz; buning uchun snaryad harakati tenglamalari bo'yicha tezlikning proyeksiyalarini topamiz: $x' = v_x = v_0 \cos\alpha$, $y' = v_y = v_0 \sin\alpha - gt$.

Tezlikning moduli va yo'nalishini topamiz:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}. \quad (1)$$

$$\cos(x,\hat{}\, v) = \cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos\alpha}{v}, \quad \cos(y,\hat{}\, v) = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v},$$

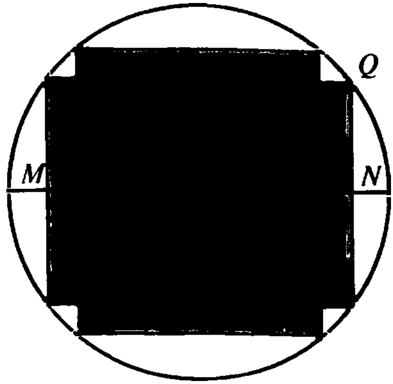
$t = 0$ bo'lganda $v = v_0$, $\cos(x,\hat{}\, v) = \cos\alpha$, $\cos(y,\hat{}\, v) = = \sin\alpha$.

Boshlang'ich paytdagi tezlik Ox o'qi bilan α burchak tashkil qiladi (22-rasm).

Tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz: $a_x = 0$; $a_y = -g$. Tezlanish moduli $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g$ ga teng.

Snaryad tezlanishi vertikal pastga yo'nalgan bo'ladi.

$t = 1$ s paytda tezlik vektorning moduli (1) formula bilan topiladi:



23- rasm.

$$v = \sqrt{400\frac{m^2}{s^2}\cdot\frac{1}{2} + \left(20\frac{m}{s}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 1\,s\right)^2} \approx 14{,}7\frac{m}{s}.$$

Tezlik vektori $\vec{v}$ ning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan α_1 burchagini topamiz:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos a} = \frac{20\frac{m}{s}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 1\,s}{20\frac{m}{s}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}3;\quad \alpha_1 = 17^\circ.$$

2- m a s a l a . O'zgaruvchan tok transformatorini loyihalashda g'altak ichida ko'ndalang kesim uchlaridan 4 ta kvadratcha kesib olingan kvadratdan iborat bo'lgan temir o'zak joylashtiriladi. Texnik nuqtayi nazardan bu o'zak ko'ndalang kesimining yuzi eng katta bo'lishi kerak. Agar g'altakning radiusi R bo'lsa, bu yuz eng katta bo'lishi uchun φ burchak qanday bo'lishi kerak?

Y e c h i s h . Temir o'zakning yuzini S orqali belgilab, chizmadan foydalanib topamiz (23- rasm):

$$S = (MN)^2 - 4(PQ)^2,$$

$$ON = R\cos\varphi,\quad NQ = R\sin\varphi,\quad MN = 2\cdot ON = 2R\cos\varphi;$$

$$PQ = ON - NQ = R(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

Natijada S yuz uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$S = 4R^2(\sin 2\varphi - \sin^2\varphi).$$

S ning φ bo'yicha birinchi hosilasini topamiz:

$$S' = 4R^2(2\cos 2\varphi - 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi).$$

S' hosilani 0 ga tenglab, olingan $\mathrm{tg}2\varphi = 2$ tenglamani yechib, $\varphi \approx 31°43'$ kritik nuqtani topamiz. φ ning bu topilgan qiymatida $S'' = -4R^2(4\sin 2\varphi + 2\cos 2\varphi) < 0$ bo'ladi. Ekstremumni topishning ikkinchi qoidasiga ko'ra $\varphi_{max} \approx 31°43'$ maksimum nuqtada S yuz eng katta bo'ladi: $S_{max} \approx 2{,}472R^2$.

3- m a s a l a . A va B nuqtalarda yorug'lik kuchlari F_1 va F_2 bo'lgan yorug'lik manbalari o'rnatilgan. A va B nuqtalar orasidagi masofa a ga teng. AB kesmada yoritilganlik eng kam bo'lgan M nuqtani toping.

Ko'rsatma. Yorug'lik manbayidan r masofada turgan nuqtadagi yoritilganlik r masofa kvadratiga teskari proporsional: $E = kF/r^2$, bunda F — yorug'lik kuchi, E — yoritilganlik.

Y e c h i s h . M nuqtadagi yoritilganlik $E = E_1 + E_2$ bo'ladi. M nuqtadagi yoritilganlikni topamiz:

$$E = \frac{kF_1}{x^2} + \frac{kF_2}{(a-x)^2}.$$

Bu funksiyaning ekstremumini tekshiramiz. Uning hosilasini topamiz: $E'_x = \dfrac{-2kF_1}{x^3} + \dfrac{kF_2}{(a-x)^2}.$

Bu hosilani nolga tenglab, olingan tenglamani yechib, kritik nuqtani topamiz:

$$\frac{-F_1}{x^3} + \frac{F_2}{(a-x)^3} = 0 \to \sqrt[3]{\frac{F_1}{F_2}} = \frac{x}{a-x} \to x = \frac{a\sqrt[3]{F_1}}{\sqrt[3]{F_1} + \sqrt[3]{F_2}}.$$

Topilgan nuqta atrofida hosilaning ishorasini tekshirsak, u topilgan nuqta orqali o'tayotganda ishorasini «–» dan

24- rasm.

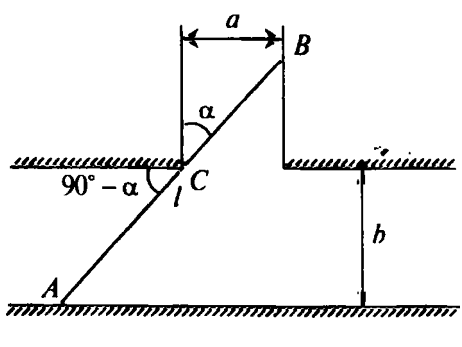
«+» ga o‘zgartirishini ko‘ramiz. Funksiya topilgan nuqtada eng kichik qiymatga ega bo‘ladi. Yoritilganligi eng kam bo‘lgan M nuqta yoritilganlik kuchi F_1 bo‘lgan manbadan $x = \dfrac{a\sqrt[3]{F_1}}{\sqrt[3]{F_1} + \sqrt[3]{F_2}}$ masofada joylashgan bo‘ladi (24- rasm).

4- m a s a l a . Kengligi a ga teng bo‘lgan kanal kengligi b ga teng bo‘lgan kanalga to‘g‘ri burchak ostida tutashadi. Kanalning devorlari yassi vertikal. Kanallarning birida suzib kelayotgan yog‘och xoda ikkinchi kanalga erkin suzib o‘tishi uchun uning eng katta uzunligi qanday bo'lishi kerak?

Y e c h i s h . 25- rasmda xoda suzishining bir holati — xoda uchlari kanal yoqlariga uringanligi tasvirlangan. Shuningdek, u C nuqtada ham urinadi. Xodaning uzunligi eng katta bo‘lganda u C nuqtada urinishi mumkin. Xodaning uzunligini topamiz:

$$d = AB = AC + CB = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha},$$

bu yerda α — xodaning kanal qirg‘oqlaridan biriga og‘ish burchagi. α burchak $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervalda o‘zgaradi. $d > 0$ bo‘lgani



25- rasm.

uchun d o‘zining eng kichik qiymatiga, uning kvadrati eng kichik qiymatga erishganda erishadi. d ning kvadratini topamiz.

$$d^2=\left(\frac{a}{\sin\alpha}+\frac{b}{\cos\alpha}\right)^2=(a+b\operatorname{tg}\alpha)^2\left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right).$$

Agar $\operatorname{tg}\alpha=x$ $(0<x<+\infty)$ desak, eng kichik qiymati izlanadigan funksiyani olamiz:

$$f(x)=(a+bx)^2(1+1/x^2),\quad 0<x<+\infty.$$

Bu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x)=\left((a+bx)^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)'=2b(a+bx)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+$$

$$+(a+bx)^2\left(-\frac{2x}{x^4}\right)=2(a+bx)\left[b\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{a+bx}{x^3}\right]=2(a+$$

$$+bx)\left(b-\frac{a}{x^3}\right).$$

Bu yerdan $x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ bo‘lganda $f'(x)=0$ bo‘lib, $x>\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ bo‘lganda $f'(x)>0$, $0<x<\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ bo‘lganda $f'(x)<0$ bo‘ladi, $f_{\min}=f\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)$. $\operatorname{tg}\alpha_0=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ bo‘lganda d^2 eng kichik qiymatga erishadi. $\alpha_0\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ bo‘lgani uchun

$$\sin\alpha_0=\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_0}},\ \cos\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_0}},\ \sin\alpha_0=\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}};$$

$$\cos\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}}=\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}.$$

Xodaning eng katta uzunligini d_0 desak, uzil-kesil

$d_0 = \frac{a}{\sin\alpha_0} + \frac{b}{\cos\alpha_0} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ natijaga ega bo‘lamiz.

5- misol. cos 1988 va 1 + cos 1989 sonlarni taqqoslang.

Yechish. Berilgan sonlarni taqqoslash uchun $f(x) = x + \cos x$ funksiyani qaraymiz $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ va $f'(x) = 0$ bo‘lganda $\sin x = 1$ bo‘ladi. Agar $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ bo‘lishini e’tiborga olsak, bunday holda $f(x)$ funksiya barcha haqiqiy sonlar to‘plamida o‘suvchi bo‘ladi. Shuning uchun $f(1988) < f(1989)$, ya’ni $\cos 1988 < 1 + \cos 1989$ bo‘ladi.

6- misol. *a*) $1000^{1001} > 1001^{1000}$; *b*) $e^{\pi} > \pi^{e}$; d) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} < (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$; *e*) $(\lg 5)^3 < 3^{\lg 5}$ tengsizliklarni isbotlang.

Yechish. Berilgan sonli tengsizliklarni isbotlash uchun $f(x) = \ln x / x (x > 0)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyaning hosilasini topamiz: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Bu hosila:

agar $0 < x < e$ bo‘lsa, $f'(x) > 0$;

agar $x = e$ bo‘lsa, $f'(x) = 0$;

agar $x > e$ bo‘lsa, $f'(x) < 0$.

Demak, $f(x)$ funksiya $]0; e[$ oraliqda o‘suvchi, $]e; +\infty[$ oraliqda kamayuvchi. Shunday qilib, agar $0 < x < y < e$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln y}{y} \rightarrow x^y < y^x.$$

Agar $e \leq x < y$ bo‘lsa, u holda $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln y}{y} \rightarrow x^y > y^x$.

a) $x = 1000$, $y = 1001$; $e < 1000 < 1001 \rightarrow 1000^{1001} > 1001^{1000}$;

b) $x = e$, $y = \pi$; $e = e < \pi \rightarrow e^{\pi} > \pi^{e}$;

d) $x=\sqrt{2};\ y=\sqrt{3};\ 0<\sqrt{2}<\sqrt{3}<e\rightarrow(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}<(\sqrt{3})^{\sqrt{2}};$

e) $x=\lg 5,\ \ y=3;\ \ 0<\lg 5<e<3\rightarrow(\lg 5)^3<3^{\lg 5}.$

Yuqorida isbotlangan tengsizlikdan foydalanib, $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\sin\frac{\pi}{3}}$ va $\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\sin\frac{\pi}{6}}$ sonlarning qaysi biri katta ekanligini ham aniqlash mumkin.

$0<\frac{\sin\pi}{6}<\frac{\sin\pi}{3}<e$ bo'lgani uchun $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\sin\frac{\pi}{3}}<$

$<\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\sin\frac{\pi}{6}}$ bo'ladi

7- misol. $\frac{1}{52}<\ln\frac{52}{51}<\frac{1}{51}$ tengsizlikni isbotlang.

Yechish. $[51;\ 52]$ kesmada $f(x)=\ln x$ funksiyani qaraymiz. Bu kesmada $\frac{f(52)-f(51)}{52-51}=\ln 52-\ln 51$ bo'ladi. Lagranj teoremasiga ko'ra $(51;\ 52)$ intervalda shunday α nuqta mavjudki, $51<\alpha<52$ bo'lib, $\ln 52-\ln 51=$ $=f'(\alpha)(52-51)=\frac{1}{\alpha}$ bo'ladi. $51<\alpha<52$ bo'lgani uchun $\frac{1}{52}<\ln 52-\ln 51<\frac{1}{52}$, ya'ni $\frac{1}{52}<\ln\frac{52}{51}<\frac{1}{51}$.

7- masala. Tunukadan v hajmli silindr shaklidagi chelak yasash talab qilindi. Chelak yasashga eng kam material ketishi uchun silindrning balandligi va asosining radiusi qanday bo'lishi kerak?

Yechish. Chelak asosining radiusi x bo'lsin. Chelak hajmini topamiz $v=\pi x^2h\rightarrow h=v/\pi x^2$.

Chelakning (qopqoqsiz) to'la sirti yuzini topamiz:

$$S=\pi x^2+2\pi xh.$$

Ekstremumi tekshiriladigan funksiyani hosil qilamiz:

$$S=\pi x^2+\frac{2v}{x}.$$

Bu funksiyaning eng kichik qiymatga ega bo'lish shartini aniqlaymiz:

$$S'(x) = 2\pi x - \frac{2v}{x^2}.$$

Hosilani nolga tenglab, olingan tenglamani yechamiz:

$$2\pi x - \frac{2v}{x^2} = 0 \to \pi x^3 - v = 0 \to x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}.$$

$S(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz:

$$S''(x) = 2\pi + \frac{4v}{x^3}.$$

Bu hosila $x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ bo'lganda musbat bo'ladi:

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}\right) = 2\pi + \frac{4v}{\frac{v}{\pi}} = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0.$$

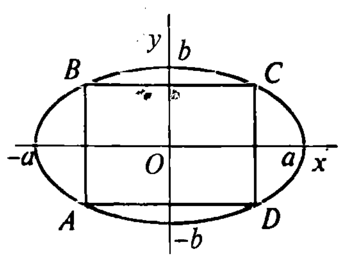
Demak, $S(x)$ funksiya $x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ nuqtada eng kichik qiymatga ega bo'lib, masalaning yechimini beradi:

$$h = \frac{v}{\pi x^2} = v : \pi\sqrt[3]{\frac{v^2}{\pi^2}} = \frac{v}{\pi} \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{v^2}} = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}} = x.$$

Shunday qilib, chelak yasashda eng kam material (tunuka) sarflanishi uchun uning o'lchamlari $x = r = h = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ bo'lishi kerak ekan.

9-masala. To'g'ri to'rtburchak o'qlari $2a$ va $2b$ bo'lgan ellipsga ichki chizilgan. Bu to'rtburchakning yuzi eng katta bo'lishi uchun uning o'lchamlari qanday bo'lishi kerak?

Yechish. Masala shartiga doir chizma chizamiz (26-rasm). To'g'ri to'rtburchakning o'lchamlari $AD = x$ va $AB = y$ bo'lsin.



26- rasm.

Ekstremumi tekshiriladigan funksiya to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi bo‘ladi:

$$S = xy.$$

Ellipsning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamasidan foydalanib, y ni x orqali ifodalaymiz: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Ekstremumi tekshiriladigan funksiya $S = \frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}$ ko‘rinishni oladi. Bu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$S'_x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{b}{a}\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Hosilani 0 ga tenglab, olingan tenglamani yechamiz (26-rasm):

$$\frac{b}{a}\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \to a^2 - 2x^2 = 0,\ x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ nuqtadan chapda va o‘ngda hosilaning ishorasini aniqlaymiz.

$x = \frac{a}{2}$ bo‘lganda:

$$S'_x = \frac{b}{a}\frac{a^2 - \frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{b}{a}\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{b}{\sqrt{3}} > 0;$$

$x = \frac{4}{3}a$ bo‘lganda:

$$S'_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 - \left(\frac{a}{16}\right)2a^2}{a\sqrt{a^2 - \frac{a}{16a^2}}} = \frac{b}{a}\frac{8a^2 - 9a^2}{8 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}a} = -\frac{4b}{2\sqrt{7}} < 0.$$

Hosila $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o‘tayotganda ishorasini «+» dan «–» ga o‘zgartiradi. Bu nuqtaga to‘g‘ri to‘rtburchakning eng katta yuzi mos keladi. Uning o‘lchamlari $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ va $y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$ bo‘ladi.

I BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

1. Quyidagi ketma-ketliklarning dastlabki oltita hadini yozing.

a) $a_n = \dfrac{n^3}{n+1}$; b) $a_n = \dfrac{3n^2-1}{n^2+1}$; d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3+4}$;

e) $a_n = \dfrac{n}{4^n}$; f) $a_n = 3^n + \dfrac{1}{2^n}$; g) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

h) $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{6^n}$; i) $a_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\cdot n^2}$.

2. a) 289; b) 361; d) 1000; e) 223 sonlar $a_n = n^2 + 2n + 1$ ketma-ketlikning hadlari bo'ladimi?

3. Quyidagi ketma-ketliklarning dastlabki beshta hadini toping.

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1$; b) $a_1 = 7,\ a_{n+1} = a_n - 3$;

d) $a_1 = -5,\ a_{n+1} = 2a_n$; e) $a_1 = \dfrac{1}{6},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n}$;

f) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$; g) $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

4. Quyidagi ketma-ketliklar umumiy hadi uchun formulalar toping.

a) $3\cdot 2;\ 5\cdot 2^2;\ 7\cdot 2^3;\ 9\cdot 2^4;\ 11\cdot 2^5;\ \ldots$

b) $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2^2};\ \dfrac{1}{2^3};\ \dfrac{1}{2^4};\ \dfrac{1}{2^5};\ldots$

d) $\dfrac{1}{1\cdot 2};\ \dfrac{1}{2\cdot 3};\ \dfrac{1}{3\cdot 4};\ \dfrac{1}{4\cdot 5};\ \dfrac{1}{5\cdot 6};\ldots$

e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2;\left(\dfrac{2}{5}\right)^2;\left(\dfrac{3}{7}\right)^2;\left(\dfrac{4}{9}\right)^2;\left(\dfrac{5}{11}\right)^2;\ldots$

f) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{3\sqrt{3}};\ \dfrac{1}{4\sqrt{4}};\ \dfrac{1}{5\sqrt{5}};\ldots$

5. Quyidagi ketma-ketliklarning qaysilari monoton, qaysilari monoton emas?

a) $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$; b) $a_n = \dfrac{n+4}{n}$;

d) $a_n = (-1)^n \cdot n - 6;$ e) $a_n = n^2 - 7n + 6;$

f) $a_n = 3n^2 + 5n + 6;$ g) $a_n = \frac{4-n^2}{n^2};$

h) $a_n = \frac{3n^2+2}{n^2};$ i) $a_n = \frac{(-1)^n}{n};$

j) $a_n = \frac{n^2+(-1)^n \cdot n}{n^2+1}.$

6. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysilari chegaralangan va qaysilari chegaralanmagan?

a) $a_n = \frac{1}{n};$ b) $a_n = \frac{n}{n-1};$

d) $a_n = (-1)^n \cdot n;$ e) $a_n = (-1)^n n^2;$

f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n};$ g) $a_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2};$

h) $a_n = \frac{2n}{3n+3};$ i) $a_n = \frac{n-5}{n^2};$

j) $a_n = 2^n;$ k) $a_n = 3^{-n};$

l) $a_n = n^n;$ m) $a_1 = 0$ va $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4};$

n) $a_1 = 0,\ a_2 = 1$ va $a_{n+1} = \frac{a_n+a_{n-1}}{2}.$

7. Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib, isbot qiling.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n} = 2;$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0;$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{4n+5} = \frac{1}{2};$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0;$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+6}{n+1} = 5.$

8. Quyidagi ketma-ketliklarning qaysilari yaqinlashuvchi, qaysilari uzoqlashuvchi?

a) $a_n = \frac{4n+2}{2n};$ b) $a_n = \frac{(-3)^n+2}{2};$

d) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$;

e) $a_n = 2^n - 1$;

f) $a = n^2 - 1$;

g) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$;

h) $a_n = \frac{8n-3}{13-7n}$;

i) $a_n = \frac{8(n^2-3n-4)}{3-n-4n^2}$.

9. Limitlarni toping.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{4n-8}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-n}{2n+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{1-4n^2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n-n^3}{(3n+1)^3}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1} \right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+5}{n^2+n-1}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} \right)$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

10. Quyidagi ketma-ketliklarning limiti mavjudligini tushuntiring.

1) $a_n = -\frac{1}{2^n}$; 2) $a_n = \frac{4}{4n-3}$;

3) $a_n = -\frac{n+1}{n^2+2}$; 4) $a_n = \frac{1}{3^n}$;

5) $a_n = \frac{1}{4^n}$; 6) $a_n = \frac{1}{n-(-1)^n}$;

7) $a_n = n - (-1)^{n+1}$; 8) $a_n = \frac{n!}{\ln n}$;

9) $a_n = \frac{1}{\sqrt{3n-1}}$;

10) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

11. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisini toping.

1) $2;\ \frac{4}{5};\ \frac{8}{25};\ \frac{16}{125};\ldots$ 2) $1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{64};\ldots$

3) $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{6};\ \frac{1}{18};\ -\frac{1}{54};\ldots$ 4) $-3;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{12};\ -\frac{1}{72};\ldots$

5) $a_2 = \frac{1}{4},\ q = \frac{3}{5}$; 6) $a_3 = -1,\ q = \frac{1}{7}$;

7) $a_2 = -2,\ q = -\frac{1}{2}$; 8) $a_3 = -\frac{1}{2},\ q = -\frac{1}{5}$.

12. Quyidagi davriy kasrlarni oddiy kasr ko'rinishida yozing.

1) 0,82(63); 2) 13,85(54);
3) 8,4(57); 4) −10,3(621);
5) −32,2(54); 6) 3,09(04);
7) 0,(036); 8) 4,6(3);
9) 10,4(6).

13. Funksiyaning nuqtadagi limiti ta'rifidan foydalanib, quyidagi tengliklarni isbotlang.

1) $\lim\limits_{x\to 4} 2x = 8$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(3-12x) = -3$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2) = 1$.

14. Limitlarni hisoblang.

1) $\lim\limits_{x\to4}(x^4-2x+5)$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2-11}{8x^2+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{12x^2+5}{4x^2+9}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x+7}{x^2-3x-5}$;

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-8}{3-x+10x^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-x}{4x+11}$;

13) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$;

15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$; 16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$;

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

19) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; 20) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$;

21) $\lim\limits_{z\to1}(1-z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2}$; 22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

23) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$; 24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

15. Quyidagi funksiyalarning uzluksizligini berilgan nuqtalarda tekshiring.

1) $f(x)=2x+1$; $x=1$, $x=-1$;

2) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x=0$; $x=-1$; $x=1$;

3) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ 1+x^2, & x>0. \end{cases}$ $x=-1;\ x=0;\ x=2;$

4) $f(x)=x-|x|,\ x=-4,\ x=0,\ x=3;$

5) $f(x)=\begin{cases} 2|x|, & |x|\le 1, \\ 1, & |x|>1, \end{cases}$ $x=-1;\ x=0;\ x=3.$

16. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ funksiya $x=5$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko'rsating.

17. Quyidagi funksiyalar ko'rsatilgan nuqtada qanday tur uzilishga ega?

1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x},\ x=0;$

2) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x},\ x=0;$

3) $f(x)=2^{\frac{1}{x}},\ x=0;$

4) $f(x)=\dfrac{5x^2-3x}{2x},\ x=0;$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x},\ x=0;$

6) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x},\ x=0.$

18. Quyidagi funksiyalarning uzluksizligini o'ngdan va chapdan tekshiring, uzilishning turini aniqlang.

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x};$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2};$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1};$

4) $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}};$

5) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\ne 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & 0\le x<1, \\ x^2+1, & x\ge 1; \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} x, & x\ge 1, \\ 1-x, & 0<x\le 1, \\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1; \end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ \operatorname{tg} x+1, & x>0; \end{cases}$ 9) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ x^3, & x>1. \end{cases}$

19. Quyidagi tenglamalar koʻrsatilgan kesmada yechimga egaligini isbotlang.

1) $x^3-3x+1=0, 1\le x\le 2$;

2) $x^5-6x^2+3x-7=0, \quad 0\le x\le 2$;

3) $3\sin^3 x-5\sin x+1=0, \quad 0\le x\le \frac{\pi}{2}$;

4) $8^x-3\cdot 2^x-16=0, \quad 0\le x\le 2$.

20. $f(x)=\frac{x^3}{4}-\sin \pi x+3$ funksiya $[-2; 3]$ kesmada $2\frac{1}{3}$ qiymatni qabul qiladimi?

21. Quyidagi tengsizliklarni yeching.

1) $x^4+8x^3+12x^2\ge 0$;

2) $(x^2-6x+8)(x^2+4x+4)<0$;

3) $\frac{x^2+4x-2}{9-x^2}<0$; 4) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$;

5) $\frac{7x-4}{x+2}>1$; 6) $\frac{x+1}{x-2}>\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2}$.

22. Hosilaning ta'rifidan foydalanib, y' ni toping. 1) $y=3x+2$; 2) $y=5x+7$; 3) $y=3x^2-5x$; 4) $y=-3x^2+2$.

23. Berilgan harakat qonuniga koʻra harakatning oniy tezligini toping. 1) $s(t)=2t+1$; 2) $s(t)=2-3t$; 3) $s(t)=0{,}25t+2$; 4) $s(t)=\frac{3}{2}t^2$.

24. Agar $y=f(x)=3x^2+x+1$ boʻlsa, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(-2)$ ni toping.

25. Funksiyalarning hosilalarini toping.

1) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+x^2$; 2) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$;

3) $y=(1-x)^2$; 4) $y=(x+\sqrt{x})^3$;

5) $y=2^x+3^x+4^{-x}+2^x\cdot 3^x$;

6) $y=\log_2 x+2\ \log_4 x-\ln x$;

7) $y=\sin x-3\cos x-\frac{1}{x}$; | 8) $y=3\ \operatorname{tg} x+0{,}1\operatorname{ctg} x$;

9) $y=\arcsin x-e^x\ \cos x$;

10) $y=\frac{x}{1+x^2}+2^{2x}+x^3\sin x$;

11) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$; 12) $y=\sqrt{x}\cdot\frac{2^{-x}}{\operatorname{arctg} x}$.

26. Funksiyalarning hosilalarini toping.

1) $y=\frac{(1+2x)^2}{\sqrt{x}}$; 2) $y=\left(x+\frac{1}{x}-2\sqrt{x}\right)^3$;

3) $y=\sin^2\frac{1}{x}+\cos x^2\frac{1}{x}$; 4) $y=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2\cdot e^{-x^2}$;

5) $y=\left(\ln\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+x^2}$;

6) $y=\log_x 2\cdot\log_x 3\cdot\log_x 4$;

7) $y=\arcsin x+\arccos x$;

8) $y=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$;

9) $y=2^{\log_2 x}+x^2+x$;

10) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; 11) $y=\operatorname{arctg}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

12) $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\ \ln\operatorname{tg} x$;

13) $y=\log_2\sqrt{\frac{2-2\sin 2x}{2+2\sin 2x}}$;

14) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

15) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$;

16) $y = e^x + e^{e^x} + e^{x^e}$;

17) $y = \frac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arctg} x^6$;

18) $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

19) $y = \ln^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + e^{-x^2} \cdot e^x$;

20) $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

21) $y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$;

22) $y = \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\arccos x + \frac{1}{2}x^2 \cdot \arcsin x$ bo'lsa, $y'\left(-\frac{1}{2}\right)$ va $y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ni toping;

23) $y = \ln\left(2^{x^2} + \sin x^2\right)$.

27. $y=f(x)$ funksiya grafigiga $x=x_0$ abssissali nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

1) $f(x) = x^2 - 2x, \quad x_0 = 0{,}5$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^4} + 2, \quad x_0 = 1$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad x_0 = 2$;

4) $f(x) = x\ln x, \quad x_0 = e$;

5) $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{3}\right), \; x_0 = \frac{\pi}{6}$.

28. $y=f(x)$ funksiya grafigiga berilgan M nuqta orqali o'tuvchi urinma tenglamasini tuzing.

$f(x) = -x^2 + 1, \quad M(1;\ 1)$;

$f(x) = x^3, \quad M(2;\ 4)$;

$f(x) = x^2 - x, \quad M(-1;\ -1)$;

4) $f(x)=\sqrt{x},\ x,\ M\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$;

5) $f(x)=\frac{1}{x},\ M(-1;\ 1)$.

29. $y=f(x)$ funksiya grafigida shunday nuqtalarni topingki, bu nuqtalarda funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinmalar berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsin.

1) $f(x)=x^3-3x^2+2,\ \ y=3x$;

2) $f(x)=x^2-7x+3{,}5x+y-3=0$;

3) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x,\ \ y=1-x$;

4) $f(x)=\ln(4x-1),\ \ y=x$;

5) $f(x)=\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 3x,\ \ y=-x$.

30. $y=f(x)$ funksiya grafigida shunday nuqtalarni topingki, bu nuqtalarda funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinmalar berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lsin.

1) $f(x)=x^3+2x-1,\ \ x+y=0$;

2) $f(x)=x^2+x+1,\ \ y+5=0$;

3) $f(x)=\sin x,\ \ x-10=0$;

4) $f(x)=\mathrm{tg}x,\ \ y+x=0$;

5) $f(x)=\ln x,\ \ 2y+x+1=0$.

31. $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa (1; 1) nuqtada urinuvchi $y=x^2+bx+c$ parabola tenglamasini toping.

32. $\left(\frac{1}{2};2\right)$ nuqtadan o‘tib, $y=-\frac{x^2}{2}+2$ parabola grafigiga urinuvchi va $(x-2)^2+y^2=1$ aylanani turli nuqtalarda kesuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

33. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{18}{5}x-x^2+\frac{14}{5}$ funksiya grafigida shunday nuqtalarni topingki, u nuqtalarda grafikka o‘tkazilgan urinmalar $5x-3y+2=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lsin.

34. $y = 3x^2 - 4x - 17$ parabolaga $x_0 = \frac{5}{2}$ abssissali nuqtada o‘tkazilgan urinma abssissalar o‘qi bilan qanday burchak tashkil qiladi?

35. $y = 3x^2 - 4x + 7$ funksiya grafigida shunday nuqtalarni topingki, u nuqtalardan egri chiziqqa o‘tkazilgan urinma Ox o‘qi bilan $\frac{\pi}{4}$ burchak tashkil qilsin.

36. $y = -\sqrt{2x^3}$ funksiya grafigining qanday nuqtasiga o‘tkazilgan urinma $4x - 3y + 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘ladi?

37. $f(x) = \sqrt{2x}$ va $f(x) = \frac{x^2}{2}$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalari orqali bu egri chiziqlarga o‘tkazilgan urinmalarning tenglamalarini toping.

38. $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3x + 5$ funksiya grafigiga abssissalari 0 va 1 bo‘lgan nuqtalar orqali o‘tkazilgan urinmalar orasidagi burchakni toping.

39. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{32}$ to‘g‘ri chiziq $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x$ funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma bo‘ladi. Urinish nuqtasining koordinatalarini toping.

40. Quyidagi funksiyalarning o‘sish va kamayish oraliqlarini toping.

1) $f(x) = 3x^{-4} - 8x^3 - 6x^2 + 1$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$;
3) $f(x) = -x^3 - x^2 - 7x - \pi\sqrt{3}$;
4) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$; 5) $f(x) = \frac{3x-5}{(x^2-1)^2}$;
6) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1}$; 7) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$;
8) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$; 9) $f(x) = xe^{-5x}$;
10) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$; 11) $f(x) = x^2 \ln x$;

12) $f(x)=\frac{e^{x^2}}{x}$; 13) $f(x)=x^2e^{-x}$;

14) $f(x)=(x-2)^3\sqrt[3]{x^2}$; 15) $f(x)=x-\sin 2x$;

16) $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$;

17) $f(x)=\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$; 18) $f(x)=x^x$;

19) $f(x)=x^2-\ln x^2$; 20) $f(x)=\frac{\pi}{2}x-x\,\mathrm{arctg}\,x$;

21) $f(x)=\mathrm{arctg}\,x-\ln x$;

22) $f(x)=\arccos\sqrt{1-4x^2}-2\sqrt{1-4x^2}$;

23) $f(x)=(x-1)e^{3x}$; 24) $f(x)=\frac{3-x^2}{x+2}$;

25) $f(x)=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$; 26) $f(x)=|x^2-5x+6|$.

41. Quyidagi funksiyalarni tekshiring va grafigini yasang.

1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$;

2) $f(x)=\frac{1}{x^2}$;

3) $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$;

4) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$;

5) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$;

6) $f(x)=\frac{x^4}{x^3-4}$;

7) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x^2}}$;

8) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$;

9) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}e^{-2x/3}$;

10) $f(x)=(x-6)e^{-1/x}$;

11) $f(x)=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$;

12) $f(x)=x^2\ln^2 x$;

13) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$;

14) $f(x)=\frac{\lg^{\frac{2}{3}} x}{x}$;

15) $f(x)=2x+4\,\mathrm{arcctg}\,x$;

16) $f(x)=3x-x^3$;

17) $y=-\frac{1}{2}\log_2(2x-5)+3$;

18) $y=\sin x+\cos x$;

19) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$;

20) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$;

21) $y = \frac{1-\ln x}{x}$;

22) $y = \frac{3x+2}{4x+3}$;

23) $y = e^{-x^2}$;

24) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$;

25) $y = \frac{x}{x^2-1}$;

26) $y = \frac{x^2}{-1+x^2}$;

27) $y = \frac{\ln x}{x}$;

28) $y = \frac{x^2}{4-x^2}$;

29) $y = \frac{2x^2+3x+5}{x(x-4)}$;

30) $y = \frac{x^2}{1+x}$;

31) $y = \frac{x^2+2}{x^2+1}$;

32) $y = \frac{x^3}{2x^2+1}$;

33) $y = \frac{3x-2}{2x+1}$;

34) $y = x^2 + 1 - \frac{x^4}{2}$;

35) $y = (x+1)(x-2)^2$;

36) $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$;

37) $y = \frac{1-x^3}{x^2}$;

38) $y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$;

39) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$;

40) $y = \sqrt{x}(1-x)$.

42. Quyidagi funksiyalarning berilgan kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2, \quad x \in [-2;\ 2]$;

2) $f(x) = x/8 + 2/x, \quad x \in [1;\ 6]$;

3) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}, \quad x \in [-3;\ 3]$;

4) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+3}, \quad x \in]-\infty; -\infty[$;

5) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}},\ x\in\left[\dfrac{3}{2};\,3\right];$

6) $f(x)=2^{\sqrt[3]{x^2}},\ x\in[-8;\,-1];$

7) $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2-2x+3},\ x\in[0;\,3];$

8) $f(x)=x^3-x,\ x\in[0;\ 4];$

9) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x,\ x\in[0;\,2];$

10) $f(x)=x^4-8x^2-9,\ x\in[-1;\,3];$

11) $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1,\ x\in\lfloor 0;\,2\rfloor;$

12) $f(x)=x-\ln x,\ x\in[1;\ e];$

13) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4},\ x\in[-4;\,0];$

14) $f(x)=2\ln^3x-9\ln^2x+12\ln x,\ x\in[e^{3/4};\ e^3];$

15) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{\ln 2},\ x\in[-1;\,2];$

16) $f(x)=|x^3+6x^2+9x+1|,\ x\in[-3;\,1];$

17) $y=3^{x^2+2x-1},\ x\in[-2;\,0];$

18) $y=\frac{1}{2}x\ln x-x\ln 2,\ x\in[1;\,4];$

19) $y=x\ln x-x\ln 5,\ x\in[1;\,5];$

43. Tunukadan V hajmli qopqoqsiz silindr shaklidagi chelak yasash talab qilinadi. Chelak yasashda eng kam material ketishi uchun silindrning balandligi va asosi radiusi qanday bo‘lishi kerak?

J: $r=h=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}.$

44. Silindrning to‘la sirti S ga teng bo‘lsa, silindr hajmining eng katta qiymatini toping.

J: $V=\sqrt{\dfrac{2S^3}{27\pi}}.$

45. To‘g‘ri to‘rtburchak o‘qlari $2a$ va $2b$ bo‘lgan ellipsga ichki chizilgan. Bu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi eng katta bo‘lishi uchun uning o‘lchamlari qanday bo‘lishi kerak?

J: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

46. R radiusli sharga ichki chizilgan silindrning hajmi eng katta bo‘lishi uchun uning balandligi va asosining radiusi qanday bo‘lishi kerak?

J: $r = R\sqrt{2/3}$, $h = R\sqrt{4/3}$.

47. R radiusli sharga tashqi chizilgan konusning hajmi eng kichik bo‘lishi uchun uning balandligi va asosining radiusi qanday bo‘lishi kerak?

J: $r = R\sqrt{2}$; $h = 4R$.

48. O‘lchamlari qanday bo‘lganda V hajmli silindrik bankaning to‘la sirti eng kichik bo‘ladi?

J: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

49. Deraza to‘g‘ri to‘rtburchak va yarimdoiradan iborat. Uning perimetri p ga teng. Derazaning o‘lchamlari qanday bo‘lganda u eng ko‘p miqdordagi yorug‘likni o‘tkaza oladi?

J: $x = \frac{2p}{4+\pi}$, $y = \frac{p}{4+\pi}$.

50. Berilgan sharga tashqi chizilgan konusning yon sirti yuzi eng kichik bo‘lishi uchun o‘q kesimi uchidagi burchak qanday bo‘lishi kerak?

J: $a = 2\arcsin(\sqrt{2} - 1)$.

51. Lampochkaning vertikal proyeksiyasidan l masofada turgan M nuqtada yoritilganlik eng katta bo‘lishi uchun lampochkani qanday balandlikda o‘rnatish kerak? (E yoritilganlik $E = c\frac{\cos\varphi}{r^2}$ formula bo‘yicha topiladi, bunda

r — manbadan M nuqtagacha bo'lgan masofa, φ — nurning tushish burchagi; c — proporsionallik koeffitsiyenti.)

J: $h = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

52. Berilgan konusga hajmi eng katta silindrni ichki chizing. *J:* $V_s = \frac{4}{27}\pi h a^2$ (a — konusning radiusi, h — konusning balandligi).

53. Yuzi S ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan perimetri eng kichik bo'lganini toping.

J: $a = b = \sqrt{S}$.

54. Parallelogramm diagonallari uzunliklari yig'indisi 8 ga teng. Parallelogramm barcha tomonlari uzunliklari kvadratlari yig'indisining minimum qiymatini toping.

J: 32.

55. Uchburchak ikki tomonining yig'indisi a ga, ular orasidagi burchak 30° ga teng. Uchburchakning yuzi eng katta bo'lishi uchun uning tomonlari uzunliklari qanday bo'lishi kerak?

J: $\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

56. Teng yonli trapetsiyaning kichik asosi va yon tomoni a ga teng. Trapetsiyaning yuzi eng katta bo'lishi uchun uning katta asosi qanday bo'lishi kerak?

J: $b = 2a$.

57. Yasovchisi uzunligi l ga teng bo'lgan hajmi eng katta konusning balandligini toping.

J: $h = \frac{\sqrt{3}}{3}l$.

58. Muntazam oltiburchakli prizma barcha qirralari uzunliklari yig'indisi 36 ga teng. Prizma hajmi eng katta bo'lishi uchun uning asosi tomoni uzunligi qanday bo'ladi?

J: $a = 2$.

59. x ning qanday qiymatida

$f(x) = |x-1| + |x-2| + ... + |x-1986|$ funksiya eng kichik qiymatni qabul qiladi?

J: 993,5.

60. Markaziy burchagi a ga, radiusi R ga teng bo‘lgan sektorga eng katta yuzli to‘g‘ri to‘rtburchak ichki chizilgan. Bu yuzning qiymatini toping.

J: $R^2 \operatorname{tg} = \frac{\alpha}{2}$.

61. Quyidagi funksiyalarning grafiklari qavariq va botiq bo‘lgan oraliqlarini toping.

1) $f(x) = x + 1/2x$;	2) $f(x) = (1+2x^2)e^x$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{x}(1+x)$;	4) $f(x) = \frac{\|x\|}{1+x}$;
5) $f(x) = 2x^3 - x^2$;	6) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$;
7) $f(x) = x^2 \ln x$;	8) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$;
9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$;	10) $f(x) = 2 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;
11) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;	12) $f(x) = x / \ln x$.

62. a ning $x^3 - ax + 1 = 0$ tenglama yagona yechimga ega bo‘ladigan barcha qiymatlarini toping.

J: $a \in]-\infty;\ 3/\sqrt[3]{4}[$.

63. a ning har bir qiymatida $y = \frac{1}{x} - \frac{a^2}{6-x}$ funksiyaning $[2;\ 3]$ kesmadagi eng kichik qiymatini toping.

64. a ning $y = 2x^5 + 5ax^4 + 10x^3$ funksiya hamma vaqt o‘suvchi bo‘ladigan barcha qiymatlarini toping.

J: $a \in \left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$.

II BOB. TRIGONOMETRIYA

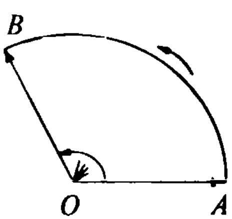
1- §. IX sinfda o‘tilganlarni takrorlash

1. Burchak va yoy tushunchalarini umumlashtirish

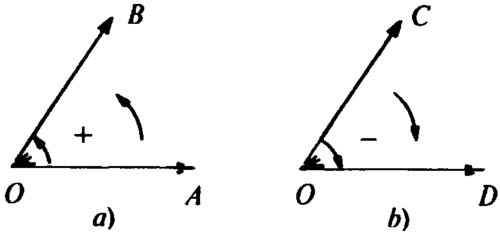
Yo‘nalgan kesmaning boshlang‘ich va oxirgi nuqtalari farqlanganligi singari burchak va aylana yoyi tushunchalarini umumlashtirishda ham burchakning hamda yoyning boshlang‘ich va oxirgi (tomonlari) nuqtalari farqlanadi. Ko‘pincha, aylanalarning yoylari *doiraviy yoylar* deb ham yuritiladi.

Tekislikda $\overrightarrow{OA}$ nurning dastlabki holatini belgilaymiz va uni burchakning boshlang‘ich tomoni deb, A nuqtani esa yoyning boshlang‘ich nuqtasi deb ataymiz. Bu nurni O nuqta atrofida biror $\overrightarrow{OB}$ holatni egallaguncha aylantiramiz. Natijada A nuqta AB doiraviy yoyni chizadi. Aylanuvchi nurning oxirgi $\overrightarrow{OB}$ holatini burchakning so‘nggi tomoni, B nuqtani esa $\overrightarrow{AB}$ yoyning oxirgi nuqtasi deymiz. Nuqtaning ko‘rsatilgan yo‘nalishda aylanma harakatidan hosil bo‘lgan shakl umumlashgan doiraviy yoy deb ataladi. A nuqta umumlashgan doiraviy yoyning *boshlang‘ich* nuqtasi, B nuqta esa uning *oxirgi* nuqtasi bo‘ladi. Umumlashgan doiraviy yoy ikkita nuqta bilan belgilanadi va birinchi o‘rinda uning boshlang‘ich nuqtasi turadi va $\overset{\smile}{AB}$ yoki $\smile AB$ ko‘rinishda belgilanadi (27-rasm). $\overset{\smile}{AB}$ va $\overset{\smile}{BA}$ yoylar har xil bo‘lib, ularning yo‘nalishlari qarama-qarshidir.

Burchakning *uchi* deb ataluvchi nuqtadan chiquvchi ikkita nurdan tashkil topgan yassi shakl *umumlashgan burchak* deyiladi. Bunda bu nurlardan qaysisini birinchi (burchakning boshlang‘ich tomoni) va bu nurni ikkinchi nur bilan (burchakning so‘nggi tomoni) ustma-ust tushguncha qanday yo‘nalishda aylantirish ham ko‘rsatilgan bo‘lishi kerak.



27- rasm.



28- rasm.

Tekislikda soat miliga qarshi yo‘nalish musbat yo‘nalish, soat mili bo‘yicha bo‘lgan yo‘nalish manfiy yo‘nalish deb qabul qilinadi (28- *a*, *b* rasm).

2. Burchaklar va yoylarning radian o‘lchovi. Gradus va radian o‘lchovlar orasidagi munosabatlar

Burchaklar va doiraviy yoylarni o‘lchash uchun o‘lchov birliklari tanlanadi va qabul qilinadi. Bu o‘lchov birliklari yordamida boshqa burchaklar (yoylar) o‘lchanadi.

Burchaklar va yoylarni o‘lchashning turli o‘lchov birliklari mavjud: d — to‘g‘ri burchak, gradus, minut, sekund.

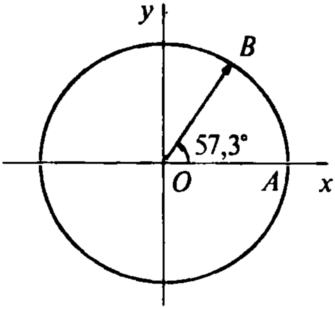
Bu o‘lchov birliklari orasidagi bog‘lanishlar quyidagicha: $d=90°$; $1°=60'$; $1'=60''$; $1°=\frac{1}{90}d$; $1'=\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$; $1''=\left(\frac{1}{60}\right)'$. Aylana uzunligining $\frac{1}{360}$ qismiga teng bo‘lgan doiraviy yoy *bir gradusli yoy* deyiladi.

Bir gradusli yoyga tiraluvchi markaziy burchak *bir gradusli burchak* deyiladi.

Fizika, matematika, astronomiya, elektrotexnika va tabiatshunoslikning boshqa sohalarida, texnikada burchaklarni o‘lchashning radian deb ataluvchi o‘lchov birligi keng qo‘llaniladi.

Uzunligi aylana radiusiga teng bo‘lgan doiraviy yoyga tiralgan markaziy burchak *bir radian burchak* deyiladi.

1 radian burchak (yoy) 1 rad ko‘rinishda yoziladi. 1 rad burchakning gradus o‘lchovini topaylik. Uzunligi πR (yarimaylana) bo‘lgan yoy 180° li markaziy



29- rasm.

burchakni tortib turgani uchun uzunligi R bo'lgan yoy π marta kichik bo'lgan burchakni tortib turadi, ya'ni

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57^{\circ}17'45'' \approx$$

$$\approx 57{,}3^{\circ}. \; |OA| = R = |\overset{\smile}{AB}|;$$

$$\angle BOA = 1 \text{ rad}.$$

Burchaklarning va doiraviy yoylarning burchak va radian o'lchov birliklari aylananing radiusiga bog'liq bo'lmasdan, faqat markaziy burchakning miqdoriga bog'liq bo'ladi (29-rasm).

To'liq aylanish burchagi, ya'ni R radiusli aylana uzunligiga 360° burchak mos keladi yoki $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ rad burchak mos keladi. Doiraviy yoylar va burchaklarni radian bilan o'lchaganimizda «radian» so'zi yozilmaydi. Masalan, to'g'ri burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng deyilsa, bunday burchak $\frac{\pi}{2}$ rad ga teng deb tushuniladi.

Shunday qilib, 360° ga 2π rad mos kelar ekan. Bu moslikdan foydalanib, yoy va burchakning gradus o'lchovidan radian o'lchoviga va aksincha o'tish formulalarini hosil qilish mumkin:

$$\alpha^{\circ} = \frac{180^{\circ}\alpha}{\pi}, \tag{1}$$

$$\alpha = \frac{\alpha^{\circ}\cdot\pi}{180^{\circ}}. \tag{2}$$

Quyida ko'proq uchrab turadigan burchaklarning gradus va radian o'lchovlari jadval shaklida keltirilgan:

Graduslar	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Radianlar	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
Graduslar	120°	135°	150°	180°	270°	360°	
Radianlar	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	

3. Ixtiyoriy doiraviy yoylar va burchaklar

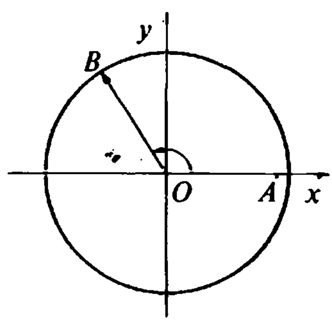
Agar nur tekislikda O nuqta atrofida musbat yo'nalishda aylansa, u holda nurning oxirgi A nuqtasi chizgan AB yoy va unga mos keluvchi AOB burchak musbat, nurning manfiy yo'nalishi bo'yicha aylanishidan hosil bo'lgan CD yoy va COD burchak manfiy bo'ladi (28- *a, b* rasmlar).

Doiraviy yoy (burchak) doiraviy yoyning (burchakning) absolut qiymatiga teng bo'lgan haqiqiy son bilan ifodalanadi. Agar yoy (burchak) musbat bo'lsa, bu haqiqiy son musbat ishora bilan, agar yoy (burchak) manfiy bo'lsa, bu son manfiy ishora bilan olinadi. Agar yoyning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari (burchakning boshlang'ich va oxirgi tomonlari) ustma-ust tushsa, u holda hech qanday aylanma harakat sodir bo'lmaydi, bunday holda yoyning (burchakning) miqdori nolga teng bo'ladi.

Agar gorizontal Ox yarimo'qni $\angle AOB$ ning boshlang'ich tomoni, qo'zgaluvchan $\overrightarrow{OB}$ vektorni esa so'nggi tomoni desak, u holda $\overrightarrow{OB}$ vektor tekislikda koordinata boshi atrofida aylanib, istalgan kattalikdagi burchakni, uning oxirgi B nuqtasi esa istalgan kattalikdagi yoyni chizadi (30- rasm).

$\overrightarrow{OB}$ vektorning holati $\angle AOB$ ning va AB yoyning qiymatini bir qiymatli aniqlay olmaydi. Chunki $\overrightarrow{OB}$ vektor O nuqta atrofida musbat yo'nalishda aylanib, to'liq aylanish qilmagan bo'lsa, u holda $\angle AOB = \alpha°$, bunda $0° < \alpha < 360°$ bo'ladi.

Agar $\overrightarrow{OB}$ vektor 5 ta to'liq aylanish qilib, yana α burchakka burilgan bo'lsa, u holda $\angle AOB = \alpha° + 360° \cdot 5 = \alpha° + 1800°$ bo'ladi.



30- rasm.

Agar aylanishlar soni haqida biror nima aytilmagan bo'lsa, u holda $\angle AOB = \alpha^\circ + 360^\circ n$ yoki $\angle AOB = \alpha + 2\pi n$ kabi yozamiz, bunda n — istalgan butun son: 0; ±1; ±2; ±3; ±4; ±5; ±6; ...

Shunday qilib, umumlashgan doiraviy yoy va umumlashgan burchak to'liq aylanishlarning ixtiyoriy butun songacha bo'lgan aniqligida berilar ekan.

Bir qancha (musbat yoki manfiy) burchaklarning yig'indisini topish uchun birinchi burchakning oxirgi tomoni ikkinchi burchakning boshlang'ich tomoni, ikkinchi burchakning oxirgi tomoni uchinchi burchakning boshlang'ich tomoni bilan ustma-ust va hokazo tushadigan qilib umumiy uchga keltirish kerak. Bunday qilinganda berilgan burchaklar yig'indisidan hosil bo'lgan burchakning boshlang'ich tomoni birinchi burchakning boshlang'ich tomoni bilan, so'nggi tomoni esa oxirgi burchakning oxirgi tomoni bilan ustma-ust tushadi.

Agar qo'shiluvchi burchaklar bir qiymatli aniqlangan bo'lsa, ya'ni qo'shiluvchi burchaklarning aylanishlar soni ko'rsatilgan bo'lsa, u holda ularning yig'indisi ham bir qiymatli aniqlanadi.

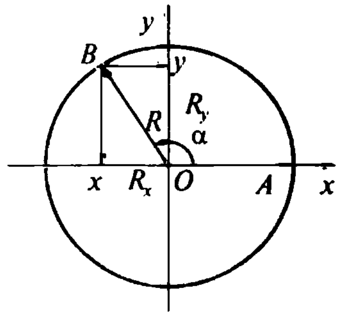
Shuningdek, bir xil radiusli doiraviy yoylarning ham algebraik yig'indisi topiladi.

Agar qo'shiluvchilar bir qiymatli berilgan bo'lsa, u holda doiraviy yoylarning va burchaklarning algebraik yig'indisi mavjud va bir qiymatli bo'lib, o'rin almashtirish va guruhlash xossalariga ega bo'ladi.

4. Ixtiyoriy burchakning trigonometrik funksiyalari

Tekislikda xOy to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistemaning Ox musbat o'qi ustida A nuqtani olaylik. Bu nuqtaning radius-vektori $\overrightarrow{OA}$ bo'lsin. $\overrightarrow{OA}$ radius-vektorni Ox o'qni koordinatalar boshi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan burchakning boshlang'ich tomoni, A nuqtani esa aylanishdan hosil bo'lgan yoyning boshlang'ich nuqtasi deb hisoblaymiz.

$\overrightarrow{OB}$ radius-vektor (qo'zg'aluvchan radius-vektor) esa $\overrightarrow{OB}$ aylanuvchi radius-vektorning so'nggi holati va $\angle AOB = \alpha$ ($\breve{AB} = \alpha$) bo'lsin (31-rasm). B nuqtaning koordinatalarini x va y orqali belgilaylik, ya'ni $B(x; y)$ bo'lsin. $\overrightarrow{OB}$ radius-vektorning uzunligini R orqali belgilaylik. Berilgan α burchak uchun $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{R}$, $\frac{y}{x}$ va $\frac{x}{y}$ nisbatlar R radiusning uzunligiga bog'liq bo'lmasligi va faqat $\angle AOB = \alpha$ burchakning miqdoriga bog'liq bo'lishini ko'rsatish mumkin. Shuning uchun bu nisbatlarni α ixtiyoriy burchakning funksiyalari deb qarash mumkin (31- rasm).



31- rasm.

$\overrightarrow{OB}$ qo'zg'aluvchan radius-vektorning Ox yarimo'q bilan tashkil qilgan α burchakning *sinusi* deb qo'zg'aluvchan radius-vektor so'nggi nuqtasi ordinatasining uning uzunligiga bo'lgan nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$\sin \alpha = \frac{y}{R}. \tag{3}$$

$\overrightarrow{OB}$ qo'zg'aluvchan radius-vektorning Ox yarimo'q bilan tashkil qilgan α burchakning *kosinusi* deb qo'zg'aluvchan radius-vektor so'nggi nuqtasi abssissasining uning uzunligiga bo'lgan nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}. \tag{4}$$

$\overrightarrow{OB}$ qo'zg'aluvchan radius-vektorning Ox yarimo'q bilan tashkil qilgan α burchakning *tangensi* deb qo'zg'aluvchan radius-vektor so'nggi nuqtasi ordinatasining abssissasiga bo'lgan nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}. \tag{5}$$

$\overrightarrow{OB}$ qo'zg'aluvchan radius-vektorning Ox yarimo'q bilan tashkil qilgan α burchakning *kotangensi* deb qo'zg'aluvchan radius-vektor so'nggi nuqtasi abssissasining ordinatasiga bo'lgan nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}. \tag{6}$$

Shuni ta'kidlash mumkinki, nuqta radius-vektorining koordinatalar o'qlaridagi proyeksiyalari shu nuqtaning mos koordinatalariga teng bo'ladi, ya'ni agar $\text{пр}_{Ox} \overrightarrow{OB} = R_x$, $\text{пр}_{Oy} \overrightarrow{OB} = R_y$ desak, u holda $R_x = x$, $R_y = y$ bo'ladi.

Shunday ekan, ixtiyoriy burchakning trigonometrik funksiyalarini $\frac{R_y}{R}$, $\frac{R_x}{R}$, $\frac{R_y}{R_x}$, $\frac{R_x}{R_y}$ nisbatlar bilan ham aniqlash mumkin:

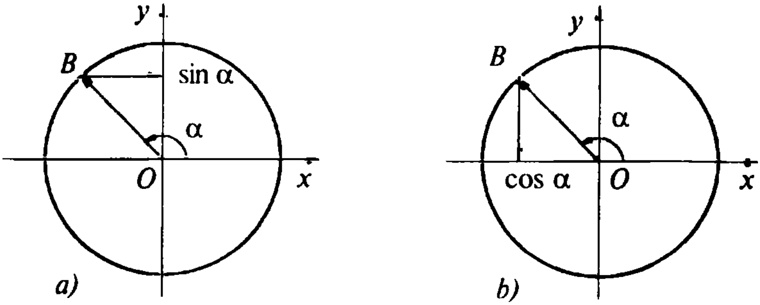
$$\sin \alpha = \frac{R_y}{R}, \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{R_x}{R_y}. \tag{7}$$

Shuningdek, trigonometrik funksiyalarni ta'riflashning boshqa usullari ham mavjud.

$\overrightarrow{OB}$ vektor Ox yarimo'q bilan tashkil qilgan burchak to'liq aylantirishlar orqali butun songacha aniqlikda ifodalanadi, ya'ni $\angle AOB = \alpha + 360° n$, bunda α — $\overrightarrow{OB}$ vektorning Ox yarimo'q bilan tashkil qilgan burchakning gradus o'lchovi, n esa butun son. Bunday burchaklar uchun B nuqtaning koordinatalari o'zgarmasdan qoladi. Bunday holda quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 360° n) &= \sin \alpha, \\ \cos(\alpha + 360° n) &= \cos \alpha, \\ \operatorname{tg}(\alpha + 360° n) &= \operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{ctg}(\alpha + 360° n) &= \operatorname{ctg} \alpha, \end{aligned} \tag{8}$$

bunda $n \in Z$.



32- rasm.

Trigonometrik funksiyalarning qiymatlari $\overrightarrow{OB}$ qo‘zg‘aluvchan vektorning uzunligiga bog‘liq bo‘lmaydi, shunday ekan qulaylik uchun uning uzunligini 1 ga teng, ya’ni $R = 1$ deb olish mumkin. Bunday hol uchun $\overrightarrow{OB}$ radius-vektorning so‘nggi B nuqtasi chizgan aylanani birlik aylana deb ataymiz. Bunday holda trigonometrik funksiyalarning ta’riflari quyidagicha aniqlanadi.

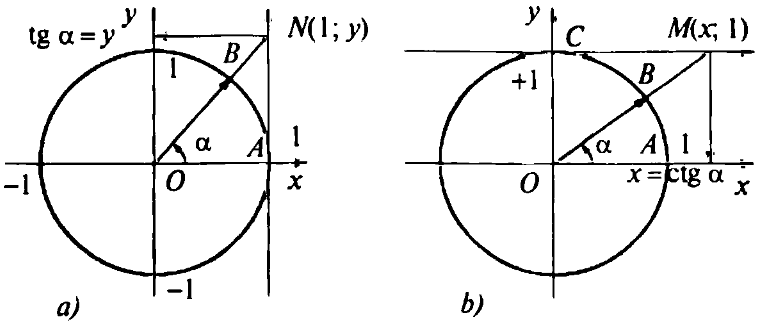
$\overrightarrow{OB}$ qo‘zg‘aluvchan radius-vektorning Ox yarimmusbat o‘q bilan tashkil qilgan burchakning sinusi $\overrightarrow{OB}$ radius-vektorning birlik aylanada yotgan so‘nggi B nuqtasining ordinatasiga teng (32- *a* rasm), ya’ni

$$\sin\alpha = y\,(-1 \le y \le 1). \qquad (9)$$

$\overrightarrow{OB}$ qo‘zg‘aluvchan radius-vektorning Ox yarimmusbat o‘q bilan tashkil qilgan burchakning kosinusi $\overrightarrow{OB}$ radius-vektorning birlik aylanada yotgan so‘nggi B nuqtasining abssissasiga teng (32- *b* rasm), ya’ni

$$\cos\alpha = x\,(-1 \le y \le 1). \qquad (10)$$

Birlik aylanaga u bilan Ox musbat yarimo‘qning kesishadigan nuqtasida urinadigan va ordinatalar o‘qining yo‘nalishi bilan bir xil bo‘lgan o‘q *tangenslar o‘qi* deyiladi (33- *a* rasm).



33- rasm.

α burchakning tangensi Ox musbat yarimo'q bilan α burchak tashkil qiluvchi $\overrightarrow{OB}$ qo'zg'aluvchan radius-vektor bilan ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziq bilan tangenslar o'qi kesishadigan nuqtaning ordinatasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\operatorname{tg}\alpha = y, \quad \left(|AN| = y, \ -\infty < y < +\infty\right). \qquad (11)$$

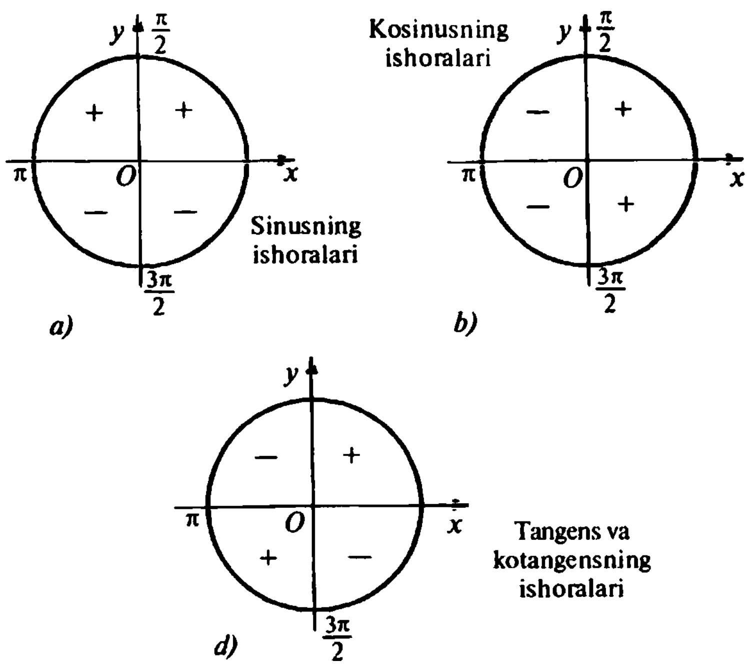
Birlik aylanaga u bilan Oy musbat yarimo'qning kesishadigan nuqtasida urinadigan va abssissalar o'qining yo'nalishi bilan bir xil bo'lgan o'q *kotangenslar o'qi* deyiladi (33- *b* rasm).

α burchakning kotangensi Ox musbat yarimo'q bilan α burchak tashkil qiluvchi $\overrightarrow{OB}$ qo'zg'aluvchan radius-vektor bilan ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziq bilan kotangenslar o'qi kesishadigan nuqtaning abssissasiga teng, ya'ni

$$x = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \left(|CM| = x, \ -\infty < x < +\infty\right). \qquad (12)$$

5. Trigonometrik funksiyalarning ishoralari

B (*x*; *y*) berilgan ixtiyoriy nuqta, $\overrightarrow{OB}$ esa bu nuqtaning radius-vektori bo'lsin. (3) — (6) yoki (9) — (12) formulalar yordamida trigonometrik funksiyalarning ishoralarini aniqlash mumkin. Agar *B* nuqta birlik aylana ustida yotsa, u holda ta'rifga ko'ra cos α nuqtaning abssissasiga, sin α



34- rasm.

esa nuqtaning ordinatasiga teng bo‘ladi. Shuning uchun *B* nuqta koordinatalar tekisligining 1- choragida yotsa, u holda cos α, sin α, tg α va ctg α musbat, agar *B* nuqta 2- chorakda yotsa, u holda sin α musbat, cos α, tg α, ctg α manfiy, *B* nuqta 3-chorakda yotsa, u holda sin α, cos α manfiy, tg α va ctg α musbat, *B* nuqta 4- chorakda yotsa u holda cos α musbat, qolgan (sin α, tg α, ctg α) funksiyalar manfiy bo‘ladi. 34-rasmda trigonometrik funksiyalarning ishoralari ko‘rsatilgan.

6. Trigonometrik funksiyalar orasidagi asosiy munosabatlar

Ushbu

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \tag{13}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right); \tag{14}$$

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(\alpha \neq n\pi), n \in Z \qquad (15)$$

munosabatlar *asosiy trigonometrik ayniyatlar* deyiladi. Trigonometrik ayniyatlar shunday tengliklarki, ular tarkibiga kirgan trigonometrik funksiyalar argumentlarining mumkin bo'lgan barcha ixtiyoriy qiymatlarida o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi uchta asosiy ayniyatlardan foydalanib, quyidagi munosabatlarni hosil qilamiz:

$$\text{tg}\,\alpha\ \text{ctg}\,\alpha = 1\ (\alpha \neq \frac{\pi}{2}n);\ 1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}(\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1));$$

$$1 + \text{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ (\alpha \neq n\pi),\ n \in Z.$$

α ning qavs ichida ko'rsatilgan qiymatlarida ayniyatlar sonli ma'noga ega bo'lmaydi.

Asosiy trigonometrik ayniyatlar trigonometrik funksiyalardan birining qiymatini bilgan holda qolgan barchasining qiymatlarini topishga va boshqa trigonometrik ayniyatlarni va tengliklarni isbotlashga imkon beradi.

1- misol. Agar $\sin\alpha = 0,8$ va $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bo'lsa, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$ va $\text{ctg}\,\alpha$ ni toping.

Yechish. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bo'lgani uchun $\cos\alpha < 0$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0,64} = -\sqrt{0,36} = -0,6.$$

Demak, $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}$,

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}.$$

2-misol. $\text{tg}\,\alpha = 2$ bo'lsa, a) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ va b) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$ ifodalarning qiymatlarini toping.

Yechish. a) berilgan ifodaning surat va maxrajini $\cos\alpha$ ga bo'lamiz va topamiz:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3};$$

b) berilgan ifodaning surat va maxrajini $\cos^2 < \alpha$ ga bo'lamiz va topamiz:

$$\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+2}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{4+2}{4-1}=\frac{2\cdot 3}{3}=2.$$

Fizika va matematikada ko'proq uchraydigan ba'zi bir burchaklar uchun trigonometrik funksiyalar qiymatlarining jadvalini keltiramiz.

Funksiya	Burchakning radiandagi qiymati							
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

3- m i s o l. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ayniyatni isbotlang.

I s b o t. Bu ayniyatni isbotlash uchun uning chap va o'ng qismlarining ayirmasi nolga teng ekanligini ko'rsatamiz:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2-1}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=0.$$

1—3- misollarni yechishda ayniyatlarni isbotlashning quyidagi usullaridan foydalandik: berilgan ayniyatda chap qismida shakl almashtirish bajarib, uning o'ng qismiga tengligini, o'ng qismida shakl almashtirish bajarib, uning chap qismiga teng ekanligi, o'ng va chap qismlarning ayirmasi nolga tengligi ko'rsatildi. Ba'zan ayniyatlarni isbotlashda uning chap va o'ng qismlarining shaklini almashtirib bir xil ifodaga keltirish qulay bo'ladi.

4- misol. $\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$ ayniyatni isbotlang.

Yechish.

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

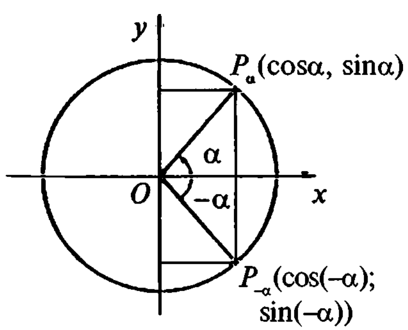
Berilgan ayniyat isbotlandi. Chunki uning chap va o'ng qismining shaklini almashtirish natijasida bir xil ifoda hosil qilindi.

7. Trigonometrik funksiyalarning eng sodda xossalari

1-teorema. *Kosinus — juft funksiya, sinus, tangens va kotangens toq funksiya.*

Isbot. Markazi koordinata boshida va radiusi birga teng bo'lgan aylana olamiz. α va $-\alpha$ qarama-qarshi haqiqiy sonlarni qaraylik. Birlik aylanada bu sonlarga mos keluvchi nuqtalar P_α va $P_{-\alpha}$ bo'lsin (35- rasm).

Sinus va kosinusning ta'rifiga ko'ra P_α nuqtaning koordinatalari $\cos\alpha$ va $\sin\alpha$, $P_{-\alpha}$ nuqtaning koordinatalari $\cos(-\alpha)$ va $\sin(-\alpha)$ bo'ladi. $P_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha)$ va $P_{-\alpha}(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$ nuqtalar Ox o'qiga nisbatan simmetrik joylashgani uchun ularning abssissalari bir xil bo'lib, ordinatalari qarama-qarshi ishorali bo'ladi, ya'ni $\alpha \in R$ uchun $\cos(-\alpha)=$ $=\cos\alpha$; $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$;



35- rasm.

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

tengliklar o‘rinli. Teorema isbotlandi.

2- t e o r e m a. *Sinus va kosinus — eng kichik davri* 2π *ga teng davriy funksiyalardir.*

I s b o t. α, $\alpha+2\pi$ va $\alpha-2\pi$ sonlarga markazi koordinata boshida yotgan birlik aylananing bir xil nuqtalari mos keladi. Shuning uchun istalgan $\alpha \in R$ son uchun $\cos(\alpha \pm 2\pi)=\cos\alpha$, $\sin(\alpha \pm 2\pi)=\sin\alpha$ tengliklar o‘rinli. 2π soni sinus va kosinus uchun davr bo‘ladi. Misol va masalalar yechayotganda qaralayotgan funksiyalarning eng kichik musbat davrini aniqlash qiziqtiradi.

1. $f(\alpha)=\sin\alpha$ funksiyaning eng kichik musbat davrini topamiz. Ta’rifga ko‘ra, agar $f(\alpha-T)=f(\alpha)=f(\alpha+T)$ bo‘lsa, u holda $T\neq 0$ son istalgan α uchun $f(\alpha)$ funksiyaning davri deyiladi. $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$ ayniyatdan $\alpha=0$ bo‘lganda $\sin T=0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Birlik aylanada esa ordinatasi nolga teng bo‘lgan ikkita nuqta bor. Bu nuqtalarga mos ravishda eng kichik sonlar 2π va π mos keladi. π soni davr bo‘la olmaydi. Chunki $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-1$. 2π soni esa izlanayotgan eng kichik musbat davr bo‘ladi. Haqiqatan,

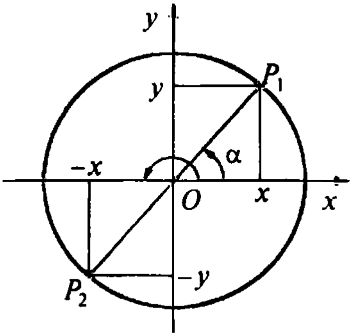
$$\sin\frac{\pi}{2}=1;\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=1;\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\ \sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\frac{1}{2},$$

demak, istalgan α uchun $\sin(\alpha \pm 2\pi)=\sin\alpha$.

Shunday qilib, $f(\alpha)=\sin\alpha$ funksiya uchun eng kichik musbat davr 2π ga teng.

2. $\varphi(\alpha)=\cos\alpha$ funksiya uchun ham eng kichik musbat davr 2π ga teng bo‘ladi. Bu esa $f(\alpha)=\sin\alpha$ funksiyaning eng kichik musbat davrini topishdek tahlil qilinadi.

3. $f(\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$ va $\varphi(\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$ funksiyalarning eng kichik musbat davrlari π ga teng.



36- rasm.

Haqiqatan, istalgan α son uchun $\alpha+\pi$ va $\alpha-\pi$ sonlarga birlik aylanada O koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan P_1 va P_2 nuqtalar mos keladi. Bu nuqtalarning koordinatalari qarama-qarshi sonlar bo'ladi: $P_1(x, y)$, $P_2(-x, -y)$ (36- rasm).

Rasmdan: $x = \cos\alpha$; $y = \sin\alpha$; $-x = \cos(\alpha \pm \pi)$, $-y = \sin(\alpha \pm \pi)$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \frac{y}{x};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y};\ \operatorname{ctg}\alpha(\alpha \pm \pi) = \frac{x}{y}.$$

Agar $T > 0$ tangensning davri bo'lsa, u holda $\operatorname{tg}T = \operatorname{tg}(0 + T) = \operatorname{tg} 0 = 0$. Lekin $]0; \pi[$ oraliqda tangens nolga ega emas, demak, $T \geq \pi$. π soni tangensning eng kichik musbat davri bo'ladi. Chunki tg α va ctg α uchun qo'shni nollari orasidagi masofa π ga teng. Agar burchak radianda emas, balki gradusda berilgan bo'lsa, sinus va kosinusning davri 360° ga teng bo'ladi, shuningdek, bu funksiyalar uchun $360°\,k$ ($k \in Z$) graduslar ham davr bo'ladi.

Tangens va kotangens uchun esa eng kichik davr gradus hisobida 180° bo'ladi. Shuningdek, bu funksiyalar uchun $180°\,k$ ($k \in Z$) graduslar ham davr bo'ladi.

2- §. Trigonometriyaning asosiy formulalari va ularning natijalari

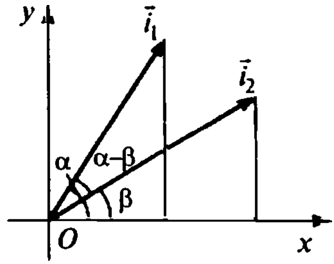
1. Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining trigonometrik funksiyalari

1-teorema. *Istalgan* α *va* β *burchaklar uchun*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \qquad (a)$$

formulalar o'rinli.

I s b o t. $\vec{i}_1$ – Ox o‘q bilan α burchak tashkil qiluvchi birlik vektor bo‘lsin; $\vec{i}_2$ esa Ox o‘q bilan β burchak tashkil qiluvchi birlik vektor bo‘lsin. Bunday holda $\vec{i}_1$ va $\vec{i}_2$ vektorlar o‘zaro $\alpha - \beta$ burchak tashkil qiladi (37- rasm).



37- rasm.

Geometriya kursidan ma’lumki, ikkita vektorning skalar ko‘paytmasi bu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta). \qquad \text{(b)}$$

Ammo $\vec{i}_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\vec{i}_2(\cos\beta, \sin\beta)$ bo‘lib, vektorlarning koordinatalar bo‘yicha skalar ko‘paytmasini e’tiborga olsak,

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_2 = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \qquad \text{(d)}$$

bo‘ladi. (b) va (d) tengliklarni taqqoslab, (a) ning birinchi formulasini hosil qilamiz:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \qquad (1)$$

Endi keyingi formulani isbotlaymiz.

Buning uchun cos va sin funksiyalarning juftlik va toqlik xossasidan foydalanamiz: $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \qquad (2)$$

Navbatdagi formulalarni isbotlash uchun bir-birini $\frac{\pi}{2}$ ga to‘ldiruvchi burchaklarning xossalaridan foydalanamiz:

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right).$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right);$$

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$
$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (3)$$

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\right.$$
$\left.-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (4)$$

Misollar. 1. $\cos 75^\circ$ ni hisoblang.

Yechish. (2) formula bo'yicha hisoblaymiz.

$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ -$

$-\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

2. $\cos 15^\circ$ ni hisoblang.

Yechish. (1) formuladan foydalanamiz:

$\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

3. $\sin 105^\circ$ ni hisoblang.

Yechish. (3) formulaga ko'ra hisoblaymiz:

$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

4. $\sin 150^\circ$ ni hisoblang.

Yechish. $\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 180^\circ\cdot\cos 30^\circ -$

$-\cos 180^\circ\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$

2-teorema. *Ushbu*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad \left(\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}(2\pi+1)\right);$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\quad\left(\alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}(2\pi-1)\right)$$

formulalar o'rinli (n = 0; ±1; ±2; ...).

I s b o t. Tangens funksiyasining ta'rifiga va isbotlangan (2) va (3) formulalarga ko'ra topamiz:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Tenglikning o'ng qismini cos α cos β ko'paytmaga hadlab bo'lamiz:

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\Leftrightarrow\qquad(5)$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

3- t e o r e m a. *Ushbu*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$$

$\left(\alpha,\beta,\gamma,\alpha+\beta+\gamma\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n=0;\pm1;\pm2;\ \ldots\right)$ *formula o'rinli.*

I s b o t.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}[\alpha+(\beta+\gamma)]=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.\qquad(6)$$

5. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{3}$ bo'lsa, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$ bo'lishini isbotlang.

Y e c h i s h. (6) formuladan foydalanamiz:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\frac{1}{12}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

α, β, γ burchaklar musbat bo‘lib, ular $\frac{\pi}{4}$ dan katta emas, shunday ekan, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ bo‘ladi.

2. Argumentni ikkilantirish va uchlantirish formulalari

1-bandning (2), (3) va (5) formulalarida $\alpha = \beta$ desak, ikkilangan argumentning formulalarini olamiz:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (7)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (8)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\left(2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right). \qquad (9)$$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ va $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ tengliklarni hadlab qo‘shib va ayirib, quyidagi formulalarni topamiz:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad (10)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \qquad (11)$$

Qo‘shish formulalarini ketma-ket qo‘llab, 3α, 4α va h.k. argumentlar uchun ham formulalar olish mumkin. Uchlangan argumentning formulalarini keltiramiz:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad (12)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \qquad (13)$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z\right). \qquad (14)$$

(12) va (13) formulalardan

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}, \qquad (15)$$

$$\cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4} \qquad (16)$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz.

M i s o l . $\sin\alpha \sin(60° - \alpha) \sin(60° + \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$ tenglikni isbotlang.

Y e c h i s h . $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ formuladan foydalanamiz:

$$\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin\alpha(\sin^2 60^\circ-\sin^2\alpha)=$$

$$=\sin\alpha\left(\frac{3}{4}-\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Isbotlangan tenglikdan foydalanib, quyidagiga o‘xshash misollarni oson hisoblash mumkin:

$$\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{1}{4}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

3. Yarimargumentning trigonometrik formulalari

$$1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2};\quad \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (17)$$

ayniyatlarni qaraymiz.

(17) ayniyatlarning birinchisidan ikkinchisini hadlab ayiramiz:

$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Bundan

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{2} \qquad (18)$$

(17) ayniyatlarni hadlab qo‘shamiz:

$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, bundan

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{2}. \qquad (19)$$

(18) tenglikni (19) tenglikka hadlab bo‘lib, topamiz:

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (20)$$

1- m i s o l . $\sin\frac{\pi}{8}$ va $\cos\frac{\pi}{8}$ ni hisoblang.

Y e c h i s h . Ma’lumki, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, bunday holda $\sin\frac{\pi}{8}>0$ va $\cos\frac{\pi}{8}>0$ bo‘lgani uchun ildiz oldida plus ishora olinadi:

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}},$$

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}.$$

2-misol. $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ va $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ bo'lsa, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ni toping.

Yechish. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$ bo'lsa, $\cos\frac{\alpha}{2}<0$ bo'ladi. Shuning uchun ildiz oldida minus ishora olinadi:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=-\sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

4. Trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasini yig'indi shakliga keltirish formulalari

Trigonometrik tenglik va ayniyatlarni isbotlashda, tenglama va tengsizliklarni yechishda trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasini yig'indiga almashtirish formulalaridan foydalanishga to'g'ri keladi. Bunday formulalarni keltirib chiqarish uchun qo'shish teoremalaridan foydalanamiz. Ushbu

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (*)$$

va

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (**)$$

ayniyatlarni hadlab qo'shib, natijada ikki kosinus ko'paytmasini yig'indi shakliga keltirish uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (21)$$

Ikkita kosinusning ko'paytmasi argumentlar ayirmasi va yig'indisi kosinuslarining yarimyig'indisiga teng.

(*) tenglikdan (**) tenglikni hadlab ayirsak, sinuslar ko'paytmasining shaklini o'zgartirish formulasi hosil bo'ladi:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (22)$$

Ikkita sinusning ko'paytmasi argumentlar ayirmasi kosinusidan argumentlar yig'indisi kosinusini ayirish natijasining yarmiga teng.

(3) va (4) formulalarni hadlab qo'shsak, sinus bilan kosinus ko'paytmasining shaklini o'zgartirish formulasi hosil bo'ladi:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (23)$$

Sinus va kosinusning ko'paytmasi argumentlar yig'indisi va ayirmasi sinuslari yig'indisining yarmiga teng.

Natija. Agar (21), (22) va (23) formulalarda $\alpha = \beta$ bo'lsa, ulardan quyidagi formulalarni olamiz:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \ \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Chiqarilgan formulalarni ketma-ket tatbiq qilish yo'li bilan sinuslarning va kosinuslarning istalgan ko'paytmalarini va ularning butun musbat ko'rsatkichli darajalarini yig'indi shakliga keltirish mumkin.

1-misol. $\sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha$ ifodani yig'indi shakliga keltiring.

Yechish. $\sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin^2\alpha(\sin\alpha \cdot \cos\alpha)^2 =$

$$= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{4} = \frac{1}{8}(1-\cos 2\alpha)\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right) = \frac{1}{16}(1 -$$

$$- \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha) = \frac{1}{16}(1 - \cos 2\alpha -$$

$$\cos 4\alpha + \frac{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}{2}) = \frac{1}{16} - \frac{\cos 2\alpha}{32} - \frac{\cos 4\alpha}{16} + \frac{\cos 6\alpha}{32}.$$

2-misol. $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ tengsizlikni isbotlang.

Yechish. $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} =$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{7} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7} + \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{7} - \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{7} + \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7} + \frac{1}{2}\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

5. Trigonometrik funksiyalarning yig'indisini ko'paytma shakliga keltirish formulalari

Trigonometrik funksiyalarning yig'indisini ko'paytma shakliga keltirish formulalari ikkita trigonometrik funksiyaning yig'indisi va ayirmasini trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasi shaklida ifodalashga imkon beradi. Bu formulalarni chiqarish uchun trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasini yig'indi shakliga keltirish formulalaridan foydalanamiz.

Ikki kosinus yig'indisining formulasi

Ikki kosinusning yig'indisi argumentlar yarimyig'indisi va yarimayirmasi kosinuslarining ikkilangan ko'paytmasiga teng:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (24)$$

Buni isbot qilish uchun (24) formulaning o'ng tomonidagi ko'paytmani yig'indi shakliga keltirish kifoya:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2} =$$

$$= \cos\alpha + \cos\beta.$$

Xuddi shunday usul bilan quyidagi uchta formula ham isbot qilinadi.

Ikki kosinus ayirmasining formulasi

Ikki kosinusning ayirmasi argumentlar yarimyig'indisi va yarimayirmasi sinuslarining manfiy ishorali ikkilangan ko'paytmasiga teng:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (25)$$

Ikki sinus yig'indisining formulasi

Ikki sinusning yig'indisi argumentlar yarimyig'indisi sinusi bilan yarimayirmasi kosinusining ikkilangan ko'paytmasiga teng:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (26)$$

Sinuslar ayirmasining formulasi

Ikki sinusning ayirmasi argumentlar yarimyig'indisi kosinusi bilan yarimayirmasi sinusining ikkilangan ko'paytmasiga teng:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (27)$$

Tangenslar yig'indisining va ayirmasining formulalari

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 2\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}, \quad (28)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = 2\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}. \quad (29)$$

α va β burchaklarning $\frac{\pi}{2} + k\pi$ dan farqli har qanday qiymatlarida yaroqli bo'ladi. α va β ning barcha yaroqli qiymatlarida $\operatorname{tg}\alpha$ va $\operatorname{tg}\beta$ ma'noga ega va $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$ bo'ladi.

(28) formulani isbotlaymiz:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Shu usul bilan (29) formula ham isbot qilinadi.

Natija. $1 \pm \cos\alpha$ yig'indi (24) va (25) formulalar yordamida ko'paytma shakliga keltiriladi. $1 = \cos 0°$ ekanini e'tiborga olib, $1 \pm \cos\alpha = \cos 0 \pm \cos\alpha$ tenglikni yoza olamiz. Demak,

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

1- m i s o l . $2\sin\alpha-\sqrt{3}$ ni ko'paytmaga almashtiring.

Y e c h i s h . $2\sin\alpha - \sqrt{3} = 2\left(\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\sin\alpha -$
$- \sin 60°) = 2^2\sin\frac{\alpha-60°}{2}\cos\frac{\alpha+60°}{2} =$
$= 4(\cos(\frac{\alpha}{2}+30°)\cdot\sin(\frac{\alpha}{2}-30°)).$

2- m i s o l . $\sin\alpha - \cos\alpha$ ifodaning eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Y e c h i s h . $\sin\alpha + \cos\alpha = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos\alpha =$
$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha) = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha).$

Kosinusning eng kichik qiymati –1 ga, eng katta qiymati esa 1 ga teng bo'lgani uchun berilgan ifodaning eng kichik qiymati $\sqrt{2}(-1)=-\sqrt{2}$ ga, eng katta qiymati esa $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$ ga teng.

Buni quyidagicha ham aniqlash mumkin:

$$\left|\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)\right| \le 1 \to -1 \le \cos(\frac{\pi}{4}-\alpha) \le 1 \to -\sqrt{2} \le$$
$$\le \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha) \le \sqrt{2}.$$

3- m i s o l . Agar $\alpha+\beta=\gamma$ bo'lsa, $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=$
$=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ bo'lishini isbotlang.

Y e c h i s h . $\alpha+\beta=\gamma$ ni e'tiborga olib, berilgan tenglikning chap qismidan o'ng tomonini keltirib chiqaramiz:

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}2\sin\frac{\alpha}{2}2\sin\frac{\beta}{2}=$$
$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}n\sin\frac{\gamma}{2}.$$

6. Trigonometrik funksiyalarni yarimargumentning tangensi orqali ifodalovchi formulalar

T e o r e m a. *Agar* $\alpha \neq (2k+1)\pi (k \in Z)$ *bo'lsa, unda* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ *va* $\operatorname{tg}\alpha$ *funksiyalar quyidagi formulalar yordamida* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ *orqali ratsional ifodalanadi:*

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (30)$$

I s b o t. Ikkilantirish formulalari yordamida $\sin\alpha$ va $\cos\alpha$ ni $\frac{\alpha}{2}$ burchakning sinus va kosinuslari orqali ifodalash mumkin:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

yoki

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$\alpha \neq \pi + 2k\pi$ bo'lgani uchun $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ bo'lib, $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ bo'ladi. Keyingi ayniyatlarning o'ng tomonlarining surat va maxrajini $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ga bo'lib, oldingi ikkita ayniyatni olamiz. Bu olingan ayniyatlarni hadlab bir-biriga bo'lsak, uchinchi formulani hosil qilamiz. Bu formula esa $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ bo'lganda ma'noga ega bo'ladi. Shunday qilib, (30) formulalar α argumentning trigonometrik funksiyalarini $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ga nisbatan ratsional ifodalash imkoniyatini beradi.

Masalan, $\frac{1}{3\cos\alpha + 4\sin\alpha}$ ifoda $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$ almashtirish bilan ratsional ko'rinishga keladi. Bunda

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, berilgan ifoda t ga nisbatan ratsional ifoda bo'ladi:

$$\frac{1}{3\cos\alpha+4\sin\alpha} = \frac{1}{3\frac{1-t^2}{1+t^2}+4\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{3-3t^2+t} = \frac{t^2+1}{3+8t-3t^2}.$$

7. Yordamchi burchak kiritish yordamida yig'indilarni ko'paytmaga almashtirish

Trigonometrik ifodalarning shaklini almashtirishda yordamchi burchak kiritish bilan ifodalar ixcham va sodda ko'rinishga keladi. Bu usuldan trigonometrik tenglamalar va tengsizliklarni yechishda foydalaniladi.

1- m i s o l . $a+b$ yig'indini ko'paytmaga almashtiring. Bu yerda a va b — istalgan haqiqiy sonlar.

Y e c h i s h . a ni qavs tashqarisiga chiqarib, $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi$ belgilash kiritamiz:

$$a+b = a\left(1+\frac{b}{a}\right) = a(1+\mathrm{tg}\,\varphi) = a\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\,\varphi\right) =$$

$$= a\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi}.$$

2- m i s o l . $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ yig'indini ko'paytmaga almashtiring. Bunda a va b — istalgan haqiqiy sonlar ($a\cdot b \neq 0$).

Y e c h i s h . Shartga ko'ra a va b noldan farqli. Tekislikda abssissasi a ga va ordinatasi b ga teng bo'lgan $M(a;\, b)$ nuqta olamiz. $\overrightarrow{OM}$ radius-vektorning uzunligi $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ga teng. $\overrightarrow{OM}$ bilan abssissalar o'qi orasida hosil bo'lgan φ burchakning kosinusi va sinusi quyidagilarga teng:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Bundan foydalanib, quyidagi o'zgarishlarni bajara olamiz:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi).$$

Shunday qilib, $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, bu yerda φ — yordamchi burchak deyiladi.

Misollar. 1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)=$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right);$$

2) $8\cos\alpha+6\sin\varphi=10\left(\cos\alpha\cdot\frac{8}{10}+\sin\alpha\cdot\frac{6}{10}\right)=$

$=10(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=10\sin(\alpha+\varphi)$, bunda

$$\varphi=\arccos\frac{4}{5}$$

yoki

$$\varphi=\arcsin\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1\Rightarrow\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

3- §. Trigonometrik funksiyalarning hosilalari

1. $y=\sin x$ funksiyaning hosilasi. I bob, 7- §, 5-bandda isbotlangan tengsizlik, agar $0<|\alpha|<\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $\cos\alpha<$ $<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1$ ko'rinishni oladi. Bu tengsizlikdan $\alpha\to 0$ da

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \qquad (1)$$

bo'lishi isbotlangan edi.

Hosilaning ta'rifiga ko'ra

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}.$$

Suratda turgan ayirmani

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

formula bo'yicha ko'paytmaga almashtiramiz:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Ko'paytmaning limiti haqidagi teoremaga ko'ra:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

$\cos x$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$ $= \cos x$.

(1) formuladan $\alpha = \frac{\Delta x}{2}$ bo'lganda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ bo'lishini e'tiborga olsak, $(\sin x)' = \cos x$ bo'lishi kelib chiqadi.

2. $y = \cos x$ funksiyaning hosilasi. Hosilaning ta'rifiga ko'ra:

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}.$$

Suratda turgan ayirmani $\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ formula bo'yicha ko'paytmaga almashtiramiz. Bunday holda

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \times$$

$\times \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(x+\frac{\Delta x}{2})$ va $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(x+\frac{\Delta x}{2}) = \sin x$ bo'lishini e'tiborga olsak,

$$(\cos x)' = -\sin x$$

ni hosil qilamiz.

3. $y = \mathrm{tg}x$ funksiyaning hosilasi. $y = \mathrm{tg}\,x$ funksiyaning aniqlanish sohasiga $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ sonlar kirmaydi.

Ta'rifga ko'ra $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Bu tenglikka $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ formulani qo'llaymiz va topamiz:

$$\operatorname{tg}(x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Shunday qilib, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

4. $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyaning hosilasi. Bu funksiya son to'g'ri chizig'ining $x = k\pi$ $(k \in Z)$ nuqtalarida aniqlanmagan. Ta'rifga ko'ra $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. 3- misolga o'xshash topamiz:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x},$$

ya'ni

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Misollar. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping:

a) $y = \sin 2x \cos 3x$; b) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$;

d) $y = \sin(3 + 2x) + \cos(3 + 2x)$; e) $y = 2\operatorname{tg} 3x - 3\operatorname{tg} 2x$;

Yechish. a) $y' = (\sin 2x \cos 3x)' = (\sin 2x)' \cos 3x + \sin 2x(\cos 3x)' = 2\cos 2x \cos 3x - 3\sin 2x \sin 3x$;

b) $y' = (\sin^2 x - \cos^2 x)' = (\sin^2 x)' - (\cos^2 x)' = 2\sin x \cos x - 2\cos x(-\sin x) = 4\sin x \cos x = 2\sin 2x$;

d) $y' = [\sin(3 + 2x) + \cos(3 + 2x)]' = 2\cos(3 + 2x) - 2\sin(3 + 2x)$;

e) $y' = (2\operatorname{tg}3x - 3\operatorname{tg}2x)' = 2\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 - 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 =$

$$= \frac{6}{\cos^2 3x} - \frac{6}{\cos^2 2x} = 6(1 + \operatorname{tg}^2 3x) - 6(1 - \operatorname{tg}^2 2x) =$$

$$= 6(\operatorname{tg}^2 3x - \operatorname{tg}^2 2x).$$

4- § Trigonometrik funksiyalarning asosiy xossalari va grafigi

Trigonometrik funksiyalarning davriylik xossasi ularni uzunligi asosiy davriga teng kesmada o‘rganishga imkon beradi. Chunki trigonometrik funksiyalar barcha xususiyatlarini uzunligi o‘z davriga teng bo‘lgan kesmada namoyon qiladi.

1. $y = \sin x$ funksiyaning asosiy xossalari va grafigi

$y = \sin x$ funksiyaning eng kichik musbat davri 2π ga teng bo‘lgani uchun uning xossalarini uzunligi 2π ga teng bo‘lgan oraliqda o‘rganish yetarli. $[-\pi; \pi]$ kesmani olamiz. $(\pi-(-\pi) = 2\pi)$. Bu funksiyaning grafigini yasash uchun uni umumiy sxema bo‘yicha tekshiramiz:

1) birinchi tartibli hosilani topamiz: $(\sin x)' = \cos x$;

2) kritik nuqtalarni topamiz: $x \in [-\pi; \pi]$ da $\cos x = 0$ tenglama $x = -\frac{\pi}{2}$ va $x = \frac{\pi}{2}$ yechimlarga ega;

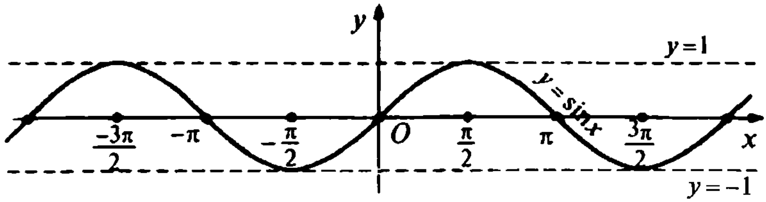
3) funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlarini va ekstremum qiymatlarini jadval tarzida beramiz:

x	$-\pi$	$\left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{\pi}{2}$	$\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$	$-\pi$
$\sin' x$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	-1
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
			min		max		

4) $[-\pi; \pi]$ kesmada $\sin x$ funksiyaning grafigini quramiz. Grafikning hammasini yasash uchun uning bu segment uchun yasalgan qismini $\vec{r}(2\pi; 0)$ vektor yordamida ketma-ket o‘ng va chapga 2π; 4π; 6π; ... masofaga surish kifoya. Shunday qilib, davriy ravishda takrorlanuvchi bir xil yoylardan iborat to‘lqinsimon chiziq hosil bo‘ladi. Bu uzluksiz chiziq *sinusoida* deyiladi (38- rasm).

$y = \sin x$ funksiyaning xossalari

1) bu funksiyaning aniqlanish sohasi — barcha ha-



38- rasm.

qiqiy sonlar to‘plamidan, ya’ni son to‘g‘ri chizig‘idan iborat: $D(\sin) = R$;

2) $\sin x$ funksiyaning qiymatlar to‘plami $[-1;\ 1]$ kesmadan iborat: $E(\sin x) = [-1;\ 1]$, demak, sinus — chegaralangan funksiya;

3) $\sin x$ — toq funksiya: barcha $x \in R$ uchun $\sin(-x) = -\sin x$;

4) $\sin x$ — davriy funksiya, uning eng kichik musbat davri 2π ga teng: barcha $x \in R$ uchun $\sin(x + 2\pi) = \sin x$;

5) barcha $x = n\pi$ uchun $\sin x = 0$ $(n \in Z)$;

6) barcha $x \in]2n\pi;\ \pi + 2n\pi[$ uchun $\sin x > 0$ $(n \in Z)$;

7) barcha $x \in]n + 2n\pi;\ 2n + 2n\pi[$ uchun $\sin x < 0$ $(n \in Z)$;

8) $\sin x$ funksiya R son to‘g‘ri chizig‘ining har bir nuqtasida uzluksiz va hosilaga ega;

9) $y = \sin x$ funksiya $]-\infty;\ +\infty[$ oraliqda tebranuvchan; $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ oraliqlarda -1 dan 1 gacha o‘sadi, $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$ oraliqlarda esa 1 dan -1 gacha kamayadi, bunda $n \in Z$;

10) $y = \sin x$ funksiya ekstremum qiymatlarga ega. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$: $n \in Z$ bo‘lganda $\sin x = 1$ maksimumlarga, $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$ bo‘lganda $\sin x = -1$ minimumlarga ega bo‘ladi;

11) $y = \sin x$ funksiya grafigi $x = n\pi$ $(n \in Z)$ egilish nuqtalariga ega bo‘lib, uning grafigi $]2n\pi;\ n + 2n\pi[$ $(n \in Z)$ oraliqlarda qavariq, $]\pi + 2n\pi,\ 2\pi + 2n\pi[$ $(n \in Z)$ oraliqlarda esa botiq bo‘ladi (38- rasm).

2. $y = \cos x$ funksiyaning xossalari va grafigi

$y = \cos x$ funksiya grafigini $[-\pi;\ \pi]$ kesmada yasash uchun uni shu kesmada tekshiramiz:

1) birinchi tartibli hosilani topamiz: $(\cos x)' = -\sin x$;

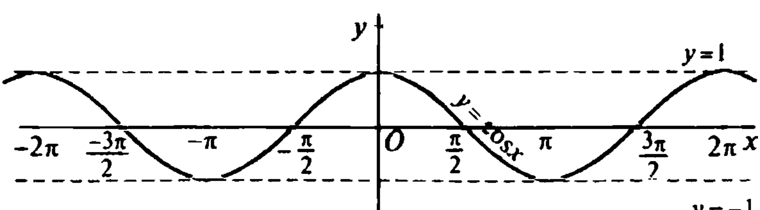
2) kritik nuqtalarini topamiz: $x \in [-\pi;\ \pi]$ bo‘lganda $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$ nuqtalarda $\sin x = 0$ bo‘ladi. Bu nuqtalar aniqlanish sohasining ichki nuqtalari bo‘lgani uchun kritik nuqtalar bo‘ladi;

3) funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlarini va ekstremum qiymatlarini jadval tarzida beraylik:

x	$-\pi$	$]-\pi;\ 0[$	0	$]0;\ -\pi[$	π
$\cos' x$	0	+	0	—	0
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1
	min		max		min

4) $y = \cos x$ funksiya grafigini $[-\pi;\ \pi]$ kesmada yasaymiz (39- rasm);

5) $y = \cos x$ funksiya 2π davrga ega bo‘lgani uchun $\vec{r}(2\pi; 0)$ parallel ko‘chirishda uning grafigi o‘ziga o‘tadi. Uning $[-\pi + 2n\pi;\ \pi + 2n\pi]$ oraliqdagi grafigini $[-\pi;\ \pi]$ oraliqdagi grafigidan $\vec{r}(2\pi; 0)$ parallel ko‘chirish bilan hosil qilish mumkin. $y = \cos x$ funksiyaning grafigini $y = \sin x$ funksiya grafigidan ham olish mumkin. Buning uchun $y = \sin x$ sinusoidani chapga $\frac{\pi}{2}$ ga siljitish bilan, ya’ni



39- rasm.

$\vec{r}(-\frac{\pi}{2};0)$ parallel ko'chirish bilan ham $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})=$ $=\cos x$ funksiya grafigini olamiz.

$y=\cos x$ funksiyaning asosiy xossalari

1) $y=\cos x$ ning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat: $D(\cos x)=R$;

2) bu funksiyaning qiymatlar to'plami $[-1;\ 1]$ kesmadan iborat: $E(\cos x)=[-1;\ 1]$, ya'ni $\cos x$ — chegaralangan funksiya;

3) $y=\cos x$ funksiya — juft, ya'ni barcha $x\in R$ uchun $\cos(-x)=\cos x$. Bu funksiyaning grafigi Oy o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi;

4) $\cos x$ davriy funksiya, uning eng kichik musbat davri 2π ga teng: barcha $x\in R$ uchun $\cos(x+2n)=\cos x$;

5) $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $x\in Z$ bo'lganda, $\cos x=0$;

6) barcha $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3}{2}\pi+2n\pi\right]$, $n\in Z$ uchun $\cos x<$ <0; $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2n\pi\right]$, $n\in Z$ uchun $\cos x>0$;

7) $\cos x$ funksiya R son to'g'ri chizig'ining har bir nuqtasida uzluksiz va hosilaga ega;

8) $\cos x$ funksiya $]-\infty;\ \infty[$ intervalda tebranuvchan: $[-\pi+2\pi n;\ 2n\pi]$, $n\in Z$ oraliqlarda -1 dan 1 gacha o'sadi, $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$, $n\in Z$ oraliqlarda esa 1 dan -1 gacha kamayadi;

9) $y=\cos x$ funksiya ekstremum qiymatlarga ega: barcha $x=2\pi n$, $n\in Z$ nuqtalarda $\cos x=1$ maksimumlarga, barcha $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ nuqtalarda esa $\cos x=-1$ minimumlarga ega bo'ladi;

10) $y=\cos x$ funksiya grafigi $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in Z$ egilish nuqtalarga ega bo'lib, uning grafigi $\left]-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right[$ $n\in Z$ oraliqlarda qavariq, $\left]\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right[$ $n\in Z$ oraliqlarda botiq bo'ladi.

3. $y = \operatorname{tg} x$ funksiyaning xossalari va grafigi

Ma'lumki, $y = \operatorname{tg} x$ funksiya davriy bo'lib, uning eng kichik musbat davri π ga teng. Shuning uchun bu funksiyani uzunligi π ga teng bo'lgan $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ oraliqda tekshiramiz va grafigini yasaymiz. Bu oraliqning oxirgi nuqtalarida $y = \operatorname{tg} x$ funksiyasi aniqlanmagan.

1) $y = \operatorname{tg} x$ funksiyaning birinchi hosilasini topamiz: $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

2) $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ bo'lganda $y' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ bo'ladi; $y = \operatorname{tg} x$ funksiya $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ oraliqda o'sadi, $\operatorname{tg} 0 = 0$;

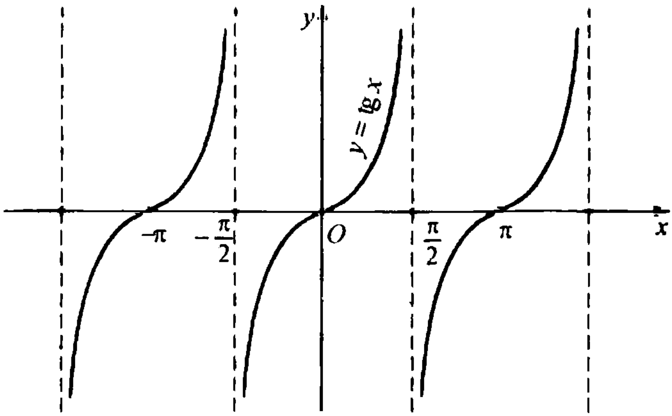
3) $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2}; 0\right)$ nuqtalardan o'tuvchi vertikal to'g'ri chiziqlar $y = \operatorname{tg} x$ funksiya grafigi uchun asimptotalar bo'ladi. Chunki $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} \quad 0} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$;

4) $\operatorname{tg} x$ – toq funksiya. $x \neq \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in Z$ bo'lgan barcha $x \in R$ uchun $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Uning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi;

5) funksiya grafigini $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ oraliqda yasaymiz, undan keyin (0; 0) nuqtaga nisbatan simmetrik qilib, $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ oraliqda yasaymiz. $y = \operatorname{tg} x$ funksiyaning $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$ oraliqdagi grafigi $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ oraliqdagi grafigidan $\vec{r}(\pi n; 0)$, $n \in Z$ parallel ko'chirish yordamida olinadi (40- rasm).

$y = \operatorname{tg} x$ funksiyaning xossalari

1) bu funksiyaning aniqlanish sohasi $-\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ sonlardan boshqa barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat.



40- rasm.

2) $y = \operatorname{tg} x$ funksiyaning qiymatlar to'plami barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'ladi: $E(\operatorname{tg}) = R$. $\operatorname{tg} x$ funksiya chegaralanmagandir;

3) $y = \operatorname{tg} x$ toq funksiya: barcha $x \in D(\operatorname{tg})$ uchun $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ tenglik bajariladi;

4) $\operatorname{tg} x$ davriy funksiya. Uning eng kichik musbat davri π ga teng, barcha $x \in D(\operatorname{tg})$ uchun $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$;

5) barcha $x = \pi n$, $n \in Z$ uchun $\operatorname{tg} x = 0$;

6) barcha $x \in \left]\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$, $n \in Z$ uchun $\operatorname{tg} x > 0$;

7) barcha $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right[$, $n \in Z$ uchun $\operatorname{tg} x < 0$;

8) $\operatorname{tg} x$ funksiya o'z aniqlanish sohasida uzluksiz va har bir $x \in D(\operatorname{tg})$ nuqtada hosilaga ega;

9) $\operatorname{tg} x$ funksiya har bir $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$, $n \in Z$ oraliqda o'suvchi;

10) $\operatorname{tg} x$ funksiya grafigi $x = \pi n$, $n \in Z$ egilish nuqtalariga ega. Uning grafigi $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right[$, $n \in Z$ oraliqlarda qavariq, $\left]\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$ oraliqlarda esa botiq.

4. $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyaning xossalari va grafigi

$y = \operatorname{ctg} x$ funksiya davriy bo‘lib, uning eng kichik musbat davri π ga teng. Bu funksiyaning xossalarini o‘rganish uchun $]0; \pi[$ oraliqni olamiz. Bu oraliqning oxirlarida ctg x funksiya aniqlanmagan.

1) funksiyaning birinchi hosilasini topamiz:

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

2) x ning barcha $x = \pi n$, $n \in Z$ dan boshqa qiymatlarida $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ bo‘ladi. $x = \pi n$, $n \in Z$ nuqtalarda y ham, y' ham aniqlanmagan. Demak, $]0; \pi[$ oraliqda $y = \operatorname{ctg} x$ funksiya kamayadi, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$;

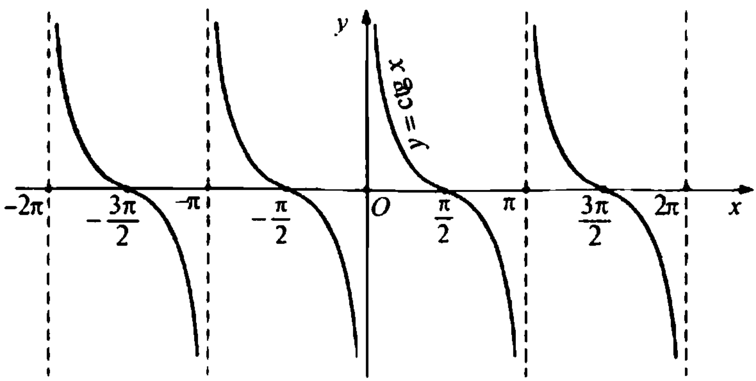
3) $]n\pi; \pi + n\pi[$ $(n \in Z)$ oraliqning oxirgi nuqtalaridan o‘tgan vertikal to‘g‘ri chiziqlar $y = \operatorname{ctg} x$ funksiya grafigi uchun asimptotalar bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{x \to \pi} \operatorname{ctg} x = -\infty;$$

4) ctg x — toq funksiya. Uning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik;

5) ctg x funksiya grafigini $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ oraliqda quramiz, undan keyin izlanayotgan grafik koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgani tufayli uning tarmog‘ini $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ oraliqda quramiz;

6) ctg x funksiyaning grafigini tasvirlovchi chiziqni $\vec{r}(\pi; 0)$ vektor yordamida parallel ko‘chirsak, u chiziq o‘z-o‘ziga o‘tadi. Demak, ctg x funksiyaning $]\pi n; \pi(n + 1)[$, $n \in Z$ oraliqdagi grafigini uning $]0; \pi[$ oraliqdagi grafigini $\vec{r}(\pi n; 0)$ parallel ko‘chirish yordamida hosil qilamiz (41-rasm).



41- rasm.

ctg x funksiyaning asosiy xossalari

1) funksiyaning D(ctg) aniqlanish sohasi πn, $n \in Z$, sonlardan boshqa barcha haqiqiy sonlardan iborat;

2) ctg x funksiyaning qiymatlar to'plami barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat: E(ctg) = R. Demak, ctg x funksiya chegaralanmagan;

3) ctg x — toq funksiya, barcha $x \in D$(ctg) uchun ctg $(-x)$ = $-$ctg x;

4) y = ctg x — davriy funksiya. Uning eng kichik davri π ga teng: barcha $x \in D$ (ctg) uchun ctg$(x + \pi)$ = ctg x;

5) barcha $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$ uchun ctg $x = 0$;

6) barcha $x \in \left]\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$ $n \in Z$ uchun ctg $x > 0$;

7) barcha $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right[$ $n \in Z$ uchun ctg $x < 0$;

8) ctg x funksiya barcha $x \in D$ (ctg) uchun uzluksiz va hosilaga ega;

9) y = ctg x funksiya har bir $]\pi n$; $\pi + \pi n i$ [, $n \in Z$ oraliqda kamayadi;

10) ctg$x$ funksiya grafigi $x = \frac{\pi}{2(xk+1)}$, $k \in Z$ egilish nuqtalariga ega. Uning grafigi $\left]\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$, $n \in Z$ oraliqlarda botiq, $\left]\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right[$, $n \in Z$ oraliqlarda esa qavariq bo‘ladi (41- rasm).

Endi sinus, kosinus, tangens va kotangens funksiyalarining o‘rganilgan barcha xossalarini jadval tarzida umumlashtiramiz. Jadvalda $f(x)$ funksiya xossalarining ushbu raqamlanishi qabul qilingan:

1.1 — aniqlanish sohasi; 2.1 — juft-toqligi;

1.2 — qiymatlar sohasi; 2.2 — eng kichik musbat davri;

3.1 — f funksiya grafigining Ox o‘q bilan kesishish nuqtalari koordinatalari;

3.2 — f funksiya grafigining Oy o‘q bilan kesishish nuqtalarining koordinatalari;

4.1 — f funksiyaning musbat qiymatlar qabul qiladigan oraliqlari;

4.2 — f funksiyaning manfiy qiymatlar qabul qiladigan oraliqlari;

5.1 — o‘sish oraliqlari;

5.2 — kamayish oraliqlari;

6.1 — minimum nuqtalari;

6.2 — funksiya minimumlari;

6.3 — maksimum nuqtalari;

6.4 — funksiya maksimumlari;

7.1 — f funksiya grafigining egilish nuqtalari;

7.2 — f funksiya grafigi qavariq bo‘lgan oraliqlar;

7.3 — f funksiya grafigi botiq bo‘lgan oraliqlar.

		Funksiya			
		$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\mathrm{tg}\, x$	$f(x)=\mathrm{ctg}\, x$
1	1.1	R	R	$\left]-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[$	$]\pi n;\ \pi+\pi n[$
	1.2	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	R	R
2	2.1	toq	juft	toq	toq
	2.2	2π	2π	π	π
3	3.1	$]\pi n;\ 0[$	$\left]\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 0\right[$	$]\pi n;\ 0[$	$\left]\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 0\right[$
	3.2	$(0;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(0;\ 0)$	yo‘q
4	4.1	$]2\pi n;\ \pi+2\pi n[$	$\left]-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right[$	$\left]\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[$	$\left]\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[$
	4.2	$]-\pi+2\pi n;\ 2\pi n[$	$\left]\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right[$	$\left]-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right[$	$\left]-\frac{\pi}{2}\pi n;\ \pi n\right[$
5	5.1	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$	$\left]-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[$	yo‘q
	5.2	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[2\pi n;\ \pi+2n\pi]$	yo‘q	$]\pi n;\ \pi+\pi n[$

		Funksiya			
		$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\mathrm{tg}\,x$	$f(x)=\mathrm{ctg}\,x$
6	6.1	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$\pi+2\pi n$	yo‘q	yo‘q
	6.2	-1	-1	yo‘q	yo‘q
	6.3	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$2\pi n$	yo‘q	yo‘q
	6.4	1	1	yo‘q	yo‘q
7	7.1	πn	$\frac{\pi}{2}+\pi n$	πn	$\frac{\pi}{2}(2n+1)$
	7.2	$]2\pi n;\ \pi+2\pi n[$	$\left]-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right[$	$\left]-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right[$	$\left]\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi+\pi n\right[$
	7.3	$]\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n[$	$\left]\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right[$	$\left]\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[$	$\left]\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[$
		$n\in Z;\ \ Z=\{n=0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots;\pm k;\ldots\}$			

5- §. Garmonik tebranishlar va ularni qo'shish

Tabiatshunoslik va texnikada

$$y = A\cos(\alpha t + \varphi_0) \tag{1}$$

yoki

$$y = A\sin(\alpha t + \varphi_0) \tag{2}$$

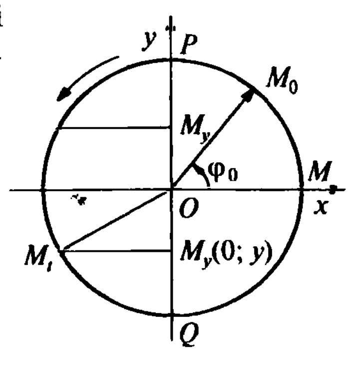
qonunga asosan o'zgaruvchi miqdorlar keng qo'llaniladi. (1) yoki (2) ko'rinishdagi funksiyalarni bir xususiy holda I q., VI bob, 5- § ning 3-bandida murakkab funksiya tuzishning sodda misoli sifatida qaragan edik. Endi bu masalaga umumiyroq yaqinlashamiz.

Oxy koordinatalar tekisligida radiusi A ga teng, markazi koordinatalar boshida yotgan aylana olamiz. M_0 boshlang'ich holatda turgan M nuqta bu aylana bo'ylab ω burchak tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan bo'lsin (42- rasm). OM_0 radius-vektor Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan φ_0 burchak tashkil qilsin. t vaqtdan keyin M nuqta M_t holatni oladi. Bunda $\angle M_0OM_t = \omega t$. $\overrightarrow{OM}$ radius-vektor Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan $\angle xOM_0 + \angle M_0OM_t = \omega t + \varphi_0$ burchak tashkil qiladi. Agar M nuqta aylana bo'ylab harakat qilaversa, uning M_y ordinatalar o'qidagi proyeksiyasi P va Q nuqtalar orasida tebranma harakat qiladi. Aylana bo'ylab harakatlanayotgan M nuqta bilan uning M_y proyeksiyasi orasidagi bog'lanishni o'rnatamiz. Sinusning ta'rifiga ko'ra (42-rasm):

$$\frac{|\overrightarrow{OM_y}|}{|\overrightarrow{OM_t}|} = \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \text{bunda}$$

$$|\overrightarrow{OM_y}| = y; \, |\overrightarrow{OM_t}| = A,$$

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$



42- rasm.

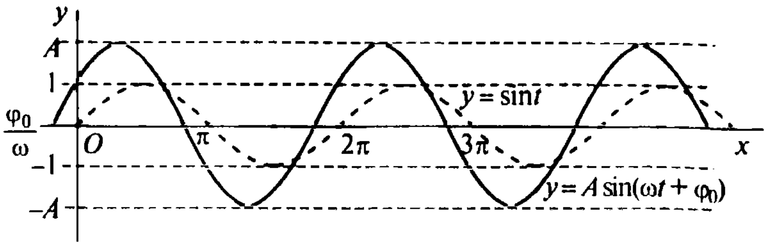
(1) yoki (2) qonun bo‘yicha sodir bo‘ladigan tebranishlar *garmonik tebranishlar* deb ataladi. Garmonik tebranishlar A, ω va φ_0 parametrlar bilan to‘liq aniqlanadi. Bu parametrlar maxsus nomlar bilan ataladi: A *tebranish amplitudasi*, ω tebranishning *siklik* (yoki *doiraviy*) *chastotasi*, φ_0 tebranishning *boshlang‘ich fazasi*, $\omega t + \varphi_0$ esa *tebranishning fazasi* deb ataladi. Bitta to‘liq tebranish sodir bo‘ladigan vaqt oralig‘i *tebranish davri* deyiladi. (2) qonun bo‘yicha sodir bo‘layotgan tebranishlarning tebranish davrini topamiz. (2) funksiya uchun $A\sin[\omega(t+T)+\varphi_0] \equiv A\sin(\omega t+\varphi_0)$ ayniyatni qaraymiz. Bu ayniyat trigonometrik funksiyalarning yig‘indisini ko‘paytmaga almashtirganimizdan keyin $2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cos\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\omega T}{2}\right) \equiv 0$ ko‘rinishni oladi. t o‘zgaruvchi miqdor bo‘lgani uchun $2\cos\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\omega T}{2}\right) \neq 0$ bo‘ladi; demak, $\sin\frac{\omega T}{2} = 0$ bo‘ladi; bundan $\frac{\omega T}{2} = \pi n \Rightarrow$ $\Rightarrow T = \frac{2\pi n}{\omega}$, $n \in Z$. T ning bu topilgan qiymatlari to‘plamidan uning eng kichik musbat qiymatini olamiz. T bunday qiymatga $n = 1$ bo‘lganda erishadi. T ning bu qiymatini T_0 orqali belgilaylik: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$.

Shunday qilib, $A\sin(\omega t+\varphi_0)$ funksiyaning T_0 tebranish davri A va φ_0 ga bog‘liq bo‘lmas ekan.

T_0 ni quyidagicha mulohaza bilan ham topish mumkin. T_0 tebranish davri. M nuqtaning bir marta to‘liq aylanib chiqadigan vaqtiga teng. Aylana uzunligi $2\pi A$ ga, nuqtaning chiziqli tezligi V esa ωA ga teng, shuning uchun:

$$T_0 = \frac{2\pi A}{\omega A} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

T_0 vaqt ichida M nuqta to‘liq aylanish qiladi, ya’ni nuqta 2π radianga teng yoy chizadi. Shuning uchun $\omega T_0 = 2\pi$ rad bo‘ladi. Bu yerdan $\omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu$ rad/s.



43- rasm.

Bu yerda ν – 1 sekunddagi tebranishlar soni bo'lib, $\nu T_0 = 1$ bo'ladi.

Shunday qilib, tebranishlarning chastotasi va davri o'zaro teskari miqdorlar bo'lar ekan. (1) yoki (2) funksiyaning grafiklarini grafiklarni almashtirish qoidalaridan foydalanib $y = \cos t$ ($y = \sin t$) funksiyaning grafigidan hosil qilish mumkin. $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ funksiya grafigini $y = \sin t$ funksiya grafigidan quyidagi almashtirishlar bilan hosil qilinadi:

1) $y = \sin t$ funksiya grafigini Oy bo'yicha A marta cho'zish (qisish) bilan $y = A \sin t$ funksiya grafigi olinadi;

2) olingan $y = A \sin t$ funksiya grafigi nuqtalarining ordinatasini o'zgartirmasdan ularning abssissalarini Ox o'q bo'ylab ω marta kamaytirib (oshirib) $y = A\sin\omega t$ funksiya grafigini hosil qilamiz;

3) $y = A\sin\omega t$ funksiya grafigini Ox o'q bo'ylab chapga (o'ngga) siljitish bilan $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ funksiya grafigini olamiz (43- rasm).

Har qanday $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ garmonik tebranish ifodasini

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t \qquad (3)$$

ko'rinishda ifodalash mumkinligini ko'rsataylik. Qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A(\sin\omega t \cos\varphi_0 + \cos\omega t \sin\varphi_0).$$

Bu yerda $c_1 = A\cos\varphi_0$, $c_2 = A\sin\varphi_0$ desak, (3) tenglikni olamiz. Endi ikkita bir xil chastotali (davrli) garmonik tebranishlarning yig'indisi yana shunday chastotali (davrli) garmonik tebranish bo'lishini ko'rsataylik. Bizga $y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ va $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ ikkita bir xil chastotali garmonik tebranishlar berilgan bo'lsin. Bu tebranishlarning yig'indisini topamiz:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \\ &= A_1 \sin \omega t \cos \varphi_1 + A_1 \cos \omega t \sin \varphi_1 + A_2 \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + \\ &+ A_2 \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2 = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \sin \omega t + \\ &+ (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \cos \omega t. \end{aligned}$$

$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = a$, $A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = b$ desak, oldin chiqarilgan $a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$ formulaga muvofiq:

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi),$$

bu yerda

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$, φ esa

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\cos \varphi_2 - \varphi_1)}},$$

$$\sin \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_1 \sin \varphi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\cos \varphi_2 - \varphi_1)}}$$

tengliklar sistemasidan aniqlanadi.

Agar $\sqrt{a^2 + b^2} = A$ desak, u holda $y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \varphi)$.

Shunday qilib, bir xil chastotali (davrli) ikkita garmonik tebranishlarni qo'shganimizda o'shanday chastotali, lekin boshqa amplitudali va boshlang'ich fazali garmonik tebranish hosil bo'ladi. Ikkita har xil chastotali (davrli) garmonik tebranishlarni qo'shganimizda esa murakkab tebranishlar hosil bo'ladi. Bunday murakkab tebranishlarning grafigi sinusoidal egri chiziq bo'lmasligi mumkin.

6- §. Teskari trigonometrik funksiyalar

Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiya aniqlangan, uzluksiz va monoton bo'lgan oraliqlarda unga teskari bo'lgan funksiya mavjud bo'ladi. Biz qaraydigan trigonometrik funksiyalar bu shartlarning barchasini qanoatlantiradi.

1. Arksinus funksiya va uning grafigi

$y=\sin x$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada o'suvchi, uzluksiz va -1 dan 1 gacha bo'lgan barcha qiymatlarni qabul qiladi. Shuning uchun bu funksiyaga $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada teskari funksiya mavjud bo'ladi. Bu teskari funksiya *arksinus* deyiladi va $\arcsin y$ ko'rinishda belgilanadi. Radiusi 1 ga teng bo'lgan aylanani qaraylik. Agar, masalan, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, u holda sinusi $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ga teng bo'lgan yoy $x = \frac{\pi}{3}$ bo'ladi.

Demak, birlik aylana yoylarining qiymatlari va ularga mos keluvchi sinuslarining qiymatlari orasidagi moslikni o'rnatish mumkin.

Shuning uchun $\frac{\pi}{3} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ tenglikni yoza olamiz.

Agar $y=\sin x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $x=\arcsin y$ bo'ladi. Ilgarigidek argumentni x orqali, funksiyani esa y orqali belgilasak, sinusga teskari funksiya $y=\arcsin x$ ko'rinishda yoziladi.

T a' r i f. *x sonning **arksinusi** deb* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *kesmaga tegishli shunday y sonni aytiladiki, uning sinusi x ga teng bo'ladi:*

$$\sin y = x \to y = \arcsin x.$$

Bu ta'rifdan ikkita ayniyat kelib chiqadi:

$$\sin\ (\arcsin\ x) = x \qquad -1 \le x \le 1$$

va

$$\arcsin(\sin\ y) = y \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right).$$

$y = \arcsin x$ funksiyaning ba'zi bir qiymatlarini hisoblaylik:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ bo‘lsa, } \arcsin(-1) = \left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ bo‘lsa, } \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ bo‘lsa, } \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$y = \arcsin x$ funksiyaning asosiy xossalari

1) bu funksiya $[-1;\ 1]$ kesmada aniqlangan;

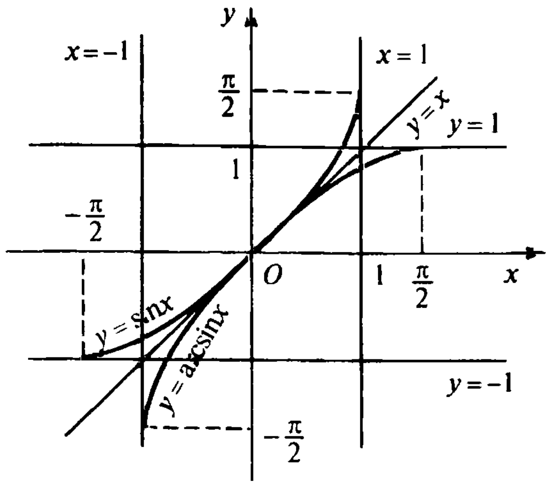
2) funksiya $-\frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\pi}{2}$ gacha o‘zgaradi, ya'ni $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$ aniqlanish sohasida uzluksiz va chegaralangan;

3) $y = \arcsin x$ — toq funksiya: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ funksiyaning grafigi $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ funksiya grafigiga birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklarining $y = x$ bissektrisasiga nisbatan simmetrik joylashadi (44- rasm);

4) funksiya $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi, ya'ni $\arcsin 0 = 0$;

5) funksiya $0 < x \le 1$ oraliqda musbat qiymatlarni ($\arcsin x > 0$), $-1 \le x < 0$ oraliqda manfiy qiymatlarni ($\arcsin x < 0$) qabul qiladi;

6) funksiya $[-1;\ 1]$ kesmada qat'iy o‘suvchi, ya'ni $-1 \le x_1 < x_2 \le 1 \Rightarrow \arcsin x_1 < \arcsin x_2$;



44- rasm.

7) funksiya $x=1$ nuqtada eng katta $M=\frac{\pi}{2}$ qiymatni, $x=-1$ bo'lganda eng kichik $m=-\frac{\pi}{2}$ qiymatni qabul qiladi.

8) funksiya grafigi $x=0$ egilish nuqtasiga ega, $]-1;\ 0[$ oraliqda funksiya grafigi qavariq, $]0;\ 1[$ oraliqda esa botiq bo'ladi.

2. Arkkosinus funksiya va uning grafigi

$y=\cos x$ funksiya $[0;\ \pi]$ kesmada kamayuvchi, uzluksiz va $[-1;\ 1]$ kesmadan olingan barcha qiymatlarni qabul qiladi.

Shuning uchun bu funksiyaga $[0;\ \pi]$ kesmada teskari funksiya mavjud bo'ladi. Bu teskari funksiyani *arkkosinus* deyiladi va $y=\arccos x$ ko'rinishda belgilanadi.

Ta'rif. *x sonning* ***arkkosinusi*** *deb* $[0;\ \pi]$ *oraliqqa tegishli shunday y sonni aytiladiki, uning kosinusi x ga teng bo'ladi:*

$$\cos y = x \Rightarrow y = \arccos x.$$

Bu ta'rifdan quyidagi 2 ta ayniyatni olamiz:

$$\cos(\arccos x) \equiv x \ (-1 \le x \le 1)$$

$$\arccos(\cos y) \equiv y \ (0 \le y \le \pi).$$

$y = \arccos x$ funksiyaning asosiy xossalari

1) bu funksiya $-1 \le x \le 1$ kesmada aniqlangan;

2) funksiya 0 dan π gacha o'zgaradi, ya'ni $0 \le \arccos x \le \pi$, uzluksiz va chegaralangandir;

3) bu funksiya $\arccos(-x) \equiv \pi - \arccos x$ shartni qanoatlantiradi;

4) funksiya $x = 1$ bo'lganda nolga aylanadi, ya'ni $\arccos 1 \equiv 0$;

5) funksiya $-1 \le x < 1$ bo'lganda musbat qiymatlarni qabul qiladi (manfiy qiymatlarga ega emas);

6) funksiya qat'iy kamayuvchi, ya'ni $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$ tengsizlikdan $\arccos x_1 > \arccos x_2$ tengsizlik kelib chiqadi;

7) $x = -1$ bo'lganda funksiya eng katta $M = \pi$ qiymatni, $x = 1$ bo'lganda esa eng kichik $m = 0$ qiymatni qabul qiladi.

8) funksiya grafigi $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ egilish nuqtaga ega, $]-1; 0[$ oraliqda uning grafigi botiq, $]0; 1[$ oraliqda esa qavariq bo'ladi.

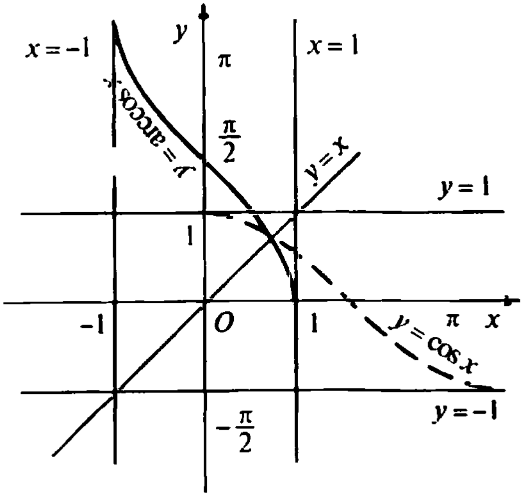
$y = \arccos x$ funksiyaning grafigini uning barcha xossalarini e'tiborga olib chizamiz. Uning grafigi birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklarining bissektrisasiga nisbatan $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ funksiya grafigiga simmetrik bo'ladi (45- rasm).

$y = \arccos x$ funksiyaning ba'zi bir qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\arccos 1 = 0, \quad \text{chunki} \quad \cos 0 = 1;$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{chunki} \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi, \quad \text{chunki} \quad \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}.$$



45- rasm.

3. Arktangens funksiya va uning grafigi

$y = \mathrm{tg}x$ funksiya $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ intervalda uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'lgani tufayli bu intervalda unga uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'lgan teskari funksiya mavjud bo'ladi. Bu teskari funksiya *arktangens* deyiladi va $y = \mathrm{arctg}x$ ko'rinishda belgilanadi.

T a ' r i f. *x sonning **arktangensi** deb* $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ *intervalga tegishli shunday y sonni aytiladiki, uning tangensi x ga teng bo'ladi:*

$$\mathrm{tg}y = x \to y = \mathrm{arctg}x, \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Ta'rifga ko'ra $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x) \equiv x$ $(-\infty < x < +\infty)$ va

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}y) \equiv y\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right).$$

$y = \mathrm{arctg}x$ funksiyaning ba'zi bir qiymatlarini hisoblaylik:

1) $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, chunki $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$;

2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, chunki $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$, chunki $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$, chunki $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$y=\operatorname{arctg}x$ funksiyaning asosiy xossalari

1) funksiya barcha haqiqiy sonlar to‘plamida aniqlangan, ya’ni $-\infty<x<+\infty$;

2) funksiya $-\frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\pi}{2}$ gacha o‘zgaradi, ya’ni $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}$, uzluksiz va chegaralangan.

3) funksiya toq: $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}x$;

4) funksiya $x=0$ bo‘lganda nolga aylanadi, ya’ni $\operatorname{arctg}\ 0\equiv 0$;

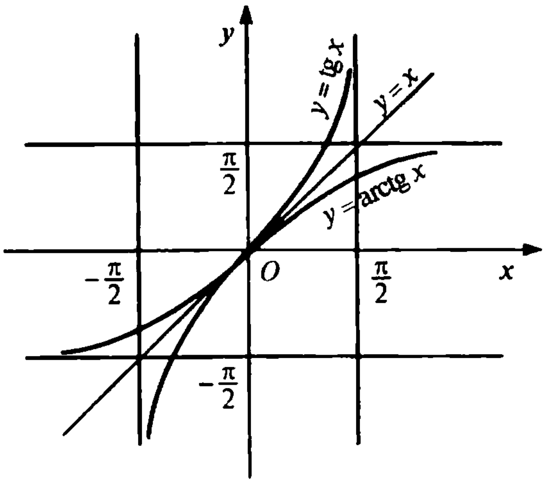
5) funksiya $0<x<+\infty$ bo‘lganda musbat qiymatlarni, $-\infty<x<0$ bo‘lganda manfiy qiymatlarni qabul qiladi;

6) funksiya aniqlanish sohasida qat’iy o‘suvchi, ya’ni $x_1<x_2$ tengsizlikdan $\operatorname{arctg}x_1<\operatorname{arctg}x_2$ tengsizlik kelib chiqadi;

7) funksiya eng katta va eng kichik qiymatlarga ega bo‘lmaydi;

8) funksiya grafigi $x=0$ egilish nuqtaga ega, $]-\infty;\ 0[$ oraliqda funksiya grafigi botiq, $]0;\ +\infty[$ oraliqda esa qavariq bo‘ladi.

$y=\operatorname{arctg}x$ funksiya grafigini y ning barcha xossalarini e’tiborga olib chizamiz. Uning grafigi birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklarining bissektrisasiga nisbatan $y=\operatorname{tg}x,\ x\in\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ funksiya grafigiga simmetrik bo‘ladi (46-rasm).



46- rasm.

4. Arkkotangens funksiya va uning grafigi

$y = \text{ctg}x$ funksiya $]0;\ \pi[$ intervalda qat'iy kamayuvchi va bu oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgani uchun bu intervalda unga uzluksiz va qat'iy kamayuvchi bo'lgan teskari funksiya mavjud bo'ladi. Bu teskari funksiya *arkkotangens* deyiladi va $y = \text{arcctg}x$ ko'rinishda belgilanadi.

T a ' r i f. *x sonning* ***arkkotangensi*** *deb* $]0;\ \pi[$ *intervalga tegishli shunday y sonni aytiladiki, uning kotangensi x ga teng bo'ladi*:

$$\text{ctg}y = x \Rightarrow y = \text{arcctg}x.$$

Ta'rifga ko'ra $\text{ctg}(\text{arcctg}x) \equiv x$ $(-\infty < x < +\infty)$ va $\text{arcctg}(\text{ctg}y) \equiv y$ $(0 < y < \pi)$.

$y = \text{arcctg}x$ funksiyaning ba'zi bir qiymatlarini hisoblaylik:

1) $\text{arcctg}1 = \frac{\pi}{4}$, chunki $\text{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$;

2) $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$, chunki $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1$;

3) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$, chunki $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

4) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$, chunki $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.

$y=\operatorname{arcctg}x$ funksiyaning asosiy xossalari

1) bu funksiya barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan, ya'ni $-\infty<x<\infty$;

2) funksiya 0 dan π gacha o'zgaradi, uzluksiz va chegaralangan;

3) $\operatorname{arcctg}x$ funksiya uchun $\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x$ ayniyat o'rinli;

4) funksiya nollarga ega emas;

5) funksiya x argumentning barcha qiymatlarida musbat qiymatlarni qabul qiladi ($\operatorname{arcctg}x>0$);

6) funksiya qat'iy kamayuvchi, ya'ni $x_1<x_2$ tengsizlikdan $\operatorname{arcctg}x_1>\operatorname{arcctg}x_2$ tengsizlik kelib chiqadi;

7) funksiya eng katta va eng kichik qiymatlarga ega emas.

8) funksiya grafigi $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ egilish nuqtasiga ega; $]-\infty;0[$ oraliqda uning grafigi qavariq, $]0;\infty[$ oraliqda esa botiq.

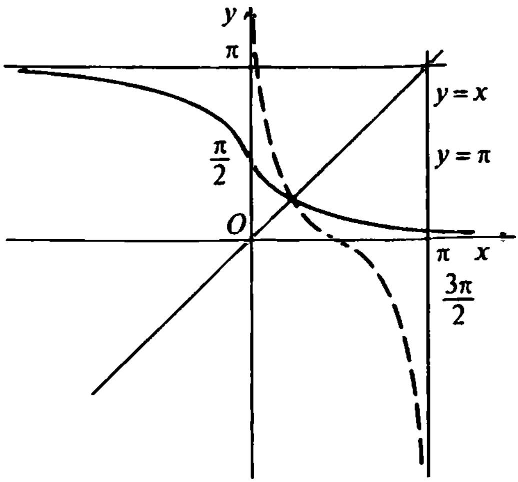
$y=\operatorname{arcctg}x$ funksiya grafigini uning barcha xossalarini e'tiborga olib chizamiz. Uning grafigi birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklarining $y=x$ bissektrisasiga nisbatan $y=\operatorname{ctg}x$, $x\in\,]0;\pi[$ funksiya grafigiga simmetrik bo'ladi (47-rasm).

1- misol. $\arccos(\cos 18)+\arcsin(\sin 16)$ ni hisoblang.

Yechish. $y_1=\arccos(\cos 18)$ bo'lsin. 18 soni π ga karrali bo'lgan qanday sonlar oralig'ida yotganligini aniqlaymiz:

$$5\pi<18<6\pi\Rightarrow-\pi<18-6\pi<0\Rightarrow0<6\pi-18<\pi;$$

$$y_1=\arccos(\cos 18)=\arccos[\cos(6\pi-18)]=6\pi-18.$$



47- rasm.

$y_2 = \arcsin(\sin 16)$ bo‘lsin. 16 soni $\frac{\pi}{2}$ ga karrali bo‘lgan qanday sonlar oralig‘ida yotishini aniqlaymiz:

$$5\pi < 16 < \frac{11\pi}{2} \Rightarrow 0 < 16 - 5\pi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 16 = \sin(16 - 5\pi);$$

$$y_2 = \arcsin(\sin 16) = \arcsin[\sin(16 - 5\pi)] \equiv 16 - 5\pi;$$

$$y_2 + y_2 = 6\pi - 18 + 16 - 5\pi = \pi - 2 \approx 1,14.$$

2- m i s o l . $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-2)) + \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}5)$ ni hisoblang.

Y e c h i s h . $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-2))$ ni hisoblaymiz. -2 soni $\frac{\pi}{2}$ ga karrali bo‘lgan qanday sonlar oralig‘ida yotishini aniqlaymiz:

$$-\pi < -2 < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2 < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 2 - \pi < 0,$$

$\operatorname{tg}(-2) = \operatorname{tg}(2 - \pi)$, $y_1 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-2)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2 - \pi)) \equiv 2 - \pi$;

$y_2 = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}5)$ bo‘lsin. 5 soni π va 2π sonlari oralig‘ida yotadi, ya’ni

$\pi < 5 < 2\pi \Rightarrow 0 < 5 - \pi < \pi \Rightarrow \mathrm{ctg}(5 - \pi) = \mathrm{ctg}\ 5.$
$y_2 = \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}5) = \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}(5 - \pi)) = 5 - \pi.$
$y_1 + y_2 = 2 - \pi + 5 - \pi = 7 - 2\pi \approx 7 - 6{,}28 = 0{,}72.$

7-§. Trigonometrik tenglamalar va tengsizliklarni yechish

1. Eng sodda trigonometrik tenglamalarni yechish

$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\ x = a$, $\mathrm{ctg}\ x = a$ ko‘rinishdagi tenglamalar *eng sodda trigonometrik tenglamalar* deyiladi.

A. cos *x* = *a* tenglama

Bu yerda quyidagi hollarni alohida-alohida qarash mumkin: 1) $|a| > 1$; 2) $|a| \le 1$.

1) agar $|a| > 1$ bo‘lsa, u holda

$$\cos x = a \tag{1}$$

tenglama yechimlarga ega bo‘lmaydi, chunki har qanday x uchun $|\cos x| \le 1$ bo‘ladi.

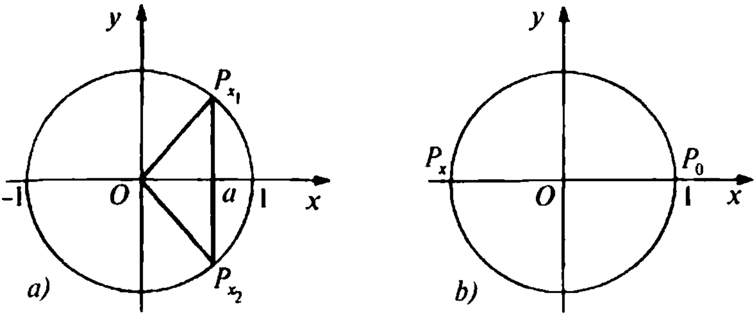
2) $|a| \le 1$ bo‘lsin. $\cos x = a$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha x larni topish kerak. $[0; \pi]$ kesmada (1) tenglamaning bitta aniq yechimi mavjud, bu yechim arccos a sondan iborat.

Kosinus juft funksiya bo‘lgani uchun $[-\pi; 0]$ kesmada ham tenglama aniq bitta yechimga ega, bu yechim – arccos a sondan iborat. Shunday qilib, (1) tenglama uzunligi 2π ga teng bo‘lgan $[-\pi; \pi]$ kesmada ($a = 1$ bo‘lganda bir xil) ikkita yechimga ega: $x = \pm \arccos a$.

$y = \cos x$ funksiya davriyligi tufayli qolgan yechimlarning hammasi bu yechimlardan $2\pi n (n \in Z)$ ga farq qiladi, ya’ni (1) tenglama barcha yechimlarining formulasi bunday:

$$x = \pm \arccos \alpha + 2\pi n,\ n \in Z. \tag{2}$$

(1) tenglama yechimlarini birlik aylanada namoyish qilish mumkin. Ta’rifga ko‘ra $\cos x$ birlik aylana P_x nuqtasining abssissasiga teng bo‘ladi. Agar $|a| < 1$ bo‘lsa, bunday



48-rasm.

nuqtalar ikkita (48- *a* rasm); $a = 1$ yoki $a = -1$ bo'lsa, bitta bo'ladi (48- *b* rasm).

$a = 1$ da arccos a va $-$arccos a sonlar bir xil bo'lib, ular nolga teng bo'ladi, shu sababli $\cos x = 1$ tenglamaning yechimlarini $x = 2\pi n,\ n \in Z$ ko'rinishda yozish qabul qilingan.

$a = -1$ va $a = 0$ bo'lgan hollar uchun esa (1) tenglama yechimlarini yozishning «alohida» shakli qabul qilingan:

$$\cos x = -1, \text{ bunda } x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in Z,$$

$$\cos x = 0, \text{ bunda } x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z,$$

1- m i s o l. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tenglamani yeching.

(2) formulaga ko'ra: $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in$ Z.

$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning yechimi quyidagicha bo'ladi: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

2- m i s o l. $2\cos(\frac{\pi}{4} - 3x) = \sqrt{2}$ tenglmani yeching.

Y e c h i s h. (2) formulaga binoan:

$$\frac{\pi}{4} - 3x = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z\ ,$$

$$\frac{\pi}{4} - 3x = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ -3x = \pm\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$$x = \mp\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}n\pi, n \in Z.$$

B. sin $x = a$ tenglama

$$\sin x = a \qquad (3)$$

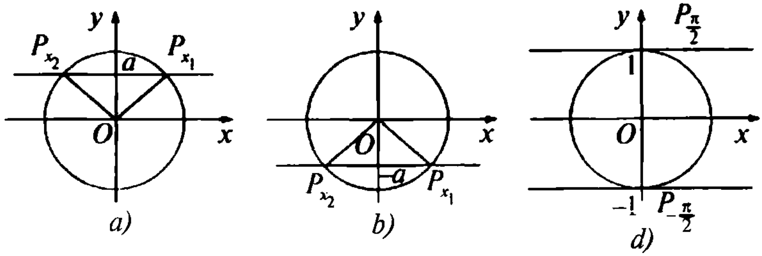
tenglama $|a| > 1$ da yechimlarga ega bo'lmaydi, chunki har qanday $x \in R$ uchun $|\sin x| \le 1$. $|a| \le 1$ da $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada sin x funksiya uzluksiz va o'suvchi bo'lgani uchun (3) tenglama aniq bitta yechimga ega: x_1 = arcsin a. $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ oraliqda sin x funksiya uzluksiz va kamayuvchi hamda -1 dan 1 gacha barcha qiymatlarni qabul qiladi. Bu oraliqda ham sin x funksiya o'zining qiymatini bir marta qabul qiladi. $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ oraliqda ham (3) tenglama bitta yechimga ega bo'ladi.

(3) tenglamaning bu yechimini topish uchun $\sin x = \sin(\pi - x)$ formuladan foydalanamiz. Agar $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ bo'lsa, u holda $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bo'ladi (chunki $\pi - x$ ayirmaning eng katta qiymati 90° ga, eng kichik qiymati esa $-90°$ ga teng). Bunday holda $\sin x = a$ tenglama $\sin(\pi - x) = a$ tenglamaga teng kuchli bo'ladi.

$\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bo'lgani uchun $\pi - x$ = arcsin $a \Rightarrow x = \pi -$ arcsin a. Endi (3) tenglamaning barcha yechimlarini olish uchun sin x funksiyaning davriyligidan foydalanamiz, har bir topilgan ikkita yechimga $2\pi n$, $n \in Z$ sonni qo'shamiz. (3) tenglamaning yechimlari to'plami ikkita cheksiz qism to'plamlardan iborat bo'ladi:

$$x = \arcsin a + 2n\pi, \qquad (4)$$

$$x = (2n + 1)\pi - \arcsin a. \qquad (5)$$



49-rasm.

Bu yechimlarni bitta formula bilan ham yozish mumkin:

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \ k \in Z. \qquad (6)$$

Haqiqatan, $k = 2n$, $n \in Z$ bo'lganda (6) formuladan (4)ni, $k = 2n + 1$, $n \in Z$ bo'lganda (6) formuladan (5) yechimlarni olamiz.

(3) tenglama yechimlarni birlik aylanada namoyish qilish qulay. Ta'rifga ko'ra $\sin x$ birlik aylanadagi P_x nuqtaning ordinatasidir. Agar $|a| < 1$ bo'lsa, bunday nuqtalar ikkita (49- *a, b* rasmlar); $a = \pm 1$ da nuqta bitta (49- *d* rasm).

Agar $a = 1$ bo'lsa, $\arcsin a$ va $\pi - \arcsin a$ sonlar bir xil bo'ladi, shu sababli $\sin x = 1$ tenglama yechimlarini bunday yozish qabul qilingan:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

$a = -1$ va $a = 0$ da yechimlarni bunday yozish qabul qilingan:

agar $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ bo'lsa, $\sin x = -1$;
agar $x = n\pi$, $n \in Z$ bo'lsa, $\sin x = 0$.

3- m i s o l. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. (6) formulaga ko'ra: $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi, n \in Z$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ bo'lgani uchun $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi$, $n \in Z$.

4- m i s o l. $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. (6) formuladan foydalanib, topamiz:

$$4x-\frac{\pi}{6}=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi,\ k\in Z;$$

$$4x=\frac{\pi}{6}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \ k\in Z;$$

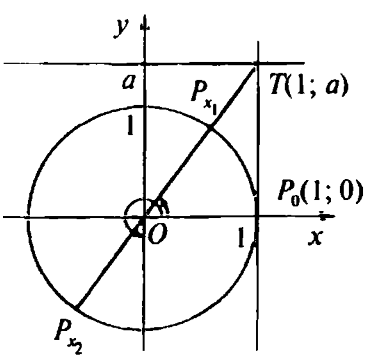
$$x=\frac{\pi}{24}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4},k\in Z.$$

D. tg*x* = *a* (7) tenglama

$y=\operatorname{tg}x$ funksiya $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ oraliqda uzluksiz va o'suvchi bo'lgani uchun bu oraliqda unga teskari funksiya mavjud bo'ladi. Har qanday a da $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ intervalda aniq bitta shunday x mavjudki, $\operatorname{tg}x=a$ bo'ladi. Arctangensning ta'rifiga ko'ra (7) tenglama $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ intervalda $x=\operatorname{arctg}a$ yechimga ega bo'ladi. Tangens davri π ga teng davriy funksiya bo'lgani uchun (7) tenglamaning qolgan yechimlari topilgan yechimdan $n\pi$ ga farq qiladi, ya'ni

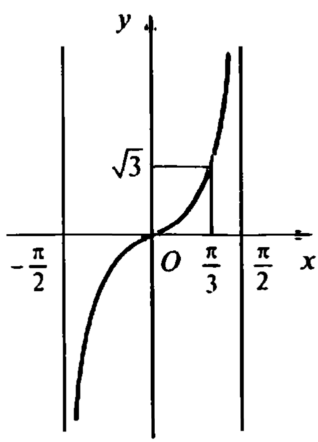
$$x=\operatorname{arctg}a+n\pi,\ n\in Z. \qquad (8)$$

(7) tenglama yechimlarini tangenslar chizig'ini qarash bilan namoyish qilish qulay. $\operatorname{tg}x$ — bu OP_x to'g'ri chiziq bilan tangenslar chizig'ining kesishish nuqtasi T ning ordinatasi ekanligini eslasak, har qanday a son uchun tangenslar chizig'ida ordinatasi a ga teng bittagina $T(1;\ a)$ nuqta mavjud (50-rasm).

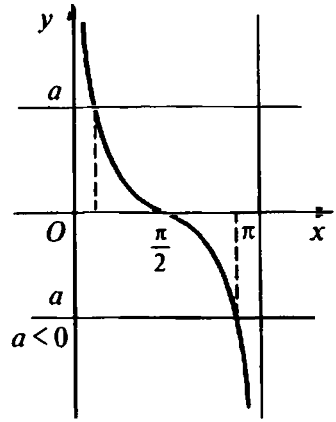


50- rasm

OT to'g'ri chiziq birlik aylana bilan ikkita nuqtada kesishadi. $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ inter-



51- rasm.



52- rasm.

valga o'ng yarimaylananing P_{x_1} nuqtasi mos keladi, bu nuqta $x_1 =$ arctg$a$ ni qanoatlantiradi.

5- m i s o l . tg$x = \sqrt{3}$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h . (8) formulaga ko'ra: $x = \text{arctg}\sqrt{3} + n\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in Z$ (51- rasm).

6- m i s o l . $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h . (8) formulaga ko'ra:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \text{arctg}(-1) + n\pi \Rightarrow -\frac{x}{2} = -\text{arctg}1 - \frac{\pi}{4} + n\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Demak, $x = \pi + 2n\pi$, $n \in Z$.

E. ctg = a(9) tenglama

$y =$ ctg$x$ funksiya $]0; \pi[$ oraliqda uzluksiz kamayuvchi bo'lgani tufayli bu oraliqda unga teskari funksiya mavjud bo'ladi. Arkkotangensning ta'rifiga ko'ra (9) tenglamaning $]0; \pi[$ oraliqdagi yechimi arcctg$a$ bo'ladi. (9) tenglamaning barcha yechimlarini olish uchun arcctg$a$ yechimga $n\pi \in Z$ ko'rinishdagi sonni qo'shish kerak. Natijada (9) tenglamaning yechimlarini quyidagicha olamiz (52- rasm):

$$x = \operatorname{arcctg} a + n\pi, \ n \in Z. \qquad (10)$$

ctg $x = a$ tenglama istalgan $a \in R$ uchun $-0 < x < \pi$ oraliqda bitta yechimga ega bo'ladi. Agar $a \geq 0$ bo'lsa, yechim $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ oraliqda joylashgan, agar $a < 0$ bo'lsa, bu yechim $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ oraliqda joylashgan bo'ladi.

7- misol. ctg $x = 1$ tenglamani yeching.

Yechish. (10) formulaga ko'ra topamiz:

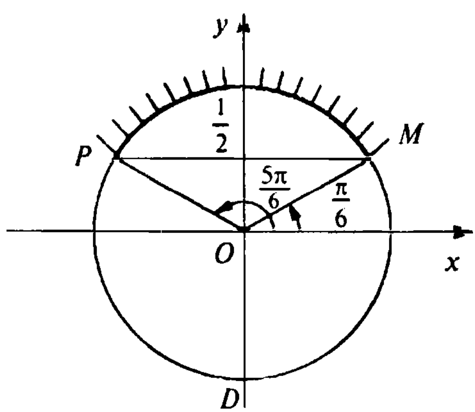
$$x = \operatorname{arcctg} 1 + n\pi = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z.$$

2. Eng sodda trigonometrik tengsizliklarni yechish

Ushbu

$$\sin x > a,\ \cos x > a,\ \operatorname{tg} x > a,\ \operatorname{ctg} x > a,$$
$$\sin x \leq a,\ \cos x \leq a,\ \operatorname{tg} x \leq a,\ \operatorname{ctg} x \leq a$$

ko'rinishdagi tengsizliklar *eng sodda trigonometrik tengsizliklar* deyiladi. Murakkab tengsizliklarni yechish sodda tengsizliklardan birini yechishga keltiriladi.



53- rasm.

Ularni yechish usullarini misollarda qaraymiz.

1- m i s o l . $\sin x > \frac{1}{2}$ tengsizlikni yechish.

Y e c h i s h . Birlik aylanada ordinatasi $\frac{1}{2}$ ga teng bo‘lgan nuqtani belgilab, bu nuqta orqali Ox o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq aylanani M va P nuqtalarda kesadi. Ordinatasi $\frac{1}{2}$ dan katta bo‘lgan nuqtalar MP yoyni to‘ldiradi. Yechimni formula ko‘rinishida yozamiz (53- rasm):

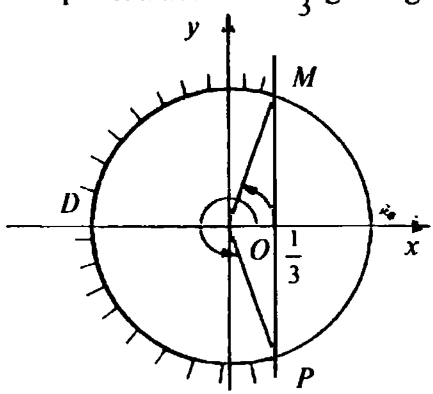
$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

2- m i s o l . $\sin x < \frac{1}{2}$ tengsizlikni yeching. Bu tengsizlikning yechimlari to‘plami PDM yoyidagi nuqtalar to‘plamidan iborat (53- rasm). Formula ko‘rinishida bu yechimlar to‘plami quyidagicha yoziladi:

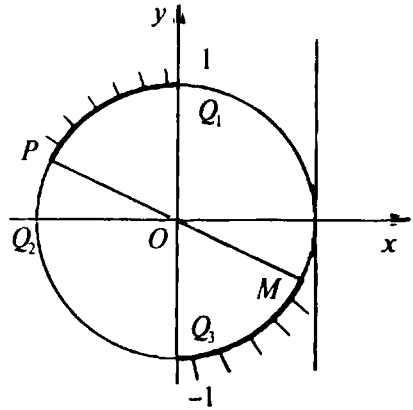
$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{13}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in Z.$$

3- m i s o l . $\cos x < \frac{1}{3}$ tengsizlikni yeching.

Bu tengsizlikning yechimlari to‘plamini geometrik tasvirlash maqsadida abssissasi $\frac{1}{3}$ ga teng bo‘lgan nuqtani



54- rasm.



55- rasm.

belgilab, u nuqta orqali Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Abssissalari $\frac{1}{3}$ dan kichik bo'lgan nuqtalar MDP yoyni uzluksiz to'ldiradi (54- rasm). Bu tengsizlikning yechimlar to'plami

$$\arccos\frac{1}{3} + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos\pm\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

4- m i s o l. $\cos x \leq \frac{1}{3}$ tengsizlikni yeching.

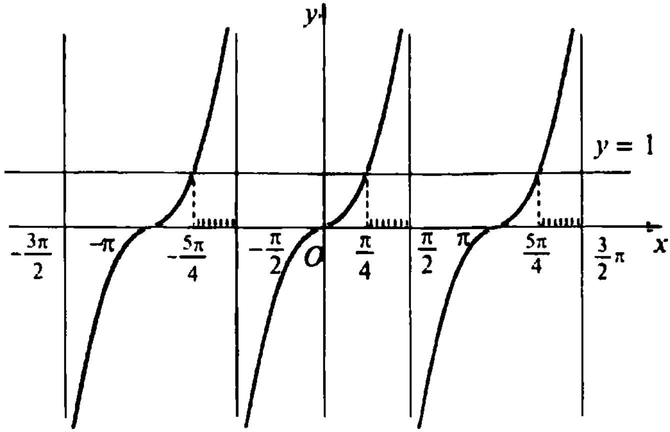
Bu tengsizlikning yechimlari to'plami $\cos x < \frac{1}{3}$ tengsizlik yechimlari to'plamiga P va M nuqtalarning abssissalariga mos keluvchi sonlar qo'shilgan to'plamdan iborat, ya'ni berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami

$$\arccos\frac{1}{3} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - \arccos\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$$

ko'rinishga ega.

5- m i s o l. $\operatorname{tg} x \leq -\frac{1}{2}$ tengsizlikni yeching.

Y e c h i s h . Yechimni geometrik tasvirlash maqsadida birlik aylanada tangenslar o'qini o'tkazamiz, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$



55- rasm.

bo'lgan nuqtani o'ng yarimaylanada belgilaymiz. $\operatorname{tg} x \le -\frac{1}{2}$ tengsizlik Q_3Q_1 yarimaylananing Q_3M yoyida va chap yarimaylananing Q_1P yoyida bajariladi (55- rasm).

Yechimlar to'plami:

Q_3M yoy uchun:

$$-\frac{\pi}{2}+2n\pi < x \le -\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+2n\pi,\ k\in Z\ .$$

Q_1P yoy uchun:

$$\frac{\pi}{2}+2n\pi < x \le \pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+2n\pi,\ k\in Z\ .$$

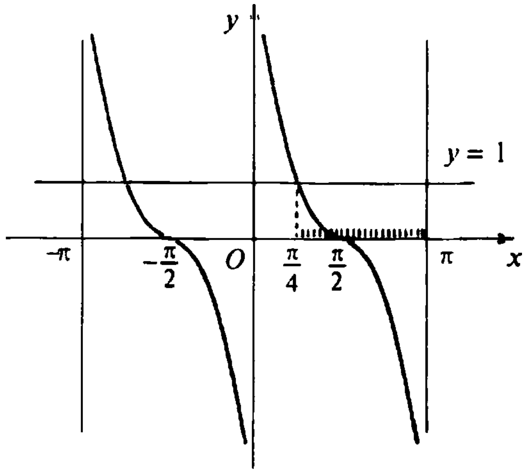
Bu yechimlarni birlashtirib yozamiz:

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi < x \le -\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+k\pi,\ k\in Z\ .$$

Trigonometrik tengsizliklarning yechimlari to'plamini birlik aylanada emas, balki koordinatalar o'qida ham geometrik tasvirlash mumkin.

6- m i s o l. $\operatorname{tg} x \ge 1$ tengsizlikni yeching.

Y e c h i s h. Bu tengsizlikni yechish maqsadida $y = 1$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq $\operatorname{tg} x$ funksiyaning grafigini cheksiz ko'p nuqtalarda kesadi (56- rasm).



57- rasm.

Chizmaga tg $x \geq 1$ tengsizlikning yechimlar to'plami 3 ta oraliqda tasvirlangan. x ning bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlari to'plami $\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$ oraliqdan iborat. To'liq yechimlar to'plamini olish uchun tg x funksiyaning davriyligidan foydalanamiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z.$$

7- misol. ctg $x \leq 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $y = 1$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq ctg$x$ funksiya grafigini cheksiz ko'p nuqtalarda kesadi. 57- rasmda ctg $x \leq 1$ tengsizliklar yechimlarining to'plami

$\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right[$ oraliqda ajratib ko'rsatilgan.

Berilgan tengsizliklarning yechimlari to'plami $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq$ $\leq x < \pi + k\pi, \quad k \in Z$ ko'rinishga ega.

Quyidagi jadvalda eng sodda tengsizliklarning yechimlari to'plami keltirilgan.

Tengsizlikning ko'rinishi	Tengsizlikning yechimlar to'plami
$\sin x > a(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (\arcsin a + 2k\pi;\ \pi - \arcsin a + 2k\pi)$
$\sin x < a(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (-\pi - \arcsin a + 2k\pi;\ \arcsin a + 2k\pi)$
$\cos x > a(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (\arccos a + 2k\pi;\ \arccos a + 2k\pi)$
$\cos x < a(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (\arccos a + 2k\pi;\ 2\pi - \arccos a + 2k\pi)$
$\operatorname{tg} x > a$	$x \in (\operatorname{arctg} a + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi)$
$\operatorname{tg} x < a$	$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \operatorname{arctg} a + k\pi)$
$\operatorname{ctg} x > a$	$x \in (k\pi;\ \operatorname{arctg} a + k\pi)$
$\operatorname{ctg} x < a$	$x \in (\operatorname{arctg} a + k\pi;\ \pi + k\pi)$
	$k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$

8-§. Trigonometrik tenglamalar va tengsizliklarni yechish usullari

1. Trigonometrik tenglamalarni yechish usullari

A. Bir funksiyaga keltirish usuli

Agar tenglamada noma'lumning turli trigonometrik funksiyalari qatnashsa, bunday holda bu funksiyalarning barchasini ularning biri orqali ifodalash bilan noma'lum funksiyalarning faqat bittasi ishtirok etgan trigonometrik tenglamaga keltirish mumkin.

1-misol. $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $\cos^2 x$ ni $1 - \sin^2 x$ ga almashtiramiz:

$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$. Bu tenglama quyidagi sodda tenglamalarga ajratiladi:

$$\sin x = -\frac{1}{2},\ \sin x = 2.$$

Birinchi tenglama ushbu umumiy yechimga ega:

$$x=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z;$$

ikkinchi tenglama yechimga ega emas. Chunki $|\sin x|\le 1$.

Bitta funksiyaga keltirib yechiladigan tenglamalarning bir vakili $\sin x$ va $\cos x$ ga nisbatan bir jinsli bo‘lgan

$$a_0 \sin^n x+a_1 \sin^{n-1} x\cos x+a_2 \sin^{n-2} x\cos^2 x+\ldots+$$
$$+a_n \cos^n x=0 \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamadir. (1) ko‘rinishdagi tenglamaning ikkala qismini $\cos^n x\neq 0$ ga bo‘lib, unga teng kuchli

$$a_0\mathrm{tg}^n x+a_1\mathrm{tg}^{n-1} x+\ldots+a_n=0$$

tenglamani olamiz.

2-misol. $3\sin^2 x-5\sin x\cos x+8\cos^2 x=2$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirish uchun $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ayniyatdan foydalanamiz:

$$3\sin^2 x-5\sin x\cos x+8\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

Soddalashtiramiz: $\sin^2 x-5\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$. Bu tenglamaning ikkala qismini $\cos^2 x$ ga bo‘lib, $y=\mathrm{tg}x$ desak, $y^2-5y+6=0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu tenglama $y_1=2$ va $y_2=3$ ildizlarga ega. Natijada $\mathrm{tg}x=2$ va $\mathrm{tg}x=3$ sodda tenglamaga ega bo‘lamiz. Ularni yechib, berilgan tenglamaning yechimlarini topamiz:

$$x=\mathrm{arctg}\,2+k\pi,\quad x=\mathrm{arctg}\,3+\pi n,\ k,\ n\in Z.$$

B. Ko‘paytuvchilarga ajratish usuli

Agar barcha hadlarni tenglamaning chap tomoniga o‘tkazgandan keyin chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratish mumkin bo‘lsa, tenglama nolga tenglashgan ko‘paytma shakliga keladi. So‘ngra navbat bilan har bir ko‘paytuvchini nolga tenglashtirib, hosil bo‘lgan tenglamalarni yechib chiqish va topilgan barcha yechimlarni bir to'plamga birlashtirish kerak.

3-misol. $\sin 5x - \cos 3x = \sin x$ tenglamani yeching.

Yechish. Barcha qo'shiluvchilarni chap tomonga o'tkazib, trigonometrik funksiyalarning yig'indisini ko'paytmaga almashtiramiz va ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$(\sin 5x - \sin x) - \cos 3x = 0,$$

$$2 \sin 2x \cos 3x - \cos 3x = 0,$$

$$\cos 3x(2\sin 2x - 1) = 0.$$

Berilgan tenglama quyidagi ikkita tenglamaga ajraladi, ularni yechamiz:

1) $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{2k+1}{6}\pi, k \in Z;$

2) $\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \Rightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2},$
$n \in Z.$

4-misol. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning chap qismini guruhlaymiz:
$(\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) = 0.$
Qavs ichidagi har bir yig'indini ko'paytmaga almashtiramiz:

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{5x}{2}(\cos\frac{3x}{2} +$$

$$+\cos\frac{x}{2}) = 0 \Rightarrow \sin\frac{5x}{2}\cos x \cdot \cos\frac{x}{2} = 0.$$

Oxirgi tenglama uchta tenglamaga yoyiladi:

1) $\sin\frac{5x}{2} = 0;$ 2) $\cos x = 0;$ 3) $\cos\frac{x}{2} = 0;$

ularni yechib topamiz: $x = \frac{2}{5}k\pi,$ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$ $k \in Z,$
$x = \pi + 2k\pi,$ $k \in Z.$

Berilgan tenglama chap qismining har bir qo'shiluvchisi x ning barcha topilgan qiymatlarida mazmunga ega. Chet ildizlarga ega emas.

Yechimlar: $x=\frac{2}{5}k\pi;\ x=\frac{\pi}{2}(2k+1);\ x=\pi(2k+1),$ $k\in Z$

D. To'ldiruvchi burchak kiritish usuli

$$a\cos x+b\sin x=c \tag{3}$$

ko'rinishdagi tenglama

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4}$$

tenglamani yechish bilan teng kuchlidir. φ burchak

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

tengliklar sistemasidan aniqlanadi. Agar $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, ya'ni $a^2+b^2\ge c^2$ bo'lsa, (4) tenglama va unga teng kuchli bo'lgan (3) tenglama yechimga ega:

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi+k\pi,\ k\in Z.$$

Agar $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|>1$, ya'ni $a^2+b^2<c^2$ bo'lsa, (3) tenglama yechimga ega bo'lmaydi.

5-misol. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning har ikkala qismini ikkiga bo'lamiz:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}.$$

Agar $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ,\ \frac{1}{2}=\sin 30^\circ$ ekanligini e'tiborga olsak, berilgan tenglama $\sin(x+30^\circ)=\frac{1}{2}$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamani yechamiz: $x+30^\circ=(-1)^n 30^\circ+180^\circ n$, $n\in Z$, $n=2k$ va $n=2k+1$ desak, $x=360^\circ k$ va $x=120^\circ(3k+1)$, $k\in Z$ yechimlar to'plamini olamiz.

6-m i s o l. $3\sin x + 4\cos x = 5$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. $\sqrt{3^2+4^2}=5$ bo'lgani uchun (4) ko'rinishda berilgan tenglama $\sin(x+\varphi)=1$ ko'rinishni oladi. φ burchak $\sin\varphi=\frac{4}{5}$, $\cos\varphi=\frac{3}{5}$ munosabatlarning biridan aniqlanadi. $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$ bo'lsin. U holda berilgan tenglama $x=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}+2k\pi,\ k\in Z$ yechimga ega.

E. R a t s i o n a l l a s h t i r i s h u s u l i

Ushbu

$$R(\sin nx,\quad \cos kx,\quad \operatorname{tg} mx,\quad \operatorname{ctg} x)=0 \qquad (5)$$

ko'rinishidagi trigonometrik tenglamani burchaklar yig'indisining trigonometrik funksiyalari yordamida $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ argumentlarning ratsional funksiyasiga keltirish mumkin.

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\qquad \operatorname{ctg} x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

trigonometrik almashtirishlarda $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ desak, R funksiya t o'zgaruvchining ratsional funksiyasiga aylanadi.

Lekin bu almashtirishdan foydalanganda berilgan tenglama $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ga nisbatan yuqori darajali tenglamaga kelib qolishi mumkin. Bunday hollarda $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ yoki $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ almashtirishlardan foydalanish qulay bo'ladi.

7-m i s o l. $a\sin x+b\cos x=c$ (6) tenglamani yeching.

Y e c h i s h. $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$.

Bu yerdan $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ifodani (6) ga qo'yib, tegishli almashtirishlardan keyin t ga nisbatan

$$(b + c)t^2 - 2at + c - b = 0 \tag{7}$$

kvadrat tenglamani olamiz. $b \neq -c$ bo'lsa, (7) tenglama

$$t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} \tag{8}$$

yechimlarga ega bo'ladi.

Quyidagi hollarni qaraymiz:

1. Agar $a^2 + b^2 < c^2$ bo'lsa, (6) tenglama yechimga ega bo'lmaydi. Chunki (7) tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas.

2. $a^2 + b^2 \geq c^2$ va $c \neq -b$ bo'lsa, (7) tenglama haqiqiy yechimlarga ega bo'ladi va $x = 2 \operatorname{arctg} t$ dan (6) tenglamaning yechimini olamiz:

$$x = 2\left(\operatorname{arctg}\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + k\pi\right),\ k \in Z\,.$$

3. Agar $c = -b$ bo'lsa, (6) tenglama ikkita guruh yechimlar to'plamiga ega bo'ladi:

$$x = (2k + 1)\pi \text{ va } x = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + 2k\pi\,.$$

8-m i s o l. $\sin x - 2\cos x = 2$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Ushbu

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

almashtirishlar yordamida berilgan tenglama $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$ ko'rinishni oladi. Qaralayotgan holda $c = -b = 2$. Yuqorida sanalgan 3- holga egamiz. Shuning uchun berilgan tenglama ikkita

$$x = 2\operatorname{arctg}2 + 2k\pi,\ x = (2k+1)\pi,\ k \in Z$$

yechimlar guruhiga ega bo'ladi.

$R = (\sin x \pm \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$ ko'rinishdagi tenglama $t = \sin x \pm \cos x$ almashtirish bilan algebraik tenglamaga keltiriladi. t ga nisbatan $R\left(t, \frac{t^2-1}{2}\right) = 0$ yoki $R\left(t, \frac{1-t^2}{2}\right) = 0$ ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz.

9-misol. $\sin x + \cos x - 2\sin x \cdot \cos x = 1$ tenglamani yeching.

Yechish. $t = \sin x + \cos x$ desak, $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$ ayniyatdan $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2-1}{2}$ kelib chiqadi. Natijada t ga nisbatan $t - t^2 = 0$ tenglamani olamiz. Bu tenglamaning ildizlarini topamiz: $t_1 = 0$; $t_2 = 1$.

Shunday qilib, berilgan tenglamani yechish quyidagi ikkita tenglamani yechishga keltirildi:

1) $\sin x + \cos x = 0$;

$\operatorname{tg} x = -1$,

$x = \frac{3\pi}{4} + n\pi,$

$n \in Z$

2) $\sin x + \cos x = 1$.

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 1,$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + n\pi;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z.$$

F. Trigonometrik funksiyalarning darajasini pasaytirish usuli

Trigonometrik tenglamalarning darajasini pasaytirish bilan ularni soddalashtirib yechish mumkin. Agar tenglamada sin x va cos x ning juft darajalari qatnashsa, yarimargumentning trigonometrik formulalari yordamida darajani pasaytirish mumkin.

10-misol. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = x = \frac{29}{16} \cos^4 2x$ tenglamani yeching.

Yechish. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ almashtirishlar bajaramiz, natijada

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5 = \frac{29}{16}\cos^4 2x$$

tenglamani olamiz. Bu yerda $\cos 2x = t$ desak, $24t^4 - 10t^2 - 1 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama $t^2 = \frac{1}{2}$ yagona haqiqiy yechimga ega. Natijada

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \cos 4x = 1 \Rightarrow \cos 4x = 0$$

sodda tenglamani olamiz. Bu tenglamaning yechimi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in Z$.

11-misol. $\sin x + \sin 5x = 2$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning chap va o'ng qismini baholaymiz. $|\sin x| \le 1$, $|\sin 5x| \le 1$ bo'lgani uchun berilgan tenglama $\sin x = 1$, $\sin 5x = 1$ tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'ladi. Bu tenglamalar yechimlarining to'plami quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5},\ n \in Z. \end{array}\right| \qquad (9)$$

Sistemaning, shuningdek, berilgan tenglamaning yechimlari x ning bir vaqtda ikkala to'plamga tegishli bo'lgan qiymatlaridan iborat bo'ladi. x ning bunday qiymatlarini topish uchun sistema tenglamalari yechimlarining o'ng qismlarini tenglashtirib, hosil bo'lgan tenglikni qanoatlantiradigan n va k ning butun qiymatlarini topamiz:

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{10}+\frac{2n\pi}{5} \Rightarrow n-5k=1.$$

Oxirgi tenglikni qanoatlantiradigan n va k butun sonlar quyidagicha bo'ladi: k: 1, 2, 3, 4, ..., k ...; n: 6, 11, 16, 21, ..., $5n + 1$.

Demak, $n = 5k + 1$, $k \in N$ bo'lganda (9) yechimlar to'plami umumiy nuqtalarga ega, ya'ni x ning qiymatlari bir xil bo'ladi:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z;$$

$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}=\frac{\pi}{10}+\frac{2(5k+1)\pi}{5}=\frac{\pi}{10}+2k\pi+\frac{2\pi}{5}=$$

$$=\frac{5\pi}{10}+2k\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{2}(4k+1).$$

Berilgan tenglama $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$ yechimga ega.

2. Trigonometrik tengsizliklarni yechish usullari

Trigonometrik tengsizliklarni yechish usullari ham trigonometrik tengliklarni yechishda qo'llanilgan usullardek bo'ladi. Trigonometrik tengsizliklarni ham bitta funksiyaga keltirish, ko'paytuvchilarga ajratish, to'ldiruvchi burchak kiritish, algebraik tenglamaga keltirish, trigonometrik fuksiyalarning darajasini pasaytirish va shu kabi usullar bilan yechish mumkin.

Trigonometrik tengsizliklarni yechish usullarini misollar yechish bilan namoyish qilamiz.

1- m i s o l. $2\sin^2 x-7\sin x+3>0$ tengsizlikni yeching.

Y e c h i s h. Agar $\sin x = y$ desak,

$$2y^2 - 7y + 3 > 0$$

kvadrat tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikning yechimlari to'plami $y<\frac{1}{2}$, $y>3$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi sonlar to'plamidan iborat bo'ladi. Berilgan tengsizlikni yechish

$$\sin x < \frac{1}{2}, \ \sin x > 3$$

tengsizliklarni yechish bilan teng kuchlidir. Ikkinchi tengsizlik yechimga ega emas. Birinchi tengsizlikning yechimlari to'plami

$$x \in \left]-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[, \ k \in Z$$

berilgan tengsizlikning yechimlari bo'ladi.

2- misol. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Chap tomonda turgan qo'shiluvchilarning yig'indisini ko'paytmaga almashtiramiz:

$$\cos 2x + 2\cos 2x \cos x > 0 \Rightarrow \cos 2x(2\cos x + 1) > 0.$$

Oxirgi tengsizlik

$$\begin{cases} \cos 2x < 0, \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} \cos 2x > 0, \\ \cos x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasini yechish bilan teng kuchli. Bu sistema yechimlarini birlashtirib, berilgan tengsizlikning yechimlari to'plamini olamiz:

$$\left]\frac{2\pi}{3} + 2n\pi; \ \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4} + 2n\pi; \ \frac{4\pi}{3} + 2n\pi\right[\cup$$

$$\cup \left]-\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \ \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right[, \ n \in Z.$$

3- misol. $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x < 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikning ikkala qismini $\cos^2 x \neq 0$ ga bo'lamiz:

$\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}x - 3 < 0 \Rightarrow (\mathrm{tg}x + 3)(\mathrm{tg}x - 1) < 0$. Bu tengsizlik $-3 < \mathrm{tg}x < 1$ tengsizlikka teng kuchli. Bu tengsizlikning yechimlari to'plami $-\mathrm{arctg}3 + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in Z$ berilgan tengsizlikning yechimlari to'plami bo'ladi.

4-m i s o l. $|\sin x| > \frac{1}{2}$ tengsizlikni yeshing.

Y e c h i s h. Berilgan tengsizlikdan $\sin x > \frac{1}{2}$ va $\sin x < -\frac{1}{2}$ tengsizliklarni olamiz. Birinchi tengsizlikning yechimlari to'plami:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi(2k+1) - \frac{\pi}{6}, \quad k \in Z.$$

Ikkinchi tengsizlikning yechimlari to'plami:

$$\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1) < x < 2\pi(k+1) - \frac{\pi}{6}, \quad k \in Z.$$

Bu yechimlarni birlashtirib, berilgan tengsizlikning yechimlari to'plamini olamiz:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \pi(k+1) - \frac{\pi}{6}, \quad k \in Z.$$

5-m i s o l. $2\sin^2(x+\frac{\pi}{4}) + \sqrt{3}\cos 2x > 0$ tengsizlikni yeching.

Y e c h i s h. $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ formuladan foydalanib, berilgan tengsizlikni $1 - \cos(2x + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{3}\cos 2x > 0$ ko'rinishga keltiramiz.

Endi to'ldiruvchi burchak usulidan foydalanamiz:

$$-\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 2x > -1 \Rightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x >$$

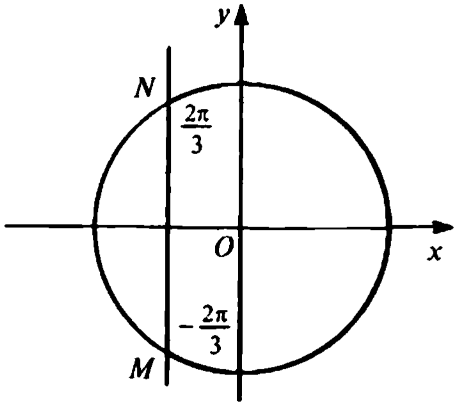
$$> -1 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x > -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x +$$

$$+ \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x > -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}.$$

$t = 2x - \frac{\pi}{6}$ deb, $\cos t > -\frac{1}{2}$ tengsizlikni yechamiz. Yechimni birlik aylanadan topamiz (58- rasm):

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Eski x o'zgaruvchiga qaytamiz:



58-rasm.

$$-\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{6}+2k\pi; \quad -\frac{\pi}{4}+k\pi<x-\frac{5\pi}{12}+k\pi, \quad k\in Z.$$

Bu olingan natija berilgan tengsizlikning yechimlari to'plamini ifodalaydi.

9- §. Trigonometriya tarixi haqida

«Trigonometriya» atamasi grekcha «trigonon» — uchburchak va «metrio» — o'lchayman so'zlaridan olinib, birgalikda «Uchburchakni o'lchash» ma'nosini anglatadi.

Burchaklarni o'lchashga bo'lgan talab masofani o'lchash ehtiyoji kabi juda qadimdan paydo bo'lgan. Trigonometriyaning rivojlanish omillaridan biri vaqtni aniqlash, ochiq dengizdagi kemaning yoki sahrodagi karvonning o'rnini aniqlash zaruriyatidan kelib chiqqan.

Uchburchakning tomonlari va burchaklari orasidagi bog'lanishni o'rganib, qadimgi odamlar uchburchakning turli elementlarini hisoblash usullarini topishdi.

Qadimgi Vavilon olimlari trigonometriyadan ba'zi bilimlarga ega bo'lganlar. Bunga vavilonliklarning Quyosh va Oy tutilishlarini bilishlari dalolat beradi. Qadimgi Vavilonning (miloddan 2 ming yil avval) loy jadvalchalarining birida bir masala yechiladi, unda doiraning ma'lum diametri va segmentning balandligiga ko'ra vatarning uzunligi hisoblanadi, bu esa sinus bilan kosinus orasida bog'lanish o'rnatilishiga mos keladi.

Qadimgi grek olimlari to'g'ri burchakli uchburchaklarni yechish usullarini bilishgan. Astronom va matematik Gipparx (milodgacha II asrda) vatarlar jadvalini — birinchi trigonometrik jadvallarni tuzdi.

Trigonometrik jadvallarni tuzishdagi buyuk muvaffaqiyatlardan biri K.Ptolemeyning (II asr) „Almagest" asari bo'ldi. Bu asarda astronomiya va unga yaqin bo'lgan fanlardan o'sha davrda ma'lum bo'lgan turli ma'lumotlar to'plangan va umumlashtirilgan. Shu yerning o'zida 0 dan 180° gacha yarim gradus oralatib oltmishlik sanoq sistemasida tuzilgan vatarlar jadvali keltirilgan. Aslida vatarlar jadvali 0 dan 90° gacha sinuslar jadvalining o'zidir. Ptolemey, shuningdek, zamonaviy belgilashlarda quyidagicha ko'rinishda bo'lgan formulalarni ham keltirib chiqaradi:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Bu ma'lumotlardan, asosan, amaliy astronomiya masalalarini hal qilish uchun, borib bo'lmaydigan joylargacha masofalarni aniqlash uchun foydalanilar edi.

Trigonometriyani undan keyin Hindiston, Yaqin va O'rta Sharq olimlari rivojlantirishdi. Ular sinus, kosinus, tangens, kotangensni kiritishdi, burchakning radian o'lchoviga asos solishdi.

Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy Sharqda birinchi bor yaratilgan trigonometrik jadvallarning muallifi hisoblanadi. Bu bilan u O'rta asr Sharqida trigonometriya va geometriya sohasidagi tadqiqotlarni boshlab berdi. Al-Xorazmiyning ilmiy jasorati faqat ayrim fanlar sohasidagi ulkan yutuqlari bilangina belgilanmaydi. U o'z ijodida quldorlik davri erishgan, Qadimgi Sharq va Gretsiya ilmiy yutuqlarini yakunlab, yangi ijtimoiy-iqtisodiy formatsiyaning tug'ilishi jarayonida ilmiy ixtirolarga ehtiyoj kuchaygan bir davrning aqliy intilishlari, ilmiy qudrati, potensial kuchi, yo'nalishi va xarakterini ifodalaydi.

O'zbek xalqining ajoyib farzandi, mashhur qomusiy olim Beruniy o'rta asrlarning azob-uqubatlari va turli qiyinchiliklariga qaramay, butun umrini fan va madaniyat taraqqiyoti yo'lida sarfladi. Beruniy fan xazinasini shunday bebaho javohirlar bilan to'ldirdiki, butun insoniyat bu bilan cheksiz faxrlanadi.

Beruniyning matematik ijodini baholashda „Qonuni Mas'udiy" asari, ayniqsa, uning trigonometriyaga bag'ishlangan uchinchi maqolasi diqqatga sazovordir.

Beruniy bu asarida o'tmishdoshlari Muhammad ibn Jobir al-Battoniy (929), Abul Vafo al-Buzjoniy (940—998), Abu Nasr ibn Iroq va boshqalar hosil qilgan natijalarni o'z kuzatishlari bilan to'ldirdi va umumlashtirdi. U, avvalo, astronomiya uchun muhim vosita deb hisoblangan tekis va sferik trigonometriyani mustaqil fan sifatida bayon qildi. III maqola 10 ta bobdan iborat bo'lib, 1- bobda vatarlar yasash orqali ichki chizilgan muntazam uchburchak va o'nburchakning tomonlarini hisoblash masalalari yechilgan. 2- bobda ikki burchak yig'indisi va ayirmasining sinusi, ikkilangan va yarimburchak sinusini ifodalovchi teoremalar berilgan. 3- bobda muntazam ichki chizilgan to'qqizburchakning tomonini yasash masalasi qo'yilgan, bu masala uchinchi darajali tenglamalarni yechish orqali va maxsus hisoblash jarayoni yordamida hal etilgan. 4- bobda burchakni teng uchga bo'lish masalasi bo'lib, bu masalani yechish uchun Arximed zamonidan beri ba'zi matematiklar tomonidan berilgan 12 xil usul bayon etiladi. 5- bobda o'tgan boblar natijalariga asoslanib, aylana uzunligining diametriga nisbati hisoblanadi. Bu qiymat $\pi \approx 3,1417...$ ga teng. 6-bobda sinuslar jadvali berilgan. 7-bobda esa shu sinuslar jadvalidan foydalanish qoidalari beriladi. 8- bobda esa tangenslar jadvali va undan foydalanish, tekislik trigonometriyasidagi sinuslar teoremasining isboti berilgan. 9—10-boblar sferik trigonometriyaga bag'ishlangan.

Beruniy „Qonuni Mas'udiy" asarining V maqolasida Yer shari meridianining bir gradusli yoyi uzunligini aniqlashni ko'rsatadi. Beruniy bu maqolada yer shari radiusini ham juda oddiy usul bilan aniqlaydi.

Beruniy 1029—1034-yillar orasida yozgan „Kitob at-tafhim" asariga geometriya va arifmetika, astronomiya va geodeziyaga doir bo'limlarni kiritadi. Uning bu asari boshqa asarlaridan farqli o'laroq, savol-javob tarzida tuzilgan hamda u bizgacha arabcha va forscha nusxalarda yetib kelgan.

Juda ko'p fanlar sohasida ajoyib, sermazmun asarlar yaratgan, butun umrini fanga bag'ishlagan va o'tkir talantini tabiat sirlarini ochish uchun kurashga sarflagan, o'z zamonasining qarama-qarshiliklariga, fan ahllari uchun tinch bo'lmagan hayotga bardosh bergan Beruniy, haqiqatan ham talantli olim hisoblanadi. Uning matematika fani taraqqiyotiga qo'shgan hissasi olamshumul ahamiyatga egadir. U fan tarixida asrlar osha o'chmas iz qoldirdi.

Jahon fani va madaniyati tarixida o'zlarining juda ko'p boy ijodlari bilan nom qoldirgan olimlar orasida o'zbek xalqining ko'p vakillari borki, bular orasida Ulug'bek va uning ilmiy maktabi vakillari alohida o'rin egallaydi.

VII asrlardan boshlab Yaqin va O'rta Sharq mamlakatlarida fanlar, ayniqsa, matematika va astronomiya fanlari katta taraqqiyotga erishganligi va bu taraqqiyotga mashhur olimlar asos solganliklari haqida tarix saboq beradi. Bu taraqqiyotning eng yuqori pog'onasi XV asrda maydonga kelgan Ulug'bek maktabi va unda olib borilgan matematik ilmiy tekshirishlar hisoblanadi. Ulug'bek maktabida fanning turli sohalari bo'yicha ilmiy ishlar olib borilgan.

Ulug'bek maktabida mashhur olimlar Qozizoda Rumiy, G'iyosiddin Jamshid-al-Koshiy va Ali Qushchi, keyinchalik bu akademiyada Hasan Chalabiy, Muhiddin al-Koshiy, Mansur al-Koshiy va boshqa olimlar ishlagan.

Ulug'bek maktabida erishilgan ilmiy tadqiqotlarning yirigi yulduzlar va sayyoralar harakatiga bag'ishlangan „Yangi astronomik jadvallar" nomli Ulug'bek qalamiga mansub ilmiy asardir. Bu asar „Ulug'bek ziji" yoki „Ziji Ko'ragoniy" nomlari bilan mashhur. („Zij" forscha „Zik" so'zidan olingan va u „Jadval" degan ma'noni bildiradi.) „Ulug'bek ziji" avval fors tilida yozilgan, keyin esa uni G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy arab tiliga tarjima qilgan.

„Ulug'bek ziji" kirish, ya'ni nazariy qism, rasadxonada o'tkazilgan kuzatishlar asosida tuzilgan jadvallardan iborat.

„Zij" ning birinchi kitobi astronomiyaning nazariy va amaliy masalalariga bag'ishlangan bo'lib, kalendar (taqvim) tuzish bilan bog'liq bo'lgan masalalar, arablar, yunonlar, eron, xitoy va uyg'ur sanalari, davrlar, yil va oylarning bir-biriga munosabatlari, Quyosh va Oyning harakati bayon qilingan. Demak, bu kitobda uchta asosiy miqdorlardan biri vaqtni o'lchash muammosi ilmiy hal qilingan.

„Zij" ning ikkinchi kitobi matematika va sferik astronomiyaga bag'ishlangan. Uchinchi kitob trigonometrik jadvallarga bag'ishlangan. Ular o'nta o'nli xona aniqligida hisoblangan. Bu 15-asr uchun juda katta aniqlik hisoblanadi. Uchinchi kitobning amaliy astronomiyaga tegishli qismida ekliptikaning ekvatorga og'maligi, osmon yoritgichlarining koordinatalarini aniqlash, yulduzlar va sayyoralar orasidagi masofalarni aniqlash kabi masalalar qaraladi.

Ekliptika tekisligining ekvatorga qiyaligini Ulug'bek 23°30′ 17″ bo'lishini hisoblab topgan, nazariy hisoblashlar bo'yicha bu burchak 23° 30′ 49″ bo'lishi kerak. Bu yerda Ulug'bek juda arzimas darajadagi xatoga, atigi 0′ 32″ ga yo'l qo'ygan.

Ulug'bek yulduz yilini 365 kun 6 soat 10 minut 8 sekund deb hisoblagan, bu hisoblashda uning xatosi 1 minut-u, 2 sekund bo'lgan.

Ulug'bek ilmiy kamolotga yetgan, ijod bulog'i qaynayotgan bir vaqtda ashaddiy dushmanlar, johil ulamolar tomonidan vahshiyona o‘ldirildi. Ammo uning nomini dushmanlari fan tarixidan o‘chira olmadilar. Ulug‘bek nomi fan tarixida abadiy qoldi. Uning yulduzi so‘nmadi. U yulduz abadiy porlayveradi...

II BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

1. 60°; 45°; 120°; 135°; 270°; 720° burchaklarni radian o‘lchovlarda ifodalang.

2. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{7}{2}\pi$; 3π; $\frac{11}{2}\pi$ burchaklarni gradus o‘lchovlarda ifodalang.

3. Trigonometrik funksiyalarning birining qiymati bo‘yicha qolganlarining qiymatini toping.

1) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{2}{3}\pi$;

2) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \pi$;

3) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\pi < \alpha < 2\pi$;

4) $\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \pi$;

5) $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $4{,}5\pi < \alpha < 5\pi$;

6) $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{29}}$, $3\pi < \alpha < 4\pi$;

7) $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{7}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

8) $\mathrm{ctg}\alpha = 1{,}2$, $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$;

9) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}\pi < \alpha < 2\pi$;

10) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

11) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

12) $\cos\alpha = -\frac{12}{13},\ \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi;$

13) $\sin\alpha = -\frac{9}{41},\ \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi;$

14) $\cos\alpha = -0{,}8,\ \frac{3}{2}\pi > \alpha > \pi;$

15) $\mathrm{tg}\alpha = -1,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$

16) $\mathrm{ctg}\alpha = -\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi.$

4. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlari sohalarini toping.

1) $y = 3\cos 2x - 1;$ 2) $y = 2 - \mathrm{ctg}3x;$

3) $y = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2};$ 4) $y = 1 + 0{,}5\sin\frac{x}{2}.$

5. Funksiyaning ishorasi o‘zgarmaydigan oraliqlarini va nollarini toping.

1) $y = -\sin 3x;$ 2) $y = \mathrm{tg}\frac{2x}{3};$

3) $y = \cos\frac{x}{2};$ 4) $y = \mathrm{ctg}\,2x;$

5) $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right);$ 6) $y = \mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right);$

7) $y = \sin(-2x);$ 8) $y = \mathrm{tg}(-3x).$

6. Tebranishlarning amplitudasini, davrini va chastotasini hamda jismning t paytdagi koordinatasini toping.

1) $x(t) = 3{,}5\cos 4\pi t,\ t = \frac{1}{12}$ s;

2) $x(t) = 5\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right),\ t = 4{,}5$ s;

3) $x(t) = 1{,}5\cos 6\pi t,\ t = 1\frac{1}{3}$ s;

4) $x(t) = 0{,}5\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right),\ t = 8$ s;

5) $I(t) = 0,25 \sin 50\pi t$;
6) $I(t) = 5 \sin 20\pi t$;
7) $I(t) = 0,5 \sin 10\pi t$;
8) $I(t) = 5 \sin 20\pi t$;
9) $I(t) = 3 \sin 30\pi t$;
10) $U(t) = 220 \cos 60\pi t$;
11) $U(t) = 110 \cos 30\pi t$;
12) $U(t) = 360 \cos 20\pi t$;
13) $U(t) = 180 \cos 45\pi t$.

7. Agar $x \in R$ bo'lsa, quyidagi funksiyalarning barcha qiymatlarini toping.

1) $1 - \sin x$; 2) $\sin x \cos x$; J: $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2} \sin 2x \le \frac{1}{2}$;

3) $\cos 2x$; 4) $\sin 2x$; 5) $1 + \sin x$;

6) $\sin x + \cos x$; J: $-\sqrt{2} \le (\sin x + \cos x) \le \sqrt{2}$.

8. Quyidagi funksiyalarning qaysi biri chegaralangan, qaysilari chegaralanmaganligini aniqlang.

1) $1 + \sin x$;	9) $1 + \sin 2x$;
2) $1 + \mathrm{tg} x$;	10) $1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2}$;
3) $2 \cos x - 5$;	11) $2\cos 3x + 5$;
4) $2 - \mathrm{ctg} x$;	12) $2 - \mathrm{ctg}\, 3x$;
5) $x + \sin x$;	13) $3x - \cos\frac{x}{2}$;
6) $x + \mathrm{tg}\, x$;	14) $5x - \mathrm{tg} 2x$;
7) $\lvert x \cos x \rvert$;	15) $x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
8) $\sin x + \mathrm{tg}\, x$;	16) $\cos 2x + \sin\frac{x}{2}$.

Javob: chegaralanmaganlari: 2), 4), 5), 6), 7), 10), 12), 13), 14), 15).

9. Berilgan funksiyalarning asosiy davrlarini toping.

1) $y = \cos(2\pi x + 3)$;

2) $y = 2\sin 2x + 3\cos 3x - 1$;

3) $y = \sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2} - 3\sin 4x + 4$;

4) $y = \sin^2 x + \cos^4 x$.

Javob: 1) $T = 1$; 2) $T = 2\pi$; 3) $T = 4\pi$; 4) $T = \pi$.

10. Quyidagi funksiyalarning eng kichik davrini toping.

1) $\operatorname{tg} x + 1$;

2) $2\operatorname{ctg} x - 1$;

3) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

4) $\sin 2x$;

5) $\sin\frac{x}{2}$;

6) $\cos 4x$;

7) $\cos\frac{x}{3}$;

8) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

9) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

10) $\sin^3 x$;

11) $\cos^3 x$;

12) $\sin\frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$;

13) $\sin x \cos x$;

14) $\frac{1}{\cos x}$;

15) $\sin^2 x$;

16) $|\sin x|$;

17) $|\cos x|$;

18) $|\sin 2x|$;

19) $\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

11. Quyidagilarning qaysi biri katta:

1) arccos(–0,6542) va arccos 0,6542;

2) arccos 0,4713 va arccos 0,5172;

3) arcsin 0,3412 va arcsin 0,2975;

4) arcsin (–0,82) va arcsin (–0,62);

5) arctg 2,345 va arctg 3,461;

6) $\arcsin(-0{,}7842)$ va $\arccos(-0{,}7842)$;

7) $\operatorname{arcctg} 2{,}83$ va $\operatorname{arctg} 3{,}71$;

8) $\operatorname{arctg} 1{,}935$ va $\operatorname{arcctg} 2{,}147$;

9) $\cos 1$ va $\cos 1^\circ$;

10) $\sin \pi$ va $\sin 180^\circ$;

11) $\cos 3$ va $\cos 5{,}3$;

12) $\sin 0{,}6\pi$ va $\sin 0{,}62\pi$;

13) $\cos 1{,}3$ va $\cos 1{,}4$;

14) $\operatorname{tg} 7{,}2$ va $\operatorname{tg} 7{,}25$;

15) $\operatorname{ctg} 1{,}4\pi$ va $\operatorname{ctg} 1{,}5\pi$;

16) $\sin(-2)$ va $\sin(-2{,}1)$;

17) $\cos(-5{,}1)$ va $\cos(-5)$;

18) $\operatorname{tg}\left(-\frac{9}{25}\pi\right)$ va $\operatorname{tg}\left(-\frac{11}{25}\pi\right)$;

19) $\operatorname{ctg}(-6{,}3)$ va $\operatorname{ctg}(-6{,}2)$?

12. Quyidagi funksiyalarning monotonlik oraliqlarini ko‘rsating.

1) $2^{\sin x}$; 2) $2^{\cos x}$;

3) $\lg \cos x$; 4) $\lg \operatorname{tg} x$;

5) $\sin^2 x$; 6) $\cos^3 x$;

7) $3^{\cos 2x}$; 8) $2^{\cos \frac{x}{2}}$;

9) $\lg \sin 2x$; 10) $\sqrt{\sin x}$.

13. $[0; 4\pi]$ kesmani quyidagi funksiyalarning monotonlik oraliqlariga ajrating.

1) $\cos x$; 2) $\sin x$; 3) $\operatorname{tg} x$;

4) $\sin 2x$; 5) $\cos 2x$; 6) $\operatorname{tg} 2x$;

7) $\sin \frac{x}{2}$; 8) $\cos \frac{x}{9}$; 9) $\operatorname{ctg} \frac{x}{9}$.

14. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini chizing.

1) $y = 2\sin x$; 2) $y = \frac{1}{3}\sin x$;

3) $y = \sin x + 1$; 4) $y = |\sin x|$;

5) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$;

7) $y = \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; 8) $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$;

9) $y = \sin x + \cos x$; 10) $y = \sin x + \sin 2x$.

15. Ifodalarning aniq qiymatlarini toping.

1) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}$;

2) $\operatorname{ctg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 40° - \sec 20°$;

3) $\operatorname{tg} 9° - \operatorname{tg} 27° - \operatorname{tg} 63° - \operatorname{tg} 81°$;

4) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$;

5) $\operatorname{cosec} 10° - \sqrt{3}\sec 10°$;

6) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7}$;

7) $\operatorname{tg}^2 36° \cdot \operatorname{tg}^2 72°$;

8) $\cos 27° - \cos 63°$;

9) $\cos\frac{2\pi}{15} + \cos\frac{4\pi}{15} - \cos\frac{7\pi}{15} - \cos\frac{\pi}{15}$;

10) $\cos 6° \cdot \sin 12° \cdot \sin 24° \cdot \sin 48°$.

16. Quyidagi ifodalarni eng sodda shaklga keltiring.

1) $\cos(36°+\alpha) \cdot \cos(54° - \alpha) - \sin(36° + \alpha) \cdot \sin(54° - \alpha)$;

2) $\sin\alpha \sin(\alpha + \beta) \cos\alpha \cos(\alpha + \beta)$;

3) $\frac{\sin 4\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$;

4) $\sin^2\frac{\alpha + \beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha - \beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\beta$;

5) $\cos\frac{\pi}{3}-\sin^2\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$; 6) $\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$;

7) $\frac{0,125\sin 2\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{0,125\sin 2\alpha+\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$;

8) $\cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)$;

9) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha-\sin\alpha$;

10) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

17. Quyidagi ayniyatlarni isbotlang.

1) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0$;

2) $8\cos 10^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ=\sqrt{3}$;

3) $4\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{13}{10}\pi=-1$;

4) $\cos 20^\circ\cos 70^\circ=\frac{1}{2}\sin 40^\circ$;

5) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}=\cos 4\alpha$;

6) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha$;

7) $3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha=8\cos^4 2\alpha$;

8) $3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha=8\sin^4 2\alpha$;

9) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\sin\alpha$.

10) $\operatorname{tg}6\alpha-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}6\alpha\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}2\alpha$.

18. Trigonometrik tenglamalarni yeching.

1) $\sin x - 5\cos x = 5$;

2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$;

3) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 1$;

4) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{8}$;

5) $\sin^6 2x + \cos^6 2x = 1$;

6) $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$;

7) $\cos x = \cos^2 \frac{3}{4}x$;

8) $\sin \frac{3}{4}x + \cos \frac{2}{3}x = 2$;

9) $\sin^3 x = 2\sqrt{2}\cos^2 x$;

10) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

19. Hisoblang.

1) $\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{5}{13}\right)$;

3) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4} - \arccos \frac{12}{13}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(3\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

5) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

6) $\arccos(\cos 18) - \arcsin(\sin 16)$;

7) $\sin(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2)$.

20. Ayniyatlarni isbotlang.

1) $\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) - \operatorname{arctg}\sqrt{2} = \frac{\pi}{4}$;

2) $2\operatorname{arctg} 10+\arcsin\frac{20}{201}=\pi;$

3) $\arcsin 0{,}6-\arcsin 0{,}8=-\arcsin 0{,}28;$

4) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}4=\operatorname{arctg}\frac{43}{32};$

5) $\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}+\arcsin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}.$

21. Tenglamalarni yeching:

1) $\arcsin x-\arccos x=\frac{\pi}{3};$

2) $\arccos\frac{x}{2}=2\operatorname{arctg}(x-1);$

3) $\operatorname{arctg}(x+3)-\operatorname{arctg}(x+2)=\frac{\pi}{4};$

4) $2\arccos x+\arccos(1-x)=\pi;$

5) $\sin(4\operatorname{arctg} x)=1;$

6) $2\operatorname{arctg} x+5\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}.$

22. Tengsizliklarni yeching.

1) $\arcsin x>\operatorname{arcctg} x;$

2) $\operatorname{arctg} x<\arccos(1-x^2);$

3) $\operatorname{arctg}(x+2)+\operatorname{arctg}x<\operatorname{arctg} 2;$

4) $\lg(\arcsin x)>-1;$

5) $\arcsin x-2\arccos x>\frac{\pi}{3};$

6) $\operatorname{arctg}^2 x-4\operatorname{arctg} x+3>0;$

7) $\log_2(\operatorname{arctg} x)>1;$

8) $2^{\operatorname{arctg} x}+2^{-\operatorname{arctg} x}\geq 2;$

9) $4(\arccos x)^2-1\geq 0;$

10) $\operatorname{tg}^2(\arcsin x)>1.$

1- §. Boshlang'ich funksiya va uning xossalari

Mexanikada o'rganilgan nuqtaning to'g'ri chiziql harakatini qaraymiz. Harakat boshlangandan keyin t vaq ichida nuqta $S(t)$ yo'l o'tgan bo'lsin. U holda nuqtanin $v(t)$ oniy tezligi $S(t)$ funksiyaning t vaqt bo'yicha hosilasig teng, ya'ni $v(t) = S'(t)$. Ikkinchi marta differensiallash nuqtaning tezlanishini beradi:

$$v'(t) = S''(t) = a(t).$$

Amaliyotda teskari masala ham uchraydi: nuqtaning $v(t)$ harakat tezligi berilgan, uning bosib o'tgan $S(t)$ yo'lini topish, ya'ni shunday $S(t)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi $v(t)$ ga teng bo'lsin. Bunday masalalarni yechish uchun differensiallash amaliga teskari bo'lgan *integrallash* amali ishlatiladi.

T a ' r i f. *Agar berilgan oraliqdan olingan barcha x lar uchun*

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

tenglik bajarilsa, u holda $F(x)$ funksiya shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning ***boshlang'ich funksiyasi*** *deyiladi.*

1-m i s o l. $F(x) = \frac{x^3}{3}$ funksiya $]-\infty; +\infty[$ oraliqda $f(x) = x^2$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasidir, chunki barcha $x \in]-\infty; +\infty[$ lar uchun:

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' = \frac{1}{3}3x^2 = x^2 = f(x).$$

2-m i s o l. $f(x) = \sin^2 x$ funksiya $x \in R$ da $f(x) = \sin 2x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Chunki barcha $x \in R$ uchun

$$F'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x = f(x).$$

$F(x) = \sin^2 x + 9$ funksiya ham $x \in R$ da $f(x) = \sin 2x$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Ravshanki, 9 ning o'rniga istalgan o'zgarmas sonni qo'yish mumkin. Bundan boshlang'ich funksiyani topish masalasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi kelib chiqadi.

3-misol. $F(x) = 4x\sqrt{x}$ funksiya $x \in]0; +\infty[$ oraliqda $f(x) = 6\sqrt{x}$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki barcha $x \in]0; +\infty[$ uchun

$$F'(x) = (4x\sqrt{x})' = 4(x^{\frac{3}{2}})' = 4 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x} = f(x).$$

Shuningdek, $F(x) = 4x\sqrt{x} + C$ (C — istalgan o'zgarmas haqiqiy son) funksiya ham $]0; +\infty[$ oraliqda $f(x) = 6\sqrt{x}$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

4-misol. $F(x) = \ln x$ funksiya $]-\infty; +\infty[$ oraliqda $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'la olmaydi. Chunki $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $x = a$ nuqtada uzilishga ega. $F'(x) = f(x)$ tenglik $]-\infty; 0[$ oraliqda bajarilmaydi. Ammo $]-\infty; 0[$ va $]0; +\infty[$ intervallarning har birida $F(x) = \ln |x|$ funksiya $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

Yuqoridagi misollardan ayon bo'ladiki, berilgan funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasini topish masalasi bir qiymatli aniqlanmas ekan. Asosiy masala berilgan funksiya uchun uning barcha boshlang'ich funksiyalarini topishdan iboratdir. Buning uchun boshlang'ich funksiyaning xossalarini bilish zarur.

Lemma *(funksiyaning o'zgarmaslik belgisi). Agar biror I oraliqda $F'(x) = 0$ bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya shu oraliqda o'zgarmasdir.*

Isbot. I oraliqda biror x_0 nuqtani tanlaylik. U vaqtda shu I oraliqqa tegishli har qanday x son uchun Lagranj teoremasiga ko'ra x va x_0 sonlar orasida yotgan shunday C sonni ko'rsatish mumkinki, $F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$ bo'ladi. Shartga ko'ra $F'(c) = 0$, chunki $c \in I$, demak,

$$F(x) - F(x_0) = 0.$$

Shunday qilib, I oraliqqa tegishli barcha x lar uchun

$$F(x) = F(x_0),$$

ya'ni $F(x)$ funksiya o'zgarmas doimiy qiymatini saqlaydi.

1-teorema. *Agar $F(x)$ funksiya $I = [a;\ b]$ kesmada $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda $F(x) + C$, $C = const$ yig'indi ham $[a;\ b]$ kesmada $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.*

Isbot. $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun $I = [a;\ b]$ kesmada boshlang'ich funksiya bo'lgani tufayli $F'(x) = f(x)$ bo'ladi. $F(x) + C$ funksiyani ham differensiallaymiz va quyidagini olamiz:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x) + 0 = f(x).$$

Shunday qilib, bitta funksiya cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lar ekan. Boshlangich funksiyalar bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi.

2-teorema. *$f(x)$ funksiyaning $I = [a;\ b]$ oraliqdagi har qanday boshlang'ich funksiyasini*

$$F(x) + C \tag{2}$$

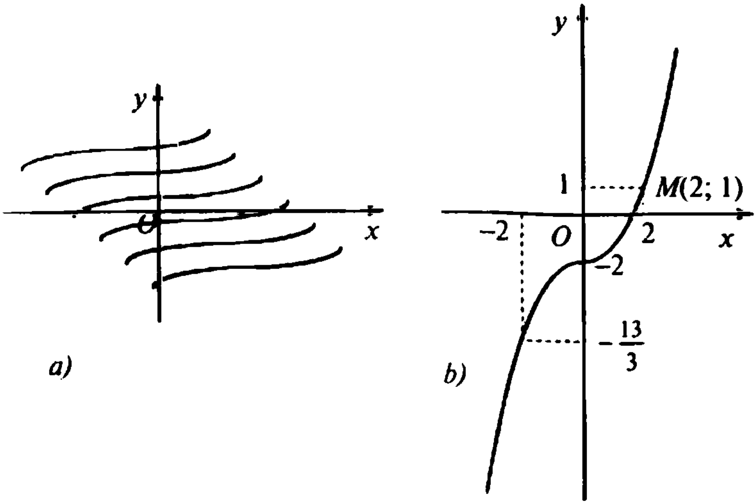
ko'rinishda yozish mumkin.

Bunda C — ixtiyoriy o'zgarmas son, $F(x)$ esa $f(x)$ funksiyaning $I = [a;\ b]$ oraliqdagi boshlang'ich funksiyalaridan biri.

Isbot. $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiyalar bo'lsin. Bunday holda

$$F'(x) = \Phi'(x) = f(x)$$

bo'ladi.



59- rasm.

$I = [a;\ b]$ oraliqdan olingan barcha x lar uchun:

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Yuqorida keltirilgan lemmaga ko'ra $\Phi(x) - F(x)$ ayirma $[a;\ b]$ kesmada o'zgarmas funksiya bo'ladi, ya'ni $\Phi(x) - F(x) = C$ yoki $\Phi(x) = F(x) + C$.

Boshlang'ich flinksiyaning asosiy xossasiga geometrik ma'no berish mumkin: $f(x)$ funksiyaning istalgan ikkita boshlang'ich funksiyasining grafiklari bir-biridan Oy o'q bo'ylab parallel ko'chirish natijasida hosil bo'ladi (59- *a* rasm).

5-m i s o l. $f(x) = x^2$ funksiya uchun grafigi $M(2;\ 1)$ nuqtadan o'tuvchi boshlang'ich funksiyani toping.

Y e c h i s h. $f(x) = x^2$ funksiyaning istalgan boshlang'ich funksiyasi $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ ko'rinishga ega.

M (2; 1) nuqtadan o'tuvchi chiziqni topamiz. Buning uchun M nuqtaning koordinatalarini $y = \frac{x^3}{3} + C$ tenglamaga qo'yib, C ning qiymatini topamiz:

$$y=\frac{x^3}{3}+C \Rightarrow 1=\frac{8}{3}+C \Rightarrow C=-1\frac{2}{3}.$$

Demak, grafigi M nuqta orqali o‘tuvchi boshlang‘ich funksiya $F(x)+C=\frac{x^3}{3}-1\frac{2}{3}$ ko‘rinishga ega (59- b rasm).

6-misol. $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ funksiya uchun grafigi $M\left(\frac{2\pi}{3};-1\right)$ nuqtadan o‘tuvchi boshlang‘ich funksiyani toping.

Yechish. Berilgan $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya $f(x)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+C$ bo‘ladi.

Grafigi $M\left(\frac{2\pi}{3};-1\right)$ nuqtadan o‘tuvchi boshlang‘ich funksiyani topamiz. Buning uchun $-1=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+C$ tenglamadan C ni topamiz.

$$-1=-\cos\pi+C \Rightarrow -1=+1+C \Rightarrow C=-2.$$

Izlanayotgan boshlang‘ich funksiya $F(x)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$ ko‘rinishga ega.

2- §. Aniqmas integral va uning xossalari. Aniqmas integrallar jadvali

Ta’rif. *Agar biror I oraliqda F(x) funksiya f(x) funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, u holda*

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (1)$$

*ifoda shu oraliqda f(x) funksiyaning **aniqmas integrali** deyiladi.*

Bunda $f(x)$ *integral ostidagi funksiya*, $f(x)dx$ *integral ostidagi ifoda*, x *integrallash o'zgaruvchisi* deyiladi. C — ixtiyoriy o'zgarmas son yoki integrallash doimiysidir.

Aniqmas integralni topish amali *funksiyani integrallash* deyiladi. Integrallash — differensiallashga teskari amaldir.

Integrallash qoidasi. *Berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integralini topish uchun bu funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan birortasini topib, unga ixtiyoriy doimiy C sonni qo'shish kifoya.*

Olingan natijaning to'g'riligini tekshirish uchun integrallash natijasining hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng bo'lishligini eslash zarur.

Aniqmas integralning xossalari

1-xossa. *Aniqmas integraldan olingan hosila integral ostidagi funksiyaga, differensiali esa integral ostidagi ifodaga teng bo'ladi:*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Bu xossa aniqmas integralning ta'rifidan kelib chiqadi.

2-xossa. *Funksiya hosilasining (differensialining) aniqmas integrali bu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmas sonning yig'indisiga teng:*

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{yoki} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Haqiqatan, $dF(x) = f(x)dx$ bo'lsin. Bu tenglikning ikkala qismidan integral olamiz: $\int dF(x) = \int f(x)dx$. Ta'rifga ko'ra $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'lgani sababli $\int dF(x) = F(x) + C$ bo'ladi.

3-xossa. *Agar ikkita funksiya yoki ikkita differensial aynan teng bo'lsa, ularning aniqmas integrallari bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi.*

Bu xossa bitta funksiya uchun ikkita boshlang'ich funksiya bir-biridan o'zgarmas songa farq qilishidan kelib chiqadi.

4-x o s s a. *O'zgarmas ko'payuvchini integral belgisi oldiga chiqarish mumkin:*

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a = \text{const}, \quad a \neq 0.$$

1-m i s o l. $\int 12x^3dx$ ni toping.

Y e c h i s h.

$$\int 12x^3dx = 12\int x^3dx = 12\cdot\frac{x^4}{4} + C = 3x^4 + C.$$

5-x o s s a. *Ikki yoki bir qancha uzluksiz funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali qo'shiluvchilar aniqmas integrallarining yig'indisiga teng:*

$$\int f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx.$$

2-m i s o l. $\int (4x^3 - 18x^2 + 16x - 5)dx$ ni toping.

Y e c h i s h. $\int (4x^3 - 18x^2 + 16x - 5)dx = \int 4x^3dx -$

$$-\int 18x^2dx + \int 16xdx - \int 5dx = 4\int x^3dx - 18\int x^2dx +$$

$$+16\int xdx - 5\int dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} + 18\cdot\frac{x^3}{3} + 16\cdot\frac{x^2}{2} - 5x + C =$$

$$= x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 5x + C.$$

Aniqmas integralning yuqorida ko'rilgan xossalari ko'pgina elementar funksiyalarning integrallarini eng qisqa yo'l bilan topish imkonini beradi.

3-m i s o l. $\int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' dx, \ (n \neq -1)$ ni toping.

Y e c h i s h. 2-xossaga ko'ra $\int F'(x)dx = F(x) + C.$ Integral ostidagi funksiyaning hosilasini topamiz:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n = x^n \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ \ n \neq -1.$$

4-misol. $\int(\sin x)'dx$ ni toping.

Yechish. 2-xossaga ko'ra: $(\sin x)' = \cos x$,

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Yuqoridagiga o'xshash

$$\int(\cos x)'dx = \int(-\sin x)dx = \cos x + C.$$

Aniqmas integrallar (boshlang'ich funksiyalar) jadvalini keltiramiz:

1. $\int dx = x + C;$ 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$ 4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ 6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C;$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$

3-§. Aniqmas integralni hisoblash usullari

1. Aniqmas integralni uning xossalari va jadvaldan foydalanib hisoblash.

1-misol. $\int(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x})dx$ ni toping.

Yechish. $\int(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x})dx = \int(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}})dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx +$

$+ \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} +$

$+ \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$

2-misol. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$ ni toping.

Yechish. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 \cdot x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx =$

$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\text{ctg}x - \text{tg}x + C.$

3-misol. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx$ ni toping.

Yechish. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx = \int 2^x (3^2)^x dx = \int (2 \cdot 9)^x dx =$

$= \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C.$

4-misol. $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^3}$ ni toping.

Yechish. $x^2 dx = d(1 + x^3) \frac{1}{3}$,

$$\int \frac{x^2 dx}{1 + x^3} = \frac{1}{3} \int \frac{d(1 + x^3)}{1 + x^3} = \frac{1}{3} \ln \left|1 + x^3\right| + C.$$

Tekshirish· $\left(\frac{1}{3} \ln \left|1 + x^3\right| + C \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{1 + x^3} = \frac{x^2}{1 + x^3}.$

5-misol. $\int \sin 3x \cdot \cos x \, dx$ ni toping.

Yechish. $\sin 3x \cdot \cos x$ ko'paytmani yig'indiga almashtiramiz. Buning uchun $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ formuladan foydalanamiz:

$$\sin 3x \cos x = \frac{1}{2} [\sin(3x + x) + \sin(3x - x)] = \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x), \quad \int \sin 3x \cos x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 4x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{8} \int \sin 4x d(4x) + \frac{1}{4} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

2. O'zgaruvchini almashtirish usuli. Aniqmas integralni hisoblashda o'zgaruvchini almashtirish usuli keng qo'llaniladi.

Bizdan $f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya mavjud bo'lsa-da, uni to'g'ridan to'g'ri tanlash masalasi hamma vaqt oson bo'lavermaydi. Ba'zan integral osti ifodasining o'zgaruvchisini almashtirish bilan boshlang'ich funksiyani topish osonlashadi. x o'zgaruvchini $x=\varphi(t)$ funksiya yordamida boshqa t o'zgaruvchiga almashtiraylik. Bu yerdagi $\varphi(t)$ — uzluksiz differensiallanuvchi funksiya, $dx=\varphi'(t)dt$. Bunday holda

$$\int f(x)dx=\int f(t)\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

almashtirish formulasiga ega bo'lamiz. O'ng tomondagi integralni hisoblagandan keyin $t=\varphi^{-1}(x)$ almashtirish yordamida eski x o'zgaruvchiga qaytamiz. (1) tenglikning o'rinli ekanligini isbotlash uchun bu tenglikning o'ng va chap tomonida turgan ifodalarning x bo'yicha hosilalarining tengligini ko'rsatish zarurdir. (1) tenglik chap qismining hosilasini topamiz:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x).$$

(1) tenglikning o'ng qismini murakkab fiinksiya deb qaraymiz. Bunda t — oraliq o'zgaruvchi. $x=\varphi(t)$ bo'lgani uchun:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}$$

(teskari funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra). Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int f(\varphi(t)\varphi'(t)dt)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t\frac{dt}{dx}=$$

$$=f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x).$$

(1) tenglikning chap va o'ng qismlari hosilalari teng ekanligini ko'rsatdik.

$x = \varphi(t)$ almashtirishni shunday tanlash kerakki, (1) tenglik o'ng qismida turgan aniqmas integralni hisoblash imkoniyatiga ega bo'laylik.

Integralni sodda ko'rinishda ifodalovchi almashtirishlarni topishning umumiy bir qoidasi yo'q. Ba'zi bir xususiy hollarni qaraymiz.

Agar integral ostidagi funksiya $f(ax+b)$ ko'rinishga ega bo'lsa, u holda $ax+b=t$ almashtirish kerak.

1-misol. $\int(3x+4)^{11}dx$ ni toping.

Yechish. $3x+4=t$ yangi o'zgaruvchini kiritamiz:

$$(3x+4)'dx = t'dt \Rightarrow 3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt.$$

Integralni topamiz:

$$\int(3x+4)^{11}dx = \frac{1}{3}\int t^{11}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{12}}{12} + C = \frac{1}{36}t^{12} + C.$$

Eski o'zgaruvchiga qaytamiz:

$$\int(3x+4)^{11}dx = \frac{1}{36}(3x+4)^{12} + C.$$

2-misol. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$ $(a \neq 0)$ ni toping.

Yechish. Bu integralni jadvaldagi integrallarning biriga keltirish uchun integral ostidagi ifodaning surat va maxrajini a^2 ga bo'lamiz:

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \int\frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

$\frac{x}{a} = t$ almashtirishni bajaramiz va integralni topamiz:

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

3-misol. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $(a>0)$ ni toping.

Yechish. Berilgan integralni jadvaldagi integrallarning biriga keltirish maqsadida integral ostidagi ifodaning surat va maxrajini a ga bo'lamiz:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}=\int\frac{\frac{1}{a}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

$\frac{x}{a}=t$ almashtirish bilan yangi t o'zgaruvchini kiritamiz va integrallashni davom ettiramiz:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C \Leftrightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

4-misol. $\int\frac{xdx}{x^2+a^2}$ ni toping.

Yechish. $\int\frac{xdx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+a^2)}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C.$

Bu misol quyidagi umumiy xulosani chiqarish imkoniyatini beradi:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{df(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C.$$

Haqiqatan, $t=f(x)$ almashtirishni bajarsak, jadvaldagi integralga kelamiz:

$$\frac{dt}{t}=\ln|t|+C.$$

Ba'zi bir hollarda integral ostidagi ifodaning ko'paytuvchilaridan biri ikkinchisining hosilasiga teng bo'ladi.

5-misol. $\int(x^2-5x+6)^{15}(2x-5)dx$ ni toping.

Yechish. Bu yerda integral ostidagi ifodaning bir ko'paytuvchisi ikkinchisi (daraja asosi)ning hosilasidan iborat, ya'ni:

$$d(x^2-5x+6)=(x^2-5x+6)'dx=(2x-5)dx.$$

$x^2 - 5x + 6 = t$ almashtirishni bajaramiz. $(2x-5)dx =$ $= dt$ bo'ladi va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int t^{15}dt = \frac{t^{16}}{16} + C,$$

$$\int (x^2 - 5x + 6)^{15}(2x-5)dx = \frac{(x^2 - 5x + 6)^{16}}{16} + C.$$

6-m i s o l . $\int (\ln x)^5 \frac{dx}{x}$ ni toping.

Y e c h i s h . $\ln x = t$ desak, $\frac{dx}{x} = dt$ bo'ladi.

$$\int (\ln x)^5 \frac{dx}{x} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}(\ln x)^6 + C.$$

7-m i s o l . $\int \sqrt[3]{\sin x} \cos x\, dx$ ni toping.

Y e c h i s h . $\sin x = t$ desak, $\cos x\, dx = dt$ bo'ladi.

Demak, $\int \sqrt[3]{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt[3]{t} dt = \int t^{\frac{1}{3}} dt =$

$$= \int \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4} + C = \frac{3}{4}\sin x \sqrt[3]{\sin x} + C.$$

3. B o ' l a k l a b   i n t e g r a l l a s h   u s u l i .

$u = f(x)$ va $v = \varphi(x)$ biror oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Bunday holda

$$(f(x) \cdot \varphi(x))' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni integrallab, topamiz:

$$\int (f(x) \cdot \varphi(x))'dx = \int f'(x)\varphi(x)dx + \int f(x)\varphi'(x)dx.$$

Bundan:

$$\int f(x) \cdot \varphi'(x)dx = f(x)\varphi(x) - \int f'(x)\varphi(x)dx. \qquad (2)$$

$u = f(x)$ va $v = \varphi(x)$ bo'lgani tufayli, $du = f'(x)dx$ va $dv = \varphi'(x)dx$ bo'ladi.

Shuning uchun (2) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{3}$$

Bu formula *bo'laklab integrallash* formulasi deyiladi. u va v funksiyalarni qulay tanlash bilan udv ifodaning integralini topish vdu ifodaning integralini topishga keltiriladi. (3) formuladan $\int udv$ integralni hisoblashga nisbatan $\int vdu$ integralni hisoblash soddaroq bo'lganda foydalanish mumkin.

1-misol. $\int x\cos x dx$ ni toping.

Yechish. $u = x$, $dv = \cos x\, dx$ desak, $du = dx$, $v = \sin x$ bo'ladi. Demak,

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

2-misol. $\int x\ln x\, dx$ ni toping.

Yechish. $u = \ln x$, $dv = x\, dx$ desak, $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$ bo'ladi.

$$\int x\ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} + C = \frac{1}{2}x^2\ln x -$$

$$\frac{1}{2}\int x\, dx + C = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Tekshirish. $\left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\right)' =$
$x\ln x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x\ln x.$

3-misol. $\int xe^x dx$ ni toping.

Yechish. $u = x$, $dv = e^x dx$ desak, $du = dx$, $v = e^x$ bo'ladi. Demak,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx + C = xe^x - e^x + C.$$

4-misol. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$ ni toping.

Yechish. $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$ desak, $du = \frac{dx}{1+x^2}$; $v = x$ bo'ladi. Bularni berilgan integralga qo'yib, topamiz:

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} + C = x \operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + C = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

5-misol. $\int x^2 e^x dx$ ni toping.

Yechish. $u = x^2$, $dv = e^x dx$ desak, $du = 2x\,dx$, $v = e^x$ bo'ladi. Demak,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx.$$

Oxirgi integralni yana bo'laklab integrallaymiz: $u = x$, $dv = e^x dx$ desak, $du = x\,dx$, $v = e^x$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

4- §. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar

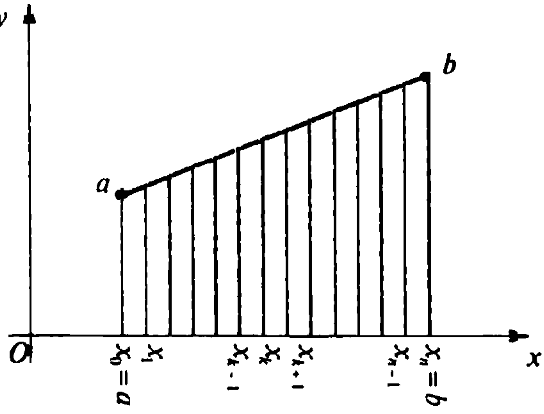
Tabiatshunoslik va texnikaning ko'pgina masalalari matematik analizning asosiy tushunchasi bo'lgan aniq integral yordamida hal qilinadi. Egri chiziqlar bilan chegaralangan shakllarning yuzlari, yoy uzunligi, jismning hajmi, jismning bajargan ishi, bosib o'tgan yo'li va tezligini hisoblash masalalari aniq integralga keltirilib yechiladi.

Shunday masalalardan ba'zi birlarini keltiraylik.

1. Ingichka to'g'ri chiziqli sterjenning massasi haqidagi masala.

Bizga uzunligi l bo'lgan to'g'ri chiziqli ingichka sterjen berilgan bo'lsin. Uning massasi notekis taqsimlangan bo'lib, zichligi $\rho(x)$ ga teng. Sterjenning massasini topish masalasi qo'yiladi.

Masalaning shartini tahlil qilamiz. Ingichka to'g'ri chiziqli sterjen deganda son o'qidagi a va b nuqtalar bilan chegaralangan to'g'ri chiziq kesmasi tushuniladi ($l = b - a$). Sterjenning berilgan nuqtadagi zichligi deganda uning



60-rasm.

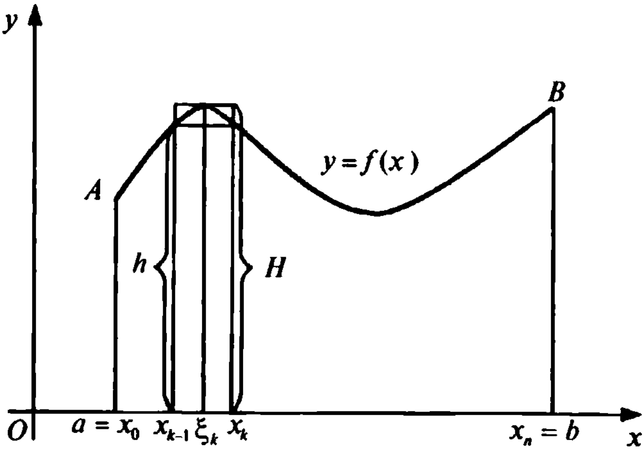
o'rtacha zichligining, ya'ni $\rho_{o'rt} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limiti tushuniladi. Bu yerda Δm – $[x; \Delta x]$ kesmaning massasi. Sterjenning zichligi notekis taqsimlangan, uni yetarlicha aniqlikda topish uchun sterjenni nuqtalar bilan yetarlicha kichkina n ta bo'lakka bo'lamiz (60- rasm):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

k- kesmachaning uzunligini Δx_k orqali belgilaymiz. Kesmachalar uzunliklari juda kichkina desak, bu kesmachalarning chegaralarida sterjenning zichligini o'zgarmas deyish mumkin va uni $\rho(\xi_k)$ deylik. ξ_k nuqta k-kesmaning nuqtalaridan bittasi, ya'ni $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$. Sterjen bu kesmasining massasi $\Delta m_k \approx \rho(\xi_k)\Delta x_k$ bo'ladi. Sterjenning butun massasi taqriban quyidagiga teng bo'ladi:

$$m = \rho(\xi_1)\Delta x_1 + \rho(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + \rho(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k,$$

bunda $\sum\limits_{k=1}^{n}$ —n ta qo'shiluvchilar yig'indisining belgisi.



61- rasm.

Bu yig'indining $\Delta x_k \to 0$ dagi limiti sterjen massasini yanada aniqroq ifodalaydi, ya'ni

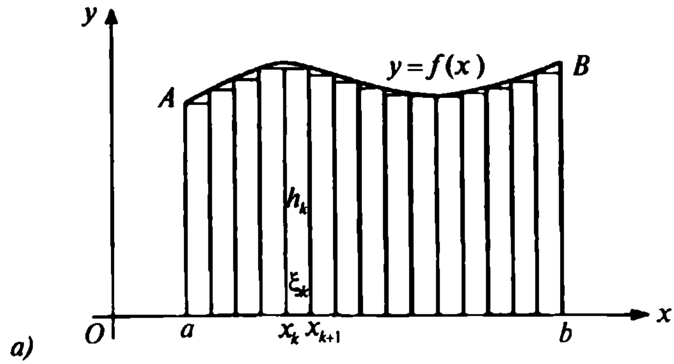
$$m = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k.$$

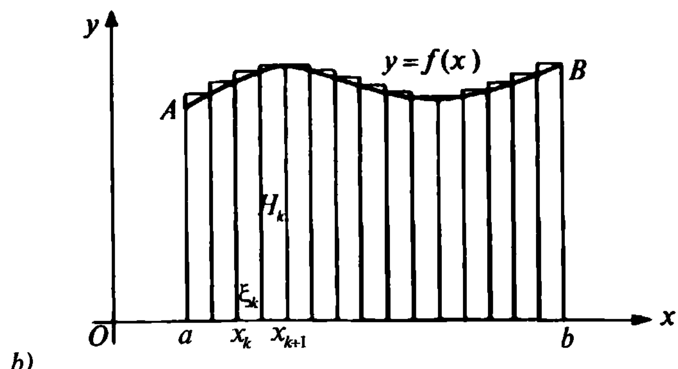
2. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi haqidagi masala.

Bizga yuqoridan $y=f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlaridan $x=a$, $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar hamda pastdan Ox — abssissalar o'qi bilan chegaralangan yassi shakl berilgan bo'lsin. Odatda, bunday yassi shakl egri chiziqli trapetsiya deb ataladi.

Funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va barcha $x \in [a; b]$lar uchun $f(x) \geq 0$ bo'lsin deb qaraladi. Shaklda hosil bo'lgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning S yuzini hisoblash masalasini hal qilamiz (61-rasm).

Izlanayotgan yuzni hisoblash uchun $[a; b]$ kesmani uzunliklari Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n bo'lgan n ta ixtiyoriy $[a; x_1]$, $[x_2; x_3]$, ..., $[x_{n-1}; b]$ bo'laklarga bo'lamiz. Bo'linish nuqtalaridan ordinatalar o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar *aABb* egri chiziqli





62- rasm.

trapetsiyani n ta egri chiziqli kichik trapetsiyachalarga ajratadi.

Har bir qismni to'g'ri to'rtburchakka almashtiramiz. Bu to'g'ri to'rtburchaklarning asoslari qism asoslariga, balandliklari esa ordinatalardan biriga teng bo'ladi. Agar h balandlik qism ordinatalarining kichigiga teng bo'lsa, to'g'ri to'rtburchaklardan birining yuzi $h_k \Delta x_k$ bo'lib, $s_n = \sum_{k=1}^{n} h_k \Delta x_k$ yig'indi esa $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning kami bilan olingan yuzini ifodalaydi (62-a rasm).

Agar H balandlik qism ordinatalarining kattasiga teng bo‘lsa, to‘g‘ri to‘rtburchaklardan birining yuzi $H_k \Delta x_k$ bo‘lib, $S_n = \sum_{k=1}^{n} H_k \Delta x_k$ yig‘indi egri chiziqli trapetsiyaning ortig‘i bilan olingan yuzini ifodalaydi (62- *b* rasm).

Har bir oraliqdan

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1, \ \ x_1 \le \xi_2 \le x_2, \ldots, x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, nuqtalarni olamiz va $f(x)$ funksiyaning bu nuqtalardagi $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$ qiymatlarini hisoblab,

$$Q = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)\Delta x_n$$

yig‘indini topamiz. $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ ni qanday tanlamaylik, $f(\xi_k)$ qiymat uchun $h_k \le f(\xi_k) \le H_k$ bo‘ladi. Barcha $\Delta x_k > 0$ uchun $h_k \Delta x_k \le f(\xi_k)\Delta x_k \le H_k \Delta x_k$ bo‘ladi.

Demak, $\sum_{k=1}^{n} h_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} H_k \Delta x_k$ yoki $S_n \le Q \le S_n$.

$f(x) \ge 0$ bo‘lganda oxirgi ikki qo‘sh tengsizlikning geometrik mazmuni quyidagicha: egri chiziqli trapetsiyaning Q yuzi uning yuzini kami va ortig‘i bilan ifodalovchi yig‘indilar oralig‘ida yotadi.

$f(x)$ funksiyaning uzluksizligidan foydalanib, s_n va S_n o‘zgaruvchilarning $\Delta x_k \to 0$ dagi limiti mavjudligini va bu limitlarining o‘zaro tengligini isbotlash mumkin. Shuningdek, bu limitlar $[a; b]$ oraliqni bo‘laklarga bo‘lish usuliga ham bog‘liq emasligini ko‘rsatish mumkin, ya’ni

$$\lim_{\Delta x \to 0} s_n = \lim_{\Delta x \to 0} Q = \lim_{\Delta x \to 0} S_n.$$

Shunday qilib, $[a; b]$ da aniqlangan, uzluksiz $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ funksiya grafigi, $y=0$ (Ox o'qi), $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzi zinapoyasimon shakl yuzini ifodalovchi Q yig'indining n bo'laklar soni cheksiz oshganda, ya'ni kesmalarning uzunliklari nolga intilgandagi $(\Delta x_k \to 0)$ S limitidan iborat bo'lar ekan:

$$S = \lim_{\Delta x_k \to 0} Q = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

5- §. Aniq integral — yig'indining limiti

Oldingi banddagi ikkita masala: to'g'ri chiziqli sterjenning massasi va egri chiziqli trapetsiyaning yuzi haqidagi mulohazalarimizni umumlashtiramiz. Bizga $[a; b]$ kesmada $y=f(x)$ uzluksiz va musbat bo'lgan funksiya berilgan bo'lsin. $[a; b]$ kesmani shunday n ta bo'lakka bo'ldikki, natijada hosil bo'lgan kesmalarning uzunliklari nolga intilsin $(\Delta x_k \to 0)$. Ikkala masala ham $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ yig'indini tuzishga keltirildi. Bunday yig'indi *integral yig'indi* deyiladi.

Har bir bo'lish uchun ξ_k ni tanlab, integral yig'indi tuzish mumkin. Ketma-ket bo'lishlarga mos keluvchi ketma-ket integral yig'indilar olamiz. Bu yig'indilar ketma-ketligi qandaydir limitga ega bo'ladi. Bu limitni S orqali belgilaymiz.

T a ' r i f. *Agar $[a; b]$ kesmaning har qanday bo'linishlari ketma-ketligi olinganda ham unga mos integral yig'indilar ketma-ketligi ξ_k nuqtalarni qanday tanlamaylik, yagona S songa intilsa, bu S son $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ yigindining*

***limiti** deb ataladi va* $S = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ *ko'rinishda belgilab yoziladi.*

$S = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ limit $y = f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ oraliqdagi *aniq integrali* deyiladi va u $\int\limits_a^b f(x)dx$ ko'rinishida belgilanadi, ya'ni

$$S = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

a son integralning *quyi chegarasi*, b son esa *yuqori chegarasi* deyiladi. Integrallash chegaralari quyidagi munosabatlarning biri bilan bog'langan bo'ladi: $a > b$, $a = b$, $a < b$; $[a; b]$ oraliq *integrallash oralig'i, x esa integrallash o'zgaruvchisi* deyiladi.

Uzunligi $l = b - a$ va zichligi $\rho(x)$ bo'lgan to'g'ri chiziqli sterjenning massasi haqidagi masalaga qaytsak, uning massasi $m = \int\limits_a^b \rho(x)dx$ ga teng bo'ladi.

$y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$ egri chiziq, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi $S = \int\limits_a^b f(x)dx$ integral yordamida hisoblanadi.

6- §. Yuqori chegarasi o'zgaruvchan aniq integral

Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, integrallash chegaralari doimiy bo'lsa, u holda aniq integral son bo'ladi. Agar yuqori chegarani $[a; b]$

oraliqdan chiqmaydigan o‘zgarishda qarasak, bunday holda integralning son qiymati o‘zgaruvchan bo‘ladi. Shuning uchun yuqori chegarasi o‘zgaruvchan bo‘lgan $\int_a^x f(t)dt,\ a \le x \le b$ integral yuqori chegaraning funksiyasi bo‘ladi. Bu funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \le x \le b.$$

T e o r e m a . *Agar f(x) funksiya uzluksiz va*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \le x \le b$$

bo‘lsa, u holda

$$\Phi'(x) = f(x) \text{ yoki } \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

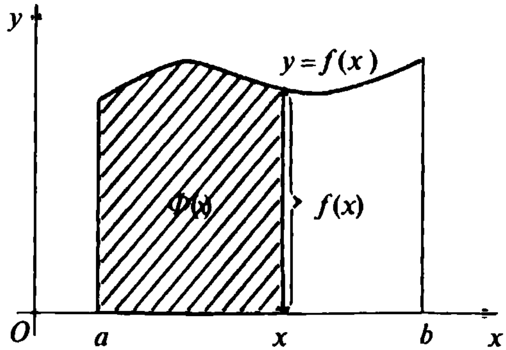
bo‘ladi.

Boshqacha aytganda, yuqori chegarasi o‘zgaruvchan bo‘lgan aniq integraldan yuqori chegara bo‘yicha olingan hosila integral ostidagi funksiyaning yuqori chegaraga mos kelgan qiymatiga teng. Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

M i s o l . $\Phi(x) = \int_a^x \sin t\, dt$ funksiyaning hosilasini topaylik. Yuqoridagi teoremaga ko‘ra, $\Phi'(x) = \sin x$.

N a t i j a . *Har qanday uzluksiz funksiya boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘ladi.*

Haqiqatan ham, agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$ mavjud va $\Phi(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.



63- rasm.

7- §. Nyuton — Leybnis formulasi

Aniq integralni hisoblash uchun formula chiqaramiz. $y=f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ va $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ turl boshlang‘ich funksiyalar bo‘lsa, ular bir-biridan o‘zgarmas songa farq qiladi, ya'ni

$$\Phi(x)=F(x)+C.$$

C ning qiymatini topish uchun $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ integralda $x=a$ deymiz va hisoblaymiz (63- rasm):

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0 \Rightarrow F(a)+C=0,\ C=-F(a).$$

Bunday holda $\Phi(x)=F(x)-F(a)$ bo‘ladi. $x=b$ bo‘lganda:

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

Bu ayirma ba'zan $\Phi(b)=\int_a^b f(t)dt=F(x)\Big|_a^b=F(b)-$

$F(a)$ ko'rinishda ham yoziladi. Biz quyidagi teoremani isbotladik.

T e o r e m a. *[a; b] oraliqda uzluksiz bo'lgan f(x) funksiyaning aniq integrali uning istalgan boshlang'ich funksiyasining b va a nuqtalardagi qiymatlari ayirmasiga teng.*

(1) formula *Nyuton—Leybnis formulasi* nomi bilan yuritiladi.

Shunday qilib, aniq integralni hisoblash uchun aniqmas integralni topish yetarli, olingan ifodaga oldin b yuqori chegarani, keyin esa a quyi chegarani qo'yib, birinchi natijadan ikkinchi natijani ayirish kifoya.

1-m i s o l. $\int_2^3 x^3 dx$ ni hisoblang.

Y e c h i s h. Aniqmas integralni topamiz: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$; topilgan boshlang'ich funksiyalarning birini olamiz. $C = 0$ bo'lganda olinadigan $\frac{x^2}{4}$ boshlang'ich funksiyani qaraymiz.

Bu boshlang'ich funksiyaning $x = 3$ va $x = 2$ bo'lgandagi qiymatlarini topamiz va ularning ayirmasini hisoblaymiz:

$$\frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}.$$

Demak, $\int_2^3 x^3 dx = 16\frac{1}{4}$.

2-m i s o l. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} dx$ ni hisoblang.

Y e c h i s h. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) =$

$2\operatorname{arctg} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

8- §. Aniq integralning asosiy xossalari

Aniq integralning barcha xossalarini berilgan funksiya qaralayotgan oraliqda integrallanuvchi deb qarab shakllantiramiz va isbotlaymiz.

1-x o s s a. *Chegaralari bir xil bo'lgan aniq integral nolga teng.*

$$\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0.$$

2-x o s s a. *Aniq integralda yuqori va quyi chegaralarning o'rinlarini almashtirsak, u ishorasini o'zgartiradi*

Nyuton — Leybnis formulasiga ko'ra:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx.$$

3-x o s s a. *Aniq integralning qiymati integrallash o'zgaruvchisining belgilanishiga bog'liq emas:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = ...$$

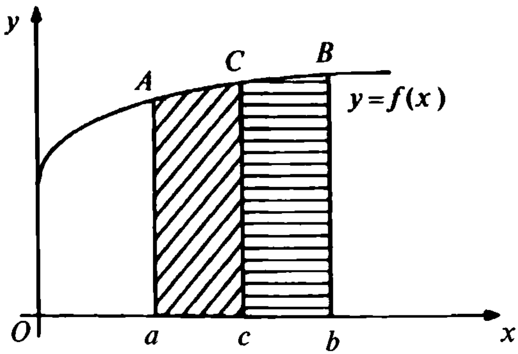
4-x o s s a. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisi oldiga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

I s b o t. $[a; b]$ oraliqni bo'laklarga ixtiyoriy bo'lib $kf(x)$, $(k = \text{const})$ funksiya uchun integral yig'indi tuzamiz:

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} kf(\xi_k)\Delta x_k = k \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= k\int_a^b f(x)dx.$$



64- rasm.

5-x o s s a. *a, b, c sonlar qanday bo'lmasin hamma vaqt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $a < b < c$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx +$ $+ \int_c^b f(x)dx$ bo'ladi.

Bu xossani isbotlamasdan uning geometrik mazmunini tushuntiramiz (64- rasm). *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning yuzi *aACc* va *cCBb* trapetsiyalar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

6-x o s s a. *Funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali har bir qo'shiluvchi funksiya integrallarining yig'indisiga teng:*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \qquad (1)$$

I s b o t. $f(x) + g(x)$ funksiya uchun integral yig'indi tuzamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}[f(\xi_k)+g(\xi_k)]\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k.$$

Bu tenglikdan $\Delta x_k \to 0$ da limitga o'tsak, (1) formulani olamiz. Bu xossa istalgan chekli sondagi qo'shiluvchi funksiyalarga ega bo'lgan yig'indi uchun ham o'rinli bo'lishini isbotlash mumkin.

7-xossa. *Agar* $[a;\ b]$ *oraliqda* $f(x)\geq 0$ *va* $a<b$ *bo'lsa, u holda* $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ *bo'ladi.*

Isbot. $[a;\ b]$ kesmani istalgan usul bilan $[x_{k-1};\ x_k]$ qismlarga bo'lib, $\xi\in\lfloor x_{k-1};\ x_k\rfloor$, $k=1,2,\ ...$ nuqtalarni qanday tanlamaylik, $f(\xi_k)\geq 0$ va $\Delta x_k>0$ bo'ladi. Bunday holda $\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\geq 0$ bo'lib, $\lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx\geq 0$ bo'ladi.

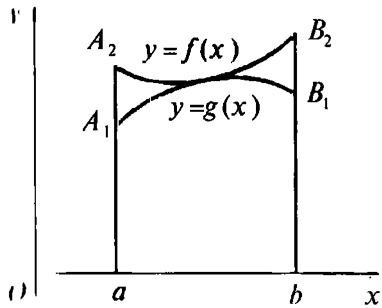
8-xossa. *Barcha* $x\in[a;b]$ *uchun* $f(x)\geq g(x)>0$ *bo'lsa, u holda* $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$ $(a<b)$ *bo'ladi.*

Isbot. Shartga ko'ra barcha $x\in[a;b]$ uchun $f(x)-g(x)\geq 0$. 7- xossaga ko'ra:

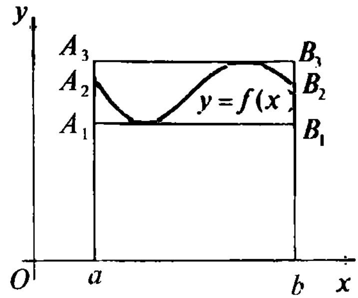
$$\int_a^b(f(x)-g(x))dx\geq 0.$$

6-xossani e'tiborga olsak, talab qilingan tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\geq 0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx.$$



65- rasm.



66- rasm.

Bu xossaning geometrik ma'nosi 65-rasmdan ravshan.

9-x o s s a. *Agar m va M sonlar f(x) funksiyaning [a; b] kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa, bunda (a < b),* u holda

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (2)$$

bo'ladi.

I s b o t. Shartga ko'ra barcha $x \in [a; b]$ uchun $m \le f(x) \le M$.

6-xossaga ko'ra

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\, dx \quad \text{va} \quad \int_a^b dx = b-a$$

bo'lishini e'tiborga olsak, (2) tengsizlikni olamiz.

Geometrik nuqtayi nazardan bu xossa aA_2B_2b egri chiziqli trapetsiyaning yuzi aA_1B_1b va aA_3B_3b to'g'ri to'rtburchaklar yuzlari oralig'ida yotishini bildiradi (66-rasm).

9- §. O'rta qiymat haqidagi teorema

T e o r e m a . *Agar $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu oraliqda shunday $c \in [a;\ b]$ nuqta mavjudki,*

$$\int_b^a f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) \tag{3}$$

bo'ladi.

I s b o t . Aniqlik uchun $a < b$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz. Shuning uchun bu funksiya $[a;\ b]$ kesmada eng kichik m qiymatga va eng katta M qiymatga ega bo'ladi. 9- xossaga ko'ra

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

bo'ladi. Bundan

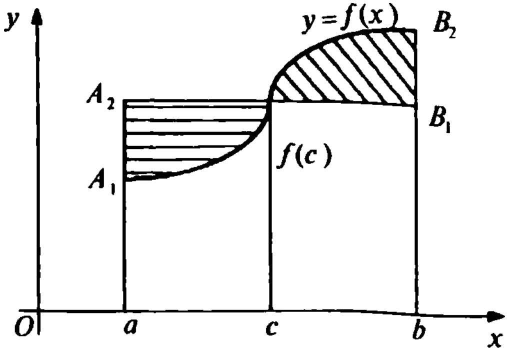
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

$y = f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun bu funksiya m va M sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi. Shunday $c \in [a;\ b]$ nuqta topiladiki,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

bo'ladi. Bundan isbotlanishi kerak bo'lgan (3) tenglikni olamiz. Agar $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda o'rta qiymat haqidagi teorema soddagina geometrik ma'noga ega bo'ladi: $[a;\ b]$ kesmada shunday c nuqta mavjudki, aA_1B_2b egri chiziqli trapetsiyaning yuzi asosi $b-a$ ga, balandligi esa $f(c)$ ga teng bo'lgan aA_2B_1b to'g'ri to'rtburchakning yuziga teng bo'ladi (67-rasm).

1-m i s o l . $f(x) = \cos^2 x$ funksiyaning $[0;\ \pi]$ oraliqdagi o'rtacha qiymatini toping.



67- rasm.

Y e c h i s h . (4) formuladan foydalanamiz. Bu yerda $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \cos^2 x$. Demak, $f(c) = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^\pi \cos^2 x dx =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{1}{2\pi}(\pi + 0) = \frac{1}{2}$$

2-m i s o l . $I = \int\limits_0^1 \sqrt{4 + x^2}dx$ integralni baholang.

Y e c h i s h . $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ funksiyaning $[0;\ 1]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topamiz. Buning uchun $f(x)$ funksiyaning hosilasini topib, uni nolga tenglashtiramiz va kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x) = \left(\sqrt{4 + x^2}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{4 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Demak, $0 \in [0;\ 1]$. $f(x)$ funksiyaning $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'(0) = \sqrt{4 + 0} = 2;\quad f(1) = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

Shunday qilib, $m = 2$; $M = \sqrt{5}$; $b = 1$, $a = 0$.

Demak, (2) formulaga ko'ra: $2 \le \int\limits_0^1 \sqrt{4 + x^2}\,dx \le \sqrt{5}$.

3-misol. $J = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ integralni baholang.

Yechish. $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiyani tekshiramiz.

Buning uchun uning hosilasini topamiz:

$$f' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$$

bo'lganda $\cos x > 0$ va $x - \operatorname{tg} x < 0$ bo'lgani uchun $f'(x) < 0$ bo'ladi.

Demak, $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada kamayuvchi.

Bunday holda $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiya uchun $M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ eng katta qiymat, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ eng kichik qiymat bo'ladi.

Shunday ekan $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ uchun $\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ bo'ladi.

9-xossaga ko'ra $\frac{1}{2} < \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{\sqrt{2}}{2}$ natijani olamiz.

10- §. Aniq integralni hisoblash usullari

Aniq integralni turli usullar bilan hisoblash mumkin. Bunday usullardan aniqmas integrallarni hisoblashda foydalangan edik.

1. O'zgaruvchini almashtirish usuli. Agar $x=\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha; \beta]$ oraliqda uzluksiz, bir qiymatli va bu oraliqda $\varphi'(t)$ uzluksiz hosilaga ega bo'lsa;

2) t o'zgaruvchi $[\alpha; \beta]$ oraliqda o'zgarganda, $x=\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlari $[a; b]$ oraliqdan chiqmasa;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ bo'lsa, u holda $[a; b]$ oraliqda uzluksiz istalgan $f(x)$ funksiya uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Integrallash chegaralarini almashtirsak, oldingi (eski) o'zgaruvchiga qaytishga zaruriyat qolmaydi.

1-misol. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\, dx$ ni hisoblang.

Yechish. Agar $\sin x = u$, $\cos x\, dx = du$ bo'lib, $x=0$ bo'lsa, $u=0$; $x=\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $u=1$ bo'ladi. Demak,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^1 u^3 du = \frac{1}{4}u^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

2-misol. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$ ni hisoblang.

Yechish. $x^2=t$ desak, $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=1 \Rightarrow t=1$. Demak,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{8}.$$

3-misol. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$ ni hisoblang.

Y e c h i s h . $x = a\sin t$ almashtirishni bajarsak, $x=0 \Rightarrow t=0$ va $x=a \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ bo'lib, $dx = a\cos t\,dt$ bo'ladi.

Bunday almashtirishning o'rinli ekanligini tekshiramiz:

1) $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ funksiya $[0;\, a]$ kesmada uzluksiz;

2) $x = a\sin t$ funksiya $x'_t = a\cos t$ hosilasi bilan $\left[0;\, \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda uzluksiz;

3) t esa 0 dan $\frac{\pi}{2}$ gacha o'zgarganda $x=\varphi(t)=a\sin t$ funksiya 0 dan a gacha o'sadi. Bunda $\varphi(0)=0$ va $\varphi(\frac{\pi}{2})=a$ bo'ladi. Shunday qilib, tanlangan almashtirish aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish qoidasining barcha talablarini qanoatlantiradi. Shuning uchun (1) formuladan foydalanish imkoniyatiga egamiz. Demak,

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi a^2.$$

Olingan natijaning geometrik ma'nosini tushuntiramiz.

Integral ostidagi $y=\sqrt{a^2-x^2}$ funksiya grafigi markazi koordinatalar boshida yotgan a radiusli ustki yarimaylanani ifodalaydi. Olingan natija esa markazi koordinatalar boshida yotgan a radiusli doira yuzining choragini ifodalaydi.

2. B o ' l a k l a b   i n t e g r a l l a s h   u s u l i .

Aniqmas integralni bo'laklab integrallaganimizdek, aniq integralni ham bo'laklab integrallash mumkin. Aniq integralni bo'laklab integrallash uchun formula chiqaramiz.

T e o r e m a. *u(x) va v(x) funksiyalar o'zining hosilalari bilan [a; b] oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (2)$$

formula o'rinli bo'ladi.

(2) formula aniq integralni *bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi.

I s b o t. Shartga ko'ra u va v funksiyalar $[a; b]$ oraliqda uzluksiz hosilalarga ega. Bunday holda ikkita funksiya ko'paytmasini differensiallash qoidasiga ko'ra:

$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad (3)$$

Bundan uv funksiya $u'v + uv'$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lishi kelib chiqadi. Bu funksiya $[a; b]$ da uzluksiz bo'lgani tufayli bu oraliqda uning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'ladi.

(3) tenglikning ikkala qismini dx ga ko'paytirib, a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b (u'v + uv')dx;$$

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'dx.$$

Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra:

$$\int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b$$

va $u'dx = du$, $v'dx = dv$ bo'lishini e'tiborga olsak, isbotlanishi kerak bo'lgan formulani olamiz:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

1-m i s o l. $\int_1^e \ln x\,dx$ ni hisoblang.

Yechish. $u=\ln x$, $dv=dx$ desak, $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=x$ bo'ladi. (2) formulaga ko'ra topamiz:

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

2-misol. $\int_0^1 xe^{2x}dx$ ni hisoblang.

Yechish. $u=x$, $dv=e^{2x}dx$ desak, $du=dx$, $v=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}$ bo'ladi. (2) formulaga ko'ra hisoblaymiz:

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

3-misol. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ ni hisoblang.

Yechish. $u=x$, $\sin x dx = dv$ desak, $du=dx$, $v=-\cos x$ bo'ladi. Demak,

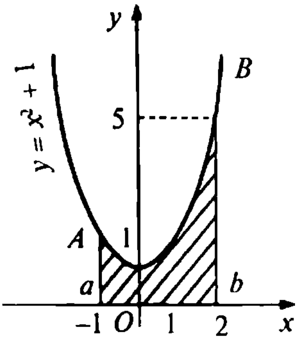
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

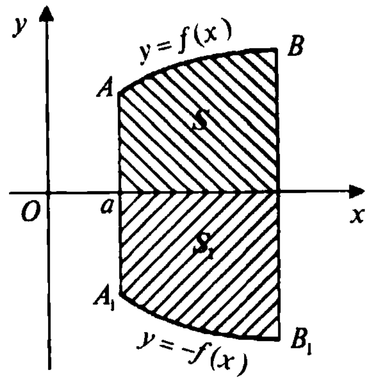
11- §. Aniq integralni shakllarning yuzlari va hajmlarini hisoblashga qo'llash

1. Yassi shakllarning yuzlarini hisoblash.

A. Biz aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalarni qaraganimizda yuqoridan $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ funksiya grafigi, pastdan Ox o'qining $a\leq x\leq b$ kesmasi,



68- rasm.



69- rasm.

yon tomonlardan esa $x = a$ va $x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

formula bo‘yicha hisoblanishini ko‘rgan edik.

1-misol. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$ va $x = 2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

Yechish. Berilganlarga ($a = -1$; $b = 2$; $f(x) = x^2 + 1$) ko‘ra chizma chizamiz (68- rasm).

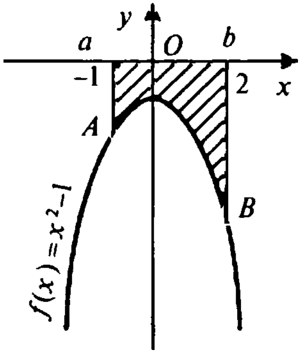
Rasmda hosil bo‘lgan $aABb$ shaklning yuzi (1) formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx = \int_{-1}^{2} x^2 dx + \int_{-1}^{2} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + x\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 2 +$$

$$+1 = \frac{18}{3} = 6.$$

B. Pastdan $y = -f(x)$ funksiya grafigi, yuqoridan Ox o‘qning $[a; b]$ kesmasi, yon tomonlardan $x = a$ va $x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan shakl berilgan bo‘lsin.

Shakldagi $aABb$ shakl Ox o‘qiga nisbatan aA_1B_1b shaklga simmetrikdir. Shuning uchun ularning yuzlari teng bo‘ladi (69- rasm):



70- rasm.

$$S_1 = -\int_a^b (-f(x))dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx = S. \qquad (2)$$

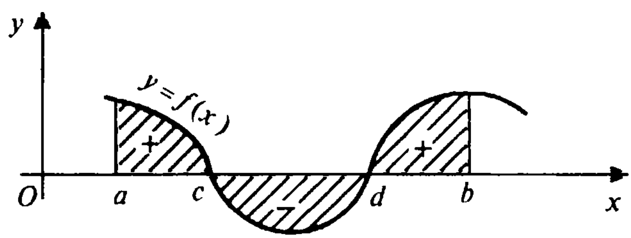
2-misol. $y = -x^2 - 1$, $y = 0$, $x = -1$ va $x = 2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

Yechish. $f(x) = -x^2 - 1$; $a = -1$ va $b = 2$ desak, izlanayotgan yuz (2) formula bo‘yicha topiladi (70- rasm):

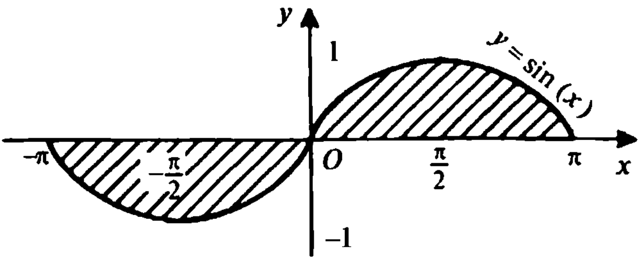
$$S = -\int_{-1}^{2} (-x^2 - 1)dx = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 2 +$$

$$+\frac{1}{3} + 1 = \frac{8 + 6 + 1 + 3}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

D. Ox o‘qi, $x = a$, $x = b$ to‘g‘ri chiziqlar va ishorasini $[a;\ b]$ kesmada o‘zgartirib turadigan $y = f(x)$ funksiya grafigi bilan chegaralangan shaklning yuzini aniq integral yordamida hisoblash talab qilingan bo‘lsin. Aniqlik uchun $y = f(x)$ funksiya $[a;\ c]$, $[c;\ d]$ va $[d;\ b]$ oraliqlarda o‘zgarmas ishoralarga ega bo‘lsin (71- rasm).



71- rasm.



72- rasm.

71- rasmda tasvirlangan shaklning yuzi

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \qquad (3)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

3- m i s o l . $y = \sin x$, $y = 0$, $x = -\pi$, $x = \pi$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

Y e c h i s h . Agar $x \in [-\pi;\ 0]$ bo'lsa, $\sin x \le 0$; $x \in [0;\ \pi]$ bo'lsa, $\sin x \ge 0$ bo'ladi.

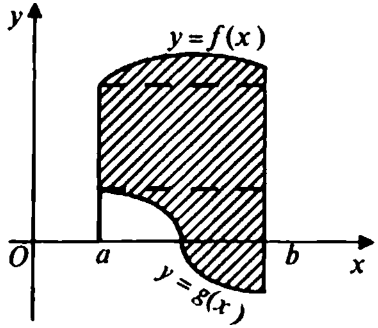
Izlanayotgan yuzni hisoblaymiz (72- rasm):

$$S = -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\pi}^{0} - \cos x \Big|_0^{\pi} = (\cos 0 -$$
$$-\cos(-\pi)) - (\cos\pi - \cos 0) = 1 + 1 - (-1 - 1) = 4.$$

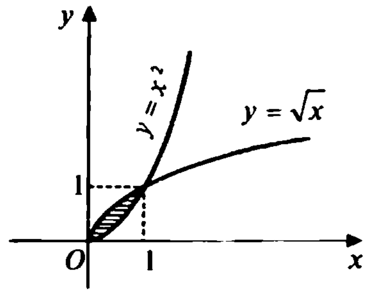
E. Agar shakl pastdan va yuqoridan $[a;\ b]$ da uzluksiz $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiya grafiklari (bunda barcha $x \in [a,\ b]$ uchun $f(x) \ge g(x)$), $x = a$, $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, bunday shaklning yuzi

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \qquad (4)$$

formula bo'yicha hisoblanadi (73- rasm).



73- rasm.



74- rasm.

4- m i s o l . $y = x^2$ ва $x = y^2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping (74- rasm).

Y e c h i s h . Berilgan chiziqlar kesishish nuqtalarining koordinatalarini topamiz.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \to \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \to \begin{cases} x^2 = \sqrt{x} \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x(x^3 - 1) = 0 \\ x_1 = 0;\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$y_1 = 0;\ y_2 = 1.$

Izlanayotgan yuzni (4) formula bilan hisoblaymiz:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 =$$

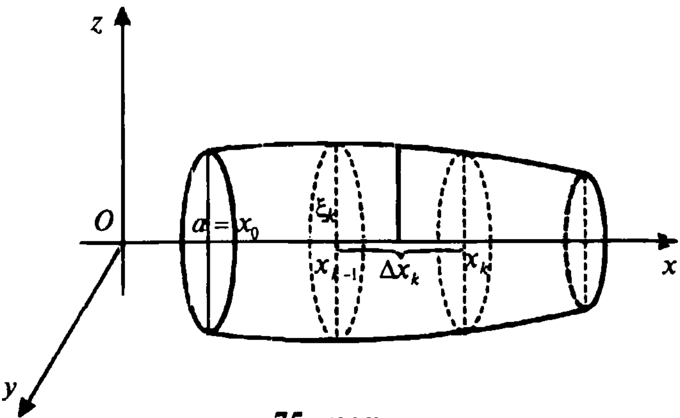
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

2. K o ' n d a l a n g k e s i m i n i n g y u z i b o ' y i c h a j i s m n i n g h a j m i n i h i s o b l a s h .

Ox o'qiga perpendikular bo'lgan ikkita $x = a$ va $x = b$ tekisliklar orasidagi *T* jismning *V* hajmini hisoblash talab qilingan bo'lsin (75- rasm).

Jismni *Ox* o'qqa perpendikular bo'lgan tekislik bilan kesganda hosil bo'ladigan kesimning yuzi ma'lum bo'lsin. Bu yuz kesuvchi tekislikning holatiga bog'liq, ya'ni *x* ning funksiyasi bo'ladi: $S = S(x)$.

Shuningdek, $S(x)$ o'zgaruvchi *x* ning uzluksiz funksiyasi ham bo'lsin. Masalani yechish uchun *T* jismni

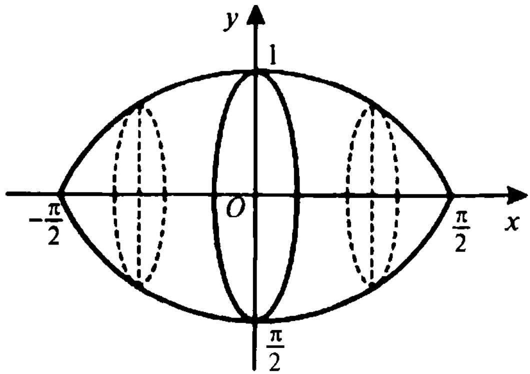


75- rasm.

$x = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x_n = b$ tekisliklar bilan n ta qismga bo‘lamiz. n oshib borishi bilan har bir bo‘lakchaning balandligi nolga intilib boradi (max $\Delta x_k \to 0$). Har bir $[x_{k-1}; x_k]$ oraliqda ξ_k nuqtani tanlaymiz va $k = 1, 2, ..., n$ ning har bir qiymati uchun yasovchisi Ox o‘qiga parallel bo‘lgan, balandligi Δx_k, asosi esa $S(\xi_k)$ bo‘lgan silindrik jism quramiz. Bunday silindrning hajmi $S(\xi_k)\Delta x_k$ bo‘lib, barcha silindrlar hajmlarining yig‘indisi $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$ bo‘ladi. Bu yig‘indi $[a; b]$ oraliqda $S(x)$ funksiya uchun integral yig‘indi bo‘ladi. Bu yig‘indining $\Delta x_k \to 0$ dagi limiti T jismning V hajmini ifodalaydi (75- rasm):

$$V = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx.$$

Demak, Ox o‘qiga perpendikular bo‘lgan $x = a$, $x = b$ tekisliklar orasidagi jismning hajmi, agar Ox o‘qqa perpendikular bo‘lgan kesimning $S = S(x)$ yuzi ma’lum bo‘lsa,



76- rasm.

$$V = \int_a^b S(x)dx, \ a \le x \le b \tag{5}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

$y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ va $x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Ox o'q atrofida aylantirganda hosil bo'ladigan aylanish jismining hajmi

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \tag{6}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

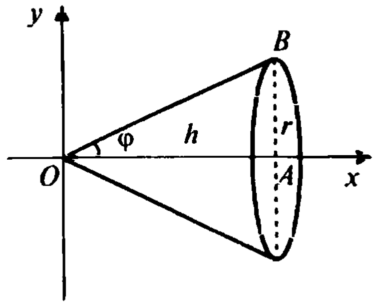
Agar shakl $y_1 = f_1(x)$ va $y_2 = f_2(x)$, $(0 \le f_1(x) \le \le f_2(x))$ chiziqlar va $x = a$, $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, bu shaklni Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx \tag{7}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

5- m i s o l . $y = \cos x$ funksiya grafigining $x = -\frac{\pi}{2}$ va $x = +\frac{\pi}{2}$ abssissali nuqtalari orasidagi yoyning Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini toping (76-rasm).

Yechish. Berilishiga ko'ra: $a=-\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\cos x$. Jismning hajmini (6) formula bo'yicha topamiz, bunda $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ formuladan foydalanamiz.



77- rasm.

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\pi\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin(-\pi)\right)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{2}.$$

6-misol. O'qi Ox o'q bo'ylab yo'nalgan konusning hajmini toping.

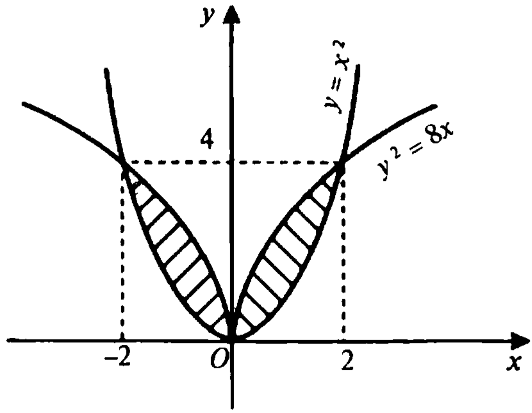
Yechish. OB to'g'ri chiziq tenglamasi (77-rasm) $y=kx$ ko'rinishga ega. $k=\operatorname{tg}\varphi=\frac{r}{h}$, $y=\frac{r}{h}x$. Demak,

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}x^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^b=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

7-misol. $y=x^2$, $y^2=8x$ parabolalar bilan chegaralangan shaklning Oy o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

Yechish. Jismni chizmada tasvirlaymiz (78-rasm). Berilgan chiziqlar kesishish nuqtasining koordinatalarini topamiz:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=8x \end{cases}\rightarrow\quad \begin{matrix} x^4=8x\Rightarrow x(x^3-8)=0; \\ x_1=0;\ x_2=2;\ y_1=0;\ y_2=4; \end{matrix}\quad M_1(0;\ 0),\ M_2(2;\ 4).$$



78- rasm.

Izlanayotgan hajm $V = \pi\int\limits_c^d \left[x_2^2(y) - x_1^2(y)\right]dy$ formula bo‘yicha topiladi. Bu formulaga $c = 0$; $d = 4$; $x_2^2 = y$; $x_1^2 = \dfrac{y^4}{64}$ larni qo‘yib topamiz:

$$V = \pi\int\limits_0^4\left(y - \frac{y^4}{64}\right)dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5\cdot 64}\right)\Bigg|_0^4 = \pi\left(\frac{16}{2} - \frac{4^5}{5\cdot 4^3}\right) =$$
$$= \pi(8 - 3{,}2) = 4{,}8\pi.$$

12- §. Aniq integral yordamida fizika va texnikaga oid masalalar yechish

Aniq integral faqatgina geometrik masalalarni yechishda keng qo‘llanilib qolmasdan, balki uning yordamida qator fizik, texnik va boshqa mazmundagi masalalarni yechish mumkin. Qanday mazmundagi masala yechilmasin, ular bir umumiylikka ega. Barcha masalalarda cheksiz qo‘shiluvchilarga ega bo‘lgan yig‘indining limiti hisoblanadi. Amaliy xarakterdagi masalalarni yechishga aniq integralni qo‘llashda quyidagi qoidalarga rioya qilish lozim.

1. Erkli o'zgaruvchini tanlab, izlanayotgan miqdor yetarlicha kichkina qismlarga bo'linadiki, ularning soni ortib borgan sari har bir miqdor nolga intilsin.

2. Yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlar e'tiborga olinmasdan, izlanayotgan miqdorning cheksiz kichik qismlari $f(x)\Delta x$ elementar qismga almashtiriladi.

3. Erkli o'zgaruvchini a dan b gacha o'zgarishda qarab, izlanayotgan miqdor integral yig'indining limiti sifatida aniqlanadi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)dx.$$

1. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi. Moddiy nuqta F kuch ta'sirida to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsin. Kuch yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan bir xil bo'lsin.

F kuch ta'sirida nuqta a holatdan b holatga ko'chgandagi bajargan ishini hisoblash zarur:

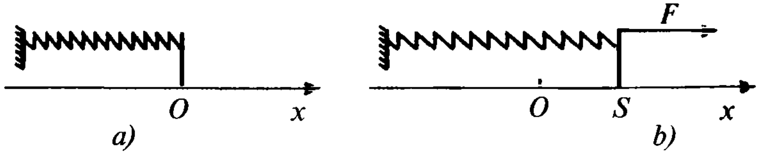
1) agar F kuch doimiy bo'lsa, u holda bajarilgan ish $A = F(b - a)$ bo'ladi;

2) agar F kuch nuqtaning holatiga bog'liq ravishda o'zgarib tursa, ya'ni F kuch nuqtaning S koordinatasiga uzluksiz bog'liq bo'lsa, ishni aniq integral yordamida hisoblaymiz.

$[a; b]$ kesmani uzunliklari ΔS ga teng bo'lgan n ta teng bo'lakka bo'lamiz. Har bir bo'lakda $S_i \in [a; b]$, $i \in Z$ ixtiyoriy nuqtani tanlaymiz. $F(S_i)$ kuchning ΔS yo'lda bajargan ishini hisoblaymiz:

$$F(S_i)\Delta S = A_i$$

Yetarlicha kichik ΔS yo'lda A_i son F kuch bajargan ishning taqribiy qiymatini beradi. Bunday miqdorlar yig'indisining limiti esa F kuchning $[a; b]$ kesmada bajargan ishini ifodalaydi:



79- rasm.

$$A = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(S_i)\Delta S = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=a}^{n} F(S_i)\Delta S =$$

$$= \int_a^b F(S)dS;$$

$$A = \int_a^b F(S)dS. \tag{1}$$

1- m a s a l a . 4N kuch prujinani 8 sm cho'zadi. Prujinani 8 sm cho'zish uchun qanday ish bajarish kerak?

Y e c h i s h . Guk qonuniga ko'ra prujinani x kattalik qadar cho'zuvchi kuch $F = kx$ formula bilan hisoblanadi, bunda k — o'zgarmas proporsionallik koeffitsiyenti (79-*a*, *b* rasm).

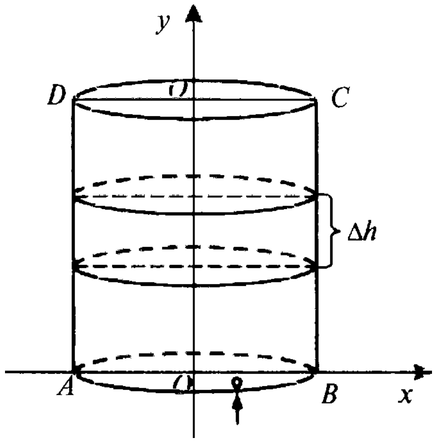
O nuqta prujinaning erkin holatiga to'g'ri keladi. k doimiyni aniqlaymiz. Masala shartidan $4 = k \cdot 0{,}08$ ekani kelib chiqadi. Demak, $k = 50$ va $F = 50S$. (1) formulaga asosan:

$$A = \int_0^{0,08} 50SdS = 25S^2 \Big|_0^{0,08} = 25 \cdot 0{,}08^2 \text{J} = 0{,}16 \text{J}.$$

2. S u y u q l i k n i n g   b o s i m i n i   h i s o b l a s h . Suyuqlikning bosim kuchini hisoblash uchun Paskal qonunidan foydalaniladi. Suyuqlik sathi h ga teng bo'lgan suyuqlikning S yuzga beradigan bosim kuchi $P = \gamma hS$ bo'ladi, bu yerdagi γ — suyuqlikning solishtirma og'irligi.

Suyuqlikning idish devorlariga beradigan bosimini aniq o'lchash uchun aniq integraldan foydalaniladi.

Bosimning miqdori h suyuqlik sathi a qiymatdan b qiymatga o'zgarganda o'zgaradi. dS elementar yuzga



80- rasm.

beriladigan bosim $dP=\gamma\Delta Sdh$ bo'lsin. Bunday holda S yuzga beriladigan bosim

$$P=\gamma\int_a^b Sdh \qquad (2)$$

formula bo'yicha topiladi.

2- m a s a l a . Silindrik bakning pastki asosi tekisligidagi teshigidan kirayotgan suv butun bakni to'ldiradi. Suvning silindr asosi yuziga beradigan bosim kuchini toping. Bakning balandligi h ga, asosi radiusi r ga teng.

Y e c h i s h . Suyuqlikning bak asosiga beradigan bosimi (80- rasm):

$$P=\rho g\int_{h_1}^{h_2} S(x)dx=\rho g\int_{h_1}^{h_2} hdS,\quad g=9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

formula bo'yicha hisoblanadi. Bunda $dS\approx dV=\pi r^2dh.$

Suvning bak asosiga beradigan bosim kuchini hisoblaymiz:

$$P=\rho g\int_0^h \pi r^2 hdh=\frac{\pi r^2h^2}{2}\rho g.$$

3. M o d d i y n u q t a n i n g o ' t g a n y o ' l i n i h i s o b l a s h .

Agar nuqta biror chiziq bo‘ylab harakatlanib, uning tezlik moduli t vaqtning funksiyasi, ya’ni $v=f(t)$ bo‘lsa, u holda nuqtaning $[t_1;\ t_2]$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan yo‘li

$$S=\int_{t_1}^{t_2}|f(t)|\,dt \tag{3}$$

formula bo‘yicha topiladi.

3-m a s a l a. $v=0{,}4\ t^3$ m/s tezlik bilan harakatlanayotgan jismning 10 s ichida bosib o‘tgan yo‘lini toping.

Y e c h i s h. $S=\int_0^{10}0{,}4t^3dt=0{,}4\int_0^{10}t^3dt=$

$$=0{,}4\cdot\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^{10}=1000\text{ m.}$$

4-m a s a l a. Moddiy nuqta ixtiyoriy chiziq bo‘ylab $S=5-4t+t^2$ qonun bo‘yicha harakatlanmoqda. $0\le t\le 5$ oraliqda nuqtaning S holatini va bosib o‘tgan yo‘li l ni toping (t — sekundlarda, S va l — santimetrlarda).

Y e c h i s h. 1) $t=5$ s, $S=(5-4\cdot5+25)$ sm $=10$ sm;

2) $v=S_t'=(5-4t+t^2)_t'=-4+2t.$

Agar $t\in[0;\ 2]$ bo‘lsa, $v\le 0$;

agar $t\in[2;\ 5]$ bo‘lsa, $v\ge 0$.

$$l=\int_1^5|v|\,dt=\int_0^5|-4+2t|\,dt=-\int_0^2(-4+2t)dt+\int_2^5(-4+2t)dt=$$

$$=-(t^2-4t)\Big|_0^2+(t^2-4t)\Big|_2^5=-4+8+25-20-4+8=13\text{ sm.}$$

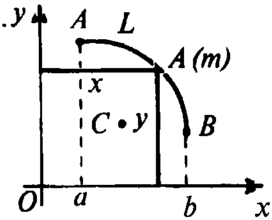
4. Y a s s i e g r i c h i z i q n i n g s t a t i k m o m e n t l a r i n i v a o g ‘ i r l i k m a r k a z i n i h i s o b l a s h .

Oxy tekislikda m massali $A(x;\ y)$ moddiy nuqta berilgan bo‘lsin.

1- t a ' r i f. *A(x; y) nuqtaning Ox o'qqa nisbatan **statik momenti** deb ushbu ko'paytmaga aytiladi:*

$$M_x = my.$$

Shunga o'xshash, A(x; y) nuqtaning Oy o'qqa nisbatan momenti ham aniqlanadi:



81- rasm.

$$M_y = mx.$$

Massasi m ga, uzunligi L ga teng bo'lgan AB yassi egri chiziq $y=f(x)$, $a \le x \le b$ funksiyaning grafigidan iborat bo'lsin (81-rasm).

Faraz qilaylik, AB egri chiziq bir jinsli bo'lsin, ya'ni massa taqsimotini ifodalovchi ρ chiziqli zichligi egri chiziqning barcha nuqtalarida bir xil bo'lsin. Soddalik uchun $\rho = 1$ desak, egri chiziqning m massasi son jihatidan uning L uzunligiga teng bo'ladi, ya'ni

$$m = L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Statik momentlar

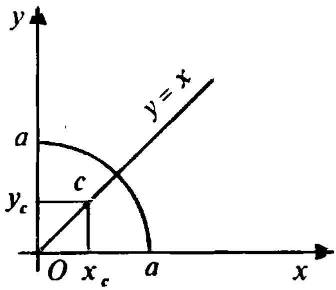
$$M_x = \int_a^b y\,dl = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx, \qquad (4)$$

$$M_y = \int_a^b x\,dl = \int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (5)$$

formulalar bo'yicha hisoblanadi.

5-m a s a l a . $x^2 + y^2 = a^2$ aylana yoyining 1-chorakda joylashgan qismining og'irlik markazini toping.

Y e c h i s h. Masala shartidan $x \ge 0$, $y \ge 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Aylana tenglamasidan $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ bo'ladi (82-rasm).



82- rasm.

Bu tenglikni differensiallab, topamiz:

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Aylana yoyining 1-chorakdagi qismini topamiz:

$$\frac{1}{4}2\pi a = \frac{\pi a}{2}.$$

Bu yoyning massasi: $m = \frac{\pi a}{2}.$

(4) formula bo'yicha berilgan yoyning Ox o'qqa nisbatan statik momentini hisoblaymiz:

$$M_x = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^a y\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx = \int_0^a y \cdot \frac{1}{y}\sqrt{y^2 + x^2}\,dx =$$

$$= a\int_0^a dx = ax\Big|_0^a = a^2.$$

Og'irlik markazining ordinatasini topamiz:

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}.$$

Aylana yoyi birinchi koordinata burchagining bissektrisasiga nisbatan simmetrik joylashgani uchun, bu yoyning og'irlik markazi $y = x$ to'g'ri chiziq ustida yotadi:

$$x_c = y_c = \frac{2a}{\pi}, \quad C\left(\frac{2a}{\pi}; \frac{2a}{\pi}\right).$$

2-t a ' r i f. *$y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ moddiy yassi egri chiziqning* ***og'irlik markazi*** *deb shunday $C(x_c; y_c)$ nuqtaga aytiladiki, bu nuqtada berilgan egri chiziqning butun m* *massasi to'plangan bo'ladi, C nuqtaning istalgan koordinata o'qiga nisbatan statik momenti shu o'qqa nisbatan $y=f(x)$ moddiy egri chiziqning statik momentiga teng bo'ladi.*

Shunday qilib, $M_y = mx_c$ va $M_x = my_c$ bo'ladi. Bundan

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \qquad (6) \qquad\qquad y_c = \frac{M_x}{m} \qquad (7)$$

yoki

$$x_c = \frac{1}{m}\int_a^b x\,dl = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}, \qquad (8)$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int_a^b y\,dl = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}. \qquad (9)$$

5. Yassi shaklning statik momentlarini va og'irlik markazini topish.

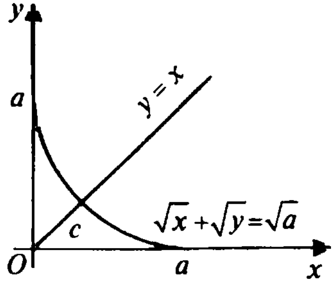
$y=f(x)$ $(a \le x \le b)$ egri chiziq, Ox o'q, $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan moddiy yassi shakl berilgan bo'lsin. Yassi shaklning massasi uning yuzi bo'yicha tekis taqsimlangan bo'lsin, ya'ni massa zichligi o'zgarmas bo'lib, $\rho = 1$ bo'lsin. Bunday holda egri chiziqli trapetsiyaning massasi son jihatdan uning S yuziga teng bo'ladi:

$$m = S = \int_a^b y\,dx. \qquad (10)$$

Koordinatalar o'qlariga nisbatan berilgan shaklning M_x va M_y statik momentlari

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx \qquad (11) \qquad\qquad M_y = \int_a^b xy\,dx \qquad (12)$$

formulalar bo'yicha hisoblanadi.



83- rasm.

Yassi shakl og'irlik markazining koordinatalari ham yassi egri chiziq og'irlik markazining koordinatalaridek aniqlanadi va uning koordinatalari

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx} \qquad (13)$$

formulalar bo'yicha topiladi.

6-m a s a l a. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ egri chiziq va koordinatalar o'qlari bilan chegaralangan shaklning og'irlik markazi koordinatalarini toping.

Y e c h i s h. Berilgan shakl birinchi koordinatalar burchagining $y = x$ bissektrisasiga nisbatan simmetrik joylashgan. Shuning uchun jismning og'irlik markazi $y = x$ to'g'ri chiziq ustida yotadi (83-rasm).

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow y = a + x - 2\sqrt{ax}, \ \ 0 \le x \le a;$$

$$M_y = \int_0^a xydx = \int_0^a x(a + x - 2\sqrt{ax})dx = \frac{a^3}{30};$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx = \frac{1}{2}\int_0^a (a + x - 2\sqrt{ax})^2 dx = \frac{a^3}{30};$$

$$m = S = \int_0^a ydx = \int_0^a (a + x - 2\sqrt{ax})dx = \frac{a^2}{6}.$$

$$x_c = y_c = \frac{a}{5}. \quad C\left(\frac{a}{5}; \ \frac{a}{5}\right).$$

III BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

$f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiyalarning umumiy ko'rinishini toping va tekshiring.

1. $f(x)=2-x^3+\frac{1}{x^3}$.

2. $f(x)=x-\frac{2}{x^5}+\cos x$.

3. $f(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x$.

4. $f(x)=5x^2-1$.

5. $f(x)=(2x-3)^5$.

6. $f(x)=3\sin 2x$.

7. $f(x)=(4-5x)^7$.

8. $f(x)=-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

9. $f(x)=\frac{3}{(4-15x)^4}$.

10. $f(x)=\frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$.

11. $f(x)=\frac{4}{(3x-1)^2}$.

12. $f(x)=-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\cos^2(3x-1)}$.

$f(x)$ funksiya uchun shunday boshlang'ich funksiya topingki, uning grafigi M nuqtadan o'tsin.

13. $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$, $M(-1;4)$.

14. $f(x)=x^3+2$, $M(2;15)$.

15. $f(x)=1-2x$, $M(3;2)$.

16. $f(x)=\frac{1}{x^3}-10x^4+3,\ \ M(1;\,5).\ \ J\colon -\frac{1}{2x^2}-2x^5+$ $+3x-4{,}5.$

17. $f(x)=-x^2+3x,\ \ M(2;\,-1).\ \ J\colon -\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4\frac{1}{3}.$

$f(x)$ funksiya uchun F_1 boshlang'ich funksiya grafigi M nuqtadan, F_2 boshlang'ich funksiya grafigi esa N nuqtadan o'tadi. Bu boshlang'ich funksiyalarning farqi qanday? F_1 va F_2 funksiyalar grafiklarining qaysisi yuqorida joylashgan?

18. $f(x)=3x^2-2x+4,\ \ M(-1;\,1),\ \ N(0;\,3).$

19. $f(x)=4x-6x^2+1,\ \ M(0;\,2),\ N(1;\,3).$

20. $f(x)=4x-x^3,\ M(2;\,1),\ N(-2;\,3).\ \ J\colon -2;$ ikkinchisi.

21. $f(x)=(2x+1)^2,\ M(-3;\,-1),\ N(1;\,6\frac{1}{3}).$

Integrallarni toping va natijani differensiallash yo'li bilan tekshiring.

22. $\int(5x^4-4x^2+2x-1)dx.$

23. $\int\frac{2x^3-3x+7}{x}dx.$

24. $\int\left(x^5-\frac{2}{x^3}+3\sqrt{x}-4\right)dx.$

25. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx.$

26. $\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x\sqrt{x}}+5\right)dx.$

27. $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{3\sqrt{x}}+3\right)dx.$

28. $\int\left(4x^3-\frac{5}{\cos^2 x}+3x\right)dx.$

29. $\int\left(a\sin x - b\cos x + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

30. $\int(x-3)^5\,dx.$

31. $\int(5x+2)^7\,dx.$

32. $\int\sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx.$

33. $\int\sqrt{2x-1}\,dx.$

34. $\int\frac{3}{x-1}\,dx.$

35. $\int\frac{6}{3x+7}\,dx.$

36. $\int[2\sin(3-2x)+3\cos(3x-2)]\,dx.$

37. $\int\left(5\sin 3x + 2\cos\frac{x}{2}\right)dx.$

38. $\int\left(\frac{5}{\cos^2 2x}+\frac{3}{\sin^2 3x}-\frac{2}{e^{3x}}\right)dx.$

39. $\int\left(\frac{4}{\cos^2(x+4)}+\frac{5}{\sin^2(2x-1)}\right)dx.$

40. $\int(5^{3-4x}+e^{x+2})dx.$

41. $\int(3e^{3x}+7\cdot 3^{7x})dx.$

42. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

43. $\int\frac{dx}{4+(3x-1)^2}.$

44. $\int\frac{dx}{5-x^2}.$

45.* $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}.$

46. $\int \mathrm{tg}5x\,dx.$

47. $\int \mathrm{ctg}(x+5)\,dx.$

48. $\int\frac{dx}{3-2x+x^2}.$

49. $\int\frac{dx}{3-2x-x^2}.$

50. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$. **51.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-6x+13}}$.

Quyidagi integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirib hisoblang.

52. $\int \sqrt{2x-3}dx$. J: $\frac{1}{3}\sqrt{(2x-3)^3}+C$.

53. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$. J: $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2-3x)^2}+C$.

54. $\int \frac{3dx}{\sqrt[4]{x\cdot 3+5}}$. J: $\frac{4}{3}\sqrt[4]{(3x+5)^3}+C$.

55. $\int (x^4+3)^5 x^3 dx$. J: $\frac{1}{24}(x^4+3)^6+C$.

56. $\int \frac{3x^2dx}{(2-x^3)^4}$. J: $\frac{1}{3(2-x^3)^3}+C$.

57. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x^3-5}}$. J: $\frac{1}{3}\sqrt{2x^3-5}+C$.

58. $\int \frac{3xdx}{5+x^2}$. J: $\frac{3}{2}\ln(5+x^2)+C$.

59. $\int \frac{x^3dx}{4x^4-2}$. J: $\frac{1}{12}\ln\left|3x^4-2\right|+C$.

60. $\int \frac{2\cos xdx}{3\sin x+5}$. J: $\frac{2}{3}\ln|3\sin x+5|+C$.

61. $\int \frac{3\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1+2\sin x}}$. J: $\sqrt[3]{(1+2\sin x)^2}+C$.

62. $\int 5^{3x^2} xdx$. J: $\frac{5^{3x^2}}{6\ln 5}+C$.

63. $\int e^{-x^3+2}x^2dx$. J: $-\frac{1}{2}e^{-x^2+2}+C$.

64. $\int x\cos(x^2+3)dx$. J: $\frac{1}{2}\sin(x^2+3)+C$.

65. $\int \frac{3x^2 dx}{\sin^2(x^3-2)}$. J: $-\mathrm{ctg}(x^3-2)+C$.

66. $\int \frac{2e^x dx}{(5+e^x)^2}$. J: $-\frac{2}{5+2^x}+C$.

Quyidagi integrallarni bo'laklab integrallang:

67. $\int xe^x dx$. J: $e^x(x-1)+C$.

68. $\int \ln|x| dx$. J: $x(\ln|x|-1)+C$.

69. $\int x\ln|x|\,dx$. J: $\frac{1}{2}x^2\ln|x|-\frac{1}{4}x^2+C$.

70. $\int \mathrm{arctg}x dx$. J: $x\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

71. $\int x\mathrm{arctg}x dx$. J: $\frac{1}{2}(x^2\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}x-x)+C$.

72. $\int (x-1)e^{2x}dx$. J: $\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$.

73. $\int x\cos x dx$. J: $x\sin x+\cos x+C$.

74. $\int x^2e^x dx$. J: $e^x(x^2-2x+2)+C$.

75. $\int e^x \sin x dx$. J: $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

76. $\int e^{2x}\cos x dx$. J: $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$.

77. $\int \cos 3x\cos x dx$. J: $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$.

Aniq integrallarni hisoblang.

78. $\int_{-1}^{3}(1-2x+3x^2)dx$. J: 24.

79. $\int_0^4\left(2x^2-3x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)dx$. J: $16\frac{2}{3}$.

80. $\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)dx.$ $J:$ 0,8.

81. $\int\limits_{1}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx.$ $J:$ $6\frac{2}{3}.$

82. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2x+\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx.$ $J:$ 2,5.

83. $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$ $J:$ $\frac{\pi}{4}.$

84. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{9-x^2}.$ $J:$ $\frac{\pi}{18}.$

85. $\int\limits_{0}^{2}(2x-1)^3 dx.$ $J:$ $10\frac{1}{8}.$

86. $\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\frac{x}{3}dx.$ $J:$ 3.

87. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x dx.$ $J:$ 0,25.

88. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx.$ $J:$ 0,5.

89. $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{3dx}{2\cos^2 3x}.$ $J:$ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right).$

90. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}}\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$ $J:$ $\sqrt{3}-1.$

91. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ $\quad$ *J*: $\frac{\pi}{4}.$

92. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{4+x^2}.$ $\quad$ *J*: $\frac{\pi}{8}.$

93. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4}{9+16x^2}dx.$ $\quad$ *J*: $\frac{\pi}{36}.$

94. $\int\limits_{-1}^{2} (x^2-1)^3 xdx.$ $\quad$ *J*: $10\frac{1}{8}.$

95. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{128xdx}{(x^2+1)^5}.$ $\quad$ *J*: $\frac{15}{16}.$

96. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} 6\sqrt{x^4+16}x^3dx.$ $\quad$ *J*: 61.

97. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}}.$ $\quad$ *J*: 0,5.

98. $\int\limits_2^{4} \frac{15xdx}{(x^2-1)^3}.$ $\quad$ *J*: 0,4.

99. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{3-\cos x}.$ $\quad$ *J*: $\ln\frac{5}{4}.$

100. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x}\sin xdx.$ $\quad$ *J*: $e-\sqrt{e}.$

101. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{2+\sin x}.$ $\quad$ *J*: $\ln\frac{3}{2}.$

102. $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+5}$. J: $\ln\frac{e+5}{6}$.

103. $\int\limits_0^1 3e^{x^3}x^2 dx$. J: $e-1$.

104. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{6-5x+x^2}$. J: $\ln\frac{4}{3}$.

105. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$. J: $\ln\frac{4}{3}$.

106. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. J: $4-\ln 3$.

107. $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x dx$. J: $\frac{1-e^{\pi}}{2}$.

108. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ integralni 3 ta o‘nli ishoragacha to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi bilan taqribiy hisoblang ($n=10$).

109. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralni 2 ta o‘nli ishoragacha to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi bilan taqribiy hisoblang ($n=10$).

110. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ integralni 4 ta o‘nli ishoragacha trapetsiya formulasi bilan hisoblang ($n=10$). J: 0,9981.

111. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$ integralni 3 ta o‘nli ishoragacha trapetsiya formulasi bilan hisoblang ($n=5$). J: 0,758.

Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan shakllarning yuzlarini hisoblang.

112. $y=3x-1,\ \ y=0,\ \ x=2,\ \ x=4.$ *J:* 16.

113. $x-2y+4=0,\ \ x+y-5=0,\ \ y=0.$ *J:* 13,5.

114. $y=-\frac{1}{3}x^2+3,\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=3.$ *J:* 6.

115. $y=9-x^2,\ \ y=0.$ *J:* 36.

116. $y=4x-x^2,\ \ y=0.$ *J:* $10\frac{2}{3}$.

117. $y=x^2-2x+3,\ \ y=0.$ *J:* 9.

118. $y=x^2, 5x-y-6=0.$ *J:* $\frac{1}{6}$.

119. $y=x^2, x=y^2.$ *J:* $\frac{1}{3}$.

Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan shaklning *Ox* o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismlarning hajmlarini toping.

120. $y^2=6x, y=1, x=1, x=3.$ *J:* 24π.

121. $y^2=4(x-2), y=0, x=3, x=6.$ *J:* 30π.

122. $y=x^2-4, y=0.$ *J:* $34\frac{2}{15}$.

123. $y=\sin x, y=0, x=0, x=\pi.$ *J:* $\frac{\pi^2}{2}$.

124. $y^2=4x, y=x.$ *J:* $10\frac{2}{3}$.

125. $y=4-x^2, x-y+2=0.$ *J:* $21\frac{3}{5}$.

126. $9y^2=4x^3$ egri chiziqning $O(0;\ 0)$ va $A(3;\ 2\sqrt{3})$ nuqtalar orasidagi yoyining uzunligini toping.

Javob: $4\frac{2}{3}$.

127. $y=\frac{1}{2}x^2-1$ egri chiziqning Ox o‘q bilan kesishish nuqtalari orasidagi yoyining uzunligini hisoblang.

Javob: $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

128. $y^2=2x$ egri chiziqning $O(0;\ 0)$ va $A(1{,}5;\ \sqrt{3})$ nuqtalar orasidagi yoyning Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanish sirtining yuzini toping.

Javob: $\frac{7\pi}{3}$.

129. $y=\sin x$ sinusoidaning $0\le x\le\pi$ kesmadagi tarmog‘ining Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtning yuzini toping.

Javob: $4\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

130. Prujinani 0,01 m qisish uchun 10N kuch kerak. Prujinani 0,04 m qisish uchun qancha ish bajariladi?
Javob: 0,8 J.

131. Prujinani 0,03 m qisish uchun 16 J ish bajariladi. 144 J ish bajarib, prujinani qancha qisish mumkin?
Javob: 0,09 m.

132. Kanalning kesimi balandligi h, asoslari a va b ga teng bo‘lgan teng yonli trapetsiya shakliga ega. Kanalga quyiladigan suv to‘g‘onni qanday kuch bilan bosishini toping ($a>b$, a — trapetsiyaning ustki asosi).

Javob: $\frac{(a+2b)h^2}{6}\rho g$.

(ρ — suvning zichligi, g — erkin tushish tezlanishi).

133. Silindr shaklidagi idish moy bilan to‘ldirilgan. Agar idishning balandligi $H=3$ m va radiusi $R=1{,}5$ m bo‘lsa, moyning idish yon sirtlariga beradigan bosimini hisoblang. Moyning zichligi $800\frac{\text{kg}}{\text{m}}$.

Javob: 105920,1 N.

134. $x^2+y^2=a^2$ aylananing Ox o'q ustida yotgan yoyining og'irlik markazini toping.

Javob: $\left(0; \frac{10}{\pi}\right)$.

135. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ egri chiziq (astroida)ning 1-chorakda yotgan yoyining og'irlik markazini toping.

Javob: $\left(\frac{2}{5}a; \frac{2}{5}a\right)$.

136. $y=2x-x^2$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning og'irlik markazini toping.

Javob: $\left(1; \frac{2}{5}\right)$.

137. $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning og'irlik markazini toping.

Javob: $\left(\frac{\pi-2}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$.

138. Yarimo'qlari a va b bo'lgan ellipsning yuzi πab ga teng bo'lishini isbotlang.

139. Bir jinsli yarimdoiraning og'irlik makrazini toping.

Javob: $\left(0; \frac{4R}{3\pi}\right)$.

IV BOB. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

1- §. Kombinatorik masalalar haqida

Amaliyotda berilgan to'plamning elementlaridan ma'lum bir xossaga ega bo'lgan uning qism to'plamlarini tuzish mumkin. Masalan, har xil ko'rinishdagi ishlarni muhandisning ishchilar orasida taqsimlashi, agronomning qishloq xo'jalik ekinlarini dalalarga joylashtirishi, zobitning askarlarni bo'limlarga taqsimlashi va h.k. Bunday masalalarda narsalarning (elementlarning) kombinatsiyasi haqida gap boradi. Bunday masalalar kombinatorik masalalar deyiladi. Matematikaning kombinatorik masalalarni o'rganadigan sohasi *kombinatorika* deyiladi. Kombinatorikada tartiblashgan chekli to'plamlar bilan ish ko'riladi. Istalgan kombinatorik masalani chekli to'plamlar va ularni akslantirish haqidagi masalaga keltirish mumkin. „Kombinatorika“ ko'pincha „birlashmalar“ nomi bilan ham yuritiladi.

Har xil narsalardan tuzilgan va bir-birlaridan yo shu narsalarning tartibi bilan, yoki shu narsalarning o'zlari bilan farq qiluvchi turli guruhlar, umuman, *birlashmalar* deb ataladi.

Masalan, 10 ta raqam: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan har birida bir necha raqamlar bo'lgan sonlar tuzish mumkin: 123, 312, 9576, 5460, 72 va h.k. Ulardan ba'zilari, masalan, 123 va 312 faqat raqamlarning tartibi bilan farq qilsa, boshqalari esa, masalan, 5460 va 72 o'zlaridagi raqamlar bilan farq qiladi.

Birlashmalarni tuzgan narsalar *elementlar* deyiladi. Elementlarni a, b, c, ... harflar orqali belgilaymiz.

Birlashmalarning 3 ta xilini — o'rin almashtirish, o'rinlashtirish va gruppalash (guruhlash)ni alohida-alohida qaraymiz.

2- §. O'rin almashtirishlar. O'rin almashtirishlar soni

Bizga biror chekli to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamda uning elementlarini ma'lum bir tartibda joylashtirgan bo‘laylik. Natijada tartiblashgan to‘plamga ega bo‘lamiz.

Masalan, lotin yozuviga asoslangan o‘zbek alifbosidagi 28 ta harf tartiblashgan to‘plam tashkil qiladi. Sinfdagi o‘quvchilar to‘plami ham jurnalda qabul qilingan tartibga ko‘ra tartiblashgan to‘plamdir. Natural sonlar to‘plami tartiblashgan cheksiz to‘plamdir.

Kombinatorikada to‘plamda o‘rnatilgan tartib uning elementlarini o‘rin almashtirish deyiladi.

Bitta elementdan iborat bo‘lgan to‘plamni bitta yagona usul bilan tartiblashtirish mumkin: to‘plamdagi yagona elementni birinchi deb hisoblaymiz. Ikkita a va b elementdan iborat bo‘lgan to‘plamni ikki usul bilan uning elementlarini tartiblashtirib joylashtirish mumkin: *ab* yoki *ba* va 3 ta a, b, c elementdan tashkil bo‘lgan to‘plamni 6 ta usul bilan tartiblashtirish mumkin, ya’ni 6 ta o‘rin almashtirish hosil qilamiz: *abc; acb; bac; bca; cab; cba.*

n ta elementdan mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlar soni P_n orqali belgilanadi. Xususiy hollarda biz yuqorida $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 6$ bo‘lishini aniqladik. P_n o‘rin almashtirishlar soni

$$P_n = nP_{n-1} \tag{1}$$

formula bo‘yicha hisoblanishini isbotlaymiz.

(1) tenglikni matematik induksiya usuli bilan isbotlaymiz.

1. $n = 1,2$ bo‘lgan hollar uchun (1) tenglik o‘rinli:

$$P_1 = 1 \text{ va } P_2 = 2P_1 = 2 \cdot 1 = 2!$$

2. Faraz qilaylik, (1) tenglik $n = k$ natural son uchun ham o‘rinli bo‘lsin: $P_k = k\ P_{k-1}$. Endi $P_{k+1} = (k+1)P_k$ bo‘lishini isbotlaylik.

k ta elementli to‘plamga yana bir elementni qo‘shib olsak, har bir o‘rin almashtirishga (ular P_k ta) bu elementni $k+1$ usul bilan qo‘yib chiqish mumkin. Haqiqatan, har bir o‘rin almashtirish k ta elementning tartiblashgan to‘plami bo‘lgani uchun, bunday holda $(k+1)$ - elementni bu qatorga $k+1$ usul bilan qo‘yib chiqish mumkin: birinchi elementdan oldin, ikkinchi, uchinchi, ..., oxirgi va oxiridan keyin. Shunday qilib, $k+1$ ta elementdan mumkin bo'lgan barcha o'rin almashtirishlar soni k ta elementdan tuzilgan P_k o'rin almashtirishlar soni bilan $k+1$ ning ko'paytmasiga teng:

$$P_{k+1} = (k+1)P_k.$$

(1) formulaning o'rinli ekanligi isbotlandi. Demak, n elementdan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni birinchi n ta natural son ko'paytmasiga teng bo'lar ekan:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \qquad (2)$$

Birinchi n ta natural sonlarning ko'paytmasi uchun maxsus belgilash qabul qilingan: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ ($n!$ – „n faktorial“ deb o'qiladi). Shunday qilib,

$$P_n = n! \qquad (3)$$

Masalan, zavodga 6 ta yosh mutaxassislar keldi. Ularni 6 ta tokarlik stanogiga ishga joylashtirishning barcha mumkin bo'lgan imkoniyatlari soni

$$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

ga teng bo'ladi.

To'qqizta turli raqamdan

$$P_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880 \text{ ta}$$

to'qqiz xonali son yozish mumkin.

3- §. Tartiblashgan to'plamlar va o'rinlashtirishlar

Berilgan chekli to'plamdan tuzilgan har bir o'rin almashtirishlarda bu to'plamning barcha elementlari ishtirok etadi. Endi n ta elementga ega bo'lgan to'plamning m ta ($m < n$) elementini tanlaylik. n ta elementga ega bo'lgan to'plamdan har birida m ta element bo'lgan qancha qism to'plamlar tuzish mumkin, degan savol paydo bo'ladi.

Kombinatorikada har bir shunday tartiblashgan qism to'plam n elementni m tadan o'rinlashtirish deyiladi.

Shunday qilib, n elementga ega bo'lgan to'plamdan m elementga ega bo'lgan nechta o'rinlashtirish tuzish mumkin, degan savolning qo'yilishi tabiiy. Bunday o'rinlashtirishlarning sonini A_n^m orqali belgilaymiz.

$M = \{a, b, c\}$ to'plamdan quyidagi o'rinlashtirishlarni tuzish mumkin:

bittadan: *a, b, c,*

ikkitadan: *(a; b), (a; c), (b; c), (b; a), (c; a), (c; b);*

uchtadan: *(a; b; c), (a; c; b), (c; a; b), (c; b; a), (b; c; a), (b; a; c).*

Shunday qilib, $A_3^1 = 3$; $A_3^2 = 6$; $A_3^3 = 6$.

$A_n^1 = n$ bo'lishi ravshan. $1 < m < n$ bo'lganda o'rinlashtirish uchun

$$A_n^{m+1} = (n - m)A_n^m \qquad (*)$$

formulaning o'rinli bo'lishini isbotlaymiz.

(*) formulani matematik induksiya usuli bilan isbotlaymiz.

1. $A_n^1 = n.$

2. Faraz qilaylik, k natural son uchun

$$A_n^{k+1} = (n - k)A_n^k \qquad (4)$$

formula o'rinli bo'lsin.

Tasdig'imizning $m = k + 1$ hol uchun, ya'ni

$$A_n^{k+2} = [n - (k + 1)]\,A_n^{k+1} \qquad (5)$$

bo'lishini isbotlaylik.

$k + 2$ ta elementdan barcha o'rinlashtirishlarni tuzamiz. $k + 1$ ta elementdan tuzilgan o'rinlashtirishlarni tuzgandan keyin to'plamda $(n - k - 1)$ ta element qoladi. $k + 2$ elementdan iborat o'rinlashtirishlarni tuzayotganda ulardan istalganini birinchi o'rinlashtirishning $(k + 2)$- o'ringa qo'yish kerak. Shunday qilib, $(k + 1)$ elementli har bir o'rinlashtirishdan $(k + 2)$ elementli $(n - k - 1)$ ta o'rinlashtirish olish mumkin. $(k + 1)$ elementli o'rinlashtirishlar soni $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$ ta bo'lsa, u holda (k + 2) elementli barcha o'rinlashtirishlar soni

$$A_n^{k+2} = (n-k-1)A_n^{k+1} \Rightarrow A_n^{k+2} = \left[n-(k+1)A_n^{k+1}\right] \quad (6)$$

ta bo'ladi. Olingan (6) tenglikni (*) tenglik bilan solishtirsak, ular $m = k + 1$ bo'lganda ustma-ust tushadi. Shunday qilib, qilingan farazimiz to'g'ri ekan.

$A_n^1 = n$ tenglik va (*) formuladan ketma-ket quyidagilarni olamiz.

$A_n^1 = n$ (n elementdan 1 tadan o'rinlashtirishlar soni);

$A_n^2 = n(n-1)$ (n elementdan 2 tadan o'rinlashtirishlar soni);

$A_n^3 = n(n-1)(n-2)...;$

. . . .

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1); \quad (7)$$

(7) tenglikning o'ng qismini $(n - m)! = (n - m)(n - m - 1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ga ko'paytirib va bo'lib, topamiz:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (8)$$

Bu formuladan $A_n^0 = 1$ bo'lishi kelib chiqadi.

O'rin almashtirishni o'rinlashtirishning xususiy holi deb hisoblash mumkin. Haqiqatan, $m = n$ bo'lganda:

$$A_n^n = P_n = n! \quad (9)$$

O'rinlashtirishlar sonini aniqlovchi (7) formulani so'z bilan quyidagicha aytish mumkin:

n ta elementdan m tadan olib tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlar soni eng kattasi n bo'lgan m ta ketma-ket butun sonlar ko'paytmasiga teng.

Masalan,

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12; \; A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24; \; A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

1 - m a s a l a . Sinfda 10 ta fan o'qiladi va har kuni 5 xil dars o'tiladi. Kunlik dars necha turli usul bilan taqsimlanishi mumkin?

Y e c h i s h . Darslarning barcha mumkin bo‘lgan kunlik taqsimoti 10 elementdan 5 tadan olib tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlar soniga teng:

$$A_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

(7) va (8) formulalar $0 \leq m \leq n$ shartda istalgan butun m va n sonlar uchun ma’noga ega.

2- m a s a l a . a, b, c, d elementlardan 2 tadan olib tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlarni tuzing.

Y e c h i s h . 4 ta elementdan 2 tadan olib tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlar soni $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ ta bo‘ladi:

$(a; b;)$, $(b; a)$, (a, c), $(c; a)$, $(a; d)$, $(d; a)$, $(b; c)$, $(c; b)$, $(b; d)$, $(d; b)$, $(c; d)$, $(d; c)$.

(8) formula bo‘yicha hisoblaymiz:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12.$$

4- §. Gruppalashlar va ularning xossalari

Chekli to‘plamning qism to‘plamlari sonini hisoblaymiz. a, b, c elementlardan tuzilgan to‘plamning barcha qism to‘plamlarini tuzsak, ular 8 ta bo‘ladi:

$\varnothing$ — bo‘sh to‘plam;

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ — 3 ta bir elementli to‘plamlar;

$\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$ — 3 ta har birida 2 ta element bo‘lgan, ikki elementli to‘plamlar ($\{a; b\}$ va $\{b; a\}$, $\{a; c\}$ va $\{c; a\}$, $\{b; c\}$ va $\{c; b\}$ qism to‘plamlar ustms-ust tushadi);

$\{a; b; c\}$ — 1 ta uch elementli to‘plam.

n ta elementdan m tadan olib tuzilgan barcha qism to‘plamlar sonini C_n^m orqali belgilaylik. *Kombinatorikada chekli to‘plamlar gruppalash deyiladi.* Shuning uchun C_n^m yozuv n ta elementdan m tadan olib tuzilgan gruppalashlar sonini bildiradi. C_n^m ni aniqlaydigan formulani keltirib chiqarish uchun o‘rinlashtirish, o‘rin almashtirish va gruppalash orasidagi bog‘lanishni ornataylik.

4 ta a, b, c va d elementdan 3 tadan olib tuzilgan gruppalar 4 ta bo‘ladi: $\{a; b; c\}$, $\{a; b; d\}$, $\{a; c; d\}$, $\{b; c; d\}$.

Bu o‘rinlashtirishlar bir-biridan bir element bilan farq qiladi.

Agar bu gruppalarning har birida mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlarni qilsak (bular elementlarning tartibi bilan farq qiladi), to‘rt elementdan 3 talab mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz:

$$\{(a; b; c), (a; c; b), (b, a; c), (b; c; a), (c; a; b), (c; b; a)\};$$
$$\{(a; b; d), (a; d; b), (b, a; d), (b; d; a), (d; a; b), (d; b; a)\};$$
$$\{(a; c; d), (a; d; c), (c, a; d), (c; d; a), (d; a; c), (d; c; a)\};$$
$$\{(b; c; d), (b; d; c), (c, b; d), (c; d; b), (d; b; c), (d; c; b)\}.$$

Bunday o‘rinlashtirishlar soni $4 \cdot 6 = 24$ ta bo‘ladi. Shunday qilib, n ta elementdan m tadan tuzilgan barcha o‘rinlashtirishlar soni n ta elementdan m tadan tuzilgan barcha gruppalashlar soni bilan m ta elementdan tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlar sonining ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$A_n^m = C_n^m P_m \cdot \qquad (10)$$

Bundan gruppalashlarning quyidagi formulasini olamiz:

$$C_n^m = A_n^m : P_m \cdot \qquad (11)$$

(11) ga (3) va (8) ni qo‘yib,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (12)$$

formulani topamiz. Faktoriallarning qiymatlarini qo‘yib, (12) dan

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} \qquad (13)$$

formulani olamiz. Xususiy holda $m = 1$ bo‘lganda $C_n^1 = n$ bo‘ladi ($C_n^0 = 1$ bo‘lishini ham shartlashamiz).

3- m a s a l a . Bir vazifaga ko‘rsatilgan 10 nomzoddan uch kishi saylanishi kerak. Saylovdagi turli ehtimollar qancha bo‘lishi mumkin?

Y e c h i s h . Saylovdagi ehtimollar soni 10 elementdan 3 tadan tuzish mumkin bo‘lgan barcha gruppalashlar soniga teng bo‘ladi, ya’ni

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

5- §. Gruppalashlar sonining ba’zi xossalari

1. $0 < m \leq n$ shartda $C_n^m = n$ ning qiymatlari jadvalini keltiraylik. O‘ng tomondagi ustunda C_n^m ning qiymatlari yig‘indisi keltirilgan.

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	
1	1	1						2
2	1	2	1					4
3	1	3	3	1				8
4	1	4	6	4	1			16
5	1	5	10	10	5	1		32
6	1	6	15	20	15	6	1	64

Bu jadval buyuk fransuz matematigi B. Paskal nomi bilan atalib, «Paskal uchburchagi» deyiladi. Paskal uchburchagi har bir satrda uning boshidan va oxiridan bir xil uzoqlikda turgan sonlar teng bo‘ladi. Masalan,

$$C_5^2 = C_5^{5-2} = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Bu xossa umumiy xususiyatga ega: istalgan n va m $(0 \leq m \leq n)$ uchun

$$C_n^m = C_n^{n-m} \tag{14}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu formulani isbotlaymiz:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = C_n^{n-m}.$$

(14) tenglik C_n^m ning qiymatini topishni juda osonlashtiradi, masalan,

$$C_{100}^{97}=C_{100}^{3}=\frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}=161700.$$

2. Gruppalashda

$$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1} \tag{15}$$

tenglik ham o'rinli bo'ladi.

Agar (13) formuladan foydalansak:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m},$$

$$C_n^{m+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)}.$$

Bu tengliklarni qo'shib, umumiy maxrajga keltirib, topamiz:

$$C_n^m+C_n^{m+1}=$$

$$=\frac{[n(n-1)...(n-m+1)](1+m)+[n(n-1)...(n-m+1)](n-m)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(m+1+n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)}=$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)}=C_{n+1}^{m+1}.$$

3. $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$ yig'indi n ta elementdan iborat bo'lgan to'plamning barcha qism to'plamlarining yig'indisini ifodalaydi. Shunung uchun

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$$

tenglik quyidagi teoremaning natijasi bo'ladi.

Teorema. *n ta elementdan iborat bo'lgan to'plam barcha qism to'plamlarining soni 2^n ga teng bo'ladi.*

Bu teoremaning tasdig'ini yuqoriga 3 ta elementli to'plam uchun barcha qism t'oplamlarining soni 8 ta, ya'ni 2^3 ga tengligini ko'rsatgan edik. $n = 0$ bo'lganda bo'sh to'plamni olamiz. Bo'sh to'plam o'zidan iborat bo'lgan yagona qism to'plamga ega. $n > 1$ uchun esa teoremani matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

1) bitta elementdan iborat bo'lgan to'plam, masalan, $\{a\}$ to'plam ikkita qism to'plamga ega: $\varnothing$ — bo'sh to'plam va $\{a\}$ to'plamning o'zidan iborat. $n = 1$ bo'lganda teorema isbotlandi; chunki $2^1 = 2$;

2) $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$ bo'lishini, ya'ni k ta elementga ega bo'lgan to'plam $2k$ ta qism to'plamga ega bo'lishidan $k + 1$ ta elementga ega bo'lgan to'plamning 2^{k+1} ta qism to'plamga ega bo'lishining kelib chiqishini ko'rsataylik.

$k + 1$ ta elementga ega bo'lgan $B = \{b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1}\}$ to'plamni qaraylik. B^1 to'plam esa B to'plamning b_{k+1} elementidan boshqa barcha elementlardan tashkil topgan bo'lsin.

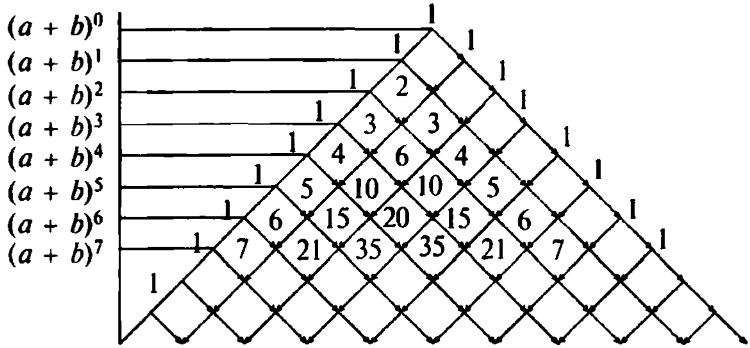
$$B^1 = \{b_1, b_2, ..., b_k\}.$$

$A(k)$ mulohazaga ko'ra B^1 to'plam 2^k ta to'plam ostiga ega. Bu qism to'plamlarning har biridan, ularning har biriga b_{k+1} elementni qo'shib, yangi to'plamlar hosil qilamiz. Natijada B to'plamning yana 2^k ta qism to'plamlarini olamiz. Bunday holda B to'plamning $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ ta qism to'plamlarini olamiz.

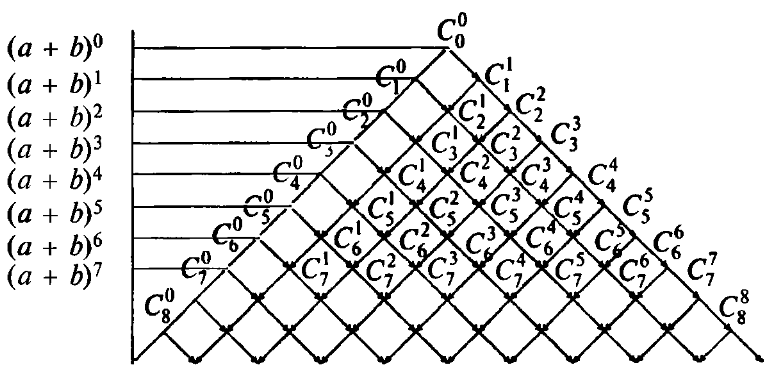
Matematik induksiya prisipiga ko'ra teorema isbotlandi. Fikrimizning $n = k$ hol uchun to'g'riligidan uning $n = k + 1$ hol uchun to'g'riligini ko'rsata oldik. Shunung uchun fikrimiz istalgan $n \in N$ natural son uchun o'rinli bo'ladi.

6- §. Nyuton binomi formulasi

C_n^m ning qiymatlaridan tuzilgan «Paskal uchburchagini» quyidagi ko'rinishda ham tasvirlash mumkin:



Yuqorida chiqarilgan (15) formula C_n^m va C_n^{m+1} ni bilgan holda C_{n+1}^{m+1} ni hisoblashga imkon beradi. (15) rekurrent munosabatdan tashqari $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = \ldots = C_n^0 = C_n^n = 1$ munosabatlardan foydalanib, «Paskal uchburchagi»ni tuzish mumkin:



Bizga $(a+b)^0 = 1$, $(a+b)^1 = a+b$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ formulalar ma'lum. Umuman,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

formulalarni ham hisoblab topish qiyin emas.

Ko'rish qiyin emaski, bu formulalar o'ng qismlarining koeffitsiyentlari «Paskal uchburchagi» ning mos satridagi sonlarga teng, ya'ni 1, 2, 1 sonlar 3-satrdagi C_2^0, C_2^1, C_2^2 sonlarga, 1, 3, 3, 1 sonlar 4-satrdagi $C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3$ sonlarga va h.k. mos keladi.

Bu mos tushishlik tasodifiy emas, bu istalgan $n \in N$ uchun

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n \quad (16)$$

formula o'rinli ekanligini bildiradi.

(16) formulani matematik induksiya usuli bilan isbotlaymiz.

1. $n = 1$ bo'lganda (16) tenglik $(a + b) = C_1^0 a + C_1^1 b$ ko'rinishni oladi. $C_1^0 = C_1^1 = 1$ bo'lgani uchun (16) formula o'rinli bo'ladi.

2. Faraz qilaylik, (16) tenglik $n = k$ uchun ham to'g'ri bo'lsin, ya'ni

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^m a^{k-m}b^m + \ldots + C_k^k b^k. \quad (17)$$

Bu tenglikning $n = k+1$ hol uchun to'g'riligini isbotlaylik.

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)^k(a + b). \quad (18)$$

Qilingan farazga ko'ra (17) tenglik o'rinli. $(a + b)^k$ ning (17) ifodasini (18) ga qo'yamiz:

$$(a+b)^{k+1} = (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \ldots + C_k^m a^{k-m}b^m + \ldots + C_k^k b^k)(a + b) = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1}b^2 + \ldots + C_k^m a^{k-m+1}b^m + \ldots + C_k^k ab^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1}b^2 + \ldots + C_k^m a^{k-m}b^{m+1} + \ldots + C_k^k b^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^1 + C_k^0)a^k b + (C_k^2 + C_k^1)a^{k-1}b^2 + \ldots + (C_k^{m+1} + C_k^m)a^{k-m}b^{m+1} + \ldots + (C_k^k + C_k^{k-1})ab^k + C_k^k b^{k+1}.$$

(15) formulaga ko'ra:

$$C_k^1 + C_k^0 = C_{k+1}^1; \; C_k^2 + C_k^1 = C_{k+1}^2; \ldots C_k^{m+1} + C_k^m = C_{k+1}^{m+1}; \ldots; \; C_k^k + C_k^{k-1} = C_{k+1}^k.$$

Shuning uchun oldingi tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(a+b)^{k+1} = (C_{k+1}^{0}\, a^{k+1} + C_{k+1}^{1}\, a^{k}b + C_{k+1}^{2}\, a^{k-1}b^{2} +$$

$$+ \ldots + C_{k+1}^{m+1}\, a^{k-m}b^{m+1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1}\, b^{k+1}.$$

Bu tenglik $n = k + 1$ bo'lganda (16) tenglik bilan ustma-ust tushadi. Bunday hol esa matematik induksiya usuliga ko'ra Nyuton formulasi (16) istalgan $n \in N$ natural son uchun isbotlanganligini bildiradi.

Nyuton formulasidagi C_n^k koeffitsiyentlar ***binomial koeffitsiyentlar*** deyiladi.

Nyuton formulasi quyidagi xossalarga ega:

1. $(a+b)^n$ ikkihadning Nyuton formulasi bo'yicha yoyilmasida $n+1$ ta qo'shiluvchi (had) bo'ladi. Chunki yoyilmada a ning (b ning) 0 dan n gacha barcha darajalari bor.

2. $(a + b)^n$ ning yoyilmasida a ning daraja ko'rsatkichi n dan 0 gacha kamayadi, b ning daraja ko'rsatkichi esa 0 dan n gacha ortadi. Shunday qilib, yoyilmaning har bir hadida a va b ning ko'rsatkichlari yig'indisi bir xil bo'lib, binom darajasining ko'rsatkichiga, ya'ni n ga teng bo'ladi.

3. Yoyilmaning boshidan va oxiridan teng uzoqlikda turgan koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'ladi. Bu (14) formuladan kelib chiqadi.

4. Binomial koeffitsiyentlar «Paskal uchburchagi»ning mos satridagi sonlar bilan ustma-ust tushadi.

5. $(a + b)^n$ ning yoyilmasida binomial koeffitsiyentlarning yig'indisi 2^n ga teng.

Haqiqatan, (16) formulada $a = b = 1$ desak,

$$2^n + C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n \qquad (19)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglik xossaning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

6. $(a + b)^n$ yoyilmaning qo'shiluvchilarini (hadlarini)

$$T_{k+1} = C_n^k\, a_n^{n-k}\, b^k \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n) \qquad (20)$$

umumiy formula bo'yicha olish mumkin. Bu yerdagi T_{k+1} ifoda $(k+1)$- qo'shiluvchi.

7. Binom formulasida b ni $-b$ ga almashtirsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$(a-b)^n = C_n^0 a + C_n^1 a^{n-1}(-b)+...+C_n^k a^{n-k}(-b)^k+...+C_n^n(-b)^n$

yoki

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2+...+$$

$$+(-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k+...+(-1)^n C_n^n b^n.$$

8. Agar oxirgi tenglikda $a = b = 1$ desak, u holda

$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 +...+(-1)^k C_n^k +...+(-1)^n$ kelib chiqadi.

Toq o'rinda turuvchi binomial koeffitsiyentlar yig'indisi juft o'rinda turuvchi binomial koeffitsiyentlar yig'indisiga teng.

1- misol. $(a+b)^{10}$ ifodaning yoyilmasini toping.

Yechish. $(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$.

2- misol. $(3-a)^5$ ifodaning yoyilmasini toping.

Yechish. $(3-a)^5 = 3^5 + 5\cdot 3^4(-a) + 10\cdot 3^3(-a)^2 + 10\cdot 2(-a)^3 + 5\cdot 3(-a)^4 + (-a)^5 = 243 = 405a + 270a^2 - 90a^3 + 15a^4 - a^5$.

3- misol. $(x^2+2y)^{10}$ ifoda yoyilmasining 5- hadini toping.

Yachish. (20) formuladan foydalanamiz:

$$T_5 = T_{4+1} = C_{10}^4 (x^2)^{10-4}(2y)^4 = 210(x^2)^6(2y)^4 = 3360x^{12}y^4.$$

4- misol. $(2x^2-y)^9$ ifoda yoyilmasining x ni o'zida saqlamagan hadini toping.

Yechish. (20) formulaga ko'ra:

$$T_{k+1} = C_9^k (2x^2)^{9-k}(-y)^k = C_9^k 2^{9-k}x^{18-2k}(-y)^k.$$

Izlanayotgan had x ni o'z tarkibiga olmaydi, ya'ni bu hadda x ning nolinchi darajasi ishtirok qiladi, ya'ni $18 - 2k = 0 \Rightarrow k = 9$.

$k + 1 = 9 + 1 = 10$ bo'lgani uchun yoyilmaning 10-hadi izlanayotgan had bo'ladi:

$T_{10} = C_9^k (2x^2)^{9-k}(-y)^k = C_9^k 2^{9-k}x^{18-2k}(-y)^k = C_9^9 2^{9-9}x^{18-18} \times (-y)^9 = -y^9$.

5-misol. Agar $n \in N$ bo'lsa, $(3^{2n+3} - 24n + 37) : 64$ bo'lishini isbotlang.

Yechish. $3^{2n+3} - 24n + 37 = 27 \cdot 9^n - 24n + 37 = 27(1 + 8)^n - 24n + 37 = 27(C_n^0 + C_n^1 8 + C_n^2 8^2 + C_n^3 8^3 + \ldots + C_n^n 8^n) - 24n + 37 = 27 = 216n +$

$$+ \underbrace{8^2(27C_n^2 + 27C_n^3 8 + \ldots + 27C_n^n 8^{n-2})}_{m} - 24n + 37 = 64 +$$

$+ 192n + 64m.$

Olingan natijaning har bir qo'shiluvchisi 64 ga bo'linadi. Ularning yig'indisi ham 64 ga bo'linadi.

Demak, $n \in N$ uchun $(3^{2n+3} - 24n + 37) : 64$ bo'ladi.

6-misol. $(1 + 0{,}01)^{1000}$ ifoda yoyilmasining eng katta hadini toping.

Yechish. Ketma-ket keluvchi T_k va T_{k+1} hadlarining nisbatini tuzamiz va k ning qanday qiymatlarida $\frac{T_{k+1}}{T_k} > 1$ bo'lishini ko'rsatamiz:

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{C_{1000}^{k+1} \cdot 0{,}01^{k+1}}{C_{1000}^{k} \cdot 0{,}01^{k}} = \frac{0{,}01k!(1000-k)!}{(k+1)!(1000-k-1)!} = \frac{1000-k}{100(k+1)};$$

$$\frac{1000-k}{100(k+1)} \geq 1 \Rightarrow k \leq 8\frac{92}{101}.$$

Shunday qilib, $k \leq 8$ bo'lganda $\frac{T_{k+1}}{T_k} > 1$ bo'lib, k ning qolgan qiymatlarida, ya'ni $k \geq 9$ bo'lganda $\frac{T_{k+1}}{T_k} < 1$ bo'ladi.

Demak, $(1 + 0{,}01)^{1000}$ ning yoyilmasi n oshib borishi bilan T_9 gacha o'sadi, undan keyin kamayadi. Yoyilmaning eng katta hadi T_9 bo'ladi.

IV BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

1. $A_n^{n-1} = A_n^n = n$ bo'lishini isbotlang.

2. 5 o'quvchi bir skameykaga o'tirishlari kerak. Ular shu skameykaga necha xil tartib bilan o'tirishlari mumkin?

3. 0; 1; 2; 3 raqamlaridan qancha to'rt xonali son tuzish mumkin?

4. Bir kishi 32 xil bir dasta kartadan 4 ta karta olishi kerak. Bunda necha turli hol bo'lishi mumkin?

5. 25 ta sinf o'quvchisidan 3 ta sinf faolini necha usul bilan tanlash mumkin? *J*: 13800.

6. 10 ta mehmonni stol atrofidagi 10 ta stulga o'tqizishning qancha usuli mavjud? *J*: 3628800.

7. Ikkita pochtalyon 10 ta xatni 10 ta manzilga olib borishi kerak. Ular bu ishni necha xil usul bilan bajarishlari mum-kin? *J*: $2^{10} = 1024$.

8. Turnirda 6 ta sportchi qatnashdi. Ular orasida o'rinlar necha xil usul bilan taqsimlanadi? *J*: 6!.

9. 12 kishini stol atrofiga necha xil usul bilan o'tqizish mumkin? *J*: 11!.

10. «Aylana», «Giperbola», «Uchburchak» so'zlarining harflaridan necha xil o'rin almashtirish tuzish mumkin? *J*: 6!, 9!, 8!.

11. 15 burchakli, n burchakli qavariq ko'pburchaklarda qancha diagonal o'tkazish mumkin? *J*: 90; $\frac{n(n-3)}{2}$.

12. 30 ta odam har birida 10 odam bo'lgan 3 ta guruhga bo'lindi. Guruhlarning har xil tarkibi qancha bo'lishi mumkin? *J*: $\frac{30!}{(10!)^3}$.

13. Tekislikda n ta to'g'ri chiziq o'tkazilgan bo'lib, ularning hech bir ikkitasi parallel emas, hech bir uchtasi bir nuqtada kesishmaydi. Bu to‘g‘ri chiziqlar nechta kesishish nuqtasiga ega? *J*: C_n^2.

14. $x(1-x)^4+x^2(1+2x)^8+x^3(1+3x)^{12}$ ifodada x^4 oldidagi koeffitsiyentni toping. *J*: 144.

15. $(x+1)^3+(x+1)^4+(x+1)^5+\ldots+(x+1)^{10}$ ifodada x^3 oldidagi koeffitsiyentni toping. *J*: 330.

16. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^{20}$ ifoda yoyilmasining eng katta hadini toping. *J*: $314925\cdot 10^5$.

17. $(a+b)^n$ ifoda yoyilmasi barcha koeffitsiyentlarining yig‘indisi 4096 ga teng bo‘lsa, uning eng katta koeffitsiyentini toping. *J*: C_{12}^6.

18. $(a+b+c+d)^4$ ifoda yoyilmasining hadlari soni nechta? *J*: 34.

19. $(1+2x+3x^2)^{10}$ ifoda yoyilmasida x^4 oldidagi koeffitsiyentni toping. *J*: 16725.

20. $(5x^2-6a^2)^{10}$ ifodaning 6- hadini toping.

21. $(3a-2)^{12}$ ifodaning 8- hadini toping.

22. Ushbu ifodalarni hisoblang.

$$2{,}1^6=\left(2+\frac{1}{10}\right)^6,\ 1{,}03^8=\left(1+\frac{3}{100}\right)^8,\ 0{,}97^4=\left(1-\frac{3}{100}\right)^4,$$

$29^5=(30-1)^5$, $999^3=(1000-1)^3$.

23. $(4+\sqrt{3})^6, (6-5\sqrt{2})^5, (1+\sqrt{3})^8, (2\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$ ni hisoblang.

24. $\left(x^3-\dfrac{3}{x^3}\right)^{15}$ yoyilmasining x qatnashmagan hadini toping.

25. $\left(2x^2-\dfrac{b}{2x^3}\right)^{10}$ yoyilmasining x qatnashmagan hadini toping.

26. $(a^3-ab)^{31}$ yoyilmasining ikkita o‘rta hadini toping. *J*: $T_{15}=-C_{31}^{15}a^{63}b^{15}$; $T_{16}=C_{31}^{16}a^{61}b^{16}$.

27. $3C_{2n}^{n-1}=5C_{2n-1}^{n}$ tenglamani yeching. *J*: $\{5\}$.

V BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

1- §. Asosiy tushunchalar. Hodisalar

Ehtimollar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining asosiy tarmoqlaridan biridir.

Ehtimollar nazariyasi predmeti tasodifiy hodisalar bilan boshqariladigan qonuniyatlarni o'rganishdan iborat.

Tajriba (sinov) va *hodisa* ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari hisoblanadi.

Tajriba deyilganda aniq shartlar majmuyini amalga oshirish tushuniladi. Tajriba natijasi *hodisa* deyiladi.

M i s o l l a r. 1. Tangani tashlash — tajriba; gerbli yoki raqamli tomon tushishi — hodisa bo'ladi.

2. Nishonga o'q uzish — tajriba, tegish yoki tegmaslik — hodisa.

3. Qutida bir xil rangli sharlar bor. Qutidan tavakkal bitta shar olindi. Qutidan shar olish — tajriba, ma'lum rangdagi shar chiqishi — hodisa.

4. O'yin soqqasini (yoqlariga 1 dan 6 gacha sonlar yozilgan kub) tashlash — tajriba, u yoki bu «ochko» (son) tushishi — hodisa.

Hodisalar *muqarrar, mumkin bo'lmagan* va *tasodifiy* bo'lishi mumkin.

Tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisa *muqarrar hodisa* deyiladi. Masalan, o'yin soqqasini tashlanganda 6 dan katta bo'lmagan «ochko» tushishi muqarrar hodisadir.

Tajriba natijasida umuman ro'y bermaydigan hodisa, *mumkin bo'lmagan* hodisa deyiladi. Masalan, o'yin soqqasini tashlanganda 10 «ochko» tushishi mumkin bo'lmagan hodisadir.

Tajriba natijasida ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa *tasodifiy hodisa* deyiladi. Masalan, 1) o'yin soqqasini tashlanganda besh «ochko» tushishi tasodifiy hodisa;

2) qutida oq va ko'k rangdagi sharlar bor. Shu qutidan tavakkal bitta shar olindi, olingan sharning ko'k shar bo'lishi tasodifiy hodisadir.

Tasodifiy hodisalar lotin alifbosining bosh harflari A, B, C, ... lar bilan belgilanadi.

Muqarrar hodisani U bilan, mumkin bo'lmagan hodisani V bilan belgilaymiz.

Agar tajriba natijasida A va B hodisalar umuman birgalikda ro'y bermasa, ular *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi. Masalan, 1) o'yin soqqasi tashlandi: — «juft ochkolar tushdi» va B — «toq ochkolar tushdi» hodisalari birgalikda emas;

2) o'yin soqqasi tashlandi: A — «ikki ochko tushdi» va B — «juft ochkolar tushdi» hodisalari birgalikda bo'ladi. Chunki ulardan birining ro'y berishi, ikkinchisining ro'y berishini yo'qqa chiqarmaydi.

Agar tajribaning shartlari A_1, A_2, ... , A_n hodisalarning har birining bir xil imkoniyat bilan ro'y berishini ta'minlasa, A_1, A_2, ... , A_n hodisalar *teng imkoniyatli* deyiladi. Masalan, 1) tanga tashlanganda, gerbli tomonning tushishi va raqam tushishi hodisalari teng imkoniyatli;

2) o'yin soqqasi tashlanganda u yoki bu «ochko» tushish hodisalari ham teng imkoniyatli.

A hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan hodisa A ning qarama-qarshisi deyiladi va $\overline{A}$ deb belgilanadi.

M i s o l l a r. 1) nishonga otilgan o'qning nishonga tegishi va nishonga tegmasligi qarama-qarshi hodisalardir.

2) o'yin soqqasi tashlanganda «juft ochko tushdi» va «toq ochko tushdi» hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

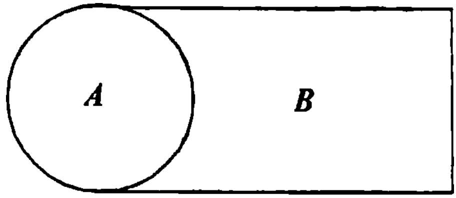
2- §. Hodisalar ustida amallar

Dastlab hodisalar orasidagi ayrim munosabatlarni keltiramiz.

Quyidagi hodisalarni qaraymiz:

A — o'yin soqqasi tashlanganda uch «ochko» tushishi;

B — o'yin soqqasi tashlanganda toq «ochko»lar tushishi.



$A \cup B$

84- rasm.

Shu narsa aniqki, agar A hodisa ro'y bersa, u holda albatta B hodisa ham ro'y beradi. Bunday holda A hodisa B hodisani *ergashtiradi* deyiladi (yoki B hodisa A hodisaning natijasi deyiladi) va $A \subset B$ (yoki $B \supset A$) ko'rinishda yoziladi.

Agar A ro'y berganda, B ham ro'y bersa va B ro'y berganda A ham ro'y bersa, ya'ni $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar teng (teng kuchli) deyiladi va $A = B$ deb yoziladi.

M i s o l . Tanga tashlandi. A — gerbli tomonning tushish hodisasi, B — raqam tushmaslik hodisasi bo'lsa, u holda $A \subset B$ va $B \subset A$, demak, $A = B$.

T a ' r i f . *A va B hodisalarning* ***yigindisi*** *yoki* ***birlashmasi*** *deb A va B hodisalardan kamida bittasining ro'y berishidan iborat bo'lgan C hodisaga aytiladi, bu*

$$C = A + B \text{ yoki } C = A \cup B$$

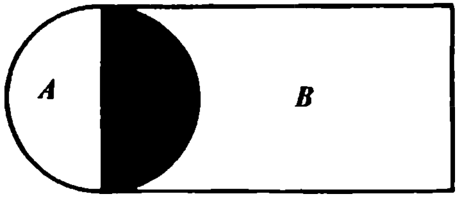
ko'rinishda yoziladi.

Agar A hodisani doiradan, B hodisani to'g'ri to'rtburchakdan iborat deb olsak, ularning yig'indisini chizmada 84- rasmdagidek tasvirlash mumkin.

T a ' r i f . $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *hodisalarning* ***yig'indisi*** *yoki* ***birlashmasi*** *deb,* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *hodisalardan kamida bittasining ro'y berishidan iborat bo'lgan C hodisaga aytiladi va bu*

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i \text{ yoki } C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

kabi yoziladi.



85- rasm.

M i s o l. A — o‘yin soqqasi tashlanganda bir «ochko» tushishi, B — o‘yin soqqasi tashlanganda ikki «ochko» tushishidan iborat hodisalar bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi $C = A + B$ o‘yin soqqasi tashlanganda ikkidan oshiq bo‘lmagan «ochko» tushish hodisasi bo‘ladi.

Agar A va B hodisalar birgalikda bo‘lmasa, u holda $A + B$ yig‘indi ularning bittasining ro‘y berishidan iborat bo‘ladi.

Hodisalar yig‘indisi ta’rifidan bevosita quyidagi qo‘shish xossalari kelib chiqadi:

$$A + B = B + A;$$
$$(A + B) + C = A + (B + C);\ A + \overline{A} = U;$$
$$A + A = A;\ U + A = U;\ V + A = A;\ U + V = U.$$

T a’ r i f. *A va B hodisalarning **ko‘paytmasi** yoki **kesishmasi** deb, A va B hodisalarning bir vaqtda ro‘y berishidan iborat bo‘lgan C hodisaga aytiladi va $C = AB$ yoki $C = A \cap B$ ko‘rinishda yoziladi.* Bu ta’rifni chizmada 85- rasmdagidek tasvirlash mumkin.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning ko‘paytmasi yoki kesishmasi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar hammasining birgalikda ro‘y berishidan iborat bo‘lgan C hodisaga aytiladi va

$$C = \prod_{i=1}^{n} Ai \quad \text{yoki} \quad C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

kabi yoziladi.

M i s o l. 1 dan 15 gacha nomerlangan sharlar bo‘lgan idishdan tavakkal 1 ta shar olindi. Agar A — toq nomerli shar olingan bo‘lish hodisasi; B — 3 ga karrali nomerli shar olingan bo‘lish hodisasi bo‘lsa, u holda ularning ko'paytmasi $C = AB$ toq va 3 ga karrali nomerli shar olinishidan iborat bo'ladi, ya'ni 3, 9, 15 nomerli sharlar olinishidan iborat bo'ladi.

Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda $AB = V$, ya'ni AB — mumkin bo'lmagan hodisa bo'ladi.

Hodisalar ko'paytmasi uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1. $AB = BA$	2. $A(BC) = (AB)C$.
3. $A(B + C) = AB + AC$.	4. $A\overline{A} = V$.
5. $AA = A$.	6. $AU = A$.
7. $AV = V$.	8. $UV = V$.

3- §. Ehtimolning klassik ta'rifi

Faraz qilaylik, tajriba natijasida A_1, A_2, ... A_n hodisalardan bittasi albatta ro'y bersin, bir vaqtda ikkitasi ro'y bermasin va ular teng imkoniyatli bo'lsin, u holda A_1, A_2, ..., A_n hodisalar birgalikda bo'lmagan *to'la gruppa* deyiladi.

Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda:

A_1 — bir «ochko» tushishi;

A_2 — ikki «ochko» tushishi;

A_3 — uch «ochko» tushishi;

A_4 — to'rt «ochko» tushishi;

A_5 — besh «ochko» tushishi;

A_6 — olti «ochko» tushishidan iborat hodisalar bo'lsa, bu hodisalar birgalikda bo'lmagan to'la gruppa tashkil qiladi.

Tajribaning har bir natijasi *elementar hodisa* deyiladi.

Masalan, o'yin soqqasi bir marta tashlanganda 6 ta elementar hodisa bor: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 va ular elementar hodisalar fazosini tashkil qiladi.

Har bir tasodifiy hodisa elementar hodisalardan tuziladi. Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda juft «ochko» tushish hodisasi $B = \{A_2, A_4, A_6\}$ dan iborat.

A_2, A_4, A_6 elementar hodisalar B ni tashkil qiluvchi yoki B ning ro'y berishiga *imkon tug'diruvchi hodisalar* deyiladi.

T a ' r i f . *A hodisaning* ***ehtimoli*** *deb A ning ro'y berishiga imkon tug'diruvchi elementar hodisalar soni k ning butun ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi va P(A) kabi belgilanadi:*

$$P(A)=\frac{k}{n}.$$

Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda juft «ochko»lar tushishidan iborat bo'lgan B hodisaning ehtimoli $P(B)=$ $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ga teng.

Bu ta'rifdan $P(U)=1$, $P(V)=0$ va $0\le P(A)\le 1$ ekanligi kelib chiqadi.

M i s o l . Qutichada 3 ta oq va 9 ta qizil shar bor. Shu qutidan tavakkal bitta shar olindi. Olingan sharning qizil shar bo'lish ehtimoli nimaga teng?

Y e c h i s h . $n=12$, $k=9$, shuning uchun A — olingan sharning qizil shar bo'lish hodisasining ehtimoli:

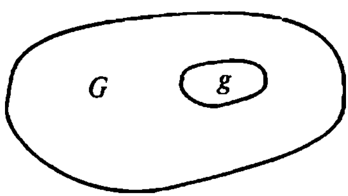
$$P(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

4- §. Geometrik ehtimol

Agar tajriba cheksiz natijaga ega bo'lsa, u holda hodisaning ehtimolini klassik ta'rif yordamida topib bo'lmaydi.

Bunday hollar uchun ehtimolning geometrik ta'rifidan foydalaniladi.

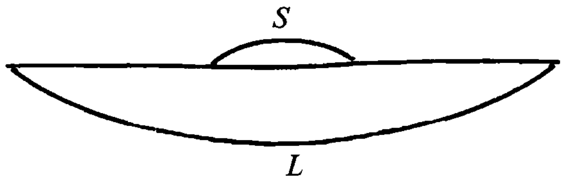
Faraz qilaylik, tekislikda yuzga ega bo'lgan G shakl berilgan bo'lib, unda yuzga ega bo'lgan g shakl joylashgan bo'lsin (86- rasm).



86-rasm.

G shaklga tasodifan tashlangan nuqtaning g shaklga tushish ehtimolini topish talab qilinadi.

Agar A hodisa nuqtaning g shaklga tushish hodisasi



86-rasm.

bo‘lsa, A hodisaning ehtimoli g shakl yuzining G shakl yuziga bo‘lgan nisbatiga teng, ya’ni

$$P(A) = \frac{S(g)}{S(G)}.$$

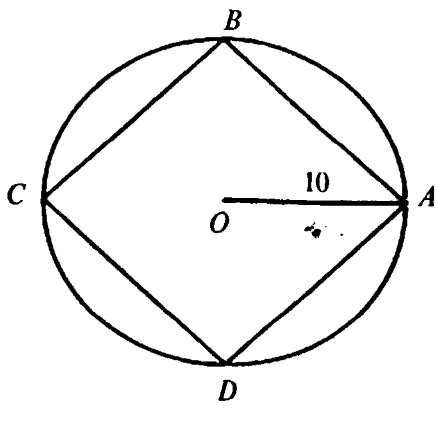
M i s o l l a r. 1. L uzunlikdagi kesmaga tavakkal tashlangan nuqtaning bu kesmaning qismi bo‘lgan S uzunlikdagi kesmaga tushish ehtimolini toping (87-rasm).

Y e c h i s h. A — nuqtaning S uzunlikdagi kesmaga tushish hodisasi bo‘lsa, u holda $P(A) = P(A) = \frac{S}{L}$ bo‘ladi.

2. Radiusi 10 sm bo‘lgan doiraga tavakkal tashlangan nuqtaning shu doiraga ichki chizilgan kvadratga tushish ehtimoli nimaga teng?

Y e c h i s h. Agar A — nuqtaning kvadrat ichiga tushish hodisasi bo‘lsa, u holda (88- rasm):

$$P(A) = \frac{S_{\text{kv}}}{S_{\text{doira}}} = \frac{(10\sqrt{2})^2}{\pi 10^2} = \frac{2}{\pi}.$$



88-rasm.

5- §. Birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisining ehtimoli

T e o r e m a . *Birgalikda bo'lmagan ikkita A va B hodisalar yig'indisining ehtimoli ularning har birining ehtimollari yig'indisiga teng, ya'ni $P(A + B) = P(A) + P(B)$.*

I s b o t . Faraz qilaylik, n — tajribaning birgalikda bo'lmagan teng imkoniyatli barcha ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalari soni bo'lsin. Shu elementar hodisalardan m tasi A ning, k tasi B ning ro'y berishiga imkon tug'dirsin. A va B hodisalar birgalikda bo'lmagani uchun, $A + B$ ning ro'y berishiga $m + k$ tasi imkon tug'diradi.

U holda:

$$P(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} = \frac{k}{n}.$$

$P(A) = \frac{m}{n}$ va $P(B) = \frac{k}{n}$ bo'lganidan

$P(A + B) = P(A) + P(B)$ bo'ladi.

1 - n a t i j a . Birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, \dots, A_n$ *hodisalar yig'indisining ehtimoli ular ehtimollarining yig'indisiga teng, ya'ni*

$$P(A_1 + A_2 + \dots + (A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

2 - n a t i j a . *Qarama-qarshi hodisalar ehtimollari yig'indisi birga teng, ya'ni*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

M i s o l l a r . 1 - m i s o l . 10 000 ta lotereya chiptalari chiqarilgan bo'lib, 10 ta 200 so'mlik, 100 ta 100 so'mlik, 500 ta 25 so'mlik va 1000 ta 5 so'mlik yutuqlar qo'yilgan. Bitta chipta sotib olgan kishining 100 so'mdan kam bo'lmagan yutuqqa ega bo'lish ehtimoli qanday?

Y e c h i s h . A — 100 so'mdan kam bo'lmagan yutuq.

B — yutuq 100 so'mga teng.

C — yutuq 200 so'mga teng hodisalarni kiritamiz.

Faqat bitta chipta bo'lgani uchun $A = B + C$ bo'ladi. B va C hodisalar birgalikda emas. Shuning uchun:

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C),$$

$$P(B) = \frac{100}{10000} = 0,01; \quad P(C) = \frac{10}{10000} = 0,001,$$

$$P(A) = 0,01 + 0,001 = 0,011.$$

2- misol. Kunning ochiq bo'lish ehtimoli 0,6 ga teng bo'lsa, kunning bulutli bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. «Kun ochiq bo'ladi» va «kun bulutli bo'ladi» hodisalari o'zaro qarama-qarshi. Shuning uchun «kun ochiq bo'ladi» hodisasini A desak, u holda $\overline{A}$ — «kun bulutli bo'ladi» hodisasi bo'ladi. Demak,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ ga asosan } P(A) = 0,6,$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4 \text{ bo'ldi.}$$

6- §. Birgalikda bo'lgan hodisalar yigindisining ehtimoli

Teorema. *Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lsa, u holda ular yig'indisining ehtimoli ularning har birining ehtimollari yig'indisidan ular ko'paytmasining ehtimolini ayrilganiga teng:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Isbot. n — tajribaning barcha teng imkoniyatli elementar hodisalari soni bo'lsin, shu elementar hodisalardan m tasi A ning ro'y berish imkonini tug'dirsin. k tasi B ning ro'y berish imkonini tug'dirsin. $m + k$ ta elementar hodisalar orasida l tasi ham A ning, ham B ning ro'y berish imkonini tug'dirsin. U holda

$$P(A) = \frac{m}{n}; \; P(B) = \frac{k}{n}; \; P(AB) = \frac{l}{n} \text{ bo'lsa, } A + B$$

ning ro'y berishiga $m + n - l$ ta elementar hodisa imkon tug'diradi.

$$P(A+B)=\frac{m+k-l}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n}.$$

Bu yerdan

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

M i s o l. Ikkita o'yin soqqasi tashlanganda kamida bir marta 6 «ochko» tushish ehtimolini toping.

Y e c h i s h. A — birinchi o'yin soqqasi tashlanganda 6 «ochko» tushish hodisasi.

B — ikkinchi o'yin soqqasi tashlanganda 6 «ochko» tushish hodisasi bo'lsin.

A va B hodisalar birgalikda deb olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

$$P(A)=\frac{1}{6};\quad P(B)=\frac{1}{6};\quad P(A\cap B)=\frac{1}{36};$$

$$P(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{6+6-1}{36}=\frac{11}{36}.$$

7- §. Bog'liqmas va bog'liq hodisalar ko'paytmasining ehtimoli

1-t a' r i f. *Agar A va B hodisalardan birining ehtimoli ikkinchi hodisaning ro'y bergan yoki ro'y bermaganligiga bog'liq bo'lmasa, u holda A va B hodisalar* ***bog'liqmas*** *deyiladi.*

M i s o l. O'yin soqqasi ikki marta tashlandi. Birinchi tashlanganda besh «ochko» tushishini A hodisa, ikkinchi tashlanganda besh «ochko» tushishini B hodisa desak, bu hodisalar bog'liq bo'lmaydi. Chunki birinchi tashlanganda besh «ochko» tushish ehtimoli ikkinchi tashlanganda besh «ochko» tushish yoki tushmasligiga bog'liq emas. Xuddi shuningdek, ikkinchi tashlaganda besh «ochko» tushish ehtimoli birinchi tashlanganda besh «ochko» tushish yoki tushmasligiga bog'liq emas.

T e o r e m a. *Ikkita bog'liq bo'lmagan A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimoli bu hodisalar ehtimollari ko'paytmasiga teng, ya'ni*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

I s b o t. Tajribaning A hodisa ro'y berishi yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lgan teng imkoniyatli elementar hodisalar soni n bo'lib, A hodisaning ro'y berishiga imkon tug'diruvchi elementar hodisalar soni $n_1 (n_1 \le n)$ bo'lsin. B hodisa ro'y berishi yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lgan teng imkoniyatli elementar hodisalar soni m bo'lib, B hodisaning ro'y berishiga m_1 tasi imkon tug'dirsin $(m_1 \le m)$.

U holda AB hodisa ro'y berish yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lgan teng imkoniyatli elementar hodisalar soni nm ga teng bo'ladi. A va B hodisalar bog'liq bo'lmagani uchun AB hodisaning ro'y berishiga imkon tug'diruvchi elementar hodisalar soni $n_1 m_1$ ga teng bo'ladi. Shuning uchun:

$$P(A \cap B) = \frac{n_1 m_1}{nm} + \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m} = P(A) \cdot P(B).$$

M i s o l. Ikkita o'qchi bitta nishonga qaratib bittadan o'q uzishdi. Birinchi o'qchining nishonga tekkizish ehtimoli 0,9, ikkinchi o'qchining nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng. Ikkala o'qchining ham nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Y e c h i s h. A — birinchi o'qchining nishonga tekkizish hodisasi.

B — ikkinchi o'qchining nishonga tekkizish hodisasi bo'lsa, u holda A va B hodisalar bog'liq emas. Shuning uchun $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$ bo'ladi.

Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar juft-juft bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda $P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1)P(A_2) ... P(A_n)$ ekanligini isbotlash mumkin.

2- t a ' r i f. *Agar ikkita A va B hodisalardan birining ro'y berish ehtimoli ikkinchisining ro'y bergan yoki ro'y bermaganligiga bog'liq bo'lsa, A va B hodisalar* ***bog'liq*** *deyiladi.*

M i s o l. Yashikda 30 ta detal bo'lib, ularning 25 tasi yaroqli, 5 tasi yaroqsiz. Yashikdan ketma-ket 2 ta detal olindi. Birinchi olingan detalning yaroqli bo'lishini A hodisa, ikkinchi olingan detalning yaroqli bo'lishini B hodisa desak, bu hodisalar bog'liq bo'ladi. Chunki 1- detalning yaroqli bo'lish ehtimoli $P(A)=\frac{25}{30}$ ga teng, 2- olingan detalning yaroqli bo'lish ehtimoli 1- tajriba natijasiga bog'liq.

Agar 1- tajribada yaroqli detal olingan bo'lsa, u holda 2- olingan detalning yaroqli bo'lish ehtimoli $P(A)=\frac{24}{29}$ ga teng.

Agar 1- tajribada yaroqsiz detal olingan bo'lsa, u holda 2- olingan detalning yaroqli bo'lish ehtimoli $P(A)=\frac{25}{29}$ ga teng bo'ladi.

8- §. Shartli ehtimol

T a ' r i f. *A hodisaning B hodisa ro'y berdi degan shartda hisoblangan ehtimoli A hodisaning* ***shartli ehtimoli*** *deyiladi va $P_B(A)$ kabi belgilanadi.*

Shartli ehtimol $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ formula yordamida hisoblanadi, bu yerda $P(B)\neq 0$ deb olinadi.

M i s o l. Xaltada 10 ta oq va 15 ta qizil shar bor. Xaltadan ketma-ket 2 ta shar tavakkal olindi. Agar birinchi olingan shar qizil bo'lsa, ikkinchi sharning ham qizil bo'lish ehtimolini toping.

Y e c h i s h. Quyidagi hodisalarni belgilaymiz.

A — ikkinchi shar qizil;

B — birinchi shar qizil.

Agar B hodisa ro'y bergan bo'lsa, u holda xaltada 24 ta shar qoladi, ularning 14 tasi qizil shar bo'ladi. Shuning uchun B hodisa ro'y berganda A hodisaning shartli ehtimoli

$$P_B(A)=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

ga teng bo'ladi.

T e o r e m a . *Ikkita bog'liq A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimoli bu hodisalardan birining ehtimolini ikkinchisining, birinchi hodisa ro'y bergandagi, shartli ehtimoli ko'paytmasiga teng, ya'ni*

$$P_B(A\cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B). \quad (1)$$

Bu tenglik shartli ehtimol formulasidan bevosita kelib chiqadi.

Ixtiyoriy n ta $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisa uchun

$$P(A_1, A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot PA_{A_1}(A_2)\times$$
$$\times P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n) \quad (2)$$

formula o'rinli.

M i s o l . Yashikda 8 ta oq va 7 ta qizil shar bor. Tavakkal ketma-ket 2 ta shar olindi. Ikkala sharning ham oq bo'lish ehtimoli qanday?

Y e c h i s h . Hodisalarni belgilaymiz:

A — birinchi shar oq;

B — ikkinchi shar oq. U holda $P(AB)$ ehtimolni topishimiz kerak:

$$P(A)=\frac{8}{15};\ P_A(B)=\frac{7}{14},$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}=\frac{4}{15}.$$

M i s o l . Yashikda 7 ta l- nav, 5 ta 2- nav va 3 ta 3-nav detallar bor. Yashikdan ketma-ket 3 ta detal olindi. 1-olingan detal 1- nav, 2- olingan detal 2- nav va 3- olingan detal 3- nav detal bo'lish ehtimolini toping.

Y e c h i s h . Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz:

A_1 — 1- olingan detal 1- nav;
A_2 — 2- olingan detal 2- nav;
A_3 — 3- olingan detal 3- nav.

U holda $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ ehtimolni topish kerak. (2) formulaga ko'ra:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{7}{15} \cdot \frac{15}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{1}{26}.$$

9- §. To'la ehtimol formulasi

A hodisa to'la gruppa tashkil qiluvchi birgalikda bo'lmagan teng imkoniyatli B_1, B_2, ..., B_n hodisalarning faqat biri bilan birgalikda ro'y bersin.

U holda A hodisaning ehtimoli quyidagi to'la ehtimol formulasi yordamida hisoblanadi:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

yoki

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P_{B_k}(A). \qquad (3)$$

I s b o t. $A = AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n$, B_1, B_2, ..., B_n hodisalar birgalikda bo'lmagani uchun AB_1, AB_2, ..., AB_n hodisalar ham birgalikda bo'lmaydi.

Shuning uchun:

$$P(A) = P(AB_1) + P(A \cdot B_2) + \ldots + P(A \cdot B_n).$$

Bu yig'indining har bir qo'shiluvchisiga $P(AB_i) = P(B_i)P_{B_i}(A)$ tenglikni qo'llab, (3) formulani hosil qilamiz.

M i s o l . Uchta bir xil yashikda sharlar bor. 1- yashikda 7 ta oq va 8 ta qizil, 2- yashikda 10 ta oq va 5 ta qizil, 3- yashikda 5 ta oq va 10 ta qizil sharlar bor. Tavakkal tanlangan yashikdan tavakkal olingan sharning oq bo'lishi ehtimoli qanday?

Y e c h i s h . Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz:

A — olingan shar oq.

B_1 — shar 1- yashikdan olingan,

B_2 — shar 2- yashikdan olingan,

B_3 — shar 3- yashikdan olingan.

To'la ehtimol formulasiga ko'ra:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A);$$

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}; \quad P_{B_1}(A) = \frac{7}{15};$$

$$P_{B_2}(A) = \frac{10}{15}; \qquad P_{B_3}(A) = \frac{5}{15}.$$

Izlangan ehtimol:

$$P(A) = \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{3} + \frac{10}{15}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{15}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{45}(7+10+5) = \frac{22}{45}.$$

10- §. Beyes formulasi

To'la ehtimol formulasi yordamida *Beyes formulasi* deb atalgan

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_{n_i}}(A)} =$$

$$= \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k)P_{B_k}(A)} \tag{1}$$

formulani hosil qilish mumkin.

I s b o t . $P(B_i \cdot A) = P(B_i)P_{B_i}(A) = P(A)P_A(B_i)$,

bundan $P_A(B_i) = \dfrac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}$ ni topamiz.

$P(A)$ ni to'la ehtimol formulasidagi qiymati bilan almashtirib topamiz:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k)P_{B_k}(A)}.$$

M i s o l . Uchta bir xil yashikda sharlar bor. 1-yashikda 7 ta oq va 8 ta qizil, 2- yashikda 10 ta oq va 5 ta qizil, 3-yashikda 5 ta oq va 10 ta qizil sharlar bor. Tavakkal tanlangan yashikdan tavakkal olingan shar oq bo'lib chiqdi, uning 2- yashikdan olingan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A — olingan shar oq.

B_1 — shar 1- yashikdan olingan,

B_2 — shar 2- yashikdan olingan,

B_3 — shar 3- yashikdan olingan.

$P_A(B_2)$ ehtimolni topish kerak.

$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$ ekanligini hisobga olib, (1) formulaga ko'ra topamiz:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{10}{15}}{\frac{22}{45}} = \frac{5}{11}.$$

11-§. Bernulli sxemasi

Tangani bir necha marta tashlaymiz. To'rtinchi tashlashda gerb tomoni tushishi birinchi, ikkinchi, uchinchi tashlashlarda qanday tomoni bilan tushganligiga bog'liq emas. Bunday tajribalar *bog'liq bo'lmagan tajribalar* deyiladi.

n ta bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p, ro'y bermaslik ehtimoli $q = 1 - p$ ga teng bo'lsin. A hodisaning n ta tajribada m marta ro'y berish ehtimoli $P_n(m)$ ni topish kerak bo'lsin.

n ta tajribaning birinchi m tasida A hodisa ro'y berib, qolgan $n - m$ tasida ro'y bermaslik hodisasini

$$\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m} \; \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdots \overline{A}}_{n-m}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Tajribalar bog'liq bo'lmagani uchun ehtimollarni ko'paytirish qoidasiga ko'ra

$$P(A \cdot A \cdot A \cdots A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdots \overline{A}) = p^m \cdot q^{n \cdot m}$$

bo'ladi.

n ta tajribada A hodisaning m marta ro'y berishida A va $\overline{A}$ hodisalarning almashib kelishining boshqa hollari ham mavjud, lekin har gal bir xil $p^m \cdot q^{n-m}$ ehtimolga ega bo'lamiz.

A va $\overline{A}$ hodisalarning barcha almashib kelishlari soni n ta elementdan m tadan olib tuzish mumkin bo'lgan gruppalashlar soni C_n^m ga teng. Shuning uchun:

$$P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}$$

bo'ladi. Bu formula *Bernulli formulasi* deyiladi.

1- misol. Yashikda 20 ta shar bo'lib, ularning 15 tasi oq va 5 tasi qizil. Yashikdan ketma-ket 5 ta shar olindi. Har bir olingan shar yashikka qaytarib qo'yilib, yaxshilab aralashtirilib, keyingi shar olinadi. Olingan 5 ta shardan 2 tasining oq bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Har bir olingan sharning oq bo'lish ehtimoli $p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ ga teng. Oq shar bo'lmaslik ehtimoli $q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ga teng, $n = 5$, $m = 2$.

Bernulli formulasiga ko'ra topamiz:

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = C_5^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{64} = \frac{45}{512}.$$

2- misol. Tanga 10 marta tashlanganda 3 marta gerbli tomoni bilan tushish ehtimoli nimaga teng?

Yechish. $n = 10$, $m = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$ larni hisobga olib topamiz:

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{128} = \frac{15}{128}.$$

12- §. Tasodifiy miqdorlar

1- t a ' r i f. ***Tasodifiy miqdor*** *deb tajriba natijasida oldindan ma'lum bo'lmagan va tajriba natijasiga bog'liq holda bitta va faqat bitta qiymat qabul qiluvchi o'zgaruvchi miqdorga aytiladi.*

Tasodifiy miqdorlarni grek (yunon) alifbosining ξ, η, ζ, ... harflari bilan belgilaymiz, ularning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini lotin alifbosining kichik, ya'ni x, y, z, ... harflari bilan belgilaymiz.

1- m i s o l. O'yin soqqasi tashlanganda tushishi mumkin bo'lgan «ochko»lar soni x tasodifiy miqdor bo'ladi. Uning mumkin bo'lgan qiymatlari 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlardan iborat.

2- m i s o l. 100 ta yangi tug'ilgan chaqaloqlar orasidagi o'g'il bolalar soni ξ tasodifiy miqdor bo'ladi. Mumkin bo'lgan qiymatlari: 0, 1, 2, ... , 100 sonlardan iborat.

3- m i s o l. Biror quroldan otilgan o'qning uchib o'tgan masofasi tasodifiy miqdor bo'ladi. Uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari biror (a; b) oraliqdan iborat bo'ladi.

2- t a ' r i f. *Agar ξ tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari chekli yoki cheksiz sonlar ketma-ketligidan iborat bo'lib, bu qiymatlarni ma'lum ehtimollar bilan qabul qilsa, u* ***diskret tasodifiy miqdor*** *deyiladi.*

Har bir tasodifiy miqdor x_i qiymatni $p_i = P(\xi = x_i)$ ehtimollar bilan qabul qiladi.

3- t a ' r i f. *Diskret ξ tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollarini mos qo'yuvchi*

x_i	x_1	x_2	.	.	.	x_n	.	.	.
p_i	p_1	p_2	.	.	.	p_n	.	.	

jadval $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ *shart bajarilganda, diskret* ξ *tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deyiladi.*

Misol. ξ — o'yin soqqasi tashlanganda tushishi mumkin bo'lgan «ochko»lar sonidan iborat bo'lsin. Uning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1.$$

13- §. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

Ta'rif. *Diskret* ξ *tasodifiy miqdorning* ***matematik kutilmasi*** *deb barcha mumkin bo'lgan qiymatlarining bu qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan mos ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga aytiladi va* $M\xi$ *kabi belgilanadi.*

Agar diskret ξ tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari x_1, x_2, ..., x_n va bu qiymatlarni mos ravishda qabul qilish ehtimollari p_1, p_2 ..., p_n bo'lsa, u holda uning matematik kutilmasi $M\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$ bo'ladi.

Misollar. 1. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

ξ_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

Yechish. $M\xi = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}3 = -0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}9 = 1{,}25.$

2. ξ — o'yin soqqasi tashlanganda tushishi mumkin bo'lgan «ochko»lar soni bo'lsa, uning matematik kutilmasini toping.

Y e c h i s h . ξ ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlardan iborat, bu qiymatlarni u $\frac{1}{6}$ ehtimol bilan qabul qiladi. Matematik kutilmasini topamiz:

$$M\xi = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}=3,5.$$

Matematik kutilmaning ehtimoliy ma'nosi quyidagicha: tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning kuzatilayotgan qiymatlarining o'rtacha arifmetik qiymatiga taqriban teng, ya'ni $\bar{x} = M\xi$.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega:

1. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi shu o'zgarmasning o'ziga teng: $MC = C$.

I s b o t . Bitta C ni mumkin bo'lgan qiymatni $p = 1$ ehtimol bilan qabul qiluvchi diskret tasodifiy miqdor deb qabul qilish mumkin, demak, $MC = C\cdot 1 = C$.

2. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisidan tashqariga chiqarish mumkin: $M(C\xi) = CM\xi$.

I s b o t . ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$\begin{array}{l} \xi\colon\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \\ p\colon\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n \end{array}$$

bo'lsin, u holda $C\xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

$$\begin{array}{l} Cx\colon\ Cx_1,\ Cx_2\ \ldots,\ Cx_n \\ p\colon\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n \end{array}$$

bo'ladi, u holda $C\xi$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$M(C\xi) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n =$$

$$= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) = CM\xi.$$

Shunday qilib, $M(C\xi) = CM\xi$.

3. Tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi qo'shiluvchilar matematik kutilmalari yig'indisiga teng:

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

I s b o t . ξ va η tasodifiy miqdorlarining taqsimot qonunlari quyidagicha bo'lsin:

$$\xi: x_1, x_2; \qquad \eta: y_1, y_2;$$

$$p: p_1, p_2. \qquad q: q_1, q_2.$$

$\xi + \eta$ ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini tuzamiz. Buning uchun ξ ning mumkin bo'lgan har bir qiymatiga η ning mumkin bo'lgan har bir qiymatini qo'shamiz, natijada: $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, $x_2 + y_1$, $x_2 + y_2$ qiymatlarni hosil qilamiz. Bu qiymatlarning mos ehtimollarini p_{11}, p_{12}, p_{21} p_{22} orqali belgilaymiz.

$\xi + \eta$ yig'indining matematik kutilmasini topamiz:

$$M(\xi + \eta) = (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} +$$
$$+ (x_2 + y_2)p_{22} = x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) +$$
$$+ y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22}).$$

$p_{11} + p_{12} = p_1$, $p_{21} + p_{22} = p_2$, $p_{11} + p_{21} = q_1$, $p_{12} + p_{21} = q_2$

ekanligini ko'rsatish mumkin, haqiqatan ham,

$$p_1 = P(\xi = x_1) = P(\xi + \eta = x_1 + y_1) + P(\xi + \eta = x_1 + y_2) =$$
$$= P(\xi = x_1, \eta = y_1) + P(\xi = x_1, \eta = y_2) =$$
$$P(\xi = x_1)\underbrace{[P(\eta = y_1) + P(\eta = y_2)]}_{1}.$$

Boshqalari ham xuddi shu usulda ko'rsatiladi. Shunday qilib,

$$M(\xi + \eta) = (xp_1 + x_2p_2) + (y_1q_1 + yq_2) = M\xi + M\eta.$$

4. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi bu tasodifiy miqdorlar matematik kutilmalari ko'paytmasiga teng:

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

I s b o t . 3- xossadagi belgilashlardan foydalanib, yozamiz:

$$M(\xi\eta) = x_1y_1p_1q_1 + x_2y_1p_2q_1 + x_1y_2p_1q_2 + x_2y_2p_2q_2 =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)y_1q_1 + (x_1p_1 + x_2p_2)y_2q_2 =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = M\xi M\eta.$$

M i s o l l a r . 1. Nishonga qaratib uchta o‘q uzildi. Ularning nishonga tegish ehtimollari: $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$; $p_1 = 0{,}6$. Nishonga jami tegishlar sonining matematik kutilmasini toping.

Y e c h i s h . Birinchi otishda nishonga tegish soni ξ_1, ikkinchi otishda nishonga tegish soni ξ_2, uchinchi otishda nishonga tegish soni ξ_3 tasodifiy miqdor deb olsak, bu tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlariga ega bo‘ladi:

ξ_1	0	1
p	0,6	0,4

ξ_2	0	1
p	0,7	0,3

ξ_3	0	1
p	0,4	0,6

Ularning matematik kutilmalari:

$M\xi_1 = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$; $M\xi_2 = 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$; $M\xi_3 = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6$.

Nishonga jami tegishlari soni ξ tasodifiy miqdor bo‘lib, uchala otishdagi tegishlar soni yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

3- xossaga asosan:

$$M\xi = M(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = M\xi_1 + M\xi_2 + M\xi_3 =$$
$$= 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1{,}3.$$

2. Bog‘liq bo‘lmagan ξ va η tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlari orqali berilgan:

ξ:	2,	4,	5;		η:	7,	9;
p:	0,1	0,3	0,6;		q:	0,8	0,2.

$\xi\eta$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Y e c h i s h . Berilgan tasodifiy miqdorlarning har birining matematik kutilmasini topamiz:

$M\xi = 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}6 = 4{,}4;$
$M\eta = 7 \cdot 0{,}8 + 9 \cdot 0{,}2 = 7{,}4.$ U holda
$M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta = 4{,}4 \cdot 7{,}4 = 32{,}56.$

14- §. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi

1. Quyidagi taqsimot qonunlariga ega bo'lgan ξ va η tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalarini toping:

ξ	-8	-4	-1	1	3	7
p	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

η	-2	-1	0	1	2	3
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$

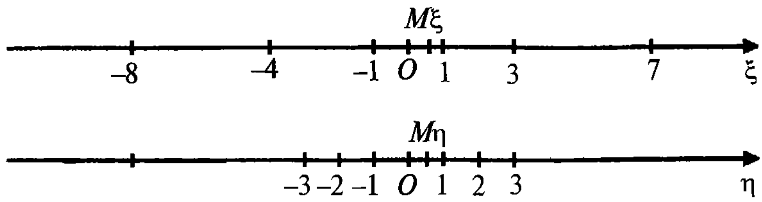
Y e c h i s h .

$$M\xi = -\frac{8}{12} - \frac{4}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{12} + \frac{7}{4} = \frac{7}{12},$$

$$M\eta = -\frac{2}{6} - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{3}{4} = \frac{7}{12}.$$

Biz har xil taqsimot qonuniga ega bo'lgan ξ va η tasodifiy miqdorlarning bir xil matematik kutilmaga ega ekanligini ko'ramiz (89- rasm).

Chizmadan shu narsa ko'rinadiki, η tasodifiy miqdorning qiymatlari $M\eta$ matematik kutilma atrofiga to'plangan. ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari esa $M\xi$ matematik kutilmadan uzoqlarga sochilgan.



89- rasm.

ξ tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlarining sochilganligini ko‘rsatuvchi asosiy sonli xarakteristika bo‘lib, uning $D\xi$ dispersiyasi xizmat qiladi.

T a ’ r i f . ξ *tasodifiy miqdorning* ***dispersiyasi*** *deb* $(\xi - M\xi)^2$ *miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi:*

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \tag{1}$$

(1) formulani quyidagicha almashtiramiz:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) =$$
$$= M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Demak,

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \tag{2}$$

Bu formula bilan dispersiyani hisoblash qulay.

M i s o l . Diskret ξ tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuniga ega:

ξ	-1	0	1	2
p:	0,2	0,1	0,3	0,4

$D\xi$ ni toping.

Y e c h i s h . ξ ning matematik kutilmasini topamiz:

$M\xi = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 0,9.$

$M\xi^2 = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}4 =$
$= 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 = 2{,}1.$

(2) formulaga asosan:

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 2{,}1 - 0{,}9^2 = 2{,}1 - 0{,}8 = 1{,}29.$

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng:

$DC = 0, \qquad C$ — o'zgarmas son.

I s b o t . (2) formulaga ko'ra

$$DC = MC^2 + (MC)^2 = C^2 - C^2 = 0.$$

2. O'zgarmas sonni dispersiya belgisidan tashqariga kvadratga oshirib chiqariladi, ya'ni C o'zgarmas son bo'lsa,

$D(C\xi) = C^2 D\xi$ bo'ladi.

I s b o t . (2) formulaga asosan:

$D(C\xi) = M(C\xi)^2 - (M(C\xi))^2 = C^2 M\xi^2 - C^2 (M\xi)^2 =$
$= C^2(M\xi^2 - (M\xi)^2) = C^2 D\xi.$

3. ξ va η bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ tenglik o'rinli.

I s b o t . $D(\xi + \eta) + M(\xi + \eta)^2 - (M(\xi + \eta))^2 =$
$= M(\xi^2 + 2(\xi\eta) + \eta^2) - ((M\xi)^2 + 2M\xi M\eta + (M\eta)^2) =$
$= M\xi^2 + 2M(\xi\eta) + M\eta^2 - (M\xi)^2 - 2M\xi M\eta - (M\eta)^2 =$
$= M\xi^2 + 2M\xi M\eta) + M\eta^2 - (M\xi)^2 - 2M\xi M\eta - (M\eta)^2 =$
$= M\xi^2 + (M\xi)^2 + M\eta^2 - (M\eta)^2 = D\xi + D\eta.$

4. $D(\xi - \eta) = D\xi - D\eta$, chunki $D(-\eta) = (-1)^2 D\eta = D\eta.$

$\sigma\xi = \sqrt{D\xi}$ ga ξ tasodifiy miqdorning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* deyiladi.

M i s o l l a r . 1. ξ tasodifiy miqdor ushbu qonun bo'yicha taqsimlangan:

ξ	2	4	6	8	10
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

$D\xi$ va $\sigma\xi$ ni toping.

Y e c h i s h . Dastlab $M\xi$ ni topamiz:

$$M\xi = 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{8} + 10\cdot\frac{1}{4} =$$
$$= \frac{2}{8}(2+2+6+4+10) = \frac{2}{8}\cdot 24 = 6.$$

Endi $(\xi - M\xi)^2$ ning taqsimot qonunini tuzamiz:

$(\xi - M\xi)^2$	16	4	0	4	16
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

(1) formulani qo‘llab, $D\xi$ ni topamiz:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = 16\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 16\cdot\frac{1}{4} =$$
$$= 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 = 9. \qquad \sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{9} = 3.$$

2. Bog‘liq bo‘lmagan ξ va η tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlari bilan berilgan:

ξ	-2	-1	0	1	3
p	0,1	0,2	0,25	0,35	0,1

η	-3	0	1	2
q	0,1	0,2	0,4	0,3

$D(\xi + \eta)$ ni toping.

Y e c h i s h . Diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi ta’rifiga ko‘ra: $M\xi = -2\cdot 0,1 - 1\cdot 0,2 + 0\cdot 0,25 + 1\cdot 0,35 + 3\cdot 0,1 = -0,2 - 0,2 + 0,35 + 0,3 - 0,25.$

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$

ξ^2	4	1	0	1	9
p	0,1	0,2	0,25	0,35	0,1

$$M\xi^2 = 4 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,35 +$$
$$+ 9 \cdot 0,1 = 0,4 + 0,2 + 0,35 + 0,9 = 1,85.$$

$$D\xi = 1,85 - (0,25)^2 = 1,7875;$$
$$M\eta = 3 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2,03 = -0,3 + 0,4 + 0,6 = 0,7.$$

η^2	9	0	1	4
q	0,1	0,2	0,4	0,3

$$M\eta^2 = 9 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 = 0,9 + 0,4 + 1,2 = 2,5;$$
$$D\eta = 2,5 - (0,7)^2 = 2,5 - 0,49 = 2,01.$$

ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmagani uchun:

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Demak, $D(\xi + \eta) = 1,7875 + 2,01 = 3,7975.$

15- §. Katta sonlar qonuni

Chebishev tengsizligi. ξ *tasodifiy miqdorning o'z matematik kutilmasidan chetlashishi absolut qiymat bo'yicha* ε *musbat sondan kichik bo'lmaslik ehtimoli* $\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ *dan katta emas, ya'ni* $P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

I s b o t. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'lsin:

ξ	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n

ξ ning dispersiyasi

$$D\xi = (x_1 - M\xi)^2 p_1 + (x_2 - M\xi)^2 p_2 + \ldots + (x_n - M\xi)^2 p_n \quad (1)$$

formuladan topiladi. Ixtiyoriy musbat ε son uchun $|(\xi - M\xi) \geq \varepsilon$ va $|(\xi - M\xi)| < \varepsilon$ tengsizliklarning bajarilishidan iborat bo'lgan hodisalar o'zaro qarama-qarshi bo'lgani uchun ularning ehtimollari yig'indisi 1 ga teng, ya'ni

$P(|\xi - M\xi| < \varepsilon) + P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) = 1$, bundan

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) = 1 - P(|\xi - M\xi| < \varepsilon).$$

Faraz qilaylik, $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_m}$ lar ξ ning $|x_i - M\xi| \geq \geq \varepsilon (i = 1, 2, \ldots, m)$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan qiymatlari bo'lsin. U holda

$$D\xi > (x_{k_1} - M\xi)^2 p_{k_1} + (x_{k_2} - M\xi)^2 p_{k_2} + \ldots + (x_{k_m} - M\xi)^2 p_{k_m},$$

chunki bu tengsizlik (1) dan $|\xi - M\xi| < \varepsilon$ bo'ladigan qo'shiluvchilarni chiqarib tashlashdan hosil qilingan.

$(xk_i - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2$ bo'lganidan, $i = 1, 2, \ldots, m$ bo'lganda

$$D\xi \geq \varepsilon^2 p_{k_1} + \varepsilon^2 p_{k_2} + \ldots + \varepsilon^2 p_{k_m} = \varepsilon^2 (p_{k_1} + p_{k_2} + \ldots + p_{k_m}),$$

$$p_{k_1} + p_{k_2} + \ldots + p_{k_m} = P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon)$$

va

$D\xi \geq \varepsilon^2 P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon)$ bo'ladi.

Bundan

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Tengsizlik isbot bo'ldi.

Chebishev teoremasi. *Agar* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *juft-juft bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning dispersiyalari bitta o'zgarmas C sondan katta bo'lmasa, u* *holda musbat ε son har qancha kichik bo'lganda ham, tasodifiy miqdorlar soni yetarlicha katta bo'lganda*

$$\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}\right|<\varepsilon$$

tengsizlikning ehtimoli birga istalgancha yaqin bo'ladi, ya'ni $n \to \infty$ da

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}\right|<\varepsilon\right)\to 1$$

bo'ladi.

I s b o t . Chebishev tengsizligini qo'llab topamiz:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}\right|<\varepsilon\right)=$$

$$=1-P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}\right|\geq\varepsilon\right)\geq$$

$$\geq 1-\frac{D\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Dispersiyaning xossasiga ko'ra:

$$D\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}(D\xi_1+D\xi_2+\ldots+D\xi_n).$$

Teoremaning shartiga ko'ra: $Dx_1 \leq C$, $Dx_2 \leq C$, ..., $Dx_n \leq C$. Bularga asosan:

$$D\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\right)\leq\frac{C_1+C_2+\ldots+C_n}{n^2}=\frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n},$$

u holda

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

bo'ladi.

Bundan $n \to \infty$ da ehtimol 1 dan katta bo'la olmasligini e'tiboiga olib,

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}\right|<\varepsilon\right)\to 1$$

bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

Bernulli teoremasi. *Agar bog'liq bo'lmagan tajribalar soni yetarlicha katta bo'lsa, kuzatilayotgan hodisaning nisbiy chastotasi uning har bir tajribada ro'y berish ehtimolidan istalgancha kam farq qilish ehtimoli* 1 *ga istalgancha yaqin bo'ladi.*

Ya'ni S_n son A hodisaning n ta bog'liq bo'lmagan tajribalardagi ro'y berish soni, $P(A) = p$ har bir tajribada ro'y berish ehtimoli bo'lsa, $n \to \infty$ da $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\to 1.$

M i s o l l a r. 1. $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$ bo'lsa, Chebishev tengsizligini qo'llab, $P(|\xi - a| < 3\sigma)$ ehtimolni baholang.

Y e c h i s h. Chebishev tengsizligiga asosan, $\varepsilon = 3\sigma$ bo'lganda topamiz:

$$P(|\xi-a|\geq 3\sigma)\leq\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9};$$

$P(|\xi-a|<3\sigma)+P(|\xi-a|\geq 3\sigma)=1$ bo'lganidan,

$P(|\xi-a|<3\sigma)\geq 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$, ya'ni $P(|\xi-a|<3\sigma)\geq\frac{8}{9}$: ξ tasodifiy miqdorning $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$ oraliqda bo'lish hodisasining ehtimoli $\frac{8}{9}$ dan kichik emas.

2. $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq 0{,}5\right)\leq\frac{1}{n}$ tengsizlikni isbotlang.

Y e c h i s h. $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$,

$D\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D(S_n)=\frac{npq}{n^2}$, bu yerda $P(A) = p$, $q = 1 - p$;

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq 0{,}5\right)\leq\frac{pq}{0{,}25n},\ p+q=1,\ \max pq=0{,}25,$$

u holda $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq 0{,}5\right)\leq\frac{1}{n}$.

16- §. Taqsimot funksiya

1- ta'rif. *Agar tasodifiy miqdor biror chekli yoki cheksiz* (a; b) *oraliqdagi barcha haqiqiy sonlarni qabul qilishi mumkin bo'lsa, u* ***uzluksiz tasodifiy miqdor*** *deyiladi.*

Misol. Yuqorida keltirilgan biror quroldan otilgan o'qning uchib o'tgan masofasi uzluksiz tasodifiy miqdorga misol bo'ladi.

2-ta'rif. *Uzluksiz* ξ *tasodifiy miqdorning* ***taqsimot funksiyasi*** *deb* ξ *ning* x *dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoliga aytiladi.*

Ya'ni ξ ning taqsimot funksiyasi deb ixtiyoriy haqiqiy x uchun $\xi < x$ hodisaning ehtimoli $P(\xi < x)$ga aytiladi. Taqsimot funksiya $F(x)$ bilan belgilanadi. $F(x) = P(\xi < x)$.

Taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. Taqsimot funksiya $F(x)$ kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni $x_1 < x_2$ bo'lsa, $F(x_1) < F(x_2)$.

2. Taqsimot funksiya ehtimol bo'lgani uchun: $0 \leq F(x) \leq 1$.

3. Taqsimot funksiya $F(x)$ chapdan uzluksiz: $F(x-0) = F(x)$.

4. $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$.

5. $P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$.

Misol. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha berilgan:

$$F(x)\begin{cases}0, & \text{agar } x\leq 1,\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, & \text{agar } 1<x\leq 2,\\ 1, & \text{agar } x>2.\end{cases}$$

ξ tasodifiy miqdorning tajriba natijasida (0; 1) oraliqda yotuvchi qiymatlar qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. (5) xossaga asosan:

$$P(0 \le \xi \le 1) = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)_{x=1} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)_{x=0} =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

17- §. Ehtimollar taqsimot zichligi

Ta'rif. *Uzluksiz tasodifiy miqdorning $F(x)$ taqsimot funksiyasi hosilasi (ya'ni* ***$P(x) = F'(x)$*** *)* ***ehtimollar taqsimot zichligi*** *(yoki* ***zichlik funksiyasi****) deyiladi.*

Demak, taqsimot funksiya zichlik funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Shuning uchun:

1. $P(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b P(x)dx.$

2. Zichlik funksiya manfiy emas, ya'ni $P(x) \ge 0$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1.$

Xususan, tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;\ b)$ oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda $\int\limits_a^b P(x)dx = 1$ bo'ladi.

4. Agar ξ tasodifiy miqdorning $P(x)$ zichlik funksiyasi berilgan bo'lsa, uning taqsimot funksiyasini quyidagi formula bo'yicha topish mumkin: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} P(t)dt.$

Misollar. 1. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha berilgan:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 0, \\ 2x, & \text{agar } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{agar } x > 1. \end{cases}$$

Tajriba natijasida ξ tasodifiy miqdorning (0,5; 1) intervalga tegishli qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

Y e c h i s h . Izlangan ehtimol

$$P(0,5 < \xi < 1) = 2\int_{0,5}^{1} xdx = x^2\Big|_{0,5}^{1} = 1 - 0,25 = 0,75 \text{ ga teng.}$$

2. Agar ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{agar } a < x \le b, \\ 0, & \text{agar } x > b. \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lsa, ξ ga $[a; b]$ da tekis taqsimlangan deyiladi. Shu tasodifiy miqdorning taqsimot flinksiyasini toping.

Y e c h i s h . $F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(t)dt$ formuladan foydalanamiz.

1) agar $x \le a$ bo'lsa, u holda $P(x) = 0$; shuning uchun $F(x) = 0$;

2) agar $a < x \le b$ bo'lsa, u holda $P(x) = \frac{1}{b-a}$, demak,

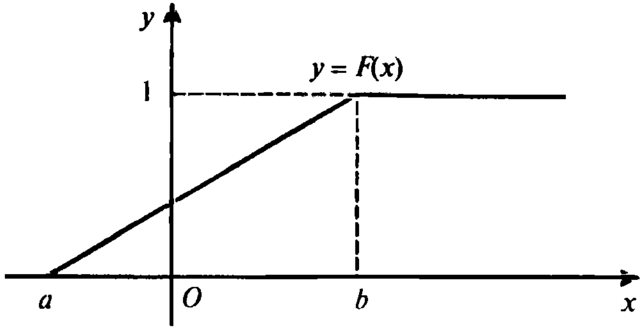
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx + \int_{a}^{x} \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a}\Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a};$$

3) agar $x > b$ bo'lsa, u holda

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot dt + \int_{a}^{b} \frac{dt}{b-a} + \int_{b}^{x} 0\cdot dt = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Shunday qilib,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{agar } a < x \le b, \\ 1, & \text{agar } x > b. \end{cases}$$



90- rasm.

Bu funksiyaning grafigi 90- rasmdagi ko'rinishda bo'ladi.

18- §. Ehtimollar nazariyasi tarixidan

Ehtimollar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining muhim tarmoqlaridan biridir. Ehtimollar nazariyasining tushunchalari XVII asrning o'rtalaridan vujudga kela boshladi, uning vujudga kelishi gollandiyalik X. Gyuygens (1629—1695), fransuzlar B. Paskal (1623—1662), P. Ferma (1601—1665) va kelib chiqishi niderland bo'lib, Shveysariyaning Bazel shahrida tug'ilgan Y. Bernulli (1654—1705) kabi buyuk matematiklarning nomlari bilan bog'liqdir.

Ehtimollar nazariyasining dastlabki tushunchalari Paskal va Fermalarning qimor o'yinlari bilan bog'liq bo'lgan masalalarga doir o'zaro yozishmalarida shakllana boshlangan. Ularning yozishmalarida ehtimol, matematik kutilma kabi muhim tushunchalar uchraydi. Bu buyuk olimlar ommaviy tasodifiy hodisalar zamirida aniq qonuniyatlarning vujudga kelishiga ishonar edilar.

O'sha davrda tabiiy fanlar rivojlanishining past darajada bo'lgani tufayli ehtimollar nazariyasining tushunchalari va metodlarining yaratilishida qimor o'yinlari hamda sug'urta va demografiya masalalari uzoq vaqtgacha yagona vosita bo'lib xizmat qilgan. Shuning uchun ehtimollar nazariyasining metodlari bilan yechiladigan masalalar, asosan, sodda arifmetik va kombinatorika usullari bilan yechishga olib kelinar edi.

Tabiiy fanlar talabi (kuzatishdagi xatolar nazariyasi, otish nazariyasi masalalari, statistika muammolari, birinchi navbatda, aholini hisobga olish statistikasi) ehtimollar nazariyasini rivojlantirish va analitik metodlardan foydalanishni zarur qilib qo'ydi.

Ehtimollar nazariyasining analitik metodlarini rivojlantirishda fransuz matematiklari A. Muavr (1667—1754), P. Laplas (1749—1827), S. Puasson (1781—1840), nemis matematigi K. Gauss (1777—1855) kabi olimlarning hissalari kattadir.

XIX asrning o'rtalaridan XX asrning 20- yillarigacha bo'lgan davrda ehtimollar nazariyasining rivojlanishi rus olimlarining nomlari bilan bog'liq. Ayniqsa V. Y. Bunyakovskiy (1804—1889) ehtimollar nazariyasidan yozilgan kitob muallifi, ehtimollar nazariyasining rus tilidagi atamalarining ijodkori, statistika va demografiya sohasida ajoyib tadqiqotlar olib borgan.

V. Y. Bunyakovskiyning o'quvchisi buyuk rus matematigi P. L. Chebishev (1821—1894) ehtimollar nazariyasida «Katta sonlar qonuni»ni yaratdi va momentlar metodini kiritdi.

P. L. Chebishevning shogirdi A. A. Markov (1856—1922) ehtimollar nazariyasida tasodifiy yoki stoxastik jarayonlar (protsesslar) nazariyasi deb ataluvchi yangi tarmog'ini yaratdi.

Uning nomi bilan fanda «Markov zanjirlari» deb ataluvchi tasodifiy jarayonlar mavjud. P. L. Chebishevning boshqa bir o'quvchisi mashhur rus matematigi A. M. Lyapunov (1857—1918) ehtimollar nazariyasida Markaziy limit teoremani umumiy shartlarda birinchi bo'lib isbotlagan va u hozirgi zamon ehtimollar nazariyasida keng qo'llanilayotgan maxsus xarakteristik funksiyalar metodini ishlab chiqdi va asosiy teoremani isbotlashga qo'lladi.

Ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosda qurish g'oyasini birinchi bo'lib, 1917- yilda S. N. Bernshteyn ilgari surdi va bayon qildi.

Buyuk rus matematigi A. N. Kolmogorovning ehtimollar nazariyasi sohasidagi ishlari butun jahonga mashhurdir. U ehtimollar nazariyasining aksiomatik qurilishini mukammal ishlab chiqdi. Bunda u uni hozirgi zamon matematikasining muhim tarmog'i bo'lgan funksiyalarning metrik nazariyasi bilan bog'ladi.

Ehtimollar nazariyasining rivojlanishida o'zbek matematiklarining ham hissasi katta. Bunda V. I. Romanovskiy (1879—1954) Toshkent matematika maktabining asoschisi sifatida tan olinadi va uning ko'pgina shogirdlari O'zbekistonda matematikani va uning tarkibiy qismi bo'lgan ehtimollar nazariyasini rivojlantirishda samarali mehnat qildilar va hozirgi vaqtda ilm sohasida ijodiy mehnat qilib, katta muvaffaqiyatlarga erishmoqdalar.

V. I. Romanovskiyning iqtidorli shogirdlaridan biri atoqli o'zbek matematigi T. A. Sarimsoqov (1915—1995) o'zining ehtimollar nazariyasi, matematik analiz, funksional analiz, umumiy topologiya va ularning tatbiqlari sohasida chuqur ilmiy ishlari bilan nafaqat O'zbekistonda yoki sobiq ittifoqda, balki chet ellarda ham ma'lum va mashhurdir.

U matematikada yangi istiqbolli yo'nalish — yarimmaydonlar nazariyasining yaratilishiga asos soldi.

T. A. Sarimsoqov va uning hamkasblari tomonidan yarimmaydonlardan qiymat qabul qiluvchi o'lchovlar va funksionallar ham o'rganilgan.

Ehtimollar nazariyasini o'rganishga algebraik yondashuv g'oyasi T. A. Sarimsoqovning keyingi ishlarida va shogirdlari ishlarida o'z rivojini topdi. Tartib kiritilgan algebralar nazariyasi o'rganildi va nokommutativ (kvant) ehtimollar nazariyasining algebraik bayoni berildi.

T. A. Sarimsoqov tomonidan 170 ga yaqin ilmiy maqolalar, sakkiz monografiya, ikki darslik e'lon qilingan. Uning darsliklari va ba'zi monografiyalari qayta nashr qilingan.

T. A. Sarimsoqov ko'plab qiziqarli, ilmiy-ommabop maqolalar muallifi hisoblanadi.

T. A. Sarimsoqov rahbarligida Markaziy Osiyo mamlakatlari uchun juda ko'p ijodkor ilmiy kadrlar tayyorlab berildi. Uning rahbarligida 40 ga yaqin fan nomzodlari tayyorlangan. T. A. Sarimsoqov fizika-matematika fanlari doktorlari S. X. Sirojiddinov, S. V. Nagayev, M. Y. Antonovskiy, J. X. Xojiyev, Sh. A. Ayupov, Y. X. Qo'chqorov, N. N. G'anixo'jayev, V. I. Chilin, R. N. G'anixo'jayev ilmiy faoliyatiga ulkan g'oyaviy ta'sir ko'rsatdi.

O'zbekistonda matematikaning rivojlanishida mashhur matematik, O'zbekiston Fanlar akademiyasining akademigi, O'zbekistonda xizmat ko'rsatgan fan arbobi, Abu Rayhon Beruniy nomidagi Davlat mukofotining laureati S. X. Sirojiddinovning (1921—1988) xizmatlari beqiyosdir.

S. X. Sirojiddinov talabalik yillaridan boshlab V. I. Romanovskiy rahbarligida ilmiy ishlar olib bordi va uning matematik analiz, geometriyaga doir ishlari uning kuchli matematik qobiliyat egasi ekanligini ko'rsatdi. Uning dastlabki muhim ishlaridan biri ko'p o'zgaruvchili polinomlar va ermit funksiyalariga doir bo'lib, u bunday ko'phadlarning to'liqligini o'rnatdi va ular uchun har xil tengsizliklarni isbotladi.

S. X. Sirojiddinov bir jinsli Markov zanjirlari uchun limit teoremalariga bag'ishlangan ilmiy tadqiqotlarida muhim ahamiyatli chuqur natijalarga erishdi.

U o'z shogirdlari bilan hamkorlikda ixtiyoriy holatlar to'plamiga ega bo'lgan Markov zanjirlari uchun limit teoremalarining asimptotik yoyilmalarini oldi, lokal limit teoremalarini aniqladi. Bunday sxemalar ko'p o'lchovli teoremalarga oid tekis va notekis baholashlarni o'rnatdi.

S. X. Sirojiddinov 50- yillarning o'rtalaridan boshlab, o'z ilmiy faoliyatini bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi uchun limit teoremalar muammosiga qaratdi. Bu sohada birinchi darajali o'zgartirib bo'lmaydigan muhim natijalar oldi. S. X. Sirojiddinov o'z tekshirish ishlarini ishlab chiqarish bilan uzviy bog‘lab olib bordi. U matematik statistikada mahsulot sifatini nazorat qilishning statistik metodini yaratdi.

S. X. Sirojiddinov tomonidan 173 dan ortiq ilmiy maqolalar, 10 dan ortiq monografiya e’lon qilingan. Bundan tashqari, u qator darsliklar, ko‘plab qiziqarli, ilmiy-ommabop maqolalarning muallifi hisoblanadi.

S. X. Sirojiddinov Markaziy Osiyoda ilmiy kadrlar tayyorlashga ham katta hissa qo‘shgan olimdir. Uning rahbarligida 10 ta fan doktori va 40 dan ortiq fan nomzodlari tayyorlangan.

S. X. Sirojiddinovning bevosita rahbarligida fizika-matematika fanlari doktorlari S. V. Nagayev, G. P. Matviyevskaya, T. A. Azlarov, A. V. Nagayev, T. L. Malevich, Sh. K. Farmonov, I. S. Badalboyev, M. U. G‘afurov, B. Abdalimov va boshqalar yetishib chiqdi.

V BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

1. Quyidagi tasodifiy hodisalar orasidan muqarrar va mumkin bo‘lmagan hodisalarni toping:

A_1 — o‘yin soqqasi tashlanganda 10 «ochko»ning chiqishi;

A_2 — uchta o‘yin soqqasi tashlanganda 10 «ochko»ning chiqishi;

A_3 — uchta o‘yin soqqasi tashlanganda 20 «ochko»ning chiqishi;

A_4 — tavakkal tanlangan ikki xonali sonning 100 dan katta bo‘lmasligi;

A_5 — ikkita tanga tashlanganda ikkita gerbli tomonning tushishi.

2. Birgalikda bo‘lmagan A va B hodisalarni ko‘rsating:

1) tajriba — tanga tashlash: A — gerbli tomonning tushish hodisasi, B — raqamli tomonning tushish hodisasi;

2) tajriba — o‘yin soqqasini tashlash: A — uch «ochko» tushishi, B — toq «ochko» tushishi;

3) tajriba — 2 ta tangani tashlash: A — bitta tangada gerbli tomonning tushish hodisasi, B — ikkinchi tangada gerbli tomonning tushish hodisasi;

4) tajriba — o'yin soqqasini tashlash: A — juft «ochko» tushishi, B — toq «ochko» tushishi.

3. Teng imkoniyatli A va B hodisalarni toping:

1) tajriba — o'yin soqqasini tashlash: A — ikki «ochko» tushishi, B — besh «ochko» tushishi;

2) tajriba — o'yin soqqasini tashlash: A — ikki «ochko» tushishi, B — juft «ochko» tushishi;

3) tajriba — nishonga 2 ta o'q uzish: A — birinchi otishda nishonga tekkiza olmaslik; B — ikkinchi otishda nishonga tekkiza olmaslik.

4. Quyidagi hodisalar to'la gruppa tashkil qiladimi?

1) tajriba — tanga tashlash: A — gerbli tomonning tushishi, B — raqamli tomon tushishi hodisalari;

2) tajriba — nishonga 2 ta o'q uzish: A — nishonga tegmaslik, B — nishonga bir marta tegish, C — nishonga ikkita tegish hodisalari;

3) tajriba — 2 ta tanga tashlash: A — bir marta gerbli tomonning tushishi, B — ikki marta gerbli tomonning tushishi hodisalari.

5. Hodisalarning yig'indisini toping:

1) tajriba — nishonga 2 ta o'q uzish: A — birinchi otishda tekkizish, B — ikkinchi otishda tekkizish;

2) tajriba — o'yin soqqasini tashlash: A — bir «ochko» chiqishi, B — ikki «ochko» chiqishi; C — uch «ochko» chiqishi;

3) tajriba — lotereya chiptalarini sotib olish: A — 10 so'mlik yutuq, B — 20 so'mlik yutuq, C — 25 so'mlik yutuq.

6. Hodisalar ko'paytmasini toping:

1) tajriba — nishonga 2 ta o'q uzish: A — birinchi otishda tekkizish, B — ikkinchi otishda tekkizish;

2) tajriba — o'yin soqqasini tashlash: A — uch «ochko»ning chiqmasligi. B — besh «ochko»ning chiqmasligi, C — toq «ochko» chiqishi.

7. Qutida 100 ta 1, 2, ..., 100 gacha nomerlangan sharlar bor. Qutidan tavakkal bitta shar olindi. Olingan sharning nomerida 5 raqamining bo'lish ehtimoli qanday?

8. Qutida 9 ta oq va 6 ta qora shar bor. Qutidan 2 ta shar tavakkal olindi. Olingan ikkala shar ham oq bo'lish ehtimoli qanday?

9. 8 ta detaldan iborat guruhda 6 tasi standart. Tavakkal olingan 5 ta detaldan 3 tasining standart bo'lish ehtimolini toping.

10. Birdaniga ikkita o'yin soqqasi tashlandi. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

A — tushgan «ochko»lar yig'indisi 8 ga teng;

B — tushgan «ochko»lar ko'paytmasi 8 ga teng;

C — tushgan «ochko»lar yig'indisi ularning ko'paytmasidan katta.

11. 8 ta har xil kitobni bitta tokchaga tavakkal terib qo'yildi. Ikkita belgilangan kitobning yonma-yon terib qo'yilish ehtimolini toping.

12. Kitob do'konida 10 ta har xil kitob tokchada turibdi, ulardan 5 tasi 4 so'mdan, 3 tasi 1 so'mdan va 2 tasi 3 so'mdan turadi. Tavakkal olingan ikkita kitob 5 so'mdan turish ehtimolini toping.

13. Olim va Shoira yangi yilni 10 kishilik do'stlar davrasida kutishmoqchi bo'lishdi. Ularning ikkalasi ham bayram stolida yonma-yon o'tirish orzusida edi. Agar do'stlar orasida joylar qur'a tashlash yo'li bilan taqsimlangan bo'lsa, Olim va Shoiraning istaklari amalga oshish ehtimolini toping.

14. Qutida 8 ta oq va 6 ta qora shar bor. Qutidan tavakkal 2 ta shar olindi. Olingan ikkala sharning qora bo'lish ehtimolini toping.

15. Qutida 8 ta oq va 6 ta qora shar bor. Qutidan tavakkal olingan 2 ta sharning turli rangli bo'lish ehtimolini toping.

16. Lotin yozuviga asoslangan o'zbek alifbosidagi 28 ta harf alohida kartochkalarga yozilgan. Beshta kartochka tavakkal ketma-ket olinib, chiqish tartibida stolga yoyib qo'yildi. «Kitob» so'zining hosil bo'lish ehtimolini toping.

17. 4 ta zenit pulemyoti 3 ta samolyotga o'q uzmoqda. Har bir pulemyot otish obyektini tavakkal tanlaydi. 4 ta pulemyot ham bitta samolyotga o'q uzish ehtimolini toping.

18. O'quv ustaxonasi uchta — *A*, *B* va *C* zavodlardan mahsulot oladi. *A* zavoddan mahsulot kelish ehtimoli 0,35 ga, *B* zavoddan mahsulot kelish ehtimoli 0,4 ga teng. Navbatdagi mahsulot *C* zavoddan kelish ehtimolini toping.

19. Uchta mergan nishonga o'q uzmoqda. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki 0,8 ga, uchinchisiniki 0,9 ga teng. Nishonga kamida bitta merganning tekkizish ehtimolini toping.

20. Ishchi 3 ta stanokka xizmat ko'rsatadi. Ishchining xizmat vaqti davomida birinchi stanokning buzilmaslik ehtimoli 0,5 ga teng, ikkinchi stanok uchun bu ehtimol 0,6 ga, uchinchi stanok uchun 0,8 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping:

A — xizmat vaqti davomida stanoklardan birontasining ham buzilmasligi;

B — birinchi stanok buzilishi, ikkinchi va uchinchi stanoklarning buzilmasligi;

C — birinchi va ikkinchi stanok buzilishi, uchinchining buzilmasligi;

D — stanoklardan kamida bittasining buzilishi.

21. Baliqchining uchta baliq tutadigan joyi bor. Bu joylarga u bir xil ehtimollik bilan boradi. Birinchi joydan baliq tutish ehtimoli $\frac{1}{3}$ ga, ikkinchi joydan $\frac{1}{2}$ ga, uchinchi joydan $\frac{1}{4}$ ga teng. Baliqchi uch marta qarmoq tashladi, faqat bir martasida baliq ilindi. Uning birinchi joydan ov qilgan bo'lish ehtimolini toping.

22. Birinchi xaltada 20 ta detal bo'lib, ularning 15 tasi standart, ikkinchi xaltada 30 ta detal bo'lib, ulardan 24 tasi standart, uchinchi xaltada 10 ta detal bo'lib, ularning 6 tasi standart. Tavakkal tanlangan xaltadan tavakkal olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

23. Uyda 6 ta elektr lampochka bor. Bir yil davomida har bir lampochkaning kuyib qolmaslik ehtimoli $\frac{5}{6}$ ga teng. Bir yil davomida 2 ta lampochkani almashtirish ehtimolini toping.

24. Bitta otishda nishonga tekkizish ehtimoli $\frac{1}{5}$ ga teng. 10 ta otishda nishonga bitta ham tegmaslik ehtimolini toping.

25. Agar ξ tasodifiy miqdor ushbu

ξ	1	2	3	4
p	0,3	0,1	0,2	0,4

taqsimot qonun bilan berilgan bo'lsa, uning matematik kutilmasini toping.

26. Zavodda 4 ta avtomatik qurilma bo'lib, ularning bir ish kunida sozlashga ehtiyoj sezmaslik ehtimoli birinchi avtomat uchun 0,9 ga teng, ikkinchisi uchun 0,8 ga, uchinchisi uchun 0,75 ga, to'rtinchisi uchun 0,7 ga teng. Bir ish kunida sozlashga ehtiyoj bo'lmagan avtomatlar sonidan iborat ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

27. Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

ξ	0	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

kabi berilgan bo'lsa, uning dispersiyasini toping.

28. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x<-\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x+1), & \text{agar } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{agar } x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

ξ ning $\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

29. Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x\le 0,\\ 3x^2+2x, & \text{agar } 0<x\le\frac{1}{3},\\ 1, & \text{agar } x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, uning zichlik funksiyasini toping va grafigini chizing.

30. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$P(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x\le 6,\\ \frac{1}{2}x-3, & \text{agar } 0<x\le 8,\\ 0, & \text{agar } x>8.\end{cases}$$

Uning taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni toping.

Javoblar

1. A_4 — muqarrar hodisa, A_1 va A_3 — mumkin bo‘lmagan hodisalar.

2. 1) birgalikda emas; 2) birgalikda; 3) birgalikda; 4) birgalikda emas.

3. 1) teng imkoniyatli; 2) teng imkoniyatli emas; 3) teng imkoniyatli.

4. 1) ha; 2) ha; 3) yo‘q.

5. 1) $A+B=C$ — ikkita otishda tekkizish.

2) $A+B+C=D$ — uchdan oshiq bo‘lmagan «ochko» chiqishi.

3) $A+B+C=D$ — lotereyaga yoki 10 so‘mlik, yoki 20 so‘mlik, yoki 25 so‘mlik yutuq chiqishi.

6. 1) $AB = C$ — ikkala otishda ham tekkizish;
2) $ABC = D$ — bir «ochko»ning chiqishi.

7. 0,19. **8.** $\frac{12}{35}$. **9.** $\frac{5}{7}$.

10. $P(A) = \frac{5}{36}$; $P(B) = \frac{1}{18}$; $P(C) = \frac{11}{36}$.

11. $\frac{2 \cdot 7!}{8!} = \frac{1}{4}$. **12.** $\frac{C_5^1 C_3^1 + C_2^1 C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{9}$. **13.** $\frac{20 \cdot 8!}{10!} = \frac{2}{9}$.

14. $\frac{15}{91}$. **15.** $\frac{48}{91}$. **16.** $\frac{1}{120}$.

17. $\frac{1}{21}$. **18.** 0,25. **19.** 0,994 (Ko'rsatma: $p = 1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right)$).

20. $P(A) = 0{,}04$; $P(B) = 0{,}04$;
$P(C) = 0{,}006$; $P(D) = 0{,}996$.

21. $\frac{256}{715}$. **22.** $\frac{43}{60}$. **23.** $\frac{5^3}{2 \cdot 6^5} = \frac{125}{15552}$.

24. $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$. **25.** 2,7. **26.** 3,15. **27.** 0,95.

28. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **29.** $P(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ 6x + 2, & \text{agar } 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{agar } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$

30. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 6, \\ \frac{1}{4}x^2 - 3x, & \text{agar } 6 < x \le 8, \\ 1, & \text{agar } x > 8. \end{cases}$

ADABIYOT

1. Sh. O. Alimov, Y. M. Kolyagin va boshq. Algebra. O'rta maktabning 9- sinfi uchun darslik. T., «O'qituvchi», 1996.

2. Sh. O. Alimov, Y. M. Kolyagin va boshq. Algebra va analiz asoslari. O'rta maktabning 10—11- sinflari uchun darslik. T., «O'qituvchi», 1996.

3. A. N. Kolmogorov va boshq. Algebra va analiz asoslari. O'rta maktabning 10—11- sinflari uchun o'quv qo'llanma. T., «O'qituvchi», 1990.

4. N. Y. Vilenkin va boshq. Algebra va matematik analiz, 10-sinf. Matematika chuqur o'rganiladigan maktablar va sinflar uchun. T., «O'qituvchi», 1992.

5. Н. Я. Виленкин и др. Алгебра и математический анализ для 11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М., «Просвещение», 1993.

6. T. A. Azlarov va boshq. Matematikadan qo'llanma. Maktab o'qituvchilari uchun qo'llanma. 2- qism. T., «O'qituvchi», 1990.

7. S. X. Sirojiddinov, M. M. Mamatov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T., «O'qituvchi», 1980.

8. M. Ahadova. O'rta osiyolik mashhur olimlar va ularning matematikaga doir ishlari. T., «O'qituvchi», 1983.

9. T. Yoqubov, S. Kallibekov. Matematik mantiq elementlari. Pedagogika institutlari va universitetlarning matematika fakultetlari talabalari uchun o'quv qo'llanma. T., «O'qituvchi», 1996.

10. Ф. П. Яремчук, П. А. Рудченко. Алгебра и элементарные функции. Справочник. Киев, «Наукова думка», 1976.

11. В. В. Вавилов и др. Задачи по математике. Начала анализа. Справочное пособие. М., «Наука», 1990.

12. В. Н. Литвиненко, А. Т. Мордкович. Практикум по решению математических задач. Учебное пособие для студентов педагогических институтов по математическим специальностям. М., «Просвещение», 1984.

13. Б. М. Ивлев и др. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. Учебное пособие для 10—11 классов средней школы. М., «Просвещение», 1990.

14. А. Т. Цыпкин, А. И. Пинский. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М., «Наука», 1989.

15. М. Л. Галицкий и др. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. М, «Просвещение», 1986.

16. A. P. Tarasov. Oliy matematika kursi. Texnikumlar uchun. T., «O'qituvchi», 1975.

17. I. L. Zaysev. Oliy matematika kursi. Texnikumlar uchun. «O'rta va oliy maktab», T., 1963.

18. Под. ред. Г. Н. Яковлева. Алгебра и начала анализа. Математика для техникумов. Ч. I, II. М., «Наука», 1981.

19. Р. А. Калнин. Курс алгебры. Для техникумов. М., 1954.

20. А. А. Дадаян, И. А. Новик. Алгебра и начала анализа. Минск, 1980.

21. И. И. Валуцэ, Г. Д. Дилигул. Математика для техникумов. М., «Наука», 1980.

22. И. Ф. Суворов. Курс высшей математики. Для техникумов. М., «Высшая школа», 1967.

MUNDARIJA

22.I
M41

Meliqulov A. va boshq.
Matematika, II qism. Kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'llanma./Mualliflar: A.Meliqulov, P.Qurbonov, P. Ismoilov.
O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi, o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi markazi, 3-nashri, — Toshkent: «O'qituvchi» NMIU, 2014. — 344 b.

ISBN 978-9943-02-804-3

UO'K: 51(075)
BBK 22.I ya721

MELIQULOV ABDUXALIL,
QURBONOV PARDA,
ISMOILOV PARDA

MATEMATIKA

II qism

Kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'llanma

3- nashri

«O'qituvchi» nashroyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent — 2014

Muharrir *N. Go'ipov*
Tex. muharrir *S. Nabiyeva*
Musahhih *Z. G'ulomova*
Kompyuterda sahifalovchi *Sh. Yo'ldosheva*

Nashriyot litsenziyasi AI№161 14.08.2009. 2014- yil 30- dekabrda original-maketdan bosishga ruxsat etildi. Bichimi 84×108 1/32. Kegli 11 shponli. Tayms garniturasi. Ofset bosma usulida bosildi. Bosma taboq 21,5. Shartli b.t. 18,06. Nashr t. 19,0. Adadi 3324 nusxada bosildi. Buyurtma № 266-14.

O'zbekiston Matbuot va axborot agentligining «O'qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi. Toshkent — 206, Yunusobod dahasi, Yangishahar ko'chasi, 1- uy.
Shartnoma №07—77—14.