М. ХОЛИҚОВ, Н. ТЕШАБОЕВА

ФУРЬЕ ҚАТОРЛАРИ ВА ВАРИАЦИОН ҲИСОБ

ЎЗССР ОЛИЙ ВА МАХСУС
ЎРТА ТАЪЛИМ МИНИСТРЛИГИ
УНИВЕРСИТЕТЛАРНИНГ ФИЗИКА,
ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТЛАРИНИНГ
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТЛАРИ
СТУДЕНТЛАРИ УЧУН ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА
СИФАТИДА ТАСДИҚЛАГАН

«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
Тошкент — 1977

517
Х72

Холиқов М. ва Тешабоева Н.

Фурье қаторлари ва вариацион ҳисоб. Ун-тларнинг физика, педагогика ин-тларининг физика — математика фак. студентлари учун ўқув қўлланма. Т., «Ўқитувчи», 1977 (С).
272б.

1. Автордош.
Халиков М. и Тешабаева Н. Ряды Фурье и вариационное исчисление.

517

ИБ № 352

$X\frac{20203-24}{353\ (06)\ 77}148-77$

СЎЗ БОШИ

Ушбу ўқув қўлланма икки қисмдан иборат. Биринчи қисмда «Фурье қаторлари» назарияси, иккинчи қисмда эса «Вариацион ҳисоб» асослари баён этилган.

Авторлар китобни университетларнинг физика факультетлари учун қабул қилинган ўқув программаси талабларига жавоб берадиган қилиб тузишга интилишди. Қўлланмадан, шунингдек, педагогика институтларининг физика-математика факультетлари студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин. Сўнгги йилларда республикамизда ўзбек тилида олий математиканинг турли соҳаларига доир бир қатор оригинал ва таржима қилинган дарсликлар нашр этилди. Улар ўқув юртларимизда тайёрланаётган кадрларнинг математика фанидан олган билимлари етук ва ҳозирги замон талабларига жавоб берадиган бўлишига хизмат қилмоқда. Мазкур қўлланма авторларнинг ана шу шарафли ишга озми-кўпми ўз ҳиссаларини қўшиш мақсадида яратилди.

Қўлланмадан техника олий ўқув юртлари махсус факультетларининг студентлари, халқ хўжалигининг турли соҳаларида ишлаётган инженерлар, экономистлар, «Фурье қаторлари» ва «Вариацион ҳисоб» асосларидан зарур маълумотга эга бўлишни истаганлар фойдаланса ҳам бўлади. Айниқса, олий ўқув юртларида сиртдан ўқувчи студентларга қўлланма катта ёрдам беради деб ўйлаймиз.

Темаларнинг пухта ва онгли ўзлаштирилишини кўзда тутиб, китобда етарлича мисол ва масалалар ечилишлари билан келтирилган. Ҳар бир боб охирида мустақил ишлаш учун мисол ва масалалар келтирилган.

Қўлланмани ёзишда авторлар ўзларининг Самарқанд ва Тошкент Давлат университетларида кўп йиллар давомида ўқилган лекцияларидан фойдаландилар. Бундан ташқари, «Фурье қаторлари» ва «Вариацион ҳисоб»га оид рус тилида нашр этилган ва ҳозиргача олий ўқув юртларида қўлланиб келинаётган дарсликлардан ҳам фойдаланилинди. Уларнинг рўйхати китоб охирида берилган.

Авторлар қўлёзмани синчиклаб кўриб чиқиб, ундаги мавжуд камчилик ва нуқсонларни кўрсатган, уларни бартараф этиш мақсадида берган қимматли маслаҳатлари ҳамда 6-бобни ёзишга кўмаклашгани учун доц. Ғ. Н. Насриддиновга миннатдорчилик изҳор этадилар. Ўз фикр ва мулоҳазалари билан китоб сифатини яхшилашга ёрдам берган доц. А. Н. Назаров ва доц. И. И. Исроиловга, боблар охирида машқ учун берилган мисол ва масалаларни танлашдаги ёрдамлари учун А. Аъзамов ва А. Маҳмеджановга авторлар самимий ташаккур билдирадилар.

Бундай қўлланма ўзбек тилида илк бор нашр этилаётганлиги учун унда айрим хато ва камчиликлар бўлиши мумкин. Китобда учрайдиган хато ва камчиликларни кўрсатадиган ўртоқларга авторлар олдиндан миннатдорчилик билдирадилар. Ўз фикр ва мулоҳазаларингизни қуйидаги адресга юборишингизни сўраймиз:

700 129, Тошкент, Навоий 30, «Ўқитувчи» нашриёти. Физика-математика адабиёти редакцияси.

Авторлар.

Биринчи қисм

I боб

ФУРЬЕ ТРИГОНОМЕТРИК ҚАТОРЛАРИ

1-§. Бошланғич маълумотлар

1°. Даврий функциялар. Табиатда ва техникада шундай ҳодисалар ва бу ҳодисалар билан боғлиқ бўлган шундай миқдорлар учрайдики, улар маълум бир T вақт ўтгандан сўнг ўзларининг бошланғич ҳолатларини (қийматларини) такрорлайди (тиклайди). Бундай ҳодиса на миқдорлар *даврий*, T вақт эса уларниг *даври* деб аталади. Буларга осмон жисмларининг, элементар заррачаларнинг айланма ҳаракати, ҳар хил асбоб ва машиналарнинг тебранма ва айланма ҳаракати, шунингдек, акустик ва электромагнитавий тебранишлар мисол бўла олади. Бу хилдаги ҳодиса ва катталиклар математикада *даврий* деб аталувчи функциялар воситасида ўрганилади. Шунинг учун ҳам ишни олий математиканинг (тўғрироғи, математик анализнинг) Фурье қаторлари деб аталувчи бўлимининг муҳим тушунчаларидан бири бўлган даврий функциялардан бошлаймиз.

Таъриф. *Агар x ўзгарувчининг барча ҳақиқий қийматларида аниқланган $f(x)$ функция учун нолдан фарқли шундай ҳақиқий T сон мавжуд бўлсаки, барча x лар учун*

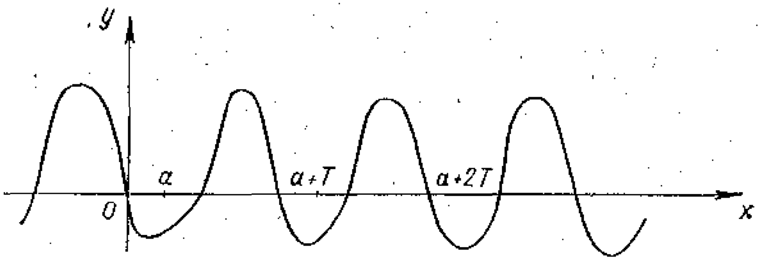
$$f(x+T)=f(x) \qquad (1.1)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ даврий функция, T сон унинг даври дейилади. Таърифдан равшанки, $f(x)$ даврий функциянинг графигини ясаш учун унинг графигини бирор $[a, a+T]$ (бунда $a\neq 0$) оралиқда ясаб, сўнгра уни бутун ўққа даврийлик қонунига асосан давом эттириш етарлидир (1-чизма).

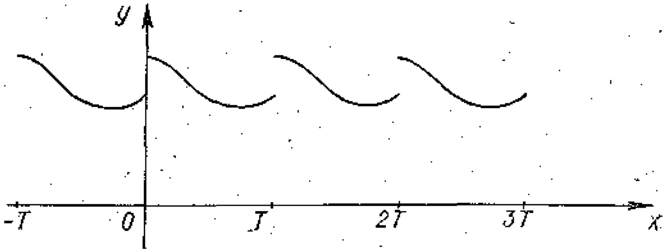
1-чизмадаги функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган, T даврли узлуксиз функцияга мисол бўлади.

Даврий функция узлуксиз бўлмаслиги ҳам мумкин, масалан, 2-чизмадагидек графикка эга бўлган функция даврий бўлиб, узлуклидир.

Китобхонларимизга $\sin x$ ва $\cos x$ лар 2π даврли узлуксиз функциялар, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ ва $\operatorname{cosec} x$ эса π даврли ва чексиз кўп са-



1- чизма.



2- чизма.

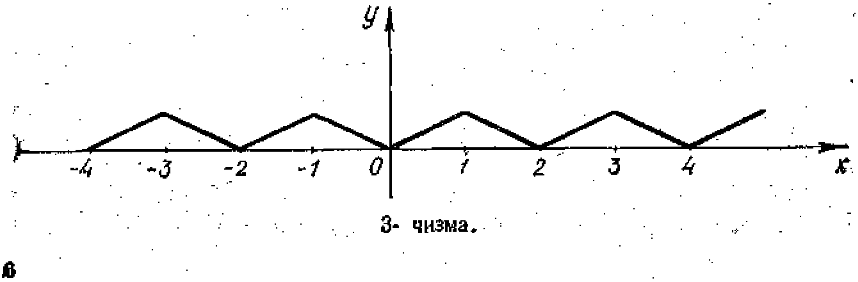
ноқли нуқталарда узилувчи функциялар экани ва уларнинг графиклари ўрта мактаб курсидан маълум.

Юқорида айтилганларни аниқроқ тасаввур қилиш мақсадида қуйидаги функцияларнинг графикларини ясаймиз.

1. $f(x) = |x|$ функция x дан унга энг яқин бутун сонгача бўлган масофа. Унинг графиги ясалсин ва бу функция даврий эканини график ёрдамида кўрсатиб, даври аниқлансин.

Ечилиши. Функциянинг аниқланишига кўра: $|x| = n$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ да $f(x) = 0$; $n - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant n + \frac{1}{2}$ да $f(x) = |x - n|$; $-\frac{1}{2} - n \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - n$ да $f(x) = |x + n|$.

Бу функциянинг графиги 3-чизмада тасвирланган бўлиб, у $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ да аниқланган $y = |x|$ функцияни Ox ўқнинг ҳар икки томонига $T = 1$ даврли қилиб давом эттиришдан ҳосил бўлади.



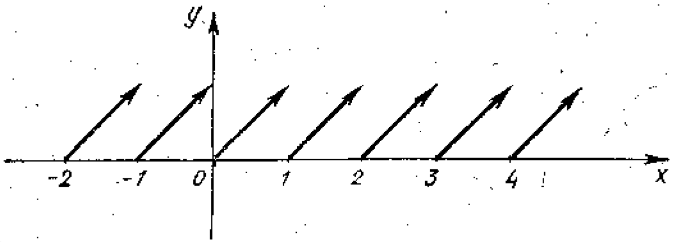
3- чизма.

2. Агар $f(x)$ функция исталган $x \in (-\infty, \infty)$ учун $f(x) = x - [x]$ *тенглиқ билан ифодаланса, унинг графиги ясалсин. Агар $f(x)$ даврий бўлса, унинг даври аниқлансин.

Ечилиши. Агар $f_1(x) = x$ деб олсак, у ҳолда $f(x)$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = \begin{cases} \text{агар } x = \pm n \text{ бўлса, } 0; \\ \text{агар } n < x < n+1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \text{ бўлса, } f_1(x). \end{cases}$$

$f(x)$ функция графиги $f_1(x)$ графигини 1 даврли қилиб Ox ўқ бўйича давом эттиришидан ҳосил бўлади (4-чизма).



4- чизма.

Бу функция узлукли даврий функция бўлиб, даври $T = 1$ дир.

Физикада ва техникавий фанларда учрайдиган энг содда даврий функция моддий нуқтанинг бирор F куч таъсиридаги тебранма ҳаракати қонунини ифодаловчи ушбу

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad -T \leqslant t \leqslant T' \qquad (1.2)$$

функциядир. Одатда бу функция физикавий моҳиятига кўра *«гармоника»* деб ҳам аталади. Бу функция учун $T = \frac{2\pi}{\omega}$ сон давр бўлади. Дарҳақиқат,

$$A\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = A\sin[(\omega t + \varphi) + 2\pi] = A\sin(\omega t + \varphi)$$

ёки

$$s(t + T) = s(t).$$

Бу функциянинг энг катта қиймати $|s(t)| = A > 0$ га тенг бўлиб, у тебранувчи моддий нуқтанинг бошланғич ҳолатдан энг катта узоқлашишини беради. Бу узоқлашиш механикада *тебраниш амплитудаси* дейилади.

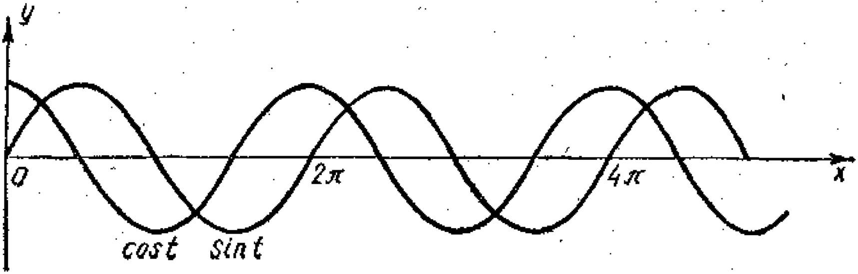
$\frac{1}{T}$ сон нуқтанинг бирлик вақт (секунд) ичидаги тебранишлар сонидан иборат, у ҳолда $\omega = \frac{2\pi}{T}$ сон 2π вақт ичидаги тебранишлар со-

---

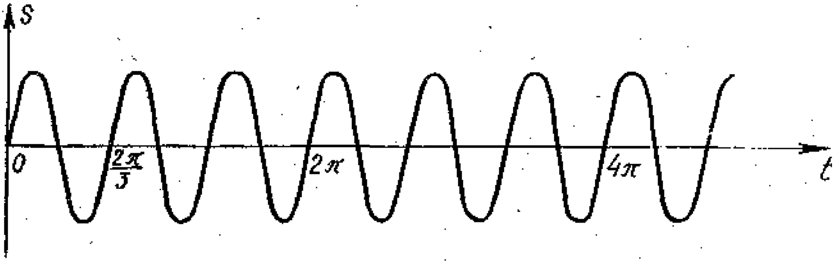
* $[x]$ антье дейилиб, унинг x га мос қиймати ўша x га энг яқин ва ундан катта бўлмаган бутун сонга тенг, масалан, $[1] = 1$, $[1,6] = 1$, $[-2,1] = -3$.

ни бўлади ва у *частота* деб аталади. Ниҳоят φ сон ўша нуқтанинг ($t=0$ да) бошланғич $s(0)=A\sin\varphi$ ҳолатини аниқловчи миқдор бўлганлиги сабабли, у *бошланғич фаза* дейилади.

$s(t)=\sin t$ функция (I.2) функциянинг хусусий ҳоли, чунончи $\varphi=0$, $A=1$ ва $\omega=1$ бўлган ҳоли бўлиб, унинг графиги бизга таниш бўлган синусоидадир (5-чизма). Агар $A=1$, $\omega=1$ ва $\varphi=\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $s(t)=\cos t$ га эга бўламиз. Бунинг графиги косинусоида бўлади (5-чизма). Буларнинг иккаласи ҳам (I.2) гармониканинг энг содда ҳолларидир.



5- чизма.

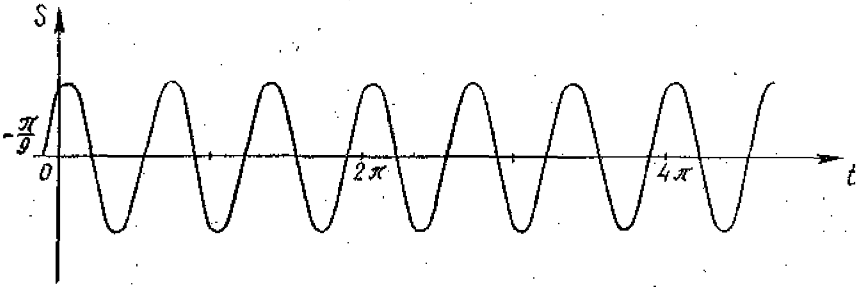


6- чизма.

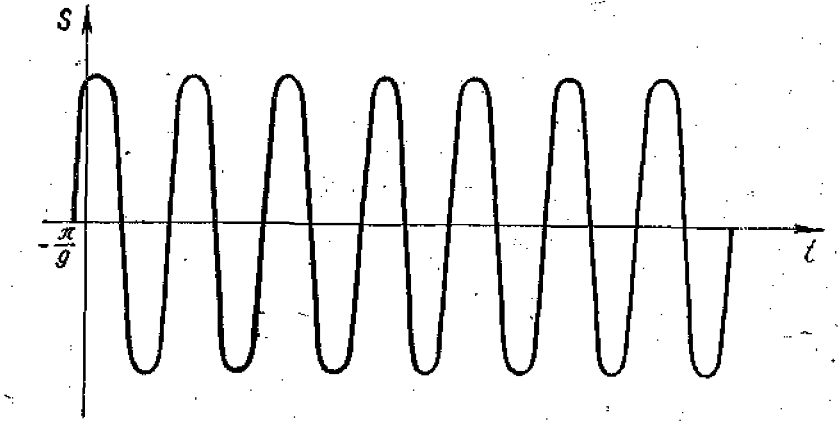
Энди (I.2) гармониканинг бошқа хусусий ҳолларини кўрайлик. Агар $\varphi=0$, $A=1$ бўлса, $s(t)=\sin\omega t$ бўлиб, ω нинг қийматига кўра оддий синусоидага ўхшаш (албатта, шаклан бир қадар ўзгарган) узлуксиз эгри чизиқ ҳосил бўлади. Масалан, $\omega>1$ бўлса, график синусоидага нисбатан Ot ўқ йўналиши бўйлаб ω марта сиқилган, $\omega<1$ бўлса, ўшанча марта чўзилган бўлади. Буни тушуниш учун 5-чизмадаги синусоида билан 6-чизмадаги чизиқни таққослаб кўриш кифоя.

Энди $s(t)=\sin(\omega t+\varphi)$ ни текшириб кўрайлик. Бу гармоника графигини ҳосил қилиш учун $s(t)=\sin\omega t$ эгри чизиқни Ot ўқ бўйича $-\frac{\varphi}{\omega}$ бирликка силжитиш зарур. Мана шу ҳол учун мисол тариқасида $s(t)=\sin(3t+\frac{\pi}{3})$ гармоника графигини (7-чизма) келтирамиз.

Юқорида келтирилган мисолларга асосан (I.2) кўринишдаги гармоника графигини ясаш учун $s(t)=\sin(\omega t+\varphi)$ нинг ординаталарини A га кўпайтириш зарур (8- чизма).



7- чизма.



8- чизма.

Шундай қилиб, *(I.2) гармоника графиги оддий $s(t)=\sin t$ синусоидани Ot ўқ йўналиши бўйича текис сиқиш (ёки чўзиш), ўша ўқ бўйича ўнгга (чапга) силжитиш ва ординатасини A қадар узайтириш (қисқартириш) воситасида ясалар экан.*

2° **Даврий функциянинг энг содда хоссалари.** 1) агар T сон $y=f(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда ихтиёрий бутун (мусбат ва манфий) k учун $T_1=kT$ ҳам ўша функциянинг даври бўлади; яъни

$$f(x+kT)=f(x). \qquad (I.3)$$

Текшириш. Олдин $k>0$ учун текшириб кўрайлик, таърифга кўра барча $|x|<\infty$ $(-\infty<x<\infty)$ учун $f(x+T)=f(x)$ бўлгани сабабли исталган мусбат $k>1$ да

$$x_1=x+(k-1)\,T\in(-\infty,+\infty) \text{ ва } f(x_1+T)=f(x_1),$$

бундан

$$f(x+kT)=f[x+(k-1)T].$$

Агар $x_2=x+(k-2)T$ десак, x_2 ҳам $(-\infty, +\infty)$ га тегишли ва $f(x_2)=f(x_2+T)=f[x+(k-2)T+T]=f(x+(k-1)T]$, бундан

$$f(x+kT)=f[x+(k-1)T]=f[x+(k-2)T].$$

Худди юқоридагига ўхшаш, $x_3=x+(k-3)T$ бўлса, $x_3\in(-\infty, +\infty)$ дан

$$f(x_3)=f(x_3+T)=f[x+(k-3)T]=f[x+(k-2)T+T] \text{ ёки}$$
$$f[x+(k-3)T]=f[x+(k-2)T].$$

Демак,

$$f(x+kT)=f[x+(k-1)T]=f[x+(k-2)T]. \tag{I.4}$$

Агар бу ишни $(k-1)$ марта такрорласак,

$$f(x+kT)=f[x+(k-1)T]=\ldots=f[x+(k-(k-1)T]=f(x+T)=f(x)$$

га эга бўламиз. Демак, (I.3) ўринли экан.

Агар $f(x)$ функция T даврли бўлса, у ҳолда $-T$ ҳам бу функция учун давр бўлишини кўрсатамиз. Таърифга асосан

$\forall$* $(x-T)\in(-\infty, +\infty)$ учун $f(x-T)=f[(x-T)+T]$, яъни

$$f(x-T)=f[x+(-T)]=f(x). \tag{I.4'}$$

(I.3) ва (I.4) дан исталган бутун k учун

$$f[x+k(-T)]=f(x); \tag{I.5}$$

2) агар T_1 ва T_2 нинг ҳар бири $f(x)$ функция учун давр бўлса, у ҳолда $T_1\pm T_2$ ҳам $f(x)$ нинг даври бўлади.

Дарҳақиқат, T_1, T_2 лар $f(x)$ нинг даври бўлганлиги сабабли $(-\infty, +\infty)\in\forall x$ учун $f(x+T_1)=f(x)$ ва $f(x+T_2)=f(x)$; $(-\infty, \infty)\in\forall x$ учун $f[(x+T_2)+T_1]=f(x+T_2)=f(x)$, бу тенгликдан $-\infty, +\infty)\in\forall x$ учун

$$f[x+(T_1+T_2)]=f(x); \tag{I.6}$$

3) барча $x\in(-\infty, +\infty)$ да айнан ўзгармас функция $[f(x)=$ $=\text{const}]$ даврий бўлиб, унинг даври исталган T сондир:

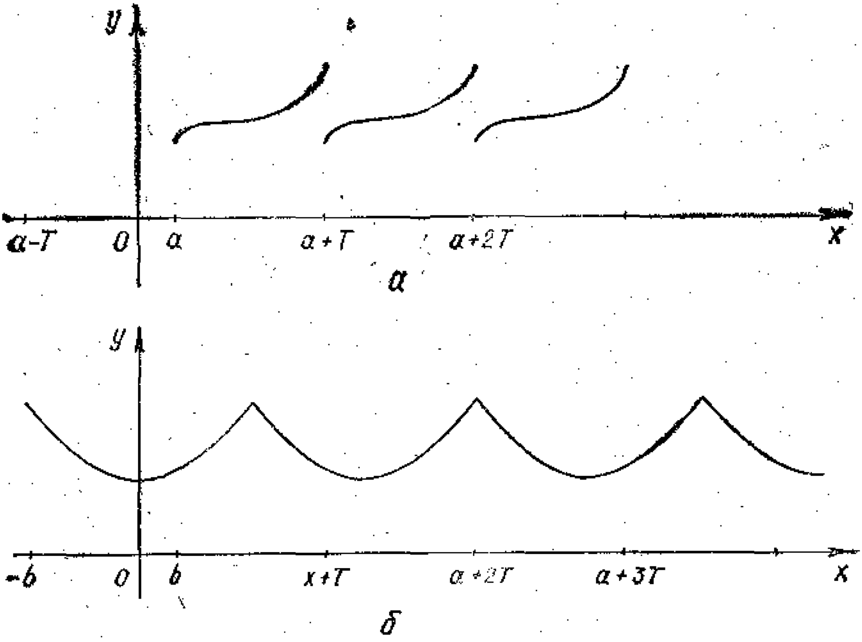
4) агар $f(x)$ айнан ўзгармас бўлмаган [яъни $f(x)\neq\text{const}$] даврий узлуксиз функция бўлса, у вақтда бундай функция энг кичик мусбат T даврга эга бўлади ва у функциянинг даври деб қабул қилинади

Бу хоссанинг ўринли эканини тескари фараз қилиш билан исботлаш мумкин, лекин китоб ҳажмини эътиборга олиб, бунинг исботига тўхталмаймиз.

Ниҳоят, бу банд сўнггида ихтиёрий $[a, b]$ кесмада аниқланган $F(x)$ функция воситасида бутун ҳақиқий ўқда $f(x)$ даврий функция ясашни кўрсатамиз. Бирор $[a, a+T]$ да аниқланган $F(x)$ функция берилган бўлсин (9- a, b чизма).

---

* $\forall x$ белги исталган x деган маънони билдиради.



9- чизма.

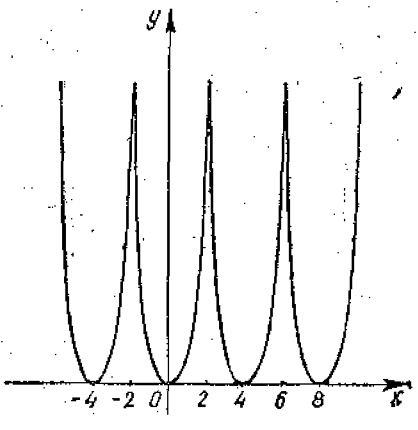
Агар бу функция графигини Ox ўқ йўналиши бўйича ўнгга ва чапга T, $2T$, ..., kT, ... узунликдаги кесмаларга кўчирсак, исталган $|x| < +\infty$ учун $f(x) = f(x+T)$ даврий функция ҳосил бўлади. Берилган функцияни бу хилда давом эттириш *даврий давом эттириш* усули дейилади.

Мисоллар. 1. $|x| \leqslant 2$ да аниқланган $f(x) = |x^3|$ функцияни Ox ўқ йўналиши бўйича ўнгга ва чапга давом эттириб, Ox ўқда аниқланган $T = 4$ даврли функция тузилсин.

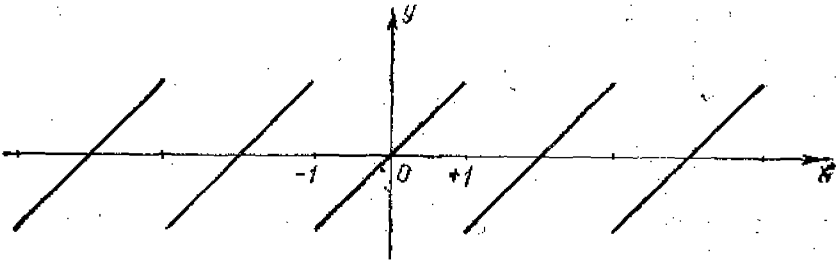
Ечилиши. Аввало $|x| \leqslant 2$ да $f(x) = |x^3|$ функция графигини ясаб, сўнгра уни юқорида тавсия этилганидек давом эттирсак, изланаётган даврий функцияни ҳосил қиламиз (10-чизма).

2. Агар барча $x \in [-1, 1]$ учун $f(x) = x$ бўлса, бу функцияни абсциссалар ўқи йўналиши бўйича ҳар икки томонга давом эттириб, $T = 2$ даврли даврий функция тузилсин.

Ечилиши. Маълумки, $f(x)$ функция графиги Декарт коорди-



10- чизма.



11- чизма.

наталар системасида биринчи ва учинчи чораклар биссектрисасининг $[-1, 1]$ даги кесмасидан иборат. Агар уни $T = 2$ давр билан Ox ўқ бўйича ўнг ва чапга давом эттирсак, 11- чизмадаги графикка эга бўлган даврий функция ҳосил бўлади.

Биз тузган функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган, узлукли, $T = 2$ даврли функциядир.

3°. **Даврий функциялар устида амаллар.** 1) агар $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$, $f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири T даврли бўлса, у ҳолда $F(x) = \sum_{k=1} f_k(x)$ функция ҳам T даврли функция бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, шартга кўра исталган x ва $k = 1, 2, \dots, n$ учун: $f_k(x + T) = f_k(x)$. Бундан

$$F(x+T) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x+T) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = F(x).$$

Демак,

$$F(x+T) = F(x);$$

2) агар $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$, $f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири T даврли бўлса, у ҳолда $F(x) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x)$ функция ҳам T даврли бўлади. Ҳақиқатан, $f_k(x+T) = f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ дан

$$F(x+T) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x+T) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x),$$

яъни

$$F(x+T) = F(x);$$

3) агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ бир хил T даврли бўлса, у ҳолда T сон уларнинг бўлинмаси $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ёки $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ учун ҳам давр бўлади.

Текшириб кўрайлик. $f_1(x+T) = f_1(x)$ ва $f_2(x+T) = f_2(x)$ дан

$$\frac{f_1(x+T)}{f_2(x+T)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}; \quad \frac{f_2(x+T)}{f_1(x+T)} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}.$$

Демак, T сон иккала бўлинма функция учун давр бўлади. Аммо ҳозир исбот этилган хоссадан $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ *функциялар учун энг* *кичик T давр бўлинма функция учун ҳам энг кичик давр бўлади, деган натижа келиб чиқмаслигини қайд қилиб ўтамиз.* Дарҳақиқат, $\sin x$ ва $\cos x$ нинг ҳар бири 2π *даврли бўлгани* учун 2π сон $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ учун ҳам давр бўлади. Лекин сўнгги иккита функция учун 2π дан кичик π сон ҳам давр бўлди. Шунинг учун ҳам $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ лар π даврли функциялар дейилади.

4) агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар мос равишда ўлчовдош яъни

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{n_1}{n_2}(*),$$

(бу ерда n_1 ва n_2—бирор бутун сонлар) бўлган T_1 ва T_2 *даврларга эга бўлса, у ҳолда* $T=n_2T_1=n_1T_2$ сон ҳар икки функция учун давр бўлади.

Ҳақиқатан, $f_1(x+n_2T_1)=f_1(x+T)$ ва $f_2(x+n_1T_2)=f_2(x+T)$. 2° банддаги 1) хоссага асосан

$$f_1(x+n_2T_1)=f_1(x),\quad f_2(x+n_1T_2)=f_2(x),$$

яъни

$$f_1(x+T)=f_1(x) \text{ ва } f_2(x+T)=f_2(x).$$

Хулоса. Ўлчовдош, яъни (*) ни қаноатлантирувчи T_1 ва T_2 даврларга эга иккита функция йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси 1), 2), 3) хоссаларга кўра даврий бўлиб, $T=n_2T_1=n_1T_2$ сон улар учун давр бўлади.

Масалан, $\sin x$ ва $\operatorname{tg} x$ нинг даврлари мос равишда $T_1=2\pi$ ва $T_2=\pi$ бўлиб, $\frac{T_1}{T_2}=\frac{2}{1}$ ёки $\frac{T_2}{T_1}=\frac{1}{2}$ бўлганлиги учун $T=2\pi$ ҳар иккаласи учун давр бўлади, ундан ташқари, 2π сон $\operatorname{tg} x+\sin x$, $\operatorname{tg} x\times\sin x=\frac{\sin^2 x}{\cos x}$, $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=\cos x$; $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}=\sec x$ учун ҳам давр бўлади.

5) агар T даврли $f(x)$ функция ўзининг аниқланиш соҳасида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда унинг $f'(x)$ ҳосиласи ҳам T даврли бўлади

Исботи. Шартга кўра $f(x+T)=f(x)$ ва $f'(x)$, $f'(x+T)$ мавжуд. Маълумки,

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ ва } f'(x+T)=\lim_{h\to0}\frac{f[(x+T)+h]-f(x+T)}{h}.$$

$f[(x+T)+h]=f[(x+h)+T]=f(x+h)$ ва $f(x+T)=f(x)$ дан

$$f'(x+T)=\lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Шундай қилиб, $f'(x)$ ҳам T даврлидир.

6) агар $f(x)$ функция T даврли ва интегралланувчи бўлиб, ушбу

$$\int_0^T f(x)dx=0 \qquad (*)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (**)$$

функция ҳам T даврли бўлади.

Исботи. Дарҳақиқат, (**) дан

$$F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{x+T} f(t)\,dt$$

ва (*) га асосан

$$F(x+T) = \int_T^{x+T} f(t)\,dt$$

тенглик ҳосил бўлади. Агар сўнгги тенгликнинг ўнг томонидаги интегралда $t = u + T$ алмаштириш бажарсак,

$$F(x+T) = \int_0^x f(u)\,du = F(x)$$

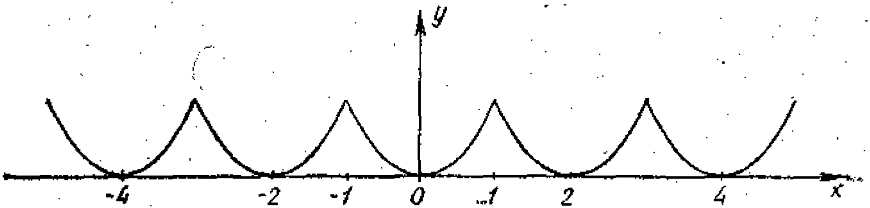
бўлади. Демак, $F(x)$ ҳам T даврли экан.

2- §. Қарийб даврий функциялар

Математика фанининг татбиқларида даврий функциялар билан бир қаторда, улардан умумийроқ, *қарийб даврий* деб аталувчи функциялар ҳам катта аҳамиятга эга. Шунинг учун биз бу параграфда ана шундай функциялар ҳақида қисқача маълумот берамиз.

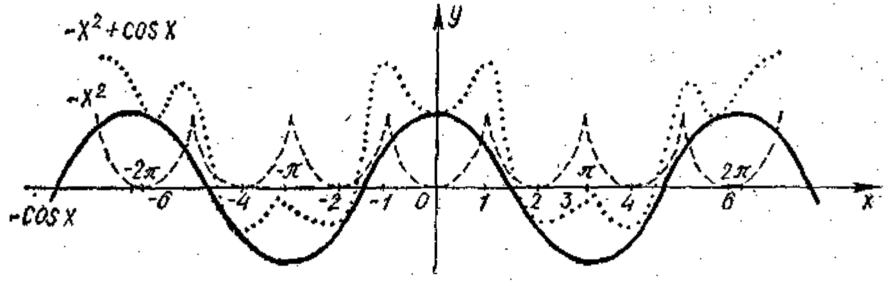
Бундан олдинги параграф сўнггида ўлчовдош даврли иккита функция йиғиндиси (айирмаси) қўшилувчи функцияларнинг умумий давридек (яъни $n_2T_1 = n_1T_2 = T$) даврга эга функция бўлишини кўрдик. Энди даврлари ўлчовдош бўлмаган функциялар йиғиндиси ҳақида нима дейиш мумкин, деган саволга жавоб берамиз.

Равшанки, исталган тригонометрик функция билан ихтиёрий T (T — бирор чекли рационал сон) даврли $f(x)$ функция йиғиндиси албатта даврий функция бўлмайди. Чунки $T_1 = 2\pi$ (ёки π) — тригонометрик функция даври, T сон эса $f(x)$ функция даври бўлиб, улар нисбати $\frac{T}{2\pi}$ $\left(\text{ёки } \frac{T}{\pi}\right)$ бўлади. Демак, 1- § даги (*) га кўра T_1 ва T ўлчовдош эмас. Бу ҳолни яхшироқ тушуниш мақсадида $f_1(x) = \cos x$ ва $|x| \leqslant 1$ да аниқланган $f_2(x) = x^2$ функцияларни олсак бўлади (12- чизма).



12- чизма.

У ҳолда $T_1 = 2\pi$ ва $T_2 = 2$ нинг нисбати $\frac{T_1}{T_2} = \pi$ ёки $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{\pi}$ бўлиб, бу сонлар ўлчовдош бўлмайди. Шунинг учун $f_2(x) + f_1(x)$ функция даврий бўла олмайди. Агар бу йиғинди функциянинг графигини ясасак, у 13- чизмадаги кўринишга эга бўлади.



13- чизма.

Бу чизмадан $f_1(x) + f_2(x)$ нинг даврий эмаслиги равшан кўриниб турибди.

Агар $f_2(x)$ деб $[-\pi, \pi]$ да аниқланган $f_2(x) = x^2$ функцияни 2π давр билан давом эттирилганидан ҳосил бўлган функцияни олсак, у ҳолда T_1 ва T_2 ўлчовдош бўлиб, $f_1(x) + f_2(x)$ функция 2π даврли бўлади.

Ўлчовдош бўлмаган даврларга эга бўлган иккита функция йиғиндиси *қарийб даврий* деб аталувчи функцияни ҳосил қилади.

Қарийб даврий функцияга таъриф бериш ва унинг хоссаларини келтиришдан аввал даврий функция таърифини қуйидагича ифодалайлик.

Таъриф. $(-\infty, +\infty)$ *да аниқланган* $f(x)$ *функция учун нолдан фарқли шундай ҳақиқий* T *сон мавжуд бўлсаки, узунлиги* T *га тенг бўлган ихтиёрий* $[a, a+T]$ *кесмада ақалли битта* τ *сон мавжуд бўлиб, барча* $|x| < \infty$ *учун*

$$|f(x+\tau) - f(x)| = 0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ *функция даврий дейилади.*

Бу таъриф 1-§ да келтирилган таърифга зид бўлмасдан, балки унга тенг кучлидир. Ҳақиқатан, биринчи таърифдан юқорида келтирилган таъриф бевосита келиб чиқади. Бунинг учун T сон сифатида $f(x)$ функциянинг даврини олсак, τ учун $kT\,(k = 1, 2, \ldots, n)$ сонлардан исталган бирини олиш мумкин. Янги таърифдан дастлабки таъриф келиб чиқиши яна ҳам равшандир.

Бу таърифдан фойдаланиб қарийб даврий функция тушунчасини киритамиз.

Таъриф. *Агар* $(-\infty, +\infty)$ *да аниқланган узлуксиз* $f(x)$ *функция учун исталган* $\varepsilon > 0$ *га кўра шундай* T *сон топилсаки, узунлиги* T *га тенг ихтиёрий* $[a, a+T]$ $(|a| < \infty)$ *кесмада* $\varepsilon > 0$ *га мос ақалли битта* $\tau(\varepsilon)$ *«қарийб давр» мавжуд бўлиб, барча* $|x| < \infty$ *учун*

$$|f[x + \tau(\varepsilon)] - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ *қарийб даврий функция,* $\tau(\varepsilon)$ *эса унинг «қарийб даври» дейилади.*

Даврий функциялар қарийб даврий функцияларнинг хусусий ҳоли эканлиги тушунарлидир. Даврий функциялар устида арифметик амаллар бажариш мумкинлигини 2-§, 3° бандда кўрсатиб ўтган эдик. Лекин шуни эслатиб ўтиш зарурки, биз у ерда бу амалларни бир хил ёки ўлчовдош даврли иккита (ва бир нечта) функцияга нисбатан ўринли бўлишини кўрсатдик. Даврлари ўлчовдош бўлмаган функциялар устида бундай амаллар, умуман айтганда, ўринли бўлмаслиги ҳам мумкин.

Қарийб даврий функцияларнинг муҳим хоссаси шундаки, исталган иккита қарийб даврий функциянинг алгебраик йиғиндиси, кўпайтмаси ва бўлинмаси яна қарийб даврий функция бўлади. Бундан қарийб даврий функциялар тўплами арифметик амалларга нисбатан *ёпиқ тўплам* эканлиги келиб чиқади. Даврлари ўлчовдош бўлмаган даврий функциялар тўплами эса бундай хоссага эга эмас.

Қарийб даврий функцияларнинг юқорида айтилган асосий хоссасига бир мисол келтирамиз.

Мос равишда 2π ва 1 даврли $\sin x$ ва $\sin 2\pi x$ функциялар йиғиндисидан тузилган ушбу

$$f(x) = \sin x + \sin 2\pi x$$

функциянинг давриймаслиги равшан. Биз бу функциянинг қарийб даврий эканлигини кўрсатамиз.

Исботи. $\sin x$ ҳам, $\sin 2\pi x$ ҳам бутун ўқда текис узлуксиз. Шунинг учун исталган $\varepsilon > 0$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики,

$$|x - x'| < \delta \text{ дан } |\sin x - \sin x'| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ ва } |\sin 2\pi x - \sin 2\pi x'| < \frac{\varepsilon}{4}$$

келиб чиқади. Узунлиги 2π га тенг ихтиёрий $[\varepsilon, \varepsilon + 2\pi]$ кесма олайлик. Даврий функциянинг иккинчи таърифига мувофиқ, бу кесмада $\sin x$ нинг бирор T_1 даври, $\sin 2\pi x$ нинг эса бирор T_2 даври ётади (чунки $[\varepsilon, \varepsilon + 2\pi]$ кесма узунлиги 1 га тенг кесмани ўз ичига олади). Энди $\ldots -3\delta, -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$ сонларни қарайлик. Улар бутун сон ўқини тўлдиргани учун шундай n_1 ва n_2 бутун сонлар мавжудки, $n_1\delta < T_1 < n_1\delta + \delta$ ва $n_2\delta < T_2 < n_2\delta + \delta$ ёки $|T_1 - n_1\delta| < \delta$ ва $|T_2 - n_2\delta| < \delta$ бажарилади. Шундай қилиб,

$$|\sin(x + n_1\delta) - \sin x| \leqslant |\sin(x + n_1\delta) - \sin(x + T_1) +$$

$$+ \sin(x + T_1) - \sin x| < \frac{\varepsilon}{4},$$

чунки $|(x + n_1\delta) - (x - T_1)| = |n_1\delta - T_1| < \delta$ ва T_1 сон $\sin x$ нинг даври.

Шунга ўхшаш $|\sin 2\pi(x + n_2\delta) - \sin 2\pi x| < \frac{\varepsilon}{4}$. Агар $n_1 - n_2 = m$ десак:

$$|m| = |n_1 - n_2| = \frac{|n_1\delta - n_2\delta|}{\delta} \leqslant \frac{|\delta n_1 - T_1| + |T_1 - T_2| + |T_2 - n_2\delta|}{\delta}$$

ёки

$$|m| \leqslant \frac{2\pi}{T} + 2.$$

Бундан m фақат чекли сондаги $m_1, m_2, \ldots, m_p$ қийматларни қабул қилиши мумкинлиги кўриниб турибди. Бошқача қилиб айтганда, ҳар қандай $[\varepsilon - \delta, \varepsilon + 2\pi + \delta]$ кесмада фақат чекли сондаги n_{11}, $n_{12}, n_{22}, \ldots, n_{1p}, n_{2p}$ сонлар мавжуд бўлиб, улар $|n_{1i}\delta - T_1| < \delta$, $n_{2i}\delta - T_2| < \delta$ шартларни, демак,

$$|\sin(x + n_{1i}\delta) - \sin x| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |\sin 2\pi(x + n_{2i}\delta) - \sin 2\pi x| < \frac{\varepsilon}{4}$$

ва

$$n_{1i} - n_{2i} = m_i$$

шартларни қаноатлантиради. Энди $|n_{1i}\delta|$ сонларнинг энг каттасини l билан белгилаб, $f(x)$ нинг қарийб даврий эканлигини кўрсатамиз.

Қарийб даврий функциянинг таърифида топилиши талаб қилинган сон сифатида $T = 2\pi + 2l + 2\delta$ сонни олайлик. $[a, a + T]$ узунлиги T га тенг ихтиёрий кесма бўлсин. Юқорида исботланган тенгсизликларга кўра узунлиги $2\pi + 2\delta$ га тенг бўлган $[a + l, a + l + 2(\pi + \delta)]$ кесмада шундай $n'\delta$ ва $n''\delta$ сонлар мавжудки, улар учун

$$|\sin(x + n'\delta) - \sin x| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |\sin 2\pi(x + n''\delta) - \sin 2\pi x| < \frac{\varepsilon}{4}$$

шартлар бажарилади ва $(n' - n')\delta = m_i\delta = (n_{1i} - n_{2i})\delta$ (m_i нинг бирор қийматида) бўлади. Шундай қилиб,

$$n'\delta - n_{1i}\delta = n''\delta - n_{2i}\delta = \tau,$$

$$n'\delta \in [a + l, a + l + 2(\pi + \delta)] \text{ ва } |n_{1i}\delta| < l$$

бўлганлиги учун

$$(n' - n_{1i})\delta \in [a, a + 2(l + \pi + \delta)], \text{ яъни } \tau \in [a, a + T] \text{ ва}$$

$$|\sin(x + \tau) + \sin 2\pi(x + \tau) - \sin x - \sin 2\pi x| < \varepsilon$$

бўлади. Дарҳақиқат,

$$|\sin(x+\tau)+\sin 2\pi(x+\tau)-\sin x-\sin 2\pi x| \leqslant |\sin[x+(n'-n_{1i})\delta]-$$
$$-\sin x|+|\sin 2\pi[x+(n''-n_{2i})\delta]-\sin 2\pi x| \leqslant |\sin[(x-n_{1i}\delta)+$$
$$+n'\delta]-\sin(x-n_{1i}\delta)|+|\sin(x-n_{1i}\delta)-\sin[(x-n_{1i}\delta)+n_{1i}\delta]|+$$
$$+|\sin 2\pi[(x-n_{2i}\delta)+n''\delta]-\sin 2\pi(x-n_{2i}\delta)|+\sin 2\pi(x-n_{2i}\delta)-$$
$$-\sin 2\pi[(x-n_{2i}\delta)+n_{2i}\delta]| < \frac{\varepsilon}{4}\cdot 4 = \varepsilon.$$

Бундан исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай T сон топиладики, узунлиги T га тенг $[a, a+T]$ кесмада $\tau(\varepsilon)$ мавжуд бўлиб, барча $|x| < \infty$ учун

$$|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x)$ қарийб даврий функциядир.

Бу китобда қарийб даврий функциялар назариясини тўла ёритиш кўзда тутилмагани учун юқорида айтилган амалларнинг исботини келтирмаймиз. Қарийб даврий функциялар ҳақида мукаммалроқ маълумотга эга бўлишни истаганларга Б. М. Левитаннинг «Почти периодические функции» номли китобини тавсия этамиз.

3- §. Мураккаб гармоникалар

Юқорида (I.2)

$$f(x) = A\sin(\omega x+\varphi) \tag{I.2'}$$

кўринишдаги функцияни гармоника, ω ни эса унинг частотаси деган эдик. Бу хилдаги функциялар $T = \frac{2\pi}{\omega}$ даврлидир.

$$f_k(x) = A_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x+\varphi_k\right),\ (|x| < \infty)\ k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{I.8}$$

ларнинг ҳар бири эса мос равишда A_k амплитуда, $\omega_k = \frac{2\pi}{T}k$ частота ва φ_k фазага эга гармоникалардир. Албатта, $T_k = \frac{T}{k}$ сон k-гармониканинг даври бўлиб, 2- §, 2°-банддаги 4) хоссага асосан $T = kT_k$ сон барча $f_k(x)$ гармоникалар учун умумий давр бўлади. Бу гармоникалар ω_k частоталарининг ҳаммаси $\frac{2\pi}{T}$ сонга каррали бўлганлиги туфайли бундай гармоникалар *такрорий частотали гармоникалар* деб ҳам аталади. Равшанки, $f_k(x)$ гармоникалардан қуйидагича тузилган

$$S_n(x) = A_0+\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = A_0+\sum_{k=1}^{n} A_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}+\varphi_k\right) \tag{I.9}$$

йиғинди T даврли функция бўлади. Ҳақиқатан, $f_k(x)$ лар умумий T даврли бўлганлиги учун 2- §, 3°-банддаги 1) хоссага асосан $S_n(x)$ ҳам T даврлидир. Аммо $S_n(x)$ ўзининг $f_k(x)$ қўшилувчиларидан жиддий фарқ қилади. Буни тасаввур этиш учун қуйидаги хусусий ҳолни кўрайлик:

$$A = 0,\ A_1 = 1,\ A_2 = \frac{1}{2},\ A_3 = \frac{1}{4} \text{ ва барча } \varphi_k = 0 \text{ бўлсин,}$$

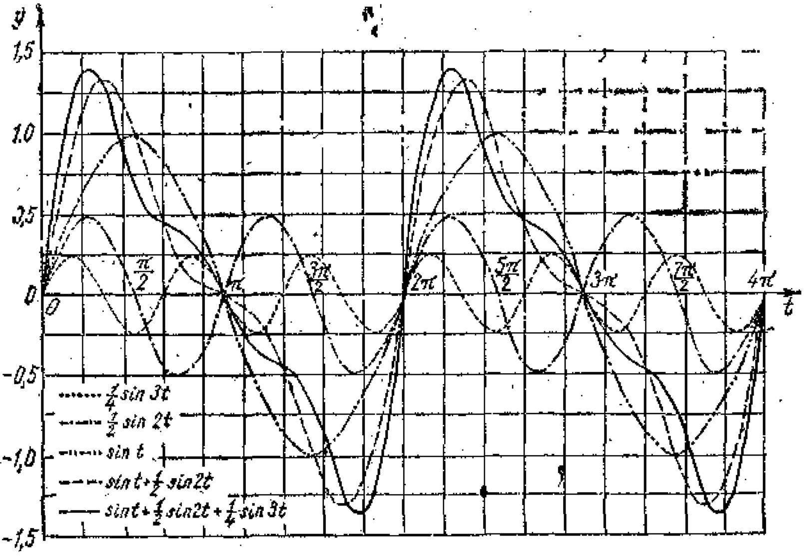
у ҳолда

$$f_k(x) = A_k \sin kx,\ k = 1,\ 2,\ 3 \tag{I.10}$$

ларнинг графиги билан уларнинг

$$S_3(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 3x \tag{I.11}$$

йиғиндиси графигини таққослаб кўрсак, йиғинди функция билан қўшилувчилар ўртасидаги фарқни равшан кўрамиз (14- чизма).



14- чизма.

Мана шу соддагина мисолдан кўриш мумкинки, n қанча катта бўлса, $S_n(x)$ ўз қўшилувчилари $f_k(x)$ лардан шунча жиддий фарқланади. Шубҳасиз, (I.9) кўринишдаги чекли йиғиндига қараганда, ушбу

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k) \tag{I.12}$$

ёки

$$S(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k),\ \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

чексиз йиғинди ҳар бир $A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k)$ дан жуда ҳам катта фарқланиши кутилади. Шунинг учун ҳам биз бу йиғиндини ҳар томонлама чуқур ўрганамиз. Бу масала фақат математика нуқтаи назаридан диққатга сазовор бўлиб қолмасдан, балки физика ва техникавий фанларда ҳам катта татбиқий аҳамиятга эгадир. Физикадан маълумки, $f_k(x) = A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k)$ ларнинг ҳар бири бирор тебранма ҳаракатни ифода этса, (I.9) ва (I.12) улардан анча мураккаб тебранма ҳаракат қонунини ифодалайди.

(I.12) даги $S(x)$ ни тенгликнинг ўнг томонидаги чексиз йиғиндининг қисқача символик ёзилиши деб қараш керак. Агар қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (I.12) тайин оралиқда аниқланган бирор $f(x)$ функцияни ифодалайди. Аввало $S(x)$, яъни (I.12) қаторнинг йиғиндиси мавжуд бўлса, у T даврли эканлигини кўрсатайлик. Дарҳақиқат,

$$S(x+T) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin[\omega_k(x+T) + \varphi_k] = A_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left[\frac{2\pi k}{T}(x+T) + \varphi_k\right] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k),$$

яъни

$$S(x+T) = S(x).$$

Агар ушбу

$$A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k) = A_k \cos\varphi_k \sin\omega_k x + A_k \sin\varphi_k \cos\omega_k x$$

тенгликда

$$A_k \sin\varphi_k = a_k, \quad A_k \cos\varphi_k = b_k \quad \text{ва} \quad A_0 = \frac{a_0}{2}$$

деб олсак, у ҳолда (I.9) ва (I.12) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos\omega_k x + b_k \sin\omega_k x]; \qquad (I.9')$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos\omega_k x + b_k \sin\omega_k x]. \qquad (I.12')$$

$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ эканини эътиборга олиб, $T = 2l$ алмаштиришни киритсак:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos\frac{k\pi}{l} x + b_k \sin\frac{k\pi}{l} x\right] \qquad (I.13)$$

ва

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right]. \qquad (I.14)$$

Юқорида айтганимиздек, бу икки тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндиларнинг ҳар бири $2l$ даврлидир. Равшанки, (I.14) қатор $f_k(x) = a_k\cos\omega_k x + b_k\sin\omega_k x$ кўринишдаги функциялардан тузилган. (I.13) тенглик билан ифодаланувчи $S_n(x)$ эса ўша қаторнинг хусусий йиғиндисидир. Шунинг учун ҳам (I.14) *тригонометрик қатор* дейилади.

Агар (I.14) қатор x нинг барча $x \in [a, b]$ қийматларида бирор $f(x)$ функцияга тенг [яъни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$] бўлса, у ҳолда уни $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқда *тригонометрик қатори* ёки *қаторга ёйилмаси* деймиз. $[a, b]$ оралиқ қаторнинг *яқинлашиш оралиғи* дейилади.

Энди Фурье қаторлари назариясининг асосий масаласини таърифлашга ўтамиз.

4-§. Берилган функцияни Фурье тригонометрик қаторига ёйиш

1°. Асосий масала. Юқорида айтганимиздек, Фурье қаторлари назариясида ҳам функционал қаторлар умумий назариясидагига ўхшаш қуйидаги иккита масала ҳам назарий, ҳам татбиқий аҳамиятга эгадир:

1) берилган $f(x)$ функцияни

$$a_k\cos\omega_k x + b_k\sin\omega_k x, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

кўринишдаги даврий функциялардан тузилган (I.14) чексиз йиғинди қатор орқали ифодалаш, яъни уни (I.14) кўринишдаги тригонометрик қаторга ёйиш;

2) агар (I.14) қатор берилган бўлса, у x нинг қайси оралиқдаги қийматлари учун қандай $f(x)$ функцияга яқинлашади ёки қандай функциянинг ёйилмаси бўлади?

Олдин бу масалаларнинг биринчиси билан шуғулланамиз. Юқорида, агар (I.14) қатор йиғиндиси мавжуд бўлса, у $T = 2l$ даврли эканлигини кўрдик. Демак, бутун Ox ўқда бундай қаторга ёйилувчи функция $2l$ даврли бўлиши керак*. Қўйилган масалани ҳал қилишга киришишдан олдин келгусида катта аҳамиятга эга бўлган тригонометрик функциялардан синус ва косинуслар системасининг ортогоналлик хоссаси билан танишиб ўтамиз.

2°. Асосий тригонометрик система ва унинг ортогоналлиги. Равшанки, (I.14) қатор ҳадлари қуйидаги функциялардан тузилган:

---

*Сўнгги параграфлардан бирида давриймас функцияларни ҳам бундай қаторга ёйиш усулини кўрсатамиз.

$$\frac{1}{2}, \cos\omega_1 x, \sin\omega_1 x, \cos\omega_2 x, \sin\ \omega_2 x \dots, \cos\omega_k x,\ \sin\omega_k x, \dots, \quad (I.15)$$

бунда $\omega_k = \frac{\pi k}{l}$. Шунинг учун бу кетма-кетликни *асосий тригонометрик система* деб атаймиз.

(I.15) система $[0, 2l]$ ёки $[-l, l]$ да ортогонал* системадир, яъни унинг ўзаро тенг бўлмаган исталган иккита ҳади кўпайтмасидан $[0, 2l]$ ёки $[-l, l]$ оралиқда олинган интеграл нолга тенг:

$$\text{а)} \int_{-l}^{l} \frac{1}{2} \cos\omega_k x\, dx = 0 \text{ ва } \int_{-l}^{l} \frac{1}{2} \sin\omega_k x\, dx = 0; \quad (I.16)$$

$$\text{б)}\ i \neq j \text{ да } \int_{-l}^{l} \cos\omega_i x \cos\omega_j x\, dx = \int_{-l}^{l} \sin\omega_i x \sin\omega_j x\, dx = 0; \quad (I.17)$$

$$\text{в)}\ \forall\ i, j \text{ учун } \int_{-l}^{l} \sin\omega_i x \cos\omega_j x\, dx = 0. \quad (I.18)$$

Бу тенгликларнинг ўринли эканлигини кўрсатишдан олдин даврий функцияларга тааллуқли ушбу леммани исбот қиламиз:

Лемма. *Агар T даврли $f(x)$ функция исталган чекли интервалда интегралланувчи бўлса, у ҳолда исталган $|a| < \infty$ учун*

$$\int_{a}^{T+a} f(x)\, dx = \int_{0}^{T} f(x)\, dx. \quad (I.19)$$

Исботи. Аниқ интеграл хоссасига кўра:

$$\int_{a}^{T+a} f(x)\, dx = \int_{a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{T} f(x)\, dx + \int_{T}^{T+a} f(x)\, dx.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги учинчи интегралда $x = y + T$ алмаштириш киритсак, у ҳолда $\int_{T}^{a+T} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(y+T)\, dy = \int_{0}^{a} f(y)\ dy$ бўлади, чунки $f(y+T) = f(y)$. Бундан ташқари, $\int_{a}^{0} f(x)\, dx = -\int_{0}^{a} f(x)\, dx$

---

* (I.15) система ортогонал функциялар системасининг хусусий бир ҳоли бўлиб, умумийроқ маънодаги ортогонал системалар билан III бобда танишамиз.

ва $\int_0^a f(y)\,dy = \int_0^a f(x)\,dx$ га асосан $\int_a^0 f(x)\,dx + \int_T^{T+a} f(x)\,dx = 0$ бўлади.

Бундан

$$\int_a^{T+a} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Хусусий ҳолда $T = 2\pi$ бўлса,

$$\int_a^{2\pi+a} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx. \tag{1.19'}$$

Энди тригонометриянинг ушбу

$$\cos\omega_i x \cos\omega_j x = \frac{1}{2}\Big[\cos(\omega_i + \omega_j)x + \cos(\omega_i - \omega_j)x\Big],$$

$$\sin\omega_i x \sin\omega_j x = \frac{1}{2}\Big[\cos(\omega_i + \omega_j)x - \cos(\omega_i - \omega_j)x\Big],$$

$$\sin\omega_i x \cos\omega_j x = \frac{1}{2}\Big[\sin(\omega_i + \omega_j)x + \sin(\omega_i - \omega_j)x\Big]$$

формулаларини ва леммани эътиборга олинса, а) , б) , в) тенгликларнинг ўринли эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Дарҳақиқат, $a = -l$ ва $T = 2l$ бўлса, (I.19) дан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\text{а)} \int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\cos\omega_i x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\omega_i}\int_{-l}^{l}\cos\omega_i x\,d(\omega_i x) = \frac{1}{2\omega_i}\sin\omega_i x\Big|_{-l}^{l}\frac{1}{\omega}\sin\omega_i l = 0,$$

чунки $\omega_i = \frac{i\pi}{l}$ ва $\sin i\pi = 0$, $(i = 1, 2, \ldots)$;

$$\text{б)}\ J = \int_{-l}^{l} \cos\omega_i x \cos\omega_i x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[\cos(\omega_i+\omega_j)x + \cos(\omega_i-\omega_j)x]\,dx,$$

яъни $\omega_i \neq \omega_j$ лар учун

$$J = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\omega_i+\omega_j)x}{\omega_i+\omega_j}\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{\sin(\omega_i-\omega_j)x}{\omega_i-\omega_j}\Bigg|_{-l}^{l}\right] = \frac{\sin(\omega_i+\omega_j)l}{\omega_i+\omega_j} +$$

$+ \frac{\sin(\omega_i-\omega_j)l}{\omega_i-\omega_j}$, бундан $i \neq j$ учун

$$\int_{-l}^{l} \cos\omega_i x \cos\omega_j x\,dx = \frac{l}{\pi}\left[\frac{\sin(i+j)\pi}{i+j} + \frac{\sin(i-j)\pi}{i-j}\right].$$

$i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$ лар учун

$$\frac{\sin(i+j)\pi}{i+j} + \frac{\sin(i-j)\pi}{i-j} = 0$$

бўлганлиги сабабли бундай i ва j да $\int\limits_{-l}^{l} \cos\omega_i x \cos\omega_j x\,dx \equiv 0.$

Шунга ўхшаш барча $i = j$ учун

$$\int\limits_{-l}^{l} \sin\omega_i x \sin\omega_j x dx = 0$$

бўлади;

в) исталган j, $i = 1, 2, 3, \ldots$ да

$$\int\limits_{-l}^{l} \sin\omega_i x \cos\omega_j x\,dx = 0,$$

ҳақиқатан,

$$J_1 = \int\limits_{-l}^{l} \sin\omega_i x \cos\omega_j x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\Big[\sin(\omega_i + \omega_j)x + \sin(\omega_i - \omega_j)x\Big]dx$$

дан $i = j$ бўлганда

$$J_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(\omega_i + \omega_j)x}{\omega_i + \omega_j}\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{\cos(\omega_i - \omega_j)x}{\omega_i - \omega_j}\Bigg|_{-l}^{l}\right] = 0;$$

$\omega_i = \omega_j$ бўлса, у ҳолда

$$J_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l} \sin 2\omega_i x\,dx = -\frac{1}{4\omega_i}\cos 2\omega_i x\Bigg|_{-l}^{l} = 0.$$

5-§, 2° банддаги леммага кўра а), б), в) интегралларнинг $[-\pi, \pi]$ да ҳам нолга тенг эканлигини айтиб ўтамиз. $l = \pi$ бўлганда юқоридаги (I.16), (I.17) ва (I.18) интеграллар қуйидагича ёзилади

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos kx\,dx = 0; \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin kx\,dx = 0, \qquad (I.16)$$

барча $i \neq j$ учун

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ix \cos jx dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ix \sin jx dx = 0, \ (i, j = 1, 2, \ldots) \qquad (I.17')$$

барча i, j учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ix \sin jx dx = 0. \qquad (I.18')$$

Бу тенгликлар интеграл белгиси остидаги функциялар 2π даврли бўлганлиги туфайли $[0, 2\pi]$ интервал учун ҳам ўринлидир. Бундан ташқари,

$$\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{l}{2}, \int_{-l}^{l}\cos^2 \omega_i x dx = \int_{-l}^{l}\sin^2 \omega_i x dx = l \qquad (I.20)$$

эканлигини эслатиб ўтамиз.

3°. **2π даврли $f(x)$ функциянинг Фурье тригонометрик қатори ва қатор коэффициентларини ҳисоблаш формулалари.** Агар бутун ҳақиқий ўқда аниқланган ва интегралланувчи $f(x)$ функция 2π даврли бўлиб, барча x лар учун ушбу

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (I.21)$$

қатор $[0,2\pi]$ кесмада $f(x)$ га текис ёки ўртача яқинлашувчи*, яъни $\vee\ x \in [0, 2\pi]$ учун

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (I.22)$$

бўлса, у ҳолда бу қаторни исталган оралиқда, жумладан $[0,2\pi]$ да ҳадлаб интеграллаш мумкин, чунончи

$$\int_{1}^{2\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]dx =$$

$$= a_0\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_0^{2\pi}\cos kx dx + b_k\int_0^{2\pi}\sin kx dx\right].$$

Бундан

$$\int_0^{2\pi}\cos kx dx = 0 \text{ ва} \int_0^{2\pi}\sin kx dx = 0, k = 1, \quad 2, \quad \ldots$$

бўлганлигидан

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \qquad (I.23)$$

формулага эга бўламиз.

---

* Ўртача яқинлашиш билан II бобда шуғулланамиз.

(I.21) қатор ҳадларининг ҳар бирини $\cos nx$ ва $\sin nx$ га кўпайтирсак, бундан ҳосил бўлган янги қаторлар текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссасига асосан мос равишда $f(x)\cos nx$ ва $f(x)\sin nx$ функцияларга текис ёки ўртача яқинлашади. Демак, бу қаторларни ҳам $]0, 2\pi[$ да ҳадлаб интеграллаш мумкин, яъни

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right]\cos nx\,dx.$$

Бундан

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\, f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos n\,xdx + \sum_{k=1}^{\infty}[\,a_k\int_0^{2\pi}\cos kx\cos nxdx +$$

$$+ b_k\int_0^{2\pi}\sin kx\cos nxdx].$$

(I.16), (I.17) ва (I.18) тенгликларга асосан бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграллардан фақат $\cos kx\cos nx$ кўпайтманинг $k=n$ бўлгандаги интегралигина нолдан фарқли бўлиб, қолган барча интеграллар нолга тенгдир, яъни $k=n$ учун $a_n\int_0^{2\pi}\cos^2 nxdx = \int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx$.

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 nxdx = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi.$$

Бундан a_n лар учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx. \tag{I.24}$$

Худди шунга ўхшаш

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \int_0^{2\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right]\sin\ nxdx$$

дан $k=n$ учун

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \tag{I.25}$$

формула ҳосил бўлади. Демак, агар $f(x)$ функция юқорида фараз қилганимиздек бўлса, унинг (I.21) қатори коэффициентлари (I.23), (I.24), (I.25) формулалар билан аниқланар экан. Бу формулалар *Эйлер*—Фурье формулалари* дейилиб, коэффициентлари шу формулалар билан ҳисобланган тригонометрик қатор $f(x)$ функциянинг *Фурье тригонометрик қатори* дейилади.

Эйлер — Фурье формулаларини келтириб чиқаришда (I.21) қаторнинг $f(x)$ га текис ёки ўртача яқинлашувчи деб фараз қилдик. Китобхонга қаторларнинг умумий назариясидан маълумки, ҳар қандай интегралланувчи функция учун тузилган (I.21) кўринишдаги функционал қатор текис ёки ўртача яқинлашувчи бўлавермайди. Шу туфайли қандай функциялар учун Фурье қатори берилган функцияга бу хилда яқинлашади, яъни (I.21) тригонометрик қаторни $[0, 2\pi]$ да ҳадлаб интеграллаш мумкин деган савол туғилиши табиийдир. Аммо биз олдин бундан соддароқ, яъни коэффициентлари юқорида чиқарилган формулалар билан аниқланувчи тригонометрик қаторнинг $f(x)$ функцияга яқинлашиши билан боғлиқ бўлган масалани ҳал қилишимиз керак. Шундан сўнг у қаторнинг текис ёки ўртача яқинлашиши ва бошқа хоссаларини текширамиз.

Берилган функцияга кўра унинг Фурье қаторини тузишга доир бир нечта мисоллар келтирамиз. Бирор $f(x)$ функциянинг (I.14) кўринишдаги Фурье тригонометрик қаторини тузиш учун, аввало, унинг коэффициентларини аниқлаш зарур. Эйлер — Фурье формулаларидан равшанки, бу коэффициентларни ҳисоблаш учун берилган $f(x)$ функция $[0, 2\pi]$ да интегралланувчи бўлиши етарлидир. Бошқача айтганда $[0, 2\pi]$ кесмада интегралланувчи ҳар қандай $f(x)$ функция воситасида (I.14) кўринишдаги тригонометрик қатор тузиш мумкин. Бу нарса қуйидаги мисолларда ойдинлашади:

1) $[0, 2\pi]$ да $f(x) = x^2$ функцияга кўра Фурье тригонометрик қатори тузилсин.

Ечилиши. (I.23), (I.24) ва (I.25) формулалардан фойдаланиб, барча коэффициентларни аниқлаймиз:

$$\text{а) } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x_0 \cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2x \sin nxdx\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x \sin nxdx = \frac{2}{\pi n}\left[x\,\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos nxdx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[\frac{2\pi}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_0^{2\pi}\right] = \frac{4}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

---

* Леонард Эйлер (1707 — 1783) — асли швейцариялик бўлиб, онгли ҳаётининг энг кўп даврини Россияда ўтказган, Петербург Фанлар академиясининг аъзоси бўлган.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\cos nx \Big|_0^{2\pi}\right] = -\frac{4\pi}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Коэффициентларнинг топилган қийматларини (I.14) га қўйсак, ушбу

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \pi\frac{\sin nx}{n}\right)$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бунда $x = 0$ десак, ушбу

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

сонли қатор ҳосил бўлади. Бу қатор яқинлашувчи ва нолдан фарқли йиғиндига эга. Иккинчи томондан, $f(0) = 0$. Бундан кўринадики:

$$f(0) \neq \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Агар $x = \pi$ десак, $f(\pi) = \pi^2$ бўлиб, қатор

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

кўринишга эга бўлади. Ниҳоят, $x = 2\pi$ десак, $f(2\pi) = 4\pi^2$ бўлиб, қатор эса яна

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

кўринишга келади, чунки қаторнинг барча ҳадлари 2π даврлидир;

2) агар $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ функция $[0, 2\pi]$ да аниқланган бўлса, бу функция воситасида Фурье тригонометрик қатори тузилсин.

Бу қатор коэффициентлари:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}dx = -\frac{(\pi - x)^2}{4\pi}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi-x}{2}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx = -\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = 0, \text{ яъни } a_n = 0\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx dx = -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi-x}{2}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}; \quad b_n = \frac{1}{n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Қатор эса қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Бундан: а) агар $x = 0$ деб олсак, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ бўлиб, қатор нолга айланади, чунки унинг барча ҳадлари ноллардан иборат. Демак, $f(0) \neq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 0}{n} = 0$, яъни $x = 0$ да қатор $f(x)$ га яқинлашмайди;

б) агар $x = \pi$ бўлса, $f(x) = 0$ ва қатор ҳам нолга айланади, яъни $f(\pi) = 0$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi}{n} = 0$, яъни $s(\pi) = 0$. Демак, $f(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi}{n}$, яъни $x = \pi$ да қатор $f(x)$ га яқинлашади;

в) $x = 2\pi$ да $f(2\pi) = -\frac{\pi}{2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi}{n} = 0$, яъни $f(2\pi) \neq$ $\neq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi}{n}$, демак, тузилган қатор $x = 2\pi$ да ҳам $f(x)$ га яқинлашмайди.

Юқоридаги икки мисолда кўрдикки, x нинг функциянинг аниқланиш оралиғига тегишли исталган қийматида қатор йиғиндиси билан $f(x)$ функция қиймати бир-бирига тенг бўлавермайди. Бу нарса китобхонларга даражали қаторлар назариясидан ҳам маълум. Қаторнинг берилган функцияга яқинлашадиган оралиғига тегишли x лар учунгина қатор йиғиндиси билан $f(x)$ нинг қиймати ўзаро тенг бўлади. Шунинг учун қаторнинг $f(x)$ га яқинлашиш оралиғини аниқламасдан туриб, функция билан қатор орасига тенглик белгисини қўйиш мутлақо нотўғри. Ана шу сабабли ҳозирча биз қатор билан функция орасига мослик ($\sim$) белгисини қўямиз, яъни ушбу кўринишдаги ёзувга эга бўламиз:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{I.26}$$

Биз ечган мисолларни қуйидагича ёзиш мумкин: $x \in [0, 2\pi]$ учун

$$1)\ x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3} - \pi\frac{\sin nx}{n}\right),$$

$$2)\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}. \tag{I.27}$$

$f(x)$ функция учун тузилган тригонометрик қаторнинг ўша функцияга яқинлашишига доир масалаларни II бобда ўрганамиз. Бу бандда берилган функцияга асосан унга мос Фурье тригонометрик қаторини тузишни расмий равишда кўрсатдик, холос.

4°. **Эйлер — Фурье формулаларининг бошқача кўриниши.** Даврий функциянинг Фурье қаторини текширишдан олдин Эйлер — Фурье формулаларини бошқача кўринишга келтирамиз.

Агар 5-§, 2°-бандда исбот этилган 5) хосса ёки (I.19) да $a = -\pi$ деб олсак, 2π даврли ва $[0, 2\pi]$ да интегралланувчи функциянинг Фурье коэффициентларини ҳисоблаш формулалари қуйидаги кўринишга эга бўлади: маълумки,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

бундан ва (I.19) га асосан $a = -\pi$ бўлса, $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ бўлади, у ҳолда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{I.28}$$

Худди шунга ўхшаш

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

дан

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \tag{I.29}$$

ва

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \qquad (I.30)$$

Демак, 2π даврли ва $[0, 2\pi]$ да интегралланувчи $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентларини узунлиги 2π га тенг ихтиёрий интервалда, масалан, $[-\pi, \pi]$ да ҳисоблаш мумкин. Бундан ташқари, юқорида келтирилган формулалар воситасида $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи функцияларнинг Фурье коэффициентларини ҳам ҳисоблай оламиз.

Энди $2l$ даврли функцияларнинг тригонометрик қаторларини кўрайлик.

5°. $2l$ даврли функциянинг Фурье тригонометрик қатори ва бу қаторнинг Фурье коэффициентлари. Бундан олдинги 4°- бандда келтириб чиқарилган (I.28), (I.29) ва (I.30) формулалардан ихтиёрий $2l$ даврлар $f(x)$ функция тригонометрик қаторининг Фурье коэффициентларини ҳисоблаш формулаларини осонгина келтириб чиқарамиз. Агар x ўзгарувчини $y = \frac{x}{l}\pi$ ўзгарувчи билан алмаштирсак,

$$f(x) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = \varphi(y).$$

функцияга эга бўламиз. Янги $\varphi(y)$ функция 2π даврли бўлади, у ҳолда юқоридаги формулалар воситасида $\varphi(y)$ нинг (яъни $f(x)$ нинг) коэффициентларини қуйидагича бирин-кетин ҳисоблаш мумкин:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(y)\, dy = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx,$$

бундан

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx. \qquad (I.28')$$

Шунингдек,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \qquad (I.29')$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \qquad (I.30')$$

Бу ҳолда ҳам мос Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун $f(x)$ функция $[-l, l]$ ёки $[0, 2l]$ да интегралланувчи бўлиши етарлидир.

Бундан сўнг коэффициентлари (I.28′), (I.29′), (I.30′) формулалар билан аниқланган

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right] \qquad (I.31)$$

кўринишдаги қаторни $2l$ даврли $f(x)$ *функциянинг Фурье тригонометрик қатори* деймиз. 4°- бандда айтганимиздек, бу қаторнинг $f(x)$ функцияга яқинлашишини аниқламасдан туриб, функция билан қатор орасида тенглик белгисини қўйиш мумкин эмас. Шунинг учун бу ерда ҳам мослик белгисини (~) қўямиз, яъни

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right]. \qquad (I.31')$$

Берилган $f(x)$ функция учун тузилган қаторнинг ҳадлари $2l$ даврли функциялардан иборат бўлганлиги туфайли бу қатор йиғиндиси ҳам $2l$ даврли функция бўлиши равшан.

$2l$ даврли ва $[0,\ 2l]$ ёки $[-l,\ l]$ да интегралланувчи функцияларнинг Фурье тригонометрик қаторларини тузишга доир иккита мисол қарайлик.

1) $f(x)=x-[x]$ функциянинг Фурье қатори тузилсин.

Ечилиши. 11- чизмадан маълумки, бу функция $2l=1$, $\left(l=\frac{1}{2}\right)$ даврли бўлиб, у $[0,\ 1]$ оралиқда $f(x)=x$ функциядан иборат. У ҳолда

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

формулаларга асосан тегишли коэффициентларни аниқлайлик:

$$a_0=2\int_0^1 x\,dx=\int_0^1 2x\,dx=x^2\Big|_0^1=1,\quad a_0=1;$$

$$a_n=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\,dx=2\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{2n\pi}\int_0^1\sin 2n\pi x\,dx\right],$$

$$a_n=-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin 2n\pi x\,dx=\frac{1}{2(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\Big|_0^1=0;$$

$$a_n = 0, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

$$b_n = 2\int_0^1 x \sin 2n\pi x dx = 2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x\Big|_0^1 + \frac{\sin 2n\pi x}{(2n\pi)^2}\Big|_0^1\right],$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}.$$

Демак, [0, 1] да

$$x - [x] \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}.$$

Равшанки, $f(0) = 0$, $S(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi 0}{n} = \frac{1}{2}$, яъни $x = 0$ да функция қиймати билан қатор йиғиндиси ўзаро тенг эмас, бу $x = 0$ да қатор $f(x) = x - [x]$ функцияга яқинлашмайди деган сўздир.

$$f(1) = 0,\ S(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi}{n} = \frac{1}{2},$$

яъни $f(1) \neq S(1)$. Демак, $x = 1$ да ҳам қатор $f(x)$ га яқинлашмайди.

$x = \frac{1}{2}$ да эса $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ва $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi}{n} = \frac{1}{2}$, яъни $f\left(\frac{1}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right)$. Демак, $x = \frac{1}{2}$ нуқтада қатор функцияга яқинлашар экан;

2) $f(x) = e^{ax}$ функциянинг $[-h, h]$ да Фурье қатори тузилсин. Бу функция $[-h, h]$ да интегралланувчи бўлганлиги учун унинг коэффициентларини юқорида келтирилган формулалар воситасида ҳисоблаймиз:

$$a_0 = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} e^{ax}dx = \frac{1}{h}\frac{e^{ax}}{a}\Big|_{-h}^{h} = \frac{2}{ah}\frac{e^{ah} - e^{-ah}}{2} =$$

$$= \frac{2}{ah}\operatorname{sh} ah, \quad a_0 = \frac{2}{ah}\operatorname{sh} ah.$$

$$a_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} e^{ax}\cos\frac{n\pi x}{h}dx; \quad \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)}{a^2 + b^2}$$

дан

$$a_n = \frac{1}{h}\left[\frac{e^{ax}\left(a\cos\frac{n\pi x}{h} - \frac{n\pi}{h}\sin\frac{n\pi x}{h}\right.}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}\right]\Bigg|_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{e^{ah}h^2}{(ah)^2 + (h\pi)^2}\left(a\cos n\pi - \frac{n\pi}{h}\sin n\pi\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{e^{-ah}h^2}{(ha)^2 + (n\pi)^2}\left(a\cos n\pi + \frac{n\pi}{h}\sin n\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{ah\,(e^{ah} - e^{-ah})\cos n\pi}{(ah)^2 + (n\pi)^2}, \quad a_n = \frac{2ah\,(-1)^n}{(ah)^2 + (n\pi)^2}\,\mathrm{sh}\,ah;$$

$$b_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} e^{ax}\sin\frac{n\pi x}{h}\,dx; \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}\,(a\sin bx + b\cos bx)}{a^2 + b^2}$$

дан

$$b_n = \frac{he^{ax}}{(ah)^2 + (n\pi)^2}\left(a\sin\frac{n\pi x}{h} + \frac{n\pi}{h}\cos\frac{n\pi x}{h}\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{h}{(ah)^2 + (n\pi)^2};$$

$$[2a\sin n\pi\,(e^{ah} - e^{-ah}) + \frac{n\pi}{h}\cos n\pi\cdot(e^{ah} - e^{-ah})] =$$

$$= \frac{(-1)^n n\pi}{(ah)^2 + (n\pi)^2}\,(e^{ah} - e^{-ah})$$

ёки

$$b_n = \frac{2\,(-1)^n n\pi}{(ah)^2 + (n\pi)^2}\,\mathrm{sh}\,ah.$$

Демак, $[-h,\ h]$ да e^{ax} функцияга ушбу қатор мос келади:

$$e^{ax} \sim 2\,\mathrm{sh}\,ah\left\{\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(ah)^2 + (n\pi)^2}\left[ah\cos\frac{n\pi x}{h} - n\pi\sin\frac{n\pi x}{h}\right]\right\}.$$

II бобда бу икки қаторнинг ҳар бири мос функцияларнинг барча узлуксизлик нуқталарида ўша функцияларга яқинлашишини кўрамиз.

Фурье қаторлари назариясида катта аҳамиятга эга бўлган жуфт ва тоқ функциялар билан танишиб ўтамиз.

5- §. Жуфт ва тоқ функциялар. Уларнинг Фурье қаторлари

1°. Таъриф. *Агар Ох ўқда ёки координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган ихтиёрий* $[-a,\ a]$ *кесмада аниқланган* $f(x)$ *функция ўзининг аниқланиш соҳасига тегишли исталган* x *учун ушбу*

$$f(x) = f(-x) \qquad (1.32)$$

тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда $f(x)$ *жуфт функция дейилади.*

Масалан,

$$f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=|x|,\ f_3(x)=\cos x,\ f_4(x)=e^{-|x|}$$

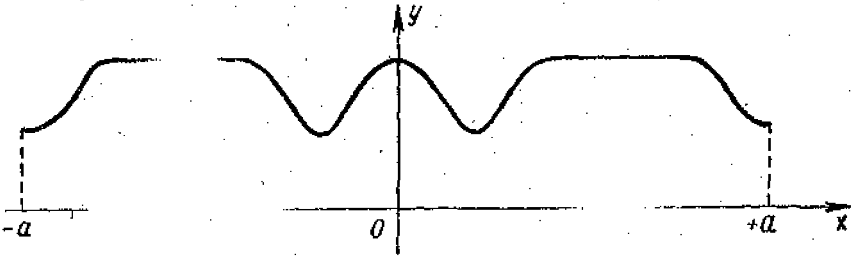
функцияларнинг ҳар бири бутун абсциссалар ўқида жуфт, $|\operatorname{tg} x|$, $\sec x$ функцияларнинг ҳар бири $x=\pm\frac{2k+1}{2}\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$ нуқталарда узилишга эга бўлган жуфт функция, $f(x)=\ln|x|$ эса $x=0$ да узилишга эга бўлган жуфт функциядир.

2°. **Таъриф.** *Агар Ox ўқда ёки координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган ихтиёрий $[-a, +a]$ да аниқланган $f(x)$ функция ўзининг аниқланиш оралиғига тегишли исталган x учун*

$$f(x)=-f(-x) \tag{I.33}$$

тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда $f(x)$ тоқ функция дейилади.

Масалан, $f(x)=x$, $\varphi(x)=x^3$, $\psi(x)=\sin x$ нинг ҳар бири бутун абсциссалар ўқида узлуксиз тоқ функция, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{cosec} x$ нинг ҳар бири $x=n\pi$, $n=1, 2, \ldots$ да узилишга эга бўлган тоқ функциядир; $f(x)=\frac{1}{x}$ функция эса $x=0$ да узилишга эга бўлган тоқ функциядир.

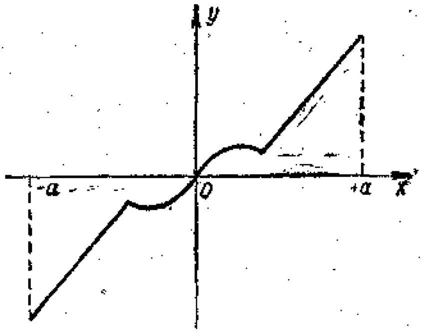


15- чизма.

Ихтиёрий $(-a, a)$ да (a чекли ёки чексиз бўлиши мумкин) айнан ўзгармас, яъни $f(x)\equiv c$ функция узлуксиз жуфт функция бўлади.

Шундай қилиб, *жуфт* (*тоқ*) *функциялар ўзларининг аниқланиш оралиқларида узлуксиз ҳам, узилишга эга бўлишлари ҳам мумкин.*

Жуфт ва тоқ функцияларнинг таърифидан равшанки, жуфт функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик, тоқ функциянинг графиги эса координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади (15, 16- чизмалар).



16- чизма.

Бунда ҳам чап томондаги интегрални иккита интегралга ажратиб, $\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx$ да $x = -t$ алмаштириш бажарсак,

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{-a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(-t)\,dt = -\int\limits_{0}^{a} f(t)\,dt;$$

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$$

бўлади, у ҳолда

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

бўлади. Демак,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

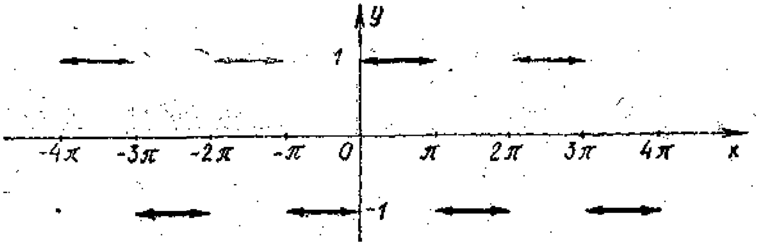
Мисоллар. Қуйида берилган функцияларнинг жуфт-тоқлигини текшириб, уларнинг графиклари ясалсин.

1) $f_1(x) = \mathrm{sign}\,(\sin x)$.

Ечилиши. Маълумки,

$$f_1(x) = \begin{cases} +1, & 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ -1, & (2k-1)\pi < x < 2k\pi, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

у ҳолда $f(x) = -f(-x)$ бўлиб, функция барча $x = \pm k\pi$ нуқталарда узилишга эга Демак, бу функция $(-\infty, +\infty)$ да чексиз кўп узилиш нуқталарига эга бўлган тоқ функциядир. Унинг графиги 17- чизмада келтирилган.



17- чизма.

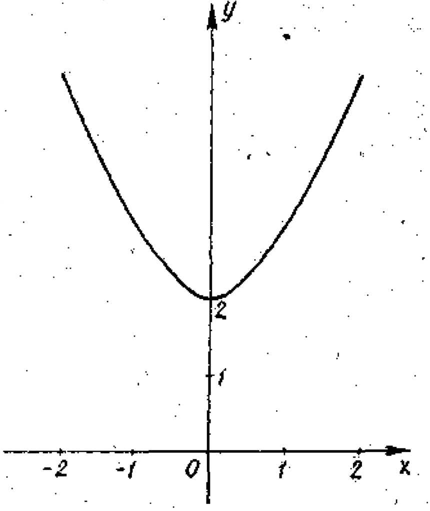
2) $f_2(x) = 1 + 2^{|x|}$.

Ечилиши. Бу функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $f_2(x) = f_2(-x)$ чунки $2^{|x|} = 2^{|-x|}$. Демак, $f_2(x)$ жуфт функциядир, унинг графиги 18- чизмада келтирилган.

3) $f_3(x) = 1 + \sin x$.

Ечилиши. $f_3(x) \neq f_3(-x)$. Ҳақиқатан, $1 + \sin x \neq 1 + \sin(-x)$, ундан ташқари, $f_3(x) \neq -f_3(-x)$, яъни $1 + \sin x \neq -[1 + \sin(-x)] = -1 + \sin x$. Демак, бу функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас.

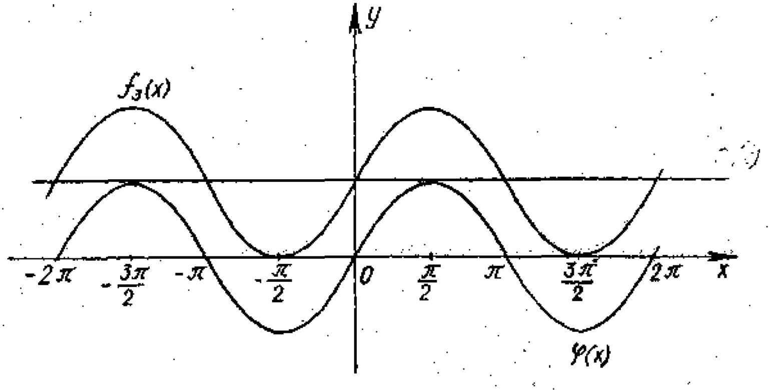
4) $f_3(x) = 1 + \sin x$ функция воситасида жуфт ва тоқ функциялар тузилсин. Берилган функция ва ундан тузилган функцияларнинг графиклари ясалсин.



18- чизма.

Ечилиши. а) $f(x) = \frac{f_3(x) + f_3(-x)}{2} \equiv 1$, яъни $x \in (-\infty, \infty)$ учун $f(x) \equiv 1$. Демак, $f(x)$ $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган жуфт ва узлуксиз функциядир;

б) $\varphi(x) = \frac{f_3(x) - f_3(-x)}{2} = \frac{1 + \sin x - (1 - \sin x)}{2} = \sin x$, яъни $\varphi(x) = \sin x$. Демак, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ бўлиб, $\varphi(x)$ тоқ функциядир (19- чизма).



19- чизма.

Бу функцияларнинг ҳар бири даврий: $f_3(x) = 1 + \sin x$ ва $\varphi(x) = \sin x$ функциялар 2π даврли, $f(x) \equiv 1$ эса аниқмас даврлидир, яъни бу функция учун исталган ҳақиқий сон давр бўлади.

4°. Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье тригонометрик қаторлари. Бу хилдаги (жуфт ва тоқ) функцияларнинг хоссаларини эътиборга олсак, уларнинг Фурье қаторлари ихтиёрий функцияларнинг Фурье қаторларидан анча содда бўлишини кўрамиз. Чунончи жуфт функциялар қаторларининг ҳадлари фақат косинуслардан, тоқ функциялар қаторларининг ҳадлари эса фақат синуслардан иборат бўлади.

Биринчи навбатда жуфт функциялар қаторини тузиб кўрамиз. $[-l, l]$ да аниқланган $f(x)$ функция жуфт ва интегралланувчи деб фараз қилайлик. У вақтда (I. 28) формула ва жуфт функциядан олинган интеграл хоссасига асосан:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx \quad \text{ёки} \quad a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx. \qquad (I.36)$$

Бундан ташқари, $[-l, l]$ кесмада $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ ва $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ функциялар мос равишда барча x ва $n = 1, 2, \ldots$ учун жуфт ва тоқ бўлганликлари сабабли (I. 29) ва (I. 30) формулалардан:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n=1, 2, \ldots). \qquad (I.37)$$

Шунингдек, $\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$ бўлганлигидан барча n учун

$$b_n = 0. \qquad (1.38)$$

Бу ҳол учун (I. 36) ва (I. 37) ларни қуйидагича битта формулага бирлаштириш ҳам мумкин:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (I.38')$$

Демак, $[-l, l]$ да интегралланувчи жуфт $f(x)$ функцияга кўра тузилган Фурье тригонометрик қатори ушбу кўринишга эга:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}. \qquad (I.39)$$

Агар $[-l, l]$ да аниқланган $f(x)$ функция ўша кесмада тоқ ва интегралланувчи бўлса, у вақтда $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ ва $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ мос равишда барча n лар учун тоқ ва жуфт бўлади. Бундан барча $a_n=0$ ва

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (I.40)$$

Шундай қилиб, $[-l, l]$ да интегралланувчи $f(x)$ тоқ функцияга кўра тузилган Фурье тригонометрик қатори

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (I.41)$$

кўринишда ёзилади.

Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи ва жуфт ёки тоқ бўлса, бу функцияларнинг мос Фурье қаторлари яна ҳам содда бўлиб, улар қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (I.39')$$

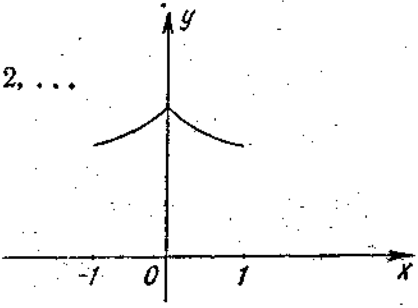
ёки

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (I.41')$$

Биринчи қатор учун

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

бўлиб, барча $b_n = 0$ бўлади. Иккинчи қатор учун эса барча $a_n = 0$ бўлиб, $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$ бўлади. Тоқ ва жуфт функцияларнинг Фурье қаторларини тузишга мисоллар келтирайлик.



20- чизма.

Қуйидаги тоқ ва жуфт функцияларнинг Фурье қаторлари тузилсин ва графиклари ясалсин.

1. $[-1, 1]$ да $f_1(x) = 1 + 2^{-|x|}$.

Ечилиши. а) $f_1(x) = f_1(-x)$ дан берилган функция жуфт ва узлуксиз бўлиб, унинг графиги 20- чизмада келтирилган. Бу графикни (функцияни) $2l = 2$, $l = 1$ даврли қилиб давом эттирсак, $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз жуфт даврий функция ҳосил бўлади;

б) жуфт функцияларнинг хоссасига кўра барча $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, шунинг учун a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ларни ҳисоблаймиз:

чунки $[0, l]$ да $\varphi(x) = f(x)$. $a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$. Демак, $\varphi(x)$ учун $[-l, l]$ да, $f(x)$ учун эса $[0, l]$ да ушбу қаторни ҳосил қиламиз:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}. \qquad (I.42)$$

б) ҳол учун эса барча $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ бўлиб,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (I.42')$$

қаторга эга бўламиз.

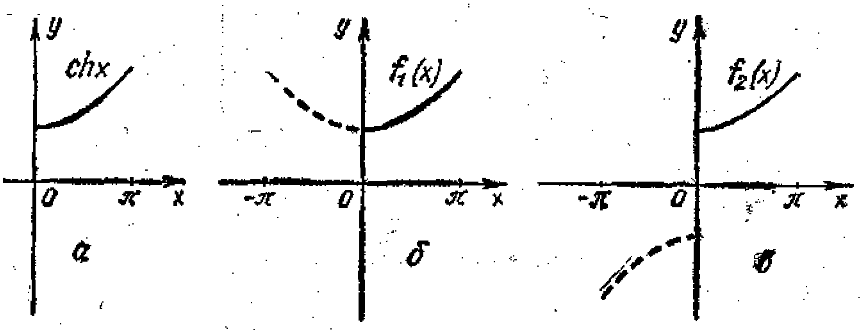
Берилган $f(x)$ функция $[0, \pi]$ да аниқланган ва интегралланувчи деб фараз қилсак, у вақтда бу функция учун (I.42) ва (I.42') дан фойдаланиб қуйидаги қаторларни туза оламиз:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (I.43)$$

ёки

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (I.43')$$

Энди юқорида айтилганларга доир мисоллар кўрамиз. 1) $f(x) = \operatorname{ch} x$ (23-а чизма) учун $[0, \pi]$ да Фурье қатори тузилсин.



23- чизма.

Ечилиши. а) агар бу функцияни жуфтлик қонунига асосан давом эттирсак (23-б чизма), қатор ҳадлари косинуслардан иборат бўлади, яъни барча $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ бўлиб, фақат a_n ларни аниқласак етарли:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi}[\operatorname{sh} x \cos nx\Big|_0^\pi + n\int_0^\pi \operatorname{sh} x \sin nx dx],$$

$$J = \int_0^\pi \operatorname{sh} x \sin nx dx = \operatorname{ch} x \sin nx \Big|_0^\pi - n\int_0^\pi \operatorname{ch} x \cos nx dx =$$

$$= -n\int_0^\pi \operatorname{ch} x \cos nx dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi}[(-1)^n \operatorname{sh}\pi - n^2\int_0^\pi \operatorname{ch} x \cos nx dx]$$

ёки

$$\int_0^\pi \operatorname{ch} x \cos nx dx = (-1)^n \operatorname{sh}\pi - n^2\int_0^\pi \operatorname{ch} x \cos nx dx,$$

бундан

$$\int_0^\pi \operatorname{ch} x \cos nx dx = \frac{(-1)^n \operatorname{sh}\pi}{1+n^2}.$$

Демак,

$$\operatorname{ch} x \sim \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx].$$

б) агар берилган функциядан фойдаланиб, $[-\pi, \pi]$ да тоқ функция тузсак (23-в чизма) қатор ҳадлари фақат синуслардан иборат бўлади, яъни барча $a_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ бўлиб, b_n ларни аниқлаш кифоя:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}[\operatorname{sh} x \sin nx\Big|_0^\pi - n\int_0^\pi \operatorname{sh} x \cos nx dx] =$$

$$= -\frac{2n}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sh} x \cos nx dx, \quad J = \int_0^\pi \operatorname{sh} x \cos nx dx = \operatorname{ch} x \cos nx\Big|_0^\pi +$$

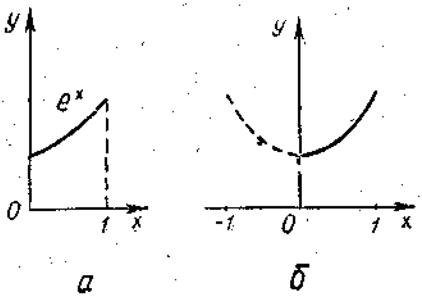
$$+ n\int_0^\pi \operatorname{ch} x \sin nx dx = (-1)^n \operatorname{ch}\pi - 1 + n[\operatorname{sh} x \sin nx\Big|_0^\pi -$$

$$- n\int_0^\pi \operatorname{sh} x \cos nx dx = (-1)^n \operatorname{ch}\pi - 1 - n^2 J; \quad J = \frac{(-1)^n \operatorname{ch}\pi - 1}{1+n^2},$$

$$b_n = \frac{2n}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n \operatorname{ch}\pi}{1+n^2},$$

у ҳолда

$$\operatorname{ch} x \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}(1-(-1)^n \operatorname{ch}\pi)\sin nx.$$



24- чизма.

2) $f(x)=e^x$ нинг $[0, 1]$ да Фурье қатори тузилсин.

Ечилиши. Бу функция графиги 24- а чизмада тасвирланган. Агар берилган функцияни жуфтлик қонуни бўйича давом эттирсак (24- б чизма), у ҳолда ёрдамчи $\varphi(x)$ функция жуфт бўлиб, у $2l=2$, $l=1$ даврли бўлади. Равшанки бу ҳолда $b_n=0$, $n=1, 2, \ldots$ ва

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=2\int_0^1 e^x dx=2(e-1),\ a_0=2(e-1).$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=2\int_0^1 e^x\cos n\pi x dx;$$

$$\int_0^1 e^x\cos n\pi x dx=e^x\cos n\pi x\Big|_0^1+n\pi\int_0^1 e^x\sin n\pi x dx=e\cos n\pi-1-$$

$$-(n\pi)^2\int_0^1 e^x\cos n\pi x dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^1 e^x\cos n\pi x dx=$$

$$=\frac{(-1)^n e-1}{1+(n\pi)^2},\quad a_n=\frac{2[(-1)^n e-1]}{1+(n\pi)^2}.$$

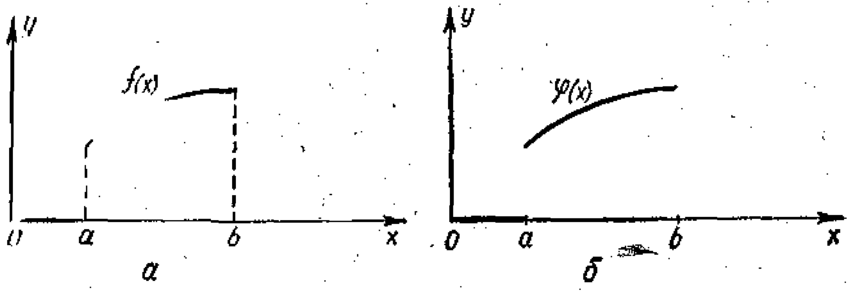
Шундай қилиб, $[0, 1]$ оралиқда e^x га қуйидаги қатор мос келади:

$$e^x\sim(e-1)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e-1}{1+(n\pi)^2}\cos n\pi x.$$

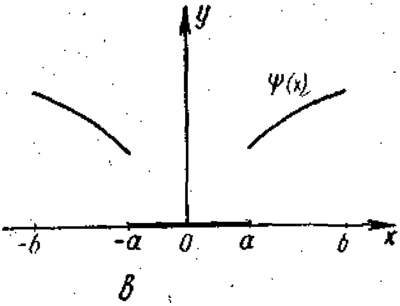
6°. $[a, b]$ да интегралланувчи функция учун Фурье тригонометрик қаторини тузиш.

Маълумки, кўп ҳолларда функция бирор $[a, b]$ кесмада аниқланган бўлиб, уни тригонометрик қатор билан ифодалаш (қаторга ёйиш) талаб этилади. Ана шунинг учун биз бундай функцияларнинг Фурье қаторини тузиш, яъни унинг Фурье коэффициентларини аниқлашни кўрсатамиз. $[a, b]$ да 25- а чизмадаги графикка эга бўлган $f(x)$ функция берилган бўлсин. Берилган функцияга асосан

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<a \ \text{учун},\\ f(x), & a\leqslant x\leqslant b \ \text{учун}\end{cases}\qquad (*)$$



ёрдамчи функцияни тузамиз (25- б чизма). Бу функция $[0,\ b]$ да аниқланган ва интегралланувчи бўлгани учун 5°- бандда айтилганларга амал қилиб, унинг Фурье тригонометрик қаторини тузиш қийин эмас. Дарҳақиқат, агар $\varphi(x)$ ни жуфтлик (тоқлик) қонунига асосан давом эттирсак, $[-b,\ b]$ да аниқланган интегралланувчи $\psi(x) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant b$ функцияга эга бўламиз. Агар $\psi(x)$ жуфт қилиб қурилган бўлса, у ҳолда



25- чизма.

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\,dx = \frac{2}{b}\int_0^b \psi(x)\,dx = \frac{2}{b}\left[\int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx\right].$$

Бундан ташқари, (*) га кўра $[0,\ a]$ да $\varphi(x) = 0$, $[a,\ b]$ да $\varphi(x) = f(x)$ бўлганлиги учун

$$a_0 = \frac{2}{b}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{b}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{b}\,dx \qquad (I.44)$$

ва $b_n = 0,\ n = 1,\ 2,\ \dots$, у ҳолда $[-b,\ b]$ да

$$\psi(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{b} \qquad (I.45)$$

Агар $\psi(x)$ (*) тоқ қилиб қурилган бўлса, у ҳолда $a_n = 0$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$ ва

$$b_n = \frac{2}{b}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{b}\,dx \qquad (I.46)$$

бўлиб,

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{b}. \qquad (I.47)$$

$x \in [a, b]$ да $\psi(x) = f(x)$ бўлгани сабабли (I 45) ёки (I.47) қаторлар $x \in [a, b]$ учун $f(x)$ га мос қаторлар бўлади, яъни агар $x \in [a, b]$ лар учун (I.45) ёки (I.47) қаторлар $\psi(x)$ га яқинлашса, у ҳолда барча $x \in [a, b]$ учун

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{b}$$

ёки

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{b}$$

бўлади.

Юқорида келтирилганларни ойдинлаштириш мақсадида ушбу содда мисолни ечиб кўрамиз. [1, 2] да $f(x) = x + 1$ бўлса, бу функция учун Фурье қатори тузилсин.

Ечилиши. Аввало $f(x) = x + 1$ дан фойдаланиб, ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 & \text{бўлса } 0, \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 & \text{бўлса } x + 1 \end{cases} \qquad (*)$$

ёрдамчи функцияни тузамиз, бу функция [0, 2] да аниқланган ва интегралланувчи бўлгани учун уни жуфт (тоқ) лик принципига кўра давом эттирсак, $T = 2l = 4$ даврли ва [—2, 2] да интегралланувчи функция ҳосил қиламиз. $f(x)$ ни жуфтлик хоссасига асосан давом эттирдик деб фараз қилайлик, у ҳолда

$$a_0 = \frac{2}{b}\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 \varphi(x)\,dx.$$

(*) га кўра

$$a_0 = \int_0^1 0dx + \int_1^2 (x+1)\,dx = \int_1^2 (x+1)\,dx =$$

$$= \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_1^2 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}; \quad a_0 = \frac{5}{2},$$

Шунга ўхшаш

$$a_n = \int_1^2 (x+1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = (x+1)\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_1^2 - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[-\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right],$$

бундан

$$a_{2n} = \frac{1}{(n\pi)^2}\,[1 + (-1)^{n+1}], \quad a_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}\Big[(-1^{n+1} -$$

$$- \frac{1}{(2n-1)\pi}\Big],\ n = 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Барча $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ бўлганидан $[1, 2]$ да $f(x) = x + 1$ функция учун қуйидаги Фурье қатори мос келади:

$$x + 1 \backsim \frac{5}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{(2n-1)\pi}\right]}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x +\right.$$

$$\left. + \frac{[1 + (-1)^{n+1}]}{(2n)^2\pi}\cos 2n\pi x\right\}.$$

Шу мисолдаги ёрдамчи $\varphi(x)$ функцияни тоқлик хоссасига асосан давом эттириш воситаси билан Фурье қатори тузишни ўқувчининг ўзига тавсия этамиз.

1 БОБГА ДОИР МИСОЛЛАР

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш оралиқлари, даврлари аниқлансин ва графиклари ясалсин:

1. $f(x) = |\sin x|$.
2. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.
3. $f(x) = \ln\frac{1 + |x|}{[1 + |x|]}$.

Кўрсатма. Бунда $[1 + |x|]$ ни $1 + |x|$ ни антьеси деб олиш керак.

4. Агар даврий $f(x)$ функция узилувчи бўлса, унинг узилиш нуқталари саноқли тўплам эканлиги кўрсатилсин.

5. Агар $u = f(x)$ функция T даврли бўлиб, $g(u)$ эса $u = f(x)$ нинг мураккаб функцияси, яъни $g(u) = g[f(x)]$ бўлса, у ҳолда бу функция ҳам T даврли эканлиги кўрсатилсин.

6. Агар $f(x)$ функция узунлиги l га тенг бўлган оралиқда аниқланган бўлса, уни l даврли қилиб бутун ҳақиқий ўқ бўйича давом эттириш мумкин. Қачон уни $\frac{l}{2}$ даврли қилиб давом эттириш мумкин?

Қуйида берилган функциялар воситасида даврий функциялар ясалсин, уларнинг даврлари аниқлансин ва иккала функциянинг графиклари ясалсин:

7. Агар $|x| \leqslant 2$ бўлса, $f(x) = 2|x| + 1$.

8. Агар $|x| \leqslant 1$ бўлса, $f(x) = e^{-2|x|} - 1$.

9. Агар $|x| \leqslant a \, (a > 0)$ бўлса, $f(x) = \frac{x}{a}$.

10. $f(x) = \begin{cases} \text{Агар } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ бўлса, } x^3, \\ \text{Агар } 1 \leqslant x < 2 \text{ бўлса, } x + 1, \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \text{агар } 0 \leqslant x < \pi \text{ бўлса, } \sin x, \\ \text{агар } \pi \leqslant x < 2\pi \text{ бўлса, } x - \pi. \end{cases}$

12. агар $0 \leqslant x < 2$ бўлса, $2x - [x]$.

Қуйидаги функцияларга мос Фурье тригонометрик қаторлари тузилсин. Берилган оралиқнинг чегаравий нуқталарида ва $x=0$ да функциянинг қийматлари билан қатор йиғиндиси таққослаб кўрилсин:

13. $f(x) = kx + b; \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

14. $f(x) = \sin^4 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

15. $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ bx, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

16. $f(x) = x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$.

17. $f(x) = 1 - x^2, \quad |x| \leqslant 1$.

18. $f(x) = 3^{-|x|}, \quad |x| \leqslant 1$.

Қуйида берилган функцияларнинг жуфт (тоқ) эканликларини текшириб, сўнгра графиклари ясалсин:

19. $f(x) = \mathrm{sgn} = (\sin 2x)$.

20. $f(x) = 1 - a^{-|x|}, \ (a > 1, \ a < 1)$.

21. $f(x) = \ln|x|, \ |x| > 0$, яъни $x \neq 0$.

22. $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Қуйида берилган функциялардан жуфт ва тоқ функциялар ясалсин:

23. $f(x) = \ln(a + x), \ |x| < a, \ (a < 1)$.

24. $f(x) = x^2 + x + 1$.

25. $f(x) = e^x$.

26. $f(x) = \sin x + \cos x$.

Қуйидаги жуфт (тоқ) функциялар учун Фурье қаторлари тузилсин:

27. $f(x) = k|x|, \ k > 0, \ |x| < l$ (l — ихтиёрий ҳақиқий сон).

28. $f(x) = \mathrm{sgn}(\cos x)$.

29. $f(x) = \frac{x}{2}, \ |x| < 2$.

30. $f(x) = \sin \lambda x$.

31. $f(x) = x \sin x$ ва $f(x) = x \cos x$.

32. $f(x) = x^2 + x + 2 \ (|x| < h)$ дан жуфт ва тоқ функциялар тузиб, уларнинг берилган оралиқдаги Фурье қаторлари тузилсин.

$[0, l]$ оралиқда (l — ихтиёрий ҳақиқий сон) аниқланган функцияларнинг фақат синуслар, фақат косинуслар бўйича тузилган Фурье қаторлари ёзилсин:

33. $f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1]$.

34. $f(x) = \mathrm{sh}\, x, \quad x \in [0, \pi]$.

35. $f(x) = \mathrm{ch}\, x, \quad x \in [0, 2]$.

36. $f(x) = (x + 1)^2, \quad x \in [0, 1]$.

37. Агар $f(x)$ функция 2π даврли бўлиб: а) $f(x + \pi) = -f(x)$ бўлса, $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0, \ k = 1, 2, \ldots$ эканлиги кўрсатилсин; б) $f(x + \pi) = f(x)$ бўлса, барча $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0, \ k = 1, 2, \ldots$ эканлиги текширилсин; в) $f(x) = f(-x)$ ва $f(x + \pi) = -f(x)$ бўлса, барча $b_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots$, барча $a_{2n} = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots$ эканлиги текширилсин.

Кўрсатма. Аввало бу функцияларнинг графиклари ясалиб, даврлари аниқлансин.

a_n ва b_n мос равишда $f(x)$ нинг Фурье коэффициентлари бўлса, у ҳолда $f(x+\lambda)$, $\lambda = \text{const}$ янги функциянинг α_n, β_n Фурье коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ҳисобланиши исбот қилинсин:

$$\alpha_n = a_n \cos\lambda n + b_n \sin\lambda n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$
$$\beta_n = b_n \cos\lambda n - a_n \sin\lambda n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

38. $[0,\ 3]$ да қуйидагича аниқланган

$$f(x) = \begin{cases} \text{агар } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ бўлса,} & x, \\ \text{агар } 1 < x < 2 \text{ бўлса,} & 1, \\ \text{агар } 2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ бўлса,} & 3 - x \end{cases}$$

функция учун Фурье қатори тузилсин.

39. Агар $f(x)$ функция $[0,\ 2]$ да қуйидагича аниқланса,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

функция учун Фурье қатори тузилсин.

40. $f(x) = (x+1)^2$ функциянинг $[1,\ 2]$ кесмада Фурье қатори тузилсин.

II боб

ФУРЬЕ ТРИГОНОМЕТРИК ҚАТОРИНИНГ ЯҚИНЛАШИШИГА ОИД МАСАЛАЛАР

I бобда асосан Фурье тригонометрик қаторлари назариясида ўрганиладиган масалаларнинг фақат биринчи қисми, яъни маълум бир оралиқда интегралланувчи функциялар учун Фурье қатори тузишни ўргандик. Бу бобда эса ўша масалаларнинг иккинчи қисми, яъни берилган функция учун тузилган Фурье қаторининг ўша функцияга яқинлашишига оид, тўғрироғи, қаторнинг берилган функцияга яқинлашиши билан боғлиқ бўлган масалаларни ўрганамиз.

Булардан олдин математик анализ курсида ўрганилган баъзи зарур тушунчаларни эслатиб ўтамиз. Навбатдаги 6-§ ана шуларга бағишланади.

6-§. Силлиқ бўлакли функция

1.° Узлуксиз бўлакли функция.

1-таъриф. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг қарийб барча нуқталарида узлуксиз бўлиб, ўша кесмада фақат сони чекли биринчи тур узилиш нуқталарига эга бўлса, бу ҳолда бу функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлакли дейилади.*

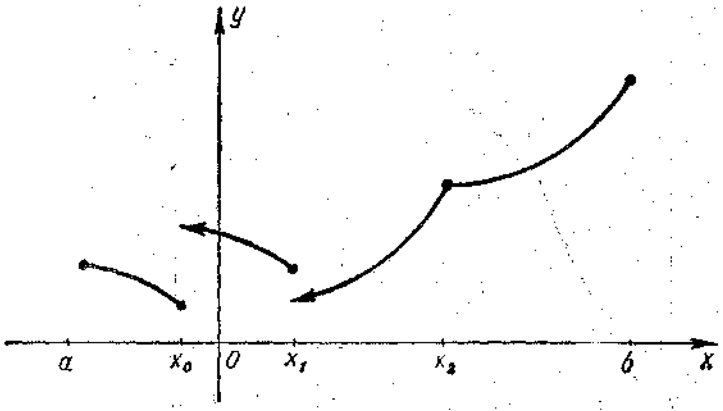
Таърифдан равшанки, бундай функция $[a, b]$ кесмага тегишл исталган x_0 да чекли ўнг ва чап (агар x_0 узлуксизлик нуқтаси бўлс ўзаро тенг) лимитларга эга, яъни

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0). \qquad (II.1$$

Шунингдек,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0), \quad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b-0) \qquad (II.2$$

ларнинг ҳар бири чеклидир. Бундай функцияларнинг графиги 26-чизмадаги каби бўлиши маълум.



26- чизма.

Мисоллар: 1. [—1, 3] да қуйидагича аниқланган

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x < 2, \\ x+1, & 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

функция учта узлуксиз бўлакдан иборат. $x = 0$ ва $x = 2$ нуқталар $f_1(x)$ учун биринчи тур узилиш нуқталари бўлиб,

$$\lim_{x\to -0} f_1(x) = 1 \quad \text{ва} \quad \lim_{x\to +0} f_1(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 2-0} f_1(x) = 4 \quad \text{ва} \quad \lim_{x\to 2+0} f_1(x) = 3.$$

Бундан ташқари $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = 1$ ва $\lim\limits_{x\to 3-0} f_1(x) = 4$. [—1, 3] нинг қолган барча нуқталарида (27-*а* чизма) $\lim f_1(x) = f_1(x)$ чеклидир.

2. Агар

$$f_2(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leqslant x < 0, \\ \ln(x+1), & 0 \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

бўлса, у ҳолда $f_2(x)$ битта $x = 0$ нуқтада биринчи тур узилишга эга бўлган, иккита узлуксиз бўлакдан иборат функциядир. Ҳақиқатан, [—2, *b*] нинг исталган $x \neq 0$ нуқтаси учун $\lim f_2(x) = f_2(x)$ чекли бўлиб,

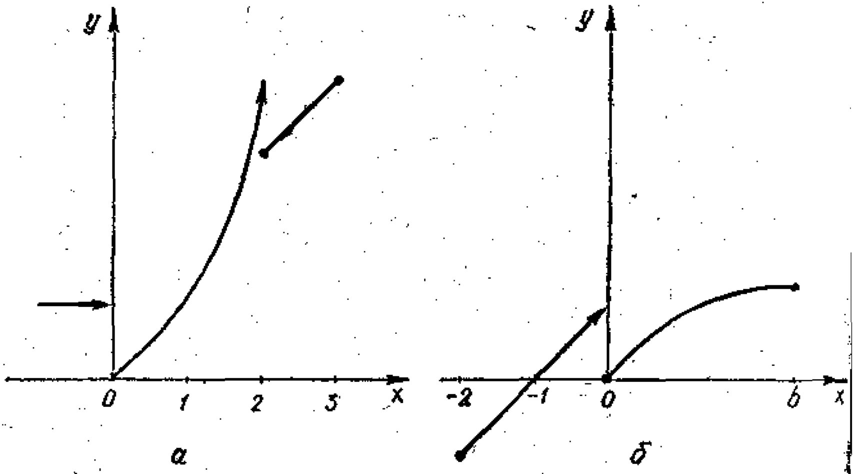
$$\lim_{x\to -0} f_2(x) = 1, \quad \lim_{x\to +0} f_2(x) = 0$$

ва

$$\lim_{x\to -2+0} f_2(x) = -1, \quad \lim_{x\to b-0} f_2(x) = \ln(b+1).$$

$f_2(x)$ нинг графиги 27-б чизмада берилган.

Бу каби мисоллар китобхонларга математик анализ курси муқаддимасидан танишдир. Энди силлиқ бўлакли функциялар синфи билан танишайлик.



27- чизма.

2-таъриф. *Агар [a, b] да узлуксиз f (x) функция ўша кесманинг қарийб барча нуқталарида чекли икки ёқлама f′ (x) ҳосилага эга бўлиб, кесманинг фақат чекли сондаги нуқталарида чекли ўнг ва чап ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда f (x) функция [a, b] да силлиқ бўлакли дейилади.*

Бу таърифдан равшанки, [a, b] кесмага тегишли исталган x_0 нуқтада

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x) = f'(x_0-0) \quad \text{ва} \quad \lim_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0) \qquad (II.3)$$

чекли ($f'(x_0-0) = f'(x_0+0)$) икки ёқлама ёки фақат сони чекли нуқталарда $f'(x_0-0) \neq f'(x_0+0)$ бўлиши зарур. Бундан ташқари,

$$\lim_{x\to a+0} f'(x) = f'(a+0) \quad \text{ва} \quad \lim_{x\to b-0} f'(x) = f'(b-0)$$

ҳам чекли бўлади.

1° бандда келтирилган иккита мисолдаги $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг иккаласи ҳам мос оралиқларда силлиқ бўлакли функциялардир. Дарҳақиқат,

$$1) \quad f'_1(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0, \\ 2x, & 0 \leqslant x < 2, \\ 1, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

исталган x_0 да $\lim_{x\to x_0\pm0} f_1(x) = f'_1(x_0 \pm 0)$ чекли, фақат $x = 2$ д
$f'_1(2-0) \neq f'_1(2+0)$ ва

$$\lim_{x\to-1+0} f'_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to3-0} f'_1(x) = 1.$$

$f_1(x)$ қолган барча нуқталарда чекли (икки ёқлама) ҳосилага эга.

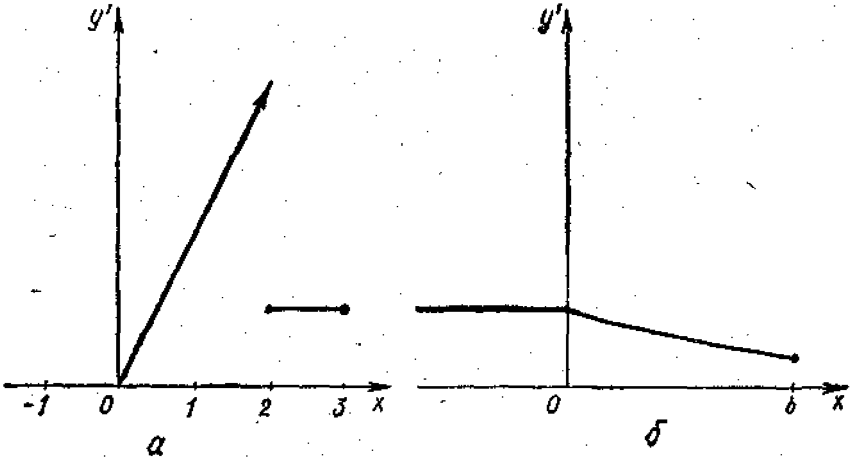
2) $f_2'(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leqslant x < 0, \\ \frac{1}{x+1}, & 0 \leqslant x < b. \end{cases}$

$[-2, b]$ га тегишли исталган x_0 учун $\lim\limits_{x \to x_0 \mp 0} f_2'(x) = f_2'(x_0 \mp 0)$ чекли ва

$$f_2'(x - 0) = f_2'(x_0 + 0),$$

$$\lim_{x \to -2+0} f_2'(x) = 1, \quad \lim_{x \to b-0} f_2'(x) = \frac{1}{b+1}$$

бўлиб, кесманинг барча ички нуқталарида $f_2(x)$ чекли (икки ёқлама) ҳосилага эга. Агар $f_1'(x)$ ва $f_2'(x)$ нинг графикларини ясасак, 28-*а*, *б* чизмадаги чизиқларга эга бўламиз.



28- чизма.

Изоҳ. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да силлиқ бўлакли бўлса, у вақтда бу кесмани ҳар доим сони чекли шундай k та $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{k-1}, a_k]$ кесмаларга ажратиш мумкинки (бунда $a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b$), $f(x)$ ва $f'(x)$ функциялар исталган $[a_i, a_{i+1}]$, $(i = 0, \ldots, k-1)$ кесманинг ички нуқталарида узлуксиз бўлиб, x ўнгдан a_i га, чапдан a_{i+1} га интилганида $f(x)$ ва $f'(x)$ мос равишда қуйидаги чекли

$$f(a_i + 0),\ f'(a_i + 0) \ \text{ва}\ f(a_{i+1} - 0),\ f'(a_{i+1} - 0)$$

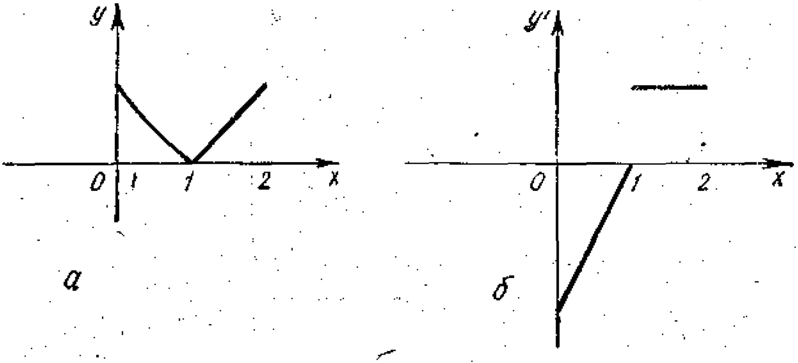
лимитларга интилади. Ҳақиқатан, агар $f(a_i) = f(a_i + 0)$, $f(a_{i+1}) = f(a_{i+1} - 0)$ ва $f'(a_i) = f'(a_i + 0)$, $f'(a_{i+1}) = f'(a_{i+1} - 0)$ деб қабул қилсак, у ҳолда $f(x)$ ва $f'(x)$ функциялар $[a_i, a_{i+1}]$ кесмаларнинг ҳар бирида узлуксиз бўлади Ёпиқ оралиқда (яъни кесмада) узлуксиз функциянинг хоссасига кўра бу функциялар исталган $[a_i, a_{i+1}]$ да чегараланган. Демак, $f(x)$ ва $f'(x)$ нинг иккаласи ҳам $[a, b]$ да чегараланган бўлади. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб, унинг $f'(x)$ ҳосиласи ўша кесмада силлиқ бўлакли бўлиши ҳам мумкин. Масалан,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ x-1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

функция $[0, 2]$ да узлуксиз, унинг

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

ҳосиласи эса иккита силлиқ бўлакдан иборат (29-чизма). Бундай функция $[a, b]$ да *силлиқ бўлакли узлуксиз функция* дейилади.



29- чизма.

3-таъриф. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ нинг барча ички нуқталарида чекли (икки ёқлама) $f'(x)$ ҳосилага, кесманинг қуйи ва юқори чегараларида эса мос равишда чекли ўнг ва чап $f'(a+0)$, $f'(b-0)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да силлиқ функция дейилади.*

Масалан, $\sin x$, $\cos x$, e^x функциялар, $P_n(x)$ кўпҳад ва ҳ. к. лар исталган $[a, b]$ кесмада силлиқ функцияларга мисол бўлади. $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$ функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган бўлиб, $x = -1$, $x = +1$ ни ўз ичига олмаган исталган $[a, b]$ кесмада силлиқ бўлади, чунки

$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ ҳосила $x = -1$, $x = +1$ да мавжуд эмас.

Юқорида келтирилган уч тур функциялардан, айниқса, силлиқ бўлакли функциялардан бу бобда ва ундан сўнг ҳам кўп фойдаланамиз.

7-§. Фурье тригонометрик қаторининг яқинлашишига оид асосий теорема (Дирихле теоремаси)

1°. **Теорема.** *Агар $f(x)$ функция $[-l, l]$ кесмада силлиқ бўлакли бўлса, у вақтда бу функциянинг*

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad \text{(II.4)}$$

Фурье тригонометрик қатори $[-l, l]$ га тегишли исталган x учун яқинлашади ва қатор йиғиндиси, яъни $S(x)$ учун қуйидагилар ўринлидир:

1) барча $x\in(-l, l)$ учун $S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ бўлиб, агар x нуқта $f(x)$ нинг узлуксизлик нуқтаси бўлса, у ҳолда $f(x-0)=f(x+0)=f(x)$, демак, $S(x)=f(x)$ бўлади;

2) кесманинг чегаравий нуқталарида эса қатор йиғиндиси ушбу

$$S(-l)=S(l)=\frac{f(-l+0)+f(+l-0)}{2}$$

тенглик билан аниқланади.

Равшанки, агар $f(x)$ функция $[-l, l]$ да узлуксиз ва силлиқ бўлаклардан иборат бўлса, у ҳолда барча $(-l, l)\ni x$ учун $S(x)=f(x)$. Бу теоремани исботлаш учун зарур бўлган қуйидаги асосий леммани исбот қиламиз.

2°. Лемма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада юқоридаги теорема шартини қаноатлантирса, яъни силлиқ бўлакли бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0. \qquad \text{(II.5)}$$

Бу тенгликлардан бирини, масалан, иккинчисини исбот қилайлик. Аввало $[a, b]$ кесмани

$$a=x_0<x_1<x_2\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

(n — чекли) нуқталар воситасида n та шундай $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, _{n-1})$ кесмаларга ажратамизки, $f(x)$ ва $f'(x)$ функциялар $[x_i, x_{i+1}]$ ларнинг ички нуқталарида узлуксиз бўлиб, кесманинг чегаравий нуқталарида мос равишда қуйидаги чекли ўнг ва чап лимитларга эга бўлсин:

$$\lim_{x\to x_i+0}f(x)=f(x_i+0),\quad \lim_{x\to x_i+0}f'(x)=f'(x_i+0),$$

$$\lim_{x\to x_{i+1}-0}f(x)=f(x_{i+1}-0),\quad \lim_{x\to x_{i+1}-0}f'(x)=f'(x_{i+1}-0).$$

Равшанки, $f(x)\cos\lambda x$ исталган λ учун $[a, b]$ да интегралланувчи бўлгани туфайли, бу кўпайтма $[x_i, x_{i+1}]$ ларнинг ҳар бирида интегралланувчи бўлиб;

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx. \qquad (II.6)$$

бўлади.

Агар $\lambda \to \infty$ да (II.6) тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди нолга интилишини кўрсатсак, леммани исбот қилган бўламиз. Йиғиндидаги қўшилувчилар сони чекли бўлгани сабабли, агар унинг барча қўшилувчилари $\lambda \to \infty$ да нолга интилса, у ҳолда йиғинди ҳам нолга интилади. Ана шунинг учун биз исталган $0 \leqslant i \leqslant n - 1$ лар учун

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx = 0 \qquad (II.7)$$

эканини исбот этамиз. 6-§, 2° банддаги изоҳга асосан $f(x)$ ва $f'(x)$ лар $[x_i, x_{i+1}]$ кесмаларнинг ҳар бирида *узлуксиз бўлганидан* фойдаланиб, (II.7) да лимит белгиси остидаги интегрални бўлаклаб интеграллаймиз, яъни

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx = \frac{f(x)\sin\lambda x}{\lambda}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{\lambda}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\sin\lambda x dx.$$

Лемма шартига ва юқорида эслатилган изоҳга кўра $f(x)$ ва $f'(x)$ функциялар $[a, b]$ да чегараланганлиги туфайли шундай C ва C' *чекли сонлар* мавжудки, $[a, b]$ га тегишли исталган x учун $|(x)| < C$ ва $|f'(x)| < C'$ бўлади, у ҳолда

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left[C|\sin\lambda x_{i+1} - \sin\lambda x_i| + C'|x_{i+1} - x_i|\right]$$

ёки барча $0 \leqslant i \leqslant n - 1$ лар учун

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left[2C + C'(x_{i+1} - x_i)\right], \qquad (II.8)$$

чунки исталган λ учун $|\sin\lambda x_{i+1} - \sin\lambda x_i| \leqslant 2.$

(II.8) тенгликда λ ни ∞ га интилтириб, лимитга ўтсак, (II.7) нинг ўринли эканлигини кўрамиз, у ҳолда

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

Бу эса (II.5) даги иккинчи тенгликнинг ўринли эканлигининг исботидир. Худди шу хилдаги мулоҳазалар ёрдами билан биринчи тенгликнинг ўринли эканини кўрсатиш мумкин. Буни текшириб кўришни ўқувчига тавсия қиламиз. Бу икки натижадан лемманинг ўринли кани келиб чиқади.

Изоҳлар. 1) бу леммани биз кўрган функциядан кенгроқ функциялар синфи учун ҳам исбот қилиш мумкин. Чунончи Г. М. Фихтенгольцнинг «Математик анализ асослари» номли китобининг 2-томида («Ўқитувчи», Т., 1972 й., 388-бет.) лемма $[a, b]$ да узлуксиз бўлакли функция учун исбот этилган. $f(x)$ функция $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи бўлганда ҳам лемма ўринли бўлади. Биз учун лемманинг юқорида таърифланган ҳоли етарли бўлгани туфайли бошқа ҳолларга тўхталиб ўтирмаймиз.

2) агар $f(x)$ функция $2l$ даврли бўлиб, узунлиги $2l$ га тенг исталган кесмада силлиқ бўлакли бўлса, у вақтда унинг Фурье коэффициентлари (a_n, b_n лар) n чексизликка интилганда нолга интилади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{II.9}$$

Дарҳақиқат, (I.29) ва (I.30) формулаларга кўра

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Бу икки тенгликда $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ деб олсак, у ҳолда $n \to \infty$ да λ ҳам ∞ га интилади. Бундан ва (II.5) дан (II.9) нинг тўғрилиги келиб чиқади. Энди теореманинг ўзини исбот қиламиз.

3° **Асосий теореманинг исботи.** Аввало берилган $f(x)$ функцияни $2l$ даврли деб, бутун Ox ўқ бўйича давом эттирамиз, сўнгра $(-\infty, +\infty)$ га тегишли исталган x учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{II.10}$$

эканини исбот қиламиз.

Агар $[-l, l]$ да берилган функцияни юқорида айтилгандай давом эттирсак, ҳосил бўлган янги функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган $2l$ даврли бўлади. Унинг бутун Ox ўқда қабул қиладиган қийматлари $f(x)$ нинг $[-l, l]$ даги қийматларининг даврий такроридан иборатдир. Шунинг учун ҳам (II.10) лимит (II.4) қаторнинг $[-l, l]$ га тегишли исталган x даги йиғиндиси $S(x)$ ни ёки $S(-l)$ ва $S(+l)$ ларни беради.

Исботи. Равшанки,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right] \tag{II.11}$$

(II.4) қаторнинг биринчи n та ҳади йиғиндиси (ёки қисмий йиғиндиси) бўлади. Бундаги тегишли коэффициентлар (I.28′), (I.29′) ва (I.30′) формулаларга асосан қуйидагича аниқланади:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt,\quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt.$$

Буларни (II.11) тенгликнинг ўнг томонига қўйиб, $\frac{1}{l}$ умумий кўпайтувчини қавс ташқарисига чиқарсак;

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt\right)\cos\frac{k\pi x}{l} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\right]\right\}.$$

Бундан

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right]f(t)\,dt.$$

Тригонометриянинг $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$ формуласидан фойдаланиб, сўнгги тенгликнинг ўнг томонини анча соддалаштириш мумкин:

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left[\frac{l}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi(-x+t)}{l}\right]f(t)\,dt.$$

Агар $t - x = \xi$ алмаштириш бажарсак, у ҳолда

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]f(x+\xi)\,d\xi. \qquad \text{(II.12)}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ўрта қавс ичидаги ифодани

$$\sigma_n(\xi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi\xi}{l} \qquad \text{(II.13)}$$

орқали белгилаб, уни соддалаштирамиз.

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\right) = \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx =$$

$$= \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]=\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{3}{2}x\right)+\ldots+\left[\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)x\right]+$$

$$+\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right].$$

Бундаги ўхшаш ҳадларни ихчамлаб қуйидагига эга бўламиз:

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x. \qquad \text{(II.14)}$$

Демак,

$$\sigma_n(\xi)\cdot\sin\frac{\pi\xi}{2}=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}.$$

Бундан

$$\sigma_n(\xi)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi\xi}{l}=\frac{\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi\xi}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}. \qquad \text{(II.15)}$$

(II.15) ни (II.12) га қўйсак:

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}f(x+\xi)\frac{\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi\xi}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}d\xi.$$

$f(x)$ функцияни $2l$ даврли қилиб давом эттирганимизни эътиборга олсак, сўнгги интеграл белгиси остидаги ушбу

$$F(\xi)=\frac{f(x+\xi)\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi\xi}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}$$

функция ҳам $2l$ даврли бўлади. У ҳолда I боб, 5-§, 2°-бандда исбот қилинган леммага кўра

$$\int_{-l-x}^{l-x}F(\xi)\,d\xi=\int_{-l}^{l}F(\xi)\,d\xi.$$

Бундан

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x+\xi)\frac{\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi\xi}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}d\xi. \qquad \text{(II.16)}$$

(II.15) дан:

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{l}\left[\frac{\xi}{2}\right]_{-l}^{l}+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}=1+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n}\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\Bigg|_{-l}^{l}$$

ёки

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi=1+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\pi}{k}=1,$$

чунки $\sin k\pi=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Демак,

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi=1. \tag{II.17}$$

$\dfrac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}$ функция жуфт бўлгани учун

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi=1,$$

бундан

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{0}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi=\frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi=\frac{1}{2}. \tag{II.18}$$

Бу интегралларнинг биринчисини $f(x-0)$ га, иккинчисини $f(x+0)$ га кўпайтириб, уларни қўшсак, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\frac{1}{l}\left[\int\limits_{-l}^{0}f(x-0)\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2}}\,d\xi+\int\limits_{0}^{l}f(x+0)\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2}}\,d\xi\right]=$$

$$=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}. \tag{II.19}$$

Равшанки, (II.16) тенгликни ушбу кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{l}\left[\int\limits_{-l}^{0}f(x+\xi)\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi+\int\limits_{0}^{l}f(x+\xi)\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi\right]=$$

$$=S_n(x). \tag{II.20}$$

(II.19) ва (II.20) дан

$$S_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}\left[f(x+\xi)-f(x-0)\right]\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}d\xi+\frac{1}{l}\int_{0}^{l}\left[f(x+\xi)-f(x+0)\right]\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}d\xi. \quad (II.21)$$

Агар $n\to\infty$ да (II.21) тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларнинг иккаласи ҳам нолга интилишини кўрсатсак, у вақтда (II.10) ни, яъни теоремани исбот қилган бўламиз. Ўша интегралларнинг биринчиси, яъни

$$I_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}\left[f(x+\xi)-f(x-0)\right]\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}d\xi$$

интеграл $n\to\infty$ да нолга интилишини кўрсатайлик. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралнинг чегараларини алмаштириб, сўнгра ξ ни $-\xi$ билан алмаштирсак:

$$I_n(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{l}\left[f(x-\xi)-f(x-0)\right]\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}d\xi.$$

Қисқароқ ёзиш мақсадида

$$\left[f(x-\xi)-f(x-0)\right]\frac{\sin\frac{(2n+1)n\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}=F(x,\xi)$$

деб олсак, $0<\alpha<l$ ни қаноатлантирувчи исталган α учун

$$I_n(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{\alpha}F(x,\xi)\,d\xi+\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{l}F(x,\xi)\,d\xi=I_n^{\text{I}}(x)+I_n^{\text{II}}(x). \quad (II.22)$$

$$I_n^{\text{I}}(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{\alpha}F(x,\xi)\,d\xi=\frac{1}{l}\int_{0}^{\alpha}\left[f(x-\xi)-f(x-0)\right]\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x-\xi)-f(x-0)}{\xi}\cdot\frac{\frac{\pi\xi}{2l}}{\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}d\xi.$$

Теорема шартларига кўра ушбу

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{f(x-\xi)-f(x-0)}{\xi}=f'(x-0)$$

ҳосила мавжуд бўлганлиги туфайли, исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ кўрсата оламизки, $|\xi| < \delta$ бўлганда

$$\left|\frac{f(x-\xi)-f(x-0)}{\xi} - f'(x-0)\right| < \varepsilon$$

бўлади. У ҳолда ўша ξ лар учун

$$\left|\frac{f(x-\xi)-f(x-0)}{\xi}\right| - |f'(x-0)| < \varepsilon$$

ёки

$$\left|\frac{f(x-\xi)-f(x-0)}{\xi}\right| < |f'(x-0)| + \varepsilon < A, \qquad (*)$$

$0 < A$ — чекли сон. Ундан ташқари, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ажойиб лимитдан $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжудки, $|\xi| < \delta$ бўлганда

$$1-\varepsilon < \frac{\sin\frac{\pi\xi}{2l}}{\frac{\pi\xi}{2l}} < 1+\varepsilon. \qquad (**)$$

Исталган n ва ξ учун $\left|\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}\right| < 1$. Бундан ва (*), (**) тенгсизликлардан $F(x, \xi)$ функция исталган x ва $[0, \alpha]$ учун чегараланган, яъни $|F(x, \xi)| \leqslant M$, у ҳолда $|I_n^{I}(x)| \leqslant A\alpha$. Демак, исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай исталганча кичик $\alpha > 0$ танлаш мумкинки,

$$\left|I_n^{I}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (II.23)$$

бўлади.

Энди $I_n^{II}(x)$ ни баҳолаймиз. Дирихле теоремаси таърифидан маълумки, $I_n^{II}(x)$ ифодасида интеграл белгиси остидаги $\frac{f(x-\xi)-f(x-0)}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}$ функция $[\alpha, l]\in\xi$ кесмада силлиқ бўлакли, у ҳолда асосий леммага кўра

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{II}(x) = 0.$$

Демак, исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $N(\varepsilon)$ кўрсата оламизки, барча $n > N(\varepsilon)$ лар учун

$$\left|I_n^{II}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (II.24)$$

(II.23) ва (II.24) дан исталган $\varepsilon > 0$ ва $n > N(\varepsilon)$ учун $|I_n(x)| < \varepsilon$ ёки $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = 0$ эканлиги бевосита келиб чиқади.

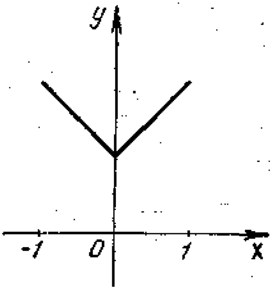
Худди шунга ўхшаш $n \to \infty$ да (II.21) даги иккинчи интеграл ҳам нолга интилишини кўрсатиш қийин эмас.

Ниҳоят, ўша икки интегралнинг нолга интилишидан

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$$

бўлиб, теорема исбот бўлади. Бу теорема Фурье тригонометрик қатори яқинлашишининг етарли шартларини аниқлаб беради.

4°. I боб, 5-§ да (4° — 6°-бандлар) биз маълум кесмада берилган функциялар учун мос Фурье тригонометрик қаторларини тузишни ўрганган эдик. Энди асосий теоремага таяниб, агар берилган функция бу теорема шартларини қаноатлантирса, қаторнинг яқинлашишини аниқлай оламиз. Бундан ташқари, функция қийматидан фойдаланиб, қатор йиғиндисини ҳисоблай оламиз. Буларни амалда кўрсатиш мақсадида қуйидаги мисолларни келтирамиз.



30- чизма.

1. $[-1, 1]$ да $f(x) = 1 + |x|$ функциянинг Фурье қатори тузилсин ва $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{2}$ нуқталарда йиғиндиси аниқлансин.

Ечилиши. Функциянинг графиги 30-чизмада келтирилган. а) Қаторнинг Фурье коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

формулалардан фойдаланамиз. Берилган функция жуфт ва $l = 1$ бўлгани сабабли исталган $n \neq 0$ учун

$$a_n = 2\int_0^1 (1 + x)\cos n\pi x\,dx = 2\left[\frac{(1 + x)\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^1\right] =$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1), \text{ бундан } a_{2n} = 0, \ a_{2n-1} = -\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}; \ (n = 1, 2, \ldots)$$

$$a_0 = 2\int_0^1 (1 + x)\,dx = (1 + x)^2\Big|_0^1 = 3; \ a_0 = 3; \text{ барча } b_n = 0 \ (n = 1, 2\ldots),$$

чунки $f(x) = 1 + |x|$ жуфт функция; у ҳолда бу функция учун Фурье қатори

$$\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n - 1)\pi x}{(2n - 1)^2}$$

кўринишга эга. $f(x) = 1 + |x|$ функция $[-1, 1]$ да Дирихле теоремаси шартларини қаноатлантирувчи узлуксиз функция бўлгани сабабли, $[-1, 1]$ га тегишли исталган x учун

$$\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n - 1)\pi x}{(2n - 1)^2} = 1 + |x|.$$

Бунда $x=0$ бўлса,

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1 \text{ ёки } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

$x=\pm\frac{1}{2}$ да

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pm\pi}{2}}{(2n-1)^2}=\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cdot 0=\frac{3}{2},$$

Чунки барча $n=1, 2, \ldots$ учун $\cos\left(\pm(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)=0$, бундан ташқари,

$$f\left(\pm\frac{1}{2}\right)=1+\left|\pm\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}.$$

Демак,

$$f\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left[\pm(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n-1)^2},$$

$$S(-1)=S(+1)=\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[\pm(2n-1)\pi]}{(2n-1)^2}=2,$$

бундан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

2. $[-2, 2]$ да ушбу

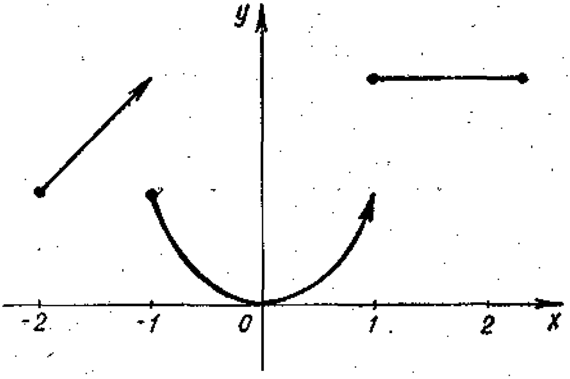
$$f(x)=\begin{cases} x+3, & -2\leqslant x<-1,\\ x^2, & -1\leqslant x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

кўринишда аниқланган функциянинг Фурье тригонометрик қатори тузилсин.

Ечилиши. Бу функциянинг графиги 31-чизмада берилган. Бу функция ҳам ўзининг аниқланиш кесмасида асосий теорема шартларини тўла қаноатлантириши унинг аналитик ифодаси ва графигидан кўриниб турибди. Шунинг учун Фурье коэффициентларини ҳисоблаб, қаторни тузамиз:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}(x+3)\,dx+\int_{-1}^{1}x^2\,dx+\int_{1}^{2}2dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x+3)^2}{2}\Bigg|_{-2}^{-1}+\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}+2x\Bigg|_{1}^{2}\right],\quad a_0=\frac{25}{12};$$



31- чизма.

$$a_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\Big[\int\limits_{-2}^{-1}(x+3)\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int\limits_{-1}^{1}x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx +$$

$$+2\int\limits_{1}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\Big];\ a_n = \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{n\pi}(x+3)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{-1} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{-1} +$$

$$+2\Big(\frac{2x^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_{0}^{1} + \frac{4}{(n\pi)^2}x\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_{0}^{1} - \frac{8}{(n\pi)^3}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{1}\Big) + \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2}\Big]$$

$$a_n = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{(n\pi)^2}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\Big) + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi}{2} -$$

$$-\frac{8}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2};\quad a_n = \frac{2}{(n\pi)^2}\Big[(-1)^{n+1} + 3\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Big];$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\Big[\int\limits_{-2}^{-1}(x+3)\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int\limits_{-1}^{1}x^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx +$$

$$+2\int\limits_{1}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\Big] = \frac{1}{2}\Big[-\frac{2}{n\pi}(x+3)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{-1} -$$

$$-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2}\Big] = \frac{1}{2}\Big[-\frac{2}{n\pi}\Big(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\Big) - \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} +$$

$$+\frac{4}{n\pi}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\Big)\Big];\quad b_n = -\frac{1}{n\pi}\Big(\cos n\pi - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Big);$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\Big[(-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Big],$$

Демак,

$$f(x) \sim \frac{25}{24} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\frac{\left[3\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1}\right]}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[(-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right].$$

$x = 0$ да $f(x)$ функция узлуксиз бўлгани туфайли

$$f(0) = \frac{25}{24} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1}}{n^2}$$

$f(0) = 0$ дан

$$\frac{2}{\pi^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\,\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2} - \frac{4}{n^3\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right)\right] = -\frac{25}{24}.$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cos\frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{25}{24}\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right] = \frac{25\pi^2}{48}.$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8n^2} = \frac{25\pi^2}{48} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Олдинги мисолдан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ ва } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4\pi^2}{27}$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \pi^2\left(\frac{25}{48} + \frac{1}{8} + \frac{1}{54}\right) = \frac{287\pi^2}{6\cdot 8\cdot 9}.$$

Ниҳоят,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{287\pi^3}{1728}.$$

Ечилган икки мисолда берилган функциянинг тригонометрик қатори воситасида кўпгина сонли қаторларнинг йиғиндисини ҳисоблаш мумкин эканлигини кўрдик.

Фурье қаторининг яқинлашишига оид бошқа муҳим масалаларга ўтишдан олдин қуйидаги изоҳларга тўхталиб ўтамиз.

1. Агар $f(x)$ функция 2π даврли бўлиб, $[-\pi, \pi]$ кесмада Дирихле теоремаси шартларини қаноатлантирса, у ҳолда бу функция

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (II.25)$$

қаторининг $S(x)$ йиғиндиси $[-\pi, \pi]$ кесманинг исталган ички нуқтаси учун ушбу

$$S(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

кўринишда, $x = \pm\pi$ чегаравий нуқталарда эса

$$S(-\pi) = S(+\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

кўринишда ифодаланади. $[-\pi, \pi]$ дан ташқаридаги нуқталарда эса даврийлик қонуни бўйича аниқланади. Демак, исталган $x \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

2. Агар $f(x)$ функция $[-l, l]$ да (ёки $[-\pi, \pi]$ да) асосий теорема шартларини қаноатлантириб, жуфт (тоқ) бўлса, у ҳолда (II.4) ҳадлари мос равишда косинуслардан (синуслардан) иборат қатор бўлиб, жуфт функция учун исталган $x \in [-l, l]$ да

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},$$

тоқ функция учун кесманинг исталган ички нуқталарида

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},$$

лекин чегаравий нуқталарда

$$S(-l) = S(+l) = \frac{f(-l+0)+f(+l-0)}{2}$$

ёки

$$S(-\pi) = S(+\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

бўлади.

3. Агар $f(x)$ функция $[0, l]$ ёки $[0, \pi]$ да аниқланган ва силлиқ бўлакли бўлса, у ҳолда I бобнинг 5- § ида (6°-банд) айтилганидек, аввало бу функцияни $[-l, 0]$ ёки $[-\pi, 0]$ га жуфтлик ёки тоқлик қонунига асосан давом эттириб, сўнгра Фурье қаторига ёйиш керак. Шундан сўнг $[0, l]$ га тегишли исталган x учун

$$S(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

ва

$$S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$$

бўлади. Масалан, I-боб, 6-§, 6°-бандда биз $f(x) = \operatorname{ch} x$ функция учун $[0, \pi]$ да қуйидаги иккита Фурье тригонометрик қаторини тузган эдик:

$$\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx\right], \tag{A}$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}\left[1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi\right]\sin nx. \tag{B}$$

Биринчи қатор берилган функцияни $[-\pi, 0]$ га жуфтлик, иккинчи қатор эса тоқлик қонунига кўра давом эттиришдан ҳосил бўлган.

а) $f(x) = \operatorname{ch} x$ функция $[-\pi, \pi]$ да силлиқ бўлганлиги туфайли у асосий теорема шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун $[-\pi, \pi]$ кесманинг исталган ички x нуқтасида (A) га кўра

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx\right]$$

бўлади, чунки $\operatorname{ch} x$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз. Жумладан, $x = 0$ да

$$\operatorname{ch} 0 = 1 = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right],$$

бундан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi} - \frac{1}{2}. \tag{A'}$$

$x = \pi$ да

$$\operatorname{ch}\pi = \operatorname{ch}(-\pi) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi}{1+n^2}\right];$$

$$\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{1+n^2}\right]$$

ёки

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \pi\operatorname{th}\pi.$$

мак,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}(\pi\,\mathrm{th}\pi-1). \qquad (A'')$$

б) $f(x)=\mathrm{ch}\,x$ ни тоқлик хоссасига кўра давом эттирганимиздан сил бўлган функция $[-\pi, \pi]$ да икки силлиқ бўлакдан иборат либ, $x=0$ биринчи тур узилиш нуқтаси бўлгани учун (В) дан

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}[1-(-1)^n\,\mathrm{ch}\,\pi]\,\mathrm{sh}\,\pi=$$

$$=\begin{cases}-\mathrm{ch}\,x, & -\pi<x<0,\\ \dfrac{\mathrm{ch}(-0)+\mathrm{ch}(+0)}{2}=0, & x=0,\\ +\mathrm{ch}\,x, & 0<x<\pi\end{cases}$$

елиб чиқади. У ҳолда $x=\frac{\pi}{2}$ да

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}[1-(-1)^n\,\mathrm{ch}\,\pi]\sin\frac{n\pi}{2}=\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}.$$

Маълумки,

$$\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k\ (k=1,2,\ldots),\\ (-1),^{k-1} & n=2k-1\ (k=1,2,\ldots).\end{cases}$$

Шунинг учун

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-1)}{1+(2k-1)^2}(1+\mathrm{ch}\,\pi)=\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}$$

ёки

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-1)}{1+(2k-1)^2}=\frac{\pi\,\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}}{2(1+\mathrm{ch}\,\pi)}=\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sch}\,\frac{\pi}{2}. \qquad (B')$$

(A′), (A″) ва (B′) тенгликлардан яна кўрдикки, (*A*) ва (*B*) Фурье тригонометрик қаторлари орқали тегишли сонли қаторлар йиғиндисини ҳисоблаш мумкин. $x=\frac{\pi}{3}$ да (A) ва (B) дан ҳосил бўладиган сонли қаторлар йиғиндисини ҳисоблашни ўқувчига тавсия этамиз.

Ҳар икки қатор учун ҳам

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Дарҳақиқат, а) ҳол учун $f(-\pi)=f(\pi)=\mathrm{ch}\,\pi$;

б) ҳол учун $f(\pi-0)=1$, $f(-\pi+0)=-1$ бўлгани учун $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0$, ундан ташқари, (B) дан

$$S(-\pi)=S(\pi)=0.$$

5°. Локаллаштириш принципи. 3°-бандда $[-l, l]$ да аниқланган (x) функция Дирихле теоремаси шартларини қаноатлантирса, унинг Фурье қатори исталган $x \in [-l, l]$ нуқтада яқинлашувчи бўлиб, унинг Фурье коэффициентлари ушбу

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

формулалар орқали ҳисобланишини кўрдик. Бу формулалардан равшанки, агар биз $f(x)$ нинг $[-l, l] \in x_0$ нуқтанинг исталганча кичик атрофдаги қийматларини ўзгартирсак, бунинг натижасида функция Фурье коэффициентларининг қийматлари ҳам сезиларли равишда ўзгаради. Бу ҳол Фурье қаторининг ўша x_0 нуқтада яқинлашишига (узоқлашишига) қандай таъсир этар экан деган саволнинг туғилиши табиийдир. Бунга биз қуйидаги теореманинг исботи билан жавоб берамиз.

Теорема. *$f(x)$ функция Фурье қаторининг $x_0 \in [-l, l]$ нуқтада яқинлашиши (узоқлашиши) $f(x)$ нинг ўша нуқтанинг исталганча кичик атрофидаги қийматларигагина боғлиқдир.*

Исботи. (II.16) формулага асосан

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \frac{f(x+\xi)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi.$$

Исталганча кичик $\delta > 0$ танлаб, бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални қуйидагича учта интегралга ажратамиз:

$$I_1 = \int_{-l}^{-\delta} f(x+\xi)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi,$$

$$I_2 = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+\xi)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi,$$

$$I_3 = \int_{\delta}^{l} f(x+\xi)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{l}}{2\sin\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi.$$

$[-l, -\delta]$ ва $[\delta, l]$ да $\sin\frac{\pi\xi}{2l}$ функция узлуксиз бўлгани учун ўша кесмаларда I_1 ва I_2 интегралллардаги интеграл белгиси остидаги функция II боб, 2- §, 2° да исбот этилган лемма шартларини тўла қаноатлантиради, демак,

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = 0 \text{ ва } \lim_{n\to\infty} I_3 = 0.$$

Бундан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ нинг мавжудлиги (яъни Фурье қаторининг x_0 да яқинлашувчи бўлиши) фақат $\lim\limits_{n\to\infty} I_2$ га боғлиқдир.

Шундай қилиб, $f(x)$ функция Фурье қаторининг $x_0 \in [-l, l]$ да яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлиши *$f(x)$ нинг фақат ўша нуқтанинг* кичик атрофидаги қийматларига боғлиқ бўлиб, функциянинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ташқарисидаги қийматларининг ўзгариши қаторнинг яқинлашишига (узоқлашишига) таъсир этмайди. Бу факт *локаллаштириш принципи* дейилади.

Хулоса. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ *функцияларнинг қийматлари x_0 нуқтанинг* яқин (исталганча кичик) атрофида бир хил бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг қийматлари $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ нинг ташқарисида нақадар фарқланмасин, уларнинг Фурье қаторлари x_0 атрофида бир нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади ва бир хил йиғиндига эга.

Аммо ҳар бир функция Фурье коэффициентлари ўша функцияларнинг $[-l, l]$ даги барча қийматларига боғлиқ бўлгани учун $f(x)$ ва $\varphi(x)$ ларнинг Фурье коэффициентлари умуман олганда бир-бирига тенг бўлмайди. Буни эътиборга олсак, сўнгги хулоса жуда ҳам ажойибдир.

Локаллаштириш принципи Риманнинг[1] умумийроқ теоремасидан хулоса сифатида келиб чиққани туфайли бу принцип баъзан унинг номи билан ҳам аталади. Шуни қайд этиш зарурки, локаллаштириш принципи ғояси анча олдин улуғ рус математиклари М. И. Остроградский ва Н. И. Лобачевский ишларида қўлланилган[2].

8- §. Фурье тригонометрик қаторининг абсолют ва текис яқинлашиши

Шу бобнинг 2- § ида кўрдикки, агар $[-l, l]$ да аниқланган $f(x)$ функция Дирихле теоремаси шартларини қаноатлантирса, у ҳолда унинг

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right]$$

Фурье тригонометрик қатори функциянинг узлуксизлик нуқталарида $f(x)$ га яқинлашади [яъни $S(x) = f(x)$]. Функционал қаторлар назариясидан аёнки, бундай қаторларнинг абсолют ва текис яқин-

---

[1] Риман Бернгард (1826—1866)—атоқли немис математиги.

[2] М. И. Остроградский (1801—1861) — атоқли рус математиги, академик.

Н. И. Лобачевский (1793—1853) — улуғ рус математиги, ўз номи билан аталадиган (ноевклид) геометриянинг асосчиси.

лашиши назарий ва татбиқий нуқтаи назардан муҳим аҳамиятга эга. Шунинг учун бу параграфда биз $[-l, l]$ да берилган функция Фурье қаторининг абсолют ва текис яқинлашиш шартларини аниқлаймиз. Бундан олдин асосий тригонометрик (I.15) система учун Бессель тенгсизлигини[1] келтириб чиқарамиз.

1°. **Асосий тригонометрик система учун Бессель тенгсизлиги.** $f(x)$ функция $[-l, l]$ да интегралланувчи ва

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\beta_k\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (II.26)$$

n-тартибли тригонометрик кўпҳад бўлсин.

1-теорема. *Агар α_0, α_k, β_k, $(k=1, 2, \ldots, n)$ лар берилган функциянинг (I.28), (I.29) ва (I.30) формулалар билан аниқланган мос Фурье коэффициентларига тенг (яъни $\alpha_0=a_0$, $\alpha_k=a_k$, $\beta_k=b_k$) бўлса, у ҳолда*

$$\Delta[f(x), T_n(x)]=\int_{-l}^{l}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx \qquad (II.27)$$

миқдор ўзининг абсолют минимумига эришади.

Буни $T_n(x)$ кўпҳаднинг $[-l, l]$ да $f(x)$ функциядан *энг кичик квадратик четланиши* деб ҳам айтилади. Исталган n ва x учун

$$\Delta[f(x), T_n(x)]\geqslant 0$$

эканлиги равшан.

Исботи. (II.27) ифодани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\Delta[f(x), T_n(x)]=\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx-2\int_{-l}^{l}f(x)T_n(x)\,dx+\int_{-l}^{l}T_n^2(x)\,dx. \qquad (II.28)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги сўнгги икки интегралда $T_n(x)$ нинг ўрнига унинг (II.26) ифодасини қўйиб, уларнинг ҳар бирини алоҳида ҳисоблаймиз.

$$I_1=\int_{-l}^{l}f(x)\;T_n(x)dx=\int_{-l}^{l}f(x)\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\beta_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right]dx,$$

бундан

$$I_1=\frac{\alpha_0}{2}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx+\beta_k\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\right].$$

Агар

$$\int_{-l}^{l}f(x)\,dx=a_0l,\quad\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=a_k\,l,\quad\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=b_kl$$

---

[1] Фридрих Вильгельм Бессель (1784—1846) — немис астрономи.

[illegible] эътиборга олсак:

$$I_1 = \frac{a_0 l}{2}\alpha_0 + l\sum_{k=1}^{n}(a_k\alpha_k + b_k\beta_k). \tag{II.28'}$$

[illegible]ра

$$I_2 = \int_{-l}^{l} T_n^2(x)\,dx = \int_{-l}^{l}\left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l} + \beta_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right]^2 dx.$$

ундан

$$I_2 = \frac{\alpha_0^2}{2}l + \alpha_0\int_{-l}^{l}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l} + \beta_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)dx +$$

$$+\int_{-l}^{l}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l} + \beta_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right]^2 dx.$$

Асосий тригонометрик (I.15) системанинг ортогоналлик хоссасига асосан (I боб, 5- §, 2°- банд) ва (I.19) дан

$$I_2 = \left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right]l. \tag{II.28''}$$

I_1 ва I_2 ларнинг (II.28′) ва (II.28″) тенгликлар билан аниқланган қийматларини (II.28) га қўйсак:

$$\Delta[f(x),\ T_n(x)] = \int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx - 2\left[a_0\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\alpha_k + \beta_k b_k)\right]l +$$

$$+\left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right]l.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонига

$$\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]l$$

ни қўшиб ва айириб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\Delta[f(x),\ T_n(x)] = \int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]l +$$

$$+\frac{l}{2}(\alpha_0-\beta_0)^2+l\left\{\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]\right\}.$$

Бундан $\Delta[f(x), T_n(x)]$ миқдор $\alpha_0=a_0$, $\alpha_k=a_k$, $\beta_k=b_k$ $(k=1,2, \ldots, n)$ бўлганда ҳақиқатан ҳам ўзининг абсолют минимумига эришади, яъни

$$\Delta_{\min}[f(x), \quad T_n(x)] = \int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]l. \qquad (\text{II}.29)$$

$\Delta_{\min}[f(x), \quad T_n(x)] \geqslant 0$ бўлганлиги учун:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx. \qquad (\text{II}.30')$$

Худди шунга ўхшаш, $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи функция учун (II.30) тенгсизлик қуйидагича ёзилади:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx. \qquad (\text{II}.30')$$

Бу тенгсизликнинг чап томонидаги ифода (йиғинди) мусбат бўлиб, исталган $n\geqslant 1$ да юқоридан чегараланган бўлгани учун $n\to\infty$ да чекли лимитга интилади. Бу тенгсизликда лимитга ўтсак,

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx \qquad (\text{II}.31)$$

кўринишдаги тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизлик *асосий тригонометрик система учун Бессель тенгсизлиги* деб аталади.

Ихтиёрий ортогонал система учун Бессель тенгсизлигини III бобда келтирамиз.

2°. Фурье тригонометрик қаторининг текис яқинлашиши.

2-теорема. *Агар* $[-l, l]$ *да аниқланган* $f(x)$ *функция:* 1) $[-l, l]$ *да узлуксиз;* 2) *ўша кесмада силлиқ бўлакли;* 3) $f(-l)=f(l)$ *бўлса, у ҳолда бу функциянинг*

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) \qquad (\text{II}.32)$$

Фурье қатори $[-l, l]$ *да* $f(x)$ *га текис яқинлашади ва* $[-l, l]$ *га тегишли барча* x *лар учун*

$$S(x)=f(x)$$

бўлади.

Исботи. Функционал қаторлар текис яқинлашишининг Вейерштрасс аломатига асосан ҳадлари $u_n(x) = a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ функциялардан иборат (II.32) қаторнинг текис яқинлашиши учун унга мажорант бўлган сонли қаторнинг яқинлашиши етарлидир. Исталган n учун

$$u_n(x) = \left|a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right| \leqslant |a_n| + |b_n|$$

бўлганлиги туфайли ушбу

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) \tag{II.33}$$

сонли қатор (II.32) га мажорант бўлади. Демак, (II.33) қатор яқинлашса, (II.32) қатор $[-l, l]$ да $f(x)$ га абсолют ва текис яқинлашади. Шунинг учун биз (II.33) қаторнинг яқинлашишини исботлаймиз.

Агар a'_n ва b'_n ($n = 1, 2, \ldots$) орқали $f'(x)$ ҳосиланинг тегишли Фурье коэффициентларини белгиласак, Эйлер—Фурье формуласига кўра:

$$a'_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b'_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{II.33'}$$

(II.32) қаторнинг коэффициентлари қуйидагича аниқланиши бизга маълум:

$$a'_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx; \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Теорема шартларига кўра $f'(x)$ функция $[-l, l]$ да интегралланувчи бўлгани учун

$$a_n = \frac{1}{n\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{1}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

ёки

$$a_n = -\frac{l}{n\pi}\,\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Худди шунга ўхшаш:

$$b_n = -\frac{l}{n\pi}\cdot\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

(II.33′) даги a'_n ва b'_n нинг ифодасига кўра:

$$a_n = -\frac{l}{n\pi} b'_n \text{ ва } b_n = -\frac{l}{n\pi} a'_n.$$

Бундан $n = 1, 2, \ldots$ учун

$$|a_n| + |b_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\left[\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n}\right]. \qquad (II.34.)$$

$f'(x)$ ҳосила $[-l, l]$ да 1°-банддаги 1-теорема шартларини қаноатлантирганлиги туфайли унинг учун Бессель тенгсизлиги ўринли, яъни

$$\frac{(a'_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a'_n)^2 + (b'_n)^2] \leqslant \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} [f'(x)]^2 dx.$$

Бундан

$$\frac{(a'_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a'_n)^2 + (b'_n)^2] \qquad (II.35)$$

сонли қатор яқинлашади. Бундан ташқари, исталган $n = 1, 2, \ldots$ учун ўринли бўлган ушбу

$$\left[|a'_n| - \frac{1}{n}\right]^2 \geqslant 0 \text{ ва } \left[|b'_n| - \frac{1}{n}\right]^2 \geqslant 0$$

тенгсизликлардан

$$\frac{|a'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left[(a'_n)^2 + \frac{1}{n^2}\right]$$

ва

$$\frac{|b'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left[(b'_n)^2 + \frac{1}{n^2}\right]$$

эканлигини кўрсатиш мумкин. Булардан эса исталган $n = 1, 2, \ldots$ учун

$$\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left[(a'_n)^2 + (b'_n)^2\right] + \frac{1}{n^2} \qquad (II.36)$$

тенгсизликларнинг ўринли эканлигини кўрамиз. (II.35) ва $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қаторлар яқинлашувчи бўлганлигидан қаторларни таққослаш аломатига асосан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a'_n| + |b'_n|}{n}$$

қатор яқинлашади, у ҳолда (II.34) га кўра

$$\sum_{n=1}^{\infty}[|a_n|+|b_n|]$$

қатор ёки

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[|a_n|+|b_n|]$$

қатор ҳам яқинлашади. Демак, (II. 32) қатор текис яқинлашади. Шундай қилиб, 2-теорема тўла исбот қилинди.

Қуйида ҳозиргина исбот қилинган теоремага бир нечта муҳим изоҳлар бериб ўтамиз.

1-изоҳ. Теорема таърифида $f(-l)=f(+l)$ деб фараз қилдик. Шуни эътиборга олиш керакки, бу шарт берилган функция учун тузилган Фурье қаторининг $[-l, l]$ кесманинг чегаравий нуқталарида ўша функцияга яқинлашишининг зарур шарти бўлади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} S_n(-l)=f(-l) \text{ ва } \lim_{n\to\infty} S_n(+l)=f(+l) \qquad \text{(II.37)}$$

(бунда S_n — қаторнинг қисмий йиғиндиси) бўлса, у ҳолда

$$f(-l)=f(+l). \qquad \text{(II.37')}$$

Дарҳақиқат, $x=\pm l$ да (II. 32) қатор яқинлашгани учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n(-l)=S(-l) \text{ ва } \lim_{n\to\infty} S_n(+l)=S(+l) \qquad \text{(II. 37'')}$$

лимитлар мавжуд. Бундан ташқари, (II.32) қаторнинг барча ҳадлари $2l$ даврли фунциялардан иборат бўлганлиги туфайли

$$S(-l)=S(+l). \qquad \text{(II. 38)}$$

(II.37) ва (II.38) лардан (II.37') нинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Бундан теореманинг бу шарти (II.32) қаторнинг $[-l, l]$ да $f(x)$ га текис яқинлашиши учун ҳам зарур эканлиги равшан.

2-изоҳ. $[-l, l]$ да *аниқланган функция силлиқ бўлакли бўлиб,* сони чекли нуқталарда узилишга эга бўлса, унинг Фурье қатори $[-l, l]$ да ўша функцияга текис яқинлашмайди. Буни текшириб кўрайлик. $f(x)$ функция $[-l, l]$ да 2-теорема шартларини тўла қаноатлантирса, унинг Фурье қатори $[-l, l]$ да $f(x)$ га текис яқинлашади. Агар биз бу функциянинг сони чекли нуқталардаги қийматларини чекли ўзгартирсак, у ҳолда $[-l, l]$ да силлиқ бўлакли ва чекли сондаги биринчи тур узилишга эга бўлган янги $\gamma(x)$ функция ҳосил қиламиз. Аниқ интегралнинг хоссасига асосан

$$\int_{-l}^{l} \gamma(x)\,dx = \int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad \int_{-l}^{l} \gamma(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$\int_{-l}^{l} \gamma(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

тенгликлар ўринлидир. Бундан $\gamma(x)$ ва $f(x)$ нинг Фурье коэффициентлари ўзаро тенг бўлиб, улар битта умумий қаторга эга бўлади. Лекин $\gamma(x)$ функциянинг тузилиши усулига кўра, умуман айтганда, $\gamma(-l) \neq \gamma(+l)$ бўлади, ундан ташқари, $\gamma(x)$ нинг узилиш нуқталарида қатор $\gamma(x)$ га интилмайди, демак, 1- изоҳга кўра қатор $\gamma(x)$ га текис яқинлашмайди.

3- изоҳ. Теорема таърифидан ва олдинги изоҳлардан равшанки, агар $f(x)$ *функция* $[-l, l]$ *да силлиқ бўлакли, ундан ташқари,* йўқотиб бўладиган* *чекли сондаги узилишларга эга ва* $\lim\limits_{x\to -l+0} f(x) = \lim\limits_{x\to l-0} f(x)$ *бўлса, у ҳолда бундай функциянинг Фурье қатори* $[-l, l]$ да текис яқинлашади. Масалан, $[-2, 2]$ кесмада қуйидагича

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 < x < -1, \\ x^2, & |x| < 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

аниқланган функция берилган бўлса, унинг Фурье қатори $[-2, 2]$ да $f(x)$ га текис яқинлашади, чунки *берилган функция силлиқ бўлакли бўлиб,* $x = \pm 1$ нуқталарда функция йўқотиб бўладиган узилишга эга, яъни $\lim\limits_{x\to \pm 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm 1+0} f(x) = 1$ ва $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = 0$. Бу функциянинг Фурье қаторини тузишни китобхонга тавсия этамиз. Бу функциянинг графиги 32- чизмада тасвирланган.

32- чизма.

4- изоҳ. Агар $2l$ даврли $f(x)$ функция бутун *Ox ўқда силлиқ бўлакли узлуксиз функция бўлса,* у ҳолда унинг (II.32) Фурье қатори бутун ўқда $f(x)$ га текис яқинлашади.

Мисол. Агар $f(x)$ функция ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 2 - x^2, & 1 < |x| < \sqrt{2} \end{cases}$$

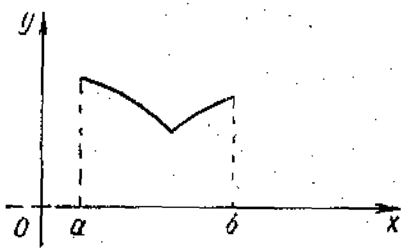
---

* $[a, b]$ кесмада аниқланган $f(x)$ функция учун $x_0 \in [a, b]$ да $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ бўлиб, $f(x_0)$ эса аниқмас бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада йўқотиб бўладиган узилишга эга дейилади, чунки $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ деб қабул қилсак, $f(x)$ Функция $x_0 \in [a, b]$ да узлуксиз бўлади.

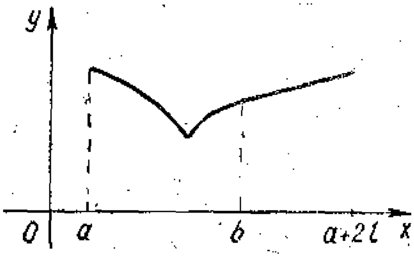
ишини $2\sqrt{2}$ даврли қилиб, бутун Ox ўққа давом эттиришдан ил қилинган бўлса, унинг Фурье қатори бутун ўқда $f(x)$ га текис нлашади. Бу функциянинг графигини ясаб, Фурье қаторини тузиб инг.

°. **Ихтиёрий $[a, b]$ кесмада узлуксиз функция Фурье қаторинг текис яқинлашишига оид масала.** Бирор $[a, b]$ кесмада аниқтан $f(x)$ функция $2l$ даврли, сони чекли силлиқ бўлаклардан рат ва узлуксиз бўлса, унинг Фурье қаторининг ўша кесмада кис яқинлашиши ҳақида нима дейиш мумкин.

Равшанки, агар $[a, b]$ кесманинг узунлиги $2l$ дан кичик бўлса, холда $f(x)$ нинг Фурье қатори юқорида исбот этилган теоремага ачиган текис яқинлашади. Шунинг учун $[a, b]$ нинг узунлиги $2l$ дан кичик бўлган (яъни $b-a<2l$) ҳолни текширамиз. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги графиги 33-чизмадаги эгри чизиқдан иборат бўлсин.



33- чизма.



34- чизма.

Энди берилган функция воситасида $[a, a+2l]$ кесмада ушбу ёрдамчи $\varphi(x)$ функцияни тузамиз:

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & a\leqslant x\leqslant b, \\ P(x-b)+f(b), & b\leqslant x\leqslant a+2l, \end{cases} \tag{II.39}$$

бунда $P=\frac{f(a)-f(b)}{a-b+2l}$ бўлиб, $[a, a+2l]$ нинг ташқи нуқталарида эса (II.39) ни $2l$ даврли қилиб давом эттирамиз. Шубҳасиз, бу функция бутун Ox ўқда узлуксиз ва $2l$ даврли бўлиб, унинг графиги 34- чизмадаги эгри чизиқдан иборат бўлади. 2°-бандда келтирилган 4- изоҳга кўра $\varphi(x)$ нинг Фурье қатори бутун Ox ўқда $\varphi(x)$ га текис яқинлашади. $[a, b]$ да $\varphi(x)=f(x)$ бўлганлиги учун бу кесмада $\varphi(x)$ нинг Фурье қатори $f(x)$ га текис яқинлашади. Бу натижани қуйидаги теорема сифатида қабул қилсак бўлади.

Теорема. *Агар $2l$ даврли $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ($|b-a|<2l$) сони чекли силлиқ бўлаклардан иборат узлуксиз функция бўлса, унинг Фурье қатори $[a, b]$ да текис яқинлашади.*

4°. Фурье қатори яқинлашишини тезлатишга боғлиқ масала. Фурье қаторлари назариясини конкрет физикавий ва техникавий масалаларни ҳал қилишга татбиқ қилинадиган ҳолларда қатор йиғиндисини унинг қисмий йиғиндиси билан алмаштириш қулай бўлади.

Албатта, бу хилдаги алмаштиришни қўлланилганда йўл қўйиладиган хато етарлича кичик бўлиши талаб этилади. Хатонинг кичик бўлиши қатор яқинлашишининг тезлигига бевосита боғлиқ бўлгани учун биз қуйида шу масалага алоқадор муҳим бир теоремани исбот қиламиз.

1-теорема. *Агар* $[-l, l]$ *кесмада* $f(x)$ *функция ва унинг* $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\ \dots,\ m)$ *ҳосилалари узлуксиз ва кесманинг чегаравий нуқталарида ўзаро тенг қийматларга эга, яъни*

$$f^{(k)}(-l)=f^{(k)}(+l),\quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ m)$$

бўлиб, $f^{(m+1)}(x)$ *ҳосила сони чекли узлуксиз бўлаклардан иборат бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *нинг Фурье коэффициентлари учун ушбу*

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right),\quad b_n=o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$$

тенгликлар ўринлидир (яъни $n\to\infty$ *да* a_n *ва* b_n *лар* $\frac{1}{n^{k+1}}$ *га қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдорлардир). Бундан ташқари ушбу*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k(|a_n|+|b_n|),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ m$$

қаторлар яқинлашувчи бўлади.

Исботи. Маълумки,

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Бу интегралларга бўлаклаб интеграллаш формулаларини кетма-кет m марта татбиқ этсак, қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$a_n=\frac{1}{l}\left[\frac{l}{n\pi}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}-\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x dx}{l}\,dx\right];$$

$$a_n=-\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{l}{(n\pi)^2}\left[f'(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}-\right.$$

$$\left.-\frac{l}{(n\pi)^2}\int_{-l}^{l} f''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right];\quad a_n=-\frac{l}{(n\pi)^2}\int_{-l}^{l} f''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$a_n=\frac{l^2}{(n\pi)^3}\left[f''(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}-\int_{-l}^{l} f'''(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right];$$

$$= \frac{l^3}{(n\pi)^3}\int_{-l}^{l} f'''(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \dots = \frac{l^m}{(n\pi)^{m+1}}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(x)\begin{cases}\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\\ \sin\frac{n\pi x}{l}dx;\end{cases}$$

$$= \pm\frac{l^{m+1}}{(n\pi)^{m+1}}\begin{cases}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^{m+1}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, & m+1=2k,\ k=0,1,2,\dots\\ \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, & m+1=2k-1,\ k=1,2,\dots\end{cases} \tag{II.40}$$

Худди шу каби b_n лар учун ушбу тенгликларга эга бўламиз:

$$b_n = \pm\frac{l^{m+1}}{(n\pi)^{m+1}}\begin{cases}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\\ \qquad (m+1=2k-1,\ \ k=1,\ 2,\ \dots)\\ \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\\ \qquad (m-1=2k,\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots).\end{cases} \tag{II.41}$$

(II.40) ва (II.41) лардаги

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \text{ва} \quad \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

миқдорлар $f^{(m+1)}(x)$ нинг мос Фурье коэффициентлари бўлгани учун уларни $a_n^{(m+1)}$ ва $b_n^{(m+1)}$ деб белгиласак, у ҳолда

$$|a_n| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\begin{cases}\frac{|a_n^{(m+1)}|}{n^{m+1}},\\ \frac{|b_n^{(m+1)}|}{n^{m+1}}\end{cases}$$

ва

$$|b_n| = \left|\frac{l^{(m+1)}}{(n\pi)^{m+1}}\begin{Bmatrix}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\\ \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\end{Bmatrix}\right| =$$

$$= \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1} \begin{cases} \dfrac{|a_n^{(m+1)}|}{n^{m+1}}, \\ \dfrac{|b_n^{(m+1)}|}{n^{m+1}}. \end{cases}$$

Бундан

$$|a_n| + |b_n| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1} \left(\frac{|a_n^{(m+1)}| + |b_n^{(m+1)}|}{n^{m+1}}\right) \qquad \text{(II.42)}$$

$\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}$ чекли сон бўлиб, (2- §, 2°- банддаги) леммага асосан

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(m+1)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n^{(m+1)} = 0.$$

Демак, n нинг исталганча катта қийматлари учун

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right). \qquad \text{(II.43)}$$

Бундан ташқари, (II.42) дан

$$n^m (|a_n| + |b_n|) \leqslant \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1} \left(\frac{|a_n^{(m+1)}|}{n} + \frac{|b_n^{(m+1)}|}{n}\right),$$

$$\frac{|a_n^{(m+1}|}{n} \leqslant \frac{|a_n^{(m+1)}|^2 + \frac{1}{n^2}}{2}; \quad \frac{|b_n^{(m+1)}|}{n} \leqslant \frac{|b_n^{(m+1)}|^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$$

тенгсизликларга кўра

$$n^m (|a_n| + |b_n|) \leqslant \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1} \frac{1}{2}\left[\left(\left|a_n^{(m+1)}\right|^2 + \frac{1}{n^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\left|b_n^{(m+1)}\right|^2 + \frac{1}{n^2}\right)\right].$$

3- §, 1°- бандда исбот этилган Бессель тенгсизлигига асосан

$$\frac{|a_0^{(m+1)}|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n^{(m+1)}\right|^2 + \left|b_n^{(m+1)}\right|^2\right) \leqslant \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left|f^{(m+1)}(x)\right|^2 dx$$

бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатор яқинлашувчи бўлгани туфайли (II.42) дан равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m (|a_n| + |b_n|)$$

қатор яқинлашади. Бундан $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|)$$

ир ҳам яқинлашади. Шундай қилиб, теорема тўла исбот бўл-

Охирги теореманинг [0, l] да аниқланган функция учун ис- 1 бобда агар [0, l] кесмада аниқланган $f(x)$ функция ўша *а асосий теореманинг (Дирихле теоремасининг) шартларини* лантирса, у ҳолда уни жуфтлик (тоқлик) хоссасига асосан 0] га давом эттириб, $\cos\frac{n\pi x}{l}$ (ёки $\sin\frac{n\pi x}{l}$) лар бўйича Фурье рига ёйиш мумкинлигини кўрган эдик. Масалан, бу функция $\frac{n\pi x}{l}$ лар бўйича қаторга ёйилган бўлса, 4°-бандда исбот этилган рема тегишли шартлар бажарилганда бу қатор учун ҳам ўринлилигини кутиш мумкин. Ўша шартларни аниқлайлик.

ерилган функцияни юқорида айтилган қаторга ёйиш учун уни қлик хоссасига асосан [$-l$, 0] га давом эттириб, [$-l$, l] да аниқлган тоқ $\varphi(x)$ функцияни ҳосил қиламиз. Ёрдамчи $\varphi(x)$ функция ун бундан олдинги бандда исбот қилинган теорема ўринли бўлиши чун $f(x)$ қуйидаги шартларга бўйсуниши лозим:

1) $f(0)=0$, акс ҳолда ёрдамчи $\varphi(x)$ функция $x=0$ нуқтада илади;

2) $f(l)=0$, чунки фақат шундай бўлганда $\varphi(-l)=\varphi(l)$ бўлади.

Тоқ функциянинг ҳосиласи жуфт функция бўлгани туфайли $\varphi'(-l)=\varphi'(l)$ тенглик ўз-ўзидан бажарилади. Ундан ташқари, осонна кўрсатиш мумкинки, агар $f(x)$ нинг барча жуфт тартибли ҳосилалари $x=0$ ва $x=l$ да нолга тенг, яъни $f^{(2k)}(0)=f^{(2k)}(l)=0$, $(k=1, 2, \ldots)$ бўлса, у ҳолда $\varphi^{(k)}(-l)=\varphi^{(k)}(l)$ тенглик ўз-ўзидан бажарилади. Дарҳақиқат, [0, l] да $\varphi(x)=f(x)$, $\varphi^{(2k)}(x)=f^{(2k)}(x)$ бўлиб, $f(0)=f(l)$, $f''(0)=f''(l)=0$ ва $f^{(IV)}(0)=f^{(IV)}(l)=0, \ldots$ бўлгани учун

$$\varphi^{(2k)}(0)=\varphi^{(2k)}(l) \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Сўнгра, барча $\varphi^{(2k-1)}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ функциялар жуфт бўлгани туфайли $\varphi^{(2k-1)}(-l)=\varphi^{(2k-1)}(l)$ бўлади. Демак, ёрдамчи $\varphi(x)$ функциянинг ҳосилалари [$-l$, l] кесманинг чегаравий нуқталарида ўзаро тенг қийматларга эга бўлишини таъминлаш учун $f(x)$ нинг барча жуфт тартибли ҳосилалари мавжуд ҳамда $x=0$ ва $x=l$ да нолга тенг деб фараз қилиш етарлидир.

Шундай қилиб, [0, l] да аниқланган $f(x)$ функцияга мос

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m |b_n|, \quad m=1, 2, \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $f(x)$ қуйидаги шартларни қаноатлантиришини талаб қилиш етарлидир:

1) [0, l] да $f(x), f''(x), f^{(IV)}(x), \ldots, f^{(2k)}(x)$ лар **узлуксиз бўлиб,** $f^{(2k-1)}(x)$ узлуксиз бўлакли;

2) $f(0) = f(l) = f''(0) = f^{(IV)}(0) = f^{(IV)}(l) = \ldots = 0.$

Ниҳоят, агар $[-l, l]$ да охирги теорема шартларини қаноатлантирувчи $f(x)$ функцияни $2l$ даврли қилиб бутун Ox ўққа давом эттирсак, у ҳолда функция ва унинг m-тартибгача барча ҳосилалари $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз ва $2l$ даврли бўлади. Бундай умумий ҳол учун 4°-банддаги 1-теоремани қуйидагича таърифлаш мумкин:

2-теорема. *Агар $2l$ даврли $f(x)$ функция ва унинг барча $f^{(m)}(x)$ $(m \geqslant 0)$ ҳосилалари $|x| < \infty$ лар учун узлуксиз бўлиб, $(m+1)$-тартибли $f^{(m+1)}(x)$ ҳосиласи узлуксиз бўлакли бўлса, у ҳолда бу функциянинг Фурье коэффициентлари учун n нинг исталганча катта қийматларида ушбу*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right); \; b_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$$

тенгликлар ўринлидир; бундан ташқари, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ да

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(|a_n| + |b_n|\right.$$

қаторлар яқинлашади.

4° ва 5°-бандларда исбот этилган теоремалар воситасида Фурье қатори қолдиғини баҳолаш мумкин.

Дарҳақиқат, агар $f(x)$ функция 4°-банддаги 1-теорема шартларини қаноатлантирса, у ҳолда унинг Фурье қатори коэффициентлари учун ушбу

$$|a_n| + |b_n| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1} \left(\frac{|a_n^{(m+1)}|}{n^{m+1}} + \frac{|n^{(m+1)}|}{n^{m+1}}\right) \qquad (II.42)$$

тенглик ўринли эканини кўрдик. Қатор қолдиғини $R_N(x)$ орқали белгиласак:

$$R_N(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (II.43)$$

Бундан

$$|R_N(x)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right).$$

(II.42) га асосан

$$|R_N(x)| \leqslant \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \left(|a_n^{(m+1)}| + |b_n^{(m+1)}|\right).$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томонига Коши—Буняковский тенгсизлигини татбиқ этиб, $|R_N(x)|$ учун қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$|R_N(x)| \leqslant \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1} \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(m+1)}}} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n^{(m+1)}| + |b_n^{(m+1)}|\right)^2}$$

ёки

$$|R_N(x)| \leqslant \left(\frac{l}{R}\right)^{m+1} \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(m+1)}}} \times$$

$$\times \sqrt{2\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n^{(m+1}|^2 + |b_n^{(m+1}|^2\right)}.$$

Равшанки,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(m+1)}}$$

қаторни $\varphi(x) = \frac{1}{x^{2(m+1)}}$ функциянинг $[N+1, \infty)$ кесмада Риман интеграл йиғиндиси деб қараш мумкин, у ҳолда аниқ интегралнинг таърифига кўра:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(m+1)}} \leqslant \int_{N}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m+2}} \qquad \text{(II.44)}$$

Демак,

$$|R_N(x)| \leqslant \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1} \left(\int_{N}^{\infty} \frac{dx}{x^{2(m+1)}}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sqrt{2\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n^{(m+1)}|^2 + |b_n^{(m+1)}|^2\right)}.$$

1-боб, 3-§, 1°-бандда исбот қилинган Бессель тенгсизлигига асосан

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n^{(m+1)}|^2 + |b_n^{(m+1)}|^2\right) \leqslant \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} |f^{(m+1)}(x)|^2\, dx$$

эканини эътиборга олсак,

$$|R_N(x)| \leqslant \frac{l^{m+\frac{1}{2}}}{\pi^{m+1}} \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \left(\int_{-l}^{l} |f^{(m+1)}(x)|\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{N^{m+\frac{1}{2}}}$$

ёки

$$|R_N(x)| = o\left(\frac{1}{N^{m+\frac{1}{2}}} \right) \qquad \text{(II. 45)}$$

келиб чиқади. Фурье қатори қолдиғи учун олинган бу баҳонинг (тенгликнинг) аҳамияти шундаки, унинг воситасида бир томондан қаторнинг яқинлашиш тезлигини, иккинчи томондан зарур пайтларда қатор йиғиндисини унинг қисмий йиғиндиси билан алмаштирилганда йўл қўйиладиган хатони баҳолаш мумкин.

9-§. Текис яқинлашувчи тригонометрик қатор йиғиндисининг функционал хоссалари

Функционал қаторлар умумий назариясидан маълумки, текис яқинлашувчи қатор йиғиндиси муҳим функционал хоссаларга эга. Бу хоссалар тегишли теоремалар сифатида исбот қилинади. Тригонометрик қаторлар, уларнинг хусусий ҳоли бўлган Фурье тригонометрик қаторлари учун ҳам тегишли шартларда ўша теоремалар ўринли бўлади. Математик анализ курсида бу теоремалар ушбу икки шарт бажарилган, яъни қатор ҳадлари узлуксиз функциялардан иборат, қаторнинг ўзи эса текис яқинлашувчи бўлган ҳолда исбот қилинади. Тригонометрик қаторларнинг ҳадлари бутун Ox ўқда узлуксиз $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ функциялар бўлгани туфайли, бу ерда ўша теоремаларнинг ўринли бўлиши учун берилган қаторнинг текис яқинлашувчи бўлиши етарлидир. Шунинг учун биз қуйида бу теоремаларнинг таърифларини ва айрим ҳолларда исботини келтирамиз.

1°. Тригонометрик қаторда лимитга ўтиш.

1-теорема. *Агар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{(II.46)}$$

қатор (чекли ёки чексиз) $[a, b]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлиб, $\lim\limits_{x \to x_0} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = c_n$ *дан иборат чекли лимитга эга*

ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = c$ *қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

ик ўринлидир, яъни

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = c,$$

бунда $S(x)$ функция (II.46) қатор йиғиндиси.

Дарҳақиқат, (II.46) қатор ҳадлари бўлган

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (II.46')$$

функциялар бутун Ox ўқда узлуксиз бўлгани учун $[a, b]$ да ҳам узлуксиз бўлади ва $\lim\limits_{x\to x_0}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = c_n$ мавжуд ($x_0 \in [a, b]$).

Қатор $[a, b]$ да яқинлашувчи бўлгани учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ қатор ҳам яқинлашади.

(II. 46) қатор ҳадлари $[a, b]$ да узлуксиз, (II.45) эса текис яқинлашувчи бўлгани учун қаторда лимитга ўтиш қонунийдир, яъни

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

2°. Тригонометрик қатор йиғиндисининг узлуксизлиги. Маълумки, (II. 46) қатор бирор $[a, b]$ оралиқда яқинлашувчи бўлса, унинг $S(x)$ йиғиндиси ўша оралиқда аниқланган функция бўлиб, $[a, b]$ га тегишли исталган x_0 учун

$$S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)$$

бўлади.

Агар (II.46) қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $S(x)$ ўша кесмада узлуксиз, яъни $[a, b]$ нинг исталган x_0 нуқтаси учун

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$$

бўлади.

Ҳақиқатан,

$$\lim_{x\to x_0}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0$$

бўлиб, қатор текис яқинлашувчи бўлгани туфайли 1°-бандга асосан

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0 + b_n\sin nx_0) = S(x_0),$$

яъни

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0).$$

Демак, $S(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди.

2-теорема. *Агар*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

тригонометрик қатор $[a, b]$ *да текис яқинлашувчи бўлса, унинг* $S(x)$ *йиғиндиси* $[a, b]$ *кесмада узлуксиз бўлади.*

Изоҳ. Агар тригонометрик қатор бутун Ox ўқда текис яқинлашувчи бўлса, унинг $S(x)$ йиғиндиси $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз ва даврий функция бўлиши равшан.

3°. **Тригонометрик қаторни ҳадлаб интеграллаш ва дифференциаллаш.** Қаторлар назариясининг татбиқларида кўпинча берилган функционал қаторни ҳадлаб интеграллаш зарурати туғилади, шунинг учун бу масалага оид теоремани келтирамиз.

3-теорема. *Агар (II.46) кўринишдаги қатор* $[a, b]$ *да текис яқинлашувчи бўлса, бу қаторни шу кесмада ҳадлаб интеграллаш мумкин, яъни*

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,dx. \quad (II.47)$$

Ҳақиқатан, бу қатор узлуксиз функциялар йиғиндисидан иборат бўлиб, $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлгани туфайли математик анализ курсида исбот қилинадиган тегишли теоремага асосан бу қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин, яъни (II.47) тенглик ўринлидир.

Ниҳоят, кўп масалаларда, айниқса математик физика тенгламаларини ечишга оид масалаларда тригонометрик қаторларни, чунончи Фурье тригонометрик қаторларини ҳадлаб дифференциаллаш талаб этилади. Шунинг учун бу параграфни Фурье тригонометрик қаторини ҳадлаб дифференциаллаш ҳақидаги теоремани исбот қилиш билан якунлаймиз.

4-теорема. *Агар* $[-l, l]$ *кесмада аниқланган* $f(x)$ *функция ва унинг* $f^k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ *ҳосилалари узлуксиз ва кесманинг чегараларида ўзаро тенг қийматларга эга, яъни*

$$f^{(k)}(-l) = f^k(l),\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, m$$

бўлиб, $(m+1)$-ҳосиласи сони чекли узлуксиз бўлаклардан иборат бўлса, у ҳолда бу функциянинг Фурье қаторини m марта кетма-кет дифференциаллаш мумкин, яъни барча $|x|\leqslant l$ ва $1\leqslant k\leqslant m$ учун

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^{(k)}. \tag{II.48}$$

Исботи. Агар $|x|\leqslant l$ учун

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{II.49}$$

бўлса, у ҳолда тенгликнинг ўнг томонидаги қаторни формал равишда кетма-кет ҳадлаб дифференциалласак, қуйидаги қаторларни ҳосил қиламиз:

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{n\pi}{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}+\frac{\pi}{2}\right)+b_n\frac{n\pi}{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}+\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$f''(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi x}{l}+\pi\right)+b_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi x}{l}+\pi\right)\right),$$

. . . .

$$f^{(k)}(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^k\cos\left(\frac{n\pi x}{l}+k\frac{\pi}{2}\right)+b_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^k\sin\left(\frac{n\pi x}{l}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Бу қаторларнинг мос мажорант қаторлари ушбу

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^k(|a_n|+|b_n|),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ m \tag{II.50}$$

қаторлардан иборат бўлиб, улар теорема шартларига кўра яқинлашади. Демак, (II.48) қатор текис яқинлашади. Шундай қилиб, теорема исбот қилинди.

10-§. Коэффициентлари камаювчи тригонометрик қаторлар ва уларнинг хоссалари

Тригонометрик қаторларнинг татбиқларида коэффициентлари камаювчи қаторлар муҳим аҳамиятга эга бўлиб, уларнинг яқинлашиш шартлари ҳам ўзига хос хусусиятга эгадир. Шунинг учун биз бу параграфда шу масалага оид бир неча лемма ва теоремаларнинг исботини келтирамиз.

1°. **Абель леммаси.** Агар ушбу

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{II.52}$$

(ҳақиқий ёки комплекс) сонли қаторнинг

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{II.53}$$

қисмий йиғиндиси исталган n учун

$$|A_n| \leqslant M, \ M = \text{const}, \ n = 1, 2, \ldots$$

тенгсизликни қаноатлантириб, $\{\alpha_n\}$ кетма-кетлик эса монотон камайиб нолга интилса, у ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n \tag{II.54}$$

қатор яқинлашади ва бу қаторнинг S йиғиндиси учун ушбу

$$|S| \leqslant M\alpha_0 \tag{II.54'}$$

тенгсизлик ўринлидир.

Исботи. (II.54) қаторнинг қисмий йиғиндисини ёзайлик:

$$S_n = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n.$$

Бу ерда $a_0 = A_0$, $a_1 = A_1 - A_0$, $a_2 = A_2 - A_1$, $\ldots$, $a_n = A_n - A_{n-1}$ бўлганлиги учун

$$S_n = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 (A_1 - A_0) + \alpha_2 (A_2 - A_1) + \ldots + \alpha_n (A_n - A_{n-1})$$

бўлади. Бундан

$$S_n = A_0 (\alpha_0 - \alpha_1) + A_1 (\alpha_1 - \alpha_0) + \ldots + A_{n-1} (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) + A_n \alpha_n,$$

$$S_n - A_n \alpha_n = \sum_{k=0}^{n-2} A_k (\alpha_k - \alpha_{k-1}).$$

Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \tag{II.55}$$

қатор яқинлашувчидир, чунки

$$M (\alpha_0 - \alpha_1) + M (\alpha_1 - \alpha_2) + M (\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + M (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \\ + \ldots = M\alpha_0,$$

яъни чекли $M\alpha_0$ йиғиндига эга. Лемма шартига кўра

$$|A_{n-1} (\alpha_{n-1} - \alpha_n)| \leqslant M |\alpha_{n-1} - \alpha_n|$$

бўлганлиги туфайли

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1} (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \tag{II.56}$$

р ҳам яқинлашади. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини $\overline{S}_n$ деб илсак:

$$\overline{S}_n = S_n - A_n\alpha_n,$$

дан

$$\lim_{n\to\infty}|S_n - A_n\alpha_n| = \lim_{n\to\infty}|\overline{S}_n| < M\alpha_0.$$

дан ташқари,

$$|A_n\alpha_n| \leqslant M\alpha_n$$

тсизликдан ва $\{\alpha_n\}$ монотон камаювчи ҳамда $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ бўлган-идан

$$\lim_{n\to\infty} A_n\alpha_n \leqslant M\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0.$$

Демак,

$$\lim_{n=\infty} S_n = S$$

мавжуд, яъни (II. 54) қатор яқинлашади ва (II.54′) тенгсизлик бажарилади. Шундай қилиб, Абель леммаси тўлиқ исбот қилинди.

2°. Коэффициентлари монотон камаювчи тригонометрик қаторнинг яқинланиши.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx \tag{II.57}$$

ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx \tag{II.58}$$

кўринишдаги қаторлар берилган бўлиб, уларнинг йиғиндиси олдиндан маълум бўлмасин (*яъни бу қаторлар тайин функцияларнинг ёйилмаси эканлиги бизга олдиндан маълум эмас деб фараз қилайлик*). Агар бу қаторларнинг тегишли коэффициентларидан тузилган $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар монотон камаювчи бўлса, у ҳолда бу қаторларнинг яқинлашиши ҳақида нима дейиш мумкин деган савол туғилиши табиий. Қуйида биз шу саволга жавоб тариқасида бир неча муҳим теоремаларни исбот қиламиз. Бундан олдин (I.15) асосий тригонометрик системадан тузилган

$$\sigma_n^{\mathrm{I}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin kx, \tag{II.59}$$

$$\sigma_n^{\mathrm{II}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\cos kx + \frac{1}{2} \tag{II.60}$$

йиғиндиларни баҳолаймиз. Тригонометрия курсидан маълумки,

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Бундан

$$\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x=2\sin nx\cdot\sin\frac{x}{2},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

у ҳолда

$$\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{3}{2}x=2\sin x\cdot\sin\frac{x}{2},$$

$$\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{5}{2}x=2\sin 2x\cdot\sin\frac{x}{2},$$

. . . .

$$\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x=2\sin nx\cdot\sin\frac{x}{2}.$$

Бу тенгликларнинг чап ва ўнг томонларини мос равишда бир-бирига қўшсак, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx$$

ёки

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Бундан

$$x=2k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

дан фарқли барча нуқталар ва исталганча катта n учун

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{\left|\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)kx\right|}{2\sin\frac{x}{2}}<\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, (II.59), яьни $\sigma_n^{1}(x)$ йиғинди x нинг $2k\pi$ дан фарқли ҳар қандай тайин қийматида исталганча катта n учун чегараланган бўлади, яъни

$$|\sigma_n^{1}(x)|<L,\quad L=\text{const}. \qquad \text{(II.59')}$$

II боб, 2-§, 3°-бандда $\sigma_n^{11}(x)$ учун қуйидаги формулани ҳосил қилган эдик:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)kx}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{(II.15)}$$

Бундан $x = 2k\pi$, $k = 0$, ± 1, ± 2, ... дан фарқли барча нуқталар учун

$$|\sigma_n^{II}(x)| \leqslant \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant B, \ B = \text{const}. \qquad (II.60')$$

1-теорема. *Агар (II.57) ва (II.58) қаторларнинг тегишли* a_n, b_n *коэффициентлари мусбат ва тайин номердан бошлаб* $n\to\infty$ *да кенг маънода монотон камайиб (яъни ортмасдан) нолга интилса, у ҳолда бу қаторлар x нинг исталган қийматида, биринчи қатор балки фақат* $x = 2k\pi$, $k = 0$, ± 1, ± 2, ... *дан фарқли бўлган барча қийматларида яқинлашади.*

Исботи. а) агар (II.57) ва (II.58) қаторларнинг коэффициентларидан тузилган ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (II.57')$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (II.58')$$

сонли қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда теореманинг ўринли бўлиши ўз-ўзидан келиб чиқади. Дарҳақиқат, берилган функционал қаторларнинг ҳадлари учун исталган x да $|a_n\cos nx| < a_n$ ва $|b_n\sin nx| < < b_n$ бўлиб (II. 57′) ва (II.58′) қаторлар яқинлашувчи бўлгани туфайли (II.57) ва (II.58) қаторлар исталган x да абсолют ва текис яқинлашади;

б) энди теоремани умумий ҳол учун, яъни a_n ва b_n теорема шартларини қаноатлантириб, (II.57′) ва (II.58′) қаторлар яқинлашувчи бўлмаган ҳол учун исбот қиламиз. 1°-бандда исбот этилган Абель леммасига асосан (II.59′) ва (II.60′) тенгсизликлар бажариладиган ҳар бир x учун 1-теореманинг ўринли эканлиги равшандир.

Хулоса. Агар

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\cos nx + b_n\sin_{n\,x}]$$

қаторнинг мос коэффициентлари 1-теорема шартларини қаноатлантирса, бу қатор x нинг $x = 2k\pi$, $k = 0$, ± 1, ± 2, ... дан фарқли исталган қийматларида яқинлашади. Ҳақиқатан, a_n ва b_n лар теорема шартларини қаноатлантирса, (II.57) ва (II.58) ларнинг ҳар иккаласи ҳам x нинг айтилган қийматларида яқинлашади. У ҳолда яқинлашувчи иккита қатор йиғиндисидан иборат бўлган бу қатор ҳам яқинлашади.

Мисоллар. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ қатор $(-\infty, +\infty)$ га тегишли исталган x учун яқинлашади. Дарҳақиқат, $x = 2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ нуқталарда бу қаторнинг барча ҳадлари ноллардан иборат бўлиб, йиғиндиси ҳам нолга тенг; $x = 2k\pi$ дан фарқли нуқталарда эса теорема шартлари тўла бажарилади.

2. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ қатор x нинг $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ дан фарқли барча қийматларида яқинлашади.

3. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin nx}{n^{\alpha}}$ қатор $\alpha > 1$ бўлганда x нинг исталган қийматларида яқинлашади, чунки исталган n учун $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}} > 0$, $b_n = \frac{1}{n^{\alpha}} >$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ қатор яқинлашади. $\alpha \leqslant 1$ бўлса, бу қатор x нинг $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ дан фарқли қийматларидагина яқинлашади.

2-теорема. *Агар (II. 57) ва (II. 58) қаторларнинг мос a_n ва b_n коэффициентлари 1-теорема шартларини қаноатлантирса, у ҳолда бу қаторлар $x = 2k\pi$, $k = 0, +1, +2, \dots$ кўринишдаги нуқталар кирмайдиган ҳар қандай $[a, b]$ кесмада текис яқинлашади.*

Исботи. а) (II.57′) ва (II.58′) қаторлар яқинлашувчи бўлганда бу теореманинг ўринли эканлиги равшан [1-теорема исботидаги а) ҳолга қаранг].

Мисол. $a > 1$ ва $b > 1$ бўлганда

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{a^k} \quad \text{ва} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{b^k}$$

қаторларнинг иккаласи ҳам исталган x учун текис яқинлашади. Дарҳақиқат, исталган x учун

$$\left|\frac{\cos kx}{a^k}\right| \leqslant \frac{1}{a^k} \quad \text{ва} \quad \left|\frac{\sin kx}{b^k}\right| \leqslant \frac{1}{b^k}$$

бўлиб, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^k}$ ва $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b^k}$ қаторлар яқинлашувчи бўлгани сабабли берилган қаторлар текис яқинлашди. Бу шартларда

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos kx}{a^k}+\frac{\sin kx}{b^k}\right)$$

қатор ҳам исталган x учун текис яқинлашиши равшан.

б) энди теоремани умумий ҳол учун исбот қиламиз. Ҳар икки қатор учун теореманинг исботи бир хил бўлганлигидан теоремани (II.58) қатор учун исбот қиламиз. Теорема шартида айтилган $[a, b]$ кесмага тегишли исталган x учун қатор қолдиғи бундай бўлади:

$$R_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx-S_n(x)=$$

$$=b_{n+1}\sin(n+1)x+b_{n+2}\sin(n+2)x+\ldots, \qquad \text{(II.61)}$$

бу ерда

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kx.$$

$R_n(x)$ ни баҳолаймиз. Ёрдамчи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx \qquad \text{(II.62)}$$

қаторнинг қисмий йиғиндисини $\sigma_n(x)$ деб белгиласак, бу қатор қолдиғи учун

$$r_m(x)=\sigma_{n+m}(x)-\sigma_n(x),\ m=1,\ 2,\ \ldots.$$

(II. 59′) га кўра

$$|r_m(x)|\leqslant|\sigma_{n+m}(x)|+|\sigma_n(x)|\leqslant\frac{2}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. $0<a\leqslant x\leqslant b<2\pi$ ни қаноатлантирувчи барча x лар учун шундай $p>0$ мавжудки, $\left|\sin\frac{x}{2}\right|>p$ бўлади, бунинг учун $p=\min\left(\left|\sin\frac{a}{2}\right|,\ \left|\sin\frac{b}{2}\right|\right)$ деб олиш кифоя. Агар $\frac{2}{p}=P$ деб белгиласак, барча $x\in[a,\ b]$ лар учун

$$|r_m(x)|<P.$$

$\{b_{n+m}\}$, $m=1,2,\ldots$ кетма-кетлик ва

$$R_n(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_{n+m}\sin(m+n)x \qquad \text{(II.61)}$$

қаторнинг қисмий йиғиндиси Абель леммаси шартларини қаноатлантиргани туфайли $[a, b]$ га тегишли исталган x учун

$$|R_n(x)| \leqslant Mb_{n+1}.$$

Шартга кўра $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = 0$, бундан исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $N(\varepsilon)$ кўрсата оламизки, барча $n > N$ ва $[a, b]$ дан олинган ҳар қандай x учун

$$|R_n(x)| \leqslant |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, (II.58) қатор текис яқинлашади. Шундай қилиб, 2-теорема тўлиқ исбот қилинди.

Мисоллар. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ қатор исбот этилган теоремага мисол бўлади.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}x}{\ln(n+1)}$ қатор $x = k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ нуқталар кирмайдиган исталган $[a, b]$ кесмада текис яқинлашади.

Изоҳ. Агар (II.57) ва (II.58) қаторларнинг биринчи коэффициентидан бошлаб барчаси эмас, балки тайин m-номеридан бошлаб қолган ҳамма коэффициентлари юқорида исбот этилган теоремаларнинг тегишли шартларини қаноатлантирса, бу ҳолда ҳам теоремалар ўринли бўлади. Дарҳақиқат, агар (II.57) қаторнинг тайин m-номеридан бошлаб барча коэффициентлари ортмасдан нолга интилувчи бўлса, у ҳолда бу қаторни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{m} a_k\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}\cos(m+n)x.$$

Бу ерда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k\cos kx = \frac{A_0}{2}, \quad A_n = a_{m+n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

деб олсак, ушбу

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(m+n)x$$

қатор коэффициентлари ўша теоремаларнинг шартларини қаноатлантиради. У вақтда юқоридаги теоремалар бу ҳол учун ҳам ўринли бўлади.

3. **Коэффициентлари камаювчи тригонометрик қаторлар йиғиндисининг функционал хоссалари. 1-теорема.** *Агар*

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{II.62}$$

ва

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{II.63}$$

қаторларнинг мос a_n, b_n коэффициентлари мусбат ва $n \to \infty$ да ортмасдан нолга интилса, у ҳолда уларнинг мос $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ йиғиндилари 2π даврли ва Ox ўқнинг, балки фақат $x = 2k\pi$, $k = 0$, ± 1, ± 2, ... нуқталаридан фарқли ҳар қандай нуқтасида узлуксиз бўлади.

Исботи. а) агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ нинг ҳадлари теорема шартларини қаноатлантириб, улар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда теорема ўринли. Дарҳақиқат, бу ҳолда (II. 62) ва (II. 63) қаторлар $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз

$$u_n(x) = a_n \cos nx \text{ ва } v_n(x) = b_n \sin nx$$

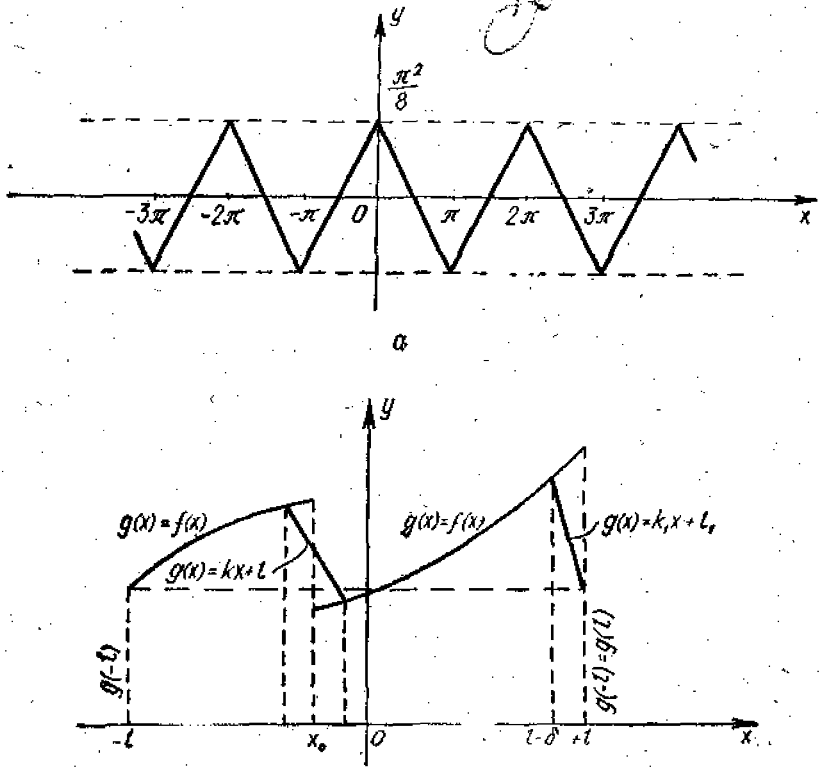
функциялардан тузилган ва текис яқинлашувчи бўлади. Бундан $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг бутун Ox ўқда узлуксиз бўлиши бевосита келиб чиқади.

Мисоллар. Маълумки,

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

қаторнинг $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$ коэффициентлари теорема шартларини қаноатлантириб, қаторнинг ўзи Ox ўқда текис яқинлашувчи бўлгани туфайли унинг $f_1(x)$ йиғиндиси $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиздир. Бу функциянинг графиги $y = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)$ функция графигини бутун Ox ўққа 2π даврли қилиб давом эттиришдан ҳосил қилинади (35-чизма).

2) $f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{1+n^3}}$ қатор йиғиндиси $f_2(x)$ ҳам $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз функциядир. Буни текширишни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз.



а

б

35-чизма.

б) энди теоремани умумий ҳол учун, яъни a_n ва b_n мусбат ва $n \to \infty$ да ортмай нолга интилувчи, аммо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ва } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

қаторларнинг яқинлашувчи бўлиши шарт бўлмаган ҳол учун исбот қиламиз. (II.62) ва (II.63) нинг иккаласи ҳам узлуксиз функциялардан тузилган қаторлар бўлиб, 2°-бандда исбот этилган 1-теоремага асосан улар $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ дан фарқли ҳар қандай x нуқтада текис яқинлашувчи бўлганлиги учун $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ ўша нуқталарда узлуксиз бўлади.

Мисоллар. 1) $f_1(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ қаторнинг $a_n = \frac{1}{\ln n}$ коэффициентлари барча $n \geqslant 3$ лар учун теорема шартларини қаноатлантиргани туфайли бу қатор йиғиндиси $f_1(x)$ функция $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2,$ ... дан фарқли исталган нуқтада узлуксиздир.

2) $f_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ қаторнинг $b_n = \frac{1}{n}$ коэффициентлари барча n лар учун теорема шартларини қаноатлантиради, унинг йиғиндиси $f_2(x)$ эса $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ дан фарқли исталган нуқтада узлуксиздир.

2-теорема. *Агар (II. 62) ва (II. 63) қаторларнинг тегишли коэффициентлари 1-теорема шартларини қаноатлантирса, у ҳолда бу қаторларни $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ нуқталар кирмайдиган ҳар қандай $[\alpha, \beta]$ кесмада ҳадлаб интеграллаш мумкин, яъни*

$$\text{а)} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx = \frac{a_0}{2}(\beta - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}(\sin \beta n - \sin \alpha n)$$

ёки

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f_1(x)\,dx = \frac{a_0}{2}(\beta - \alpha) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos\frac{n(\alpha+\beta)}{2} \cdot \sin\frac{n(\beta-\alpha)}{2};$$

$$\text{б)} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}(\cos n\beta - \cos n\alpha) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sin\frac{n(\alpha+\beta)}{2} \sin\frac{n(\beta-\alpha)}{2}.$$

Теорема шартлари бажарилганда юқоридаги иккала қатор $[\alpha, \beta]$ да текис яқинлашади, у ҳолда функционал қаторни ҳадлаб интеграллаш ҳақидаги теоремадан бу теореманинг ўринли эканлиги бевосита келиб чиқади.

Мисоллар. (I.27) дан маълумки,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

$$(0 < x < 2\pi)$$

бўлиб, бу қатор коэффициентлари $\left(b_n = \frac{1}{n}\right)$ теорема шартларини қаноатлантиради, демак, уни $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ да ҳадлаб интеграллаш мумкин.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -$$

$$-\frac{(\pi - x)^2}{4} \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}.$$

Бундан,

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} =$$

$$= -\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Демак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3-теорема. *Агар (II. 62) ва (II.63) қаторларнинг* a_n, b_n *коэффициентлари мусбат ва* $n \to \infty$ *да* na_n *ва* nb_n *ортмай нолга интилса, у ҳолда бу қаторларни* $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ *нуқта-*

ир кирмайдиган ҳар қандай $[\alpha, \beta]$ кесмада ҳадлаб дифференциаллаш мумкин, яъни $[\alpha, \beta]$ га тегишли исталган x учун мос равишда

$$f_1'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n n \sin nx \tag{II.62'}$$

ва

$$f_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \cos nx \tag{II.63'}$$

бўлади.

Исботи. Теореманинг исботи иккала қатор учун ҳам бир хил. Шунинг учун теоремани (II. 62) қатор учун исботлайлик:

а) теорема шартларига кўра бу қаторнинг a_n коэффициентлари I-теорема шартларини қаноатлантиради, у ҳолда (II.62) қатор $[\alpha, \beta]$ да текис яқинлашади.

б) агар $na_n = a'_n$ деб олсак, у ҳолда (II.62') қаторнинг a'_n коэффициентлари ҳам 1-теорема шартларини қаноатлантиради. Бундан $[\alpha, \beta]$ да (II.62') қатор ҳам текис яқинлашади. а) ва б) га ҳамда функционал қаторларни дифференциаллашга оид теоремага асосан $[\alpha, \beta]$ га тегишли исталган x учун (II.62) нинг ўринли экани бевосита келиб чиқади.

Мисол. Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

қатор исталган x учун текис яқинлашувчи бўлиб, $[0, 2\pi]$ да $f(x) = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}$ функциядан иборат йиғиндига эга. Бу қаторнинг $a_n = \frac{1}{n^2}$ коэффициентлари ва $a_n n = \frac{1}{n}$ барча n лар учун мусбат ҳамда ($n \to \infty$ да) ортмасдан нолга интилади. У ҳолда бу қаторни $x \in (0, 2\pi)$ да ҳадлаб дифференциаллаш мумкин, яъни $0 < x < 2\pi$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x - \pi}{2}$$

ёки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Равшанки, агар $f(x) = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}$ ни 2π даврли қилиб бутун Ox ўққа давом эттирсак, бундан ҳосил бўлган янги функция исталган x учун берилган қатордан иборат ёйилмага эга бўлади. У ҳолда берилган қаторни $(-\infty, +\infty)$ да ҳадлаб интеграллашдан ҳосил бўлган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

қатор $\pm 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$ ... дан фарқли исталган x учун $\frac{x-\pi}{2}$ га текис яқинлашади.

Юқорида исбот қилинган учта теорема тегишли шартларда ушбу

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nx \qquad (II.64)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \sin nx \qquad (II.65)$$

қаторлар учун ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин. Чунончи, агар бу қаторларнинг a_n ва b_n коэффициентлари мусбат ва $n \to \infty$ да ортмасдан нолга интилса, у ҳолда ҳар икки қатор учун қуйидаги хоссалар ўринлидир:

1-**хосса.** Берилган қаторлардан биринчиси x нинг, балки фақат $x = (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1$, ... дан фарқли, иккинчиси эса исталган қийматларида яқинлашади;

2-**хосса.** Берилган қаторлар $x = (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1$, ... нуқталар кирмайдиган исталган кесмада текис яқинлашади;

3-**хосса.** Қаторларнинг йиғиндилари балки фақат юқорида айтилган нуқталардан фарқли исталган нуқтада узлуксиз бўлади;

4-**хосса.** Ҳар иккала қаторни ҳам улар текис яқинлашадиган $[\alpha, \beta]$ кесмада ҳадлаб интеграллаш мумкин;

5-**хосса.** Ниҳоят, агар $a_n \cdot n$ ва $b_n \cdot n$ лар $n \to \infty$ да ортмасдан нолга интилса, у ҳолда ўша $[\alpha, \beta]$ кесмада бу қаторларни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин.

Ҳар икки қатор учун 1-хоссанинг ўринли эканини кўрсатамиз. Равшанки, 2°- бандда исбот қилинган теоремага асосан

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(y - \pi)$$

қатор, балки фақат $y - \pi = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$, ... ёки $y = (2k+1)\pi$ дан фарқли исталган нуқтада яқинлашади. Бундан ташқари,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n(y-\pi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\cos ny$$

бўлгани туфайли 1-хосса (II.64) учун исбот бўлди. Шунга ўхшаш

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(y-\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n\sin ny$$

бўлиб, тенгликнинг чап томонидаги қатор яқинлашадиган нуқталарда ўнг томондаги қатор ҳам яқинлашади, яъни 1-хосса иккинчи қатор учун ҳам ўринлидир.

Шу хилда мулоҳаза юритиб, тегишли шартларда 2—5-хоссаларни ҳам исбот қилиш мумкин.

II. БОБГА ДОИР МИСОЛЛАР

I. *Узлуксиз бўлакли ва силлиқ бўлакли функцияларга доир мисоллар.*

1. *Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлиги текширилсин ва графиклари ясалсин:*

а) $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0; \\ x^2, & 0<x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$

б) $f(x)=x-(x)^*$;

в) $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x \text{ агар } |x|\leqslant 1, \\ |x-1|, \quad |x|>1; \end{cases}$

г) $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin x)$.

2. *Юқорида келтирилган функциялар силлиқликка текширилиб, ўша функциялар ҳосилаларининг графиклари ясалсин.*

3. $[a, b]$ да узлуксиз функция ўша кесмада силлиқ ёки силлиқ бўлакли бўладими?

4. (a, b) *да силлиқ бўлакли функция* ўша кесмада узлуксиз бўладими?

5. Агар $\varphi(x)$ функция $x=a$ нуқта атрофида узлуксиз бўлса, $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ функция ўша нуқта атрофида *силлиқ бўладими?*

6. *Олдинги мисол шартида* $f(x)=|x-a|\varphi(x)$ функция ҳақида нима дейиш мумкин?

7. $f(x)=|3x^2-9x+6|$ функция ўзининг аниқланиш оралиғида силлиқми?

8. Агар X (*чекли, чексиз*) *соҳада аниқланган* $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ўша *соҳада силлиқ* бўлса, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ ва $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функциялар силлиқ бўладими?

II. Сонли қатор йиғиндисини тригонометрик қаторлар воситасида ҳисоблашга доир мисоллар:

1. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} 1+x, & -1<x\leqslant 0. \\ (1+x)^2, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

функция учун Фурье қатори ёзилсин. $f(-1)$, $f(0)$ ва $f(1)$ дан фойдаланиб, *тегишли сонли қаторлар йиғиндиси ҳисоблансин.*

2. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & -\pi<x\leqslant 0, \\ \sin x, & -0<x\leqslant\pi \end{cases}$$

---

* (x) деб x абсциссали нуқтадан унга энг яқин нуқтагача бўлган масофага айтилади.

функция Фурье қаторига ёйилсин. $f(-\pi), f(0), f(\pi)$ га асосан тегишли сонли қаторлар йиғиндиси ҳисоблансин.

3. Ушбу

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

формулалардан фойдаланиб, қуйидаги

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}}{-\sin\frac{x}{2}}, \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2kx}{2\sin x}.$$

тригонометрик айниятлар исбот қилинсин.

4. $[0, 2\pi]$ кесмага тегишли ушбу

$$\text{а)} \sum_{k=0}^{n} \cos kx = 0, \qquad \text{б)} \sum_{k=0}^{n} \sin kx = 0$$

тригонометрик тенгликларнинг илдизлари топилсин.

5. $[0, 2\pi]$ да ушбу

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$$

кўпҳаднинг экстремал қийматлари аниқлансин.

6. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 6, & x = 0, \\ x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

функцияни $[-\pi, \pi]$ да Фурье қаторига ёйиш мумкинми?

7. Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да Дирихле теоремаси шартларини қаноатлантирувчи ва исталган x учун ушбу

$$f(x+\pi) = f(x)$$

тенглик ўринли бўлса, унинг Фурье қаторининг барча жуфт коэффициентлари нолга тенглиги исботлансин.

8. Агар $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ да интегралланувчи бўлиб, ундан ташқари лган x учун ушбу

$$f(-x) = f(x), \quad f(x+\pi) = -f(x)$$

нгликларни қаноатлантирса, бу функциянинг Фурье коэффициентларининг $_{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ дан бошқа ҳаммаси нолга тенг экани кўрсатилсин.

9. Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи бўлиб, ушбу

$$f(-x) = f(x) \text{ ва } f(x+\pi) = -f(x)$$

нгликлар бажарилса, бу функциянинг Фурье коэффициентлари ҳақида нима йиш мумкин?

10. Юқорида айтилган шартда

а) $f(-x) = f(x)$ ва $f(x+\pi) = f(x)$

б) $f(-x) = -f(x)$ ва $f(x+\pi) = f(x)$

тенгликлар ўринли бўлганда, Фурье коэффициентларининг қайсилари нолдан фарқли бўлади?

III боб

ФУНКЦИЯЛАРИНИНГ ОРТОГОНАЛ СИСТЕМАЛАРИ ВА БЕРИЛГАН ФУНКЦИЯНИНГ ОРТОГОНАЛ СИСТЕМА БЎЙИЧА ФУРЬЕ ҚАТОРИ

11-§. Функцияларнинг ортогонал ва нормал системалари

1°. Таъриф. *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар учун*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0 \tag{III.1}$$

бўлса, у ҳолда бу функциялар $[a, b]$ *да ортогонал дейилади.*

Мисоллар. 1) $f(x) = 2x$ ва $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$ функциялар $[0, 1]$ кесмада ортогоналдир. Ҳақиқатан,

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^1 2x\left(\frac{3}{2}x - 1\right)dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x)\,dx = x^3 - x^2\Big|_0^1 = 0.$$

2) $f(x) = \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x, \quad g(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$ функциялар $[0, \pi]$ кесмада ортогоналдир, бу ерда $m, n (m \neq n)$ — ихтиёрий натурал сонлар.

Дарҳақиқат, $\int_0^\pi f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^\pi \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\,dx = \frac{1}{2} \times$

$$\times \int_0^\pi [\cos(m+n+1)x - \cos(m-n)x]\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n+1)x}{m+n+1} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^\pi = 0$$

3) $f(x) = x$ ва $g(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ функциялар $[-1, 1]$ да ортогоналдир.

Текшириш.

$$\int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (5x^4 - 3x^2)\,dx = \frac{1}{2}(x^5 - x^3)\Big|_{-1}^1 = \frac{x^3}{2}(x^2 - 1)\Big|_{-1}^1 = 0.$$

2°. Таъриф. *Агар*

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots \tag{III.2}$$

функциялар системасининг исталган иккита $\varphi_n(x)$, $\varphi_m(x)$ функциялари учун

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} m\neq n \text{ да } 0, \\ m=n \text{ да нолдан катта} \end{cases} \qquad \text{(III.3)}$$

бўлса, у ҳолда (III.2) система $[a, b]$ да ортогонал дейилади.

Равшанки, (III.3) тенглик берилган система исталган иккита функциясининг ўзаро ортогонал бўлиши шартидир.

Мисоллар. 1) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots$ система $[0, \pi]$ да ортогоналдир.

Текшириш. $m\neq n$ учун

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^\pi = 0; \quad \int_0^\pi \cos mx\cdot\cos mx dx = \frac{\pi}{2} > 0.$$

2) $\sin x, \sin 3x, \ldots, \sin(2n+1)x \ldots$ система $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ да ортогоналдир.

Текшириш. $m\neq n$ $(m=0, 1, 2, \ldots; n=0, 1, 2, \ldots)$ бўлганда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x\sin(2m+1)xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos 2(m-n)x - \cos 2(m+n+1)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin 2(m+n+1)x}{2(m+n+1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2n+1)xdx = \frac{\pi}{4} > 0.$$

3) жуда катта назарий ва татбиқий аҳамиятга эга бўлган, Лежандр[1] полиномлари деб аталувчи

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\frac{1}{2^n\cdot n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad \text{(III.4)}$$

функциялар $[-1, 1]$ да ортогонал системадир, чунки исталган n ва $m(m, n = 0, 1 \ldots)$ учун

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\, dx = \begin{cases} \text{агар } m\neq n \text{ бўлса, } 0 \\ m=n \text{ бўлсa, нолдан катта.} \end{cases} \qquad \text{(III.4')}$$

Дарҳақиқат, (III.4') ни бўлаклаб интеграллаcак,

---

[1] Лежандр (1752—1833) — атоқли француз математиги.

$m=n$ бўлганда эса

$$\int_{-1}^{1} u_n^2(x)\,p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sin^2[(n+1)\arccos x]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{1-\cos 2(n+1)\arccos x}{2}\,d(\arccos x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{arc}\,\cos x\,\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-\frac{1}{4(n+1)}\sin 2(n+1)\arccos x\,\Big|_{-1}^{1} = 1 > 0.$$

Демак, $\{u_n(x)\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ система $[-1, 1]$ да $P(x)=\sqrt{1-x^2}$ вазнли ортогонал экан.

4°. **Таъриф.** *Агар* (III.2) *функциялар системасининг исталган* $\varphi_n(x)$, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ *ҳади учун*

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1 \tag{III.6}$$

бўлса, у ҳолда бу система нормалланган дейилади. Агар шу $\{\varphi_n(x)\}$ *системанинг исталган* $\varphi_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$ *ҳади ва* $[a, b]$ *да мусбат узлуксиз* $p(x)$ *функция учун* $\int_a^b \varphi_n^2(x)\,p(x)\,dx = 1$ *бўлса, у ҳолда бу система* $[a, b]$ *да* $p(x)$ *вазнли нормалланган система дейилади.*

Қуйида биз исталган ортогонал системани нормаллаш мумкинлигини кўрсатамиз. (III.2) система $[a, b]$ да ортогонал бўлсин. Агар бу система ҳадларини мос равишда ўзгармас $\lambda_n \neq 0$ сонларга кўпайтирсак, ундан ҳосил бўлган

$$\lambda_0\varphi_0(x), \lambda_1\varphi_1(x), \lambda_2, \varphi_2(x), \ldots, \lambda_n\varphi_n(x), \ldots \tag{III.7}$$

система ҳам $[a, b]$ да ортогонал ва

$$\int_a^b \lambda_n^2\varphi_n^2(x)dx = \lambda_n^2\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx > 0, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

бўлади. Бунда $\lambda_n^2 = \frac{1}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}$ ёки $\lambda_n = \left(\pm\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}\right)^{-1}$,

$n=0, 1, \ldots$ деб олсак, у ҳолда (III.7) система учун (III.6) ўринли, яъни (III.7) система нормалланган бўлади.

Мисоллар. 1) I бобда

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots$$

истема $[0, 2\pi]$ да нормалланган система эканини кўрган эдик;

2) юқорида ушбу

$$P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \ n = 0, 1, 2 \ \ldots \qquad \text{(III.8)}$$

Лежандр полиномлари $[-1, 1]$ да ортогонал эканини кўрдик. Энди бу система учун тегишли $\{\lambda_n\}$ сонли кетма-кетликни аниқлаб, (III.8) ни нормаллаймиз. Бунинг учун олдин

$$I_n^2 = \int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx = \frac{1}{(2n\,!!)^2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]^2dx \qquad \text{(III.9)}$$

ни ҳисоблаймиз. Агар тенгликнинг чап томонидаги интегрални ушбу

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]^2dx = \int_{-1}^{1}[(x^2-1)^n]^{(n)}[(x^2-1)^n]^{(n)}\,dx$$

кўринишда ёзиб, сўнгра n марта кетма-кет бўлаклаб интегралласак, (III. 4) га асосан $m = n$ учун

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]^2dx = \frac{2n!}{(2n!!)^2}\,2\int_{0}^{1}(x^2-1)^n\,dx$$

бўлади. Агар бу интегралда $x = \sin t$ алмаштириш бажарса, Валлис формуласига кўра

$$\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx = \int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\,dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

бўлади ёки

$$I_n = \int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]^2dx = \frac{2\cdot 2n!}{(2n!!)^2}\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\,dt = \frac{2}{2n+1}.$$

Демак,

$$I_n = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Шундай қилиб, (III.8) система ҳадларини мос равишда

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$

ларга кўпайтирсак, нормалланган система ҳосил бўлади. Юқорида киритилган λ_n сонлар $\varphi_n(x)$ функцияларнинг мос *нормалловчи кўпайтувчиси* дейилади. Ушбу

$$\| \varphi_n(x) \| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

сон эса $\varphi_n(x)$ функциянинг *нормаси* дейилади.

Таъриф. $[a, b]$ *да ортогонал ва нормалланган* $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *система ўша кесмада ортонормал система дейилади.*

12-§. Берилган функциянинг ортогонал система бўйича Фурье қатори

I ва II бобларда берилган функцияни асосий тригонометрик (I. 15) система бўйича Фурье қаторига ёйишга оид масалаларни ўргандик. Бу параграфда эса ўша масалаларнинг баъзиларини ортогонал системага нисбатан ечилиши, чунончи Фурье қаторига ёйилиши билан танишамиз. Бошқача айтганда, бирор $[a, b]$ кесмада берилган $f(x)$ функциянинг (III. 2) система бўйича Фурье қаторини тузиш ва, демак, унинг коэффициентларини ҳисоблаш формулаларини келтириб чиқариш билан шуғулланамиз. $[a, b]$ да интегралланувчи $f(x)$ функция (III. 2) система бўйича ушбу

$$c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x) + \ldots \qquad \text{(III.10)}$$

қатор воситасида ифодаланган, яъни

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad \text{(III.10')}$$

бўлсин. Бунда c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ коэффициентлар ўзгармас.

Маълумки, агар (III.10) қаторни исталган $f(x)$ га кўпайтирганда $[a, b]$ да текис (ёки ўртача) яқинлашувчи қатор ҳосил бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\right] \varphi_k(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx$$

ўринлидир. $\{\varphi_n(x)\}$ система, $[a, b]$ да ортогонал бўлгани туфайли

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} \text{агар } n \neq k \text{ бўлса, } 0, \\ \text{агар } n = k \text{ бўлса, } \| \varphi_k(x) \|^2. \end{cases}$$

идан

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n \|\varphi_n(x)\|^2$$

Ёки

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\|\varphi_n(x)\|^2} \qquad (III.11)$$

формулага эга бўламиз. Бу формула *билан аниқланган* c_n сонлар (I.15) дагидек $f(x)$ нинг *ортогонал система бўйича Фурье коэффициентлари* дейилади.

Агар (III.2) система $]a, b]$ да ортонормал бўлса, у ҳолда

$$\|\varphi_n(x)\|^2 = 1$$

бўлиб, (III.11) формула ушбу жуда содда

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (III.11')$$

кўринишда ёзилади. Мабодо (III.2) система ўша кесмада $p(x)$ вазнли ортогонал бўлса, (III.11) формула қуйидагича

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)p(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)p(x)\,dx}, \quad n=0,1,2\ldots \qquad (III.11'')$$

ёзилиб, агар система $[a, b]$ да $p(x)$ вазнли ортонормал бўлса,

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)p(x)\,dx \qquad (III.11''')$$

Шундай қилиб, агар $[a, b]$ *да интегралланувчи* $f(x)$ функция берилса, (III.11) формула воситасида бу функциянинг Фурье коэффициентларини ва мос равишда унинг (III..10) кўринишдаги қаторини ёзиш мумкин. Бу қатор $f(x)$ нинг (III.2) *ортогонал система бўйича Фурье қатори* дейилади. Бу хилда тузилган қатор ҳар доим яқинлашувчи, айниқса, $f(x)$ га яқинлашувчи бўлавермайди, албатта. Бунга оид масалаларни келгуси параграфларнинг бирида кўрамиз. Ҳозирча, берилган функция билан унга мос Фурье қаторини мослик ($\sim$) белгиси билан боғлаймиз, яъни

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad \text{(III.12)}$$

деб ёзамиз.

Мисоллар. 1. $[-1, 1]$ да $f(x) = x$ нинг

$$P_n(x) = \frac{1}{2n\,!!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Лежандр полиномлари бўйича Фурье қатори ёзилсин.

Ечилиши. (III.11) формулага асосан

$$c_n = \frac{1}{\| p_n(x) \|^2}\int_{-1}^{1} x P_n(x)\,dx.$$

3° - бандда $\| P_n(x) \| = \frac{2}{2n+1}$ эканини кўрган эдик, у ҳолда

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{1}^{1} x \cdot \frac{1}{2n!!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx.$$

$I_n = \int_{-1}^{1} x \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$ белгилашни қабул қилсак,

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{I_n}{2n\,!!}$$

бўлади. Равшанки,

$$I_0 = \int_{-1}^{1} x dx = 0, \quad I_1 = \int_{-1}^{1} x(x^2-1)' dx = 2\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{4}{3}\cdot$$

Бундан $c = 0$, $c_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{I_1}{2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot$ $c_1 = 1$. Барча $n \geqslant 2$ учун

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{I_n}{2n\,!!} = \frac{2n+1}{2\cdot 2n!!}\int_{-1}^{1} x\,\frac{d^n}{dx^n}(x^3-1)^n\,dx =$$

$$= \frac{2n+1}{2\cdot 2n\,!!}\left[x\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^3-1)^n \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\,dx \right] =$$

$$= -\frac{2n+1}{2\cdot 2n!!}\left[(x^2-1)^n \right]^{(n-1)} \Big|_{-1}^{1} = 0,$$

чунки 2- §, 3°- бандда айтилганидек, $x = \pm 1$ да

$$[(x^2-1)^n]^{(n-1)} = [(x^2-1)^n]^{(n-2)} = 0,$$

у ҳолда $n \geqslant 2$ учун $c_n = 0$ бўлиб, $f(x) = x$ функция ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) = c_1 \cdot P_1(x) = x$$

ёйилмага эга бўлади. Демак, бу ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) = f(x).$$

2. $[-1, \ 1]$ да $f(x) = |x|$ функция учун ушбу

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $(n = 0, 1, 2 \ldots)$

Чебишев[1] полиномлари системаси бўйича Фурье қатори ёзилсин.

Ечилиши. Биз ушбу

$$|x| \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x) \qquad \text{(III. *)}$$

қаторни тузишимиз лозим.

$T_n(x)$ полиномлар системаси $[-1, \ 1]$ да $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ вазнли ортогонал бўлгани туфайли (III.10") формулага асосан

$$c_n = \frac{\int\limits_{-1}^{1} |x| \, T_n(x) p(x) dx}{\int\limits_{-1}^{1} T_n^2(x) \, p(x) \, dx} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} |x| \cos(n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int\limits_{-1}^{1} \cos^2(n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}};$$

$$I_n = \int\limits_{-1}^{1} |x| \cos(n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \int\limits_{0}^{1} x \cos(n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Бу интегралда $x = \cos t$, $dx = -\sin t dt$ алмаштириш бажарамиз:

$$I_n = 2 \int\limits_{0}^{2} x \cos(n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2 \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos t \cos(nt) \, dt =$$

---

[1] П. Л. Чебишев (1821—1894) — улуғ рус математиги, академик, Петербург математика мактабининг асосчиси.

$$= -\int_0^{\pi/2} [\cos(n+1)t + \cos(n-1)\,t]dt = -\left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} + \frac{\sin(n-1)t}{n-1}\right]_0$$

Равшанки,

$$I_{2n-1} = 0,\quad I_{2n} = -\left[\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right] = \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1};$$

$$I_{2n} = \frac{(-1)^{(n-1)}}{4n^2-1}. \qquad (**)$$

$$\| T_{2n}(x) \|^2 = \int_{-1}^{1} T_{2n}^2(x)\, p(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \cos^2(2n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 2\int_0^1 \cos^2(2\,n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2nt)\, dt = \frac{\pi}{2};\ n = 0,\ 1 \ldots$$

$$\| T_0(x) \|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \arcsin x \Big|_0^1 = \pi,$$

бундан

$$c_0 = \frac{\int_{-1}^{1} |x| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\| T_0(x) \|^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\pi}.$$

(* *) ва $\| T_{2n}(x) \|^2$ ларнинг қийматларини c_n нинг ифодасига қўйсак $n \geqslant 1$ лар учун

$$c_{2n} = -\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}$$

формулага эга бўламиз. Демак,

$$|x| \sim \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \frac{1}{4}} T_{2n}(x).$$

13- §. Коши—Буняковский тенгсизлиги

1.° Квадрати билан интегралланувчи функция. Таъриф. *Агар $f(x)$ функция ва унинг квадрати $[a, b]$ да интегралланувчи бўлса, яъни*

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ ва } \int_a^b f^2(x)\,dx \tag{III.13}$$

интеграллар (хос ёки хосмас) мавжуд бўлса, у ҳолда бу функция квадрати билан интегралланувчи дейилади.

Равшанки, $[a, b]$ да узлуксиз, сони чекли узлукли бўлаклардан иборат ҳар қандай функциялар квадрати билан интегралланувчидир.

1- мисол. $f(x) = \ln x$ функция $[1, 2]$ да квадрати билан интегралланувчидир.

Текшириш. а) $\displaystyle\int_1^2 \ln x dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^2 = 2(\ln 2 - 1) + 1 = \ln\frac{4}{e}$;

$$б) \int_1^2 \ln^2 x dx = x\ln^2 x\Big|_1^2 - 2\int_1^2 x\ln x\frac{dx}{x} = 2\ln^2 2 - 2x(\ln x - 1)\Big|_1^2 =$$
$$= 2(1 - \ln 2)^2.$$

Демак,

$$\int_1^2 \ln^2 x dx = 2\ln^2\frac{e}{2}.$$

2- мисол.

$$f(x) = \begin{cases} \text{агар } -1 \leqslant x < 0 \text{ бўлса, } x; \\ \text{агар } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ бўлса, } \cos x. \end{cases}$$

$$а) \int_{-1}^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2};$$

$$б) \int_{-1}^{\pi/2} f^2(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_9^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= \frac{3\pi + 2}{12}.$$

Лекин кесмада чегараланмаган функция квадрати билан интегралланувчи бўлмаслиги ҳам мумкин.

3-мисол. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(a-x)^2}}$ функция $[0,\ a]$ да интегралланувчи, аммо унинг квадрати интегралланувчи эмас. Дарҳақиқат, а) $\int\limits_0^a f(x)\,dx =$

$$= \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{(a-x)^2}} = -3(a-x)^{\frac{1}{3}}\Bigg|_0^a = 3\sqrt[3]{a};$$

$$\text{б)}\ \int\limits_0^a f^2(x)\,dx = \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{(a-x)^4}} = \lim_{t\to a-0}\int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt[3]{(a-x)^4}} =$$

$$= \lim_{t\to a-0} 3\,\frac{1}{\sqrt[3]{a-x}}\Bigg|_0^t = +\infty,$$

яъни бу интеграл мавжуд эмас.

4-мисол. $f(x)=\ln x$ функция $[0, 1]$ кесмада чегараланмаган, лекин у $[0, 1]$ да квадрати билан интегралланувчидир. Буни текширишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

Натижа. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг иккаласи ҳам $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлса, у ҳолда $F(x)=f(x)\cdot g(x)$ функция ўша кесмада абсолют интегралланувчи бўлади.

Текшириш. Ушбу

$$[\,|f(x)|-|g(x)|\,]^2\geqslant 0$$

тенгсизликдан

$$|f(x)\cdot g(x)|\leqslant \frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)] \tag{III.14}$$

тенгсизлик келиб чиқиши равшан. Бундан

$$\int\limits_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_a^b [f^2(x)+g^2(x)]\,dx. \tag{III.15}$$

Демак, $f(x)\cdot g(x)$ кўпайтма $[a, b]$ да абсолют интегралланувчидир.

Агар (III.15) да $g(x)\equiv 1$ ва $f(x)$ квадрати билан интегралланувчи деб фараз қилсак,

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_a^b [f^2(x)+1]\,dx \tag{III.15'}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан $[a,\ b]$ да квадрати билан интегралланувчи ҳар қандай функция ўша кесмада абсолют интегралланувчи деган хулоса келиб чиқади; бунинг акси ҳар доим ўринли ҳам бўлавермаслигини юқорида келтирилган 3-мисолда кўрдик.

2. Коши—Буняковский тенгсизлиги. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлса, у ҳолда исталган α учун $f(x)+\alpha g(x)$ функция ҳам ўша кесмада квадрати билан интегралланувчи бўлади. Равшанки,

$$\int_a^b [f(x)+\alpha g(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx +$$

$$+2\alpha\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx+\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx \qquad \text{(III.16)}$$

бўлади. Ушбу

$$[f(x)+\alpha g(x)]^2 = f^2(x)+2\alpha f(x)\,g(x)+\alpha^2 g^2(x)$$

тенгликнинг ўнг томонидаги ифоданинг ҳадлари $[a, b]$ да интегралланувчи бўлганидан (III.16) нинг тўғрилиги бевосита келиб чиқади. $\alpha = 1$ бўлганда

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx+\int_a^b g^2(x)\,dx. \qquad \text{(III.16')}$$

Бундан индукция методини қўллаб, қуйидаги муҳим хулосага келиш мумкин. Агар чекли сондаги

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$$

функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг йиғиндиси ҳам $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлади. Равшанки,

$$\int_a^b \Big[\sum_{i=1}^n f_i(x)\Big]^2 dx = \sum_{i,j=1}^n \int_a^b f_i(x)\,f_j(x)\,dx \geqslant 0. \qquad \text{(III.17)}$$

Бунинг ўринли эканини текшириш у қадар мураккаб бўлмаганлиги туфайли бунга тўхталмаймиз.

Агар (III.16) да

$$\int_a^b g^2(x)\,dx = A,\quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = B \quad \text{ва} \quad \int_a^b f^2(x)\,dx = C$$

белгилашларни қабул қилсак, ушбу

$$\eta = A\xi^2 + 2B\xi + C \qquad \text{(III.18)}$$

тенгламага эга бўламиз, у $\xi O\eta$ текисликда $O\xi$ ўқ юқорисида жойлашган параболани беради. Бу парабола $O\xi$ ўққа уриниши ҳам мумкин. У ҳолда (III.18) квадрат учҳад ҳар хил ҳақиқий илдизларга (яъни ўзаро тенг бўлмаган илдизларга) эга эмас. Бундан

$$B^2 - AC \leqslant 0$$

ёки

$$B^2 \leqslant AC$$

бўлиши керак. Сўнгги тенгсизликдан Коши — Буняковский[1] тенгси лиги деб аталувчи ушбу

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx \qquad (\mathrm{III.19}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Буни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx}. \qquad (\mathrm{III.19'})$$

14-§. Ўртача квадратик четланиш ва унинг энг кичик қийматига оид масала

$[a, b]$ да аниқланган ва ўша кесмада квадрати билан интегралланувчи $f(x)$ функция берилган бўлсин. Бундан ташқари, (III.2 системадан фойдаланиб, ушбу

$$\sigma_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

функцияни тузамиз, бунда a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ — ўзгармас коэффициентлар.

Кўпгина ҳолларда $[a, b]$ да аниқланган $f(x)$ функцияни $\sigma_n(x)$ функция билан алмаштириш, яъни функциянинг ўша кесмадаги қийматларини $\sigma_n(x)$ воситасида ифодалаш зарурати туғилади. Бунинг учун n нинг етарлича катта қийматларида $f(x) - \sigma_n(x)$ айирманинг мумкин қадар кичик бўлишини, яъни $f(x)$ ни $\sigma_n(x)$ га исталганча яқин бўлишини таъминлаш асосий масала бўлади. Бу эса ўша айирмани баҳоловчи миқдорни киритишни талаб этади. Бундай миқдор сифатида ушбу

$$\rho_n^2\left[f(x), \sigma_n(x)\right] = \int_a^b \left[f(x) - \sigma_n(x)\right]^2 dx$$

миқдор қабул қилинади.

ρ_n^2 одатда $f(x)$ нинг $\sigma_n(x)$ дан *ўртача квадратик четланиши* дейилади. Ана шунинг учун ҳам биз берилган n учун a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ қандай танланганда ρ_n^2 миқдор энг кичик қийматга эга бўлади деган масалани ечамиз[2].

---

[1] В. Я. Буняковский (1804—1889)—атоқли рус математиги, академик. О. Коши (1789—1857)—атоқли француз математиги.

[2] Бу хилдаги масала билан I боб, 3-§ да танишган эдик. Фақат у ерда $T_n(x)$ функция тригонометрик функциялардан тузилган эди.

Равшанки, $[a, b]$ да $f(x)$ ва $\sigma_n(x)$ функциялар квадрати билан интегралланувчи бўлгани туфайли $\left[f(x)-\sigma_n(x)\right]^2$ ҳам $[a, b]$ да интегралланувчидир ва

$$\rho_n^2\left[f(x), \sigma_n(x)\right] = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\int_a^b f(x)\sigma_n(x)\,dx + \int_a^b \sigma_n^2(x)\,dx, \quad \text{(III.20)}$$

(III.10) га асосан

$$\int_a^b (x)\,\sigma_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^n a_k c_k\ \|\varphi_k(x)\|^2,$$

бунда c_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ лар $f(x)$ нинг (III.2) система бўйича Фурье коэффициентларидир. Бундан ташқари,

$$\int_a^b \sigma_n^2(x)\,dx = \int_a^b \Big[\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k(x)\Big]^2 dx = \int_a^b \Big[\sum_{i,j=0} a_i a_j \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\Big]dx =$$

$$= \int_a^b \Big[\sum_{k=0}^n a^2{}_k \varphi^2{}_k(x) + 2\sum_{i<j} a_i a_j\ \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\Big]\,dx \text{ ёки}$$

$$\int_a^b \sigma_n^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^n a_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx + 2\sum_{i<j} a_i a_j \int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx.$$

(III.2) система $[a, b]$ да ортогонал бўлгани сабабли $i \neq j$ учун

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0,\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Демак,

$$\int_a^b \sigma_n^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^n a_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2, \quad \text{(III.21)}$$

у ҳолда

$$\rho_n^2[f, \sigma_n] = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^n a_k c_k \|\varphi_k(x)\|^2 + \sum_{k=0}^n a_k^2 \|\varphi_k^2(x)\|^2.$$

Бу тенгликнинг чап томонига $\sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2$ ни қўшамиз ва айирамиз:

$$\rho_n^2[f, \sigma_n] = \int_a^b f^2(x)\,dx + \sum_{k=0}^n [c_k - a_k]^2 \|\varphi_k(x)\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2\ \|\varphi_k(x)\|^2.$$

Бундан $\rho_n^2[f, \sigma_n]$ ўзининг энг кичик қийматига $a_k = c_k$ бўлганда эришиши кўриниб турибди, яъни

$$\min \rho_n^2[f, \sigma_n] = \Delta_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2$$

ёки

$$\Delta_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2. \quad \text{(III.22)}$$

Шундай қилиб, берилган n учун $[a, b]$ да ортогонал (III.2) системадан тузилган $\sigma_n(x)$ функциялар ичида $f(x)$ дан энг кичик ўртача квадратик четланадигани ушбу

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$$

функциядир.

15- §. Бессель тенгсизлиги

1°. (III.20) ва (III.22) дан исталган $n \geqslant 1$ учун

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \| \varphi_k(x) \|^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \tag{III.23}$$

бўлиши равшан. Агар

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \| \varphi_k(x) \|^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

деб белгиласак, $\{S_n\}$ кетма-кетлик монотон ўсувчи ва юқоридан ушбу

$$\int_a^b f^2(x)\,dx$$

сон *билан* чегараланган бўлади. Бундан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ мавжуд ёки

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n(x)\|^2 \tag{III.23'}$$

қатор $[a, b]$ да яқинлашувчилиги келиб чиқади. Бундан ташқари (III.23) дан

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \| \varphi_n(x) \|^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \tag{III.24}$$

эканлиги равшандир.

(III.24) тенгсизлик $f(x)$ учун $[a, b]$ да ортогонал бўлган $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича *Бессель тенгсизлиги* дейилади.

Асосий тригонометрик (I.15) система учун (II.30) Бессель тенгсизлигини II бобда исбот қилган эдик.

2° Агар $\{\varphi_n(x)\}$ *система ортонормал бўлса, у вақтда* (III.24) тенгсизлик қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{III.24'}$$

Демак, $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи $f(x)$ функциянинг ўша кесмада ортонормал $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича аниқланган c_n Фурье коэффициетлари квадратларидан тузилган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлади. Бошқача айтганда, Бессель тенгсизлиги воситасида баъзи сонли қаторларнинг яқинлашиш масаласини ҳал қилиш мумкин. Бундан ташқари, агар (III.23) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} c_n \|\varphi_n(x)\| = 0 \tag{III.25}$$

бўлади.

Бундан $[a, b]$ да ортонормал $\{\varphi_n(x)\}$ система учун $\|\varphi_n(x)\| = 1$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ бўлганидан:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \tag{III.25'}$$

Шундай қилиб, $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи $f(x)$ функциянинг ўша кесмада ортонормал $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича c_n Фурье коэффициенти $n \to \infty$ да нолга интилади. Бунга мисол сифатида қуйидагини эслатиб ўтамиз: 2-§, 3°-бандда $f(x) = x$ ва $g(x) = |x|$ функцияларнинг $[-1, 1]$ да мос равишда $P_n(x)$ Лежандр полиномлари ва $T_n(x)$ Чебишев полиномлари бўйича Фурье коэффициентлари ва $\|P_n(x)\|$ ва $\|T_n(x)\|$ ни ҳисоблаганимизда биринчи функция учун

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_n = 0,\ (n \geqslant 2) \text{ ва } \|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

ни, иккинчиси учун эса

$$c_n = \begin{cases} \text{агар } n = 2k+1,\ k = 0, 1, 2, \ \ldots \text{ бўлса, } 0, \\ \text{агар } n=2k,\ k=0, 1, \ldots \text{ ва } \|T_n(x)\| = \sqrt{\pi} \text{ бўлса, } \dfrac{1}{\pi\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)} \end{cases}$$

ни аниқлаган эдик. Ҳар иккала функция учун ҳам юқорида исботланган (III.25) муносабат ўринлидир.

16-§. *Мукаммал ортогонал системалар*

1°. Мукаммал система. $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи барча $f(x)$ функциялар тўпламини $G_a^b\{f(x)\}$ орқали белгилайлик. Қуйида ортогонал системаларга оид муҳим тушунча — мукаммаллик тушунчаси билан танишиб ўтамиз.

Таъриф. *Агар $G_a^b\{f(x)\}$ тўпламга тегишли исталган $f(x)$ функция ва $[a, b]$ да ортогонал*

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ldots \tag{III.26}$$

функциялар системаси учун

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n(x)\|^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx \tag{III.27}$$

тенглик (Парсеваль тенглиги) ўринли бўлса, у ҳолда (III.26) си тема $G_a^b\{f(x)\}$ *да мукаммал дейилади.* Бунда c_n лар $f(x)$ нин (III.24) система бўйича аниқланган Фурье коэффициентлари, яъни

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n(x)\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx,$$

$$\|\varphi_n(x)\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx.$$

(III.27) тенглик $\{\varphi_n(x)\}$ системанинг *мукаммаллик шарти* дей лади.

2°. Ортогонал системанинг мукаммаллик аломати.

Теорема. *(III.26) система* $G_a^b\{f(x)\}$ *да мукаммал бўлиши учу ушбу*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)]^2\,dx = 0 \qquad \text{(III.2}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Зарурлиги. (III.26) система юқорида айтилган маънода мукаммал бўлсин, у ҳолда $G_a^b\{f(x)\}$ га тегишли исталган $f(x)$ учун

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\|\varphi_n(x)\|^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (*)$$

бўлади. Агар

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_n\varphi_n(x)]\|^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\|\varphi_k(x)\|^2$$

ни эътиборга олсак, (*) дан

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)]^2\,dx = 0$$

келиб чиқади, яъни (III.28) шарт бажарилади.

Етарлилиги. $G_a^b\{f(x)\}$ дан олинган исталган $f(x)$ ва (III.26) система учун (III.28) тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда лимитлар назариясига асосан исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $N(\varepsilon)$ натурал сон мавжудки, барча $n > N(\varepsilon)$ да,

$$\left|\int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\|\varphi_k(x)\|^2\right| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\|\varphi_n(x)\|^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx.$

Демак, $\{\varphi_n(x)\}$ система $G_a^b\{f(x)\}$ да мукаммал.

3°. Фурье қаторининг ўртача яқинлашиши.

Таъриф. *Агар* $G_a^b\{f(x)\}$ *дан олинган исталган* $f(x)$ *ва* $[a, b]$

ортогонал $\{\varphi_n(x)\}$ *система учун* (*III.28*) *шарт ўринли бўлса, у ҳолда ушбу*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{III.29}$$

Фурье қатори $[a, b)$ *да* $f(x)$ *га ўртача яқинлашади дейилади.*

Буни эътиборга олган ҳолда 2°-бандда исбот қилинган теоремани қуйидагича таърифлаш мумкин:

(III.26) *система* $G_a^b\{f(x)\}$ *да мукаммал бўлиши учун* $G_a^b\{f(x)\}$ *дан олинган исталган* $f(x)$ *функциянинг* $\{\varphi_n(x)\}$ *система бўйича* (III.29) *Фурье қатори ўша функцияга ўртача яқинлашиши зарур ва етарлидир.*

Изоҳ. *Фурье қаторининг мос функцияга ўртача яқинлашиши муҳим аҳамиятга эга бўлиб, маълум маънода одатдаги яқинлашишнинг умумлашган ҳоли десак бўлади.*

Ҳақиқатан, $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи $f(x)$ функциянинг

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

Фурье қатори $\{\varphi_n(x)\}$ система $[a, b]$ да мукаммал ортогонал бўлганда ҳам $f(x)$ га одатдаги маънода яқинлашмаслиги мумкин, аммо 2-таърифга асосан бу қатор ўша функцияга ўртача яқинлашади. Демак, (III.28) нинг ўринли бўлишидан, яъни

$$\lim_{n\to\infty} [\, f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)\,] = 0$$

дан

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

тенглик ўринли деган натижа келиб чиқмайди.

Оддий яқинлашмайдиган, лекин ўртача яқинлашадиган қаторга мисол.

$$f(x) = \begin{cases} \text{агар } x = \frac{\pi}{m}, \ m = 1, 2, \ldots \text{ бўлса, } 1. \\ \text{агар } x \in [0, \pi], \text{ аммо } x \neq \frac{\pi}{m} \text{ бўлса, } 0. \end{cases}$$

Бу функция $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \ldots$ нуқталарда узилишга эга. Унинг $\frac{1}{2}$, $\cos x$, $\cos 2x$, ... система бўйича Фурье қаторини қарайлик: $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$. Равшанки, $c_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Демак, $\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_n \cos nx = 0$. Шунинг учун ҳам, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$ ўринли эмас.

Масалан, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ бўлса, қандай N танланмасин, ҳатто бирорта ҳам $n \geqslant N$ учун $|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$ тенглик $x = \frac{\pi}{m}$ нуқталарда бажарилмайди, чунки $|f(x) - \sigma_n(x\setminus_{x=\frac{\pi}{m}} = 1$. Лекин

$$\int_0^\pi [f(x) - \sigma_n^2(x)]^2 dx = \int_0^\pi f^2(x)\,dx = 0,$$

яъни $\sigma_n(x)$ кетма-кетлик $f(x)$ га ўртача яқинлашади (буни умумий теоремадан ҳам келтириб чиқариш мумкин). Равшанки, агар $G_a^b[f(x)]$ тўпламда мукаммал $\varphi_n(x)$ системадан тузилган

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \varphi_n(x) \qquad \text{(III.29}$$

Фурье қатори $\left(c_n = \frac{1}{\|\varphi_n(x)\|^2} \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx,\ n = 1,\ 2,\ \ldots \right) f(x)$ га одатдагидек яқинлашса, бу қатор ўша функцияга ўртача ҳам яқинлашади. Ҳақиқатан, $\{\varphi_n(x)\}$ система $G_a^b\{f(x)\}$ да мукаммал бўлгани туфайли 2°-бандда исботланган теорема (аломат) га асосан $f(x)$ нинг мос Фурье қатори, демак, (III.29) қатор бу функцияга ўртача ҳам яқинлашади.

4°. **Мукаммал системанинг хоссалари.** Бу ерда биз мукаммал системаларнинг хоссаларига оид бир неча теоремаларни келтирамиз.

1- теорема. *Агар $G_a^b\{f(x)\}$ да мукаммал $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича тузилган (III.29) Фурье қатори $f(x)$ га ўртача яқинлашса, бу функция муайян маънода ягонадир, яъни (III.29) қатор бир вақтда иккита функцияга яқинлашмайди.*

Бунинг тўғрилигини исботлаш учун тескарисини фараз қиламиз, яъни (III.29) қатор бир вақтда $G_a^b\{f(x)\}$ га тегишли $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларга ўртача яқинлашсин, у ҳолда бир вақтда

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b (f_1(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\,\varphi_k(x))^2 dx\right] = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b (f_2(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\,\varphi_k(x))^2 dx\right] = 0 \qquad \text{(III.30)}$$

тенгликлар бажарилиши зарур. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар $G_a^b\{f(x)\}$ тўпламга тегишли бўлгани учун

$$\int_a^b f_1^2(x)\,dx, \qquad \int_a^b f_2^2(x)\,dx, \qquad \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx$$

интегралларнинг учаласи ҳам мавжуд ва

$$0 \leqslant \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx = \int_a^b \left\{ [f_1(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\,\varphi_k(x)\right] +$$

$$+\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)-f_2(x)]\Big\}^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_a^b\Big[f_1(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\Big]^2 dx+2\int_a^b\Big[f_2(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\Big]^2 dx$$

$$\int\Big[f_1(x)-f_2(x)\Big]^2 dx\leqslant 2\Big\{\int_a^b\Big[f_1(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\Big]^2 dx+\int_a^b\Big[f_2(x)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\Big]^2 dx\Big\}.$$

(III.30) дан ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $N(\varepsilon)$ мавжудки, барча $n>N(\varepsilon)$ да бир вақтда

$$\int_a^b\Big[f_1(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\Big]^2 dx<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\int_a^b\Big[f_2(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\Big]^2 dx<\frac{\varepsilon}{4}$$

бўлади. Бундан

$$\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]^2 dx<\varepsilon.$$

Демак,

$$\int_a^b\Big[f_1(x)-f_2(x)\Big]^2 dx=0.$$

Бу тенгликнинг чап томонидаги интеграл белгиси остидаги ифода $[a, b]$ да мусбат ва узлуксиз бўлакли бўлганлигидан $[a, b]$ нинг қарийб барча нуқталарида (яъни $f_1(x)$ нинг барча узлуксизлик нуқталарида)

$$f_1(x)\equiv f_2(x)$$

бўлади.

Шундай қилиб, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар $[a, b]$ нинг қарийб барча нуқталарида ўзаро тенгдир. Ана шу маънода Фурье қатори $G_a^b\{f(x)\}$ га тегишли ягона $f(x)$ функцияга ўртача яқинлашади. Юқорида айтилганларни қуйидаги теорема сифатида якунлаш мумкин.

2-теорема. *Агар ушбу* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots$ *функциялар системаси* $G_a^b\{f(x)\}$ *да мукаммал бўлса, у ҳолда исталган* $f(x)$ *функция ўзининг* $\{\varphi_n(x)\}$ *система бўйича тузилган мос Фурье қатори билан* $[a, b]$ *нинг қарийб барча нуқталарида тўла аниқланади.*

3-теорема. *Агар* $f_1(x)\in G_a^b\{f(x)\}$ *ва* $f_2(x)\in G_a^b\{f(x)\}$ *бўлиб, улар қуйидаги мос*

$$f_1(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)}\varphi_n(x),$$

$$f_2(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2)} \varphi_n(x)$$

Фурье қаторларига эга бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} c_n^{(2)} \|\varphi_n(x)\|^2$$

бўлади.

Исботи. 1) агар $f_1(x) + f_2(x)$ ёки $f_1(x) - f_2(x)$ нинг Фурье коэффициентларини e_n ёки $\bar{e}_n$ орқали белгиласак, у ҳолда (III.11) формулага асосан

$$e_n = \frac{\int_a^b [\,f_1(x) + f_2(x)\,]\,\varphi_n(x)\,dx}{\|\varphi_n(x)\|^2}$$

ёки $e_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)}$, шунга ўхшаш $\bar{e}_n = c_n^{(+)} - c_n^{(2)}$ бўлади;

2) (III.26) система $G_a^b\{f(x)\}$ да мукаммал бўлгани туфайли

$$\int_a^b \Big[\; f_1(x) + f_2(x)\;\Big]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} e_n^2 \|\varphi_n(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n^{(1)} + c_n^{(2)})^2 \|\varphi_n(x)\|^2,$$

$$\int_a^b [\,f_1(x) - f_2(x)\,]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{e}_n^2 \|\varphi_n(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n^{(1)} - c_n^{(2)}) \|\varphi_n(x)\|^2.$$

Равшанки,

$$\int_a^b [\,f_1(x) \mp f_2(x)\,]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \{\, [c_n^{(1)}]^2 \|\varphi_n(x)\|^2 \mp 2\int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx + $$
$$+ [\,c_n^{(2)}\,]^2 \|\varphi_n(x)\|^2 \,\}$$

ва

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n^{(1)} \mp c_n^{(2)})^2 \|\varphi_n(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n^{(1)}]^2 \|\varphi_n(x)\|^2 \mp$$
$$\mp 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} c_n^{(2)} \|\varphi_n(x)\|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} [\,c_n^{(2)}\,] \|\varphi_n(x)\|^2.$$

Бу икки тенгликдан фойдаланиб, ушбу

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} c_n^{(2)} \|\varphi_n(x)\|^2$$

муносабатнинг ўринли эканини осонгина кўрсатиш мумкин, шу билан теорема исбот бўлди.

4-теорема. *Агар $\{\varphi_n(x)\}$ система $G_a^b\{f(x)\}$ да мукаммал бўлса, у ҳолда $G_a^b\{f(x)\}$ тўпламда $\{\varphi_n(x)\}$ системанинг бирорта ҳам функциясига $[a, b]$ да ортогонал бўлган, нолдан фарқли, узлуксиз $f(x)$ функция мавжуд эмас.*

Исботи. Тескари фараз қиламиз: $G_a^b\{f(x)\}$да узлуксиз, нолдан фарқли шундай $f(x)$ мавжудки, $\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

Бундан $f(x)$ нинг барча Фурье коэффициентлари

$$c_n = 0, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

бўлади. У ҳолда (III.27) мукаммаллик шартига кўра

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n(x)\|^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx = 0.$$

Бундан ва $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да узлуксизлигидан

$$f(x) = 0$$

келиб чиқади. Демак, фаразимиз нотўғри, теоремадаги мулоҳаза ўринлидир.

5-теорема. *Агар $[a, b]$ да узлуксиз $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ функциялар системаси $G_a^b\{f(x)\}$ да мукаммал бўлиб, узлуксиз $f(x)$ функциянинг мос*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

Фурье қатори ўша функцияга текис яқинлашса, у ҳолда қатор йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлади.

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $G_a^b\{f(x)\}$ да нолдан фарқли, узлуксиз шундай $f(x)$ функция мавжудки, у $\{\varphi_n(x)\}$ система функциялари билан $[a, b]$ да ортогонал ёки

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ \ldots\ c_n\varphi_n(x) + \ldots = f(x)$$

бўлсин. Бу қатор ҳадлари $[a, b]$ да узлуксиз функциялардан иборат бўлиб, қаторнинг ўзи текис яқинлашувчи бўлгани учун унинг $S(x)$ йиғиндиси $[a, b]$ да узлуксиз бўлиши маълумдир. Демак, бу қатор $[a, b]$ да узлуксиз $S(x)$ функция учун ҳам ёйилма бўлади.

Бундан ва 1-теоремадан $[a, b]$ да

$$f(x) = S(x) \text{ ёки } \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = f(x)$$

тенглик келиб чиқади.

6-теорема: *Агар $\{\varphi_n(x)\}$ система $G_a^b\{f(x)\}$ да мукаммал бўлса, у ҳолда исталган $f(x)$ нинг ўша система бўйича тузилган мос*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

Фурье қаторини ҳадлаб интеграллаш мумкин, яъни исталган $[x_0, x] \subset [a, b]$

учун

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{x_0}^{x} \varphi_n(t)\,dt.$$

Исботи. Исталган $x > x_0$ учун

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} [f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t)]\,dt$$

айирмани баҳолайлик. Равшанки,

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t)\,dt \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} | f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t) |\,dt.$$

3-§, 2°-бандда исботланган (III.19′) Коши-Буняковский тенгсизлигига кўра

$$\int_{x_0}^{x} | f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t) |\,dt \leqslant \left[\int_{x_0}^{x} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t) \right]^2 dt \cdot \int_{x_0}^{x} dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Бундан

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t)\,dt \right| \leqslant \left\{ \int_{x_0}^{x} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t) \right]^2 dt \cdot (b-a) \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{III.31}$$

Мукаммаллик аломати (III. 28) га асосан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $N(\varepsilon)$ натурал сон кўрсата оламизки, барча $n > N(\varepsilon)$ да

$$\int_{a}^{b} [f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t)]^2\,dt < \frac{\varepsilon^2}{b-a}.$$

Бундан ва (III.31) тенгсизликдан

$$\left| \int_{x_0}^{x} [f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t)]\,dt \right| < \varepsilon.$$

Демак,

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)\,dt \right| < \varepsilon$$

ёки

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} c_n \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)\,dt.$$

Бу ерда шуни таъкидлаб ўтиш керакки, теореманинг исботида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$$

қаторнинг $f(x)$ га текис яқинлашиши у ёқда турсин, ҳатто унинг оддий яқинлашиши ҳам талаб этилмади, чунки исботда бунга зарурат туғилмади. Бундан равшанки, $f(x)$ нинг мукаммал $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича Фурье қаторини ҳадлаб интеграллаш учун унинг $f(x)$ га ўртача яқинлашиши етарлидир. 2-§ да (III.11) формулани келтириб чиқариш учун Фурье қаторини $f(x)$ га ўртача яқинлашади деб фараз этишимизнинг боиси ҳам шундадир.

Маълумки, I ва II бобларда биз $[-l, l]$ да (хусусий ҳолда, $[-\pi, \pi]$ да) берилган функцияларнинг асосий

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{III.32}$$

тригонометрик система бўйича Фурье қаторини ўрганиб, ўз ўрнида бу системанинг $[-l, l]$ да ортогонал эканини ҳам кўрсатган эдик. Энди бу системанинг мукаммаллиги ҳақида нима дейиш мумкин деган савол туғилади. Шунинг учун ҳам биз қуйида (III.32) системанинг $[-l, l]$ да мукаммал эканлигини тасдиқловчи теорема исботини берамиз.

5°. Асосий тригонометрик системанинг мукаммаллиги.

Теорема. *Асосий тригонометрик (III.32) система* $G_{-l}^{l}\{f(x)\}$ *да мукаммалдир.*

Исботи. $f(x)$ функциянинг мос Фурье кўпҳади

$$T_n^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right] \tag{III.33}$$

дан иборат бўлсин. Бунда a_0, a_n, b_n лар $f(x)$ нинг (III.32) система бўйича ёйилмасидаги мос Фурье коэффициентлари. Соддалик учун $f(x)$ функция $[-l, l]$ да битта x_0 узилиш нуқтага эга деб фараз қиламиз. Равшанки, бу фаразимиз умумиятни сусайтирмайди. $[-l, l]$ да $|f(x)| < M$ бўлсин. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ танлаб, $[-l, l]$ да аниқланган шундай ёрдамчи $g(x)$ функция тузамизки, ушбу

$$\rho^2(f, g) = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\,dx < \frac{3}{4} \tag{III.34}$$

тенглик ўринли бўлсин. Бунинг учун $g(x)$ қуйидаги шартларни қаноатлантириши етарлидир:

$$g(x) = \begin{cases} \text{агар } -l \leqslant x \leqslant x_0 - \delta \text{ бўлса, } f(x); \\ \text{агар } x_0 - \delta < x \leqslant x_0 + \delta \text{ бўлса, } kx + b; \\ \text{агар } x_0 + \delta \leqslant x \leqslant l - \delta, \text{ бўлса, } f(x); \\ \text{агар } l - \delta \leqslant x \leqslant l \text{ бўлса, } k_1(x) + b_1, \end{cases} \tag{III.34'}$$

бу ерда δ — ихтиёрий кичик мусбат сон. Ҳақиқатан,

$$\rho^2(f, g) = \int_{-l}^{+l}[f(x) - g(x)]^2\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[f(x) - g(x)]^2\,dx +$$

$$+ \int_{l-\delta}^{l}[f(x) - g(x)]^2\,dx \leqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[|f(x)| + |g(x)|]^2\,dx +$$

$$+ \int_{l-\delta}^{l}[|f(x)| + |g(x)|]^2\,dx \leqslant 4M^2\cdot 3\delta \text{ ёки } \rho^2(f, g) \leqslant 12M^2\delta.$$

Агар $\delta < \frac{\varepsilon}{48M^2}$ десак,

$$\rho^2(f, g) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{III.34}$$

бўлади. Ёрдамчи $g(x)$ функция $[-l, l]$ да Вейерштрасснинг I-теоремаси шартларини қаноатлантиргани туфайли шундай

$$T_{n_0}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n_0}\left[a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right]$$

кўпҳад мавжудки, $-l \leqslant x \leqslant l$ тенгсизликни қаноатлантирувчи исталган x учун

$$\left|g(x) - T_{n_0}(x)\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8l}} \qquad (III.35)$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан

$$\rho^2(g(x), T_{n_0}(x)) = \int_{-l}^{l}\left[g(x) - T_{n_0}(x)\right]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad (III.36)$$

$$[f(x) - T_{n_0}(x)]^2 = \{[f(x) - g(x)] + [g(x) - T_{n_0}(x)]\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\{[f(x) - g(x)]^2 + [g(x) - T_{n_0}(x)]^2\}.$$

У ҳолда

$$\rho^2[f(x), T_{n_0}(x)] = \int_{-l}^{l}[f(x) - T_{n_0}(x)]^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\{\int_{-l}^{l}[f(x) - g(x)]^2 dx + \int_{-l}^{l}[g(x) - T_{n_0}(x)]^2 dx\right\}.$$

Энди (III.34) ва (III.36) тенгсизликлардан

$$\rho^2[f(x), T_{n_0}(x)] < \varepsilon \qquad (III.37)$$

эканлиги кўриниб турибди. Агар $T_{n_0}(x)$ кўпҳаднинг a_0, a_k, b_k коэффициентларини $f(x)$ нинг (III 32) система бўйича аниқланган мос Фурье коэффициентлари билан алмаштирсак, у ҳолда (III. 37) тенгсизликнинг чап томонидаги миқдор энг кичик қийматга эга бўлади, яъни

$$\rho^2[f(x), T^f_{n_0}(x)] < \varepsilon$$

тенгсизлик шубҳасиз ўринлидир. Бессель айниятига асосан

$$\rho^2[f(x), T^f_{n_0}(x)] = \int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx - l\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right\} < \varepsilon. \qquad (III.38)$$

Бундан $n > n_0$ лар учун албатта

$$\rho^2[f(x), T^f_{n_0}(x)] = \int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx - l\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right\} < \varepsilon.$$

Демак, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай n_0 мавжудки, барча $n > n_0$ ларда

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx - l\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right\} < \varepsilon,$$

У ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}\rho^2(f(x),\ T_n^f(x)) = 0$, яъни

$$l\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2))\right] = \int^{l} f^2(x)\,dx. \qquad \text{(III.39)}$$

Бу эса (III. 32) системанинг мукаммал эканини билдиради. Бундан (III. 32) система 4°- бандда исботланган барча хоссаларга эга экани келиб чиқади.

Бу теоремани, яъни асосий тригонометрик система мукаммаллигини даставвал А. Ляпунов[1] исбот этган. Шунинг учун ҳам теоремани *Ляпунов теоремаси*, (III.39) ни эса *Ляпунов формуласи* деб аталади. Бу параграфни муҳим полиномлардан бири бўлган (III. 4) Лежандр полиномлари системасининг $G_{-1}^{1}\{(f\,x\}$ да мукаммал эканига оид теоремани исботлаш билан якунлаймиз.

6°. Лежандр полиномлари системасининг мукаммаллиги. Шу бобнинг 1- § ида

$$P_n(x) = \frac{1}{2n!!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \qquad \text{(III.40)}$$

Лежандр полиномлари системасининг $[-1,\ 1]$ да ортогонал эканини кўрсатган эдик. Энди бу системанинг $G_{-1}^{1}\{f(x)\}$ да мукаммаллигини кўрсатамиз. Бунинг учун исталган $\varepsilon > 0$ га кўра $[-1,\ 1]$ да узлуксиз шундай ёрдамчи $g(x)$ функция тузамизки,

$$\rho^2[f(x),\ g(x)] = \int_{-1}^{1}[f(x) - g(x)]^2dx < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{(III.40')}$$

бўлсин. Вейерштасснинг тегишли теоремасига асосан $[-1,\ 1]$ да $g(x)$ га мос шундай

$$Q_m(x) = B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m$$

кўпҳад мавжудки, барча $x \in [-1,\ 1]$ учун ушбу

$$|g(x) - Q_m(x)| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

тенгсизлик ўринлидир. У ҳолда

---

[1] Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918) — атоқли рус математиги, академик.

$$\rho^2[g(x),\ Q_m(x)] = \int_{-1}^{1}[g(x)-Q_m(x)]^2dx < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

$$Q_m(x) = c_0 + c_1P_1(x) + \ldots + c_mP_m(x) \qquad \text{(III. 41)}$$

бўлганидан фойдаланиб,

$$\rho^2[f(x),\ Q_m(x)]$$

ни баҳолаймиз. Равшанки,

$$[f(x)-Q_m(x)]^2 = \{[f(x)-g(x)]+[g(x)-Q_m(x)]\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\{[f(x)-g(x)]^2+[g(x)-Q_m(x)]^2\},$$

у ҳолда

$$\rho^2(f(x),\ Q_m(x)) \leqslant 2\{\rho^2(f(x),\ g(x)) + \rho^2(g(x),\ Q_m(x))\}$$

ёки

$$\rho^2(f,\ Q_m) < \varepsilon. \qquad \text{(III.42)}$$

Агар (III.41) даги c_k, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ ларни $f(x)$ нинг (III.40) система бўйича ҳисобланган $c_к$ Фурье коэффициентлари

$$c_k = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx$$

билан алмаштирсак, $\rho^2(f(x),\ Q_m(x))$ энг кичик қийматга эришади, яъни (III.42) ўз кучида қолади ёки

$$\rho^2(f(x),\ Q_m^f(x)] < \varepsilon. \qquad \text{(III.43)}$$

Энди ушбу

$$\rho^2[f(x),\ Q_m^f(x)] = \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_n^2\,\|P_k(x)\|^2$$

Бессель айниятига кўра (III.43) дан исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $N(\varepsilon)$ мавжудки, барча $n > N(\varepsilon)$ да қуйидаги

$$\left|\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\,\|P_k(x)\|^2\right| < \varepsilon$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\,\|P_n(x)\|^2.$$

Шундай қилиб, (III.40) система $G_{-1}^{1}\{f(x)\}$ да мукаммал.

III БОБГА ДОИР МИСОЛЛАР

1. m ва $n\,(m \neq n)$ лар манфий бўлмаган бутун сонлар бўлганда $f(x) = \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x$ ва $\varphi(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$ функциялар $[0, \pi]$ кесмада ортогонал экани кўрсатилсин.

2. *$[0, \pi]$ да ортогонал* $\{\sin nx\}$ ва $\{\cos nx\}$ системалар учун тегишли нормалловчи λ_n кўпайтувчилар топилсин.

3. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ да ортогонал $\{\sin(2n-1)x\}$ системада $f(x)$ функция учун Фурье коэффициентларини аниқлаш формулалари ёзилсин.

4. Ушбу $\varphi_0 \equiv 1$, $\varphi_{2n-1}(x) = \dfrac{\cos nx - \cos(2n+1)x}{\sin^2\frac{x}{2}}$, $\varphi_{2n}(x) =$

$= \dfrac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{\sin^2\frac{x}{2}}$ система $(0, 2\pi)$ да $p(x) = \sin^3\frac{x}{2}$ вазнли ортогонал система экани кўрсатилсин.

5. $\{\sin \alpha_n(x)\}$ *кетма-кетлик $[0, l]$ да ортогоналликка* текширилсин.

6. Ушбу

$$\varphi_n(x) = e^x\,(x^n e^{-x})^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

кўринишдаги кўпҳад* $(0, +\infty)$ да $p(x) = e^{-x}$ вазнли ортогонал система экани текширилсин.

7. Ушбу

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

кўринишдаги Эрмит** *кўпҳади* $(-\infty, +\infty)$ да $p(x) = e^{-x^2}$ вазнли ортогонал система экани кўрсатилсин.

8. $n = 1, 2, 3, \ldots$ учун

$$I_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\cdot\frac{1}{\rho(x)}\left[(x^2-1)^n \rho(x)\right]^{(n)} \text{ ва } I_0(x) \equiv 1$$

$$\{\text{бунда } \alpha > -1,\ \beta > -1 \text{ ва } \rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\,]$$

кўринишдаги Якоби*** полиноми $[-1, 1]$ да $\rho(x)$ *вазнли ортогонал экани* исботлансин.

9. $I_n^{(0,0)}(x)$, $I_n^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$ ва $I_n^{(1,1)}(x)$ ҳисоблансин.

---

* *Баъзан бу кўпҳадни француз математиги* шарафига Э. Лагерр кўпҳади дейилади. Тарихан бу тўғри эмас, чунки бу хилдаги кўпҳадларни 1859 йилда улуғ рус *математиги П. Л.* Чебишев ўрганган эди. Э. Лагерр бу полиномлар билан 1879 йилдан бошлаб шуғулланган.

** Шарль Эрмит (1822—1901) — француз математиги, у 1856 йилда Париж академиясига ҳақиқий аъзо бўлиб сайланган.

*** Карл Густав Якоби (1804—1851) — атоқли немис математиги бўлиб, 1856 йилда Берлин Фанлар Академиясининг аъзоси бўлган.

IV боб

ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛИ

17-§. Функцияни Фурье интеграли воситасида ифодалаш

II бобда $(-l, l)$ кесмада аниқланган $f(x)$ функция Дирихле теоремаси шартларини қаноатлантирса, бундай функцияни унинг

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{IV.1}$$

кўринишдаги Фурье қатори воситасида ҳар томонлама ўрганиш мумкинлигини кўрган эдик. (IV. 1) қатор коэффициентлари

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{IV.2}$$

ва

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1,\ 2,\ \dots$$

формулалар билан ҳисобланади. Дирихле теоремасига асосан (IV.1) қаторнинг йиғиндиси $(-l, l)$ га тегишли исталган x учун ушбу

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \tag{IV.3}$$

тенгликни қаноатлантиради.

Бу параграфда соддалик учун даставвал $f(x)$ ни $(-l, l)$ да Дирихле теоремаси шартларини қаноатлантирувчи узлуксиз функция деб фараз қиламиз. У ҳолда (IV.3) тенгликнинг ўнг томони исталган $-l < x < l$ учун $f(x)$ га тенг бўлади, яъни исталганча катта чекли $(-l, l)$ даги ўзгариш қонуниятини унинг мос Фурье қатори воситасида тўлиқ ўргана оламиз. Аммо l чексиз орта бориб, ∞ га интилса ($l \to \infty$ да), масала анча мураккаблашади ва ушбу

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Фурье қатори $(-l,\ l)$ даги *хосмас Фурье интеграли* деб аталувчи интегралдан иборат бўлади.

Дарҳақиқат, агар (IV.1) да a_n, b_n коэффициентлар ўрнига уларнинг (IV.2) даги ифодаларини қўйсак, исталган $x\in(-l,\ l)$ учун

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{k(\xi-x)}{l}\,d\xi \qquad (IV.4)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар $f(x)$ функция $(-\infty,\ +\infty)$ да абсолют интегралланувчи, яъни

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=a<\infty \qquad (VI.5)$$

бўлса, у ҳолда $l\to\infty$ да

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}(\xi-x)\,d\xi, \qquad (IV.6)$$

бунда $\frac{k\pi}{l}=t_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ десак, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k=\frac{\pi}{l}$ бўлиб, исталган k учун $\lim\limits_{l\to\infty}\Delta t_k=0$ бўлади ва ушбу

$$f(x)=\lim_{\substack{l\to\infty\\(\Delta t_k\to 0)}}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos t_k(\xi-x)\,d\xi\right]\Delta t_k \qquad (IV.7)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар (IV.7) да

$$\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi=F(t,x)$$

деб олсак, (IV.7) тенгликнинг ўнг томонидаги лимит белгиси остидаги чексиз йиғинди $F(t,\ x)$ нинг t га нисбатан Риман интеграл йиғиндиси бўлади. Шунинг учун l нинг жуда катта қийматларида сўнгги тенгликнинг чап томонидаги интеграл абсолют яқинлашувчи бўлганидан фойдаланиб, уни ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi$$

интеграл билан алмаштирсак, ундан ташқари, расмий равишда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos t_k(\xi - x)\,d\xi\right]\Delta t_k = \sum_{k=1}^{\infty} F(t,\ x)\,\Delta t_k$$

нинг $\Delta t_k \to 0$ даги лимитини ушбу

$$\int_0^{\infty} F(x,\ t)\,dt = \int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos t(\xi - x)\,d\xi\right]dt$$

интеграл учун Риман маъносидаги хосмас интеграл деб олсак, у вақтда

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos t(\xi - x)\,d\xi\,dt \qquad (\text{IV}.8)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл Фурье интеграли бўлиб, (IV.8) эса $f(x)$ нинг *Фурье интеграли воситасидаги ифодаси* дейилади.

18- §. Фурье теоремаси

17- § да (IV.8) формулани келтириб чиқарганимизда биз $f(x)$ функциядан қандайдир қатъий шартларни қаноатлантиришни талаб қилмасдан, фақат расмий равишда лимитга ўтишдан фойдаландик, холос. Шунинг учун албатта уни берилган $f(x)$ функцияни Фурье интеграли воситасида ифодалаш мумкинлигини исботи деб қабул қилиш мумкин эмас. Шунга кўра биз ушбу параграфда бу масалага оид муҳим Фурье теоремасини келтирамиз.

Теорема. *Агар бутун Ох ўқда аниқланган $f(x)$ функция 1) Ох ўқнинг исталган чекли $(-l,\ l)$ кесмасида силлиқ бўлакли; 2) $(-l,\ l)$ да абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда Ох га тегишли ҳар қандай x_0 учун*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{l}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(x_0 - \xi)\eta\,d\xi\,d\eta = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}. \qquad (\text{IV}.\ 9)$$

Исботи. t параметрга боғлиқ ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\xi - x_0)\,t\,d\xi$$

хосмас интегралда барча $t \in (0,\ \infty)$ лар учун

$$|f(\xi)\cos(\xi - x_0)\,t| \leqslant |f(\xi)|$$

бўлиб, ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,d\xi$$

интеграл абсолют яқинлашувчи бўлгани туфайли, у текис яқинлашувчидир. У ҳолда қуйидаги

$$\int_{0}^{l}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\xi - x_0)\,t\,d\xi\,dt$$

каррали интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириш мумкин, яъни

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{l}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\xi - x_0)\,t\,d\xi\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{l} f(\xi)\cos(\xi - x_0)\,t\,dt\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\frac{\sin(\xi - x_0)\,l}{\xi - x_0}\,d\xi.$$

Агар $\xi - x_0 = u$ алмаштиришни қабул қилсак,

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{l}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\xi - x_0)\,d\xi\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + u)\,\frac{\sin lu}{u}\,du \qquad (IV.10)$$

ёки

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{l}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\xi - x_0)\,d\xi\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} f(u + x_0)\,\frac{\sin lu}{u}\,du + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} f(u + x_0)\,\frac{\sin lu}{u}\,du\right]$$

бўлади. Энди мос равишда

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(u + x_0)\,\frac{\sin lu}{u}\,du = \frac{f(x_0 - 0)}{2} \qquad (IV.10')$$

ва

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(u + x_0)\,\frac{\sin lu}{u}\,du = \frac{f(x_0 + 0)}{2} \qquad (IV.10'')$$

эканини кўрсатсак, шу билан теорема исбот бўлади. Бу тенгликларнинг исботи бир хил бўлгани учун улардан иккинчисини исботлаш билан чегараланамиз.

Математик анализ курсидан

$$\int_0^\infty \frac{\sin lu}{u} du = \frac{\pi}{2} \text{ ёки } \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin lu}{u} du = \frac{1}{2}$$

экани маълум. Бундан

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0+0)\frac{\sin lu}{u} du = \frac{f(x_0+0)}{2}. \qquad (IV.11)$$

(IV.11) га асосан

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(u+x_0)\frac{\sin lu}{u} du - \frac{f(x_0+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f x_0 + u) - $$
$$- f(x_0+0)]\frac{\sin lu}{u} du$$

бўлиши равшан. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги l параметрга боғлиқ интегрални $I(l)$ орқали белгиласак, у ҳолда

$$I(l) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0+u) - f(x_0+0)]\frac{\sin lu}{u} du \qquad (IV.12)$$

ни ҳосил қиламиз. Энди

$$\lim_{l\to\infty} I(l) = 0$$

эканини кўрсатамиз. Равшанки, исталган $\delta > 0$ ва $\delta < A < \infty$ учун

$$I(l) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x_0+u) - f(x_0+0)]\frac{\sin lu}{u} du +$$
$$+ \int_\delta^A [f(x_0+u) - f(x_0+0)]\frac{\sin lu}{u} du + \frac{1}{\pi}\int_A^\infty [f(x_0+\bar{u}) -$$
$$- f(x_0+0)]\frac{\sin lu}{u} du.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни $I_1(l)$, $I_2(l)$ ва $I_3(l)$ орқали белгилаймиз:

$$I(l) = I_1(l) + I_2(l) + I_3(l). \qquad (IV.13)$$

Энди $I_i(l)$, $i = 1, 2, 3$ нинг ҳар бири $l\to\infty$ да чексиз кичик эканини кўрсатамиз:

1) $I_1(l) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}\sin lu du$

ни баҳолаймиз. Функция ўнг ҳосиласи таърифига асосан

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}=f'(x_0+0),$$

У ҳолда теорема шартларига кўра исталган $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ мавжудки, барча $u\in(0,\delta)$ учун

$$\left|\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\sin lu\right|<|f'(x_0+0|=B<\infty.$$

Демак, исталганча катта l учун

$$I_1(l)<\frac{B\delta}{\pi},\ \text{бундан}\ \delta<\frac{\varepsilon\pi}{3B}\ \text{учун}$$

$$I_1(l)<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(IV.14)}$$

2) A сон δ дан исталганча катта деб,

$$I_2(l)=\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{A}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\sin lu$$

ни баҳолаймиз. Теорема шартларига кўра $\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}=$ $=\varphi(x,u)$ функция u га нисбатан (δ, A) да силлиқ бўлакли бўлгани туфайли асосий леммага кўра (I боб, 7- § га қаранг)

$$\lim_{l\to\infty}I_2(l)=0.$$

Бундан исталганча катта l (масалан, $l\geqslant 1$) учун

$$|I_2(l)|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(IV.15)}$$

3) ниҳоят,

$$I_3(l)=\frac{1}{\pi}\int_{A}^{\infty}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\sin lu\,du$$

ни баҳолайлик.

$$I_3(l)=\frac{1}{\pi}\int_{A}^{\infty}\frac{f(x_0+u)}{u}\sin lu\,du-\frac{1}{\pi}f(x_0+0)\int_{A}^{\infty}\frac{\sin lu}{u}\,du$$

ёки

$$|I_3(l)|\leqslant\frac{1}{\pi}\left[\int_{A}^{\infty}\left|\frac{f(x_0+u)}{u}\right|du+\left|f(x_0+0)\right|\int_{A}^{\infty}\left|\frac{\sin lu}{u}\right|du,\right.$$

бундан исталган $x\in\,]-l, l]$ учун

$$\int_{A}^{\infty}|f(x_0+u)|\,du<\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_0+u)|\,du<B<\infty$$

ва

$$\int_{A}^{\infty}\frac{\sin lu}{u}\,du=\int_{Al}^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz$$

муносабатни эътиборга олсак,

$$|I_3(l)|\leqslant\frac{B}{A\pi}+\left|\frac{f(x_0+0)}{\pi}\right|\left|\int_{Al}^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right|$$

тенгсизликка эга бўламиз. У ҳолда исталган $\delta>0$ учун етарлича катта шундай $A>0$ мавжудки,

$$\frac{B}{A\pi}<\frac{\varepsilon}{6}\qquad(*)$$

ва ўша $A>0$ ва етарлича катта l учун

$$\frac{|f(x_0+0)|}{\pi}\left|\int_{Al}^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{6},\qquad(**)$$

чунки

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz$$

интеграл яқинлашувчидир. Энди (*) ва (**) ларга асосан исталганча катта l учун

$$|I_3(l)|<\frac{\varepsilon}{3}.\qquad(IV.16)$$

(IV.14), (IV.15) ва (IV.16) тенгсизликларга кўра

$$|I(l)|<\varepsilon.$$

Бу эса теореманинг ёки (IV.9) нинг тўлиқ исботидир.

Бу теоремани юқорида келтирилган шартлардан кўра анча енгил шартларда ўринли эканини кўрсатиш мумкин. Чунончи *агар* $(-\infty, +\infty)$ *да абсолют интегралланувчи* $f(x)$ *функция: 1) Ох ўқнинг ҳар бир чекли кесмасида узлуксиз бўлакли; 2) тайин х ва исталганча кичик* $u>0$ *учун ушбу*

$$\left|\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\right|$$

нисбат чекли бўлса, у ҳолда (IV.9), яъни

$$\lim \frac{1}{\pi}\int_{0}^{l}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\xi - x_0)\, t d\xi dt = \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$$

ўринлидир.

Исботи. Бу ерда ҳам $I(l)$ интегрални $I_1(l)$, $I_2(l)$ ва $I_3(l)$ интегралларга ажратиб, уларнинг ҳар бирини алоҳида баҳолаймиз.

1) $$I_1(l) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u} \sin lu du$$

ни баҳолайлик. Исталганча кичик $\varepsilon > 0$ ва x нинг тайин x_0 қийматида $\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}$ нисбат чекли бўлса, у ҳолда исталганча кичик $\varepsilon > 0$ учун шундай кичик $\delta > 0$ мавжудки,

$$I_1(l) = \frac{B\delta}{\pi} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{(IV.17)}$$

бўлади, бунда

$$\delta < \frac{\varepsilon\pi}{3B} \text{ ва } \left|\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\right| < B.$$

2) $I_2(l) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{A} \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u} \sin lu du$ интегралда $\varphi(u) = \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}$ функция x нинг ҳар қандай тайин қиймати учун u га нисбатан $[\delta, A]$ да узлуксиз бўлакли.

Агар $\varphi(u)$ функция бирор $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда исталган $\varepsilon > 0$ учун Вейерштрасснинг тегишли теоремасига асосан, ўша кесмада узлуксиз ва силлиқ бўлакли шундай $\varphi_\varepsilon(u)$ функция қуриш мумкинки, барча $0 \leqslant u < \delta$ учун

$$|\varphi(u) - \varphi_\varepsilon(u)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

бўлади, бундан

$$\left|\int_{a}^{b} \varphi(u)\sin lu du\right| \leqslant \left|\int_{a}^{b} [\varphi(u) - \varphi_\varepsilon(u) + \varphi_\varepsilon(u)] \sin lu du \leqslant\right.$$

$$\leqslant \int_{a}^{b} |\varphi(u) - \varphi_\varepsilon(u)|\, du + \left|\int_{a}^{b} \varphi_\varepsilon(u)\sin lu du\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_{a}^{b} \varphi_\varepsilon(u) \sin lu du\right|.$$

Ёрдамчи $\varphi_\varepsilon(u)$ функция $[a, b]$ да асосий лемма (II боб, 7-§) шартларини қаноатлантирганлиги туфайли исталганча катта l ($l>0$) учун

$$\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(u)\sin lu\,du\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Демак,

$$\left|\int_a^b \varphi(u)\sin lu\,du\right| < \varepsilon.$$

Агар $[\delta, A]$ ни $\varphi(u)$ нинг узлуксизлик кесмаларига ажратсак, $I_2(l)$ ифода ҳам ўша кесмалар бўйича олинган интегралларга ажралиб, уларнинг ҳар бири исталганча катта $A>0$ учун етарлича кичик ва чекли сонли бўлади. Бундан етарлича катта l учун ушбу

$$|I_2(l)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(IV.18)}$$

тенгсизлик ўринлилиги келиб чиқади.

3) энди

$$I_3(l) = \frac{1}{\pi}\int_A^\infty \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\sin lu\,du$$

интегрални баҳолаймиз:

$$|I_3(l)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_A^\infty \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\sin lu\,du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{A\pi}\int_A^\infty |f(x_0+u)|\,du + \frac{|f(x_0+0)|}{\pi}\left|\int_A^\infty \frac{\sin lu}{u}\,du\right|.$$

$f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да абсолют интегралланувчи бўлгани туфайли исталганча катта $A>0$ ва $l>0$ лар учун бундан олдин келтирилган мулоҳазаларга асосан

$$\frac{1}{A\pi}\int_A^\infty |f(x_0+u)|\,du < \frac{\varepsilon}{6}$$

ва

$$\frac{|f(x_0+0)|}{\pi}\left|\int_A^\infty \frac{\sin lu}{u}\,du\right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

эканини кўрсата оламиз, у ҳолда

$$|I_3(l)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(VI.19)}$$

Бу ерда ҳам 1-§ дагидек, $I_i(l)$, $i = 1, 2, 3$ учун ҳосил қилинган (IV.17), (IV.18) ва (IV.19) тенгсизликларга асосан исталганча катта $l>0$ учун

$$|I(l)| < \varepsilon$$

бўлади. Шундай қилиб, юқорида келтирилган шартларни қаноатлантирувчи $f(x)$ учун [бунда $x\in(-\infty, +\infty)$] ушбу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\eta(x-\xi)\,d\xi\,d\eta=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad \text{(IV.20)}$$

формула ўринлидир.

(IV.20) тенгликнинг ўнг томонидаги каррали интегрални ушбу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\eta(x-\xi)\,d\xi\,d\eta=\int_0^\infty\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\eta\xi d\xi\right]\cos x\eta\,d\eta+$$

$$+\int_0^\infty\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin\eta\xi d\xi\right]\sin x\eta d\eta$$

кўринишда ёзсак бўлади. Бу ерда

$$a(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\eta\xi d\xi,\qquad b(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin\eta\xi d\xi \qquad \text{(IV.21)}$$

белгилашларни қабул қилсак, (IV.20) формула қуйидаги

$$\int_0^\infty[a(\eta)\cos\eta x+b(\eta)\sin\eta x]d\eta=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad \text{(IV.22)}$$

кўринишга эга бўлади. $f(x)$ нинг узлуксиз нуқталарида у яна ҳам содда, яъни

$$f(x)=\int_0^\infty\left[a(\eta)\cos\eta x+b(\eta)\sin\eta x\right]d\eta \qquad \text{(IV.23)}$$

кўринишга эга бўлади. Бу формула ўзининг содда кўринишидан ташқари амалда ҳам анча қулайдир. Буни қуйидаги мисолларда ҳам кўришимиз мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}a, & -1\leqslant x<0,\\ b, & 0\leqslant x<1\end{cases}$$

функциянинг Фурье интеграли топилсин.

Ечилиши. Олдин (IV.21) формулаларга асосан $a(\eta)$ ва $b(\eta)$ ни ҳисоблаймиз:

$$a(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\eta\xi d\xi=\frac{1}{\pi}\left[-a\int_0^{-1}\cos\eta\xi d\xi+\right.$$

$$\left.+b\int_0^1\cos\eta\xi d\xi\right]=\frac{a+b}{\pi}\,\frac{\sin\eta}{\eta};$$

$$b(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\eta\xi d\xi=\frac{1}{\pi}\left[a\int_{-1}^{0}\sin\eta\xi d\xi+b\int_{0}^{1}\sin\eta\xi d\xi\right].$$

$$d(\eta)=\frac{a+d}{\pi}\,\frac{(-\cos\eta)}{\eta}.$$

$a\,(\eta)$, $b\,(\eta)$ ларнинг қийматларини (IV.22) га қўйсак, исталга
$x\neq0$ учун

$$f(x)=\frac{a+b}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\sin\eta\cos\eta x+(1-\cos\eta)\sin\eta x)}{\eta}\right]d\eta$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $x=0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\sin\eta\cos\eta x+(1-\cos\eta)\sin\eta x}{\eta}\right]d\eta=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta=\frac{\pi}{2}.$$

Бундан

$$\frac{a+b}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\sin\eta\cos\eta x+(1-\cos\eta)\sin\eta x}{\eta}\right]d\eta=\frac{a+b}{2},$$

яъни

$$\int_{0}^{\infty}[a(\eta)\cos\eta x+b(\eta)\sin\eta x]\,d\eta=\frac{a+b}{2}.$$

2-мисол. Ушбу

$$f(x)=\operatorname{sign}(x-a)-\operatorname{sign}(x-b),\quad (b>a)$$

функциянинг Фурье интеграли топилсин.
Равшанки,

$$f(x)=\begin{cases}x\overline{\in}(a,\,b)\ \text{бўлса},\ 0;\\ x=a\ \text{ёки}\ x=b\ \text{бўлса},\ 1;\\ x\in(a,\,b),\ \text{бўлса},\ 2,\end{cases}$$

у ҳолда

$$a(\eta)=\frac{2}{\pi}\int_{a}^{b}\cos\eta\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin b\eta-\sin a\eta}{\eta};$$

$$b(\eta)=\frac{2}{\pi}\int_{a}^{b}\sin\eta\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\,\frac{\cos a\eta-\cos b\eta}{\eta}.$$

Бундан ихтиёрий $x\in(a,\,b)$ учун

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}[(\sin bx-\sin ax)\cos\eta x+(\cos a\eta-\cos b\eta)\cdot\sin\eta x]\,\frac{d\eta}{\eta}=$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(b-x)\eta + \sin(x-a)\eta}{\eta}\,d\eta =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{b-a}{2}\eta\cos\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\eta}{\eta}\,d\eta.$$

Демак,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{b-a}{2}\eta\cos\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\eta}{\eta}\,d\eta.$$

19- §. Жуфт функциянинг Фурье интеграли

Агар $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да Фурье теоремаси шартларини қаноатлантиришдан ташқари жуфт бўлса, у ҳолда (IV.21) *дан равшанки, исталган η учун*

$$a(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\eta\xi\,d\xi, \qquad \text{(IV.24)}$$

$$b(\eta) = 0$$

бўлади. Бундан исталган $x \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$\int_0^\infty a(\eta)\cos\eta x\,d\eta = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad \text{(IV.25)}$$

бўлади Агар x нуқта $f(x)$ нинг узлуксизлик нуқтаси бўлса, у ҳолда ушбу

$$f(x) = \int_0^\infty a(\eta)\cos\eta x\,dx \qquad \text{(IV.26)}$$

формулага эга бўламиз.

1-мисол. Ушбу $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ функциянинг Фурье интеграли топилсин.

Бу функция жуфт бўлгани учун (IV.24) га асосан

$$a(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha\xi}\cos\eta\xi\,d\xi$$

бўлади. Ушбу

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$$

формулага кўра

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\xi} \cos \eta\xi d\xi = \frac{e^{-\alpha\xi}}{\alpha^2+\eta^2} (\eta \sin \eta\xi - \alpha \cos \eta\xi) \Big|_0^\infty = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\eta^2)}$$

ва

$$b(\eta) = 0$$

бўлиб,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos x\eta}{\alpha^2+\eta^2} d\eta$$

интеграл ҳосил бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > 0 \end{cases}$$

функциянинг Фурье интеграли топилсин.

Бу функция ҳам жуфт бўлгани учун

$$a(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^a (1 - z) \cos \eta z dz = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \eta z}{\eta} \right]_0^a -$$

$$- \frac{1}{\eta} z \sin \eta z \Big|_0^a + \frac{1 - \cos a\eta}{\eta^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(1-a) \sin a\eta}{\eta} + \frac{1 - \cos a\eta}{\eta^2} \right].$$

Демак,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1-a)\eta \sin a\eta + (1 - \cos a\eta)}{\eta^2} \cos \eta x dx.$$

20-§. Тоқ функциянинг Фурье интеграли

Агар $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да Фурье теоремаси шартларини қаноатлантирувчи тоқ функция бўлса, у ҳолда исталган x учун

$$a(\eta) = 0,$$

$$b(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \sin \xi\eta d\xi \qquad \text{(IV.27)}$$

бўлади.

$a(\eta)$ ва $b(\eta)$ ларнинг қийматларини (IV.22) га қўйсак, ихтиёрий $x \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$\int_0^\infty b(\eta)\sin x\eta d\eta = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad \text{(IV.28)}$$

формула ҳосил бўлади. Бундан $f(x)$ нинг узлуксизлик нуқталари учун

$$f(x) = \int_0^\infty b(\eta)\sin \eta x d\eta \qquad \text{(IV.29)}$$

муносабат келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} |x| \leqslant l & \text{да } x, \\ |x| > l & \text{да } 0 \end{cases}$$

функциянинг Фурье интеграли ёзилсин.

Ечилиши. Бу функция тоқ бўлгани учун

$$b(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^l \xi \sin \eta\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\xi\cos\eta\xi}{\eta}\Big|_0^l + \frac{1}{\eta}\int_0^l \cos\eta\xi d\xi\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\sin l\eta - l\eta\cos l\eta}{\eta^2}.$$

Энди $b(\eta)$ ни (IV.29) га қўйсак, исталган x учун

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin l\eta - l\eta\cos l\eta}{\eta^2}\sin x\eta d\eta$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

функциянинг Фурье интеграли ёзилсин.

Ечилиши. Бу функция ҳам тоқ бўлиб,

$$b(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\xi \sin\eta\xi d\xi = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[\cos(\eta+1)\xi - \cos(\eta-1)\xi]d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\eta-1)\xi}{\eta-1} - \frac{\sin(\eta+1)\xi}{\eta+1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2\,\eta\cos\frac{\pi}{2}\eta}{\eta^2-1}$$

бўлади. Демак,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{2\eta\cos\frac{\pi}{2}\eta}{\eta^2-1}\sin x\eta d\eta.$$

21-§. (0, ∞) да аниқланган функциянинг Фурье интеграли

Биз олдинги параграфларда $(-\infty, +\infty)$ да Фурье шартларини қаноатлантирувчи функцияларнинг Фурье интегралларини кўрдик. Энди $(0, \infty)$ да аниқланган функциялар учун Фурье интеграли билан шуғулланамиз. Фараз қилайлик, $f(x)$ *функция қуйидаги икки шартни қаноатлантирсин:*

1) $f(x)$ *функция* $(0, +\infty)$ *да абсолют интегралланувчи;*

2) $(0, +\infty)$ *нинг исталган чекли* $(0, l)$ *кесмасида силлиқ бўлакли,*

у ҳолда исталган $x \in (0, \infty)$ *учун*

$$\int\limits_0^\infty a(\eta)\cos\eta x d\eta = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad \text{(IV.30)}$$

ёки

$$\int\limits_0^\infty b(\eta)\sin\eta x d\eta = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \qquad \text{(IV.31)}$$

$f(x)$ *функциянинг узлуксизлик нуқталари учун эса*

$$f(x) = \int\limits_0^\infty a(\eta)\cos\eta x d\eta \qquad \text{(IV.32)}$$

ёки

$$f(x) = \int\limits_0^\infty b(\eta)\sin\eta x d\eta \qquad \text{(IV.33)}$$

бўлади.

Исботи. Агар $f(x)$ ни жуфтлик (ёки тоқлик) қонунига асосан $(-\infty, 0)$ га давом эттириб, ёрдамчи $F(x)$ функция тузсак, бу функция бутун ҳақиқий ўқда Фурье шартларини қаноатлантирувчи жуфт (тоқ) функция бўлиб, унинг учун (IV.25) ёки (IV.28) формула ўринли бўлади, яъни

$$\int\limits_0^\infty a(\eta)\cos\eta x d\eta = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$$

ёки

$$\int_0^\infty b(\eta)\sin x\eta d\eta = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}.$$

Исталган $x \in (0, \infty)$ учун $F(x) = f(x)$ бўлгани туфайли бу тенгликлардан (IV.30) ва (IV.31) ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Агар x нуқта функциянинг узлуксизлик нуқтаси бўлса, у ҳолда $F(x)$ жуфт (тоқ) бўлишига қараб (IV.32) ёки (IV.33) ўринли эканини кўрсатиш мумкин.

Шундай қилиб, $f(x)$ *функция юқорида айтилган шартларни қаноатлантирса, у ҳолда мос равишда тўртта тенглик ўринли бўлар экан.*

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin\alpha x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2\alpha} \quad (\alpha > 0), \\ 0, & x > \frac{\pi}{2\alpha} \end{cases}$$

функция учун Фурье интеграли топилсин.

Ечилиши. а) агар берилган функцияни $(-\infty, 0)$ га жуфтлик қонунига асосан давом эттирсак, ушбу

$$F(x) = \begin{cases} |\sin\alpha x|, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2\alpha} \end{cases}$$

ёрдамчи жуфт функцияга эга бўламиз. У ҳолда (IV.25) га асосан

$$F(x) = \int_0^\infty a(\eta)\cos x\eta d\eta$$

бўлиб, бунда

$$a(\eta) = \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{2}{\pi} \sin\alpha\xi\cos\eta\xi d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} [\sin(\alpha+\eta)\xi + \sin(\alpha-\eta)\xi]\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(\alpha+\eta)\xi}{\alpha+\eta} - \frac{\cos(\alpha-\eta)\xi}{\alpha-\eta}\right]_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(\alpha+\eta)\frac{\pi}{2\alpha}}{\alpha+\eta} + \frac{1-\cos(\alpha-\eta)\frac{\pi}{2\alpha}}{\alpha-\eta}\right] = \frac{2}{\pi(\alpha^2-\eta^2)}\left(\alpha-\eta\sin\frac{\pi\eta}{2\alpha}\right);$$

У ҳолда исталган $|x|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha}$ учун

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha-\eta\sin\frac{\pi\eta}{2\alpha}}{\alpha^2-\eta^2}\cos x\eta d\eta.$$

Барча $0<x<\frac{\pi}{2\alpha}$ да $F(x)=\sin\alpha x$ бўлгани туфайли исталга
$x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ да

$$\sin\alpha x=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha-\eta\sin\frac{\pi\eta}{2\alpha}}{\alpha^2-\eta^2}\cos x\eta d\eta.$$

Бундан

$$\int\limits_0^\infty\frac{\alpha-\eta\sin\frac{\pi\eta}{2\alpha}}{\alpha^2-\eta^2}\cos\eta x d\eta=\frac{\pi\sin\alpha x}{2}. \qquad (*)$$

б) агар берилган функцияни $(-\infty,\ 0)$ га тоқлик қонунига асосан давом эттирсак, у ҳолда ушбу

$$F(x)=\begin{cases}\sin\alpha x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha},\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2\alpha}\end{cases}$$

ёрдамчи функцияга эга бўламиз. Бундан (IV.29) га асосан

$$F(x)=\int\limits_0^\infty b(\eta)\sin x\eta d\eta$$

бўлиб,

$$b(\eta)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}\sin\alpha\xi\sin\eta\xi d\xi$$

бўлади. Бу интегрални ҳисоблаймиз:

$$b(\eta)=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+\eta)\xi}{\alpha+\eta}-\frac{\sin(\alpha-\eta)\xi}{\alpha-\eta}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}=$$

$$=\frac{2\eta}{\pi}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2\alpha}\eta}{\alpha^2-\eta^2}.$$

Бундан исталган $|x|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha}$ учун

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\eta\cos\frac{\pi}{2\alpha}\eta}{\alpha^2-\eta^2}\sin\eta x d\eta.$$

Барча $x \in \left(0, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ учун $F(x) = \sin \alpha x$ бўлгани туфайли

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\eta \cos\frac{\pi}{2\alpha}\eta}{\alpha^2 - \eta^2} \sin x\eta d\eta = \sin \alpha x.$$

Бундан исталган $x \in \left(0, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ учун ушбу

$$\int\limits_0^\infty \frac{\eta \cos \frac{\pi}{2\alpha}\eta}{\alpha^2 - \eta^2} \sin x\, \eta d\eta = \frac{\pi \sin \alpha x}{2} \qquad (^{**})$$

формула келиб чиқади.

Изоҳ. I ва II бобларда берилган функциянинг Фурье қатори воситасида баъзи бир сонли қаторлар йиғиндисини ҳисоблаш мумкинлигини кўрган эдик. Шунга ўхшаш баъзи функцияларнинг маълум Фурье интеграллари воситасида параметрга боғлиқ хосмас интегралларни ҳисоблаш мумкин. Масалан, агар (*) ва (**) да $x = \frac{\pi}{4\alpha}$ десак, у ҳолда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\alpha - \eta \sin \frac{\pi\eta}{2\alpha}}{\alpha^3 - \eta^2} \cos\frac{\pi\eta}{4\alpha} d\eta = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

ва

$$\int\limits_0^\infty \frac{\eta \cos \frac{\pi}{2\alpha}\eta \sin \frac{\pi}{4\alpha}\eta}{\alpha^2 - \eta^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

натижаларга эга бўламиз.

22- §. Фурье интегралининг комплекс ўзгарувчи бўйича ифодаси

1°. Айрим ҳолларда Фурье интегралини комплекс ўзгарувчи воситасида ёзиш қулайдир. Шунинг учун бу параграфда биз (IV.8) нинг комплекс ўзгарувчи орқали ифодасини берамиз. 18- § да агар узлуксиз $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да Фурье теоремаси шартларини қаноатлантирса, у ҳолда $l \to \infty$ да $f(x)$ ни ушбу

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(x - \xi)\,\eta d\xi d\eta$$

кўринишдаги Фурье интеграли билан ифодалаш мумкин эканлигини кўрган эдик. Равшанки, ушбу

$$I(x, \eta) = \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(x - \xi)\,\eta d\xi$$

функция η бўйича жуфт бўлгани туфайли

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(x-\xi)\eta\, d\xi d\eta. \qquad \text{(IV.34)}$$

Агар $\cos x$ ва $\sin x$ учун исталган x да ўринли бўлган ушбу

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Эйлер формулаларидан фойдалансак, (IV.34) ни

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[e^{i(x-\xi)\eta}+e^{-i(x-\xi)\eta}\right]d\xi d\eta \qquad \text{(IV.35)}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{-i(x-\xi)\eta}\,d\xi d\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\xi)\eta} f(\xi)\,d\xi d\eta$$

тенгликка кўра

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\xi)\eta} f(\xi)\,d\xi d\eta. \qquad \text{(IV. 36)}$$

Бу формула $f(x)$ нинг комплекс ўзгарувчи бўйича Фурье интеграли дейилади.

1-мисол. $(-\infty,\ +\infty)$ да қуйидагича аниқланган

$$f(x)=\begin{cases} c, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

функциянинг комплекс ўзгарувчи бўйича Фурье интеграли ёзилсин.

Ечилиши.

$$I(x,\ \eta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{i(x-\xi)\eta}\,d\xi=c\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x-\xi)\eta}d\xi=$$

$$=-\frac{cx}{i\eta}\,e^{i(x-\xi)\eta}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{c\,e^{ix\eta}}{i\eta}\left(e^{i\pi\eta}-e^{-i\pi\eta}\right)=\frac{2ce^{i\eta x}}{\eta}\ \sin\pi\eta.$$

Бундан

$$f(x)=\frac{c}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi\eta}{\eta}\,e^{i\eta x}\,d\eta.$$

2-мисол. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ функция учун Фурье интеграли ёзилсин.

Ечилиши.

$$I(x, \eta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{i(x-\xi)\eta} d\xi = e^{ix\eta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\xi^2}{2}+i\eta\xi\right)} d\xi$$

ёки

$$I(x, \eta) = e^{ix\eta-\frac{\eta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\xi+i\eta)^2} d\xi.$$

Агар

$$\Phi(\eta) = \lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{1}{2}(x+i\eta)^2} d\xi \qquad (*)$$

тенгликнинг ўнг томонидаги интегралда $\xi + i\eta = z$ алмаштириш бажарсак,

$$\Phi(\eta) = \lim_{l \to \infty} \int_{-l+i\eta}^{l+i\eta} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$$

тенгликка эга бўламиз. Ўнг томондаги интеграл η параметр бўйича дифференциалланувчи бўлгани туфайли

$$\frac{d\Phi(\eta)}{d\eta} = \lim_{l \to \infty} \frac{d}{d\eta} \int_{-l+i\eta}^{l+i\eta} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz = \lim_{l \to \infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(i\eta+l)^2} - e^{-\frac{1}{2}(i\eta-l)^2}}{i}$$

ёки

$$\frac{d\Phi(\eta)}{d\eta} = \lim_{l \to \infty} e^{-\frac{1}{2}((l^2-\eta^2)} \sin l\eta.$$

Бундан

$$\frac{d\Phi(\eta)}{d\eta} = 2e^{\frac{1}{2}\eta^2} \lim_{l \to \infty} e^{-\frac{1}{2} l^2} \sin l\eta = 0.$$

Демак, исталган η учун $\frac{d\Phi(\eta)}{d\eta} \equiv 0$,

у ҳолда η нинг исталган қиймати учун

$$\Phi(\eta) \equiv \text{const}.$$

Бундан ва (*) дан

$$\Phi(\eta) = \Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz.$$

Математик анализ курсидан

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sqrt{2\pi}$$

экани бизга маълум, у ҳолда

$$\Phi(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\xi+i\eta)^2} d\xi = \sqrt{2\pi}.$$

Бу тенгликдан

$$e^{-\frac{1}{2}\eta^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\xi - \frac{1}{2}\xi^2} d\xi$$

ёки

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - \frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

23-§ Фурье алмаштириши

1°. Бундан олдинги параграфда Фурье теоремаси шартларини қаноатлантирувчи $f(x)$ функция учун (IV.36) дан иборат комплекс ўзгарувчили ушбу

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i\eta(x-\xi)} d\xi d\eta$$

Фурье интегралини келтириб чиқарган эдик. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги каррали интегралларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\eta\xi} d\xi\right] e^{i\eta x} d\eta. \qquad \text{(IV.37)}$$

Агар η параметрга боғлиқ ушбу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\eta\xi} d\xi$$

хосмас интегрални $\varphi(\eta)$ орқали, яъни

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\eta\xi} d\xi \qquad \text{(IV.38)}$$

деб белгиласак, ушбу

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)e^{i\eta x}d\eta \qquad \text{(IV.39)}$$

формула ҳосил бўлади.

(IV.38) *формула билан аниқланувчи* $\varphi(\eta)$ *функция бутун ҳақиқий ўқда аниқланган* $f(x)$ *функциянинг Фурье алмашмаси* (*тасвири, спектрал характеристикаси*) *деб аталади.* $f(x)$ *функциянинг ўзи эса оригинал дейилади.*

Демак, 21- § да исботланган Фурье теоремаси шартларини қаноатлантирувчи ҳар қандай $f(x)$ функция учун исталган $\eta\in(-\infty, +\infty)$ да (IV.38) формула билан аниқланувчи $\varphi(\eta)$ функция мавжуд ва ушбу муносабат ўринли:

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-l}^{l}\varphi(\eta)e^{i\eta x}d\eta. \qquad \text{(IV. 40)}$$

Равшанки, (IV. 38) формула ҳам шу маънода қабул қилинади.

$f(x)$ *функциядан* (IV.38) *формулага асосан* $\varphi(\eta)$ *га ўтиш амали Фурье алмаштириши дейилади.* Бу хилдаги алмаштиришни математиканинг турли соҳаларида, чунончи эҳтимоллар назариясида, математик физикада учратиш мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x\in[a,\ b] \text{ да } \dfrac{1}{b-a}, \\ x\overline{\in}[a,\ b] \text{ да } 0 \end{cases}$$

функциянинг $\varphi(\eta)$ алмашмаси топилсин.

Ечилиши. (IV.38) формулага асосан

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\xi\eta}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a}^{b}\frac{e^{-i\eta\xi}}{b-a}d\xi.$$

Бундан

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(b-a)}\,\frac{e^{-i\xi\eta}}{i\eta}\Bigg|_{a}^{b}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-ib\eta}-e^{-ia\eta}}{(b-a)\,i\eta}.$$

Демак,

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-ib\eta}-e^{-ia\eta}}{(b-a)i\eta}.$$

2-мисол. Ушбу $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ функциянинг Фурье алмашмаси ҳисоблансин.

Ечилиши.

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-i\eta x}}{\sqrt{2\pi}}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\eta x-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Бундан

$$\varphi(\eta)=\frac{e^{-\frac{\eta^2}{2}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x+i\eta)^2}d(x+i\eta).$$

Агар $x+i\eta=z$ деб олсак,

$$\varphi(\eta)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\eta^2}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{e^{-\frac{1}{2}\eta^2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\eta^2}{2}}$$

бўлади. Демак,

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\eta^2}{2}}.$$

2°. **Фурье алмашмасининг асосий хоссалари.** Бу бандда Фурье алмашмасининг баъзи муҳим хоссаларини кўриб ўтамиз:

1. Агар $\varphi(\eta)$ функция $f(x)$ нинг Фурье алмашмаси, яъни

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi\eta}f(\xi)\,d\xi \qquad \text{(IV.38)}$$

бўлиб, $f(x)$ функция $(-\infty,\ +\infty)$ да абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда

а) $(-\infty,\ +\infty)\ni\eta$ учун

$$|\varphi(\eta)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|\,d\xi,$$

б) $\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi 2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,d\xi,$

в) $f(ax+b)$ функциянинг Фурье алмашмаси

$$\psi(\eta)=\frac{e^{i\frac{b}{a}}}{a}\varphi\left(\frac{\eta}{a}\right) \qquad \text{(IV.40)}$$

кўринишга эга бўлади.

Дарҳақиқат, (IV.38) га асосан

$$\psi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\eta\xi}f(a\xi+b)\,d\xi.$$

Бу интегралда $a\xi + b = z$ десак,

$$\psi(\eta) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} l^{i\frac{b}{a}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\eta z}{a}} f(z)dz = \frac{e^{\frac{ib}{a}\eta}}{a} \varphi(a\eta),$$

яъни

$$\psi(\eta) = \frac{e^{i\frac{b}{a}}}{a} \varphi(a\eta)$$

келиб чиқади.

2. Агар $\varphi(\eta)$ функция $f(x)$ учун Фурье алмашмаси бўлиб, $k=0$ 1, 2, 3, . . . учун ушбу

$$\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$$

интеграл абсолют яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\varphi(\eta)$ нинг $k = 0$; 1, 2, . . . тартибли ҳосилалари мавжуд ва

$$\varphi^{(k)}(\eta) = \frac{(i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-ix\eta} f(x)\,dx \qquad (IV.41)$$

тенглик ўринлидир. Бундан ушбу

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \alpha_k \qquad (IV.42)$$

тенглик ҳосил бўлади. Равшанки, бу шартлар бажарилса, ноль нуқта атрофида $\varphi(\eta)$ учун қуйидаги

$$\varphi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{(i\eta)^n}{n!} \qquad (IV.43)$$

ёйилма ўринлидир.

3°. Агар $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ функциялар мос равишда $f_1(x)$, $f_2(x)$ функциялар учун Фурье алмашмаси ва c_1, c_2 ихтиёрий ўзгармаслар бўлса, у ҳолда $c_1\varphi_1(\eta) + c_2\varphi_2(\eta)$ функция $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ функциянинг Фурье алмашмаси бўлади. Бу хоссани текширишни китобхонга тавсия қиламиз.

3°. **(0, $+\infty$) да аниқланган $f(x)$ функциянинг Фурье алмашмаси.** Юқорида биз бутун ҳақиқий ўқда аниқланган $f(x)$ функциянинг Фурье алмашмасини кўрдик. Айрим ҳолларда (0, $+\infty$) да аниқланган функция учун ҳам Фурье алмаштириши формуласидан фойдаланса бўлади. Фараз қилайлик, (0, $+\infty$) *да аниқланган* $f(x)$ *функция шу оралиқда Фурье теоремаси шартларини қаноатлантирсин, яъни*

1) $f(x)$ *функция* (0, $+\infty$) *да абсолют интегралланувчи;*

2) (0, $+\infty$) *нинг исталган чекли* [0, l] *кесмасида силлиқ бўлакли бўлсин, у ҳолда* $f(x)$ *нинг ушбу*

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{-\frac{\xi\cos\eta\xi}{\eta}\Bigg|_0^1+\frac{1}{\eta^2}\sin\eta\xi\Bigg|_0^1-2\frac{\cos\eta\xi}{\eta}\Bigg|_1^2\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\sin\eta-\eta\cos\eta}{\eta^2}-\frac{2(\cos 2\eta-\cos\eta)}{\eta}\right\}.$$

Шундай қилиб,

$$\varphi_s(\eta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\eta(\cos\eta-2\cos 2\eta)+\sin\eta}{\eta^2}.$$

Равшанки, агар $\varphi_c(\eta)$ ва $\varphi_s(\eta)$ функциялар берилган бўлса (IV.48) ва (IV.49) формулалар воситасида $f(x)$ ни топиш мумкин. Буни юқорида келтирилган мисоллар учун текшириб кўришни китобхонга тавсия қиламиз.

$(0, +\infty)$ да аниқланган $f(x)$ функция косинус ва синус алмаштиришлари воситасида баъзи бир хосмас интегралларни ҳисоблаш мумкин. Бу фикрни қуйидаги мисолларда кўрсатамиз:

1. Агар $x\geqslant 0$ учун $f(x)=a^{-x}$ $(a>1)$ бўлса, (IV.41) формулаларга асосан

$$\varphi_c(\eta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty a^{-\xi}\cos\eta\xi\,d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,I(\eta),$$

бунда

$$I(\eta)=\int_0^\infty a^{-\xi}\cos\eta\xi\,d\xi=\frac{a^{-\xi}\sin\eta\xi}{\eta}\Bigg|_0^\infty+\frac{\ln a}{\eta}\int_0^\infty a^{-\xi}\sin\eta\xi\,d_\xi$$

ёки

$$I(\eta)=-\frac{1}{\eta^2}\,a^{-\xi}\ln a\,\cos\eta\xi\Bigg|_0^\infty-\frac{(\ln a)}{\eta^2}\,I(\eta).$$

Шундай қилиб,

$$I(\eta)=\frac{\ln a}{\eta^2+\ln^2 a}.$$

Демак,

$$\varphi_c(\eta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty a^{-x}\cos\eta x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\ln a}{\eta^2+\ln^2 a}.$$

Энди (IV.32) формулага кўра

$$\frac{2\ln a}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\eta x}{\eta^2+\ln^2 a}\,d\eta=a^{-x}.$$

Шундай қилиб,

$$\int_0^\infty\frac{\cos\eta x}{\eta^2+\ln^2 a}\,d\eta=\frac{a^{-x}\pi}{\ln a^2}=\frac{\pi}{a^x\ln a^2}$$

тенгликни ҳосил қиламиз, унинг воситасида исталган $x\geqslant 0$ учун тенгликнинг чап томонидаги умумлашган (хосмас) интегрални ҳисоблаш мумкин. Дарҳақиқат, $x=0$ бўлганда

$$\int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^2+\ln^2 a} = \frac{\pi}{\ln a^2}.$$

Агар $x = 1$ бўлса,

$$\int_0^\infty \frac{\cos\eta\, d\eta}{\eta^2+\ln^2 a} = \frac{\pi}{2a\ln a} \text{ ва ҳ. к.}$$

2. Равшанки, $a = e$ бўлса,

$$\int_0^\infty \frac{\cos\eta x}{1+\eta^2} d\eta = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

тенглик ҳосил бўлади.

Агар $f(x) = a^{-x}$ $(a > 1,\ x \geqslant 0)$ функция учун (IV.41) ва (IV.49) формулалардан фойдалансак,

$$\varphi_s(\eta)) \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\eta}{\eta^2+\ln^2 a}$$

ва

$$\int_0^\infty \frac{\eta \sin\eta\, x}{\eta^2+\ln^2 a}\, d\eta = \frac{\pi}{2}\, a^{-x} = \frac{\pi}{2a^x} \quad (x > 0)$$

муносабатларга эга бўламиз. Буни текшириб кўришни китобхонга ҳавола қиламиз.

Агар $x = 1$ бўлса, ушбу

$$\int_0^\infty \frac{\eta \sin\eta\, d\eta}{\eta^2+\ln^2 a} = \frac{\pi}{2a}$$

натижа келиб чиқади ва ҳ. к.

4°. **Фурье алмаштиришининг татбиқига оид баъзи масалалар.** Фурье алмаштиришини қўлланиб оддий дифференциал тенгламаларни ечиш мумкин. *Буни қуйидаги мисолларда кўрсатамиз.*

1-мисол. $y'' - \omega^2 y = f(x)$ (ω — ўзгармас) (IV.50)
тенгламанинг $x \to \infty$ да $y(x) \to 0$ ва $y'(x) \to 0$ шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечилиши. $\varphi(\eta)$, $z(\eta)$ лар мос равишда $f(x)$ ва $y(x)$ ларнинг Фурье алмаштиришлари бўлсин. (IV.50) тенгламанинг ҳар икки томонини $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\eta x}$ га кўпайтириб, уни $(-\infty, +\infty)$ интервалда расмий равишда x бўйича интегралласак, қуйидаги

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y''(x)\, e^{-i\eta x} dx - \frac{\omega^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\, e^{-i\eta x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\eta x} dx$$

(IV.51]

тенглик ҳосил бўлади. Бу ерда тегишли хосмас интеграллар мавжуд (яқинлашувчи) деб фараз қиламиз. (IV.37) формулага асосан

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\eta x}\,dx = \varphi(\eta), \tag{*}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\,e^{-i\eta x}\,dx = z(\eta) \tag{**}$$

ва (IV.38) га кўра

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z(\eta)\,e^{i\eta x}d\eta.$$

Бундан

$$y''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 z(\eta)e^{i\eta x}d\eta.$$

Демак,

$$-\eta^2 z(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y''(x)\,e^{-i\eta x}dx. \tag{***}$$

Агар (*), (**) ва (***) ни (IV.51) га қўйсак, ушбу

$$-\eta^2 z(\eta) - \omega^2 z(\eta) = \varphi(\eta) \tag{IV.52}$$

алгебраик тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламадан:

$$z(\eta) = -\frac{\varphi(\eta)}{\eta^2+\omega^2}.$$

Бундан (IV.50) тенглама учун

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x}\frac{\varphi(\eta)}{\eta^2+\omega^2}\,d\eta \tag{IV.52'}$$

ечимга эга бўламиз.

2-мисол. Исталган $x > 0$ учун

$$y''(x) - 4\,y(x) = e^{-|x|}$$

тенгламанинг $x \to \infty$ да $y(x) \to 0$, $y'(x) \to 0$ шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечилиши. Олдин $\varphi(\eta)$ ни аниқлаймиз. (*) га асосан

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\eta x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|+i\eta x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}[\cos\eta x + i\sin\eta x]\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\cos\eta x dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-x}(\eta\sin\eta x - \cos\eta x)}{1+\eta^2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\eta^2}.$$

у ҳолда

$$\varphi(\eta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\eta^2}.$$

(IV.52) га асосан

$$y(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)e^{i\eta x}dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\eta x}}{(1+\eta^2)(4+\eta^2)}d\eta=$$

$$=-\frac{1}{3\pi}\left[\frac{e^{i\eta x}}{1+\eta^2}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\eta x}}{4+\eta^2}\,dx\right]=-\frac{2}{3\pi}\left[\int_0^{\infty}\frac{\cos\eta x}{1+\eta^2}dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\infty}\frac{\cos\eta x}{4+\eta^2}dx\right].$$

Математик анализ курсидан маълумки,

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha\eta}{k^2+\eta^2}d\eta=\frac{\pi}{2k}e^{-k\alpha^{*}}.$$

Бу формулага асосан

$$y(x)=-\frac{2}{3\pi}\left[\frac{\pi}{2}e^{-x}-\frac{\pi}{4}e^{-2x}\right]$$

ёки

$$y(x)=\frac{1}{6\pi}\left(e^{-2x}-2e^{-x}\right).$$

3-мисол. Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\qquad\text{(IV.53)}$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг $u(x,0)=f(x)$ шартни қаноатлантирувчи ечими аниқлансин.[**]

Ечилиши. $f(x)$ ва $u(\eta,t)$ функциялар мос равишда $\varphi(\eta)$ ва $v(\eta,t)$ лардан иборат тасвирларга эга бўлсин. (IV.53) тенгламанинг иккала томонини $\frac{e^{-i\eta x}}{\sqrt{2\pi}}$ га кўпайтириб, $(-\infty,+\infty)$ интервалда x бўйича интеграллаймиз:

а) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-i\eta x}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\eta x}dx\right]=\frac{\partial v(\eta,t)}{\partial t};$$

б) (IV.39) га асосан

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}v(\eta,t)\,e^{i\eta x}\,d\eta$$

---

[*] Г. М. Фихтенгольц «Математик анализ асослари», II том, 165-бет. «Ўқитувчи», Т.

[**] Бу тенглама иссиқлик тарқалиш тенгламаси дейилади.

бўлади. Бундан ва алмаштириш хоссалари (IV.30) га асосан

$$u''_{x^2}(x,\ t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta^2 v(\eta,\ t)e^{i\eta x}\,d\eta,$$

у ҳолда

$$-\eta^2 v(\eta,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u'_{xx}(x,\ t)\ e^{-i\eta x}\,dx.$$

а) ва б) дан η параметрли ушбу

$$\frac{dv(\eta,\ t)}{dt} = -\eta^2 v(\eta,\ t)$$

оддий дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$v(\eta,\ t) = c(\eta)e^{-\eta^2 t} \qquad (IV.54)$$

дан иборат. Энди $c(\eta)$ ни аниқлаймиз. Равшанки,

$$v(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,\ t)\ e^{-i\eta x}\,dx.$$

Бундан ва (IV.43) дан

$$c(\eta) = \frac{e^{\eta^2 t}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,\ t)\ e^{-i\eta x}\,dx.$$

Бу тенгликда $t = 0$ десак,

$$c(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,\ 0)\ e^{-i\eta x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\eta x}\ f(x)\,dx.$$

Демак, $t = 0$ да

$$c(\eta) = \varphi(\eta).$$

Бундан ва қилинган фараздан:

$$u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)\ e^{-\eta^2 t}e^{i\eta x}\ d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta x-\eta^2 t}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\ e^{-i\eta\xi}\,d\xi\right]d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2 t+i(x-\xi)}\,d\eta\right]d\xi.$$

Бу ерда хосмас каррали интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирдик. Масала шартига асосан бундай қилиш мумкин. Шундай қилиб,

$$u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-[\sqrt{t}\,\eta-i\frac{(x-\xi)^2}{2\sqrt{t}}]^2}d\eta\right]d\xi.$$

Агар ички интегралда $\sqrt{t}\,\eta-\frac{i(x-\xi)^2}{2\sqrt{t}}=z$ алмаштириш бажарсак:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\left[\frac{1}{2\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\right]d\xi$$

ёки $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=1$ бўлгани учун

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi. \qquad \text{(IV.55)}$$

Шу ернинг ўзида яна бир содда мисолни ечайлик.

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u(x,0)=x^2$ шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Мисол шартига кўра ва (IV.55) га асосан

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{\sqrt{2t}}\right)^2}d\xi$$

Агар бу интегралда $\frac{x-\xi}{\sqrt{2t}}=z$ десак, $\xi=\sqrt{2t}\,z+x$, $d\xi=\sqrt{2t}dz$ бўлиб,

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2t}\,z+x)^2\ e^{-\frac{z^2}{2}}dz=x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz+$$

$$+2x\sqrt{2t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+2t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=1$$

бўлади. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=1,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=0$ бўлгани учун

$$u(x,\ t)=x^2+2t.$$

4-мисол. Энди ушбу

$$u(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\,u(y)\,dy \qquad \text{(IV.56)}$$

интеграл тенгламани ечайлик. Бунда ҳам олдинги мисолдагидек, $v(\eta)$, $\varphi(\eta)$ ва $\psi(\eta)$ мос равишда $u(x)$, $f(x)$ ва $g(x)$ нинг тасвирлари бўлсин. Агар берилган тенгламанинг иккала томонини $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\eta x}$ га кўпайтириб, ҳақиқий ўқ бўйича x га нисбатан интеграллясак,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,e^{-i\eta x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\eta x}dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\,u(y)\,dy\right]e^{-i\eta x}\,dx$$

ҳосил бўлади. Бундан

$$v(\eta)=\varphi(\eta)+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(y)e^{-i\eta x}\;g(x-y)\;dy\right]dx.$$

$x-y=t$ деб олсак,

$$v(\eta)=\varphi(\eta)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(y)\;e^{-i\eta y}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\eta}\,g(t)\,dt\right]dy=$$

$$=\varphi(\eta)+\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(y)e^{-i\eta y}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\eta}\;g(t)\,dt\right]dy=\right.$$

$$=\varphi(\eta)\;+\sqrt{2\pi}\,\psi(\eta)\cdot v(\eta)$$

ёки ушбу

$$v(\eta)=\varphi(\eta)+\sqrt{2\pi}\,\psi(\eta)\cdot v(\eta)$$

алгебраик тенглама ҳосил бўлади. Бундан

$$v(\eta)=\frac{\varphi(\eta)}{1-\sqrt{2\pi}\psi(\eta)}.$$

Демак, (IV.56) тенгламанинг ечими ушбу

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\eta)}{1-\sqrt{2\pi}\,\psi(\eta)}\;d\eta$$

кўринишга эга бўлади.

IV БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Қуйидаги функциялар Фурье интеграли воситасида ифодалансин:

1. $f(x)=\begin{cases}|x|<1 \text{ да } \operatorname{sign} x,\\ |x|>1 \text{ да } \quad 0.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}|x|<1 \text{ да } 1,\\ |x|>1 \text{ да } 0.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}|x|\leqslant b \text{ да } \quad a\left(1-\dfrac{|x|}{b}\right),\\ |x|>b \text{ да } 0.\end{cases}$

4. $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}\,(a>0).$

5. $f(x)=\dfrac{x}{a^2+x^2}\quad(a>0).$

6. $f(x)=\begin{cases}|x|\leqslant\dfrac{\pi}{2} \text{ да } \cos x,\\ |x|>\dfrac{\pi}{2} \text{ да } 0.\end{cases}$

7. $f(x)=xe^{-x^2}.$

8. Ушбу $f(x) = e^{-x} (x > 0)$ функцияни жуфтлик (тоқлик) қонунига асосан давом эттириб, Фурье интеграли воситасида ифодалансин.

Қуйидаги функцияларнинг Фурье алмашмаси (тасвири) топилсин:

1. $f(x) = e^{-a|x|} (a > 0)$.
2. $f(x) = x e^{-a|x|} \ (a > 0)$.
3. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
4. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \omega x$.
5. Ушбу

$$\text{а)} \int_0^\infty f(t) \cos xt \, dx = \frac{1}{1+t^2}, \quad \text{б)} \int_0^\infty g(t) \sin tx \, dx = e^{-t} \ (t > 0)$$

интеграл муносабатлардан $f(t)$ ва $g(t)$ функциялар аниқлансин.

2- *қисм*

Вариацион ҳисоб

V боб

ВАРИАЦИОН ҲИСОБГА ОИД БОШЛАНҒИЧ МАСАЛАЛАР

24-§. Тарихий маълумотлар

Биз бу параграфда вариацион ҳисоб курсида ўрганиладиган асосий масалалар билан танишиб, уларнинг келиб чиқишига оид сабабларга қисқача тўхталиб ўтамиз.

Вариацион ҳисоб китобхонларимизга асосан математик анализ курсидан таниш бўлиб, битта ва бир нечта ўзгарувчиларга боғлиқ функцияларнинг экстремум қийматларини ўрганиш билан шуғулланади десак бўлади. Аммо вариацион ҳисобда экстремум қийматлари ўрганиладиган функциялар оддий аргументларга эмас, балки мураккаб аргументларга боғлиқ деб қаралади. Тўғрироғи, бу ерда функционалларнинг экстремум қийматларига оид масалалар ўрганилади. Бу хилдаги масалалар 1696 йилда Иоганн Бернулли[1] томонидан таърифланган брахистохрона («энг қисқа вақт») масаласи деб аталган масала билан бошланган.

Бу масалани ҳал қилишда И. Ньютон, Я. ва Д. Бернуллилар, Г. Лопиталь, Ж. Лагранж, А. Лежандр ва Л. Эйлер салмоқли ҳисса қўшганлар[2]. Шуни ҳам айтиш керакки, бу масалани ечиш процессида янги-янги масалалар ва уларни ечиш методлари яратилиб, бу эса математика фанининг катта татбиқий аҳамиятга эга бўл-

---

[1] Ака-ука Бернуллилар — Якоб (1654— 1705) ва Иоганн (1667 — 1748) — *голландиялик буюк олимлар.* Асосан математика, механика ва физика фанлари билан шуғулланганлар, бу соҳаларда кўпгина теорема ва қонунлар буларнинг номлари билан боғлиқдир. Иоганн Б. Петербург Фанлар Академиясининг фахрий аъзоси бўлган. Иоганн Б. нинг ўғли Даниил Б. (1700 — 1782) ҳам медицина ва физиология билан бир вақтда математика ва механика билан шуғулланиб, оддий дифференциал тенгламаларни ечишда, e сонни, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ нинг $n \to \infty$ даги лимитини топишда ва ҳ. к. хизмати жуда каттадир. 1725 — 1733 йилларда Даниил Б. Петербург фанлар Академиясида актив хизмат қилган.

[2] Г. Лопиталь (1661 — 1704) — француз математиги.
Г. Лейбниц (1646 — 1716) — немис олими, буюк математик.
Ж. Лагранж (1736 — 1813) — француз математиги.
А. Лежандр (1752 — 1833) — француз математиги.
И. Ньютон (1643 — 1727) — инглиз математиги, механиги, физиги.

ган янги ва муҳим соҳаси — **вариацион ҳисоб** бўлимининг пайдо бўлишига сабаб бўлди.

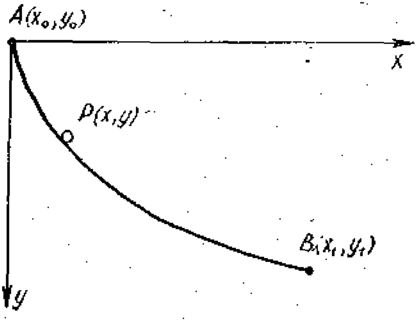
Бу фаннинг ривожланишида Л. Эйлернинг 1744 йилда чоп этилган «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» номли машҳур трактати алоҳида ўрин тутади.

Бу ерда шуни ҳам эслатиш зарурки, Л. Эйлер ўз ишларида экстремум масалалари ечилишининг зарурий шартларини аниқлаб берди.

Кифоя шартлар билан биринчи марта Вейерштрасс, кейинчалик А. Лежандр шуғулланди. Вариацион ҳисобнинг тобора ривожланишига ўзларининг йирик ҳиссаларини қўшиб, унинг муҳим ва замонавий масалаларини ечишда, айниқса кўп аргументли функционалларнинг экстремумларини текширишда рус олимлари (жумладан, М. В. Остроградский) ўз методларини яратдилар. Функционал анализ масалаларига вариацион ҳисобни татбиқ этишда совет олимлари М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, И. Г. Петровский, Н. М. Крылов[1] ва бошқаларнинг роли катта бўлди, улар айни вақтда ҳам вариацион ҳисобнинг кўп соҳаларида, айниқса механика масалаларини, шунингдек, баъзи чегаравий масалаларни ечишда татбиқ қилиб, янги-янги методлар яратмоқдалар.

1. Брахистохрона масаласи. Берилган $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталарни туташтирувчи чизиқ бўйлаб моддий нуқта ўз оғирлиги таъсирида тушади. Чизиқ қандай формада бўлганда тушиш вақти энг қисқа бўлади?

Нуқталарни 36- чизмадагидек жойлаштирайлик. Бунда $A(x_0, y_0)$ нуқта координаталар бошида, ординаталар ўқи пастга, абсциссалар ўқи горизонтал йўналган. Китобхон энг қисқа вақт деган сўз билан энг қисқа йўл тушунчасини чалкаштирмаслиги керак. Бизнинг масаламизда изланаётган чизиқ тўғри чизиқ кесмаси бўла олмайди, чунки бу ҳолда тушаётган моддий нуқтанинг тезлиги суст ортади, ундан тикроқ бўлган эгри чизиқнинг қисмида эса ҳаракат тезлиги тез ортиб, йўлнинг кўпроқ қисмини каттароқ тезлик билан



36- чизма.

---

[1] Вейерштрасс (1815 — 1897) — буюк немис математиги.

[2] М. В. Остроградский (1801 — 1861) буюк рус математиги, академик. Нью-Йорк, Турин, Рим Фанлар Академияларининг аъзоси, Париж Фанлар Академиясининг корреспондент аъзоси.

М. В. Лаврентьев (1900) — совет математиги, академик.

Л. А. Люстерник (1899) — совет математиги, академик.

И. Г. Петровский (1901) совет математиги, академик.

Н. М. Крылов (1879 — 1945) — совет математиги, академик.

ўтилади, ва демак, вақт камроқ сарф бўлади. Ҳаракатдаги нуқта t вақтда $P(x, y)$ ҳолатда ва $v(x, y, t)$ тезликка эга бўлсин. Бошланғич тезлик $v = 0$ десак, оғирлик кучининг бажарган иши mgy бўлиб, қуйидаги ҳаракат тенгламасини ёзсак бўлади:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

бунда $\frac{mv^2}{2}$ ҳаракатлантирувчи кучнинг $t = 0$ дан ихтиёрий t вақтгача бўлган орттирмаси. Сўнгги тенгликдан

$$v = \sqrt{2gy} \text{ ва } dt = \frac{ds}{v}$$

бўлгани учун моддий нуқта ҳаракатидаги элементар вақт

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2gy}},$$

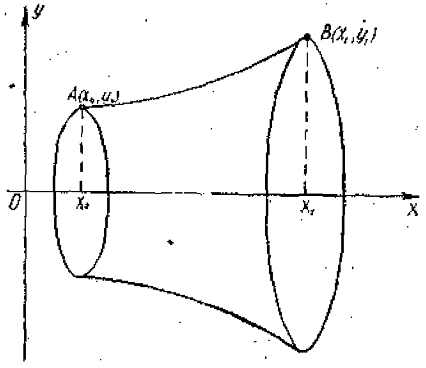
AB ёйни ўтишга кетган вақт эса

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2gy}}$$

бўлади. Бу ерда ўзгармас кўпайтувчиларни эътиборга олмасак, *брахистохрона масаласини ечиш учун ушбу*

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx \qquad (V.1)$$

интегралга минимум қиймат берувчи $y(x)$ функцияни излашимиз керак экан.



37- чизма.

2. Энг кичик айланиш сирти масаласи. $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталардан ўтувчи эгри чизиқлар ичидан абссалар ўқи атрофида айланиши натижасида энг кичик айланиш сирти ҳосил қилувчиси топилсин (37-чизма). $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталардан ўтувчи изланаётган эгри чизиқ тенгламасини $y = f(x)$ деб фараз қилайлик, у ҳолда айланиш сиртининг юзи

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2}\, dx \quad .$$

бўлади. Бу формулада ҳам ўзгармас кўпайтувчини эътиборга олмасак, ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (V.2)$$

кўринишдаги *интегралга минимал қиймат берувчи $y(x)$ функцияни топиш сўралади.*

Юқорида таърифланган иккала масалани ечишда келиб тўхталган (V.1) ва (V.2) интегралларга эътибор берсак, бу интеграл белгилари остида турган функциялар y дан ташқари унинг ҳосиласи y' нинг ҳам функциясидир. Бу китоб ҳажмида кўрилиши мумкин бўлган қолган масалаларни кейинги параграфларда, вариацион ҳисобнинг умумий қоида ва қонунларини келтирганимиздан сўнг таърифлаб ва ечиб ўтамиз.

Ҳозир юқорида кўрилган масалаларнинг мазмунига эътибор бермасдан, интегралларни ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')dx \qquad (V.3)$$

умумий кўринишда ёзиб, бу интегралга максимум ёки минимум қиймат берувчи номаълум функцияни $y = f(x)$ деб изласак бўлади. Бу ерда яна қуйидагини айтиб ўтиш ўринлидир: вариацион ҳисоб максимум ёки минимум масалаларини кўради деб бошда айтган бўлсак ҳам масалаларда кўпинча минимум масаласи ечилади. Шунинг учун келгуси таърифларда максимум ёки минимум деган икки сўзни ишлатмасдан, битта минимум сўзинигина ишлатамиз.

25-§. Функционал ҳақида тушунча.

Шу вақтгача биз кўриб келган функциялар одатда битта ёки бир нечта эркли ўзгарувчиларга *боғлиқ бўлар эди. Лекин* кўп масалаларда бундай функциялар тушунчаси етарли бўлмай қолади: масалан, ўтказгич бўйлаб электр оқими ўтганда ўтказгич атрофида ҳосил бўлган электромагнит майдонининг кучланиши ўтказгич эга бўлган эгри чизиқ шаклига боғлиқдир. Ҳозирги замонда учирилаётган ракеталар, Ер сунъий йўлдошлари ва планеталараро космик кемалар сиртларининг формалари ҳам катта аҳамиятга эга, айниқса Ер атмосферасидан чиқишда ва Ерга қайтиб тушиш вақтида, Ер атмосферасига кирганда мумкин қадар камроқ қизиш, атмосфера қаршилигини мумкин қадар камроқ сезиш учун албатта бу кемаларнинг формалари катта аҳамиятга эгадир.

Келтирилган мисолларда кўрилаётган катталиклар, чунончи кучланиш, қаршилик ва шунга ўхшаш физикавий ва механикавий катталиклар эркли аргументларнинг қийматларидан ташқари яна функцияларга (эгри чизиқ, сирт формаси ва ҳ. к.) ҳам боғлиқ бўлаяпти. Шу билан биз функционал тушунчасига келамиз.

Таъриф. *Бирор $y(x)$ функциялар синфидан олинган ҳар бир $y(x)$ функцияга боғлиқ равишда ўзгарувчи I сон, яъни $I = I(y(x))$ сон функционал дейилади.*

Демак, *оддий функцияларда биз чизиқдаги, текисликдаги, фазодаги нуқтага боғланишни кўрсак, функционалда чизиққа, сирт формасига ва ҳоказоларга боғланишни кўрамиз.* Функционалда битта ёки бир нечта функцияларга функционалнинг қиймати мос келтиради. Функционалга ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')dx \qquad (V.3)$$

интеграл мисол бўла олади, чунки бу интегралнинг қиймати $y=f(x)$ функцияга боғлиқ. Функционалларнинг умумий хусусиятлари математиканинг «функционал анализ» деб аталган бўлимида ўрганилади. Вариацион ҳисоб эса функционалларнинг максимум ва минимум қийматларини излаш масалалари билан шуғулланади. Бу китоб ҳажмида бундай масалаларнинг соддалари билангина чекланамиз.

Асосий масаланинг қўйилиши.

Таъриф. *Агар $y=f(x)$ функция $(x_0,\ x_1)$ оралиқда ўзи узлуксиз ва узлуксиз ҳосилага эга (яъни функция графигига ўтказилган уринма Oy ўққа ҳеч қаерда параллел эмас) бўлса, бундай функция $C^{(1)}$ синфга тегишли дейилади. Умуман, $y=f(x)$ функция ўзи узлуксиз ва n-тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, бундай функция $C^{(n)}$ синфга тегишли дейилади.*

Экстремуми изланиши керак бўлган ушбу

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')dx \qquad (V.3)$$

интеграл берилган бўлсин, бунда $F(x,\ y,\ y')$ — маълум функция. Масалан, брахистохрона масаласида $F(x,\ y,\ y')=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$, энг кичик айланиш сиртини излаш масаласида эса $F(x,\ y,\ y')=y\sqrt{1+y'^2}$. x_0, x_1 берилган ўзгармас сонлар.

Асосий масаланинг таърифи. Интеграл белгиси остидаги $F(x,\ y,\ y')$ функция $y=f(x)$ функцияга боғлиқ ва y билан биргаликда интегралнинг ўзи ҳам шу $y=f(x)$ функцияга боғлиқдир. Интеграл маънога эга бўлиши учун $f(x)$ ва $F(x,\ y,\ y')$ функцияларни маълум шартлар билан чегаралайлик, чунончи: 1) текисликнинг бирор R соҳасидан олинган ҳар қандай x ва y учун $F(x,\ y,\ y')$ бир қийматли, узлуксиз ва иккинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга; 2) $y=f(x)$ функцияга қўйилган шартлар: а) $(x_0,\ x_1)$ оралиқда $C^{(1)}$ синфга тегишли; б) $y=f(x)$ функцияни тасвирловчи чизиқ (келгусида қисқалик учун $y=f(x)$ чизиқ деб ҳам гапирамиз) R соҳада тўлиқ ётади (R соҳани танлаш масаланинг қўйилишига боғлиқ); в) $y=f(x)$ функция $A(x_0,\ y_0)$ ва $B(x_1,\ y_1)$ нуқталардан ўтади, яъни $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1$.

а), б) ва в) шартларга бўйсунувчи функциялар (эгри чизиқлар) *мумкин бўлган функциялар (эгри чизиқлар) дейилади.*

Шу билан асосий масала мумкин бўлган эгри чизиқлар ичидан (V.3) интегралга минимум қиймат берувчи чизиқни топишни талаб қилади.

Иккита мумкин бўлган $\tilde{y}$ ва $y = f(x)$ эгри чизиқ

$$f(x) - \varepsilon < \tilde{y} < f(x) + \varepsilon$$

шартларга бўйсунса, уларни R_ε соҳада *қўшни чизиқлар* деб атаймиз, бунда ε — берилган кичик мусбат сон. (V.3) интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқ *экстремал* дейилади. Бу чизиқ берилган интегралга қўшни чизиқларга нисбатан энг кичик ёки энг катта қиймат беради. Шунинг учун кўрилаётган экстремум *нисбий экстремум* ҳам дейилади. Таърифга кўра экстремал билан қўшни эгри чизиқлар бир-бирига яқин ётиши керак. Бу яқинлик

$$\tilde{y} - y = \delta y$$

айирма билан аниқланади, бу ерда δy белги (Лагранж белгиси) *функциянинг вариацияси* дейилади. Шубҳасиз, $x = x_0$ ва $x = x_1$ нуқталарда $\delta y = 0$ дир. Демак, барча «мумкин бўлган» эгри чизиқлар экстремалга вариацияни қўшишдан иборат, яъни

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y. \qquad \text{(V.4)}$$

$y(x)$ функция вариациясининг ўзи ҳам функция бўлгани сабабли унинг ҳосиласи ҳақида гапириш мумкин, чунончи қуйидаги хосса ўринли:

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \delta y'$$

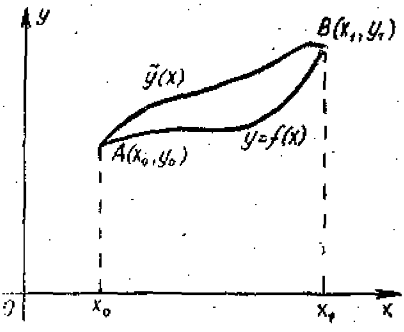
Ҳақиқатан,

$$\frac{d}{dx}\delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\delta y'(x+\Delta x)-\delta y'(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\tilde{y}(x+\Delta x)-y(x+\Delta x)\right]-\left[\tilde{y}(x)-y(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\tilde{y}(x+\Delta x)-\tilde{y}(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} =$$

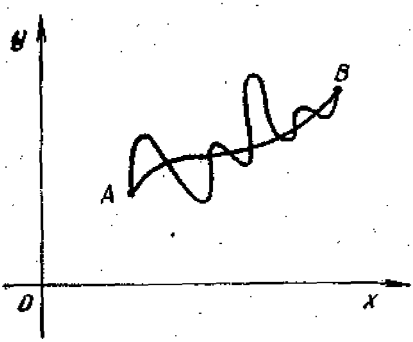
$$= \frac{d}{dx}\tilde{y}(x) - \frac{d}{dx}y(x) = \delta\frac{dy}{dx},$$

яъни вариациянинг ҳосиласи бир чизиқдан иккинчи чизиққа ўтишда битта абсциссага тегишли нуқталардаги оғмаликнинг (уринма) ўзгариши деган сўздир. Эгри чизиқларнинг яқинлиги ҳақида сўз юритар эканмиз, қуйидаги икки ҳолни ажратишимиз керак:



38- чизма.

1) агар $|\delta y|$ ва $|\delta y'|$ нинг иккаласи ҳам кичик бўлса, яъни эгри чизиқлар ҳам вазияти, ҳам уринмалар йўналиши нуқтаи назаридан бир-бирига яқин бўлса



39-чизма.

(38-чизма), у ҳолда экстр кучсиз экстремум дейилади 1-тартибли яқинлашиш;

2) агар $|\delta y|$ кичик, $|\delta y'|$ ҳар қандай қиймат қабул олса, у ҳолда экстремум экстремум дейилади (39-чи Бу эса 0 тартибли яқинлашиш

Агар берилган функци бирор эгри чизиқда кучли экс мумга эришса, у ҳолда у куч экстремумга ҳам албатта эри ди; лекин функционал кучсиз стремумга эришишидан, умуман айтганда, унинг кучли экстремумга ҳам эришиши келиб чиқмайди. Шунинг учун кучли экстремумга эришиш шартларини иккала экстремум учун ҳам қабул қилиш мумкин. Бундан сўнг шуни кўзда тутиш керак. Келгусида катта аҳамиятга эга бўлган қуйидаги леммаларни кўриб ўтамиз.

26-§. Асосий леммалар

1-лемма (Лагранж леммаси). *(x_0, x_1) оралиқда узлуксиз бўлган $F(x)$ функция ва шу оралиқда $C^{(1)}$ синфга тегишли ва $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ шартларга бўйсунувчи ҳар қандай $\eta(x)$ функция учун ушбу*

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\eta(x)dx$$

интеграл нолга тенг бўлса, у ҳолда (x_0, x_1) оралиқдан олинган ҳар қандай x учун $F(x) = 0$ бўлади.

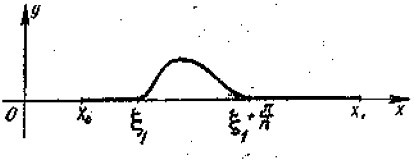
Исботлаш учун тескарисини фараз қилайлик. (x_0, x_1) оралиқдан олинган бирор ξ нуқтада $F(\xi) \neq 0$ бўлиб, масалан, $F(\xi) > 0$ бўлсин, у ҳолда $F(x)$ нинг узлуксизлиги сабабли ξ нинг кичик атрофида ҳам функция мусбат бўлади. ξ нинг кичик атрофини қуйидагича олайлик:

$$x_0 < \xi_1 < \xi < \xi_1 + \frac{\pi}{n} < x_1.$$

Шундай қилиб, фаразимизга кўра $\left(\xi_1, \xi_1 + \frac{\pi}{n}\right)$ оралиқда $F(x)$ мусбат бўлиб, бирор мусбат m сондан катта бўлади. Энди $\eta(x)$ ни (x_0, x_1) оралиқда қуйидагича олайлик:

$$\eta(x) = \begin{cases} \left(\xi_1, \xi_1 + \frac{\pi}{n}\right) \text{ да} & \sin^2 n(x - \xi_1), \\ \text{қолган нуқталарда } 0. \end{cases}$$

…дий аниқланган функция …ля шартларини қаноатланти…, яъни ўзи узлуксиз ва уз…из ҳосилага эга, ундан ташқари $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ (40- чизма). Шунинг учун лемма шартига кўра



40- чизма.

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\eta(x)\,dx = 0$$

бўлиши керак. Лекин

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\eta(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_1+\frac{\pi}{n}} F(x)\sin^2 n(x-\xi_1)\,dx > m\int_{\xi_1}^{\xi_1+\frac{\pi}{n}} \sin^2 n(x-\xi_1)\,dx =$$

$$= \frac{\pi m}{2n} > 0.$$

$F(x) \neq 0$ деб зидликка келдик. Демак $F(x) \equiv 0$ экан.

Икки аргументли функция учун ҳам худди шундай лемма ўринлидир.

2- лемма (Лагранж леммаси). *D соҳада узлуксиз бўлган $F(x, y)$ функция ва шу соҳада ўзи узлуксиз, узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва соҳа контури L да нолга тенг бўлган ихтиёрий $\eta(x, y)$ функция учун ушбу*

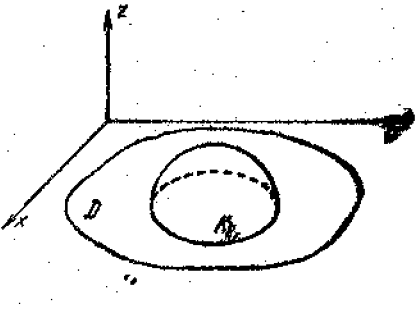
$$\iint_{(D)} F(x, y)\,\eta(x, y)\,dx\,dy$$

интеграл нолга тенг бўлса, у ҳолда D соҳада $F(x, y) \equiv 0$ бўлади.

Ҳақиқатан, соҳанинг бирорта (x_1, y_1) нуқтасида леммага тескари ҳолат ўринли, яъни лемма шарти бажарилган ҳолда $F(x_1, y_1) \neq 0$ деб фараз қиламиз. (x_1, y_1) нуқтанинг кичик атрофи ε_1 радиусли K_{ε_1} доира бўлсин. Бу доира айланасида ва ундан ташқарида $\eta(x, y)$ функция ва унинг хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлиб, доира ичида

$$\eta(x, y) = \left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-\varepsilon_1^2\right]^2$$

бўлсин (41- чизма). Олинган кичик доира ичида фаразимизга кўра $F(x, y)$ функция узлуксизлиги туфайли нолдан фарқлидир, чунончи $F(x, y) > 0$ десак бўлади, аниқроғи $F(x, y) > M$ бўлсин. У ҳолда ушбу



41- чизма.

$$\iint\limits_{(D)} F(x,\ y)\,\eta(x,\ y)\,dxdy = \iint\limits_{(K_{\varepsilon_1})} F(x,\ y)\,\eta(x,\ y)\,dxdy >$$

$$> M \iint\limits_{(K_{\varepsilon_1})} [(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-\varepsilon_{\xi_1}^{2}]\,dxdy,$$

интеграл остида мусбат функция бўлгани учун интеграллаш натижаси мусбат бўлиб,

$$\iint\limits_{(D)} F(x,\ y)\,\eta(x,\ y)\,dxdy > 0$$

бўлади. Бу эса лемма шартига зиддир. Демак, $F(x_1,\ y_1) \neq 0$ деган фараз нотўғри бўлиб, $F(x,\ y) \equiv 0$ бўлиши керак экан.

27-§. Биринчи вариация. Эйлер тенгламаси

$A(x_0,\ y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталардан ўтувчи мумкин бўлган эгри чизиқлар ичидан ушбу

$$I(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\ dx \qquad (V.3)$$

интегралга минимал қиймат берувчи $y = f(x)$ функцияни излаш масаласини ҳал қилишга ўтайлик. Аниқроқ айтганда, $y = f(x)$ функция қаноатлантириши лозим бўлган зарурий шартни аниқлайлик. (V.3) кўринишдаги

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\ dx$$

функционаллар интегралланмайдиган ифодалар бўлиши керак, акс ҳолда қўйилган шартларга ҳеч қандай чизиқ бўйсунмайди. Қўшни эгри чизиққа тегишли интегрални

$$I(\tilde{y}) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}')dx$$

кўринишда ёзиб, интеграллар айирмасини ΔI функционал орттирмаси десак,

$$\Delta I = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ \tilde{y}, \tilde{y}')\ dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} [F(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}') - F(x,\ y,\ y')]dx$$

бўлади.

Функционалнинг максимум ёки минимумга эришишини орттирмалар тилига кўчириб, қуйидагича таърифласак бўлади: *ΔI функционалнинг ΔI орттирмаси учун*

$$\Delta I = I(\tilde{y}) - I(y) \leqslant 0 \qquad (V.4')$$

тенгсизлик ҳар қандай қўшни $\tilde{y}(x)$ чизиққа нисбатан бажарилса, у ҳолда функционал $y = f(x)$ чизиқда максимумга эришади дейилади. Шу билан бирга $y = f(x)$ да $\Delta I = 0$ бўлади. Шунга ўхшаш *$y = f(x)$ чизиққа қўшни чизиқлар учун* $\Delta I \geqslant 0$ бўлса, *$y = f(x)$ да функционал минимум қийматга эришади дейилади.* Бу таърифга *кўра экстремал чизиқ атрофида функционал орттирмаси ΔI нинг ишораси бир хил сақланиши керак экан.*

(V. 4) даги интеграл белгиси остидаги айирмага ўрта қиймат теоремасини сўнгги иккита аргументга нисбатан қўлланамиз:

$$F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - F(x, y, y') = F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y' + \delta y') +$$
$$+ F(x, y, y' + \delta y') - F(x, y, y') = \frac{\partial F(x, y + \theta\delta y,) y' + \delta y'}{\partial y}(\tilde{y} - y) +$$
$$+ \frac{\partial F(x, y, y' + \theta_1 \delta y')}{\partial y'}(\tilde{y}' - y') = \frac{\partial F^*}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F^{**}}{\partial y'}\delta y',$$

бунда (*), (**) белгилар $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}$ нинг y ва $\tilde{y}$ y' ва $\tilde{y}'$ лар оралиғидаги мос аргументларга тегишли қийматларини қисқача ёзиш мақсадида қўйилди. $F(x, y, y')$ функционал барча аргументлари бўйича узлуксиз бўлгани учун ΔI *ни қуйидаги кўринишда* ёзсак бўлади:

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx + R, \qquad (V.5)$$

бунда R қўшилувчи δy ва $\delta y'$ га нисбатан чексиз кичик миқдордир; аниқроқ айтганда унинг δy ва $\delta y'$ га нисбатан кичиклик тартиби бирдан ортиқ.

(V. 5) орттирманинг бош қисми бўлган ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx \qquad (V.6)$$

интеграл (V. 3) *функционалнинг вариацияси* дейилади ва δI билан белгиланади. Математик анализдаги функциянинг биринчи тартибли дифференциалига ўхшаш тушунчага келдик. (V. 6) интеграл белгиси остидаги иккинчи қўшилувчини бўлаклаб интеграллаймиз: $\delta y' = (\delta y)'$ эканлигини кўзда тутсак,

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx$$

бўлади, бунда $\frac{\partial F}{\partial y'}$ $x = x_0$ ва $x = x_1$ нуқталарда, умуман (x_0, x_1)

оралиқда тайин чекли қийматларга эга, δy эса чегараларда нолга тенг бўлгани учун интегралдан ташқарида турган ифода нолга тенг бўлиб, функционалнинг вариацияси

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \delta y dx \qquad (V.7)$$

кўринишни олади. $\delta I \neq 0$ десак, δy ва $\delta y'$ кичик бўлганда (V.5) даги ΔI нинг ишораси бош қисмининг ишораси билан бир хил бўлади, яъни ΔI нинг ишораси билан δI биринчи вариациянинг ишораси бир хил бўлиши керак. Экстремал чизиқ атрофида ΔI ишорасини алмаштирмаганлиги сабабли δI ҳам $y = f(x)$ чизиқ атрофида ишорасини алмаштирмаслиги керак. Лекин (V.7) дан кўринадики, δy нинг ишораси ўзгарса, δI нинг ҳам ишораси ўзгаради, шу билан ΔI нинг ҳам ишораси ўзгариши керак. Бу қарама-қаршиликка келмаслик учун $\delta I = 0$ дейишимиз керак экан. Демак, $I(y)$ функционал экстремал қийматга эга бўлишининг зарурий шарти

$$\delta I = 0,$$

яъни биринчи вариациянинг нолга тенг бўлишидир, демак,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \delta y \, dx = 0 \qquad (V.8)$$

тенгликнинг бажарилиши ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \, dx \qquad (V.3)$$

интеграл экстремал қийматга эга бўлишининг зарурий шартидир. Бу шартни қулайроқ кўринишга келтириш мақсадида 1-леммани қўллайлик. (V.8) да δy ихтиёрий функция бўлиб, 1-лемма шартларига бўйсунади, шунинг учун леммага асосан

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (V.9)$$

бўлади.

(V.9) *тенглама Эйлер тенгламаси* дейилиб,* (V.3) *интеграл экстремумга эга бўлишининг зарурий шартидир.* Демак, $y = f(x)$ функция (V.3) интегралга экстремум қиймат бериши учун у (V.9) тенгламани қаноатлантириши лозим.

Математик анализ курсида функцияга экстремум қиймат берувчи аргументнинг қийматларини зарурий шартдан, чунончи биринчи тартибли ҳосилаларни нолга тенглаштириб топгандан сўнг, бу қийматларни кифоя шартларга асосан текшириб кўрилар эди. Вариацион ҳисобда ҳам кифоя шартлар текширилади, лекин биз уларни кейинроқ кўрамиз; иккинчидан баъзи-бир вариацион масалаларнинг қўйилиши, зарурий шарт бўлган Эйлер тенгламасини ечиб, ечимини топгандан сўнг, маъносига кўра кифоя шартни текширишга эҳтиёж қолмайди.

---

* Бу тенглама Эйлер — Лагранж тенгламаси ҳам дейилади.

Бошқа масалаларда эса қўшни чизиқларнинг тенгламаларини ёза билсак, топилган чизиқ ва қўшни чизиқлардан y ва y' нинг қийматларини интегралга қўйиб ва интеграл қийматларини ҳисоблаб, таққослаш натижасида масалага жавоб бериш мумкин. Масалан, битта кесмага тегишли эгри чизиқлар ичидан ушбу

$$\int (ax - y^2)\, y dx$$

($a > 0$ — ихтиёрий параметр) интегралга экстремал қиймат берувчи эгри чизиқни топиш талаб қилинсин (масалада A ва B нуқталар берилмаганлигига эътибор беринг). Интеграл белгиси остидаги функция: $F = axy - y^3$. Бу масала учун Эйлер тенгламаси

$$ax - 3y^2 = 0.$$

кўринишда ёзилади. Бундан

$$y^2 = \frac{1}{3} ax,$$

яъни $\int (ax - y^2)\, ydx$ интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқ учи координаталар бошида бўлган парабола экан. Энди бу парабола интегралга максимум ёки минимум қиймат беришини текшириш учун координаталар бошидан ўтувчи бошқа чизиқлар ва параболалар тенгламаларидан y ларни топиб ва интегралга қўйиб, интегралнинг қийматини ҳисоблаб кўрамиз. Масалан, $y = 0$ ни кўрсак, бу чизиқ учун интегралнинг қиймати нолга тенг, топилган парабола учун эса

$$\int \frac{2}{3} ax \sqrt{\frac{1}{3}\, ax}\, dx = \frac{4}{15\sqrt{3}}\, ax^2 \sqrt{ax},$$

яъни интеграл мусбатдир. Демак, парабола учун интегралнинг қиймати энг кичик бўлмас экан. Энди $y = kx$ деб кўрайлик. Бу ҳолда интеграл қуйидаги кўринишни олади:

$$\int (kax^2 - k^3x^3) dx = \frac{k}{3} ax^3 - \frac{1}{4} k^3x^4.$$

Бу ифода x нинг ҳар қандай чекли қиймати учун $\frac{4}{15\sqrt{3}}\, ax^2 \sqrt{ax}$ дан кичикдир. Демак, $y^2 = \frac{1}{3}\, ax$ парабола интегралга энг катта қиймат берар экан. Бу қиймат парабола атрофидаги ҳар қандай чизиқ учун интегралнинг қийматига нисбатан катта бўлгани учун максимум қиймат бўлади.

(V.9) тенгламани ёйиб ёзсак,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\, y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \text{(V.10)}$$

кўринишдаги 2-тартибли оддий дифференциал тенгламага келамиз. Тенглама ечимида иккита ихтиёрий ўзгармас иштирок этади:

$$y = f(x, C_1, C_2) \qquad \text{(V.11)}$$

Бундаги ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш учун иккита шарт берилган бўлса, у ҳолда масала аниқ жавобга эга бўлади. Хусусан, изланаётган чизиқнинг берилган $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталардан ўтиши C_1 ва C_2 ни аниқлаш учун кифоя шартлардир. Бу шартларга асосан тузилган ушбу

$$f(x_0, C_1, C_2) = y_0, \ f(x_1, C_1, C_2) = y_1$$

иккита тенгламадан C_1 ва C_2 ни топиб (V.11) га қўйсак, тайин чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқ (V.3) интегралга максимум ёки минимум бериши юқорида айтганимиздек, ё масаланинг маъносига асосан аниқланиши мумкин, ёки эса келгусида кўриладиган кифоялик шартига асосан аниқланиши мумкин.

Эйлер тенгламасининг интеграл чизиқлари экстремаллар дейилади. Демак, I интегралга минимум қиймат берувчи чизиқ Эйлер тенгламасининг ечими бўлиб, у экстремаль бўлар экан.

Умуман айтганда, нуқталарнинг ўрнига бошқа шартлар ҳам берилиши мумкин, лекин бу ерда шуни кўзда тутиш керакки, бу шартларнинг сони ва маъноси тенглама ечимидаги иоаниқ ўзгармаслар сонига мос келиши керак. Масалани ечиш вақтида бу интеграллаш ўзгармасларига нисбатан ҳосил бўлган тенгламалардан уларнинг ўзини топиб олиш қийин ёки умуман мумкин бўлмай қолиши ҳам мумкин, у ҳолда уларни параметрлар сифатида қолдириб, чизиқлар устида тегишли мулоҳазаларни ўтказа берамиз. Лекин тегишли шартлар берилмаса ёки уларнинг сони етарли бўлмаса, у ҳолда вариацион масала охиригача ечилмаган бўлади. Шартлар берилган, лекин Эйлер тенгламасининг ечимида ихтиёрий ўзгармаслар иштирок этмай қолиши ҳам мумкин (бу интеграл белгиси остидаги функцияга боғлиқ), бу ҳолда ҳам вариацион масала ечимга эга бўлмайди, тўғрироғи вариацион масала умуман маънога эга бўлмай қолиши мумкин.

28-§. Эйлер тенгламасининг баъзи-бир интегралланиш ҳоллари

1. $F = F(y')$, яъни интеграл белгиси остидаги функция фақат y' га боғлиқ. у ҳолда (V.10) тенглама

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \qquad (V.12)$$

кўринишга келади. Бундан $y'' = 0$ ва тенгламанинг ечими

$$y = C_1 x + C_2$$

бўлади, яъни интеграл чизиқлар—тўғри чизиқлардир.

2. $F = F(y, y')$, яъни интеграл белгиси остидаги функцияда x иштирок этмайди. Бу ҳолда (V. 10) тенглама

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (V.13)$$

кўринишни олади. Бу тенгламани ечишдан олдин қуйидаги ифодани кўрайлик:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'^2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} -$$

$$- y'y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = -y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' - \frac{\partial F}{\partial y}\right). \qquad (V.14)$$

Энди агар y Эйлер тенгламасининг ечими бўлса, у ҳолда у (V.13) ни қаноатлантириши лозим ва бунга кўра (V. 14) нинг ўнг томонидаги қавслар ичидаги ифода нолга тенг бўлиши керак:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

бундан

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \qquad (V.15)$$

бўлиб, бу ифода *Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли* дейилади. (V.15) биринчи тартибли дифференциал тенглама бўлгани учун уни интеграллаш натижасида яна битта ихтиёрий ўзгармас иштирок этган

$$y = f(x, C_1, C_2)$$

ечимга келамиз.

3. $F = F(x, y')$, яъни интеграл остидаги функцияда y иштирок этмайди. (V.9) тенглама

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (V.16)$$

кўринишни олади, бундан

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \qquad (V.17)$$

кўринишдаги биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламага келамиз. Бу тенгламани интеграллаб, ушбу

$$y = f(x, C_1, C_2)$$

умумий ечимни топамиз.

4. $F = F(x, y)$, яъни интеграл белгиси остидаги функцияда y' иштирок этмайди. Бу ҳолда (V. 9) тенглама

$$\frac{\partial F}{\partial_y} = 0 \qquad (V.18)$$

кўринишга келади. Бу тенглама эса дифференциал тенглама эмас. Тенгламани y га нисбатан ечиб, $y = \varphi(x)$ кўринишдаги битта ёки бир нечта экстремалларни топамиз. Бу ҳолда вариацион масала умумий қўйилишда ечилмайди. A ва B нуқталар ихтиёрий бўла олмайди. Улар алоҳида танланган бўлиши керак.

Энди юқорида айтилганларга асосан ушбу бобнинг бошида қўйилган иккита масалани ечишимиз мумкин.

1. Брахистохрона масаласини ечиш. Масала таърифини такрорлаб ўтирмасдан, уни ечишда келиб тўхталган интегралдан бошлайлик.

$$I = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

интегралнинг қуйи чегарасини нолга тенглаб олдик, чунки йўлнинг бир учини координаталар бошига жойлаштирган эдик. Интеграл белгиси остидаги функция

$$F(y,\ y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

кўринишда бўлиб, бу Эйлер тенгламаси интегралланиш ҳолларининг иккинчисига тўғри келади. Шунинг учун тенгламанинг биринчи интегралини бирданига қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}}.$$

Буни (V. 15) га асосан ёзган бўлсак ҳам, кейинги қадамларни бажаришда содда ифода ҳосил қилиш мақсадида ўнг томондаги ихтиёрий ўзгармасни махсус кўринишда олдик. Сўнгги ифодадан:

$$y'^2 = \frac{C_1 - y}{y}. \qquad (\alpha)$$

Бу тенгламани интеграллаш учун

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t) \qquad (\beta)$$

деб, t параметрни қабул қилайлик; x ни ҳам шу параметр орқали ифодаласак, у ҳолда ечимнинг

$$y = \varphi(t),\ x = \psi(t)$$

кўринишдаги параметрик ифодасини топган бўламиз. Шу мақсадда (β) дан $y' = \frac{C_1}{2}\sin t \cdot t'$ ни аниқлаб, буни ва (β) ни (α) га қўямиз:

$$\frac{C_1}{2}\sin t\,\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{C_1 - y}{y}} = \sqrt{\frac{C_1 - \frac{C_1}{2}(1-\cos t)}{\frac{C_1}{2}(1-\cos t)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} = \pm\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Бундан

$$\frac{C_1}{2}(1 - \cos t)\, dt = \pm\, dx$$

ёки интеграллаш натижасида $x = \pm\frac{C_1}{2}(t - \sin t) + C_2$ бўлади. Эгри чизиқ координаталар бошидан ўтгани учун $C_2 = 0$ деб оламиз, натижада

$$x = \pm\frac{C_1}{2}(t - \sin t), \qquad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t) \qquad (\gamma)$$

кўринишдаги тенгламага келамиз. Бунда C_1 эгри чизиқнинг $B(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтиш шартидан топилади. (γ) тенгламанинг кўринишидан аниқланадики, брахистохрона масаласининг ечими циклоида бўлар экан. Демак, $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ *нуқталарни туташтирувчи эгри чизиқлар ёйи бўйлаб моддий нуқта тушишда фақат циклоида ёйи бўйича тушгандагина энг кам вақт сарф бўлар экан.*

2. Энг кичик юзли айланиш сирти масаласини ечиш. Масалани таърифлашда ушбу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

интегралга минимал қиймат берувчи $y = f(x)$ функцияни топишга келиб тўхталган эдик. Бунда ҳам интеграл белгиси остидаги функция

$$F = y\sqrt{1 + y'^2}$$

кўринишда бўлиб, у тенглама интегралланишининг иккинчи ҳолига тўғри келади. Бу ҳолда

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1$$

Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

бундан соддалаштириб,

$$\frac{C_1 dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} = dx$$

кўринишдаги, ўзгарувчилари ажралган, биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламага келамиз. Тенгламани ечсак,

$$x - C_2 = C_1 \ln(y + \sqrt{y^2 - C_1^2}) - C_1 \ln C_1$$

бўлиб, кейинги соддалаштиришлар қулай бўлиши учун ўзгармаслар исталганча қўшилган. Сўнгги ифодадан

$$y + \sqrt{y^2 - C_1^2} = C_1 e^{\frac{x-C_2}{C_1}}$$

ёки

$$y = \frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x-C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}\right)$$

занжир чизиқ тенгламасига келдик. Демак, *симметрия ўқи y ўқига параллел бўлган занжир чизиқ ёйи Ox ўқ атрофида айланишидан энг кичик юзли сирт ҳосил қилар экан.* Бундаги C_1 ва C_2 ўзгармаслар чизиқнинг $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталардан ўтиш шартидан аниқланади.

Бошқа мисоллар.

3. Иккита қўзғалмас нуқтани туташтирувчи чизиқлар ичида энг қисқа ёйга эга бўлган чизиқ тўғри чизиқ бўлишини юқорида қурилган назарияга асосан яна бир марта тасдиқлаб ўтайлик. Ҳақиқатан, ихтиёрий ёй узунлиги:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Бу функционал Эйлер тенгламаси интеграллашнинг 1-ҳолига тўғри келиб, экстремаллар $y = C_1 x + C_2$ тўғри чизиқлар бўлади. Бу тўғри чизиқлар ичидан берилган иккита нуқтадан ўтадиганини топиш қийин эмас.

4. Ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2)\, dx$$

функционалнинг экстремаллари топилсин. Бу интеграл Эйлер тенгламасининг y иштирок этмаган ҳолига тўғри келиб, тенгламанинг биринчи интеграли

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = x + 2y' = 2C_1$$

бўлди. Бу биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2,$$

демак, изланаётган экстремаллар параболалар экан.

5. Ушбу $I = \int_0^1 (xy + y^3 - 2y^2 y')\, dx$

интегралнинг $y(0) = 1$, $y(1) = 2$ шартларга бўйсунувчи экстремали топилсин.

Берилган функционал учун Эйлер тенгламаси

$$x + 2y = 0$$

кўринишда бўлиб, $y = -\frac{x}{2}$ чизиқ қўйилган масалага жавоб бўла олмайди; демак, берилган функционалнинг айтилган шартларга бўйсунувчи экстремали йўқ экан.

29- §. Функционал бир неча функцияларга боғлиқ ҳол

Ушбу кўринишдаги функционални кўрамиз:

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x;\ y,\ z,\ \ldots;\ y',\ z',\ \ldots)\,dx,$$

бунда y, z, ... лар x нинг функциялари. Бундай функционалларнинг $y(x)$ ва $z(x)$ номаълум функциялар иштирок этган ҳоли билан чегараланайлик. $F = F(x;\ y,\ z;\ y',\ z')$ деб оламиз. Вариацион масала бу ҳолда қуйидагича таърифланади.

$A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ва $B(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқталардан ўтиб, ушбу

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x;\ y,\ z;\ y',\ z')\,dx \tag{V.19}$$

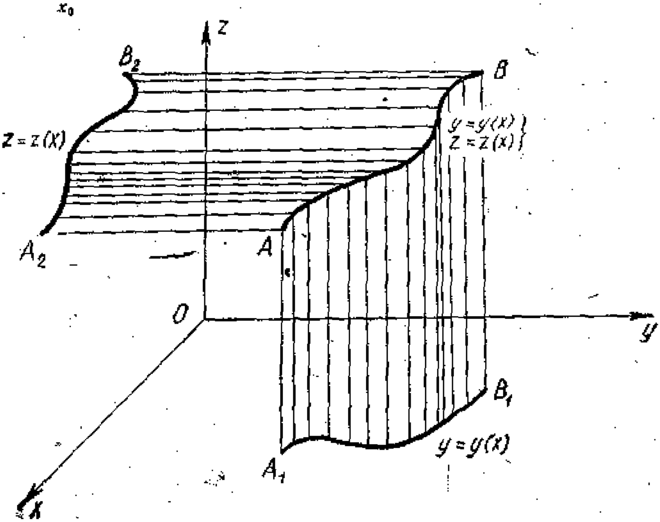
интегралга экстремум қиймат берувчи $y = y(x)$, $z = z(x)$ эгри чизиқ топилсин.

Бунда F функция барча аргументлари бўйича 2-тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга, $y(x)$ ва $z(x)$ функциялар эса $C^{(2)}$ синфга тегишли деб фараз қиламиз. Асосий масаладагига ўхшаш, бунда ҳам қўшни чизиқни

$$\tilde{y} = y + \delta y,\ \tilde{z} = z + \delta z.$$

деб ёзиб, (V.19) интегрални қўшни чизиқларга нисбатан ушбу

$$\tilde{I}=\int_{x_0}^{x_1} F(x;\ y+\delta y,\ \ z+\delta z;\ y'+\delta y',\ z'+\delta z')\,dx$$



42- чизма.

кўринишда ёзамиз. $x = x_0$, $x = x_1$ бўлганда $\delta y = 0$ ва $\delta z = 0$ бўлиши шубҳасиздир. Изланаётган экстремаль $y = y(x)$ ва $z = z(x)$ цилиндрларнинг кесишишидан ҳосил бўлган чизиқдир (42-чизма). Агар z ни ўзгармас деб, y ни ўзгартирсак, $y = y(x)$ проекцияловчи цилиндр устидаги чизиқ бўйича ҳаракат қилган бўламиз ва умумий масаладаги (яъни бир номаълумли функция бўлган ҳол) каби

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

тенгламани ёзамиз. Шунингдек, y ни ўзгармас десак, чизиқ $z = z(x)$ цилиндр бўйлаб силжиб,

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0$$

тенгламага келамиз. Бу

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} &= 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} &= 0 \end{aligned} \qquad (V.20)$$

иккала тенгламанинг бир вақтда бажарилиши (V.19) интеграл экстремал қийматга эга бўлишининг зарурий шартидир. Бу 2-тартибли оддий дифференциал тенгламалар системасига қўшимча шартлар:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \ y(x_1) = y_1, \\ z(x_0) &= z_0, \ z(x_1) = z_1. \end{aligned}$$

Мисол. Ушбу $I(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\,dx$ интегралнинг экстремаллари аниқлансин.

Ечилиши. (V.20) система бу функционал учун қуйидаги кўринишда бўлади:

$$z - 2y - y'' = 0, \ y + z'' = 0.$$

Иккинчи тенгламадан $y = -z''$ ни биринчи тенгламага қўйсак, z га нисбатан

$$z^{IV} + 2z'' + z = 0$$

ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0 \text{ ёки } (k^2 + 1)^2 = 0$$

бўлиб, $k_1 = i$ ва $k_2 = -i$ икки каррали илдизлари бўлади. Шунинг учун дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$z = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$$

бўлади. Системанинг ечими:

$$\begin{aligned} z &= (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x, \\ y &= -z''. \end{aligned}$$

Бу берилган интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқ топилди деган сўздир.

30-§. Юқори тартибли ҳосилаларга боғлиқ функционалнинг экстремуми

Бундай функционал

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n)})\,dx \qquad (V.21)$$

кўринишда ёзилиб, бу функционалга экстремал қиймат берувчи $y=y(x)$ функция $C^{(2n)}$ синфга тегишли бўлиши ва $(n-1)$-тартибли ҳосилалари билан қуйидаги шартларга бўйсуниши талаб қилинади:

$$\begin{gathered} x=x_0 \text{ да } y=y_0,\ y'=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}, \\ x=x_1 \text{ да } y=y_1,\ y'=y'_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_1^{(n-1)}. \end{gathered} \qquad (V.22)$$

Интеграл белгиси остидаги функция узлуксиз ва $(n+2)$-тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қилинади.

Албатта, масалага жавоб берувчи чизиқни ифодаловчи функциягина эмас, балки унга қўшни бўлган чизиқларни ифодаловчи функциялар, яъни

$$\tilde{y}=y+\delta y$$

лар ҳам (V. 22) шартларга бўйсуниши лозим. Бу деган сўз, функциянинг δy вариацияси $C^{(n)}$ синфга тегишли бўлиши ва вариациянинг ўзи ва $(n-1)$-тартибгача ҳосилалари четки нуқталарда, яъни $x=x_0$ ва $x=x_1$ да нолга тенг бўлиши керак. (V.21) интегралнинг қўшни чизиқларга нисбатан ёзилиши қуйидагича

$$\tilde{I}=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}',\ \ldots,\ \tilde{y}^{(n)})\,dx$$

бўлиб,

$$\Delta I=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ \tilde{y},\ \tilde{y}',\ \ldots,\ \tilde{y}^{(n)})\,dx-\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})\,dx \qquad (V.23)$$

функционал (V.21) нинг *орттирмаси* дейилади. Ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\ldots+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right)dx \qquad (V.24)$$

интеграл эса (V, 21) функционалнинг *вариацияси* дейилади. (V.23) га асосан (V.24) ни ҳосил қилиш учун (V.4) дан (V.5) га ва (V.5) дан (V.6) га ўтишдаги мулоҳазаларни такрорлаш керак. Буни ўқувчининг ўзига тавсия қилиб, (V.24) ни соддалаштириш йўлига ўтайлик. Бундаги интеграл остидаги ифодада бўлаклаб интеграллаш формуласини иккинчи қўшилувчидан бошлаб, охирги қўшилувчигача мос равишда бир марта, икки марта, ..., n марта қўллаб, функция ва унинг ҳосилаларига қўйилган шартларни эътиборга олинса, (V. 21) интегралнинг вариацияси қуйидаги кўринишга келади:

$$\delta I=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)\right]\delta y\,dx. \qquad (V.25)$$

(V. 24) ни бўлаклаб интеграллашда бўлаклаб интеграллашнинг умумий формуласи бўлган ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\eta^{(k)}(x)\,dx=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{d}{dx^i}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\eta^{(k-i-1)}(x)\Big|_{x_0}^{x_1}+$$

$$+(-1)^k\int_{x_0}^{x_1}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\eta(x)dx$$

формулани ихтиёрий қўшилувчига қўлланилса, (V. 25) осонгина ҳосил бўлади. Одатдагидек, функционалнинг биринчи вариациясини нолга тенглаб, экстремумга эга бўлишнинг зарурий шартини излайдиган бўлсак, яна асосий леммани татбиқ қиламиз; (V. 25) интеграл белгиси остидаги қавслар ичидаги ифода узлуксиз, δy эса лемма шартига бўйсунгани учун асосий леммага асосан

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0 \qquad (V.26)$$

тенгламага келамиз. Бу тенглама *Эйлер—Пуассон тенгламаси* дейилиб, $2n$-тартибли оддий дифференциал тенгламадир. Бунинг ечимида $2n$ та ихтиёрий ўзгармас иштирок этади. Бу интеграллаш ўзгармасларини аниқлаш учун $2n$ та (V.22) шарт бор. Шу билан масала охиригача ечилди деб ҳисоблаш мумкин.

Мисол. Ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1}(16y^2-y''^2+x^2)\,dx$$

интегралга экстремал қиймат берувчи функция топилсин. Бу ҳолда Эйлер—Пауссон тенгламаси

$$32y-\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0$$

ёки

$$y^{\mathrm{IV}}-16y=0$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^4-16=0$ бўлиб, $k_1=2$, $k_2=-2$, $k_3=2i$, $k_4=-2i$ илдизларга эга. Шунинг учун дифференциал тенгламанинг ечими ёки экстремаллар ушбу

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$$

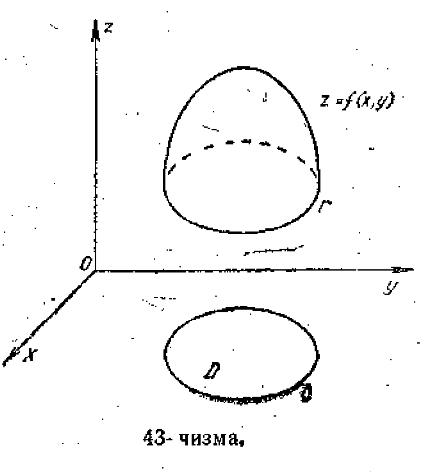
функциялар бўлади.

31-§. Икки ва уч каррали интегралларнинг экстремуми

Каррали интегралнинг экстремум масалаларини биринчи марта М. В. Остроградский текширган эди (1834 йил). Биз масалани икки каррали интеграл устида кўриб чиқиб, сўнгра уни уч каррали интегралларга кўчирамиз. Фазонинг бирор Ω қисмида ёпиқ Γ чизиқ берилган; бу чизиқнинг тенгламаси фазода иккита сиртнинг, масалан, $F_1(x, y, z) = 0$ ва $F_2(x, y, z) = 0$ сиртларнинг кесишиши кўринишида ёки $x = \varphi_1(\tau)$, $y = \varphi_2(\tau)$, $z = \varphi_3(\tau)$ параметрик кўринишда берилиши мумкин. Γ чизиқнинг xOy текисликдаги проекцияси каррали нуқталарга эга бўлмаган C чизиқ бўлсин. Фазодаги Γ чизиқдан ўтувчи ва фазонинг қурилаётган Ω қисмида тўла ётувчи сирт тенгламаси $z = f(x, y)$ дейлик. Сиртни ифодаловчи $f(x, y)$ функция узлуксиз ва узлуксиз $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ ва $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса, бундай функцияни *«мумкин бўлган» функция*, унга мос сиртни *«мумкин бўлган»* сирт дейлик. Мана шу мумкин бўлган сиртлар ичидан ушбу

$$I = \iint\limits_{(D)} F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy \qquad (V.27)$$

интегралга экстремум қиймат берувчи сиртни аниқлаш масаласи кўрилади. (V.27) да D — мумкин бўлган сиртларнинг xOy текисликдаги проекциялари; бу проекцияларнинг ҳаммаси C чизиқ (контур) билан чегараланган соҳа ичига тушади (43-чизма). Интеграл белгиси остидаги функция барча (бешта) аргументининг узлуксиз функцияси бўлиб, у 3-тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қилайлик. (V.27) функционалда z, p, q ни $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ва $\frac{\partial f}{\partial y}$ билан алмаштирсак, интеграл ҳар бир сирт учун аниқ қийматга эга бўлади. Бир-бирига яқин ётган сиртлар берувчи қийматларни таққослаб кўрганда, улар ичидан энг кичик ёки энг каттасини кўрсатиш мумкин. Интегралнинг изланаётган қиймати бошқа қийматларга нисбатан кичик ёки каттадир. Демак, биз бунда *нисбий экстремум* масаласини кўрар эканмиз. Кўраётган сиртларимиз бири иккинчисига яқин сиртлардир. (V.27) интегралга экстремум қиймат берувчи сиртни $z = f(x, y)$ десак, қолган сиртларни *қўшни сиртлар* ёки *вариацияланган сиртлар* дейиш мумкин. Функция вариациясини δz, унинг ҳосилалари вариацияларини δp, δq орқали белгиласак, интегралнинг бу сиртларга мос қиймати



43-чизма.

$$I = \iint\limits_{(D)} F(x,\ y,\ z+\delta z,\ \ p+\delta p,\ \ q+\delta q)\, dx\, dy \qquad (\mathrm{V}.28)$$

бўлади. Бу ерда шуни айтиб ўтиш ўринлики, мумкин бўлган сиртларнинг ҳаммаси фазодаги Γ чизиқдан ўтгани учун Γ чизиқ устида ҳамма вариациялар нолга тенгдир, яъни Γ чизиқда $\delta z = 0$, $\delta p = 0$ ва $\delta q = 0$ бўлади. Функционал орттирмаси

$$\Delta I = \tilde{I} - I = \iint\limits_{(D)} F(x,\ y,\ z+\delta z,\ \ p+\delta p,\ \ q+\delta q)\, dx\, dy -$$

$$- \iint\limits_{(D)} F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\, dx\, dy.$$

Бу айирмага ўрта қиймат теоремасини қўлланиб, F нинг барча аргументлари бўйича узлуксизлигини ҳисобга олсак ҳамда орадаги қийматлар ўрнига z, p, q ни ёзсак, функционал орттирмасини ушбу

$$\Delta I = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + \frac{\partial F}{\partial q}\delta q\right) dx\, dy + R \qquad (\mathrm{V}.29)$$

кўринишда ёзсак бўлади. Бунда R қўшилувчи δz, δp, δq вариацияларга нисбатан юқори тартибли кичик миқдордир. Одатдагидек, функционал орттирмасининг бош қисмини *функционал вариацияси* дейилиб, уни

$$\delta I = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + \frac{\partial F}{\partial q}\delta q\right) dx\, dy \qquad (\mathrm{V}.30)$$

орқали белгиланади. Экстремални топиш учун зарурий шартни ҳосил қилиш мақсадида функционал вариациясини нолга тенглаймиз:

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + \frac{\partial F}{\partial q}\delta q\right) dx\, dy = 0. \qquad (\mathrm{V}.31)$$

Бу интегралдаги охирги иккита қўшилувчини алоҳида текширайлик.

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial F}{\partial p}\delta p + \frac{\partial F}{\partial q}\delta q\right) dx\, dy = \iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\delta z\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\delta z\right)\right] dx\, dy - \iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] \delta z\, dx\, dy.$$

Бу интегралларни ёзишда

$$\delta p = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta z),$$

$$\delta q = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\delta z)$$

алмаштиришлар бажарилди. Энди ўнг томондаги биринчи интегралга Грин формуласини қўлланиб, икки каррали интегрални соҳани ўраган контур бўйича интегралга ўтказамиз, у ҳолда ўнг томонда

$$\int\limits_C \left(\frac{\partial F}{\partial p}\,\delta z\,dy - \frac{\partial F}{\partial q}\,\delta z\,dx\right) - \iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\delta z\,dx\,dy$$

бўлади. C контур устида $\delta z = 0$ бўлгани учун контур бўйича интеграл нолга тенг; иккинчи интегрални (V.31) га қўйсак:

$$\iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\delta z\,dx\,dy = 0. \qquad \text{(V.32)}$$

Интеграл белгиси остидаги қавслар ичидаги ифода узлуксиз бўлгани учун (V.32) га 2-леммани қўлласак бўлади, яъни

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0 \qquad \text{(V.33)}$$

тенгламага келамиз. Бу тенглама (V.27) функционал экстремумга эга бўлишининг зарурий шарти бўлиб, *Остроградский тенгламаси* дейилади. (V.33) тенглама қўшимча чегаравий шарт $z = f(x, y)$ сиртнинг Γ чизиқдан ўтишидир.

1-мисол. Ушбу

$$I = \iint\limits_{(D)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

интегралнинг экстремуми ҳақидаги масала учун Остроградский тенгламаси ёзилсин.

Ечилиши. Бунда

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = p^2 - q^2.$$

Берилган функционал учун Остроградский тенгламаси $-\frac{\partial}{\partial x}(2p) + \frac{\partial}{\partial y}(2q) = 0$

ёки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

кўринишда бўлиб, бу тенглама математик физика тенгламалари назариясида *гиперболик типдаги тенглама* дейилади. Шунинг учун тенгламани математик физика тенгламаларини ечиш методларидан бирига асосан, масалан, Даламбер методига асосан ечиш керак.

2-мисол. $I = \iint\limits_{(D)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$ функционал учун Остроградский тенгламаси

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

кўринишда бўлиб, бу тенглама текисликда *Лаплас тенгламаси* дейилади. Унинг қисқача ёзилиши: $\Delta u = 0$. Бу ҳам математик физика тенгламаларидан биридир. Агар D соҳанинг чегараси бўлган C чизиқда $z = f(x, y)$ функция (чегаравий шарт) берилган бўлса, у ҳолда Дирихле масаласига, яъни Лаплас тенгламасининг берилган чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига келамиз.

3-мисол. Ёпиқ C чизиқдан ўтувчи сиртлар ичидан энг кичик юзли сирт аниқлансин.

Изланаётган сирт ўзининг xOy текисликдаги проекцияси бўлган D соҳа устида ётади. Фазода сирт юзи эса

$$I=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

формулага асосан ҳисобланар эди. Бу функционал учун Остроградский тенгламаси

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0$$

кўринишда бўлади. Бундаги қавсларни очиб,

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

белгилашларни қабул қилсак, юқоридаги тенглама

$$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs=0 \qquad (\alpha)$$

кўринишни олади. Бу тенгламанинг геометрик маъносини аниқлайлик. Бунинг учун сиртнинг ўртача эгрилигини ифодаловчи

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)} \qquad (\beta)$$

формулага мурожаат қилайлик. Бу формулада

$$E=1+p^2,\ F=pq,\ G=1+q^2;$$

$$N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

белгилашлар қабул қилинган. Формуладаги ҳарфлар ўрнига юқоридаги тегишли ифодаларни қўйсак, (β) касрнинг сурати (α) тенгламанинг чап томонидаги ифоданинг ўзи бўлади. Демак, (α) га асосан сиртнинг ўртача эгрилиги нолга тенг бўлиши керак экан. Ўртача эгриликлари нолга тенг бўлган сиртлар *минимал сиртлар* дейилади, ёки ўртача эгриликнинг бош радиуслар орқали ифодасини кўрадиган бўлсак,

$$H=\frac{1}{2}\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$$

бўлиб, бундан $R_1+R_2=0$, яъни минимал сирт *эгрилиги бош* радиусларининг йиғиндиси нолга тенг бўлар экан*.

Икки каррали интегралнинг экстремум масаласи учун чиқарилган (V.33) зарурий шартни мос равишда уч каррали интегралга кўчирайлик, чунончи *фазонинг τ қисмида ушбу*

---

* Бунда келтирилган геометрик тушунчаларни М.А. Собиров ва А. Юсуповнинг «Дифференциал геометрия курси», Ўқитувчи, Т., 1967 й. ёки В.И. Смирновнинг «Курс высшей математики», II том китобларидан чуқурроқ ўрганиш мумкин.

$$\iiint\limits_{(\tau)} F\left(x,\ y,\ z,\ u;\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \qquad (V.34)$$

интегралга минимал қиймат берувчи $u(x,\ y,\ z)$ функция

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0 \qquad (V.35)$$

Остроградский тенгламасининг ечими бўлиши зарур, бунда $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $r = \frac{\partial u}{\partial z}$ белгилашлар қабул қилинган.

1-мисол. Ушбу

$$\iiint\limits_{(\tau)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz$$

интегралга минимал қиймат берувчи ва τ соҳани ўраган $\sum$ сиртда олдиндан берилган $f(x,\ y,\ z)$ функцияга тенг бўлган функция топилсин.

Ечилиши. Бу интеграл учун (V.35) тенгламани ёзамиз:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(2\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

фазодаги Лаплас тенгламасига келамиз. Бу тенгламанинг қисқача ёзилиши: $\Delta u = 0$. Маълумки, Лаплас тенгламасининг ечими гармоник функция дейилади. Демак, гармоник функцияни унинг сиртдаги қийматларига кўра ички нуқталарда топиш масаласига келдик — бундай масала *Дирихленинг ички масаласи* дейилиб, у математик физиканинг асосий масалаларидан биридир.

2-мисол. Маълумки, электр майдоннинг тўла энергияси

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{(\tau)} E^2 d\varphi$$

интеграл билан ифодаланади, бунда E — майдон кучланганлигини ифодаловчи $\vec{E}$ векторнинг сон қиймати. Майдон потенциалини φ десак,

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

бўлганда

$$E^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

бўлиб, биринчи мисолга асосан майдон потенциали ушбу

$$\Delta\varphi = 0$$

Лаплас тенгламасининг ечими бўлиши керак экан. Шу билан *электр майдон потенциали тўла майдон* электр энергиясига энг кичик қиймат берар экан* деган хулосага келамиз—Томсон принципи. Демак, тўла майдон электр энергияси майдон потенциал майдон бўлганда энг кичик бўлади.

V БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Қуйидаги интегралларга экстремум қиймат берувчи функциялар топилсин:

1. $\int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x)\, dx.$

2. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(\pi,\,1)} y'^2 \cos^2 x dx.$

3. Ушбу $I = \int\limits_{(-1,\,-1)}^{(1,\,1)} (x^2 y'^2 + 12y^2)\, dx$ интегралга минимум қиймат берувчи функция $y = x^3$ эканлиги аниқланиб, бу ΔI орттирма орқали тасдиқлансин.

Қуйидаги интегралларга экстремум қиймат берувчи функциялар аниқлансин:

4. $\int\limits_{(0,\,1)}^{(a,\,0)} (x^3 + 9y^2 + 2yy' - y'^2)\, dx.$

5. $\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(yz + y'^2 - \frac{3}{16} z^2 + \frac{1}{16} z'^2 \right) dx.$

6. $\int\limits_{(0,\,1)}^{(2,\,4)} (e^{y'} + 2y')\, dx.$

7. $A(0,0)$ ва $B(1,0)$ нуқталардан ўтувчи чизиқлар ичидан ушбу $\int\limits_0^1 y''^2\, dx$ интегралга минимум қиймат берувчи ва 1) $y'(0) = a$, $y'(1) = b$ шартларга бўйсунувчи чизиқ топилсин; 2) ҳеч қандай шарт қўйилмаган.

Қуйидаги интегралларнинг экстремаллари топилсин:

8. $\int\limits_{x_0}^{x_1} (y'')^n\, dx.$

9. $\int\limits_{x_0}^{x_1} (axy + xy' - y'^2)\, dx.$

10. $\int\limits_{x_0}^{x_1} (e^{yy'} + yy')\, dx.$

11. $\int\limits_{x_0}^{x_1} (yy' - 3y'y'' + y'''^2)\, dx.$

---

* «Тўла майдон» деганда ўзаро таъсир этувчи зарядларни ва улар ҳосил қилган бутун майдонни ўз ичига олган ҳажм тушунилади.

VI боб

БИРИНЧИ ВАРИАЦИЯНИНГ УМУМИЙ ИФОДАСИ. ЧЕГАРАЛАРИ ЎЗГАРУВЧИ БЎЛГАН ҲОЛ. ТРАНСВЕРСАЛЛАР

32- §. Чегаралари ўзгарувчи бўлган ҳол

Биз шу вақтга қадар кўрган

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx$$

интегралнинг чегаралари ўзгармас эди, яъни берилган қўзғалмас $A(x_0,\ y_0)$ ва $B(x_1,\ y_1)$ нуқталардан ўтувчи эгри чизиқлар ичидан бу интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқни излаган эдик. Энди мумкин бўлган эгри чизиқлар берилган маълум соҳада ётади-ю, лекин ҳеч қандай чегаравий шартларга бўйсунмайди (табиий чегаравий шартлар) деб фараз қилайлик. Бундай эгри чизиқлар тўплами битта ёки бир нечта параметрга боғлиқ бўлиб, параметрларнинг ўзгариши натижасида тўпламнинг бир чизиғидан иккинчисига ўтилади. Шу билан эгри чизиқларнинг учлари ҳам ўша параметрга боғлиқ равишда ўзгариб туради. Бунда биз биргина параметрга боғлиқ чизиқлар оиласи билан иш кўрамиз, яъни $y = f(x,\ \alpha)$ деймиз. Бундай ўзгаришда чизиқларнинг икки учи бирор тайин чизиқлар ёки сиртлар бўйича сурилиши (ҳаракат қилиши) мумкин ёки бир учи бириктирилган, иккинчи учи юқорида айтилгандек, ҳаракатда бўлиши мумкин. Мана шундай эгри чизиқлар ичидан

$$I(\alpha) = \int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} F(x,\ f(x,\ \alpha),\ f_x(x,\ \alpha))\,dx \qquad (VI.1)$$

функционалга экстремал қиймат берувчи чизиқни топиш талаб қилинади. Албатта, қандай ҳол бўлмасин, ҳаммаси учун зарурий шарт— функционал биринчи вариациясининг нолга тенглигидир. Энг аввал биз интегралнинг икки учи ҳам ҳаракатда бўлган ҳолда биринчи вариация ифодасини ёзамиз, сўнгра қолган ҳолларни кўриб чиқамиз. Шуни айтиб ўтиш ўринлики, қандай чизиқлар тўплами олинмасин, интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқ албатта экстремаль бўлиши, яъни Эйлер тенгламасининг ечими бўлиши лозим. Шубҳасиз, эгри чизиқлар тўпламида изланаётган экстремалга яқин ётган қўшни чизиқларда функционалнинг қийматларини кўришимиз лозим. Қўшни чизиқларни аввал қабул қилган белгимизга асосан

$$\tilde{y} = y + \delta y$$

деб белгилайлик. Интеграл чегаралари ҳам параметрга боғлиқ равишда вариацияланади, яъни экстремалнинг икки учи $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталарда бўлса, қўшни чизиқларнинг икки учи $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ ва $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ нуқталарда бўлади. Қўшни чизиқларга нисбатан ёзилган

$$\tilde{I} = \int\limits_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx$$

функционалда учлардаги силжишлар кичик бўлгани сабабли учларнинг вариацияси бўлган δx_i ва δy_i белгиларни математик анализдаги $\Delta x_i = dx_i$ ва $\Delta y_i = dy_i$ белгилар билан бир нарса деб тушуниш лозим.

Функционал орттирмаси

$$\Delta I = \tilde{I} - I = \int\limits_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx \quad \text{(VI.2)}$$

бўлиб, шу орттирманинг δx; δy; δx_0 δx_1 га нисбатан бош чизиқли қисми *функционалнинг вариацияси* дейилади. Мана шу вариация ифодасини ҳосил қилишимиз керак. (VI.2) нинг биринчи интегралини

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx \quad \text{(VI.3)}$$

кўринишда ёзиб, бу ифоданинг биринчи интеграли билан (VI.2) нинг иккинчи интегралини бирлаштириб ёзамиз:

$$\Delta I = \int\limits_{x_0}^{x_1} [F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y') - F(x,\ y,\ y')]\,dx - I_0 + I_1, \quad \text{(VI.4)}$$

бунда

$$I_0 = \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx,$$

$$I_1 = \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx.$$

(VI.4) даги биринчи интегралнинг бош чизиқли қисми (V.6) га асосан

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx \qquad \text{(VI.5)}$$

I_0 ва I_1 га ўрта қиймат теоремасини қўлланайлик:

$$I_0 = F(x,\ \ y+\delta y,\ y'+\delta y')\big|_{x=x_0+\theta_0\delta x_0}\delta x_0, \text{ бунда } 0<\theta_0<1;$$

$$I_1 = F(x,\ y+\delta y,\ \ y'+\delta y')\big|_{x=x_1+\theta_1\delta x_1}\delta x_1, \text{ бунда } 0<\theta_1<1.$$

$F(x,\ y,\ y')$ функция барча аргументларига нисбатан узлуксиз бўлгани учун

$$I_0 = F(x,\ y,\ y')\big|_{x=x_0}\delta x_0+\varepsilon\,\delta x_0,$$

$$I_1 = F(x,\ y,\ y')_{x=x_1}\delta x_1+\varepsilon_1\delta x_1$$

бўлади. (VI.4) да

$$-I_0+I_1=-F(x,\ y,\ y')_{x=x_0}\delta x_0+F(x,\ y,\ \ y')_{x=x_1}\delta x_1+R$$

бўлиб, бунда $R=-\varepsilon_0\ \delta x_0+\varepsilon_1\delta x_1$ ифода δx_0 ва δx_1 га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. Демак, (VI.6) нинг бош қисми

$$-F(x,\ y,\ y')\big|_{x=x_0}\delta x_0+F(x,\ \ y,\ y')\big|_{x=x_1}\delta x_1 \qquad \text{(VI.7)}$$

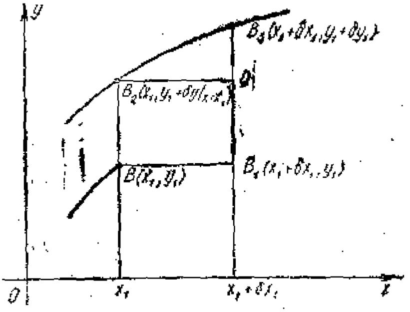
бўлади. (VI.5) ва (VI.7) нинг йиғиндиси функционал орттирмаси (VI.4) нинг *бош чизиқли қисми ёки функционалнинг вариацияси* бўлади, чунончи

$$\delta I=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx-F_{x=x_0}\delta x_0+F_{x=x_1}\delta x_1 \qquad \text{(VI.8)}$$

интегралдаги иккинчи қўшилувчига бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаииб, (VI.8) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\delta I=F_{x=x_1}\delta x_1-F_{x=x_0}\delta x_0+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\ \right]_{x=x_0}^{x=x_1}+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx \qquad \text{(VI.9)}$$



44- чизма.

Интеграллаш натижасида ҳосил бўлган

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\ \ \delta y\ \ \right]_{x=x_0}^{x=x_1}$$

ифодадаги $\delta y\,|_{x=x_0}$ ва $\delta y\,|_{x=x_1}$ ни уларнинг маъносига кўра бошқача кўринишда ёзамиз. Шуни айтиб ўтиш керакки, $\delta y\,|_{x=x_1}$ ва δy_1 турличадир, шунингдек $\delta y\,|_{x=x_0}\neq$ $\neq\delta y_0$. Ҳақиқатан, 44-чизмадан кўринадики, $\delta y\,|_{x=x_1}$ ифода ординатанинг $x=x_1$ абсциссага нисбатан орттирмаси, яъни

$$BB_2 = \delta y\,|_{x=x_1},\ B_2C = \delta x_1,$$

$$B_1B_3 = \delta y_1 = B_1C + CB_3,\ B_1C = BB_2 = \delta y\,|_{x=x_1},$$

$$CB_3 = y'_{x=x_1}\delta x_1,\ \text{демак},\ \delta y_1 = \delta y\,|_{x=x_1} + y'_{x=x_1}\delta x_1,$$

бундан

$$\delta y\,|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1. \qquad \text{(VI.9')}$$

Худди шундай чизмани $A(x_0, y_0)$ учда ҳам чизиш мумкин ва бу учга нисбатан

$$\delta y\,|_{x=x_0} = \delta y_0 - y'(x_0)\,\delta x_0 \qquad \text{(VI.9'')}$$

бўлади. (VI.9') ва (VI.9'') ни (VI.9) га қўйиб, ҳадларни группаласак, *биринчи вариациянинг умумий ифодасига* келамиз:

$$\delta I = \left[F(x_1, y_1, y_1') - y_1'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\right]\delta x_1 - \left[F(x_0, y_0, y_0') - \right.$$

$$\left. - y_0'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\right]\delta x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\delta y_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\delta y_0 +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx \qquad \text{(VI.10)}$$

ёки буни ихчам кўринишда ёзсак:

$$\delta I = \left[\left(F - y'\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\right]_{x_0}^{x_1} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx. \qquad \text{(VI.11)}$$

Бу ифодага асосланиб, ушбу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx \qquad \text{(VI.12)}$$

функционал вариациясининг умумий ифодасини ёзиш қийин эмас, чунончи

$$\delta I = \left[\left(F - y'\,\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\,\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial z'}\,\delta z\right]_{x_0}^{x_1} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1}\left\{\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] + \delta z\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\right\}dx \qquad \text{(VI.12')}$$

бўлади, бунда (x_0, y_0, z_0) ва (x_1, y_1, z_1) — интеграллаш йўлининг учлари.

Қандай вариацион масалани ечмайлик, ҳар қандай масала учун, биринчидан, биринчи вариация нолга тенг бўлиши зарур (α); иккинчидан, ҳар қандай функционалга экстремал қиймат берувчи чизиқ экстремаль бўлиши, яъни Эйлер тенгламасининг ечими бўлиши лозим (β). Мана шу икки ҳолатни назарда тутиб, (VI.11) умумий вариациядан қуйидаги тўртта ҳолда фойдаланайлик:

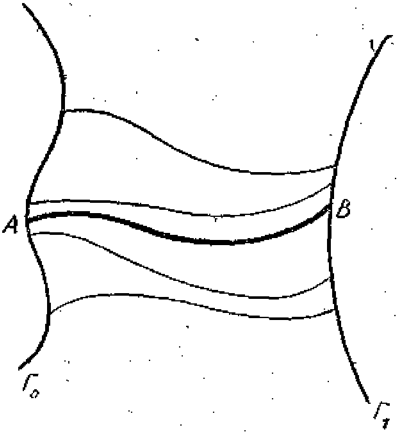
I. Интеграллаш йўлининг икки учи қўзғалмас;

II. $A(x_0, y_0)$ қўзғалмас, $B(x_1, y_1)$ ҳаракатчан;

III. $A(x_0, y_0)$ ҳаракатчан, $B(x_1, y_1)$ қўзғалмас;

IV. $A(x_0, y_0)$ ҳам, $B(x_1, y_1)$ ҳам ҳаракатчан.

Бу ҳолларда ҳаракатчан нуқталарнинг ҳаракатларини чегаралайлик, чунончи нуқталар (мумкин бўлган чизиқларнинг учлари) тенгламалари маълум бўлган Γ_0 ва Γ_1 чизиқлар бўйича ҳаракатланади деб фараз қиламиз. Бу чизиқларнинг тенгламалари мос равишда $y = \varphi_0(x)$, $y = \varphi_1(x)$ бўлсин.



45- чизма.

I ҳол устида тўхталмасак ҳам бўлади, чунки бу ҳол асосий вариацион масалани текширишда етарлича текширилди.

II ҳолда $\delta x_0 = 0$ ва $\delta y_0 = 0$ бўлиб, (α), (β) шартларини ҳисобга олсак, (VI.11) дан

$$[F(x_1, y_1, y_1') - y_1' F_{y'}(x_1, y_1, y_1')]\,\delta x_1 + \\ + F'_{y'}(x_1, y_1, y_1')\,\delta y_1 = 0 \qquad (VI.13)$$

тенгликка келамиз. Бу тенглик ҳаракатчан учда бажарилиши лозим бўлган шартдир.

III ҳолда $\delta x_1 = 0$ ва $\delta y_1 = 0$ бўлиб, яна (α) ва (β) шартларни ҳисобга олсак, (VI.11) дан $A(x_0, y_0)$ уч учун

$$[F(x_0, y_0, y_0') - y_0' F'_{y'}(x_0, y_0, y_0')]\,\delta x_0 + \\ + F'_{y'}(x_0, y_0, y_0')\,\delta y_0 = 0 \qquad (VI.14)$$

тенгликка келамиз.

(VI.13) ва (VI.14) да иштирок этаётган ҳарфларнинг маъноларини яна бир марта эслаб ўтайлик: y_0' ва y_1' лар AB чизиқнинг мос равишда $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталарига ўтказилган уринмаларнинг бурчак коэффициентлари; δx_0, δy_0 лар Γ_0 чизиқ бўйича ёки унга уринма бўйича кичик силжишнинг координата ўқларига бўлган проекциялари; шунга ўхшаш, δx_1 ва δy_1 ҳам Γ_1 чизиқ бўйлаб ёки уринма бўйлаб кичик силжишнинг координата ўқларига бўлган проекциялари (45- чизма).

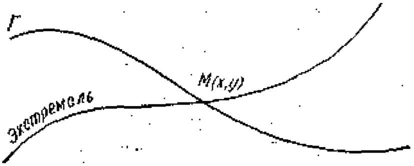
IV ҳолда $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталарнинг иккаласи ҳам ҳаракатчан бўлгани учун бу нуқталарда (VI.13) ва (VI.14) шартлар бир вақтда бажарилиши, яъни

$$\begin{cases}[F(x_1, y_1, y_1') - y_1' F_{y'}' (x_1, y_1, y_1')]\,\delta x_1 + F'_{y'} (x_1, y_1, y_1')\,\delta y_1 = 0, \\ [F(x_0, y_0, y_0') - y_0' F'_{y'} (x_0, y_0, y_0')]\,\delta x_0 + F'_{y'} (x_0, y_0, y_0')\,\delta y_0 = 0\end{cases} \qquad \text{(V.1}$$

бўлиши лозим.

33- §. Трансверсаллар

Энди тенгламаси $y = f(x)$ бўлган экстремалда ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтани олайлик. Бу нуқтада эгри чизиқнинг оғмалиги ёки уринманинг бурчак коэффициенти y' билан аниқланади. $M(x, y)$ нуқтада экстремални кесиб ўтувчи Г эгри чизиқ ўтказамиз (46- чизма). Бу эгри чизиқ ёки унинг уринмаси бўйича кичик силжишларнинг компонентларини δx ва δy орқали белгилайлик.



46- чизма.

Агар M нуқтадаги x, y, y', δx, δy *катталиклар орасида* ушбу

$$[F(x, y, y') - y'F'_{y'}(x, y, y')]\,\delta x + F'_{y'}(x, y, y')\,\delta y = 0 \qquad \text{(VI.16)}$$

боғланиш мавжуд бўлса, у ҳолда L экстремаль Г чизиқни трансверсал кесади дейилади; Г чизиқнинг ўзи эса трансверсаль дейилади.

Бу таърифдан кўринадики, трансверсал чизиқни фақат экстремалга боғлиқ равишда кўриш мумкин. (VI.15) даги тенгликларни (VI.16) шарт билан таққослаб кўрсак, қуйидаги натижага келамиз: *икки учи (ёки бир учи) эгри чизиқлар бўйича ҳаракатланувчи экстремаль функционалга экстремум қиймат бериши учун шу чизиқларни трансверсал кесиши зарур.* Г чизиққа M нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини $\overline{y'}$ орқали белгиласак, у ҳолда $\overline{y'} = \frac{\delta y}{\delta x}$ бўлиб, (VI.16) шартни қуйидагича ёзсак бўлади:

$$F(x, y, y') + (\overline{y'} - y')\,F'_{y'}(x, y, y') = 0. \qquad \text{(VI.7)}$$

Демак, *трансверсаллик шарти экстремалга ўтказилган уринманинг y' бурчак коэффициенти билан уни (экстремални) кесувчи чизиқ уринмасининг $\overline{y'}$ бурчак коэффициенти орасидаги боғланишни ифодалар экан.*

Юқорида айтилганларни якунлайлик. Γ_0 ва Γ_1 эгри чизиқлар нуқталарини туташтирувчи L чизиқлар ичидан ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \qquad \text{(VI.I)}$$

интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқ топилсин. Γ_0, Γ_1 чизиқлар билан экстремалнинг кесишиш нуқталарида (VI.17) шартнинг бажарилиши масалага тўлиқ жавоб беради (масалани тўла ҳал қилади). Ҳақиқатан, Γ_0 ва Γ_1 чизиқларнинг тенгламалари мос равишда $y = \varphi_0(x)$ ва $y = \varphi_1(x)$ бўлсин; (VI.1) функционалга мос Эйлер тенгламасининг ечими иккита параметрга боғлиқ бўлган

$$y = f(x, C_1, C_2) \qquad \text{(VI.18)}$$

эгри чизиқлар оиласидан иборат. $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталарда иккита трансверсаллик шарти ва бу нуқталарнинг Γ_0 ва Γ_1 чизиқларда ётишидан яна иккита

$$f(x_0, C_1, C_2) = \varphi_0(x_0),\quad f(x_1, C_1, C_2) = \varphi_1(x_1)$$

шарт бажарилиши кўринади. Бу тўртта шартдан тўртта x_0, x_1, C_1, C_2 ноаниқлар аниқланади. Булардан топилган C_1 ва C_2 нинг қийматларини (VI.18) га қўйсак, масаланинг жавоби бўлган экстремалнинг тенгламаси ҳосил бўлади. Хусусан,

$$F = g(x, y)\sqrt{1 + y'^2} \qquad (g(x, y) \neq 0) \qquad \text{(VI.19)}$$

бўлганда (VI.17) трансверсаллик шарти

$$g(x, y)\sqrt{1 + y'^2} + (\overline{y}' - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

кўринишни олади. Бундан

$$g(x, y)(1 + \overline{y}'y') = 0$$

бўлиб, $g(x, y) \neq 0$ эканлигини кўзда тутсак, ушбу

$$1 + \overline{y}'y' = 0$$

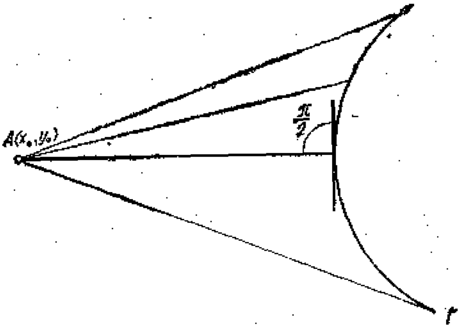
ортогоналлик шартига келамиз, яъни (VI.19) функционал учун экстремалнинг ҳаракатчан учларида эгри чизиқ ва экстремалга ўтказилган уринмалар ўзаро ортогонал бўлар экан; трансверсаллик шарти ортогоналлик шартини ифодалар экан.

Масалан, $A(x_0, y_0)$ нуқтадан берилган Γ чизиққача бўлган энг қисқа масофа топилсин (47- чизма).

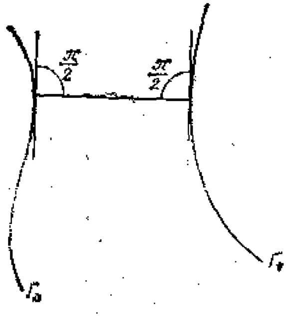
Энг қисқа масофага ушбу

$$I = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

интегралнинг экстремали бўйича эришамиз. Бунда интеграл белгиси остидаги $F(y') = \sqrt{1 + y'^2}$ ифода фақат y' га боғлиқ бўлиб, экстремаллар $y = C_1x + C_2$ тўғри чизиқлар бўлишини аниқлаган эдик. Демак, нуқтадан эгри чизиққача бўлган энг қисқа масофа тўғри чизиқ кесмаси бўлишини аниқладик. Лекин тўғри чизиқлар кесмаларининг сони чексиз кўп, булар ичидан Γ чизиқ билан кесишганда трансверсаллик шартини, яъни бизнинг ҳолда ортогоналлик шартини бажарувчисини танлаб олиш керак бўлади. Демак, масаланинг жавоби $A(x_0, y_0)$ нуқтадан Γ чизиққа туширилган перпендикулярдир. Иккита эгри чизиқ орасидаги энг қисқа масофага иккала чизиққа умумий нормаль орқали эришилади (48- расм).



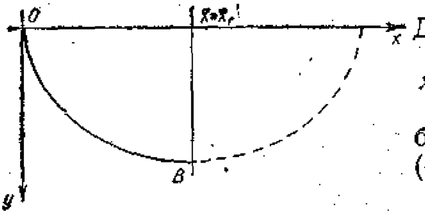
47- чизма.



48- чизма.

V бобда келтирилган брахистохрона масаласида чизиқнинг бир учи бириктирилган, иккинчи учи эса вертикал чизиқ бўйича ҳаракат қилади деб фараз қилайлик. У ҳолда масала жавоби бўлган (γ) тенгламадаги (V боб, 28- §) C_1 ўзгармасни циклоида билан масала шартидаги вертикал чизиқнинг трансверсал кесишиш шартидан аниқласак бўлади. Бу ҳолда ҳам интеграл белгиси остидаги функция $F = \frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt{1+y'^2}$ кўринишда бўлгани учун трансверсаллик шарти ортогоналлик шартига ўтади. Демак, $B(x_1, y_1)$ нуқта циклоиданинг учи бўлиши керак; циклоида учида $t = \pi$ бўлгани учун:

$$x_1 = \frac{C_1}{2}\pi, \quad C_1 = \frac{2x_1}{\pi}.$$



49- чизма.

Демак, экстремаль тенгламаси

$$x = \frac{x_1}{\pi}(t - \sin t), \quad y = \frac{x_1}{\pi}(1 - \cos t)$$

бўлган тайин циклоида бўлар экан (49- расм).

Экстремалнинг учлари ётган чизиқларнинг тенгламалари

$$\varphi(x, y) = 0$$

ошкормас кўринишда бўлса, у ҳолда $\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ бўлиб, (VI.16) трансверсаллик шарти қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{F - y' F'_{y'}}{\varphi'_x} = \frac{F'_{y'}}{\varphi'_y}. \tag{VI.20}$$

Мисол. $O(0, 0)$ нуқтани $y^3 = 2 - x$ эгри чизиқ билан туташтирувчи чизиқлар ичидан ушбу

$$I=\frac{1}{2}\int_{(0,\,0)}^{(x_1,\,y_1)}(y'^2-y^2)\,dx$$

интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқ топилсин.

Ечилиши. Интеграл остидаги функция

$$F(x,y,y')=\frac{1}{2}(y'^2-y^2).$$

Берилган функционал учун

$$F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})=0.$$

Эйлер тенгламаси $y''+y=0$ кўринишни олади, бундан

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Экстремалнинг (0, 0) нуқтадан ўтишидан фойдаланиб, ечимни

$$y=C_2\sin x$$

кўринишга келтирамиз. Экстремаль ўзининг иккинчи учида $y^3=2-x$ эгри чизиқ билан трансверсал кесишиши керак. Эгри чизиқ тенгламасини

$$\varphi(x,y)=y^3-2+x=0$$

ошкормас кўринишда ёзиб, трансверсаллик шартининг (VI.20) кўринишини олиш қулайроқ. Бу шарт

$$\frac{\frac{1}{2}(y'^2-y^2)-y'y'}{1}=\frac{y'}{3y_1^2}$$

ёки

$$y^2+y'^2=-\frac{2}{3}\,\frac{y'}{y_1^2}\qquad(\alpha)$$

дир, бунда $y_1=\sqrt[3]{2-x_1}$ бўлиб, y ва y' эса экстремаль тенгламасидан олинган. Экстремаль тенгламасидан:

$$\left.\begin{aligned}y^2&=C_2^2\sin^2x\\y'^2&=C_2^2\cos^2x\end{aligned}\right\}\text{ ва } y^2+y'^2=C_2^2.$$

Буни ва $y=C_2\sin x$ ни (α) га қўйсак:

$$C_2^2=-\frac{2}{3}\,\frac{C_2\cos x_1}{y_1^2}.$$

$C_2\neq0$, акс ҳолда травиал ечимга эга бўламиз, демак, $C_2=-\frac{2}{3}\frac{\cos x_1}{y_1^2}$ бўлиши керак. Демак,

$$y=-\frac{2}{3}\,\frac{\cos x_1}{y_1^2}\,\sin x\qquad(\beta)$$

изланаётган ечим бўлади. x_1 ни $y = C_2 \sin x$ экстремаль ва берил $y^3 = 2 - x$ чизиқларнинг кесишиш нуқтасининг абсциссаси деб бил сак, x_1 қуйидаги тенгламани қаноатлантиришини кўрсатиш қийин эмас:

$$3(x_1 - 2) - \sin 2x_1 = 0.$$

Бунга асосан (β) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = \frac{y_1}{\sin x_1} \sin x,$$

бунда

$$y_1 = \sqrt[3]{2 - x_1}.$$

(VI.16) ва (VI.20) формулаларга мослаштириб, уч ўлчовли фазо ушбу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\, dx \qquad \text{(VI.1}$$

функционал учун трансверсаллик шартини ёзсак бўлади, чунончи

$$(F - y' F_{y'} - z' F_{z'})\, \delta x + F'_{y'}\, \delta y + F'_{z'}\, \delta z = 0 \qquad \text{(VI.2}$$

тенглик (VII.12) функционал экстремалининг учлари S_0 *ва* *сиртлар бўйича ҳаракат қилган ҳол учун трансверсаллик шарти ни ифодалайди.* Бунда δx, δy, δz сирт бўйича кичик силжишларни ташкил қилувчилари, яъни ўқларга бўлган проекцияларидир; S_0 S_1 сиртларнинг тенгламалари $z = \psi(x, y)$ кўринишда бўлиб, экст малнинг учи қайси сирт бўйича ҳаракатда бўлса, ўша сирт усти (VI.20) бажарилади деб фараз қиламиз. Сирт тенгламаси $\varphi(x, y, z) = 0$ ошкормас кўринишда бўлса, трансверсаллик шарти қуйида кўринишни олади:

$$\frac{F - y' F'_{y'} - z' F_{z'}}{\varphi'_x} = \frac{F'_{y'}}{\varphi'_y} = \frac{F'_{z'}}{\varphi'_z}. \qquad \text{(VI.2}$$

Параметрик форма. Вариацион ҳисобнинг асосий масаласини т рифлашда ушбу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \qquad \text{(V.}$$

функционалга экстремал қиймат берувчи функцияни (чизиқни) $y = f(x)$ аналитик формада излаб, бу чизиқнинг $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталардан ўтишини талаб қилган эдик. Баъзи масалаларда бу экс ремални параметрик кўринишда излаш қулай бўлади, чунончи (V. интегралга экстремал қиймат берувчи функция $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ кўринишда изланади. Параметрнинг $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталарга мос келувчи қийматлари t_0 ва t_1, яъни, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$ бўлсин, у ҳолда (VI.3) функционал ушбу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, \frac{\dot y}{\dot x}\right) \dot x\, dt \qquad (VI.23)$$

ўринишни олади. Бу интеграл белгиси остидаги

$$\Phi(x, y, \dot x, \dot y) = F\left(x, y, \frac{\dot y}{\dot x}\right)\dot x$$

ункцияда t ошкор иштирок этмайди, функция $\dot x$ ва $\dot y$ ларга нисбатан бир жинслидир. Ҳақиқатан, ушбу

$$\Phi(x, y, k\dot x, k\dot y) = F\left(x, y, \frac{k\dot y}{k\dot x}\right) k\dot x = kF\left(x, y, \frac{\dot y}{\dot x}\right)\dot x =$$
$$= k\Phi(x, y, \dot x, \dot y) \qquad (VI.24)$$

ҳисоблашлар буни тасдиқлайди. Шунинг учун Эйлер теоремаси бу ҳолда қуйидагича ёзилади:

$$\Phi = \dot x \Phi_{\dot x} + \dot y \Phi_{\dot y} \qquad (VI.25)$$

[Бу формула (VI.24) ни k га нисбатан дифференциаллаб, $k = 1$ дейишдан ҳосил бўлади].

(VI.24) белгилашга асосан (VI.23) интегрални ушбу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot x, \dot y)\, dt \qquad (VI.23')$$

кўринишда ёзайлик ва (VI.23′) кўринишдаги функционал экстремумга эга бўлишининг зарурий шартини топиш масаласини ҳал қилайлик. (VI.23) функционалда $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар иштирок этгани учун (VI.20) га асосан қуйидаги Эйлер тенгламалари системасини тузамиз:

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot x} = 0, \quad \Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot y} = 0. \qquad (VI.26)$$

Бу тенгламаларда ҳам t параметр ошкор иштирок этмайди. Агар параметр ролида x нинг ўзи олинса, у ҳолда (V.3) интегралнинг ўзига қайтиб келамиз. Қуйидагини алоҳида таъкидлаб ўтайлик: экстремалнинг $x = x(t)$, $y = y(t)$ тенгламаларида t параметрнинг ўзгариши билан экстремаль бўйлаб нуқтадан нуқтага ўтилади, яъни параметрнинг ихтиёрий қийматларида қўшни чизиқларга ўтилмасдан, балки бир чизиқ устидагина ҳаракат қилинади. Шунинг учун $x(t)$, $y(t)$ лар t параметрнинг барча қийматларида (VI.26) тенгламалар системасини қаноатлантириши керак. Масалан, бир жавобда параметр ролида бурчак, иккинчи жавобда эса S ёй қабул қилинган бўлиши мумкин, у ҳолда иккинчи жавобдаги $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар ҳам (VI.26) системани қаноатлантириши керак. Агар система тенгламалари ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда система ечимга эга ва у ечим ягона бўлади (мавжудлик ва ягоналик теоремаси). Бизнинг масаламизда эса параметрнинг олинишига кўра ҳар хил $x(t)$, $y(t)$ функциялар системанинг ечими бўлиши мумкин. Шунинг учун система тенгламаларидан бири иккинчисидан ҳосил бўлади, деган хулосага келамиз.

Шундай қилиб, (VI.26) даги тенгламалардан бирини параметрни танлаш шартида фойдалансак бўлади. Масалан,

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot x} = 0$$

тенглама билан $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = r^2$ тенгликни олсак, параметр ролида бурчак олинган бўлади.

Юқорида айтилганларни тасдиқлаш учун (VI.26) системадаги иккита тенгламани битта тенгламага келтириш мумкинлигини кўрсатсак кифоя. Бунинг учун (VI.25) нинг иккала томонини $x, y, \dot x, \dot y$ бўйича дифференциаллайлик:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \dot x\,\Phi_{x\dot x} + \dot y\,\Phi_{x\dot y}, & \Phi_y &= \dot x\,\Phi_{\dot x y} + \dot y\,\Phi_{y\dot y}, \\ 0 &= \dot x\,\Phi_{\dot x\dot x} + \dot y\,\Phi_{\dot x y}, & 0 &= \dot x\,\Phi_{\dot x\dot y} + \dot y\,\Phi_{\dot y\dot y}. \end{aligned} \tag{VI.27}$$

Булардан

$$\frac{\Phi_{\dot x\dot x}}{\dot y^2} = \frac{\Phi_{\dot x\dot y}}{-\dot x\dot y} = \frac{\Phi_{\dot y\dot y}}{\dot x^2} = \Phi_1(x, y, \dot x, \dot y), \tag{VI.28}$$

(VI.26) ни ҳам шу ўзгарувчилар бўйича дифференциаллаб, ушбу

$$\Phi_x - \dot x\,\Phi_{x\dot x} - \dot y\,\Phi_{y\dot x} - \ddot x\,\Phi_{\dot x\dot y} - \ddot y\,\Phi_{\dot x\dot y} = 0,$$

$$\Phi_y - \dot x\,\Phi_{x\dot y} - \dot y\,\Phi_{y\dot y} - \ddot x\,\Phi_{\dot x\dot y} - \ddot y\,\Phi_{\dot y\dot y} = 0$$

тенгликларга эга бўламиз; бу тенгликларда Φ_x ва Φ_y ни (VI.27) дан, $\Phi_{\dot x\dot x}$, $\Phi_{\dot x\dot y}$ ва $\Phi_{\dot y\dot y}$ ни (VI.28) дан фойдаланиб алмаштирсак, ушбу

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot x} = \dot y\,\psi, \quad \Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot y} = -\dot x\,\psi \tag{VI.29}$$

тенгликларга эга бўламиз, бунда

$$\psi = \Phi_1(x, y, \dot x, \dot y)(\dot x\ddot y - \dot y\ddot x) + \Phi_{x\dot y} - \Phi_{y\dot x}.$$

изланаётган чизиқлар учун $(\dot x)^2 + (\dot y)^2 \neq 0$ бўлганлигидан (VI.26) тенгламалар системаси (VI.29) га кўра битта

$$\psi = 0$$

тенгламага, яъни

$$\Phi_1(x, y, \dot x, \dot y)(\dot x\ddot y - \dot y\ddot x) + \Phi_{x\dot y} - \Phi_{y\dot x} = 0$$

тенгламага эквивалент эканлиги келиб чиқади.

34- §. Узлукли ечимлар

Шу вақтга қадар кўрилган масалаларнинг ечимлари бўлган $y = y(x)$ функциялар $C^{(1)}$ синфга тегишли эди. Агар вариацион масаланинг жавобини ҳосилалари узлуксиз ўзгарувчи эгри чизиқлар ичидан топиш мумкин бўлмаса, масала жавоб эга бўлиш зарурлиги кўзда тутилганда унинг жавобини бошқа хил функциялар ичидан излашга тўғри келади. Масалан, ёруғлик босиб ўтган йўл бўйича олинган

$$\int_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)} \eta(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

интегралнинг биринчи вариацияси нолга тенг. $\eta(x, y)$ — муҳитнинг синдириш кўрсаткичи. Бир муҳитдан иккинчи муҳитга ўтишда нур синади. Интегралнинг экстремали (ёруғлик босиб ўтган йўл) ўзи узлуксиз бўлса ҳам, синганлиги сабабли, унинг y' бурчак коэффициенти синиш нуқтасида узилишга эга. Муҳитларнинг чегарасига ўтказилган MN нормаль билан тушган PM ва синган MQ нурлар ҳосил қилган бурчакларни γ_1 ва γ_2, муҳитларнинг синдириш кўрсаткичларини мос равишда η_1 ва η_2 десак, синиш нуқтасида

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

муносабат ўринлидир. Бунинг исботи кейинроқ кўрилади (51- чизма). Бу ерда фақат экстремаль синиш нуқтасига эгалигини айтиб ўтмоқчимиз, холос.

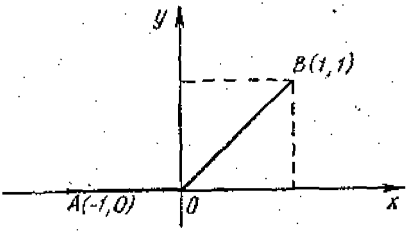
Яна бир мисол. Ушбу

$$\int_{-1}^{+1} y^2(1-y')^2\,dx$$

интеграл

$$A(-1{,}0),\ O(0,\ 0),\ B(1,\ 1)$$

синиқ чизиқ бўйлаб олинса, $(-1{,}0)$ бўлакда $y = 0$ бўлгани ва $(0{,}1)$ да $y' = 1$ бўлгани сабабли нолга тенг. Интеграл мусбат бўлгани сабабли бу қиймат (яъни ноль) минимал қиймат бўлади. Равшанки, $(0,\ 0)$ нуқтада AOB синиқ чизиқ синади ва y' узилишга эга (50- чизма).



50- чизма.

Энди бундай экстремалларнинг умумий назариясини ушбу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x_1,\ y,\ y')\,dx$$

интегралга татбиқ қилайлик. $A(x_0,\ y_0)$ ва $B(x_1,\ y_1)$ нуқталарни туташтирувчи чизиқлар ичида интегралга экстремум қиймат берувчи чизиқ $(x_2,\ y_2)$ нуқтада синади деб фараз қилайлик. Шу билан бирга

A ва B нуқталардан ўтувчи мумкин бўлган қўшни чизиқлар ҳам балки синиш нуқтасига эга бўлиши мумкин. Изланаётган чизиқ учун (x_2, y_2) синиш нуқтасида бажарилиши керак бўлган шартларни кўрайлик. Чизиқнинг $[x_0, x_2]$ ва $[x_2, x_1]$ қисмларига тегишли нуқталар учун Эйлер тенгламаси ўринлидир.

A ва B нуқталар бириктирилганлиги сабабли бу нуқталардаги δx ва δy вариациялар нолга тенг. Демак, умумий вариациянинг (VI.10) ифодасидан бу ҳолда

$$\delta I = [F - y' F_{y'}]_{x_2-0}\,\delta x_2 - [F - y' F_{y'}]_{x_2+0}\,\delta x_2 + [F_{y'}]\,\delta y_2{}_{x_2-0} - [F_{y'}]_{x_2+0}\,\delta y_2$$

қолади. Энди δx_2 ва δy_2 нинг ихтиёрийлигидан экстремаль мавжуд бўлган ҳолда синиш нуқтасида ушбу

$$\left.\begin{aligned} [F - y' F_{y'}]_{x_2-0} &= [F - y' F_{y'}]_{x_2+0} \\ [F_{y'}]_{x_2-0} &= [F_{y'}]_{x_2+0} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.31)}$$

Вейерштрасс — Эрдманн шартлари бажарилиши зарур. Бу шартлардан синиш нуқтасида $F - y' F_{y'}$ ва $F_{y'}$ ифодалар y' нинг узилишига қарамай, узлуксиз бўлиши зарурлиги кўринади

Ҳар қандай вариацион масалани ечишда масала ечими охиригача аниқланиши мумкинлигини кўриш керак. Масалан, юқорида кўрилаётган масалада $[x_0, x_2]$ ва $[x_2, x_1]$ қисмларнинг ҳар бири учун Эйлер тенгламаси алоҳида ечилади. Бу ечимлар $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ ва $y = \psi(x, C_3, C_4)$ бўлсин. Бу ердаги тўртта C_1, C_2, C_3, C_4 ноаниқлар ва синиш нуқтасининг абсциссаси x_2 ни топиш учун қуйидаги бешта шартни келтирамиз: иккита шарт экстремалнинг четки $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталардан ўтиши, яна иккита (VI.31) шарт, ниҳоят бешинчи шарт синиш нуқтасида экстремалнинг узлуксизлиги, яъни

$$\varphi(x_2, C_1, C_2) = \psi(x_2, C_1, C_2)$$

дир. Экстремалнинг синиш нуқтаси бирор тайин $y = \varphi_1(x)$ чизиқ устида ётса [масалан, нурнинг бир муҳитдан иккинчи муҳитга ўтишида синиши ёки нурнинг қайтиши (51- чизма)], у ҳолда бу нуқтада трансверсаллик шартига кўра

$$[F + (\varphi_1' - y')F_{y'}]_{x_2-0} = [F + (\varphi_1' - y')F_{y'}]_{x_2+0} \qquad \text{(VI.32)}$$

тенглик бажарилиши керак. Синиш нуқтасининг ўзи эса (VI.32) ва $y_2 = \varphi_1(x_2)$ тенгликлардан топилади.

Бу шартларни ушбу параграфнинг бошида келтирилган биринчи мисолга қўллайлик. Ундаги интегрални

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \eta_1(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx + \\ + \int_{x_2}^{x_1} \eta_2(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

кўринишда ёзамиз, у ҳолда

$$\eta_1(x_2, y_2)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi_1'-y')\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_2-0}=$$

$$=\eta_2(x_2, y_2)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi_1'-y')\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_2+0}.$$

Соддалаштириш натижасида қуйидагига эга бўламиз:

$$\eta_1(x_2, y_2)\left[\frac{1+\varphi_1' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_2-0}=\eta_2(x_2, y_2)\left[\frac{1+\varphi_1' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_2+0}. \quad \text{(VI.33)}$$

Энди қуйидаги белгилашларни қабул қилайлик: M синиш нуқтасида $y=\varphi_1(x)$ нинг бурчак коэффициенти $\varphi'_1(x_2)=\operatorname{tg}\alpha$, экстремаль биринчи бўлагининг бурчак коэффициенти $y_{x_2-0}=\operatorname{tg}\beta_1$, иккинчи бўлагининг бурчак коэффициенти эса $y'_{x_2+0}=\operatorname{tg}\beta_2$ бўлсин. Бу белгилашларга асосан сўнгги ифодадан

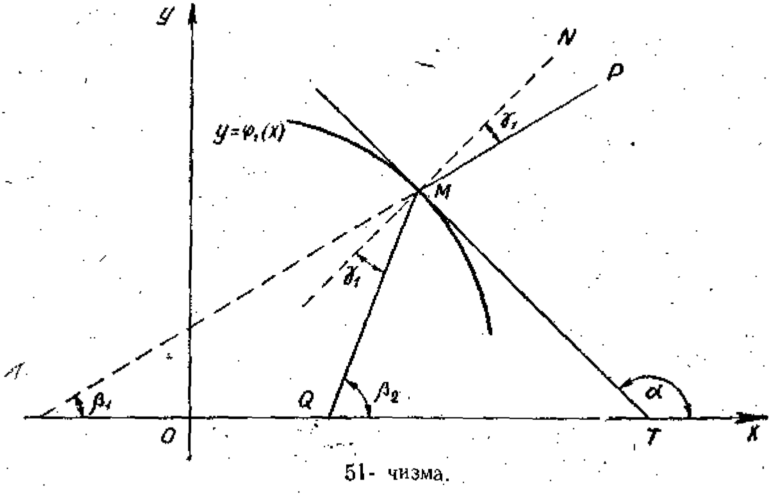
$$\frac{\eta_2(x_2, y_2)}{\eta_1(x_2, y_2)}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta_1}}\,\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta_2}}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta_2}=\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)},$$

яъни ушбу

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)}=\frac{\eta_2(x_2, y_2)}{\eta_1(x_2, y_2)}$$

Декарт қонуни ҳосил бўлади. Бу қонун бундай ифодаланади: *муҳитларни ажратувчи сирт билан нурлар ҳосил қилган бурчаклар косинуслари нисбати синдириш кўрсаткичларига тескари пропорционалдир* (51- чизма) ёки γ_1 ва γ_2 бурчакларнинг маъноларига кўра

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{\eta_2(x_2, y_2)}{\eta_1(x_2, y_2)};$$



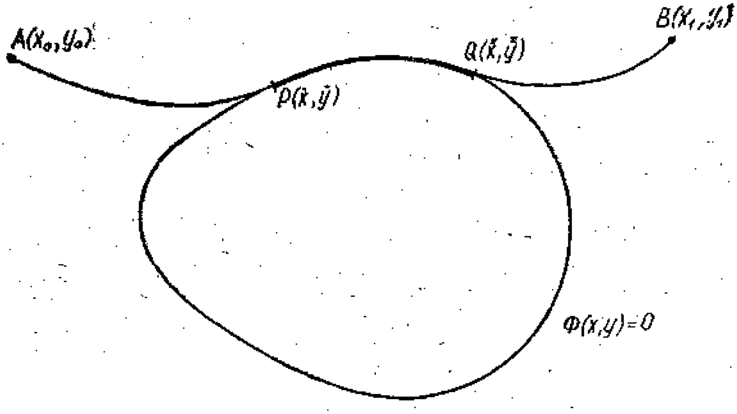
51- чизма.

51- чизмадаги белгилашларга кўра (VI.33) тенгликда $\eta_1(x, y) = \eta_2(x, y)$ деб, нурнинг тушиш бурчаги қайтиш бурчагига тенглигини кўрсатишни ўқувчининг ўзига тавсия қиламиз.

Бир томонлама вариация ҳақида.

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \qquad (V.3)$$

функционалга экстремал қиймат берувчи $y = f(x)$ чизиқ $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталардан ўтишидан ташқари, бу нуқталар орасида исталганча вариацияланар эди, яъни қўшни чизиқлар биз излаётган чизиқни ҳар томондан ўраши керак эди. Энди кўрмоқчи бўлган масаламизда AB чизиқнинг баъзи бўлаклари маълум шартлар билан чегараланган бўлади, масалан, унинг PQ бўлаги (52- чизма) тенгламаси $\Phi(x, y) = 0$ ёки $y = \varphi(x)$ бўлган эгри чизиқ ёйи билан устма-уст тушиб, эгри чизиқнинг иккинчи томонига ўта олмайди. Бу ҳолда бир томонлама вариация ҳақида сўз юритилади. Чизмадан кўринадики, AP ва QB бўлакларда икки томонлама вариация ўринли, демак, бу бўлакларда олдин кўрилган назарияни ишлатиш мумкин. PQ ёйда $P(\overline{x}, \overline{y})$ ва $Q(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$ нуқталар $y = \varphi(x)$ чизиқ бўйича ҳаракатланади, шунинг учун AP ва QB бўлакларда бир учи ҳаракатда бўлган экстремаль масаласи деб қаралса бўлади. Бизни қизиқтирган нарса, бу P ва Q нуқталарда экстремалнинг характеристикаси, яъни шу умумий нуқталарда экстремаль билан $y = \varphi(x)$ чизиқ орасида қандай боғланиш борлигидир. Буни AP бўлакдаги $P(\overline{x}, \overline{y})$ нуқтада кўрсак кифоя. Ушбу



52- чизма.

$$I_1 = \int_{AP} F(x, y, y')\,dx = \int_{x_0}^{\overline{x}} F(x, y, y')\,dx$$

функционал юқори чегараси $y = \varphi(x)$ чизиқ бўйича ҳаракатчан ҳолга тўғри келади. Шунинг учун (VI.16) га асосан:

$$\delta I = [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=\bar{x}} d\bar{x},$$

бу ерда $\varphi'(x) = \frac{\delta y}{\delta x}$, иккинчи томондан, P нуқтага $y = \varphi(x)$ чизиқ бўйлаб келганимизда

$$I_2 = \int\limits_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}} F(x, y, y')\,dx$$

интегралнинг $(\bar{x}, \bar{y})$ қуйи чегараси ҳаракатда бўлиб, бу нуқта атрофида интегралга экстремум қиймат берувчи $y = \varphi(x)$ чизиқ вариацияланмайди; шунинг учун бу интегралнинг ўзгариши — орттирмаси фақат қуйи чегара ўзгариши ҳисобига бўлиши мумкин:

$$\Delta I_2 = \int\limits_{\bar{x}+\delta\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}} F(x, y, y')\,dx - \int\limits_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}} F(x, y, y')\,dx = - \int\limits_{\bar{x}}^{\bar{x}+\delta\bar{x}} F(x, y, y')\,dx =$$

$$= - \int\limits_{\bar{x}}^{\bar{x}+\delta\bar{x}} F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\,dx,$$

чунки $(\bar{x}, \bar{x} + \delta\bar{x})$ да $y = \varphi(x)$ дир.

F функциянинг узлуксизлигини ҳисобга олиб, ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлласак:

$$\Delta I_2 = -[F(x, \varphi(x), \varphi'(x)]_{x=\bar{x}}\,\delta\bar{x} + \alpha\delta\bar{x},$$

бу ерда α билан бирликда $\delta\bar{x}$ ҳам нолга интилади. Орттирманинг бош қисми — функционалнинг вариацияси:

$$\delta I_2 = -[F(x, \varphi(x), \varphi'(x)]_{x=\bar{x}}\,\delta\bar{x}.$$

Энди P нуқтага ўнг ва чапдан яқинлашишни ҳисобга олсак:

$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 = [F(x, y, y') + (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}}\,\delta\bar{x} -$$

$$- F(x, \varphi, \varphi')\big|_{x=\bar{x}}\delta\bar{x} = [F(x, y, y') - F(x, \varphi, \varphi') +$$

$$+ (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1}\,\delta\bar{x}.$$

Экстремалда биринчи вариациянинг нолга тенглиги ва $\delta\bar{x}$ нинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, $x = \bar{x}$ да

$$F(x, y, y') - F(x, \varphi, \varphi') + (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y') = 0$$

деймиз. Биринчи иккита ҳад айирмасига ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(y' - \varphi')\,[F_{y'}(x, y, \overline{\varphi}') - F_{y'}(x, y, y')]_{x=\overline{x}} = 0,$$

бу ерда $\overline{\varphi}'$ ифода $\varphi'(x)$ ва $y'(\overline{x})$ орасидаги қиймат. Квадрат қавслар ичидаги ифодага яна ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлланамиз:

$$[(y' - \varphi')(\overline{\varphi}' - y')\,F_{y'y'}(x, y, \overline{\overline{\varphi}}')]_{x=\overline{x}} = 0,$$

$\overline{\overline{\varphi}}_1(x)$ ифода $\overline{\varphi}'(x)$ ва $y'(x)$ орасидаги қиймат.

Сўнгги тенгликда: 1) $F_{y'y'}(x, y, \overline{\overline{y}}') \neq 0$ деб оламиз (бундай олишимизнинг мумкинлиги VIII бобда кўрилади); 2) юқоридаги белгилашга кўра $\overline{\varphi}' - y' \neq 0$. Демак, тенглик фақат $y'(\overline{x}) = \varphi'(\overline{x})$ бўлгандагина бажарилиши мумкин. Бу эса $P(\overline{x}, \overline{y})$ нуқтада экстремаль эгри чизиққа уринма бўлиши керак деган сўздир.

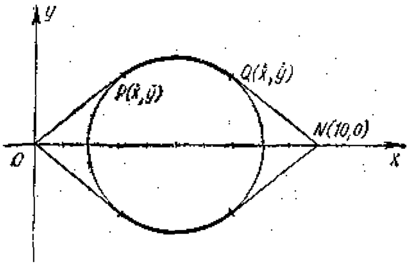
Мисол. Ушбу

$$\int\limits_0^{10} y'^3\,dx, \; y(0) = 0, \; y(10) = 0$$

функционалга экстремум қиймат берувчи чизиқни қўшни чизиқлар

$$(x - 5)^2 + y^2 = 9$$

айлана ичига ўта олмаслик шартига кўра топилсин.



53- чизма.

Ечилиши. $F = y'^3$ дан экстремаль $y = ax + b$ кўринишда бўлиши аниқланади. 53- чизмага кўра қуйидагиларни айтамиз: Экстремаль OP бўлакда (0, 0) нуқтадан ўтишига асосан унинг тенгламаси $y = ax$ бўлади, у $P(\overline{x}, \overline{y})$ нуқтада айланага уринма, шунинг учун $a = \pm\frac{3}{4}$ бўлиб, $O \leqslant x \leqslant \frac{16}{5}$ оралиқла экстремаль бўлагининг тенгламаси $y = \pm\frac{3}{4}x$ бўлади. Экстремалнинг иккинчи учи (10, 0) нуқтада бўлса, унинг тенгламаси $y = k(x - 10)$ бўлади, у $Q(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$ нуқтада айланага уринма эканлигидан уриниш нуқтасининг координаталари $\overline{\overline{x}} = \frac{34}{5}$, $\overline{\overline{y}} = \pm\frac{12}{5}$ топилиб, $\frac{34}{5} \leqslant x \leqslant 10$ оралиқда экстремаль бўлагининг тенгламаси $y = \pm\frac{3}{4}(x - 10)$ бўлади; $\frac{16}{5} \leqslant x \leqslant \frac{34}{5}$ оралиқда эса экстремаль айлана устида ётгани учун тенгламаси $y = \pm\sqrt{9-(x-5)^2}$ бўлади.

VI БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Ушбу $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$ интегралнинг бир учи $A(1, 1)$ нуқтада бўлган, иккинчи учи эса $y = x - 3$ чизиқ бўйлаб силжийдиган экстремали аниқлансин.

2. Ушбу $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$ интегралга экстремум берувчи чизиқнинг бир учи (0, 0) нуқтада, иккинчи учи эса $x = 3$ чизиқ бўйича ҳаракатланади. Шу экстремаль топилсин.

3. Ушбу $\int_{x_0}^{x_1} (y'^4 - 2y'^2)\, dx$ интегралнинг бурчакли нуқтага эга бўлган экстремаллари топилсин.

4. A $(-2,3)$ нуқтадан B $(2,3)$ нуқтагача бўлган ва $y = x^2$ параболани кесиб ўтмайдиган энг қисқа масофа топилсин.

VII боб

ШАРТЛИ ЭКСТРЕМУМ МАСАЛАЛАРИ

Биз шу вақтга қадар кўрган вариацион масалаларимизда

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

интегралга экстремум қиймат берувчи $y = f(x)$ функцияни (эгри чизиқни) чегаралайдиган шартлар фақат икки учидагина эди, яъни бу шартлар икки учи ё $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталардан ўтиши, ёки берилган икки эгри чизиқ (сирт) бўйича силжиши эди. Экстремалнинг қолган нуқталари эса умуман айтганда эрклидир. Энди кўрмоқчи бўлган масалаларимизда экстремалнинг барча нуқталарига шарт қўйилади, яъни экстремаль интегралга экстремум қиймат беришидан ташқари маълум (берилган) шартга бўйсуниши керак. Бу шартлар ҳар хил бўлиши мумкин масалан, экстремални бирор сирт устида ётган эгри чизиқлар ичидан излашимиз мумкин ёки узунликлари бир хил бўлган чизиқлар ичидан излашимиз мумкин ва ҳ. к. Экстремалга қўйилган шартлар қандай бўлмасин, вариацион масала шартли экстремум масаласи дейилади. Мана шу шартли экстремум масалаларидан боғламли масалаларни ва изопериметрик масалаларни кўрамиз.

35- §. Боғламли масалалар

Ушбу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx \qquad (V.19)$$

интегралга экстремум қиймат берувчи $y(x)$ ва $z(x)$ функцияларни топиш масаласини кўриб, зарурий шартларни ҳам ўз вақтида чиқарган эдик. Энди (V.19) интегралга экстремум қиймат берувчи функциялар ушбу

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$
$$z(x_0) = z_0, \quad z(x_1) = z_1. \qquad (VII.1)$$

чегаравий шартларга бўйсунишидан ташқари қуйидаги

$$G(x, y, z) = 0 \tag{VII.2}$$

тенгламани ҳам қаноатлантириши талаб қилинади.

Геометрик нуқтаи назардан бу масалани қуйидагича тушуниш керак: (VII.2) тенглама билан тайин сирт берилган, экстремаль тенгламани қаноатлантириши у шу сирт устида тўла ётади деган сўздир; (VI.1) чегаравий шартларга бўйсуниши эса $A(x_0, y_0, z_0)$ ва $B(x_1, y_1, z_1)$ нуқталар (VII.2) сирт устида бўлиб, экстремаль шу нуқталардан ўтишидир.

Шундай қилиб, $G(x, y, z) = 0$ *сирт устида тўла ётиб, сиртнинг* $A(x_0, y_0, z_0)$ ва $B(x_1, y_1, z_1)$ *нуқталаридан ўтувчи чизиқлар ичидан (V.19) интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқни топиш талаб қилинади.* Бундаги $G(x, y, z) = 0$ сирт экстремалнинг эркини чегараловчи бўлгани учун *боғлам* дейилади, тенгламанинг ўзи эса *боғлам тенгламаси* дейилади. Изланаётган чизиқ бўйлаб $G_z \neq 0$ деб фараз қиламиз. Бу деган сўз (VII.2) тенгламани z га нисбатан ечиш мумкин, яъни

$$z = \varphi(x, y). \tag{VII.3}$$

Буни (V.19) га қўйсак,

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \varphi(x, y), \varphi_x + \varphi_y y')\, dx \tag{VII.4}$$

кўринишдаги интегралга келамиз. (VII.4) интеграл белгиси остидаги функция x, y, y' нинг функцияси бўлиб, бу интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқ икки учи $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ бириктирилган текис чизиқ бўлади. Бу чизиқ изланаётган фазовий чизиқнинг текисликдаги проекциясидир. Демак, (VII.4) функционалга экстремум қиймат берувчи чизиқни унга мос Эйлер тенгламасининг ечимлари ичидан излашимиз лозим. Қулайлик учун интеграл остидаги функцияни F^* орқали белгилайлик, бу ҳолда Эйлер тенгламаси

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right) = 0 \tag{VII.5}$$

кўринишни олади. Бу тенгламадаги ҳосилаларни F функцияга нисбатан, (VII.3) ни кўзда тутиб, ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} = F_y + F_z\, \varphi_y + F_{z'}\, (\varphi_{xy} + \varphi_{yy}\, y'),$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y'} = F_{y'} + F_{z'}\, \varphi_y,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}F_y{}' + \varphi_y \frac{d}{dx} F_{z'} + F_{z'}\, (\varphi_{xy} + \varphi_{yy}\, y').$$

Буларни (VII.5) га қўйсак:

$$F_y + \varphi_y\left(F_z - \frac{d}{dz} F_{z'}\right) - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \tag{VII.6}$$

Иккинчи томондан, (VII.2) тенгламани y га нисбатан дифференциаллаcак,

$$G_y + G_z \varphi_y = 0 \qquad \text{(VII.7)}$$

бўлади. (VII.6) ва (VII.7) тенгламалардан φ_y ни йўқотиб, ушбу

$$\left(\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y\right):C_y = \left(\frac{d}{dx}F_{z'} - F_z\right):G_z \qquad \text{(VII.8)}$$

нисбатлар тенглигига келамиз. (VII.8)` ни $\Lambda(x)$ деб белгилайлик, у ҳолда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(F_{y'}) - [F_y + \Lambda(x)G_y] = 0, \\ &\frac{d}{dx}(F_{z'}) - [F_z + \Lambda(x)G_z] = 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{(VII.9)}$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Бу тенгликларнинг бажарилиши (VII.4) интегралнинг экстремал қийматга эга бўлишининг зарурий шартидир.

Агар

$$F + \Lambda(x)G = \overline{F} \qquad \text{(VI.10)}$$

белгилашни қабул қилсак, $G(x, y, z)$ функция y' ва z' ларга боғлиқ бўлмагани сабабли (VII.9) ларни қуйидаги иккита тенглама билан алмаштирсак бўлади:

$$\begin{cases} \overline{F}_y - \dfrac{d}{dx}\overline{F}_{y'} = 0, \\ \overline{F}_z - \dfrac{d}{dx}\overline{F}_{z'} = 0. \end{cases} \qquad \text{(VII.11)}$$

(V.20) тенгламаларни ўзлаштирган ўқувчи учун бу тенгламаларни ҳам тушуниш қийин бўлмайди. Демак, бизнинг масаламизнинг ечими интеграл белгиси остидаги функция (VII.10) кўринишда бўлган функционалларнинг шартсиз экстремуми бўлар экан. Чегаравий шартлар, яъни $A(x_0, y_0, z_0)$ ва $B(x_1, y_1\ z_1)$ нуқталардан экстремалнинг ўтиши зарурлиги бу ерда ҳам албатта ўринлидир. Лекин бу шарт барча вариацион масалаларда иштирок этиб келгани учун бу ерда шартсиз экстремум дейилганда бу масалани бошқа вариацион масалалардан фарқловчи (VII.2) каби шартнинг (VII.10) функционал учун иштирок этмаслиги кўзда тутилади. Ўқувчи бу шарт умуман иштирок этмас экан деган фикрга келмасин; қуйида бу нарса янада ойдинлашади.

(VII.11) нинг ечимида иккита интеграллаш ўзгармаси C_1, C_2 ва битта ноаниқ $\Lambda(x)$ функция иштирок этади; буларни аниқлаш учун учта шартга эгамиз, булар иккита чегаравий шарт ва боғлам тенгламаси. Амалда қуйидагича иш юритсак бўлади: боғлам тенгламасидан ва (V.11) тенгламаларнинг бирида z ни топиб, иккинчисига қўйсак, y га нисбатан битта иккинчи тартибли тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама ечимидаги интеграллаш ўзгармаслари C_1 ва C_2 ни $y_0 = y_0(x)$ ва $y_1 = y_1(x)$ шартлардан аниқлаймиз.

Юқорида қилинган мулоҳазаларни умумийроқ масалаларга ҳам кўчириш мумкин. Чунончи

$$G_s(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (s = \overline{1,p}) \qquad \text{(VII.12)}$$

боғламлар мавжудлигида

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots y_n')\,dx \qquad \text{(VII.13)}$$

функционалга экстремум қиймат берувчи $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функцияларни топиш талаб қилинади; чегаравий шартларнинг қўйилиши қуйидагича:

$$y_i(x_0) = y_i^{(0)}; \quad y_i(x_1) = y_i^{(1)} \quad (i = \overline{1,n}). \qquad \text{(VII.14)}$$

Боғламлар сони нечта бўлса, шунча $\Lambda_s(x)$ ноаниқ функцияларни қабул қилиб,

$$\bar{F} = F + \sum_{s=1}^{p} \Lambda_s(x) G_s \qquad \text{(VII.15)}$$

функция тузамиз. Бу функцияга нисбатан ёзилган ушбу

$$\bar{F}_{y_i} - \frac{d}{dx}(\bar{F}_{y'_i}) = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \qquad \text{(VII.16)}$$

n та тенглама системаси масалани ечиш учун зарурий шартлар бўлади. $\frac{\partial G_s}{\partial y_i}$ хусусий ҳосилалардаги $y_i(x)$ лар ўрнига (VII.13) интегралга экстремум қиймат берувчи функцияларни қўйиш натижасида ҳосил бўлган қийматлардан (хусусий ҳосилалардан) p-тартибли функционал детерминантлар тузиш мумкин. Уларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиши қўйилган масалани ечишда катта аҳамиятга эга. (VII.12) боғламларда ноаниқ функцияларнинг ҳосилалари иштирок этмайди, бундай боғламлар *голоном боғламлар* дейилади.

$$G_s(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \quad s = \overline{1, p} \qquad \text{(VII.17)}$$

кўринишдаги боғламлар эса *ноголоном боғламлар* дейилади. Бу ноголоном боғламлар иштирок этган ушбу

$$\bar{F} = F + \sum_{s=1}^{p} \Lambda_s(x) G_s(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') \qquad \text{(VII.18)}$$

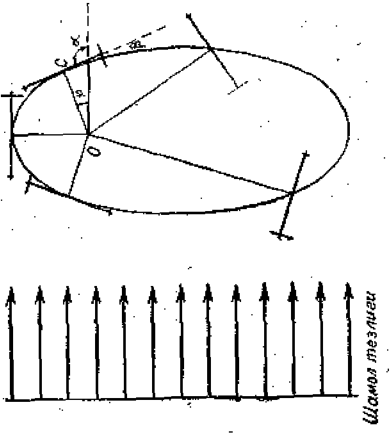
функция (VII. 15) функцияга нисбатан мураккаброқдир. Бу функцияларга нисбатан ёзилган.

$$\bar{F}_{y_i} - \frac{d}{dx}(\bar{F}_{y'_i}) = 0 \qquad \text{(VII.19)}$$

Эйлер тенгламалари системаси $\Lambda_s(x)$ функцияларнинг ҳосилалари иштирок этиши билан анча мураккаблашади. (VII.17) ва (VII.19) лар $(n + p)$ та y_i ва $\Lambda_s(x)$ номаълумли $(n + p)$ та тенглама системасини ташкил қилади. Сўнгги тенгламаларни сал соддалаштириш мумкин, бунинг учун

$$y_i'(x) = z_i(x) \qquad \text{(VII.20)}$$

белгилашларни қабул қиламиз, у ҳолда (VII.17) тенгламалар $y_i(x)$, $z_i(x)$ функциялар учун p та голоном боғлам бўлади. (VII.19) ва (VII.20) тенгламалар системаси эса $(2n+p)$ та $y_i(x)$, $z_i(x)$ ва $\Lambda_s(x)$ номаълумларга нисбатан $2n$ та тенглама системасига келади. Номаълумлар сони билан системадаги тенгламалар сонини тенглаш учун (VII.17) дан ихтиёрий p та номаълумни аниқлаб [(VII.17) да p та тенглама бор], (VII.19) ва (VII.20) га қўйсак, $2n$ номаълумли $2n$ та тенглама системасига эга бўламиз. Ҳосил бўлган системанинг ечими $2n$ та ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олади; буларни аниқлаш учун $2n$ та чегаравий шарт берилган. Шу билан масала охиригача ҳал қилинди.



54-чизма.

Шартли экстремумга доир мисол. $\vec{v}_0$ тезликка эга бўлган самолёт берилган T вақтда энг катта майдонни айланиб чиқиши учун қандай траектория бўйлаб учиши керак? Шамол йўналиши ва тезлиги ўзгармас ҳисобланади. Белгилашлар: Ox ўқ шамол тезлиги йўналишида олинади; $\vec{a}$ — шамол тезлиги; α — самолёт ўқи ва Ox ўқ орасидаги бурчак, $x(t)$, $y(t)$ функциялар — самолётнинг t вақтдаги координаталари, $\vec{v}$ — самолётнинг учиш тезлиги, у самолёт тезлиги ва шамол тезлиги йиғиндисига тенг;

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}. \qquad \text{(I)}$$

$\vec{v}$ тезликнинг $\frac{dx}{dt}$ ва $\frac{dy}{dt}$ компоненталари юқоридаги белгилашларга асосан:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha + a, \\ \dot{y} = v_0 \sin\alpha \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} \dot{x} - v_0 \cos\alpha - a = 0, \\ \dot{y} - v_0 \sin\alpha = 0. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Самолётнинг ёпиқ траекторияси билан чегараланган юз

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt \qquad \text{(III)}$$

бўлади.

Демак, (II) иккита шартга бўйсунувчи ва (III) интегралга максимум қиймат берувчи $x(t)$, $y(t)$ ва $\alpha(t)$ функцияларни топиш талаб қилинади.

Шартли экстремум масаласи назариясига кўра ушбу

$$\int_0^T [x\dot{y} - y\dot{x} + \Lambda_1(t)(\dot{x} - v_0\cos\alpha - a) + \Lambda_2(t)(\dot{y} - v_0\sin\alpha)]\,dt \quad \text{(IV)}$$

интегралга шартсиз экстремум қиймат берувчи $x(t)$, $y(t)$ ва $\alpha(t)$ функцияларни топиш талаб қилинади. (IV) функционал учун Эйлер тенгламалари қуйидаги кўринишни олади:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0, \quad \dot{y} - \frac{d}{dt}(-y + \Lambda_1) = 0, \quad \text{(V)}$$

$$F_y - \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} = 0, \quad -\dot{x} - \frac{d}{dt}(x + \Lambda_2) = 0, \quad \text{(VI)}$$

$$F_\alpha = 0, \quad \Lambda_1\sin\alpha - \Lambda_2\cos\alpha = 0, \quad \text{(VII)}$$

(V) ва (VI) дан:

$$2x + C_2 = -\Lambda_2, \quad 2y + C_1 = \Lambda_1.$$

Координаталар бошини параллел суриш натижасида бу тенгламалардан C_1 ва C_2 ни йўқотиш мумкин. Шу билан

$$2x = -\Lambda_2, \quad 2y = \Lambda_1$$

ёки

$$x = -\frac{\Lambda_2}{2}, \quad y = \frac{\Lambda_1}{2}. \quad \text{(VIII)}$$

Энди Λ_1 ва Λ_2 ни аниқлаш керак, уларни топиш учун масала шартида ҳеч қандай қўшимча шартлар йўқ. Шунинг учун ўзимиз қуйидагича мулоҳаза юритиб, (VIII) дан Λ_1 ва Λ_2 ни йўқотиб, траектория тенгламасини чиқарайлик; аввало қутб координаталар системасига ўтамиз: (ρ, φ) самолёт вазиятининг қутб координаталари бўлса, у ҳолда $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$. (VIII) ва (VII) муносабатлардан ушбу

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$$

формулалар келиб чиқади. Булардан самолёт ўқи йўналиши радиус-вектор йўналишига тик эканлиги аниқланади (54- чизма). Шунинг учун

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

у ҳолда боғламлар тенгламаси (II) қуйидаги кўринишни олади:

$$\dot{x} = -v_0\sin\varphi + a, \quad \dot{y} = v_0\cos\varphi.$$

Умуман айтганда, $x(t)$, $y(t)$ бу тенгламаларни қаноатлантирган учун траектория тенгламаси ҳам шу бўлиши керак. Бу ҳолда траектория қандай чизиқ эканлигини айтишимиз қийин, шунинг учун бу тенгламани классик тенгламалардан бирининг кўринишига келтирайлик. Тенгламаларнинг иккала томонини мос равишда $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ га кўпайтириб, сўнгра қўшамиз:

$$xx + y\dot{y} = a\rho\cos\varphi = a\rho\sin\alpha,$$

ёки

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = a\rho\sin\alpha,$$

ёки

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\rho^2) = \rho\frac{d\rho}{dt} = a\rho\sin\alpha,$$

бундан

$$\frac{d\rho}{dt} = a\sin\alpha.$$

(II) нинг иккинчи тенгламасидан

$$\sin\alpha = \frac{1}{v_0}\frac{dy}{dt}$$

ни юқоридаги тенгламага қўйсак, $\frac{d\rho}{dt} = \frac{a}{v_0}\frac{dy}{dt}$, *бундан* $\rho = \frac{a}{v_0}y + C$. Бу тенгламада $y = \rho\sin\varphi$ деб, тенгламани

$$\rho = \frac{C}{1 - \frac{a}{v_0}\sin\varphi} \qquad \text{(IX)}$$

кўринишга келтирамиз. Энди (IX) тенгламани чап фокусига қаратилган *қутб координаталардаги*

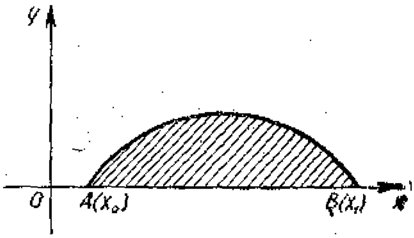
$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

иккинчи тартибли эгри чизиқлар тенгламаси билан таққослаб кўрсак, унинг биринчидан, қутб ўқи $-\frac{\pi}{2}$ бурчакка бурилганлигини (яъни пастга қараганлигини), иккинчидан, эксцентриситети $e = \frac{a}{v_0} < 1$ эканлигини кўрамиз. Демак, (IX) ўқи пастга йўналган эллипс тенгламаси экан. Шу билан самолёт траекторияси эллипс бўлиши лозимлигини аниқладик.

36- §. Изопериметрик масала — шартли экстремумнинг иккинчи тури

Яков Бернулли масаласи

Ўзгармас периметрли (изопериметрик) чизиқлар билан ўралган сатҳлар ичидан энг катта юзга эга бўлганини топиш масаласини қўямиз. Бундай масалалардан энг соддаси берилган l узунликдаги чииқ ва горизонтал ўқ (абсцисса-лар ўқи) билан чегараланган энг катта юзни топиш масаласидир (55- чизма). Бу масалани интеграллар тилига кўчирилганда



55- чизма.

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l$$

тенгликни қаноатлантирувчи ва

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y dx$$

интегралга энг катта қиймат берувчи $y = y(x)$ чизиқни топиш талаб қилинади. Чегаравий шартлар: $y(x_0) = 0, \quad y(x_1) = 0$.

Бундай масалаларни аввал умумий ҳолда ечиб, сўнгра бу мисолга қайтиб келамиз. Умумий ҳолда масала қуйидагича қўйилади: ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = a \qquad \text{(VII.21)}$$

тенгламани қаноатлантирувчи $y = y(x)$ *чизиқлар ичидан ушбу*

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \qquad \text{(V.3)}$$

интегралга экстремал қиймат берувчи чизиқ топилсин. Изланаётган эгри чизиқ (VII.21) изопериметрик шартдан ташқари одатдаги $y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1)$ чегаравий шартларга ҳам бўйсуниши лозим. Бу масала қуйидаги теорема орқали ҳал қилинади.

Эйлер теоремаси. *Интеграл кўринишдаги* (VII.21) *шартни қаноатлантирувчи, лекин бу интеграл учун экстремал бўлмаган ва* $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = (x_1)$ *шартларга бўйсунувчи* $y = y(x)$ *чизиқ (V.3) интегралга экстремум қиймат берса, у ҳолда шундай ўзгармас* Λ *мавжудки*, $y = y(x)$ чизиқ ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1} H(x, y, y') dx \qquad \text{(VII.22)}$$

интегралга экстремум қиймат беради, бунда

$$H(x,y,y') = F(x, y, y') + \Lambda G(x, y, y').$$

Демак, *шартли экстремум масаласи* (VII.22) *кўринишдаги интеграл учун оддий (шартсиз) вариацион масалага келтирилар экан.*

Аввало изопериметрик масалани 1- масалага келтиришга ҳаракат қилайлик; бунинг учун

15—893

Демак, изопериметрик чизиқ айлана ёйи экан. Бунда C_1, C_2, Λ чизиқнинг $A(x_1, 0)$ ва $B(x_2, 0)$ нуқталардан ўтишидан ва изопериметрик шартдан аниқланади.

2) ушбу

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\,dx = 2$$

тенгликни қаноатлантирувчи $y = y(x)$, $z = z(x)$ функциялар ичидан

$$I(y, z) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\,dx$$

интегралга минимум қиймат берувчи ва

$$y(0) = 0,\ z(0) = 0,$$
$$y(1) = 1,\ z(1) = 1$$

шартларни қаноатлантирувчи функциялар топилсин. Бунда боғлам икки номаълумли функция. Ноаниқ кўпайтувчилар методига кўра ушбу

$$H = y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \Lambda(y'^2 - xy' - z'^2)$$

функцияни тузиб,

$$\int_0^1 H(x, y, y', z, z')\,dx$$

интеграл учун шартсиз экстремум масаласини ечамиз. Бу ҳол учун Эйлер тенгламалари системаси

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\right) = 0 \qquad 2y' + \Lambda(2y' - x) = C_1,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial z'}\right) = 0 \qquad -4 - \frac{d}{dx}(2z' - 4x - 2\Lambda z') = 0$$

бўлади. Бу система тенгламалари ўзаро боғлиқ эмас, шунинг учун уларнинг ҳар бирини алоҳида ечсак бўлади. Системанинг умумий ечими

$$y = \frac{\Lambda}{2(1+\Lambda)}\,\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$
$$z = C_3 x + C_4$$

кўринишда бўлиб, бундаги интеграллаш ўзгармаслари C_1, C_2, C_3, C_4 ни $y(0) = 0$, $z(0) = 0$; $y(1) = 1$, $z(1) = 1$ шартлардан аниқлаймиз. Шундай қилиб, ечим қуйидагича бўлади:

$$y = \frac{\Lambda}{4(1+\Lambda)}x^2 + \frac{4+3\Lambda}{4(1+\Lambda)}x,$$
$$z = x.$$

Энди бундаги Λ ни топиш учун изопериметрик шартга топилган ечимни қўямиз:

$$\int_0^1 \left\{\left[\frac{\Lambda}{4(1+\Lambda)}2x+\frac{4+3\Lambda}{4(1+\Lambda)}\right]-x\left[\frac{\Lambda}{4(1+\Lambda)}2x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4+3\Lambda}{4(1+\Lambda)}\right]-1\right\}dx=2.$$

Интеграл остидаги ифодани соддалаштириб, интегрални ҳисобласак, Λ га нисбатан

$$121\,\Lambda^2+242\,\Lambda+120=0$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламани ечиш натижасида $\Lambda_1=-\frac{10}{11}$ ва $\Lambda_2=-\frac{12}{11}$ ни топамиз. Буларни ечимга қўйсак, ушбу иккита

$$\text{(I)}\ \begin{cases} y=-\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{2}x \\ z=x \end{cases} \text{ ва (II) } \begin{cases} y=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x \\ z=x \end{cases}$$

ечимга эга бўламиз. Энди булардан масала шартида берилган

$$I=\int_0^1 (y'^2+z'^2-4xz'-4z)\,dx$$

интегралга қайси бири кичик қиймат берса, ўшаниси жавоб бўлади. Уларни интегралга қўйиб ҳисобласак:

$$\text{(I) да } I=\frac{1}{2},\ \text{(II) да } I=\frac{7}{4}.$$

Шундай қилиб, (I) функциялар ечим экан.

VII БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. $A(0,0)$ нуқтадан $B\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$ нуқтага ўтказилган чизиқлар ичидан

$$\int_0^1 (y-y'^2)\,dx=\frac{1}{12}$$

шартни қаноатлантириб, $\int_0^1 y'^2dx$ интегралга экстремум қиймат берувчи чизиқ топилсин.

2. Ушбу $I=\int_{x_0}^{x_1} y'^2dx$ интегралнинг $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$ чегаравий шартларга ва $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx=a$ (a — ўзгармас) изопериметрик шартга бўйсунувчи экстремали топилсин.

3. Ox ўқда ётган P_1 ва P_2 нуқталарни туташтирувчи *чизиқлар ичидан* энг қисқа ва Ox ўқ билан берилган катталикдаги юз ҳосил қиладиган чизиқ аниқлансин.

Кўрсатма. $S = \int\limits_{x_0}^{x_1} y dx$ изопериметрик шартга кўра ушбу $l = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$ интегралга минимал қиймат берувчи чизиқ топилсин.

4. Бир учи $B(x_1, y_1)$ нуқтада, иккинчи учи эса Oy ўқда ётган l узунликдаги бир жинсли оғир ипнинг шакли аниқлансин.

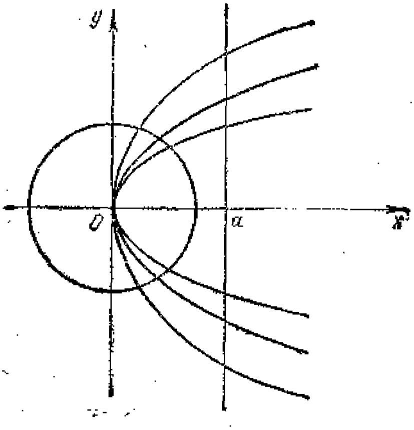
Кўрсатма. Чизиқнинг оғирлик маркази энг паст вазиятда бўлиши, бунинг учун $\int\limits_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2}\, dx$ интеграл минимал қийматга эга бўлиши *лозим*. Бу ерда изопериметрик шарти: $l = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$, l — тайин сон.

VIII боб

МАЙДОНЛАР НАЗАРИЯСИ. ЕТАРЛИ ШАРТЛАР

37- §. Экстремаллар майдони

Агар xOy текисликда бирор D соҳа берилган бўлиб, шу соҳанинг ҳар бир нуқтасидан бир параметрли $y = y(x, C)$ эгри чизиқлар оиласининг фақат битта чизиғи ўтса, у ҳолда бундай эгри чизиқлар оиласи D соҳада *майдон ҳосил қилади* дейилади. Оилага тегишли ҳар бир чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги уринманинг бурчак коэффициенти *майдоннинг оғмалиги* дейилади; биз уни $q(x, y)$ орқали белгилайлик. Масалан, бир параметрли $y^2 = 2px$ параболалар оиласининг оғмалиги ($y > 0$) бўлганда $q(x, y) = y' = \sqrt{\frac{p}{2x}}$. Параболаларнинг $0 \leqslant x \leqslant a$ $(a > 0)$ полосада ушбу $y = \sqrt{2px}$ функция билан берилган ёйлари майдон ҳосил қилади (56- чизма). Аммо $x^2 + y^2 = a^2$ айлана ичида $y^2 = 2px$ параболалар оиласи майдон ҳосил қилмайди (чунки O нуқтадан чексиз кўп чизиқлар ўтади). Агар оила чизиқлари битта нуқтадан ўтиб, бошқа умумий нуқтага эга бўлмаса, бундай майдон *марказий майдон* дейилади. Равшанки, бу нуқта соҳанинг ички нуқтаси бўлмаслиги керак, акс ҳолда майдон ҳосил бўлмайди. Бу нуқтани *тўплам (оила) маркази* десак, марказ соҳа чегарасида бўлиши керак. Масалан, 56- чизмада параболалар оиласи $0 \leqslant x \leqslant a$ соҳада марказий майдон ҳосил қилган. Бизни қизиқтирадиган майдонлар ҳар қандай эгри чизиқлар майдони бўлмасдан, балки экстремаллар майдонидир.



56- чизма.

Умуман, Эйлер тенгламасининг ечими бўлган экстремаллар тўплами иккита параметрга боғлиқ. Биз шу тўпламлардан битта параметрга боғлиқ бўлганларини ажратиб оламиз. Масалан, тенгламалари

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ бўлган эгри чизиқлар (айланалар) тўплами текисликда уч параметрли чизиқлар тўпламига мисол бўла олади. Агар бир хил радиусли айланаларнигина кўрсак, у ҳолда тўпламдан икки параметрли чизиқларни ажратиб олган бўламиз; энди бир хил радиусли, лекин барчасининг маркази абсциссалар ўқи устида ётган айланаларни кўрсак, у ҳолда бутун айланалар ичидан бир параметрли айланаларни ажратиб олган бўламиз ва ҳ. к.

Шундай қилиб, биз бир параметрли экстремаллар тўпламини қараймиз. Тенгламаси $y=\varphi(x, \alpha)$ бўлган экстремаллар тўплами майдон ҳосил қилсин. Бу майдон *экстремаллар майдони* дейилади. Барча экстремаллар $A(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтгани учун кўрилаётган экстремаллар майдони марказий майдондир. Параметр сифатида экстремалларнинг (x_0, y_0) нуқтадаги бурчак коэффициентлари τ ни қабул қилайлик. Шундай қилиб,

$$y=\varphi(x, \tau) \qquad \text{(VIII.1)}$$

экстремаллар тўплами қаралади. Бундай экстремаллар тўплами *Лагранж йўллари оиласи* дейилади. Майдоннинг ихтиёрий (x,y) нуқтасидаги оғмаликни $u(x, y)$ билан белгилайлик, яъни

$$u(x, y)=y'=\varphi_x(x, \tau). \qquad \text{(VIII.2)}$$

Агар майдон берилган бўлса, у ҳолда $u(x, y)$ функция аниқланган бўлади. Агар $u(x, y)$ функция майдон оғмалиги бўлса, у ҳолда майдоннинг ўзини топиш мумкин. Ҳақиқатан, экстремаллар оиласи

$$y'=u(x, y) \qquad \text{(VIII.2')}$$

тенгламани қаноатлантириши керак, бундан уларнинг тенгламалари аниқланади. Лекин $u(x, y)$ функция ихтиёрий бўла олмайди, у (VIII.2) тенгламани қаноатлантиришидан ташқари Эйлер тенгламасининг ҳам ечими бўлиши лозим. Эйлер тенгламаси ёйиб ёзилган ҳолда бундай эди:

$$F_{y'y'}y''+F_{yy'}y'+F_{y'x}-F_y=0. \qquad \text{(V.10)}$$

(VIII.2) дан y'' ни аниқлаймиз:

$$y''=\frac{d}{dx}(u(x, y))=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}u.$$

Бу ифода билан (VII.2) ифодани (V.10) га қўйсак, қуйидаги айниятга келамиз:

$$F'_y(x, y, u)-F_{yy'}(x, y, u)u-F_{xy'}(x, y, u)-F_{y'y'}(x, y, u)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+ \\ +\frac{\partial u}{\partial y}u\Big)=0 \qquad \text{(VIII.3)}$$

Демак, $u(x, y)$ функция (VIII.3) тенгламанинг ечими кўринишида берилиши керак экан. (VIII.3) ни ечиб, $u(x, y)$ ни топгандан сўнг (VIII.2) ни ечсак, экстремаллар майдони топилади.

38- § Трансверсаллар майдони

Бурчак коэффициенти y' бўлган экстремаль билан δx ва δy дифференциалли эгри чизиқ кесишганда ушбу

$$[F(x,\ y,\ y') - y' F_{y'}(x,\ y,\ y')]\,\delta x + F_{y'}(x,\ y,\ y')\,\delta y = 0 \qquad \text{(VI.16)}$$

трансверсаллик шарти бажарилса, берилган эгри чизиқ трансверсаль дейилган эди, яъни (VI.16) тенглик орқали экстремаль ва трансверсалнинг кесишиш нуқталарида уларнинг бурчак коэффициентлари орасидаги боғланиш аниқланган эди.

D майдон берилган бўлиб, бу майдонда

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx$$

интегралга минимум қиймат берувчи $y = y(x)$ эгри чизиқ $y = \varphi(x,\ \tau)$ экстремаллар оиласи ичида бўлсин. Мана шу экстремаллар оиласининг ҳар бир чизиғини трансверсал кесувчи чизиқ *майдон трансверсали* дейилади. Берилган майдон трансверсаллари оиласини топиш талаб қилинади. Берилган майдон оғмалиги $u(x,\ y)$, трансверсаль ўзгарувчиларининг дифференциаллари δx, δy бўлсин, у ҳолда (VI.16) да y' ни u га алмаштирсак, ушбу

$$[F(x,\ y,\ u) - uF_u(x,\ y,\ u)]\,\delta x + F_u(x,\ y,\ u)\,\delta y = 0 \qquad \text{(VIII.4)}$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг чап томони тўла дифференциалдир; буни исботлаш учун (VIII.4) да

$$\frac{\partial}{\partial x} F_u = \frac{\partial}{\partial y}[F - uF_u]$$

тенглик бажарилишини кўрсатсак кифоя. Чап ва ўнг томондаги ҳосилаларни (аргументлар x, y, u эканлигини кўзда тутсак) ёйиб ёзсак, (VIII.3) га кўра

$$F_{xy'} + F_{y'y'}\ \frac{\partial u}{\partial x} - \left[\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial u}{\partial y} - F_{y'y}\,u - F_{y'y'}\ \frac{\partial u}{\partial y}u - \frac{\partial u}{\partial y}F_{y'}\ \right] = 0$$

бўлади. Шундай қилиб, (VIII.4) тенглама ушбу

$$d\theta(x,\ y) = 0$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Бундан

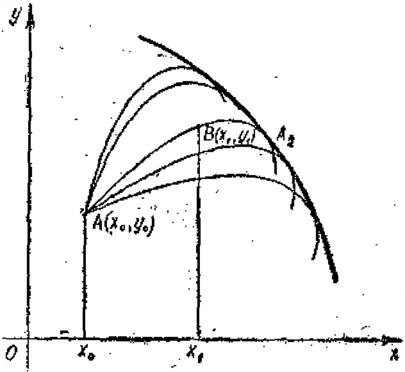
$$\theta(x,\ y) = C \qquad \text{(VIII.5)}$$

тенгламанинг ечими бўлади ёки трансверсаллар оиласини ифодалайди.

Энди $\theta(x,\ y)$ функцияни аниқлаймиз. $\theta(x,\ y)$ функция

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x} &= F(x,\ y,\ u) - uF_{y'}(x,\ y,\ u), \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= F_{y'}(x,\ y,\ u) \end{aligned}\right. \qquad \text{(VIII.6)}$$

лади дейлик. Қуйидаги ҳолатни эслатиб ўтайлик: бир параметрл чизиқлар оиласи $F(x, y, C)=0$ ни биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими деб қарашимиз мумкин. Агар мавжудлик ва ягоналик теоремасининг Липшиц шарти бузилган бўлса, у ҳолда махсуслик ўринли бўлиб, $\frac{\partial F}{\partial C}=0$ зарурий шарт ёзилади. $F(x, y, C)= 0$ ва $\frac{\partial F}{\partial C}=0$ шартлар бўйича топилган чизиқ *дискриминант чизиқ* дейилади. Дискриминант чизиқ билан оила чизиқлари умумий уринмага эга бўлса, у ҳолда дискриминант чизиқ *ўрама* дейилади. Агар *чизиқлар оиласи марказга эга бўлса, бу нуқтадан оиланинг чексиз кўп чизиқлари ўтгани учун марказ дискриминант чизиқда* ётади. Бизнинг масаламизда $A(x_0, y_0)$ нуқта дискриминант чизиқда ётади ва экстремаллар оиласи $y=y(x, \tau)$ бир параметрли чизиқлар оиласи бўлгани учун $\frac{\partial y}{\partial \tau}=0$ шарт бажарилиши дискриминант чизиқ мавжуд бўлишининг зарурий шарти бўлади.



59- чизма.

Демак, дискриминант чизиқ ва хусусан, ўрама

$$y=y(x, \tau), \quad \frac{\partial y}{\partial \tau}=0 \qquad \text{(VIII.8)}$$

тенгламалар билан ифодаланади. Экстремаллар оиласи ўрамага эга бўлса, унинг устида ётган экстремалнинг A_1 нуқтаси $A(x_0, y_0)$ га *қўшма нуқта* дейилади. Ўрамага яқин нуқталарда оила чизиқлари кесишади, демак, бу нуқталар майдонда ётмаслиги керак, яъни экстремалнинг иккинчи $B(x_1, y_1)$ учи мана шу нуқталардан олдин келиши лозим (59- чизма). Бу айтилганларни аналитик тасвирлайлик. Алоҳида олинган ҳар бир чизиқ бўйлаб $\frac{\partial y(x, \tau)}{\partial \tau}$ фақат x нинг функцияси, буни $\frac{\partial y(x, \tau)}{\partial \tau}=v(x)$ деб белгиласак, $v'(x)=\frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial \tau\, \partial x}$ бўлади. $y=y(x, \tau)$ лар Эйлер тенгламасининг ечимлари бўлгани учун

$$F_y(x, y(x, \tau), y'_x(x,\tau)) - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y(x,\tau), y'_x(x, \tau)) \equiv 0$$

айният бажарилади. Бундан τ бўйича ҳосила олиб, v га нисбатан қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)v - \frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}v'\right)=0. \qquad \text{(VIII.9)}$$

Бу тенглама *Якоби тенгламаси* дейилади. (VIII.9) тенгламанинг ечими учун экстремалларнинг маркази бўлган $A(x_0, y_0)$ нуқтада $v=$

0 шарт *бажарилади. Агар* $v = 0$ шарт A нуқтадан бошқа нуқтада ҳам бажарилса, у ҳолда $y = y(x, \tau)$ оила майдон ҳосил қилмайди, яъни Якоби шарти бажарилмайди. Агар $v = 0$ шарт (x_0, x_1) кесмада фақат *оила маркази* $A(x_0\ y_0)$ нуқтадагина бажарилса, у ҳолда A нуқта қўшма нуқтага эга бўлмай, $y = y(x, \tau)$ экстремаллар оиласи майдон ҳосил қилади ва экстремалнинг AB ёйи шу майдонда ётади, яъни Якоби шарти бажарилади.

Мисол. Ушбу $I = \int\limits_{-1}^{2} y'(1 + x^2y')\,dx, \quad y(-1) = 1, \ y(2) = 4$

интеграл учун Якоби шарти текширилсин.

Ечилиши. $F = y'(1 + x^2y')$, бундан қуйидагиларни аниқлаймиз: $F_{yy} = 0$, $F_{yy'} = 0$, $F_{y'} = 1 + 2y'x^2$, $F_{y'y'} = 2x^2$. Энди (IV.9) тенглама ушбу

$$\frac{d}{dx}(2x^2v') = 0$$

кўринишни олади. Бундан $2x^2v' = C_1$ ёки $v = -\frac{C_1}{2x} + C_2$ келиб чиқади. Ушбу $v|_{x=-1} = 0$ шартдан $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ *га эга бўламиз. Демак,* $v = -\frac{C_1}{2}\left(\frac{1}{x} + 1\right)$. Бу функция $x = -1$ дан бошқа нуқтада нолга айланмайди, яъни Якоби шарти бажарилади. Якоби шарти умуман айтганда зарур, лекин кифоя эмас яъни Якоби шарти бажарилган тақдирда (V.3) функционал максимумга ёки минимумга эга бўлиши шарт эмас. Лекин Якоби шарти бажарилмаса, у ҳолда экстремални излашнинг ҳожати йўқ.

40- §. Кифоя шартлар

1°. Вейерштрасс шарти. Ушбу

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \qquad (V.3)$$

функционалнинг $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ шартларни қаноатлантирадиган экстремални топиш масаласи қўйилган бўлсин. *Фараз қилайлик, қўйилган масала учун Якоби шарти бажарилган бўлсин.* Берилган (V.3) функционалга мос Эйлер тенгламасини ёзиб, унинг қўйилган шартларга бўйсунувчи ечимини топамиз. Энди топилган ечим ҳақиқатан ҳам экстремал эканини, яъни (V.3) функционалга максимум ёки минимум қиймат беришини аниқлаш учун (V.3) функционалнинг экстремаль атрофидаги ΔI орттирмаси ишорасини текшириш керак. Бунинг учун қуйидагича мулоҳаза юритамиз: экстремални L, ихтиёрий қўшни чизиқни $\bar{L}$ *билан белгилайлик.* Энди $\Delta I = \int\limits_{(\bar{L})} F(x,y,y')dx - \int\limits_{(L)} F(x, y, y')\,dx$ айирмани тузамиз. 38- § да кўрган эдикки,

$$E(x, y, u, y') = y'^2 + y^2 + 2ye^{2x} - (u^2 + y^2 + 2ye^{2x}) -$$
$$-(y' - u)2u = y'^2 - 2y'u + u^2 = (y' - u)^2 \geqslant 0.$$

Бундан равшанки, $y = \frac{1}{3}e^{2x}$ чизиқ I функционалга кучли минимум қиймат беради.

2°. **Лежандр шарти.** I функционалнинг максимум ва минимумларини Вейерштрасс функцияси ишорасини текшириш усули билан аниқлаш ҳар доим ҳам осон бўлавермайди. Шунинг учун Вейерштрасс шартини осонроқ текшириладиган шартлар билан алмаштирайлик. $F(x, y, y')$ функция y' бўйича иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қилиб, бу функцияни $(y' - u)$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёямиз:

$$F(x, y, y') = F(x, y, u) + \frac{y' - u}{1!}F_{y'}(x, y, u) + \frac{(y' - u)^2}{2!}F_{y'y'}(x, y, q),$$

бунда $q = y' + \theta(u - y')$, $0 < \theta < 1$. (VIII.11) белгилашга асосан сўнгги тенгликни

$$E(x, y, u, y') = \frac{(y' - u)}{2!}F_{y'y'}(x, y, q) \qquad \text{(VIII.13)}$$

билан алмаштирсак бўлади. Бу ифодада E нинг ишораси ўнг томондаги иккинчи кўпайтувчи $F_{y'y'}(x, y, q)$ нинг ишораси билан бир хил бўлади. $F_{y'y'}$ функция узлуксиз бўлгани учун $F_{y'y'}(x, y, q)$ ва $F_{y'y'}(x, y, u)$ функциялар бир хил ишорали бўлади; агар

$$F_{y'y'}(x, y, u) \geqslant 0 \qquad \text{(VIII.14)}$$

бўлса, шунинг билан бирга $E > 0$ ҳам бўлади. Демак, I функционал минимумга эга бўлади. Агар (VIII.14) шарт ҳар қандай y' учун бажарилса, у ҳолда кучли минимум ўринли бўлади.

I функционалнинг максимумга эришиши ҳақида ҳам шу каби мулоҳаза юритилади. Бунда $F_{y'y'} \leqslant 0$ бўлади. Агар $F_{y'y'} > 0$ бўлса, у ҳолда I кучли минимумга, $F_{y'y'} < 0$ бўлганда эса I кучли максимумга эришади. Бунда $F_{y'y'} > 0$ $(F_{y'y'} < 0)$ шарти *Лежандрнинг кучли шарти* дейилади. Шунга ўхшаш. $F_{y'y'} \geqslant 0$ $(F_{y'y'} \leqslant 0)$ бўлганда I функционал минимум (максимум) га эришади. $F_{y'y'} \geqslant 0$ $(F_{y'y'} \leqslant 0)$ шарт эса *Лежандр шарти* дейилади.

Сўнгги кўрган мисолимизда Вейерштрасс функцияси ишорасини аниқлаш ўрнига $F_{y'y'}$ ни текширайлик. Бу ҳолда $F_{y'y'} = 2 > 0$ бўлади. Бу шарт ҳар қандай y' да ўринли бўлгани учун

$$I = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x})\,dx$$

функционал кучли минимумга эришиши келиб чиқади.

Мисоллар. 1) ушбу

$$\int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx$$

интегралнинг $y(0) = 0$, $y(a) = 0$ шартларда экстремуми текширилсин.

Ечилиши. Бу функционал учун

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

Эйлер тенгламаси ушбу

$$y'' + 16y = 0$$

кўринишни олади. Бу тенгламанинг умумий ечими $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$. Чегаравий шартларнинг биринчисидан фойдаланиб, $C_1 = 0$ эканлигини аниқлаймиз. Демак,

$$y = C_2 \sin 4x$$

бир параметрли экстремаллар оиласини беради. Равшанки, бу экстремаллар оиласининг барча чизиқлари (0, 0) нуқтадан ўтади, бундан ташқари, улар $x = \frac{k\pi}{4}$ (k — бутун сон) бўлганда абсциссалар ўқининг $\left(\frac{k\pi}{4},\ 0\right)$ нуқталарида кесишади. Шунинг учун бу ҳолда майдон ҳосил бўлмайди; демак $x \geqslant \frac{\pi}{4}$ бўлса, экстремаль мавжуд эмас. Топилган экстремаллар майдони марказий майдон ҳосил қилиши учун $0 < x < \frac{\pi}{4}$ бўлиши керак. C_2 параметрнинг ноль қийматига тўғри келган $y = 0$ чизиқ шу майдоннинг ички чизиғи бўлади (Якоби шарти); ниҳоят, Лежандр шартини текширсак.

$$F_{y'y'} = 2 > 0$$

бўлиб, $y = 0$ экстремаль берилган интегралга кучли минимум бериши кўринади.

2) энди яна брахистохрона масаласига қайтиб, бу масала ечими кучли минимум беришини текшириб ўтайлик. Бу масалада

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx,$$

экстремаллар оиласининг параметрик тенгламаси

$$x = \pm\frac{C_1}{2}(t - \sin t),$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t) \tag{V.8}$$

кўринишда бўлиб, биз циклоидалар оиласига эга эдик. Бу тенгламалардан кўринадики, $t < 2\pi$ бўлганда текисликнинг ҳар бир нуқтасидан оиланинг биттадан чизиғи ўтади ва оиланинг ҳамма чизиқлари координаталар бошидан ўтади. Демак, циклоидалар оиласи марказий майдон ҳосил қилади (Якоби шарти). Бунда Лежандр шарти

$$F_{y'y'} = \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{y}} > 0$$

кўринишни олади. Шундай қилиб, марказий майдоннинг ихтиёрий $B(x_1, y_1)$ нуқтасидан ўтувчи циклоида юқоридаги I функционалга кучли минимум беради.

3) геометрик оптика масаласи. Фараз қилайлик, ёруғликнинг текисликда v тарқалиш тезлиги (x, y) нуқтанинг функцияси бўлиб, йўналишга боғлиқ бўлмасин. Бошқача айтганда, ёруғлик тарқалаётган муҳитни изотроп деб фараз қилайлик, у ҳолда ёруғликнинг $A(x_0, y_0)$ нуқтадан $B(x_1, y_1)$ нуқтагача $y = f(x)$ эгри чизиқ бўйича тарқалиш вақти

$$T = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{ds}{v(x, y)} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)} dx, \quad v(x, y) > 0 \qquad (*)$$

интеграл орқали ҳисобланади. Ёруғликнинг энг қисқа вақтда тарқалиш йўлини, яъни $y = f(x)$ функцияни топиш геометрик оптика масалаларидан биридир. Бу масалани ечиш математика тилига кўчирганда (*) функционалга минимум қиймат берувчи функцияни топиш демакдир. Бу функционал учун Эйлер тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

Тенгламадаги $v(x,y)$ функциянинг кўриниши конкрет бўлмагани учун тенгламанинг ечимини аниқ кўрсата олмаймиз. Масалани охиригача ечиш мақсадида $v(x, y) = y > 0$ деб олайлик, у ҳолда юқоридаги тенглама

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

кўринишни олиб, унинг биринчи интегралини ёзишимиз мумкин:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1}$$

ёки

$$\frac{y dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = dx,$$

буни интеграллаш натижасида ушбу

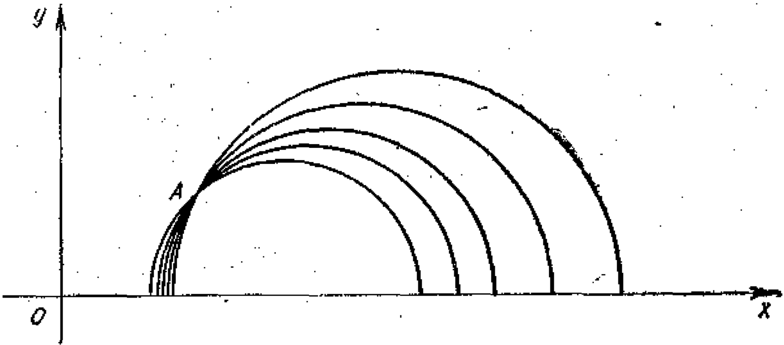
$$(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2$$

тенглама билан ифодаланган чизиқ ҳосил бўлади; бу чизиқлар марказлари абсциссалар ўқида ётувчи айланалардир.

Агар бу айланаларнинг барчаси $A(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтишини кўзда тутиб, текисликнинг юқори ярмидаги ёйларнигина олсак, 61-чизмадаги эгри чизиқлар оиласи ҳосил бўлади; бу оила майдон ҳосил қилиши равшан. Энди $F_{y'y'}$ нинг ишорасини аниқлайлик:

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\left[\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\right] = \frac{1}{y(1+y'^2)^{3/2}} > 0.$$

Демак, T функционал $v(x, y) = y > 0$ бўлган ҳолда кучли минимумга эга бўлади.



61- чизма.

41- §. Эйлер тенгламаларининг каноник кўриниши

Баъзи вариацион масалаларни текширишда Эйлер тенгламасининг (V.9) кўриниши ёки (V.20) кўринишдаги тенгламалар системасини ечишдан кўра уларни каноник кўринишга келтириб ечиш қулайроқ бўлади. Мана шу каноник кўринишга келтиришни биз уч ўлчовли фазода ушбу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx \qquad \text{(V.19)}$$

функционал устида кўрамиз. Маълумки, бу функционалга экстремум қиймат берувчи $y = y(x)$, $z = z(x)$ функциялар ушбу

$$\left.\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.20)}$$

системани қаноатлантирар эди. Бу системадаги ҳар бир тенглама иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламадир. Бу тенгламалар системаси ўрнига биринчи тартибли тенгламалар системасини ёзиш каноник кўринишга келтиришдир. Янги v, w ўзгарувчиларни қабул қиламиз:

$$v = F_{y'}, \text{ ва } w = F_{z'} \qquad \text{(VIII.15)}$$

деб олайлик. Агар бу тенгламаларнинг y' ва z' га нисбатан якобиани нолга тенг бўлмаса, яъни

$$\frac{D(F_{y'}, F_{z'})}{D(y', z')} \neq 0$$

бўлса, у ҳолда бу тенгламаларни y' ва z' га нисбатан ечиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} y' &= y'(x, y, z, v, w),\\ z' &= z'(x, y, z, v, w). \end{aligned}\right\} \qquad (\text{VIII.16})$$

Бу тенгламалардаги y, z, v, w ўзгарувчилар *каноник координаталар* дейилади. Гамильтон функцияси деб аталувчи янги функцияни қабул қилайлик:

$$H(x, y, z, v, w) = y'v + z'w - F, \qquad (\text{VIII.17})$$

бунда y' ва z' (VIII.16) кўринишда деб қараш керак. Натижада y, z, v, w битта x нинг функциялари бўлиб, мана шу функцияларга нисбатан биринчи тартибли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бунинг учун қуйидагича мулоҳаза юритамиз. (VIII.17) да сўнгги тўртта аргументга нисбатан ҳосилалар олайлик. Масалан,

$$H_y = \frac{\partial y'}{\partial y}v + \frac{\partial z'}{\partial y}w - F_y - F_{y'}\frac{\partial y'}{\partial y} - F_{z'}\frac{\partial z'}{\partial y}.$$

Бу ифодадан, (VIII.15) белгилашларни кўзда тутсак,

$$H_y = -F_y$$

ҳосил бўлади. Шунга ўхшаш:

$$H_z = -F_z, \quad H_v = y', \quad H_w = z'.$$

(V.20) да F_y ва F_z нинг ўрнига яна (VIII.15) га кўра мос равишда $\frac{dv}{dx}$ ва $\frac{dw}{dx}$ ни ёзса бўлади. Шундай қилиб, (V.20) система ўрнига ушбу биринчи тартибли тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= H_v; & \frac{dv}{dx} &= -H_y, \\ \frac{dz}{dx} &= H_w; & \frac{dw}{dx} &= -H_z. \end{aligned} \qquad (\text{VIII.18})$$

Бу тенгламаларга асосан (V.19) интеграл белгиси остидаги функциянинг Гамильтон функцияси ва каноник координаталар орқали ифодаси ушбу

$$F = vH_v + wH_w - H \qquad (\text{VIII.19})$$

кўринишда бўлади.

Худди шу мулоҳазаларни номаълум функциялар сони n та бўлган ҳолга ҳам ўтказиш мумкин. Мулоҳазаларни такрорлаб ўтирмасдан, натижанигина келтирайлик. $I = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n')\,dx$ функционал берилган бўлиб, қуйидаги

$$\frac{D(F_{y_1'}, \ldots, F_{y_n'})}{D(y_1', \ldots, y_n')}$$

якобиан нолдан фарқли деб фараз қилинса, ушбу

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \qquad (i = \overline{1, n})$$

тенгламалар системаси ўрнига биринчи тартибли $2n$ та тенглама системасини қараш мумкин, чунончи:

$$\frac{dy_i}{dx} = H_{v_i}, \quad \frac{dv_i}{dx} = -H_{y_i}, \qquad (i = \overline{1, n}),$$

бунда $v_i = F_{y_i'}$ ва Гамильтон функцияси

$$H = \sum_{i=1}^{n} y_i' v_i - F$$

кўринишда ёзилади. Бу функциянинг аналитик ифодаси билан чегараланмасдан, бу назариянинг кейинчалик татбиқини кўрганда Гамильтон функциясининг маъносини ҳам кўриб ўтамиз:

Мисол. 190- бетда

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\,dx$$

функционал учун Эйлер тенгламалари системаси

$$z - 2y - y'' = 0,$$
$$y + z'' = 0$$

кўринишда эканлигини кўрган эдик. Энди бу системани каноник кўринишга келтирайлик. Аввало

$$\frac{D(F_{y'}, F_{z'})}{D(y', z')} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

эканлигини аниқлаб, v ва w янги ўзгарувчиларни $F_{y'} = 2y' = v$ ва $F_{z'} = -2z' = w$ тенгликлар орқали, бундан (VIII.16) га мос

$$y' = \frac{v}{2}, \quad z' = -\frac{w}{2}$$

ни аниқлаб оламиз. Энди

$$H = y'v + z'w - F$$

Гамильтон функцияси қуйидагича ёзилади:

$$H = \frac{v^2}{4} - \frac{w^2}{4} - 2yz + 2y^2.$$

Шундай қилиб, (VIII.18) система бу ҳолда ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{2},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{w}{2},\quad \frac{dv}{dx}=2z-4y,\quad \frac{dw}{dx}=2y$$

кўринишни олади. Биринчи тартибли тенгламалар системасини ечиш хийла осон албатта. Бу системани ечиш натижасида асосий номаълум функциялар яна

$$z=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x,$$
$$y=-z''$$

кўринишда топилади (190-бетга қаралсин).

VIII БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Қуйидаги интеграллар учун экстремаллар топилсин ва уларнинг характерлари аниқлансин:

1. $\int\limits_{(1,0)}^{(2,1)}(xy'^4-2yy'^3)\,dx.$

2. $J=\int\limits_{(0,0)}^{(a,1)}(2x^2-y\cos x+4y^2-y'^2)\,dx.$

3. $J=\int\limits_{(0,1)}^{(a,0)}(x^3+9y^2+2yy'-y'^2)\,dx.$

4. $J=\int\limits_{(-1,1)}^{(2,4)}y'(x^2y'+1)\,dx.$

5. $J=\int\limits_{(-1,1)}^{(2,1)}y'(x^2y'+1)\,dx.$

6. $J=\int\limits_{(0,1)}^{(a,0)}(x^2-y^2+y'^2)\,dx.$

7. $J=\int\limits_{(0,1)}^{(a,0)}(x^3+9y^2+2yy'-y'^2)\,dx.$

8. $J=\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)}(e^{yy'}+yy')\,dx.$

IX боб

ВАРИАЦИОН ҲИСОБНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

Механика ва математик физиканинг баъзи тенгламалари вариацион ҳисоб принципларига асосан осонгина ҳосил қилинади. Бу принциплардан хусусан Остроградский — Гамильтон принципини кўриб ўтайлик.

42-§. Остроградский — Гамильтон принципи

Бу принцип асосан механика соҳасида ўринли бўлиб, *механиканинг вариацион принципи* деб ҳам аталади. Ҳаракат бор жойда, хусусан математик физиканинг баъзи тенгламаларини келтириб чиқаришда ҳам бу принципдан фойдаланилса бўлади. Бу принципни моддий нуқталар ҳаракати мисолида кўрайлик.

Координаталари $(x_k(t), y_k(t), z_k(t)$, *массалари* m_k *бўлган* n та M_k $(k=\overline{1,n})$ моддий нуқта системаси берилган бўлсин. Бу системанинг ҳаракати

$$\varphi_i(t;\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ \dots,\ x_n,\ y_n,\ z_n)=0\,(i=\overline{1,p};\ p<3n) \qquad \text{(IX.1)}$$

боғламлар билан чегараланган ва $\vec{F}_k$ $k=\overline{1,\ n}$ (k-нуқтага таъсир этувчи куч) кучлар таъсирида бўлади деб фараз қилайлик. Бу куч — u *куч функциясига* эга дейлик, у ҳолда кучларнинг координаталари

$$X_k=-\frac{\partial u}{\partial x_k},\ Y_k=-\frac{\partial u}{\partial y_k},\ Z_k=-\frac{\partial u}{\partial z_k} \qquad \text{(IX.2)}$$

бўлади. Системанинг кинетик энергияси

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\ (\dot{x}_k^2+\dot{y}_k^2+\dot{z}_k^2),$$

потенциал энергияси эса — u. Энди система ҳаракати ҳақида қуйидагича мулоҳаза юритайлик: система $t=t_0$ моментда A ҳолатда бўлиб, $t=t_1$ моментда B ҳолатга ўтган бўлсин. A ҳолатдан B ҳолатга ўтиш ҳар хил йўллар билан содир бўлиши мумкин. Шу йўллардан «мумкин бўлган» ларини ажратиб олишимиз керак; улар ҳам бўлса қуйидаги талабларга бўйсуниши керак: 1) берилган боғламлар билан ўриндош; 2) $t = t_0$ вақтда A ҳолатда ва $t = t_1$ вақтда B ҳолатда бўлиши. «Мумкин бўлган» йўллардан бири ҳақиқий ҳаракат йўли бўлади. Мана шу йўлни ажратиш бизнинг вазифамиздир. Ҳақиқий ҳаракат йўлини Остроградский — Гамильтон принципи қуйидагича ажратиб беради:

„Мумкин бўлган" ҳаракатлар ушбу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T + u)\,dt \qquad \text{(IX.3)}$$

функционалга экстремум қиймат берувчи ҳаракатлар ичидан изланади. Бундай ҳаракатлар учун

$$\delta I = 0$$

тенглик қаноатлантирилади (зарурий шарт).

Ҳақиқатан, моддий нуқталар системасининг ҳар қандай «мумкин бўлган» ҳаракатига (t_0, t_1) оралиқда аниқланган $3n$ та $x_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t)$ функциялар системаси мос келади. Бу функциялар системаси интервалнинг учларида берилган қийматларни қабул қилиб, (IX.1) тенгламаларни қаноатлантиради. Демак, биз икки учи бириктирилган, голоном боғламли вариацион масалани ечишимиз лозим.

Шартли экстремум масаласини ечиш қоидасига асосан ушбу

$$F = u + T + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s \varphi_s$$

ёрдамчи функцияни тузиб, унга мос

$$F_{x_k} - \frac{d}{dt}\left(F_{\dot{x}_k}\right) = 0,$$
$$F_{y_k} - \frac{d}{dt}\left(F_{\dot{y}_k}\right) = 0,$$
$$F_{\dot{z}_k} - \frac{d}{dt}\left(F_{\dot{z}_k}\right) = 0, \quad (k = \overline{1, n})$$

тенгламалар системасини ёзамиз. Бу системада

$$F_{x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{p} \Lambda_s(t)\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}; \quad F_{\dot{x}_k} = m_k \dot{x}_k,$$

$$F_{y_k} = \frac{du}{dy_k} + \sum_{s=1}^{p} \Lambda_s(t)\frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k}; \quad F_{\dot{y}_k} = m_k \dot{y}_k,$$

$$F_{z_k} = -\frac{\partial u}{\partial z_k} + \sum_{s=1}^{p} \Lambda_s(t)\frac{\partial\varphi_s}{\partial z_k}; \quad F_{\dot z_k} = m_k \dot z_k, \quad (k = \overline{1,\ n}).$$

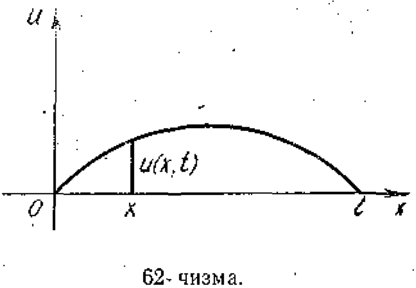
(IX.2) белгилашларни кўзда тутсак, Эйлер тенгламалари системаси

$$\begin{cases} m_k\ddot X_k - X_k - \sum\limits_{s=1}^{p} \Lambda_s(t)\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_k} = 0, \\ m_k\ddot y_k - y_k - \sum\limits_{s=1}^{p} \Lambda_s(t)\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial y_s} = 0, \\ m_k\ddot Z_k - Z_k - \sum\limits_{s=1}^{p} \Lambda_s(t)\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial z_k} = 0, \quad (k = \overline{1,n}) \end{cases}$$

кўринишни олади; бу эса механикада *моддий нуқталар системасининг ҳақиқий ҳаракат дифференциал тенгламаларидир.*

Бу принципнинг математикада, чунончи математик физика тенгламаларини келтириб чиқаришда роли каттадир.

2. **Торнинг кўндаланг тебраниш тенгламасини келтириб чиқариш***. Бунинг учун узунлиги l бўлган торнинг чап учини координаталар бошига жойлаштириб, абсциссалар ўқини тор бўйича йўналтирамиз. Горизонтал ҳолатдан чиқарилган тор нуқтасининг ординатаси $u(x,\ t)$ бўлсин (62- чизма). Торнинг кичик тебранишларини кўрамиз, шунинг учун $u(x,\ t)$ ҳам кичик деб ҳисобланади. Келгусида $u(x,\ t)$ нинг ҳосилаларини ҳам кичик деб ҳисоблаймиз. Торнинг кинетик ва потенциал энергиялари ифодаларини аниқлайлик: торнинг dx бўлакчасининг потенциал энергияси шу бўлакчанинг чўзилишига пропорционалдир. Деформацияланган бўлакчанинг узунлиги



62- чизма.

$$ds = \sqrt{1 + u_x'^2}\,dx.$$

---

* Бу принципга асосан мембрананинг кўндаланг тебраниш тенгламасини келтириб чиқариш Н. Тешабоеванинг «Математик физика методлари», «Ўқитувчи», Т., 1967 й. китобида келтирилган.

Демак, бўлакчанинг чўзилиши

$$\left(\sqrt{1+u'^2_x}-1\right)dx$$

бўлади. Бўлакчанинг потенциал энергияси эса

$$k\left(\sqrt{1+u'^2_x}-1\right)dx$$

билан ифодаланади, бунда k — пропорционаллик коэффициенти. Бу ифодани соддалаштирайлик, бунинг учун Тейлор формуласига асосан

$$\sqrt{1+u'^2_x}=1+\frac{1}{2}u'^2_x+o(u'^2_x),\quad \lim_{z\to 0}\frac{o(z)}{z}=0$$

каби ёзсак бўлади; бундан кейин $o(u'^2_x)$ ҳадни тушириб қолдирамиз. Шундай қилиб, dx бўлакчанинг потенциал энергияси

$$\frac{1}{2}ku'^2_x$$

бўлар экан. У ҳолда бутун торнинг потенциал энергияси

$$-u=\frac{1}{2}\int_0^l ku'^2_x\,dx$$

бўлади. Торнинг кинетик энергияси эса ушбу

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \rho u'^2_t\,dx$$

интеграл билан ифодаланади, бунда ρ — чизиқли зичлик. Энди ушбу $\int_{t_0}^{t_1}(T+u)\,dt$ функционал қуйидаги

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho u'^2_t-\frac{1}{2}ku'^2_x\right]dx\,dt$$

кўринишни олади.

Остроградский—Гамильтон принципига кўра ҳаракат тенгламаси (V. 33) Остроградский тенгламаси билан ифодаланади, яъни ушбу

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u'_t)-\frac{\partial}{\partial x}(ku'_x)=0$$

тенглама торнинг эркин тебраниш тенгламаси бўлади. Агар тор бир жинсли бўлса, у ҳолда ρ ва k ўзгармас бўлиб, тенглама

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

кўринишни олади, бунда $a^2=\frac{k}{\rho}$. Энди торга ташқаридан $f(x, t)$

зичлик билан тик равишда куч таъсир этади, дейлик. У ҳолда потенциал энергиядан $\int_0^l \rho f(x, t)\, u dt$ ташқи куч бажарган ишни айиришимиз керак бўлади. Шунинг учун Остроградский—Гамильтон интеграли

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\frac{1}{2}\rho u_x'^2 - \frac{1}{2} k u_x'^2 + \rho f u\right] dx\, dt$$

кўринишни олади. Бу интегралга мос Остроградский тенгламаси *торнинг мажбурий тебраниш тенгламаси* дейилиб, қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t') - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x') - \rho f(x, t) = 0.$$

Тор бир жинсли бўлган ҳолда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t),$$

бунда $a^2 = \frac{k}{\rho} > 0$ — ўзгармас сон.

Мақсад ҳаракат тенгламасини келтириб чиқариш бўлгани учун мулоҳазаларни шу ерда тўхтатамиз. Юқоридаги тенгламалар ҳақида фикр юритиш бу китоб ҳажмида олдимизга қўйилмаган.*

---

* Бундай тенгламаларни математик физика тенгламаларига оид китоблардан, жумладан, Н. Тешабоеванинг «Математик физика методлари», «Ўқитувчи», Т., 1967 й. китобидан қараш мумкин.

X боб

ОПТИМАЛ БОШҚАРИШ ҲАҚИДА

Ушбу бобда объектларни оптимал бошқариш назариясидан дастлабки тушунчалар берилади. Сўнгра вариацион ҳисоб билан оптимал бошқариш орасидаги баъзи боғланишлар қисқача баён этилади.

Регулятор билан таъминланган ва у ёрдамида бошқариладиган кўплаб объектларни (жумладан, *самолёт, ракета, автоматик бошқариш* қурилмаси ва бошқаларни) биз яхши биламиз. Бундай объектларнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтишини маълум маънода энг қулай йўл билан бошқариш муҳим аҳамият касб этади. Қуйида объектларни оптимал бошқариш масаласи ҳам вариацион ҳисоб масаласи эканлигини кўрамиз.

43-§. Оптимал бошқариш масаласининг қўйилиши

Бошқариладиган бирор объектнинг ҳаракати ушбу нормал автоном дифференциал тенгламалар системаси билан берилган бўлсин:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r), \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (X.1)$$

ёки вектор формада

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \qquad (X.1')$$

бу ерда $x_1, x_2, \dots, x_n$ — ҳар бир моментда объектнинг ҳолатини аниқловчи миқдорлар бўлиб, n — ўлчовли ҳолатлар фазоси X да ўзгаради; $u_1, u_2, \dots, u_r$ бошқариш параметрлари, улар *бошқариш соҳаси* деб аталувчи r ўлчовли U соҳадан қийматлар қабул қилади. Бирор $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оралиқда бошқариш усули аниқланган бўлиши учун шу оралиқда бошқариш параметрлари вақтнинг функцияси сифатида берилган бўлиши етарли.

Юқоридаги (X.1) тенгламалар системасида $f_i(x, u)$ ва $\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j}$ функциялар $X \times U$ тўғри кўпайтмада узлуксиз бўлсин деб фараз қиламиз. Энди оптимал масала қўйилиши учун зарур бўлган баъзи тушунчаларни киритайлик.

1-таъриф. *U соҳадан қийматлар қабул қилувчи ва t бўйича бирор $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оралиқда аниқланган ҳар бир $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$ функция бошқариш функцияси дейилади.*

2-таъриф. *Мумкин бўлган бошқариш деб U соҳадан қийматлар қабул қилувчи шундай бўлакли-узлуксиз $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ функцияга айтиладики, бу функция узилиш нуқталарида ушбу*

$$u(\tau) = u(\tau + 0)$$

шартни қаноатлантиради ҳамда t_0 ва t_1 нуқталарда узлуксиз бўлади.

Бирор мумкин бўлган $u = u(t)$ бошқариш берилган дейлик. У ҳолда берилган (X.1) вектор тенглама бундай

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\ u(t)\Big) \qquad (X.\ 2)$$

ёзилади. Агар ушбу $x(t_0) = x^{(0)}$ бошланғич шарт берилган бўлса, $f(x,\ u(t))$ ва $\frac{\partial fi(x,\ u(t))}{\partial x_i}$, $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ функциялар $X \times U$ тўпламда узлуксиз бўлганида эди, (X. 2) тенгламанинг ягона $x = x(t)$ ечими аниқланарди. Аммо $u = u(t)$ функция $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оралиқда бўлакли-узлуксиз бўлгани сабабли $x = x(t)$ ечим ҳақида тўхталишга тўғри келади. Аввало $x = x(t)$ ечим $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оралиқда аниқланмаган бўлиши мумкин (у чексизликка кетиб қолиши ҳам мумкин). Яна $x(t)$ функция узлуксиз бўлиб, $u = u(t)$ функциянинг узлуксиз бўлган оралиқларида узлуксиз дифференциалланувчи, $u = u(t)$ функциянинг узилиш нуқталарида эса дифференциалланувчи бўлмаслиги мумкин. Бу хоссалар билан тўла танишмоқчи бўлган ўқувчига [8] монографияни тавсия қиламиз.

3-таъриф. *Агар бирор мумкин бўлган бошқариш $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, учун (X.2) тенгламанинг унга мос келган $x(t)$ ечими $x(t_0) = x^{(0)}$ бошланғич шартни қаноатлантириши билан бирга $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оралиқда аниқланган бўлиб, тугал шарт $x(t_1) = x^{(1)}$ ни ҳам қаноатлантирса, у ҳолда $u(t)$ бошқариш нуқтани $x^{(0)}$ ҳолатдан $x^{(1)}$ ҳолатга ўтказади дейилади.*

Энди яна битта $f_0(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r) = f_0(x,\ u)$ функция берилган бўлиб, $f_0(x,\ u)$ ва $\frac{\partial f_0}{\partial x_i}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ функциялар $X \times U$ фазода узлуксиз бўлсин. Юқорида киритилган тушунчалар асосида оптимал бошқариш асосий масаласининг қўйилишига ўтамиз.

Ҳолатлар фазоси X да $x^{(0)}$ ва $x^{(1)}$ нуқталар берилган. Нуқтани $x^{(0)}$ ҳолатдан $x^{(1)}$ ҳолатга ўтказувчи барча мумкин бўлган бошқариш функциялари $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ ичидан ушбу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t),\ u(t))dt \qquad (X.3)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (X.9)$$

2-теорема. *$u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ бошқариш функцияси ва унга мос $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ траектория* [(X.8) га қаралсин] *оптимал (энг кам вақт маъносида) бўлиши учун қуйидаги уч шартни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган узлуксиз $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$ вектор функциянинг мавжуд бўлиши зарур:*

1°. *Ихтиёрий t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ учун ўзгарувчи $u \in U$ нинг функцияси бўлган $H(\psi(t), x(t), u)$* функция *$u = u(t)$ нуқтада максимумга эришади;*

2°. *Охирги t_1 моментда $H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) \leqslant 0$ муносабат ўринли;*

3°. *$\psi(t)$ функция (X.9) вектор тенгламанинг ечими.*

Агар $\psi(t)$, $x(t)$, $u(y)$ функциялар (X.8), (X.9) системаларни ва 1° шартни қаноатлантирса, у ҳолда $H(\psi(t), x(t), u(t))$ функция ўзгармас бўлади. Шунинг учун 2° шартни фақат охирги t_1 моментдагина эмас, балки ихтиёрий t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ моментда текшириш мумкин.

Шуни уқтириб ўтамизки, келтирилган теоремалар $u(t)$ бошқариш функцияси ва унга мос $x(t)$ траектория оптимал бўлишининг фақат зарурий шартини беради. Аммо $f_i(k, u)$ функциялар барча аргументлари бўйича чизиқли бўлса, у ҳолда «умумий ҳолатда бўлиши шарти» (биз бу тушунчанинг таърифига тўхталмаймиз) бажарилганда максимум принципи фақат зарурий шарт бўлибгина қолмай, балки у ҳатто кифоя ҳамдир.

45-§. Максимум принципи ва вариацион ҳисоб

Максимум принципини баён этишда U бошқариш соҳасининг ёпиқ ёки очиқлиги ҳақида ҳеч нима дейилмади. Агар U очиқ бўлса, у ҳолда максимум принципидан берилган функционал экстремумга эга бўлишининг барча зарурий шартларини: Эйлер — Лагранж тенгламасини, Лежандр шартини, Вейерштрасс шартини, Лагранж масаласи учун кўпайтувчилар қоидасини келтириб чиқариш мумкин. Агар U соҳа ёпиқ бўлса, у ҳолда вариацион ҳисобдаги барча зарурий шартлар умуман айтганда ўринли бўлмай қолади. Аммо бу ҳолда максимум принципидан фойдаланиш мумкин.

Энди U соҳа очиқ бўлганда максимум принципидан фойдаланиб, вариацион ҳисобнинг баъзи зарурий шартларини келтириб чиқарамиз. Ушбу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_n)\, dt, \quad u_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad (X.10)$$

функционал берилган бўлсин.

Максимум принципидаги (1-теоремага қаралсин) P функция ва ψ_0, ψ_1, ..., ψ_n ёрдамчи ўзгарувчиларга нисбатан тенгламалар бундай ёзилади:

$$P = \psi_0 f_0(t, x, u) + \psi_1 \quad u_1 + \psi_2 u_2 + \dots + \psi_n u_n, \qquad (X.11)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \\ &\frac{d\psi_0}{dt} = -\psi_o \frac{\partial f_0(t, x, u)}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}\right\} \qquad (X.12)$$

Эйлер—Лагранж тенгламасини келтириб чиқариш. U соҳа очиқ бўлгани сабабли P функция максимумга эришадиган $u = u(t)$ нуқта унинг стационар нуқтаси бўлади. Демак, (X.11) дан $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = \psi_o \frac{\partial f_0(t, x(t), u(t))}{\partial u_i} + \psi_i(t) = 0, \ i = 1, 2, \dots, n$$

келиб чиқади. Бундан $\psi_0 \neq 0$ экани кўриниб турибди. Акс ҳолда $\psi_i(t) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ бўлар эди. Аммо бизни тривиал ечим қизиқтирмайди. $\psi_0 < 0$ ва $\psi_o = \text{const}$ бўлгани учун $\psi_o = -1$ деб танлаймиз. Шундай қилиб,

$$\psi_i(t) = \frac{\partial f_i(t, x(t), u(t))}{\partial u_i}, \ i = 1, 2, \dots, n. \qquad (X.13)$$

Иккинчи томондан, (X.12) га $\psi_0 = -1$ ни қўйиб, t_0 дан t_1 гача интегралласак,

$$\psi_i(t) = \psi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f_0(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x_i} d\tau, \ i = 1, 2, \dots, n, \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \qquad (X.14)$$

ҳосил бўлади.

Энди (X.13) ва (X.14) дан Эйлер—Лагранж тенгламасининг интеграл формасини топамиз:

$$\frac{\partial f_i(t, x(t), u(t)}{\partial u_i} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f_0(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x_i} d\tau + \psi_i(t_0), \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Агар f_0 функция икки марта узлуксиз дифференциалланувчи деб фараз қилинса, сўнгги тенгликни t бўйича дифференциаллаш натижасида Эйлер—Лагранж тенгламасининг одатдаги кўринишига эга бўламиз:

$$\frac{\partial f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)}{\partial u_i}\right) = 0, \ i = 1, 2, \dots, n \qquad (X.15)$$

Лежандр шартини келтириб чиқариш. $f_0(t, x, u)$ функция $u_1, u_2, \dots, u_n$ га нисбатан иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Агар $P(\psi(t), x(t), t, u)$ функция u нинг функцияси сифатида $u = u_0$ нуқтада максимумга эришса, у ҳолда ушбу

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} P(\psi(t), x(t), t, u_0) \xi_\alpha \xi_\beta = -\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} f_0(t, x(t), u_0) \xi_\alpha \xi_\beta$$

квадратик форма ихтиёрий $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ учун мусбат аниқланмаган бўлади. Бундан $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ да

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} \frac{\partial^2 (f_0(t,\ x(t),\ \frac{dx(t)}{dt}\Big)}{\partial u_\alpha\, \partial u_\beta} \xi_\alpha\ \xi_\beta \geqslant 0 \qquad (X.16)$$

келиб чиқади. Бу эса Лежандр шартидир.

Вейерштрасс шартини келтириб чиқариш. Қурилаётган масала учун Вейерштрасс функциясини тузамиз:

$$P(\psi,\ x,\ t,\ u_1) P(\psi,\ x,\ t,\ u_0) - \sum_{i=1}^{n} (u_{1i} - u_{0i}) \frac{\partial P(\psi,\ x,\ t,\ u_0)}{\partial u_i} =$$

$$= \psi_0 f_0(t,\ x,\ u_1) - \psi_0 f_0(t,\ x,\ u_0) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i (u_{1i} - u_{0i}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (u_{1i} - u_{0i}) \left(\psi_0 \frac{\partial f_0(t,\ x,\ u_0)}{\partial u_i} + \psi_i\right) =$$

$$= \psi_0 f_0(t,\ x,\ u_1) - \psi_0 f_0(t,\ x,\ u_0) - \psi_0 \sum_{i=1}^{n} (u_{1i} - u_{0i}) \frac{\partial f_0(t,\ x,\ u_0)}{\partial u_i} =$$

$$= \psi_0 E(t,\ x,\ u_0,\ u_1),$$

бу ерда $E(t,\ x,\ u_0,\ u_1)$ — Вейерштрасс функцияси.

Агар U соҳанинг $u = u_0$ нуқтасида (бу нуқта U очиқ бўлгани учун унинг ички нуқтаси бўлади) P функция максимумга эришса, у ҳолда бу нуқтада

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = 0$$

бўлади. Шунинг учун юқоридаги муносабат соддалашади:

$$P(\psi,\ x,\ t,\ u_1) - P(\psi,\ x,\ t,\ u_0) = \psi_0 E(t,\ x,\ u_0,\ u_1).$$

$u = u_0$ нуқтада P максимумга эришгани сабабли

$$P(\psi,\ x,\ t,\ u_1) - P(\psi,\ x,\ t,\ u_0) \leqslant 0 \text{ ёки } \psi_0 E \leqslant 0$$

бўлади. Аммо $\psi_0 < 0$ бўлгани учун оптимал траекторияларда:

$$E(t,\ x,\ u_0,\ u_1) \geqslant 0. \qquad (X.17)$$

Бу эса Вейерштрасс шартидир.

Биз бу ерда Лагранж масаласи учун кўпайтувчилар қоидасини чиқариб ўтирмаймиз. Унинг тўлиқ баёнини [8] монографиядан топиш мумкин.

Биз юқорида юритган барча мулоҳазаларимизда $f_0(t, x, u)$ ва $u_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}$ функцияларни $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оралиқда узлуксиз деб қараганлигимизни таъкидлаб ўтамиз. Агар $u_i(t)$ функциялар $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида биринчи тур узилишга эга бўлса, у ҳолда $f_0(t, x, u)$ функция ҳам шу нуқталарда узилишга эга бўлади. Бундай фараз қилинса, юқоридаги мулоҳазалар $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оралиқнинг $u_i(t)$ функцияларнинг биринчи тур узилиш нуқталаридан бошқа барча қисмида ўринли бўлади.

46-§. Максимум принципини қўлланишга доир иккита масала

U соҳа ёпиқ бўлсин дейлик. Агар мумкин бўлган бошқариш функциясининг қиймати U соҳанинг ички нуқталарига тўғри келса, у ҳолда максимум принципидан вариацион ҳисобдаги (бу китобда балки келтирилмаган) барча зарурий шартлар келиб чиқади. Хусусан, максимум принципи Вейерштрасснинг зарурий шарти билан устма-уст тушади. Агар оптимал бошқариш функциясининг қиймати U соҳанинг чегарасига тўғри келса, чегарада умуман айтганда $\frac{\partial P}{\partial u_i}$ ҳосила нолга айланмайди, демак, Вейерштрасс шарти бажарилмайди. Аммо бу ҳолда ҳам максимум принципи ўринлидир. Максимум принципининг устунлиги ҳам ана шундадир. Техникада учрайдиган кўпгина бошқариш масалаларида U соҳа ёпиқ бўлиб, оптимал бошқариш функциясининг қиймати U нинг чегарасига тўғри келади. Шу сабабли максимум принципининг аҳамияти айниқса каттадир.

Биз қуйида иккита энг содда объектни оптимал бошқариш масаласига тўхталамиз.

Массаси m бўлган бирор G материал нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. G материал нуқта двигатель билан таъминланган бўлиб, двигателнинг G нуқтага таъсир кучини u дейлик. Ҳар бир моментда G нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа x бўлса, у ҳолда нуқтанинг тезлиги $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ бўлади. Материал нуқтага иккита ташқи куч: ишқаланиш кучи $-b\dot{x}$, $b > 0$ ва таранглик кучи kx, $k > 0$ таъсир этади дейлик. Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан вақт ўтиши билан G нуқтанинг ҳаракати (63-чизма)

63-чизма.

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + u \qquad (X.18)$$

дифференциал тенглама билан ифодаланади, бу ерда m, b, k — мусбат сонлар. u — бирор ёпиқ U интервалда ўзгарадиган бошқариш параметри.

Агар $m = 1$, $b = k = 0$ бўлса, (X.18) тенглама ушбу

$$\ddot{x} = u \qquad (X.19)$$

кўринишга келади. Агар $m = 1$, $b = 0$, $k = 1$ бўлса, (X.18) тенглама

$$\ddot{x} = -x + u \tag{X.20}$$

кўринишга келади.

Ҳаракати (X.19) ва (X.20) тенгламалар билан берилган объектларни (x_0, x_0) ҳолатдан (0,0) ҳолатга энг кичик вақт ичида келтириш масаласини қараймиз. Соддалик учун иккала ҳолда ҳам

$$U = \{u\colon -1 \leqslant u \leqslant 1\} \tag{X.21}$$

деб фараз қиламиз: Ҳар икки ҳолда ҳам қўйилган масалага кўра 2-теорема шартларидан фойдаланамиз.

1. Аввал (X.19) тенгламани олайлик. Каноник ўзгарувчилар $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ ёрдамида (X.19) тенглама бундай ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned}\right\} \tag{X.22}$$

Шундай қилиб, берилган объектни $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ҳолатдан (0, 0) ҳолатга энг кам вақтда келтириш масаласи қаралади. H функция ва ёрдамчи ψ_1, ψ_2 ўзгарувчилар учун дифференциал тенгламалар бундай ёзилади:

$$H = \psi_1 \lambda + \psi_2 u, \tag{X.23}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 \tag{X.24}$$

(X.24) системадан $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2 - c_1 t$ (c_1, c_2 — интеграллаш ўзгармаслари). (X.21) ва 2-теореманинг 1° шартидан

$$u(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t) = \operatorname{sign}(c_2 - c_1 t) \tag{X.25}$$

келиб чиқади. Бундан кўринадики, ҳар бир оптимал $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ бошқариш функцияси фақат ± 1 қийматларни қабул қилувчи ва иккитадан ортиқ бўлмаган ўзгармаслик интервалига эга бўлган бўлакли-ўзгармас функциядан иборат.

$u \equiv 1$ бўлганда (X.22) дан

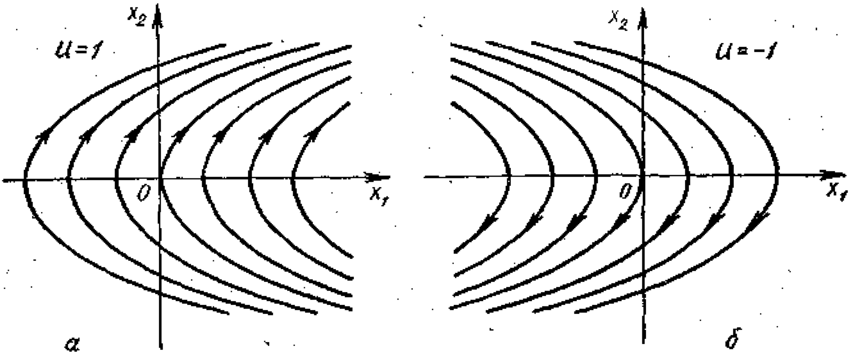
$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2 + d_1, \quad d_1 = \text{const}, \tag{X.26}$$

$u \equiv -1$ бўлганда эса (X.22) дан

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_2)^2 + d_2, \quad d_2 = \text{const} \tag{X.27}$$

топилади. Топилган интеграл эгри чизиқлар параболалар оиласидан иборат (64-чизма).

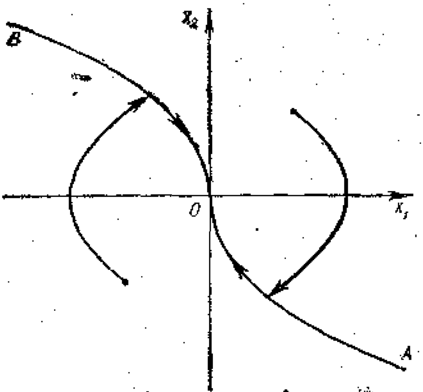
Вақт ўтиши билан (X.26) параболалар бўйича ҳаракат пастдан юқорига, (X.27) параболалар бўйича эса юқоридан пастга йўналган бўлади. Координаталар бошига бевосита олиб келувчи параболалар фақат иккита. Уларнинг тенгламаси (X.26) ва (X.27) да $d_1 = d_2 = 0$ дейишдан ҳосил бўлади. $u \equiv 1$ бўлганда тегишли параболанинг (0, 0



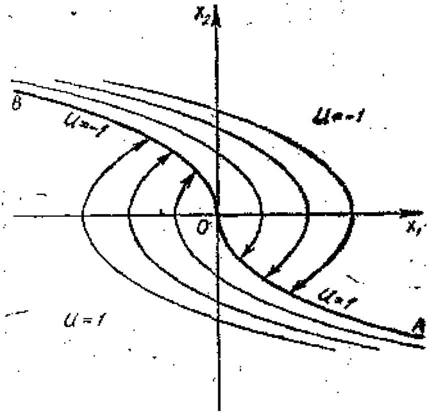
64- чизма.

нуқтага олиб келувчи қисмини AO, $u \equiv -1$ бўлганда эса BO дейлик. Натижада AOB чизиқ ҳосил бўлади (65- чизма). Бу чизиқ *ўтиш чизиғи* дейилади. Агар $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ нуқта AOB чизиқдан юқорида бўлса, у ҳолда ҳаракат аввал (X. 27) парабола бўйича бўлиб, то AO чизиққача боради, сўнгра AO бўйлаб (0, 0) нуқтага боради. Агар $(x_1^{(0)}$ $x_2^{(0)})$ нуқта AOB дан пастда жойлашган бўлса, у ҳолда ҳаракат аввал (X. 26) парабола бўйича то BO билан кесишгунча давом этади, сўнг BO бўйлаб (0, 0) нуқтагача боради. Натижада (x_1, x_2) текисликда координаталар бошига олиб келувчи чизиқлар 66-чизмадагидек жойлашади. Бу чизиқлар (X. 25) бошқариш функцияси оптимал бўлишининг зарурий шартини қаноатлантиради. Аммо бу 66- чизмада тасвирланган траекториялар оптимал эканидан далолат бермайди.

Аслида 66- чизмада тасвирланган траекториялар оптималдир. Буни ҳозир исботлаймиз. Қурилаётган ҳаракат процесси $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ вақт оралиғига тўғри келиб, α, $t_0 < \alpha < t_1$ ўтиш моменти бўлсин, у ҳолда процессга ушбу



65- чизма.



66- чизма.

$$u(t)=\begin{cases}-1, & t_0 \leqslant t < \alpha,\\ +1, & \alpha \leqslant t \leqslant t_1\end{cases} \tag{X.28}$$

бошқариш функцияси тўғри келади. Шу процесс оптимал эмас дейлик, у ҳолда шундай бошқа $\tilde{u}(t)$, $-1 \leqslant \tilde{u}(t) \leqslant 1$ бошқариш функцияси мавжудки, унинг таъсирида t_0 моментда $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ нуқтадан чиққан объект θ, $\theta < t_1$ моментда координаталар бошига келади.

$u(t)$ функцияга мос келган траекторияни $x(t)$ орқали, $\tilde{u}(t)$ функцияга мос келганини эса $\tilde{x}(t)$ орқали белгилайлик. Равшанки, $\tilde{x}_1(\theta) = 0$, $\tilde{x}_2(\theta) = 0$, $x_1(t_1) = 0$, $x_2(t_1) = 0$. Ҳар икки траектория ҳам (X.20) системани қаноатлантиради:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t),\\ &\dot{x}_2(t) = u(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1),\\ &\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2(t),\\ &\dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{u}(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1). \end{aligned}\right\}$$

Ушбу иккита ёрдамчи функцияни қараймиз:

$$\Phi(t) = -x_1(t) + x_2(t)(t-\alpha),\ \Psi(t) = -\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)(t-\alpha).$$

Булардан кўринадики,

$$\Phi(t_0) = \Psi(t_0);\ \Psi(t_1) = \Psi(\theta) = 0. \tag{X.30}$$

Содда ҳисоблашлар кўрсатадики,

$$\dot{\Phi}(t) = u(t)(t-\alpha),\quad \dot{\Psi}(t) = \tilde{u}(t)(t-\alpha).$$

(VI.28) га асосан $\dot{\Phi}(t) = |t-\alpha|$. Шу сабабли

$$\dot{\Phi}(t) \geqslant |\dot{\Psi}(t)| \geqslant \dot{\Psi}(t).$$

Бу тенгсизликни t_0 дан θ гача интеграллаймиз:

$$\int_{t_0}^{\theta} \dot{\Phi}(t)\,dt \geqslant \int_{t_0}^{\theta} \dot{\Psi}(t)\,dt$$

ёки

$$\Phi(\theta) - \Phi(t_0) \geqslant \Psi(\theta) - \Psi(t_1).$$

Бундан (X.30) га кўра ушбу $\Phi(\theta) \geqslant 0$ муносабат ҳосил бўлади. Иккинчи томондан,

$$-\Phi(\theta) = \Phi(t_1) - \Phi(\theta) = \int_{\theta}^{t_1} \dot{\Phi}(t)\,dt = \int_{\theta}^{t_1} |t-\alpha|\,dt > 0,$$

яъни $\Phi(\theta) < 0$. Бу юқоридаги $\Phi(\theta) \geqslant 0$ тенгсизликка зид. Шундай қилиб, $\theta < t_1$ тенгсизлик бажарилмас экан. Тўлароқ айтганда, (x_1, x_2) текисликнинг ихтиёрий нуқтасидан координаталар бошига t_1 моментдан аввал келиб бўлмайди. Демак, 66-чизмада тасвирланган барча траекториялар оптималдир.

2. Энди (X.20) тенгламани кўрайлик. $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ каноник ўзгарувчилар ёрдамида уни система кўринишида ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u. \end{aligned}\right\} \qquad (X.31)$$

Яна H функцияни ва ψ_1, ψ_2 учун тенгламаларни ёзамиз:

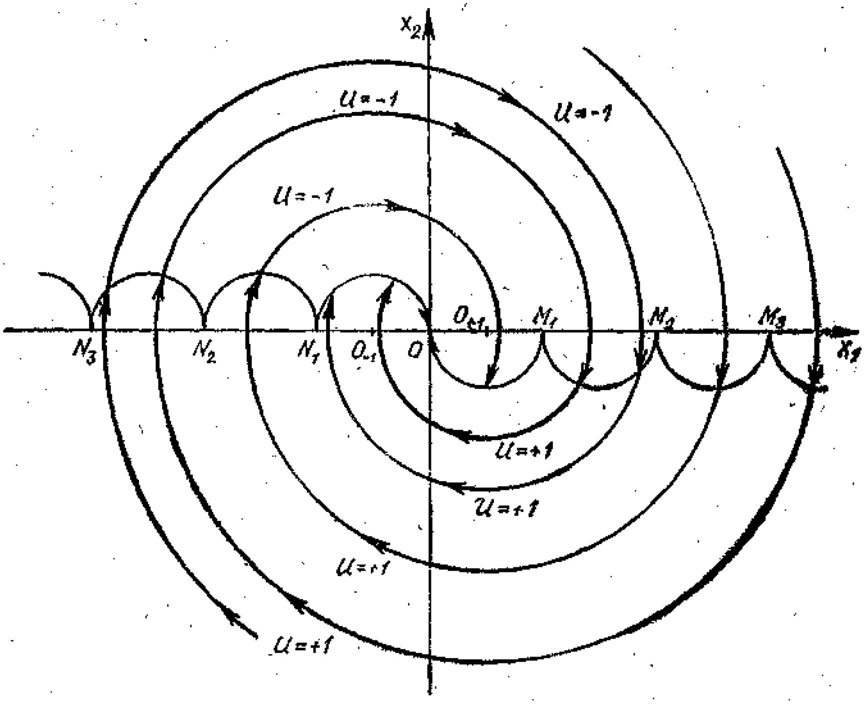
$$H = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u, \qquad (X.32)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \psi_2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\psi_1. \end{aligned}\right\} \qquad (X.33)$$

Бундан $\psi_2(t) = A \sin (t - \alpha_0)$; $A > 0$, α. — ўзгармаслар. H функциянинг максимумга (u бўйича) эришиш шартидан

$$u = \operatorname{sign} \psi_2(t) = \operatorname{sign} [A \sin (t - \alpha_0)] = \operatorname{sign} \sin (t - \alpha_0) \qquad (X.34)$$

ни топамиз. Бундан кўринадики, $u(t)$ бошқариш функцияси тартиб билан гоҳ, $+1$, гоҳ -1 қийматларни қабул қилади. Ҳар бир қиймат узунлиги π га тенг бўлган вақт оралиғида сақланади. Биз зарурий шартни (максимум принципини) қаноатлантирувчи барча траекторияларнинг сифатини тўла текшириб ўтирмаймиз ([8] га қаралсин).



67- чизма.

Бу чизиқлар 67-чизмадаги кўринишга эга. Чизмадаги ... $N_3N_2N_1$ $OM_1M_1M_2$ ... чизиқ *ўтиш чизиғи* дейилади. Уни қисқача Г деб белгилаймиз. Бу чизиқ радиуси 1 га тенг бўлган ярим айланалардан тузилган. Агар $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ нуқта Г чизиқдан юқорида бўлса, ҳаракат $(x_1+1)^2+x_2^2=R_-^2$ айлана ёйи бўйлаб, соат стрелкаси йўналишида Г билан кесишгунча давом этади, сўнгра $(x_1-1)^2+x_2^2=R_+^2$ айлана ёйи бўйлаб яна Г билан кесишгунча, сўнгра $(x_1+1)^2+x_2^2=$ $=R_-$ айлана ёйи бўйлаб Г билан кесишгунча ва ҳ. к., то координаталар бошига келгунча ҳаракат тўхтамайди. $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ нуқта Г чизиқдан пастда бўлганда ҳам шунга ўхшаш ҳаракат бўлади. Шундай қилиб, 67-чизмада тасвирланган траекториялар оптималликнинг зарурий шартини қаноатлантиради. Аммо бу нарса улар оптимал деган сўз эмас. Ҳозир 67-чизмадаги траекторияларнинг оптимал эканини қатъий исбот қиламиз. $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ бошланғич нуқта Г чизиқдан юқорида жойлашган бўлсин. t_0 моментда $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ нуқтада бўлган объектни t_1 моментда координаталар бошига келтирувчи бошқариш функцияси $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ бўлсин. Унга мос келган траекторияни эса $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ дейлик. Фараз қилайлик, $u(t)$ бошқариш функцияси ва $x(t)$ траектория оптимал бўлмасин. Унда объектни $(x_1^{(0)}$ $x_2^{(0)})$ дан $(0, 0)$ га θ, $\theta < t_1$ моментда олиб келадиган $\tilde{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$ бошқариш функцияси мавжуд бўлади (албатта, $-1 \leqslant \tilde{u}(t) \leqslant 1$). Бу функцияга мос траекторияни $\tilde{x}(t)$ деймиз. Ҳар икки $x(t)$ ва $\tilde{x}(t)$ траектория ҳам (X.31) системани қаноатлантиради:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ &\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1); \\ &\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2(t); \\ &\dot{\tilde{x}}_2(t) = -\tilde{x}_1(t) + \tilde{u}(t), \quad (t_0 \leqslant t \leqslant \theta). \end{aligned}\right\} \qquad (X.\ 35)$$

Равшанки, $x(t_0) = \tilde{x}(t_0) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, $x(t_1) = \tilde{x}(\theta) = 0$. Бошқариш функцияси $u(t)$ қуйидагича бўлсин:

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t_0 \leqslant t < \theta_1, \\ +1, & \theta_1 \leqslant t < \theta_2, \\ -1, & \theta_2 \leqslant t < \theta_3, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +1, & \theta_{2s-1} \leqslant t < \theta_{2s}, \ \theta_{2s} - \theta_{2s-1} = \pi, \\ -1, & \theta_{2s} \leqslant t \leqslant \theta_{2s+1}, \ \theta_{2s+1} - \theta_{2s} = \pi, \\ +1, & \theta_{2s+1} \leqslant t \leqslant t_1; \end{cases} \qquad (X.\ 36)$$

бу ерда

$$\theta_1 - t_0 \leqslant \pi, \ \theta_{j+1} - \theta_j = \pi, \ j = 1, 2, \ldots, 2s, \ t_1 - \theta_{2s+1} \leqslant \pi.$$

Энди қуйидаги иккита ёрдамчи функцияни оламиз:

$$\Phi(t) = -x_1 \cos(t - \theta_1) + x_2 \sin(t - \theta_1),$$
$$\Psi(t) = -\tilde{x}_1 \cos(t - \theta_2) + \tilde{x}_2 \sin(t - \theta_1).$$

Бундан

$$\Phi(t_0) = \Psi(t_0), \quad \Phi(t_1) = \Psi(\theta) = 0. \qquad (X.37)$$

Содда ҳисоблашлар кўрсатадики, (X.35) ва (X.37) ларга асосан қуйидаги

$$\dot{\Phi}(t) = u(t) \sin(t - \theta_1) = |\sin(t - \theta_1)|,$$
$$\dot{\Psi}(t) = \tilde{u}(t) \sin(t - \theta_1), \quad |\tilde{u}(t)| \leqslant 1$$

муносабатлар ўринлидир. Равшанки,

$$\dot{\Phi}(t) \geqslant |\dot{\Psi}(t)| \geqslant \dot{\Psi}(t).$$

Бу тенгсизликни t_0 дан θ гача интеграллаймиз:

$$\int_{t_0}^{\theta} \dot{\Phi}(t)\, dt \geqslant \int_{t_0}^{\theta} \dot{\Psi}(t)\, dt$$

ёки

$$\Phi(\theta) - \Phi(t_0) \geqslant \Psi(\theta) - \Psi(t_0),$$

бундан (X.37) га кўра ушбу $\Phi(\theta) \geqslant 0$ муносабат келиб чиқади. Иккинчи томондан,

$$-\Phi(\theta) = \Phi(t_1) - \Phi(\theta) = \int_{\theta}^{t_1} \dot{\Phi}(t)\, dt = \int_{\theta}^{t_1} |\sin(t - \theta_1)|\, dt > 0.$$

Демак, $\Phi(\theta) < 0$. Бу $\Phi(\theta) \geqslant 0$ тенгсизликка зид. Бу эса $\theta < t_1$ тенгсизлик бажарилмаслигини кўрсатади. Шундай қилиб, объект t_0 моментда $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ нуқтадан чиқиб, координаталар бошига t_1 моментдан аввал кела олмас экан. Демак, 67-чизмада тасвирланган барча траекториялар оптималдир.

Шуни эслатиб ўтамизки, бошқариш параметрларининг ўзгариш соҳаси U очиқ бўлганда вариацион ҳисобдаги барча зарурий шартлар Р. Белманнинг динамик программалаш усулидан ҳам келтириб чиқарилиши мумкин.

U соҳа ёпиқ бўлганда етарли шартлар анча мураккаб. Бу шартлар В. Г. Болтянский ва бошқалар томонидан топилган. Бу китоб ҳажмида етарли шартлар баёнига тўхталмаймиз. Унинг тўлиқ баёнини [17], [19] китоблардан топиш мумкин.

X БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Ушбу

$$\dot{x} + bx = u, \quad |u(t)| \leqslant 1$$

тенглама билан берилган бошқарилувчи процессни қарайлик, бунда b — ҳақиқий ўзгармас сон. Аввало берилган тенгламанинг $x(o) = x_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими

$$x(t) = e^{-bt}(x_0 + \int\limits_0^t e^{bs}\, u(s)\, ds$$

кўринишда ёзилиши кўрсатилсин. Бу процесс учун ҳолатлар фазоси сифатида ҳолатлар тўғри чизиғига эгамиз.

а) агар $b \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда ҳолатлар тўғри чизиғининг ихтиёрий x_0 нуқтасидан координаталар боши $x_1 = 0$ га келиш мумкинлиги кўрсатилсин; б) агар $b < 0$ бўлса, у ҳолда ҳар бир нуқтасидан координаталар бошига келиш мумкин бўлган тўплам аниқлансин; в) юқорида келтирилган а) ва б) ҳолларда оптимал бошқариш функцияси (энг кам вақт маъносида) кўрсатилсин; г)юқорида келтирилган а) ва б) ҳолларда координаталар бошига олиб келадиган энг кам вақт ҳисоблансин.

2. Ҳаракати

$$\ddot{x} = u, \quad |u(t)| \leqslant 1$$

тенглама билан берилган бошқарилувчи процессни қарайлик. [(X.19) тенгламага қаралсин]. (x_0, y_0) бошланғич нуқтадан координаталар бошига бориш учун сарф бўладиган энг кам вақт $T(x_0, y_0)$ бўлсин. Ўтиш чизиғи AOB дейлик (65- чизма). Ушбу

$$T(x_0, y_0) = \begin{cases} \text{агар } (x_0, y_0) \text{ нуқта } AOB \text{ ёки ундан юқорида ётса,} \\ y_0 + 2\sqrt{x_0 + \frac{1}{2}y_0^2}, \\ \text{агар } (x_0, y_0) \text{ нуқта } AOB \text{ да ёки ундан пастда ётса,} \\ -y_0 + 2\sqrt{-x_0 + \frac{1}{2}y_0^2} \end{cases}$$

формула исбот этилсин.

3. Олдинги мисолда топилган $T(x_0, y_0)$ функция бутун (x, y) текисликда узлуксиз эканлиги исботлансин.

4. Ҳаракати

$$\ddot{x} + x = u, \quad |u(t)| \leqslant 1$$

тенглама билан берилган бошқарилувчи процесс берилган бўлсин [(VI. 20) га қаралсин]. (x_0, y_0) бошланғич нуқта (бу ерда $y_0 = \dot{x}_0$) координаталар бошига энг кам вақтда келиш масаласини ечишда топилган Г ўтиш чизиғидан юқорида жойлашган бўлсин. l ушбу

$$2l - 1 \leqslant \sqrt{(x_0+1)^2 + y_0^2} < 2l + 1$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган мусбат сон, у ҳолда энг кам вақт маъносида оптимал бошқариш аниқ l та ўтишга эга бўлиши кўрсатилсин. Агар (x_0, y_0) нуқта Г ўтиш чизиғидан пастда жойлашган булса, юқоридаги каби факт шу ҳол учун айтилсин ва исботлансин.

5. (X. 20) тенглама билан ҳаракатланадиган объект берилган бўлиб, бирор (x_0, y_0) нуқта ўтиш чизиғи Г дан юқорида жойлашган бўлсин. У ҳолда берилган (x_0, y_0) нуқтадан координаталар бошига энг кам вақтда келиш учун ҳолатлар траекториясининг Г чизиғини кесиб ўтишлар сони $N(x_0, y_0) = \left[\frac{R_{-} + l}{2}\right]$ формула

ёки, барибир, $N(x_0, y_0) = \left[\frac{R_+ - 1}{2}\right] + 1$ формула билан ифодаланиши исботлансин, бу ерда $R\_ = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + y_0^2}$ — соннинг бутун қисми (антье).

Шунга ўхшаш, агар (x_0, y_0) нуқта Γ чизиқдан пастда ётган бўлса, $N(x_0, y_0)$ функция

$$N(x_0, y_0) = \left[\frac{R_+ + 1}{2}\right] \text{ ёки } N(x_0, y_0) = \left[\frac{R_+ - 1}{2}\right] + 1$$

формула билан ифодаланиши исботлансин; бу ерда $R_+ = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y^3_0}$. Келтирилган формулалар ёрдамида $N(3, 3)$, $N(3, \sqrt{20})$, $N(-3,3)$, $N(-3, -\sqrt{20})$ лар ҳисоблансин.

АДАБИЁТ

1-қисмга доир

[1]. Привалов И. И. «Ряды фурье». ГОНТИ, М—Л., 1934.

[2]. Барин Н. К. «Теория рядов». Учпедгиз, М., 1936.

[3]. Зигмунд А. «Тригонометрические ряды». ГОНТИ КПТ СССР, М—Л., 1939.

[4]. Джексон Д. «Ряды Фурье и ортогональные полиномы». Госиздиност литературы, М., 1948.

[5]. Толстов Г. П. «Ряды Фурье». Госиздат технико-теоретич. литературы, М—Л., 1951.

[6]. Снеддон И. «Преобразование Фурье». Изд. иностр. литературы, М., 1955.

[7]. Будак Б. М., Фомин С. В. «Краткие интегралы и ряды»., «Наука», М., 1967.

[8]. Фихтенгольц Г. М. «Математик анализ асослари», 2-том, «Ўқитувчи», Т., 1972.

2-қисмга доир

[9]. Эйлер Леонард. «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле». ГТТИ, М., 1934.

[10]. Эльсгольц Л. Э. «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление». «Наука», М., 1965.

[11]. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. «Курс вариационного исчисления», ТТЛ, М., 1938.

[12]. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. «Основы вариационного исчисления», тт. I, 2, ОНТИ, М., 1935.

[13]. Блисс Г. А. «Лекции по вариационному исчислению». ИИЛ, М., 1950.

[14]. Смирнов В. И. «Курс высшей математики», т. IV. ГИТТЛ, М—Л, 1951.

[15]. Смирнов В. И., Канторович Л. П. и Крылов. «Вариационное исчисление». Изд. «Кубуч», 1933.

[16]. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. «Математическая теория оптимальных процессов», «Наука», М., 1969.

[17]. Болтянский В. Г. «Математические методы оптимального управления», «Наука», М., 1969.

[18]. Беллман Р. «Динамическое программирование». ИЛ, М., 1960.

[19]. Ли Э. Б., Маркус Л. «Основы теории оптимального управления». «Наука», М., 1972.

[20]. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. «Сборник задач по высшей математике», часть 3. ГИТТЛ, М., 1951.

МУНДАРИЖА

I-ҚИСМ

2-ҚИСМ

ВАРИАЦИОН ҲИСОБ

На узбекском языке

ХАЛИКОВ МУХАМЕДЖАН КЛИЧЕВИЧ,
ТИШАБАЕВА НАСИХАТ ХАМИДОВНА

РЯДЫ ФУРЬЕ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие для студентов
физических факультетов университетов
и физико-математических факультетов
педагогических институтов

Издательство «Ўқитувчи»
Ташкент — 1977

Редактор *Ў. Хусанов*
Бадиий редактор *Е. И. Сошн*
Техредактор *С. Ахтамова*
Корректор *В. Абдуллаева*

Теришга берилди 20/VII-1976 й. Босишга рухсат этилди 4/I 1977 й. Қоғоз № 3, $60 \times 90^1/_{16}$
Физ. б. л. 17,0. Нашр л. 15,2. Тиражи 5000.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 163 — 76. Баҳоси 43 т.
Муқоваси 14 т.

ЎзССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитетининг Тошкент полиграфия комбинати. Навоий кўчаси, 30. 1977 й. Зак. № 893.

Ташполиграфкомбинат Государственного Комитета Совета Министров УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Ташкент, Навои, 30.