А.Я. НАРМАНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ

Ўзбекистон Республикаси Олий ўқув юртлариаро мувофиқлаштирувчи кенгаш томонидан тегишли олий ўқув юртлари учун дарслик сифатида тавсия этилган

Тошкент
“Университет”
2003

Бу дарслик университетларнинг математика, механика, тадбикий математика ва информатика йўналишлари учун мўлжалланган бўлиб, амалдаги янги бакалаврлар дастури асосида ёзилган. Дарслик тўртта кисмдан иборат бўлиб, унда умумий топология элементлари, чизиклар ва сиртлар назарияси, тензор анализ элементлари ёритилган. Дарсликдан магистр, аспирантлар ва олий ўкув юртлари ўкитувчилари ҳам фойдаланишлари назарда тутилган.

Такризчилар: пед.ф. доктори, профессор Т. Тўлаганов,
ф.-м.ф. доктори, профессор Н.Н. Ғанихўжаев,
ф.-м.ф. номзоди, доцент У. Илҳомов

СЎЗ БОШИ

Бу дарслик бакалаврлар учун тасдиқланган ўқув режаси асосида ёзилган бўлиб, математика, амалий математика ва механика йўналишлари учун мўлжалланган. Албатта, дарсликни ёзишда ундан магистрлар ва аспирантлар фойдаланиши ҳам назарда тутилган. Дарслик тўртта бобдан иборат бўлиб, биринчи боб умумий топология элементларига бағишланган. Иккинчи, учинчи бобларда чизиқлар ва сиртлар назарияси ўрганилади. Механика йўналиши режасида тензор ҳисобни ўрганиш назарда тутилганлигини ҳисобга олиб тўртинчи бобда тензор анализ элементлари ёритилган. Дифференциал геометрия курси бўйича ўзбек тилидаги биринчи дарсликни М.А. Собиров ва А.Ё. Юсупов биргаликда ёзишган ва 1956 йили чоп эттиришган эди. Бу биринчи дарслик ҳажми жиҳатдан жуда катта бўлиб, чизиқлар ва сиртлар назарияси бўйича жуда кўп маълумотларни ўз ичига олган. Ундан ҳозир ҳам талабалар фойдаланиб келишмоқда. Лекин кейинги вақтда ўқув режасининг ўзгариши, дифференциал геометрия фанининг тез ривожланиши ҳамда мустақил республикамизда таълим соҳасидаги қатор қонунларнинг қабул қилиниши кўпгина фанлардан, шу жумладан, дифференциал геометриядан ҳам янги дарслик ёзилишини тақозо қилмоқда.

Бу дарслик муаллифнинг Ўзбекистон Миллий Университети механика-математика факультетида ўқиган маърузалари асосида ёзилди. Албатта дарсликда муаллифнинг дифференциал геометрия курсини ўқитишга бўлган ўз нуқтаи назари ифода этилган. Дарслик қўлёзмасини ўқиб, ўз фикр-мулоҳазаларини билдирган профессорлар, Т.Тўлаганов, Н.Ғанихўжаевлар ва доцент Ў.Илхомовга ўз миннатдорчилигимни билдираман.

КИРИШ

Дифференциал геометрия курсида уч ўлчамли фазодаги чизиқлар ва сиртлар математик анализ ёрдамида ўрганилади. Маълумки, аналитик геометрия курсида чизиқлар ва сиртларни ўрганиш уларнинг тенгламаларини текшириш ёрдамида амалга оширилади. Шунинг учун алгебраик методлар аналитик геометрия курсида асосий роль ўйнайди. Дифференциал геометрия курсида биз чизиқ ва сиртларни тенгламалар ёрдамида эмас, балки фазодаги маълум хоссаларга эга бўлган фигуралар сифатида аниқлаймиз ва уларни математик анализ ёрдамида ўрганиш учун дифференциаланувчи функциялар ёрдамида параметрлаймиз. Геометрияда математик анализ методларини тадбиқ қилишга Петербург фанлар академияси аъзоси Л. Эйлер катта ҳисса қўшди. У чизиқни параметрлаш, сирт нуқтасида бош йўналишлар каби муҳим тушунчаларни киритди ва жуда ажойиб теоремаларни исбот қилди. Дифференциал геометриянинг асосий масалалари систематик равишда ёритилган биринчи асарни Гаспар Монж ёзди. Унинг «Чексиз кичиклар анализининг геометрияга тадбиқи» номли китоби 1795 йили чоп этилди. Г. Монжнинг шогирдлари Дьюпен, Менье ҳам сиртлар назариясига катта ҳисса қушдилар.

Геометрия фани XIX асрда жуда тез ривожланди. 1826 йили буюк математик Н.И. Лобачевский Евклид геометриясидан фарқли геометрия мавжуд эканлигини кўрсатди. Бу геометрияда геодезик учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси 180° дан кичикдир. 1827 йили Гаусс сиртнинг тўлиқ эгрилиги унинг ички геометриясига тегишли эканлигини исботлади. 1854 йили Б.Риман Лобачевский геометриясини ҳам ўз ичига олувчи янги геометрияни асослаб борди. Бу геометрия Риман геометрияси деб аталади. Риман геометриясида геодезик учбурчаклар ички бурчаклар йиғиндиси 180° дан катта ҳам, кичик ҳам бўлиши мумкин.

XX асрда дифференциал геометриянинг ривожланишида чизиқлар ва сиртлар ўрнига ҳар хил дифференциал структуралар киритилган силлиқ кўпхилликларни ўрганиш тенденцияси пайдо бўлди ва ривожланди. Бу объектларни (силлиқ кўпхилликларни) ўрганиш қулайлиги шундаки, улар чизиқлар ва сиртлар каби Евклид фазосининг қисм тўпламлари сифатида эмас, балки дифференциал структура киритилган абстракт топологик фазолар сифатида аниқланади. Кўпхилликлар назариясида чизиқлар ва сиртлар мос равишда бир ўлчамли ва икки ўлчамли кўпхилликларни ташкил этади. Ҳозирги вақтда кўпхилликлар назарияси геометрия курсининг асосий қисмлардан бири бўлиб қолди.

I БОБ

УМУМИЙ ТОПОЛОГИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Бу боб дифференциал геометрия курсини ўрганишда зарур бўладиган умумий топологиянинг асосий тушунчаларига бағишланган.

§ 1. Евклид фазосидаги топология

Ҳақиқий сонлар тўпламини R^1 билан белгилаймиз ва $n \geq 1$ учун $R^n = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) : x^i \in R^1, i = 1,2,\ldots n\}$ тўпламда $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ва $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ нуқталар орасидаги масофани

$$d(x, y) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + \ldots + (y^n - x^n)^2}$$

формула билан аниқлаймиз. Бу киритилган $d : R^n \times R^n \to R^1$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантиради.

1) мусбат аниқланган: ихтиёрий x, $y \in R^n$ жуфтлик учун $d(x,y) \geq 0$ бўлиб, $d(x,y)=0$ бўлиши учун $x=y$ муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.
2) симметрик функциядир: ихтиёрий x,y жуфтлик учун $d(x,y)=d(y, x)$ муносабатлар ўринли.
3) учбурчак тенгсизлигини қаноатлантиради: ихтиёрий x, y, z учта нуқта учун $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ тенгсизлик бажарилади.

Юқорида $d(x,y)$ функциянинг 1, 2-шартларни қаноатлантириши равшан. Бу шартларнинг учинчиси сизга математик анализ курсидан маълум бўлган

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a^i - b^i)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Коши тенгсизлигидан келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$, $z = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$ нуқталар учун $a^k = x^k - z^k, b^k = z^k - y^k$ белгилашлар киритсак, Коши тенгсизлигидан $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ тенгсизлик келиб чиқади. Киритилган d функция билан биргаликда R^n метрик фазо бўлади.

Евклид фазода берилган x нуқта ва $r > 0$ сони учун

$$B_r(x)=\{y\in R^n : d(x,y)<r\}$$

тўплам маркази x нуқтада ва радиуси r га тенг очиқ шар деб,

$$\overline{B_r}(x)=\{y\in R^n : d(x,y)\le r\}$$

тўплам эса маркази x нуқтада бўлган ва радиуси r га тенг ёпиқ шар деб аталади.

Сонлар ўқида, яъни R^1 да $B_r(x)$ очиқ шар $(x-r,\ x+r)$ очиқ интервал, ёпиқ $B_r(x)$ шар эса $[x-r,\ x+r]$ ёпиқ кесма бўлади.

Энди очиқ шар ёрдамида R^n да очиқ тўплам тушунчасини киритамиз. Берилган А тўплам ва унга тегишли a нуқта учун шундай $r>0$ сони мавжуд бўлиб $B_r(a)\subset A$ бўлса, a нуқта А тўпламнинг ички нуқтаси дейилади. Ҳамма нуқталари ички нуқталар бўлган тўплам очиқ тўплам дейилади. Демак, ҳар қандай очиқ шар очиқ тўплам бўлади, чунки $x\in B_r(a)$ бўлса, $r_x=\min\{d(a,x), r-d(a,x)\}>0$ сони учун $B_{r_x}\subset B_r(a)$ бўлади. Ҳақиқатан $y\in B_{r_x}(x)$ бўлса, $d(a,y)\le d(a,x)+d(y,x)\le d(a,x)+r_x\le d(a,x)+r-d(a,x)=r$ яъни $d(a,y)<r$, демак $B_{r_x}(x)\subset B_r(a)$ бўлади. Энди биз бўш тўпламни $\varnothing$ билан белгилаб, уни ихтиёрий тўплам учун қисм тўплам ҳисоблаймиз, ва уни R^n нинг очиқ қисм тўплами деб қабул қиламиз. Ана шунда очиқ қисм тўпламлар учун қуйидаги теоремани исботлай оламиз.

Теорема1. Очиқ қисм тўпламлар учун қуйидагилар ўринлидир.

1. Бутун фазо, яъни R^n очиқ тўпламдир.
2. Бўш тўплам очиқ тўпламдир.
3. Чекли сондаги очиқ қисм тўпламларнинг кесишмаси (умумий қисми) очиқ тўпламдир.
4. Ҳар қандай очиқ тўпламлар оиласи учун бу оиладаги очиқ тўпламлар йиғиндиси очиқ тўпламдир.

Исбот. Теореманинг иккинчи тасдиғи исбот талаб қилмайди, чунки бўш тўпламни очиқ тўплам деб эълон килганмиз. Агар $a\in R^n$ бўлса, ихтиёрий $r>0$ сони учун $B_r(a)\subset R^n$ муносабат ҳар доим ўринли, шунинг учун ҳам R^n очиқ тўпламдир.

Энди A_1, A_2,.., A_m очиқ тўпламлар берилган бўлса, $A=\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ тўпламнинг очиқ эканлигини кўрсатайлик. Агар $A=\varnothing$ бўлса, иккинчи пунктга кўра А очиқ тўплам бўлади. Шунинг учун $A\neq\varnothing$ деб фараз қилиб, А га тегишли ихтиёрий a нуқтанинг ички нуқта эканлигини кўрсатайлик. Агар $a\in A$ бўлса, унда $a\in A_i$ муносабат барча i лар учун бажарилади. Ҳар бир A_i очиқ тўплам бўлганлиги учун шундай $r_i>0$ сони мавжудки, $B_{r_i}(a)\subset A_i$ муносабат бажарилади. Бу чекли сондаги r_i сонларининг энг кичигини r билан белгиласак, $B_r(a)\subset B_{r_i}(a)\subset A_i$ муносабат бажарилади. Демак $B_r(a)\subset A$, ва a нуқта А тўпламнинг ички нуқтасидир. Энди теореманинг 4-пунктини исботлайлик. Очиқ тўпламлардан иборат $\{A_\alpha\}$ оила берилган бўлсин. $A=\bigcup_\alpha A_\alpha$ йиғиндининг очиқ тўплам эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун А га тегишли ихтиёрий a нуқта олиб, унинг ички нуқта эканлигини кўрсатамиз. Йиғиндига тегишли a нуқта йиғиндида қатнашаётган A_α тўпламларнинг камида бирортасига тегишли бўлади. Фараз қилайлик $a\in A_{\alpha_0}$ бўлсин. A_{α_0} тўплам очиқ бўлганлиги учун бирорта $r>0$ мавжуд бўлиб, $B_r(a)\subset A_{\alpha_0}$ муносабат бажарилади. Демак $B_r(a)\subset A$ ва А тўплам учун a ички нуқта бўлади. Бундан эса, А нинг очиқ тўплам эканлиги келиб чиқади.

Энди очиқ тўплам тушунчасидан фойдаланиб, ёпиқ тўплам тушунчасини киритамиз. Берилган F тўпламнинг тўлдирувчиси $CF=R^n\setminus F$ очиқ тўплам бўлса, F ёпиқ тўплам деб аталади. Биринчи теоремадан фойдаланиб, ёпиқ тўпламлар учун қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

Теорема-2. Ёпиқ қисм тўпламлар учун қуйидагилар ўринлидир.

1. Бутун фазо, яъни R^n ёпиқ тўпламдир.
2. Бўш тўплам ёпиқ тўпламдир.

3. Ҳар қандай ёпиқ қисм тўпламлар оиласи учун шу оиладаги тўпламлар кесишмаси ёпиқ тўпламдир.
4. Чекли сондаги ёпиқ тўпламларнинг йиғиндиси ёпиқ тўпламдир

Биз R^n нинг $x=(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y=(y^1, y^2, \dots, y^n)$ элементлари учун

$$x+y=(x^1+y^1, x^1+y^1, \dots, x^n+y^n), \quad \lambda x=(\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n)$$

қоидалар билан янги $x+y$, λx элементларни аниқлашимиз мумкин. Бу ерда λ ҳақиқий сон. Бу киритилган амалларга нисбатан R^n чизиқли фазо бўлади. Бу ҳолда R^n ни чизиқли фазо сифатида қарасак, унинг элементини вектор деб атаймиз. Чизиқли фазо учун белгилашни ўзгартирмаймиз, чунки ҳар гал текст мазмунидан R^n нинг метрик фазо ёки чизиқли фазо эканлиги кўриниб туради. Метрик R^n фазо нуқталарининг ҳар бир x, y жуфтига боши x нуқтада, охири эса y нуқтада бўлган $\overline{xy}$ векторни мос қўйсак, бу вектор чизиқли R^n фазонинг элементи бўлади. Чизиқли R^n фазода скаляр кўпайтма киритилгандан кейин метрик R^n фазони Евклид фазоси деб атаймиз. Демак, R^n ни Евклид фазоси деганимизда, унда d функция ёрдамида метрика киритилиб, унга тегишли нуқталарнинг ҳар бир жуфтига мос қўйилган векторлар фазосида скаляр кўпайтма киритилгандир.

Евклид фазосида

$$y^i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x^j+a_i, i=1,2,\dots,n,$$

кўринишдаги алмаштиришда $\{a_{ij}\}$ матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса, у аффин алмаштириш деб аталади. Бу ерда

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \bar{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A=(a_{ij}),$$

белгилашларни хисобга олиб аффин алмаштиришни $\overline{y} = A\overline{x} + \overline{a}$ кўринишда ёзишимиз мумкин. Агар А матрица ортогонал матрица бўлса, F акслантириш ҳаракат деб аталади. Маълумки, А ортогонал матрица бўлса, $\overline{x}, \overline{y}$, векторлар учун

$$(A\overline{x}, A\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$$

тенглик ўринлидир, яъни ҳаракатда скаляр кўпайтма сақланади. Ҳақиқатан, А ортогонал матрица бўлса

$$A^T A=E$$

муносабат ўринли бўлади. Бу ерда A^T транспонирланган матрица, Е эса бирлик матрица. Шунинг учун

$$(A\overline{x}, A\overline{y}) = (\overline{x}, A^T A\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$$

тенгликни хосил қиламиз. Бизга аналитик геометрия курсидан маълумки ҳаракат икки нуқта орасидаги масофани сақлайди. Агар detA>0 бўлса, маълумки F ҳаракат фазода ориентацияни ҳам сақлайди.

§ 2.Топологик фазолар

Х-бирорта тўплам ва унинг баъзи қисм тўпламларидан иборат $\tau=\{G_\alpha\}$ оила берилган бўлсин. Бу оила чекли сондаги элементлардан иборат бўлиши ёки унинг элементлари чексиз кўп бўлиши мумкин. жумладан, τ оилага Х нинг ҳамма қисм тўпламлари тегишли бўлиши ҳам мумкин. Шунинг учун биз индекс ўзгарувчиси α нинг қандай тўпламга тегишли эканлигини кўрсата олмаймиз. Биз Х нинг баъзи қисм тўпламларидан иборат τ оиладан қуйидаги шартларининг бажарилишини талаб қиламиз:

1) Х тўплам τ га тегишли бўлсин (маълумки, ҳар қандай тўплам ўзининг қисм тўплами бўлади. Шунинг учун у τ га тегишли бўлиши мумкин, бўлмаслиги ҳам мумкин);

2) Бўш тўплам τ га тегишли бўлсин (бўш тўплам ҳар қандай тўпламга қисм тўпламдир, шунинг учун у Х нинг қисм тўплами сифатида τ га тегишли бўлиши мумкин ёки бўлмаслиги мумкин);

3) τ оилага тегишли ҳар қандай иккита тўпламнинг умумий қисми (кесишмаси) τ оилага тегишлидир.

4) τ оилага тегишли қисм тўпламлардан иборат ихтиёрий { G_{α_β} } оила учун йиғинди $\underset{\beta}{U} G_{\alpha_\beta}$ ҳам τ га тегишли бўлсин. Бу ерда { G_{α_β} } оила чекли сондаги элементлардан иборат ёки чексиз кўп элементлардан иборат бўлиши мумкин. Шунинг учун бу ерда ҳам биз индексдаги ўзгарувчи β тегишли тўпламни кўрсата олмаймиз. Жумладан, { G_{α_β} } оила τ оила билан устма-уст тушиши ҳам мумкин. Юқоридаги талаб қилинган 4 та шартлар бажарилган тақдирда (X, τ) жуфтлик топологик фазо деб аталади, τ эса X тўпламдаги топология деб аталади. Демак, бирорта тўпламни топологик фазога айлантириш учун унинг юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи қисм тўпламларидан иборат бирорта оилани аниқлаш етарлидир. (X, τ) топологик фазо бўлса, X нинг элементлари нуқталар деб, τ га тегишли X нинг қисм тўпламлари очиқ тўпламлар деб аталади. Юқоридаги келтирилган 1) - 4) шартларни топологик фазо аксиомалари деб атаймиз. Шундай қилиб, биз ҳозир умумий топологиянинг асосий тушунчаси топологик фазо тушунчасини киритдик. энди бир нечта мисоллар келтирайлик.

1 - мисол.

$X=R^n$ бўлса, τ билан биринчи параграфда киритилган R^n даги очиқ тўпламлар оиласини белгилаймиз. Биринчи теоремага кўра, τ топология бўлади. Бу топология евклид топологияси деб аталади.

2 - мисол.

X-ихтиёрий тўплам, τ оила бўш тўплам ва X дан иборат бўлса, (X, τ) жуфтлик топологик фазо бўлади. Бу топологик фазода фақат иккита очиқ қисм тўплам мавжуд.

3 - мисол.

X-ихтиёрий тўплам, τ оила X нинг ҳамма қисм тўпламларидан иборат оила бўлсин. Бу топологик фазода ихтиёрий қисм тўплам очиқ тўпламдир.

(X, τ) - топологик фазода, $A \subset X$ тўплам учун унинг тўлдирувчиси $X \setminus A$ очиқ тўплам бўлса, A тўплам ёпиқ тўплам деб аталади. Топологик фазо аксиомаларидан фойдаланиб ёпиқ тўпламлар учун қуйидаги хулосаларни исботлаш мумкин:

1) X ёпиқ тўпламдир;

2) бўш тўплам ёпиқ тўпламдир;

3) чекли сондаги ёпиқ тўпламларнинг йиғиндиси ёпиқ тўпламдир;

4) ихтиёрий ёпиқ тўпламлар оиласи учун бу тўпламлар кесишмаси (умумий қисми) ёпиқ тўпламдир;

Бу хоссаларни исботлаш ўқувчиларга ҳавола қилинади.

(X, τ) - топологик фазо, $x \in X$ бўлсин. Агар U очиқ тўплам бўлиб, $x \in U$ бўлса, U тўплам x нинг атрофи дейилади. Шундай қилиб, x нуқта тегишли бўлган ихтиёрий очиқ тўплам шу нуқтанинг атрофи дейилар экан. $A \subset X$, $x \in X$ бўлиб, x нуқтанинг бирорта атрофи U учун $U \subset A$ муносабат бажарилса, x нуқта A тўпламнинг ички нуқтаси дейилади. A тўпламнинг ички нуқталари тўпламини intA билан белгилаймиз. Агар x нуқтанинг ихтиёрий атрофи U учун $A \cap U \neq \varnothing$ ва $(X \backslash A) \cap U \neq \varnothing$ муносабатлар бажарилса x нуқта A тўпламнинг чегаравий нуқтаси дейилади. Чегаравий нуқталар тўпламини ∂A кўринишда белгилаймиз.

4 – Мисол.

$X = R^1$, $A = (a,b)$ бўлсин. Бу ерда a,b- ҳақиқий сонлар ва $a<b$. Бу мисолимизда $\operatorname{int}A = (a,b)$, $\partial A = \{a,b\}$.

5 - Мисол.

$X = R^1$, A - ҳамма рационал сонлар тўплами бўлсин. Бу мисолимизда $\partial A = X$, чунки ихтиёрий ҳақиқий сон учун унга яқинлашувчи рационал сонлар кетма-кетлиги мавжуд.

$A \subset X$, $x \in X$ бўлиб, x нуқтанинг ихтиёрий атрофида A тўпламга тегишли нуқталар мавжуд бўлса, x нуқта A тўпламнинг уриниш нуқтаси дейилади. A тўпламнинг ҳамма уриниш нуқталари тўплами $\bar{A}$ билан белгиланади ва A нинг ёпиғи деб аталади.

Int$A$, ∂A ва A лар учун қуйидаги теоремалар ўринлидир.

Теорема-3. $\bar{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$

Теорема-4. A тўплам очиқ тўплам бўлиши учун $\operatorname{int}A = A$ муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Теорема-5. Ҳар қандай A тўплам учун $\bar{A}$ ёпиқ тўпламдир.

Учинчи теореманинг исботи. Сизларга маълумки $A=B$ муносабат $A \subset B$, $B \subset A$ муносабатларга тенг кучлидир. Демак $\bar{A} \subset \operatorname{int}A \cup \partial A$ ва $\bar{A} \supset \operatorname{int}A \cup \partial A$ муносабатларни исботлашимиз керак.

Агар $x \in \bar{A}$ бўлса, x нинг ихтиёрий атрофида A тўпламга тегишли нуқталар мавжуд. Агар x нинг ихтиёрий атрофида $X \backslash A$ га тегишли нуқталар ҳам бўлса, унда $x \in \partial A$. Лекин x нинг бирорта U атрофида $X \backslash A$ га тегишли нуқталар бўлмаса, унда $x \in U \subset A$ ва демак $x \in \operatorname{int}A$. Бу мулоҳазаларимиздан, $\bar{A} \subset \operatorname{int}A \cup \partial A$ эканлиги келиб чиқади. Энди $x \in \operatorname{int}A \cup \partial A$ бўлсин. Демак $x \in \operatorname{int}A$ ёки $x \in \partial A$ муносабат бажарилади. Иккала ҳолда ҳам x нинг ихтиёрий атрофида A тўпламга тегишли нуқталар мавжуд ва демак $x \in \bar{A}$. □

Тўртинчи теореманинг исботи ўқувчиларимизга ҳавола этилади.

Бешинчи теореманинг исботи. $\bar{A}$ нинг ёпиқ тўплам эканлигини исботлаш учун $X\setminus\bar{A}$ тўпламнинг очиқ тўплам эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун $X\setminus\bar{A}$ га тегишли ихтиёрий x нуқтани қарайлик. Демак, x нуқта $\bar{A}$ га тегишли эмас ва шунинг учун уни шундай U атрофи мавжудки, бу атрофда A га тегишли нуқталар йўқ, яъни $U\cap A=\varnothing$. Шунинг учун $x\in U\subset X\setminus\bar{A}$, яъни x нуқта $X\setminus\bar{A}$ нинг ички нуқтасидир. Тўртинчи теоремага кўра $X\setminus\bar{A}$ очиқ тўпламдир. □

Теорема-6. Ихтиёрий ёпиқ A тўплам учун $\bar{A}=A$ муносабат ўринлидир.

Исбот. Ҳар доим $A\subset\bar{A}$ бўлганлиги учун ёпиқ A тўплам учун $A\supset\bar{A}$ муносабатни исботлаш етарли. Бунинг учун $\bar{A}$ га тегишли ихтиёрий x нуқтани қарайлик. Агар $x\in X\setminus A$ бўлса, $X\setminus A$ очиқ тўплам бўлганлиги ва x уриниш нуқтаси эканлигидан $(X\setminus A)\cap A\neq\varnothing$ муносабат келиб чиқади. Бу қарама-қаршилик $x\in A$ эканлигини кўрсатади. □

Энди (X, τ) топологик фазо, ва $A\subset X$ – бирорта қисм тўплам бўлсин. Берилган A тўпламни ҳам τ топология ёрдамида топологик фазога айлантириш мумкин. Бунинг учун A тўпламда $\tau_A=\{A\cap G_\alpha : G_\alpha\in\tau\}$ оила топология эканлигини кўрсатамиз:

1) $X\in\tau$ бўлганлиги ва $X\cap A=A$ тенгликдан $A\in\tau_A$ келиб чиқади.

2) $\varnothing\in\tau$ бўлганлиги ва $\varnothing\cap A=\varnothing$ тенгликдан $\varnothing\in\tau_A$ келиб чиқади.

3) $A_1,A_2\in\tau_A$ бўлса, $G_1,G_2\in\tau$ тўпламлар мавжуд бўлиб, $A_1\cap A_2=(A\cap G_1)\bigcap(A\cap G_2)=A\bigcap(G_1\bigcap G_2)$ тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $G_1\bigcap G_2\in\tau$ бўлганлиги учун $A_1\bigcap A_2\in\tau_A$ бўлади.

4) τ_A оилага тегишли $\{A_\beta\}$ тўпламлар оиласи берилган бўлса, τ га тегишли G_β тўпламлар мавжуд бўлиб, $\bigcup_\beta A_\beta=\bigcup_\beta(A\bigcap G_\beta)=A\bigcap\left(\bigcup_\beta G_\beta\right)$ тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $\bigcup_\beta G_\beta\in\tau$ бўлганлиги учун $\bigcup_\beta A_\beta$ йиғинди τ_A оилага тегишли бўлади.

Демак (A, τ_A) жуфтлик топологик фазо бўлади. Бу ҳолда τ_A топологияни A тўпламда X топологик фазодаги τ топология ёрдамида аниқланган ёки келтирилган топология деб аталади.

§ 3. Метрик фазолар

Метрик фазолар топологик фазоларнинг жуда муҳим синфини ташкил этади. Бу фазоларда ихтиёрий икки нуқта учун улар орасидаги масофа тушунчаси киритилади. Метрик фазоларнинг муҳим турлари билан сиз биринчи курсда танишгансиз.

X - ихтиёрий тўплам, тўғри кўпайтма $X\times X$ да

$\rho : X\times X\to R^1$ функция аниқланган бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин :

1) $\rho(x,y)\geq 0,\ \forall x,y\in X$

2) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y\ \ \forall x,y\in X$

3) $\rho(x,y)=\rho(y,\ x)\ \forall x,y\in X$

4) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,\ y)\ \forall x,y,z\in X$

Юқоридаги шартлар метрик фазо аксиомалари дейилади. Бу шартлар бажарилса (X,ρ) жуфтлик метрик фазо дейилади. (X,ρ) - метрик фазо, $x\in X$, $r>0$ бўлса маркази x нуқтада ва радиуси r га тенг очиқ шар $U_r(x)$ қуйидагича аниқланади:

$$U_r(x)=\{y\in X : \rho(x,y)<r\}.$$

Очиқ шар ёрдамида метрик фазода очиқ тўплам тушунчасини киритиш мумкин. $A\subset X$ -қисм тўплам, $x\in X$ бўлиб бирорта $r>0$ сон учун $U_r(x)\subset A$ бўлса x нуқта A тўпламнинг ички нуқтаси дейилади. Ҳамма нуқталари ички нуқталар бўлган тўплам очиқ тўплам дейилади. Агар τ оила сифатида $(X,\ \rho)$ метрик фазонинг ҳамма очиқ қисм тўпламлари ва бўш тўпламдан иборат оилани олсак, натижада (X,τ) жуфтлик топологик фазога айланади. Бу топология (X,ρ) фазода ρ метрика ёрдамида киритилган топология деб аталади. Энди τ оиланинг топологик фазо аксиомаларини қаноатлантиришини текширайлик.

1) $x\in X$ ва r ихтиёрий сон бўлса, $U_r(x)\subset X$ бўлганлиги учун X тўплам τ оиласига тегишлидир;

2) Бўш тўплам τ га бу оиланинг аниқланишига кўра тегишлидир;

3) $A_1,\ A_2\in\tau$ бўлсин. Агар $A_1\cap A_2=\varnothing$ бўлса, иккинчи шартга кўра $A_1\cap A_2\in\tau$. Фараз қилайлик, $A_1\cap A_2\neq\varnothing$ ва $x\in A=A_1\cap A_2$, бўлсин. A_1, ва A_2 тўпламлар очиқ бўлганлиги учун шундай r_1 ва r_2 мусбат сонлар мавжудки, $U_{r_1}(x)\subset A_1$, $U_{r_2}(x)\subset A_2$ муносабатлар бажарилади. Агар $0<r<\min\{r_1,r_2\}$ бўлса, $U_r(x)\subset A=A_1\cap A_2$ муносабат бажарилади. Демак , $A=A_1\cap A_2$ тўплам τ оилага тегишлидир;

4) $\{A_\alpha\}$ - τ га тегишли тўпламлар оиласи бўлсин. $\bigcup_\alpha A_\alpha \in\tau$ эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун $x\in A=\cup A_\alpha$ нуқтани қарайлик. x нуқта йиғиндига тегишли бўлганлиги учун шундай индекс α_0 мавжудки, $x\in A_{\alpha_0}$

муносабат бажарилади. A_{α_0} тўплам очиқ бўлганлиги учун шундай $r>0$ сон мавжудки, $U_r(x)\subset A_{\alpha_0}\subset A$ муносабат бажарилади.

Демак, τ оила топологик фазо аксиомаларини қаноатлантиради.

6 - Мисол. $X=R^1$, $\rho(x\ ,y)=|\ x-y|$

7 - Мисол. $X=R^n$, $\rho(x\ ,\ y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}$

Бу ерда $x=(x^1,\ x^2,...,\ x^n)$, $y=(y^1,\ y^2,...,\ y^n)$.

8-Мисол. $X=C[a\ ,b\ ]$ билан $[a,b]$ сегментда аниқланган узлуксиз функциялар тўплами белгилаймиз. Бу тўпламда $x(t)$, $y(t)$ функциялар учун

$r(x,y)=\sup\limits_{t\in[a,b]}|y(t)-x(t)|$ формула бўйича метрикани

аниқлаймиз. Бу ҳолда r учун метрик фазо аксиомаларини текшириш енгил, шунинг учун бу ишни ўқувчиларга ҳавола этамиз.

Энди метрик фазо учун ички, чегаравий ва уриниш нуқталарини киритайлик.

$A\subset X$ - қисм тўплам, $x\in X$ бўлиб, ихтиёрий $r>0$ учун $U_r(x)\cap A\neq\varnothing$, $U_r(x)\cap(X\backslash A)\neq\varnothing$ бўлса, x нуқта A тўпламнинг чегаравий нуқтаси дейилади. Агар ихтиёрий $r>0$ учун фақат $U_r(x)\cap A\neq\varnothing$ муносабат бажарилса, x нуқта A тўпламнинг уриниш нуқтаси дейилади. Бирорта $r>0$ сони учун $U_r(x)\subset A$ муносабат бажарилса, x нуқта A учун ички нуқта дейилади.

Метрик фазолар шундай бир ажойиб хусусиятга эгаки, бу хусусият Хаусдорф аксиомаси деб аталади (X, ρ)-метрик фазо, $x,y\in X$ ва $x\neq y$ бўлсин Агар $d=\rho(x,y)$, $0<r<d/2$ бўлса, $U_r(x)$ $U_r(y)$ шарлар ўзаро кесишмайди. Биз топологик фазолар учун ҳам Хаусдорф аксиомасининг бажарилишини талаб қиламиз. Бу аксиома қуйидагича таърифланади.

Хаусдорф аксиомаси. (X,τ) - топологик фазо, $x,y\in X$ ва $x\neq y$ бўлса, x ва y нуқталарнинг ўзаро кесишмайдиган атрофлари мавжуд.

Хаусдорф аксиомаси бажарилган топологик фазолар Хаусдорф фазолари дейилади. Биз бу ҳақида алоҳида таъкидламасдан курс давомида ҳамма топологик фазолар учун Хаусдорф аксиомаси бажарилган деб фараз қиламиз. Юқорида таъкидлаганимиздек, метрик фазоларда бу аксиома ҳар доим бажарилган.

Энди топологик фазоларга қайтайлик. (X, τ) - топологик фазо $\{x_n\}\in X$, $n=1,2,...$ ва $x\in X$ бўлсин. x нуқтанинг ихтиёрий U атрофи учун шундай сон $N>0$ мавжуд бўлиб, $n>N$ да $x_n\in U$ муносабат бажарилса, $\{x_n\}$- кетма-кетлик x нуқтага яқинлашади дейилади ва $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ (ёки $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$) кўринишда ёзилади.

Теорема-7. Хаусдорф фазосида ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик ягона лимитга эгадир.

Исбот. $\{x_n\}$-яқинлашувчи кетма-кетлик ва $\lim x_n=x$ бўлсин. Агар $x_n \to y$ ва $y \neq x$ бўлса, U_1 ва U_2 билан мос равишда x ва y нуқталарнинг ўзаро кесишмайдиган атрофларини белгилаймиз (Хаусдорф аксиомаси). $\{x_n\}$ - кетма-кетлик x ва y нуқталарга яқинлашганлиги учун шундай N_1, N_2 сонлар мавжудки, $n \geq N_1$ да $x_n \in U_1$, $n \geq N_2$ да $x_n \in U_1$ бўлади. Бундан $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ бўлса, $x_n \in U_1 \cap U_2$ муносабатни оламиз. Демак, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Бу зиддиятдан $y = x$ бўлиши келиб чиқади. □

§ 4. Боғланишли ва компакт тўпламлар

I. Боғланишли тўпламлар.

(X,τ) - топологик фазо, $A \subset X$ - қисм тўплам бўлсин. Иккита очиқ G_1 ва G_2 қисм тўпламлар мавжуд бўлиб,

1) $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$
2) $(A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \varnothing$
3) $A \cap G_1 \neq \varnothing$, $A \cap G_2 \neq \varnothing$.

шартлар бажарилса, A тўплам боғланишсиз тўплам дейилади. Агар бу шартларни қаноатлантирувчи G_1 ва G_2 очиқ тўпламлар мавжуд бўлмаса, A тўплам боғланишли тўплам дейилади.

$A = X$ ҳолни қарайлик. Бу холда $X \cap G_1 = G_1$, $X \cap G_1 = G_2$ бўлганлиги учун юқоридаги шартлар қуйидаги кўринишда ёзилади.

$1^1)$ $X = G_1 \cup G_2$
$2^1)$ $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
$3^1)$ $G_1 \neq \varnothing$, $G_2 \neq \varnothing$.

Демак , агар $1^1)$, $2^1)$, $3^1)$ шартларни қаноатлантирувчи очиқ G_1 ва G_2 қисм тўпламлар мавжуд бўлса, X ни боғланишсиз топологик фазо деб атаймиз. Акс холда, яъни бу $1^1)$,$2^1)$, $3^1)$ шартларни қаноатлантирувчи G_1, G_2 тўпламлар мавжуд бўлмаса, X ни боғланишли топологик фазо деб атаймиз.

Теорема-8. Боғланишли тўпламнинг ёпиғи ҳам боғланишли тўпламдир.

Исбот. (X,τ) - топологик фазо, $A \subset X$ - боғланишли қисм тўплам бўлсин. Агар $\overline{A}$ боғланишсиз тўплам бўлса, очиқ G_1 ва G_2 қисм тўпламлар мавжуд бўлиб, қуйидаги

$$\overline{A} = (G_1 \cap \overline{A}) \cup (G_2 \cap \overline{A})$$
$$(G_1 \cap \overline{A}) \cap (G_2 \cap \overline{A}) = \varnothing$$
$$G_1 \cap \overline{A} \neq \varnothing,\ G_2 \cap \overline{A} \neq \varnothing,$$

муносабатлар бажарилади. $A \subset \bar{A}$ бўлганлиги учун,

$$(G_1 \cap \bar{A}) \cap A = G_1 \cap A,\ (G_2 \cap \bar{A}) \cap A = G_2 \cap A\ A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A),$$

тенгликлар ўринлидир.

G_1 ва G_2 очиқ тўпламлар, $G_1 \cap \bar{A} \neq \varnothing$, $G_2 \cap \bar{A} \neq \varnothing$ бўлганлигидан, $G_1 \cap A \neq \varnothing$ ва $G_1 \cap A \neq \varnothing$ муносабатлар келиб чиқади ва ниҳоят $(G_1 \cap \bar{A}) \cap (G_1 \cap \bar{A}) = \varnothing$ тенгликдан $(G_1 \cap A) \cap (G_1 \cap A) = \varnothing$ тенглик келиб чиқади. Бу муносабатлар биргаликда А нинг боғланишсиз тўплам эканлигини кўрсатади. Бу зиддиятдан $\bar{A}$ тўпламнинг боғланишли эканлиги келиб чиқади.□

Теорема-9. $\{A_\alpha\}$- боғланишли тўпламлар оиласи ва $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$ бўлса, $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ тўплам ҳам боғланишли тўпламдир.

Исбот. Фараз қилайлик А тўплам боғланишсиз бўлсин. Боғланишсиз тўплам таърифига кўра шундай очиқ G_1 ва G_2 тўпламлар мавжудки ,

$$A = (G_1 \cap A) \cup (G_1 \cap A)$$
$$(A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \varnothing$$
$$A \cap G_1 \neq \varnothing,\ A \cap G_2 \neq \varnothing$$

муносабатлар ўринлидир.

Биринчи муносабатдан ихтиёрий α учун $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$ тенглик келиб чиқади. Ундан ташқари, иккинчи муносабатдан ва $A_\alpha \subset A$ эканлигидан $(A_\alpha \cap G_1) \cap (A_\alpha \cap G_2) = \varnothing$ тенглик келиб чиқади.

Демак, $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$ ва A_α боғланишли бўлганлиги учун $(A \cap G_1) = \varnothing$, $(A \cap G_2) = \varnothing$ тенгликлардан бирортаси ўринлидир.

Агар бирорта α_0 учун $A_\alpha \cap G_1 = \varnothing$ бўлса унда $A_\alpha \subset G_2$ бўлади. Лекин $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$ дан ҳамма α лар учун $A_\alpha \subset G_2$ эканлиги келиб чиқади. Бундан эса $A \cap G_1 = \varnothing$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу қарама-қаршилик теорема исботини якунлайди.□

Энди $x \in X$ бўлса, Н билан x нуқта тегишли бўлган ҳамма боғланишли тўпламлар йиғиндисини белгилайлик. Бу тўпламларнинг ҳаммасига x тегишли бўлганлиги учун 9-теорема шарти бажарилади. Демак, Н боғланишли тўпламдир. Н тўпламни x тегишли бўлган боғланишлилик компонентаси деб атаймиз. Аниқланишига кўра Н тўплам x тегишли бўлган боғланишли тўпламларнинг энг каттасидир.

Теорема-10. Ҳар хил икки нуқталар учун улар тегишли бўлган боғланишлилик компоненталари ёки кесишмайди ёки устма-уст тушади.

Исбот. $x, y \in X$ ва $x \neq y$ бўлса, улар тегишли бўлган боғланишлилик компоненталарини H_x ва H_y билан белгилайлик. Агар

$H_x \cap H_y \neq \varnothing$ бўлса, 9-теоремага кўра $H=H_x \cup H_y$ тўплам боғланишли бўлади ва боғланишлилик компонентасининг таърифига кўра $H=H_x=H_y$ тенглик келиб чиқади. □

Теорема-11. Боғланишлилик компонентаси ёпиқ тўпламдир.

Исбот. H тўплам x нуқта тегишли бўлган боғланишлилик компонентаси бўлсин. 8-теоремага кўра $\overline{H}$ - боғланишли тўпламдир. Компонента таърифига кўра $x \in \overline{H}$ дан $H = \overline{H}$ келиб чиқади. Демак, H ёпиқ тўпламдир. □

II. Компакт тўпламлар. (X, τ) - топологик фазо, $A \subset X$ - қисм тўплам ва бирорта $\{A_\alpha\}$ -очиқ тўпламлар оиласи берилган бўлсин. Берилган оила учун $\bigcup_\alpha A_\alpha \supset A$ муносабат бажарилса $\{A_\alpha\}$ оила A тўпламнинг очиқ қобиғи деб аталади. Агар қобиқ чекли сондаги тўпламлардан иборат бўлса, у чекли қобиқ деб аталади.

Таъриф. A тўпламнинг ихтиёрий очиқ қобиғидан чекли қобиқ ажратиш мумкин бўлса, A тўплам компакт тўплам деб аталади.

Табиийки , бу таърифда агар A = X бўлса , унда биз компакт фазо таърифини оламиз. Фақат бу ерда $\{A_\alpha\}$ оила X учун қобиқ бўлса, унда $\bigcup_\alpha A_\alpha \supset A$ муносабат ўрнига $\bigcup_\alpha A_\alpha = X$ тенглик ёзилади.

Теорема - 12. X - компакт фазо, $A \subset X$ - ёпиқ тўплам бўлса, A - компакт тўпламдир.

Исбот. $\{A_\alpha\}$ - оила A тўплам учун очиқ қобиқ бўлсин. A ёпиқ бўлганлиги учун X\A очиқ тўплам ва $\{A_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ оила X учун қобиқ бўлади. X компакт фазо бўлганлиги учун $\{A_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ оиладан X учун чекли қобиқ ажратиш мумкин. Ажратилган чекли қобиққа тегишли қисм тўпламлар $F_1, F_2, .., F_k$ бўлсин. Агар $\{F_i\}_1^k$ оилада X\A тўплам бўлмаса , $\{F_i\}$ оила $\{A_\alpha\}$ дан ажратилган A нинг чекли қобиғи бўлади. Агар $\{F_i\}$ оилада X\A бўлса , унда бу оиладан X \ A ни чиқариб, A учун чекли қобиқ хосил қиламиз. Демак, A компакт тўпламдир. Теорема исботланди.

Теорема - 13. X - хаусдорф фазо, $A \subset X$ - компакт тўплам ва $x \in X \setminus A$ бўлса, шундай очиқ кесишмайдиган G_1 ва G_2 тўпламлар мавжудки, $A \subset G_1$, $x \in G_2$, бўлади.

Исбот. A га тегишли ихтиёрий y нуқтани олсак, Хаусдорф аксиомасига кўра шундай очиқ кесишмайдиган G_x, G_y тўпламлар мавжудки $x \in G_x, y \in G_y$ бўлади. $\{G_y : y \in A\}$ оила A тўплам учун очиқ қобиқ бўлади ва A компакт бўлганлиги учун бу оиладан A учун чекли қобиқ ажратиш мумкин. Ажратилган чекли қобиққа тегишли тўпламлар

Ч-6527/2

$G_{y_1}, G_{y_2}, \ldots, G_{y_m}$ лар бўлсин. Бу очиқ тўпламлар билан кесишмайдиган x нуқтанинг атрофлари мос равишда $G_x(y_1)$, $G_x(y_2)$,...$G_x(y_m)$ тўпламлар бўлсин. Агар $G_1=\bigcup_{i=1}^{m} G_{y_i}$, $G_2=\bigcap_{i=1}^{m} G_x(y_i)$ бўлса, равшанки $A\subset G_1$, $x\in G_2$ ва $G_1\cap G_2=\varnothing$ муносабатлар бажарилади.□

Теорема - 14. X - хаусдорф фазо, $A \subset X$ - компакт тўплам бўлса, A ёпиқ тўпламдир.

Исбот. A нинг ёпиқ эканлигини кўрсатиш учун X\A нинг очиқ эканлигини кўрсатамиз. Агар $x\in$X\A бўлса, 11-теоремага кўра шундай очиқ G тўплам мавжудки, $x \in G \subset$ X\A муносабат бажарилади. Демак, x нуқта X\A учун ички нуқта ва x нинг ихтиёрий эканлигидан X\A нинг очиқ тўплам эканлиги келиб чиқади.

Теорема - 15. $X=R^n$, $A\subset X$ - бўлса, A нинг компакт тўплам бўлиши учун A нинг ёпиқ ва чегараланган тўплам бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Метрик фазода тўплам бирорта шар ичида ётса, у чегараланган тўплам дейилади. A компакт тўплам бўлса, R^n нинг хаусдорф фазо эканлигидан A нинг ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади (теорема-14). Энди A нинг чегараланганлигини кўрсатайлик. Бунинг учун бирорта $x\in A$ нуқтани олиб, маркази шу нуқтада бўлган $\{B_n(x)\}$ шарлар оиласини қараймиз, бу ерда $n = 1, 2, \ldots$. Бу шарлар оиласи A учун очиқ қобиқ бўлади ва A компакт бўлганлиги учун бу оиладан чекли қобиқ ажратиш мумкин. Агар чекли қобиқ $B_{n_1}(x_0), B_{n_2}(x_0), \ldots, B_{n_k}(x_0)$ шарлардан иборат бўлса, N билан $\max_{1\le i\le k}\{n_i\}$ ни белгилаймиз. Бу ерда $B_n(x)$ маркази x нуқтада, радиуси n бўлган очиқ шар. Бу ҳолда $A\subset B_N(x)$ эканлигидан A нинг чегараланганлиги келиб чиқади.

Етарлилиги. Теореманинг етарлилигини исботлаш учун, R^n да $Q_r=\{x\in R : |x| \le r\}$ кубнинг компактлигини исботлаймиз. Бунинг учун эса ишни ёпиқ кесманинг компактлигини исботлашдан бошлаймиз.

Лемма 1. $[a, b]$ - компакт тўпламдир.

Исбот. $\{U_\alpha\}$ - оила $[a, b]$ сегментнинг очиқ қобиғи бўлсин. Агар $x \in [a, b]$ ва $[a, x]$ сегмент учун чекли қобиқ мавжуд бўлса, бундай x нуқталар тўпламини A билан белгилаймиз. Равшанки, A бўш эмас,чунки $a \in A$. Бундан ташқари, бирорта α_0 учун $a\in U_{\alpha_0}$ бўлса, a нуқта ўзининг бирорта атрофи билан U_{α_0} да ётади. Шунинг учун A тўпламга a нуқтадан бошқа нуқталар ҳам тегишли. Демак, агар $c = \sup\{x : x \in A\}$ бўлса, $c > a$ эканлиги равшан. $c=\sup\{x: x\in A\}$ бўлганлиги учун $[a, c-\varepsilon]$ сегмент учун чекли қобиқ мавжуд. Агар $[a, c-\varepsilon]$ сегментнинг чекли қобиғига c тегишли бўлган U_{α_1} тўпламни қўшсак, $[a,c]$ учун чекли қобиқ ҳосил бўлади. Демак, $c\in A$. Энди $c=b$ эканлигини исботлайлик. Агар $c<b$ бўлса, ε ни шундай кичик қилиб оламизки, $[c-\varepsilon,c+\varepsilon]\subset U_{\alpha_1}$ бажарилсин. Шунда $[a,c]$ сегментнинг чекли қобиғи $[a,c+\varepsilon]$ учун ҳам чекли қобиқ бўлади. Бу эса c нинг аниқланишига зиддир. Демак, $c=b$. Лемма исботланди.

Лемма-2. Ёпиқ куб $Q_r=\{x\in R^n \,|\, |x|\leq r\}$ компактдир.

Исбот. Ёпиқ куб Q_r ни n та $[-r\ ,\ r\ ]$ сегментнинг тўғри кўпайтмаси сифатида ёзамиз. Шунда лемма-2 иккита компакт тўпламнинг тўғри кўпайтмаси компакт тўплам эканлигидан келиб чиқади. Бу фактни қуйидаги теорема кўринишда ёзиб, кейинчалик исботлаймиз.

Теорема-16. X,Y - топологик фазолар, $A\subset X$, $B\subset Y$ - компакт тўпламлар бўлса, $A\times B$ - тўғри кўпайтма ҳам $X\times Y$ топологик фазода компакт тўпламдир.

Энди бевосита 15-теорема исботига қайтайлик. A тўплам чегараланган бўлганлиги учун уни ўз ичига олувчи Q_r куб мавжуд. A ёпиқ бўлганлиги учун унинг тўлдирувчиси $R^n\setminus A$ очиқ тўпламдир. Энди $\{U_a\}$ оила A тўпламнинг очиқ қобиғи бўлса, $\{U_a\}\cup\{R^n\setminus A\}$ оила Q_r нинг очиқ қобиғи бўлади. Q_r компакт бўлганлиги учун бу оиладан чекли қоплама ажратиш мумкин. Ҳосил бўлган қопламадан $R^n\setminus A$ тўпламни чиқариб A тўплам учун $\{U_a\}$ оиладан ажратилган чекли қоплама ҳосил қиламиз. Теорема исботи тугади.

III.Топологик фазо базаси

(X,τ) - топологик фазо , $B=\{U_a\}$ - очиқ тўпламлар оиласи бўлсин, яъни $U_a\in\tau$. (X,τ) фазонинг ихтиёрий очиқ A қисм тўпламини B га тегишли тўпламлар йиғиндиси сифатида ёзиш мумкин бўлса, B оила (X,τ) топологик фазонинг базаси деб аталади.

Мисол. $X=R^n$, τ- эса евклид топологияси бўлсин. Бизга маълумки, Агар ихтиёрий $x\in A$ учун шундай $r_x>0$ мавжуд бўлиб, $B_{r_x}(x)\subset A$ бўлса A тўплам очиқ дейилади. Демак, A очиқ тўплам бўлса, $A=\bigcup_x B_{r_x}(x)$, яъни A ни очиқ шарлар йиғиндиси сифатида ёзиш мумкин. Бундан келиб чиқадики , R^n да ҳамма очиқ шарлардан ва бўш тўпламдан иборат оила Евклид топологияси учун база хосил қилади. Умуман олганда бу факт ихтиёрий (X, ρ) метрик фазо учун ўринлидир, яъни очиқ шарлар ва бўш тўпламдан иборат оила метрик фазо учун базани ташкил қилади. Энди топологик фазо базасининг асосий хоссаларини ўрганамиз.

Теорема - 17. B={U_α} оила (X, τ) топологик фазо базаси бўлиши учун ихтиёрий нуқта $x \in X$ ва унинг ихтиёрий U атрофи учун B га оилага тегишли ва $x \in U_{\alpha_0} \subset U$ муносабати қаноатлантирувчи U_{α_0} тўпламнинг мавжудлиги зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. B={ U_α } оила база, $x \in X$ ва U тўплам x нинг атрофи бўлсин. U очиқ бўлганлиги учун B га тегишли тўпламлар йиғиндисидан иборат ва улардан бирортаси албатта x ни ўз ичига олади.

Етарлилиги. B={U_α} оила теорема шартларини қаноатлантирса, унинг база эканлигини кўрсатайлик. Ихтиёрий очиқ A тўпламни қарайлик. Агар $a \in A$ бўлса , теорема шартига кура $U_{\alpha_a} \in B$ мавжуд бўлиб ,

$a \in U_{\alpha_a} \subset A$ муносабат бажарилади. Шунинг учун

$A = \bigcup\limits_{a \in A} U_{\alpha_a}$ бўлади. Теорема исботланди.

Теорема -18. (X ,τ) топологик фазода B={U_α} оила база бўлса , қуйидаги муносабатлар ўринли :

1) $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha = X$

2) Ихтиёрий U_{α_1}, U_{α_2} тўпламлар ва ихтиёрий $a \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ нуқта учун U_{α_3} мавжуд бўлиб, $a \in U_{\alpha_3} \subset U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ муносабат бажарилади.

Исбот. Бу ерда 1) муносабат базанинг таърифига кўра равшан бўлганлиги учун 2) муносабатни кўрсатамиз. Агар $a \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ бўлса, $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ очиқ тўплам эканлигидан 1-теоремага кўра U_{α_3} мавжуд бўлиб , $a \in U_{\alpha_3} \subset U_{\alpha_1} \subset U_{\alpha_2}$ муносабатлар бажарилади.

Теорема-19. X ихтиёрий тўплам, B={U_β}-қисм тўпламлар оиласи учун

1) $\bigcup\limits_{\beta} U_\beta = X$;

2) $\varnothing \in B$;

3)Ихтиёрий U_{β_1}, U_{β_2} тўпламлар ва ихтиёрий $a \in U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}$ нуқта шундай U_{β_3} мавжудки $a \in U_{\beta_3} \subset U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}$ шартлар бажарилса, X тўпламда шундай ягона τ топология мавжудки (X , τ) топологик фазо учун B оила база бўлади.

Исбот. X тўпламда τ оилани қуйидагича аниқлаймиз. B оилага тегишли тўпламларни ва уларнинг йиғиндисидан иборат ҳамма қисм тўпламларни τ оилага киритамиз. Теореманинг 1) ва 2) шартларига кўра

X ва бўш тўплам τ оилага тегишли бўлади. Бундан ташқари τ нинг аниқланишига кўра унга тегишли тўпламларнинг йиғиндиси τ га тегишли. Демак, A_1, $A_2 \in$ τ бўлса, $A_1 \cap A_2 \in$ τ ни кўрсатишимиз керак. Агар $a \in A_1 \cap A_2$ бўлса, теореманинг 3-шартига кўра $U_a \in B$ мавжуд ва $a \in U_a \subset A_1 \cap A_2$ бўлади. Демак, $A_1 \cap A_2 = \bigcup\limits_{a \in A_1 \cap A_2} U_a$. Бу эса $A_1 \cap A_2 \in$ τ эканлигини билдиради. □

§ 5. Узлуксиз акслантиришлар

X , У - ихтиёрий тўпламлар бўлиб , X нинг ҳар бир, элементига У нинг битта элементи мос қўйилган бўлса, X ни У га акслантирувчи мослик ёки акслантириш берилган дейилади ва $f : X \to У$ кўринишда ёзилади.

Агар $f : X \to Y$ акслантириш берилган бўлса , $x \in X$ учун $y = f(x)$ элемент x нинг акси (ёки образи) , $y \in Y$ учун $f^{-1}(y) = \{ x \in X : f(x) = y \}$ тўплам y нинг асли (ёки прообрази) дейилади. $A \subset X$ қисм тўплам учун унинг образи $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ $B \subset Y$ қисм тўплам учун унинг прообрази $f^{-1}(B) = \{ x : x \in A$ ва $f(x) \in B\}$ аниқланади. Агар $f(X)=Y$ бўлса, f ни устлама акслантириш, $f(X) \subset Y$ бўлганда эса ичига акслантириш деб атаймиз.

Бирорта f акслантириш учун x_1, $x_2 \in X$ ва $x_1 \neq x_2$ дан $f(x_1) \neq f(x_2)$ келиб чиқса, f ўзаро бир қийматли акслантириш дейилади.

Энди X , Y - топологик фазолар бўлсин.

Таъриф. $f : X \to Y$ акслантириш берилган, $x \in X$ бўлиб $y = f(x)$ нуқтанинг ихтиёрий V атрофи учун x нинг U атрофи мавжуд бўлиб, $U \subset f^{-1}(V)$ муносабат бажарилса f акслантириш x нуқтада узлуксиз дейилади.

f акслантириш бирор A тўпламга тегишли ҳамма нуқталарда узлуксиз бўлса, у A да узлуксиз дейилади. Агар X нинг ҳамма нуқталарида узлуксиз бўлса, у узлуксиз акслантириш дейилади.

Теорема-20. f узлуксиз бўлиши учун ихтиёрий $G \subset Y$ очиқ тўпламнинг прообрази $f^{-1}(G)$ очиқ бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. f узлуксиз акслантириш, $G \subset Y$ очиқ тўплам бўлсин. $f^{-1}(G)$ очиқ эканлигини кўрсатишимиз керак. Агар $x \in f^{-1}(G)$ бўлса, $f(x) \in G$ бўлади. f акслантириш x нуқтада узлуксиз бўлганлиги учун x нинг шундай U атрофи мавжудки, $U \subset f^{-1}(G)$ бўлади. Бундан эса $x \in U \subset f^{-1}(G)$ келиб чиқади. Демак, $f^{-1}(G)$ очиқ тўпламдир.

Етарлилик. Энди ихтиёрий $G \subset Y$ очиқ тўплам учун $f^{-1}(G)$ очиқ тўплам, $x \in X$ бўлсин. $y=f(x)$ нуқтанинг ихтиёрий атрофи V ни қарасак,

y очиқ бўлганлиги учун $U=f^{-1}(V)$ очиқ тўплам бўлади. Ундан ташқари $x\in f^{-1}(U)$ ва $U\subset f^{-1}(V)$ Демак f акслантириш x нуқтада узлуксиздир. Бу ерда x ихтиёрий нуқта бўлганлиги учун f узлуксиз акслантириш бўлади. □

Умуман олганда, узлуксиз акслантиришда очиқ тўпламнинг образи очиқ бўлиши шарт эмас. Мисол учун, $X=R^2(x,y)$ ва $Y=R^2(u,v)$ фазолар учун f акслантириш $f(x, y)=(\sin x,\cos x)$ қоида билан аниқланса, $\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2<1\}$ доиранинг образи R^2 да очиқ тўплам эмас. Агар f акслантириш $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$ қоида билан берилса, $\{(x,y)=(x\leq 0, y=0)\}$ ёпиқ тўплам образи ёпиқ эмас.

Теорема - 21. X , Y - топологик фазолар, $f:X\to Y$ узлуксиз акслантириш, $A\subset X$ - компакт тўплам бўлса , f(A) ҳам компакт тўпламдир.

Исбот. $\{U_a\}$ оила f(A) тўпламнинг очиқ қобиғи бўлсин, f узлуксиз акслантириш бўлганлиги учун $V_\alpha=f^{-1}(U_\alpha)$ тўплам ҳамма α лар учун очиқ тўплам бўлади. $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha\supset f(A)$ дан $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha\supset A$ келиб чиқади. Демак, $\{V_a\}$ оила A учун очиқ қобиқ бўлади. A компакт тўплам бўлганлиги учун бу қобиқдан чекли қоплама ажратиш мумкин. Ажратилган чекли қоплама элементлари $V_{\alpha_1},V_{\alpha_2},\ldots,V_{\alpha_m}$ тўпламлар бўлсин. Шунда уларнинг образлари $U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\ldots,U_{\alpha_m}$ тўпламлар f(A) тўплам учун $\{U_a\}$ оиладан ажратилган чекли қобиқни ташкил этади. □

Теорема-22. X, У - топологик фазолар, $f:X\to Y$ узлуксиз акслантириш, $A\subset X$ - боғланишли тўплам бўлса, f(A) ҳам боғланишли тўпламдир.

Исбот. Агар f(A) боғланишсиз тўплам бўлса , бўш бўлмаган очиқ G_1 ва G_2 тўпламлар мавжуд бўлиб, $f(A)=(f(A)\cap G_1)\cup(f(A)\cap G_2)$, $f(A)\cap G_1)\cap(f(A)\cap G_2)=\varnothing$ ва $f(A)\cap G_1\neq\varnothing$, $f(A)\cap G_2\neq\varnothing$ муносабатлар бажарилади. Акслантириш f узлуксиз бўлганлиги учун $A_1=f^{-1}(G_1)$ ва $A_2=f^{-1}(G_2)$ тўпламлар X нинг очиқ қисм тўпламлари бўлади.

$f(A)\cap G_1\neq\varnothing$ ва $f(A)\cap G_2\neq\varnothing$ муносабатлардан $A_1\cap A\neq\varnothing$ ва $A_2\cap A\neq\varnothing$ келиб чиқади. Бундан ташқари $A=(A_1\cap A)\cup(A_2\cap A)$ муносабат ҳам ўринлидир. Демак A боғланишсиз. Бу зиддият теоремани исботлайди. □

Теорема - 23. Ёпиқ кесма I =[a,b] боғланишли тўпламдир.

Исбот. Фараз қилайлик [a,b] боғланишсиз бўлсин. У ҳолда очиқ ва бўш бўлмаган U_1 ва U_2 тўпламлар мавжуд бўлиб, $I=(I\cap U_1)\cup(I\cap U_2)$, $I\cap U_1\neq\varnothing$, $I\cap U_2\neq\varnothing$ ва $(I\cap U_1)\cap(I\cap U_2)=\varnothing$ муносабатлар ўринли бўлади.

Энди I ни топологик фазога айлантирамиз. Бунинг учун I нинг қисм тўплами A учун R^1 да очиқ G тўплам мавжуд бўлиб , $A=I\cap G$ бўлса , A ни очиқ тўплам деб эълон қиламиз. Ҳосил бўлган I нинг очиқ қисм тўпламлари оиласи I да топологияни ҳосил қилади ва топологик фазога айланади. Бу топологияда I ва $\varnothing$ ҳам очиқ тўпламдир. Агар I боғланишсиз бўлса I да очиқ ва бўш бўлмаган U_1, U_2 тўпламлар мавжуд бўлиб $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ ва $I = U_1 \cup U_2$ муносабатлар бажарилади. Энди

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_1 \\ 1, & x \in U_2 \end{cases}$$

қоида билан берилган акслантиришни қарайлик. Агар $G \subset R^1$- очиқ тўплам бўлса

$$f^{-1}(G) = \begin{cases} I, & 0,1 \in G \\ \varnothing, & 0 \notin G, 1 \notin G \\ U_1 & 0 \in G, 1 \notin G \\ U_2 & 0 \notin G, 1 \in G \end{cases}$$

тенглик ўринлидир. $\varnothing$, U_1 , U_2, I тўпламлар очиқ бўлганлиги учун 20 - теоремага кўра f узлуксиз функциядир. Коши теоремасига кўра функция 0 ва 1 оралиғидаги ҳамма қийматларни қабул қилиши керак. Бу зиддият теоремани исботлайди. □

X - топологик фазо, $f:[0,1] \to X$ - узлуксиз акслантириш бўлсин. Бу ерда $I = [0\ ,\ 1]$ кесмадаги топология юқоридаги 23 - теорема исботидаги каби евклид топология ёрдамида аниқланади. Агар $x = f(0)$, $y = f(1)$ бўлса, биз x ва y нуқталар f йўл ёрдамида туташтирилган деб атаймиз. Агар $A \subset X$ - қисм тўпламнинг ҳар қандай икки нуқтасини шу тўпламда ётувчи йўл ёрдамида туташтириш мумкин бўлса , A тўплам чизиқли боғланишли тўплам дейилади.

Теорема-24. Чизиқли боғланишли тўплам боғланишли тўпламдир.

Исбот. X - топологик фазо , $A \subset X$ - чизиқли боғланишли тўплам бўлсин. Таърифга кўра, A га тегишли ихтиёрий x , y нуқталар учун узлуксиз $f:I \to X$ - акслантириш мавжуд бўлиб, $f(0) = x$, $f(1) = y$ ва $f(I) \subset A$ бўлади. Агар A боғланишсиз тўплам бўлса , очиқ бўш бўлмаган G_1 ва G_2 тўпламлар мавжуд бўлиб $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$, $A \cap G_1 \neq \varnothing$, $A \cap G_2 \neq \varnothing$ муносабатлар бажарилади. $A \cap G_1$ тўпламдан x нуқтани, $A \cap G_2$, тўпламдан y нуқтани олайлик. A чизиқли боғланишли бўлганлиги учун $f:I \to X$ йўл мавжуд бўлиб , $f(0) = x$,$f(1) = y$ ва $I = [0,1]$ учун $f(I) \subset A$ бўлади. Юқорида исбот қилинган теоремаларга кўра $f(I) = f([0,1])$ боғланишли тўпламдир. Лекин $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$ тенгликдан $f(I) = (f(I) \cap G_1) \cup (f(I) \cap G_2)$, тенглик оламиз. $x \in f(I) \cap G_1$, $y \in f(I) \cap G_2$ бўлганлигидан $f(I) \cap G_1 \neq \varnothing$, $f(I) \cap G_2 \neq \varnothing$ келиб чиқади. Бундан f(I) боғланишсиз тўплам эканлиги келиб чиқади. Бу зиддият A боғланишли тўплам эканлигини кўрсатади. □

Умуман, боғланишли тўплам чизиқли боғланишли бўлмаслиги мумкинлигини қуйидаги мисол кўрсатади.

Мисол.

$$X=R^2,\ A=\{(x,\ y)\in R^2:\ y = \sin(1/x),\ x\neq 0\}\cup$$
$$\{(x,\ y):\ x = 0\ ,\ -1 < y < 1\ \}$$

бўлсин. Равшанки, А боғланишли, лекин чизиқли боғланишли эмас.

Теорема-25 X-топологик фазода чизиқли боғланишли $\{A_\alpha\}$ тўпламлар оиласи учун $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$ бўлса, $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ йиғинди ҳам чизиқли боғланишлидир.

Исбот. Берилган тўпламлар йиғиндиси бўлган $A=\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ тўпламга тегишли x, y нуқталарни йўл билан туташтириш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $a\in\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ нуқтани оламиз, ва $x\in A_{\alpha_1}$, $y\in A_{\alpha_2}$ бўлсин деб фараз қилайлик. Шунда $a\in A_{\alpha_1}$, $a\in A_{\alpha_2}$ муносабатлар ўринли бўлгани учун x ва y ларни a билан мос равишда f_1, f_2 йўллар ёрдамида туташтирамиз. Шунда

$$g(t)=\begin{cases} f_1(2t) & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ f_2(2t-1) & t\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

формула билан аниқланган g йул учун g(0)=x, g(1)=y тенгликлар ўринли бўлади.□

Энди бу теоремадан фойдаланиб, X топологик фазонинг a нуқтаси учун унинг чизиқли боғланишлилик компонентаси тушунчасини киритамиз. Берилган a нуқта тегишли бўлган ҳамма чизиқли боғланишли тўпламлар йиғиндиси юқоридаги теоремага кўра чизиқли боғланишли тўплам бўлади. Ана шу тўпламни a нуқтанинг чизиқли боғланишлилик компонентаси деб атаймиз ва L(a) билан белгилаймиз.

Теорема-26. Боғланишли X топологик фазонинг ҳар бир нуқтаси чизиқли боғланишли атрофга эга бўлса, X чизиқли боғланишли фазо бўлади.

Исбот. Топологик X фазонинг a нуқтаси учун L(a) тўпламни қарайлик. Бу тўпламнинг очиқ тўплам эканлигини кўрсатайлик. Агар b∈L(a) бўлса, V(b) билан b нуқтанинг чизиқли боғланишли атрофини белгилаймиз. Шунда $V(b) \subset L(a)$ бўлади. Демак L(a) очиқ тўпламдир. Энди L(a) тўплам учун $L(a) = \overline{L}(a)$ тенгликни исботлайлик. Бунинг учун $b \in \overline{L}(a)$ нуқта олиб, уни a нуқта билан йўл орқали туташтириш мумкинлигини кўрсатамиз. Уринма нуқта таърифига кўра, b нуқтанинг ҳар бир атрофида L(a) тўпламга тегишли нуқталар бор. Агар V(b) тўплам b нуқтанинг бирорта чизиқли боғланишли атрофи бўлса, бу атрофда L(a) тўпламга тегишли нуқталар бор. Демак a нуқта b билан йўл орқали туташтириш мумкин. Бундан $b \in L(a)$ келиб чиқади. Бундан L(a) тўпламнинг ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади. Берилган X топологик фазо боғланишли бўлганлиги учун ҳар қандай бўш бўлмаган бир вақтда очиқ ва ёпиқ бўлган тўплам X билан устма-уст тушади. Демак X=L(a), ва X чизиқли боғланишдир.□

Топологик акслантиришлар (Гомеоморфизмлар)

Узлуксиз акслантиришлар ичида бизнинг курсимиз учун муҳим акслантиришлардан бири топологик акслантиришдир. Топологик акслантириш гомеоморфизм деб ҳам аталади. Бу параграфда топологик акслантириш тушунчасини киритиб, мисоллар келтирамиз ва унинг биз учун зарур асосий хоссаларини келтирамиз.

X, Y - топологик фазолар, $f:X \to Y$ - акслантириш берилган бўлсин. Агар f акслантиришга тескари акслантириш f^{-1} мавжуд ва f, f^{-1} акслантиришлар узлуксиз бўлса, f топологик акслантириш ёки гомеоморфизм деб аталади.

Топологик акслантиришга энг содда мисол қилиб $f(x)=x$ қоида билан аниқланган айний $f:X \to X$ акслантиришни олишимиз мумкин.

Топологик акслантириш таърифидан бевосита келиб чиқадики, агар f топологик акслантириш бўлса, бунга тескари акслантириш f^{-1} ҳам топологик акслантириш бўлади. Энди f учун тескари акслантириш мавжуд бўлиши учун зарур ва етарли шартларга эътибор берайлик. Тескари акслантириш Y нинг ҳар бир нуқтасига X нинг битта нуқтасини мос қўяди. Демак, ихтиёрий $y \in Y$ учун бирорта $x \in X$ мавжуд бўлиб, $f(x)=y$ тенглик ўринли бўлиши керак. Бунинг учун эса f(X)=Y бўлиши, яъни f устлама акслантириш бўлиши керак. Бундан ташқари f^{-1} тескари акслантириш $y \in Y$ нуқтага битта $x \in X$ нуқтани мос қўйганлигидан

$x_1 \neq x_2$ бўлганда $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлиши, яъни ўзаро бир қийматли акслантириш бўлиши зарурдир.

Шундай қилиб, f га тескари акслантириш f^{-1} мавжуд бўлиши учун f нинг устлама ва ўзаро бир қийматли акслантириш бўлиши зарур ва етарли. Агар X ва Y топологик фазолар учун $f: X \to Y$ топологик акслантириш мавжуд бўлса, X ва Y топологик фазолар ўзаро гомеоморф ёки топологик эквивалент фазолар деб аталади. Топологик фазоларнинг топологик акслантиришда сақланиб қоладиган (яъни биридан иккинчисига ўтадиган) хоссалари топологик хоссалар деб аталади. Топология фанида топологик фазоларнинг, геометрик фигураларнинг топологик хоссалари ўрганилади.

Энди бир нечта мисоллар келтирайлик.

Мисол. 1. $X=(a, b)$, $Y=(c, d)$ бўлиб, X, Y фазоларда топология R^1 даги топология ёрдамида аниқланади. Шунда $f: X \to Y$ акслантиришни $f(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ формула ёрдамида аниқласак, f гомеоморфизм бўлади, чунки f чизиқли функция, узлуксиз ва унга тескари функция ҳам узлуксиздир.

2. $X=\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $Y=[-1,-1]$, $f(x)=\sin x$ бўлсин. Бизга маълумки, $f(x)=\sin x$ узлуксиз ва унга тескари функция $x=\arcsin y$ $[-1,1]$ да аниқланган ва узлуксиздир. Шунинг учун $X \to Y$ гомеоморфизмдир.

3. $X=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $Y=R^1$ бўлса, $f(x)=\mathrm{tg}\, x$ гомеоморфизм бўлади.

4. Ихтиёрий (a, b) интервал R^1 га гомеоморфдир. Бу ерда гомеоморфизм $f(x)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}-\frac{\pi}{2}\right)$ формула ёрдамида аниқланади.

5. Текисликда $D^2=\{(x,y)\colon\ x^2+y^2<R^2\}$ очиқ доира текисликка гомеоморфдир.

Бу ерда

$$f(x,y)=\left\{\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{R-\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

формула билан $f:D^2\to R^2$ акслантиришни аниқласак, f гомеоморфизм бўлади. Буни текширайлик. Бу акслантиришнинг узлуксизлиги

$$\upsilon(x,y)=\frac{x}{R-\sqrt{x^2-y^2}},\ \upsilon(x,y)=\frac{y}{R-\sqrt{x^2-y^2}}$$

функцияларининг узлуксизлигидан келиб чиқади. Энди унга тескари акслантириш мавжуд ва узлуксизлигини кўрсатайлик. Тескари $f^{-1}:R^2\to D^2$ акслантиришни

$$f^{-1}(x,y)=\left\{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}},\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

формула билан аниқлаймиз. Бу акслантиришнинг узлуксизлиги

$$\mu(x,y)=\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}},\ \varphi(x,y)=\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$$

функцияларнинг узлуксизлигидан келиб чиқади. Энди $f^{-1}(x,y)$ акслантириш ҳақиқатан ҳам f га тескари акслантириш эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун $f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=(x,y)$ тенгликни исботлаймиз:

$$f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=\left\{\frac{\mu(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi(x,y)^2}},\frac{\varphi(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{\dfrac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\dfrac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}},\frac{\dfrac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\dfrac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}\right\}=(x,y)$$

Демак, f акслантиришдир гомеоморфизмдир.

6. R^nдаги ихтиёрий D^n очиқ шар R^n га гомеоморфизмдир. Буни кўрсатиш учун R^n да координата бошини D^n шарнинг марказига жойлаштириб декарт координаталар системасини киритиб $f:D^n\to R^n$ акслантиришни

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left\{\frac{x_1}{R-|x|},\frac{x_1}{R-|x|},\ldots,\frac{x_n}{R-|x|}\right\}$$

формула билан аниқлаймиз. Бу ерда $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$, R – шарнинг радиусидир.

Тескари акслантириш

$$f^{-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left\{\frac{Rx_1}{1+|x|},\frac{Rx_2}{1+|x|},\ldots,\frac{Rx_n}{1+|x|}\right\}$$

формула ёрдамида аниқланади. Иккала f, f^{1} акслантиришлар ҳам узлуксиз бўлганлиги учун f гомеоморфизмдир.

Энди топологик акслантиришнинг баъзи бир муҳим хоссаларини келтирайлик. Топологик акслантиришнинг таърифидан бевосита ҳар қандай топологик акслантириш учун унга тескари акслантириш ҳам топологик акслантириш эканлиги келиб чиқади.

Теорема 27. f : X→Y, g : Y→Z - гомеоморфизмлар бўлса, f∘g : X→Z ҳам гомеоморфизмдир.

Исбот. f ва g акслантиришларнинг узлуксизлигидан теоремага кўра f∘g акслантириш ҳам узлуксиздир. Улар топологик акслантиришлар бўлганлиги учун уларга тескари акслантиришлар ҳам узлуксиздир. Шунинг учун $(f\circ g)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ акслантириш узлуксиздир. Теорема исботланди.

Теорема 28. f: X→ У - узлуксиз акслантириш , X -компакт фазо, Y - Хаусдорф фазоси ва f га тескари акслантириш f^{-1} мавжуд бўлса, f - гомеоморфизмдир.

Исбот. Теоремани исботлаш учун f^{-1} нинг узлуксизлигини кўрсатиш керак. Бунинг учун ихтиёрий очиқ G⊂X - тўпламнинг f^{-1} акслантиришга нисбатан прообрази Y да очиқ эканлигини кўрсатишимиз керак. Агар G - очиқ бўлса, X\G ёпиқ тўпламдир. X\Gнинг f^{-1} га нисбатан прообрази f(X\G)тўпламдан иборат. X\G ёпиқ ва X компакт бўлганлигидан 12-теоремага кўра X\G компакт, 21-теоремага кўра f(X\G) ҳам компакт. Y хаусдорф фазоси бўлганлиги учун 14-теоремага кўра f(X\G) ёпиқ тўпламдир. f(G)=Y\f(X\G) тенгликдан f(G) нинг очиқлиги келиб чиқади. Теорема исботи тугади.□

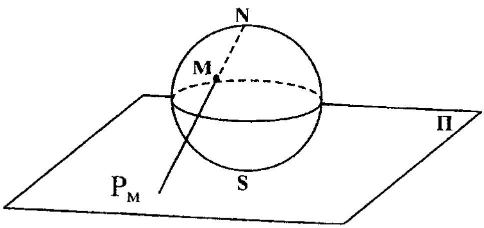
Энди 16-теорема исботига қайтайлик.

Бу теорема исботини $(x,y)\to x$ қоида билан аниқланган $pr\colon X\times Y\to X$ акслантиришда (проекция) ёпиқ тўпламнинг образи ёпиқ тўплам эканлигини кўрсатишдан бошлаймиз. F тўплам X×У тўғри кўпайтманинг ёпиқ қисм тўплами бўлсин. Унинг образи prF нинг X топологик фазода ёпиқ тўплам эканлигини кўрсатиш учун унинг тўлдирувчиси $G = X \setminus prF$ нинг очиқ тўплам эканлигини кўрсатишимиз керак. Шунинг учун $x_0 \in G$ нуқтани қарайлик.Бу нуқта учун $(x_0, Y) \subset X \times Y \setminus F$ муносабат бажарилади. $X \times Y \setminus F$ очиқ тўплам бўлгани учун ихтиёрий $y \in Y$ учун (x_0, y) жуфтлик бирорта $U(x_0, y) = V_y(x_0) \times V_y$ атрофи билан $X \times Y \setminus F$ да ётади. Бу ерда $V_y(x_0) - x_0$ нуқтанинг X даги атрофи ва $V_y(x_0) \subset G$ муносабатни қаноатлантиради. Демак, G очиқ тўпламдир. Бундан эса prF нинг ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади.

Энди агар $\{U_a\}$ оила A×B тўпламнинг очиқ қобиғи бўлса, ундан A ×B учун чекли қобиқ ажратиш мумкинлигини исботлаш керак. ҳар бир α учун $U_\alpha = U_\alpha^1 \times U_\alpha^2$ кўринишда бўлади. Бу ерда $U_\alpha^1 \subset X$, $U_\alpha^2 \subset Y$ очиқ тўпламлардир. Бирорта $x \in A$ нуқта учун $\{x\} \times B$ тўпламни қарайлик. $\{x\} \times B$ тўплам B га гомеоморф бўлганлиги учун компакт тўпламдир.Шунинг учун U_α оиладан $\{x\} \times B$ учун чекли қобиқ ажратиш мумкин. $U_{\alpha_1}^{\ x}, U_{\alpha_2}^{\ x}, \ldots, U_{\alpha_k}^{\ x}$ тўпламлар $\{x\} \times B$ учун $\{U_\alpha\}$ дан ажратилган чекли қобиқ бўлса, $G_x = \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}^{\ x}$ очиқ тўплам бўлганлиги учун унинг тўлдирувчиси $F_x = X \times Y \setminus G_x$ ёпиқ тўпламдир. Юқорида исботлаганимизга кўра prF_x ёпиқ тўпламдир. A_x тўплам prF_x нинг тўлдирувчи бўлса ,у $A_x \times B \subset G_x$ муносабатни қаноатлантиради. Демак, $U_{\alpha_1}^{\ x}, U_{\alpha_2}^{\ x}, \ldots, U_{\alpha_k}^{\ x}$ оила $A_x \times B$ учун ҳам $\{U_\alpha\}$ дан ажралган чекли қобиқдир. Энди $\{A_x : x \in A\}$ оила A тўплам учун қобиқ ва A компакт бўлганлиги учун ундан A учун чекли қобиқ ажратиш мумкин. Бу оиладан A учун ажралган чекли қобиқ $A_{x_1}, A_{x_2}, \ldots, A_{x_m}$ тўпламлардан иборат бўлсин. Демак $\bigcup_{i=1}^{m} A_{x_i} \supset A$. Бироқ ҳар бир $A_{x_i} \times B$ учун $\{U_\alpha\}$ дан чекли $U_{\alpha_1}^{\ x_i}, U_{\alpha_2}^{\ x_i}, \ldots, U_{\alpha_{k_i}}^{\ x_i}$ қобиқ ажратиш мумкин. Лекин $\bigcup_{i=1}^{m} (A_{x_i} \times B) \supset A \times B$ бўлганлиги учун $\{U_\alpha\}$ дан A × B учун ҳам чекли қобиқ ажратиш мумкин. Демак, A ×B компакт тўпламдир.□

Бу қисм охирида математикада муҳим роль ўйнайдиган топологик акслантиришлардан бири бўлган стереографик проекцияни киритамиз.

Бизга уч ўлчамли R^3 евклид фазосида бирорта сфера берилган бўлсин. Бу сферани S^2 билан, сфера билан битта умумий нуқтага эга бўлган текисликни П билан, уларнинг умумий нуқтасини S билан белгилайлик. Энди сферанинг S нуқтасига диаметрал қарама – қарши жойлашган нуқтасини N билан белгилаб, сферанинг N нуқтадан бошқа ҳамма нуқталари тўплами билан П текислик нуқталари орасида гомеоморф мосликни ўрнатмоқчимиз. Бунинг учун сферанинг N дан фарқли M нуқтаси учун NM тўғри чизиқнинг П текислик билан кесишиш нуқтасини $P_м$ билан белгилаб $P:S^2 \setminus \{N\} \to П$ акслантиришни $P(M)=P_M$ қоида билан аниқлаймиз.



Чизма-1.

Энди бу акслантиришнинг гомеоморф акслантириш эканлигини исботлайлик. Бунинг учун R^3да координата бошини сфера марказига жойлаштириб OZ ўқини ON тўғри чизиқ бўйича йўналтириб декарт координаталар системасини киритамиз. Шунда

$$S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

бўлиб, П текислик z+R=0 тенглама билан аниқланади. Энди сфера нуқталарининг координаталари x, y, z билан, П текислик нуқталарининг координаталарини X, Y белгилаб, P акслантириш учун формула ҳосил қиламиз. Сферадаги $M(x_0, y_0, z_0)$ ва N(0, 0, R) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ П текислик билан

$\left(\dfrac{2R}{R-z}x, \dfrac{2R}{R-z}y\right)$ нуқтада кесишади. Шунинг учун

$$\underline{P} : S^2 \setminus \{N\} \to П$$

акслантириш

$$\underline{P}(x,y,z)=\left\{\frac{2R}{R-z}x,\frac{2R}{R-z}y\right\}$$ формула

билан берилади. Бу ерда

$$X(x,z)=\frac{2R}{R-z}x,\ Y(y,z)=\frac{2R}{R-z}y \qquad (1)$$

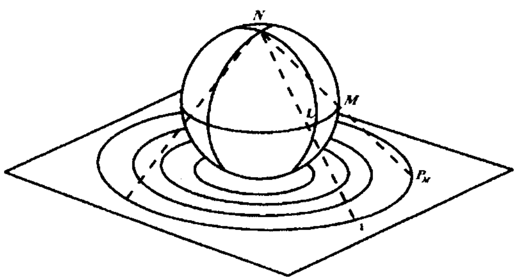
функциялар узлуксиз бўлганлиги учун $\underline{P}$ узлуксиз акслантиришдир.

Энди Р акслантиришга тескари P^{-1} акслантиришни топиш учун N(O,O,R) ва Q(X,Y,-R) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг сфера билан кесишиш нуқтасини топамиз. Бу кесишиш нуқталари N(O,O,R) ва $M(x,y,z)$ нуқталар бўлиб, М нуқтанинг координаталари

$$\begin{cases} x=\dfrac{4R^2}{x^2+y^2+4R^2}X, \\ y=\dfrac{4R^2}{x^2+y^2+4R^2}Y, \\ z=\dfrac{R(x^2+y^2)-4R^3}{X^2+Y^2+4R^2} \end{cases} \qquad (2)$$

кўринишга эга бўлади. Демак (2) формулалар $\underline{P}^{-1}:\Pi\to S^2\setminus\{N\}$ акслантиришни аниқлайди.

(2) системадаги x(X, Y), y(X,Y), z(X, Y) функциялар X, Y ларнинг узлуксиз функцияларидир. Шунинг учун P^{-1} акслантириш узлуксиздир. Қуйидаги 2-чизмада сферани z=c, |c|<R, текислик билан кесганда ҳосил бўладиган айланалар стеографик проекцияда айланаларга ўтиши тасвирланган.



Чизма-2.

I - бобга доир машқ ва масалалар

1. Метрик фазода ҳар қандай яқинлашувчи кетма кетликнинг фундаментал эканлиги кўрсатилсин.

2. X метрик фазода Y тўплам ёпиқ бўлиши учун Y даги нуқталардан иборат барча яқинлашувчи кетма-кетликларнинг лимити Y га тегишли бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботлансин.

3. X метрик фазонинг ихтиёрий тўпламининг ёпиғи ёпиқ тўпламлиги кўрсатилсин.

4. Метрик фазода (x_n) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, унинг лимити ягоналиги исботлансин.

5. R^1 да ичма-ич жойлашган, узунлиги нолга интилувчи ёпиқ кесмалар кетма-кетлигининг кесишмаси бўш эмаслиги кўрсатилсин.

6. R^1 да тўплам очиқ бўлиши учун у ўзаро кесишмайдиган, чекли ёки саноқли сондаги очиқ интервалларнинг бирлашмасидан иборат бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботлансин.

7. R^2 да битта нуқтасини чиқариб ташлагандан сўнг очиқ бўлиб қоладиган ёпиқ тўпламга мисол келтиринг.

8. Шундай очиқ тўпламлар системасига мисол келтирингки, уларнинг кесишмаси очиқ бўлмаган тўпламдан иборат бўлсин.

9. Шундай ёпиқ тўпламлар системасига мисол келтирингки, уларнинг бирлашмаси ёпиқ бўлмаган тўпламдан иборат бўлсин.

10. Текисликда $S^1 = \{(x,y): x = r\cos\beta, y = r\sin\beta; \beta \in [0;2\pi]\}$ айлана берилган. Айланадаги $\beta = n\alpha\pi$ (α-иррационал сон), $n \in Z$, бурчакка мос келувчи нуқталар тўпламини A билан белгилаймиз, $\bar{A}$ $=S^1$ бўлиши исботлансин.

11. X топологик фазо ва $A \subset X$ бўлса, қуйидагилар исботлансин.

1) $\bar{A} = A \cup \partial A$

2) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

3) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$

4) $\partial\ \bar{A} \subset \partial A$

5) $\partial\ (X \setminus A) = \partial A$

6) $\partial(\operatorname{int} A) \subset \partial A$

7) $\operatorname{int} A = A \setminus \partial A$

12. Таъриф. X -топологик фазо, $A \subset X$ ва $\bar{A}$=X бўлса, A ҳамма ерда зич дейилади. (X, τ) топологик фазо, $Y_1, Y_2 \in \tau$ бўлсин. Агар Y_1 ,ва Y_2 лар ҳамма ерда зич бўлса, $Y_1 \cap Y_2$ ҳам ҳамма ерда зич эканлиги исботлансин.

13. Таъриф. Агар X топологик фазога тегишли ҳар бир нуқтанинг атрофлари учун саноқли база мавжуд бўлса, X да саноқлиликнинг I-аксиомаси бажарилган дейилади. X- топологик фазонинг саноқли базаси мавжуд бўлса, X да саноқлиликнинг 2-аксиомаси бажарилган дейилади. Саноқлиликнинг иккинчи аксиомаси бажарилган топологик фазода саноқлиликнинг биринчи аксиомасини бажарилиши кўрсатилсин.

14. R^n да очиқ шарнинг ёпиғи ёпиқ шар, сфера эса очиқ ҳамда ёпиқ шарларнинг чегараси эканлиги исботлансин.

15. X тўпламдаги ихтиёрий топологиялар оиласининг кесишмаси X да топология бўлиши кўрсатилсин.

16. X тўпламни иккита ёпиқ тўпламларнинг айирмаси кўринишида тасвирлаш мумкин бўлиши учун, $\bar{X} \setminus X$ тўпламнинг ёпиқ бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботлансин.

17. A тўплам ёпиқ бўлиши учун, ∂ A=A\intA бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботлансин.

18. Топологик фазо ва $A \subset X$ тўплам берилган бўлсин. A ёпиқ бўлиши учун унинг барча лимит нуқталари A га тегишли бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботлансин.

19. Таъриф. X- топологик фазонинг саноқли ва ҳамма ерда зич қисм тўплами мавжуд бўлса, X-сепарабел топологик фазо дейилади. Метрик фазо сепарабел бўлиши учун унда саноқлиликнинг иккинчи аксиомаси бажарилиши зарур ва етарли эканлилиги кўрсатилсин.

20. A учун $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$ бўлганда, фақат ва фақат шу ҳолдагина A тўпламнинг очиқ бўлиши исботлансин.

21. Узлуксиз акслантиришларнинг суперпозицияси узлуксиз акслантириш бўлиши исботлансин.

22. X,Y топологик фазолар, f:X→Y узлуксиз, биектив акслантириш берилган бўлсин. Агар X да ажралган нуқта мавжуд бўлмаса, у ҳолда Y да ҳам ажралган нуқта мавжуд эмаслиги исботлансин.

23. X, Y топологик фазолар, f:X→Y акслантириш берилган бўлсин, f-акслантиририш узлуксиз бўлиши учун Y топологик фазодаги ихтиёрий G ёпиқ тўпламнинг прообрази f^{-1} (G) ёпиқ бўлиши зарур ва етарли эканлиги кўрсатилсин.

24. $f:[0;1]\to[0;1]$ узлуксиз акслантириш камида битта қўзғалмас нуқтага эгалиги исботлансин.

25. Тескариси узлуксиз бўлмаган ўзаро бир қийматли узлуксиз акслантиришга мисол келтиринг.

26. X,Y топологик фазолар, f:X→Y узлуксиз акслантириш берилган бўлсин G={(x, $f(x)$)} тўплам f акслантириш графиги дейилади. G тўпламнинг X га гомеоморфлиги исботлансин.

27. X,Y топологик фазолар, f:X→Y акслантириш берилган. f акслантириш узлуксиз бўлиши учун қуйидаги шартнинг бажарилиши зарур ва етарлилиги исботлансин. $\forall A \subset X$ учун $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

28. (X,d) метрик фазо бўлса, d(x, y) функция XxX да узлуксиз эканлиги исботлансин.

29. X,Y топологик фазолар, f:X→Y акслантириш берилган бўлсин. f узлуксиз бўлиши учун қуйидаги муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарлилиги исботлансин. $\forall A \subset Y$ учун $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\bar{A})$

30. Тўғри чизиқдаги ихтиёрий 2 та очиқ (ёпиқ) интервал ўзаро гомеоморфлиги исботлансин.

31. X,Y топологик фазолар берилган. X×Y нинг X га проекцияси узлуксиз, очиқ ва ёпиқ акслантириш эканлиги исботлансин.

32. R^n да ёпиқ шар ва ёпиқ куб гомеоморфлиги кўрсатилсин.

33. Локал боғланишли бўлмаган,боғланишли топологик фазога мисол келтиринг.

34. R^1 да локал боғланишсиз чексиз қисм тўпламга мисол келтиринг.

35. Чизиқли боғланишли бўлмаган боғланишли тўпламга мисол келтиринг.

36. Агар A ва B боғланишли бўлиб, $A \cap \bar{B} \neq \varnothing$ бажарилса,у ҳолда $A \cup B$ боғланишли бўлишини исботланг.

37. $A \subset R^1$ тўплам боғланишли бўлиши учун унинг интервалдан иборат бўлиши зарур ва етарли эканлиги кўрсатилсин.

38. Боғланишли топологик фазонинг узлуксиз акслантиришдаги образи боғланишли тўплам бўлиши исботлансин.

39. R^n боғланишли фазо эканлиги исботлансин.

40. X топологик фазо ягона боғланишлилик компонентасидан иборат бўлиши учун, X боғланишли фазо бўлиши зарур ва етарли эканлиги кўрсатилсин.

41. Чизиқли боғланишли, лекин локал чизиқли боғланишли бўлмаган топологик фазога мисол келтиринг.

42. Ҳар қандай компакт фазо локал компакт бўлиши исботлансин.

43. (X,d) компакт метрик фазода ўзаро кесишмайдиган, ёпиқ A ва B тўпламлар берилган бўлсин. У ҳолда, d(A,B)>0 эканлиги исботлансин.

44. X метрик фазода бўш бўлмаган компакт тўпламлар берилган бўлиб, улар $A_1 \supset A_2 ..., \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \varnothing$ ва $d(A_n) = \varepsilon_n \to 0$ шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда $\bigcap_i A_i$ - тўплам битта нуқтадан иборатлиги исботлансин. d(A) - A тўпламнинг диаметри.

45. X,Y топологик фазолар f:X$\to$Y узлуксиз, биектив акслантириш берилган бўлсин. Агар X компакт ва Y Хаусдорф фазоси эканлиги маълум бўлса, у ҳолда f топологик акслантириш (гомеоморфизм) эканлиги исботлансин.

46. X компакт фазо ва f: X$\to R^1$ узлуксиз функция эканлиги маълум бўлса, f функциянинг чегараланганлигини ва X да ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришиши исботлансин.

47. X тўла метрик фазо ва A$\subset$X бўлсин. A тўплам нисбий компакт бўлиши учун (яъни $\bar{A}$ компакт тўплам) A нинг чегараланган қисм фазо бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботлансин.

II БОБ

ЧИЗИҚЛАР НАЗАРИЯСИ

Бу бобда биз дифференциал геометрия курсининг асосий объектларидан бири бўлган эгри чизиқ тушунчасини киритамиз, унинг берилиш усулларини ва асосий геометрик характеристикаларини ўрганамиз.

§ 1. Эгри чизиқ ва унинг берилиш усуллари

Таъриф-1: Фазодаги (ёки текисликдаги) γ тўплам бирорта очиқ интервалнинг топологик (гомеоморф) акслантиришдаги образи бўлса, у **элементар эгри чизиқ** деб аталади.

Бу таърифга кўра, бирорта $f:(a;b)\to R^3$ акслантириш учун, $f((a;b))=\gamma$ тенглик ўринли ва $f:(a;b)\to\gamma$ топологик акслантириш бўлса, γ **элементар эгри чизиқ** деб аталади.

Биз $f:(a;b)\to R^3$ акслантириш ёрдамида берилган элементар γ эгри чизиқни қарайлик. Очиқ $(a;b)$ интервалга тегишли ихтиёрий t га мос келувчи нуқтани $\gamma(t)$ билан белгиласак, f гомеоморфизмни $t\to\gamma(t)$ кўринишда ёза оламиз.

Бу $\gamma(t)$ нуқтанинг координаталарини $x(t),y(t),z(t)$ лар билан белгиласак, f акслантириш

$$t\to(x(t),y(t),z(t))$$

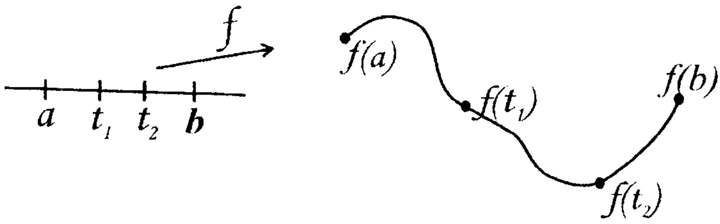
кўринишда бўлади. Шунинг учун қуйидаги тенгликлар системаси γ нинг параметрик тенгламалари дейилади:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad a<t<b \quad (1) \\ z=z(t), \end{cases}$$

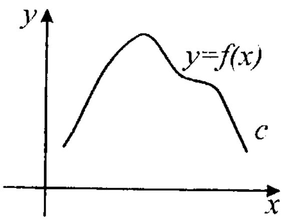
Табиийки, f –узлуксиз бўлганлиги учун, $x(t),y(t),z(t)$ координаталар t нинг узлуксиз функцияларидир. Агар γ элементар эгри чизиқ $y=f(x)$ функциянинг графиги бўлса, унинг параметрик тенгламалари $x=t, y=f(t)$ кўринишда бўлади. Элементар эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари f –акслантириш ёрдамида аниқланади. Шунинг учун, агар γ ни бошқа гомеоморфизм ёрдамида аниқласак, унинг параметрик тенгламалари ўзгаради. Биринчи бобда кўрдикки, ҳар қандай икки очиқ интервал ўзаро гомеоморфдир.

Шунинг учун, $f:(a,b)\to R^3$ акслантириш ёрдамида аниқланган элементар γ эгри чизиқни ихтиёрий (c,d) интервалнинг бошқа гомеоморф акслантиришдаги образи деб қараш мумкин. Ҳақиқатдан, агар

$g:(c,d)\to(a,b)$ гомеоморфизм бўлса, унда γ ни $F:(c,d)\to R^3$ акслантириш ёрдамида бера оламиз. Бу ерда $F(\tau)=f(g(\tau))$, $\tau\in(c;d)$. Гомеоморфизмларнинг композицияси сифатида F ҳам гомеоморфизмдир. Демак, ҳар бир элементар эгри чизиқни чексиз кўп усулда параметрлаш мумкин.



Чизма-1



Чизма-2

Дифференциал геометрия курсида эгри чизиқ (1) кўринишдаги параметрик тенгламалар ёрдамида ўрганилади, яъни γ ни аниқловчи f акслантириш танланиб, унинг параметрик тенгламалари ёзилади. Бу ҳолда γ ни **параметрланган элементар эгри чизиқ** деб атаймиз. Математик анализ асосий математик аппарат бўлганлиги учун $x(t),y(t),z(t)$ функцияларга қўшимча шартлар қўямиз.

Таъриф-2: γ элементар эгри чизиқни дифференциалланувчи $x(t),y(t),z(t)$ функциялар ёрдамида параметрлаш мумкин бўлса, у силлиқ элементар эгри чизиқ деб аталади.

Изоҳ: Зарур бўлган ҳолларда, биз юқори тартибли ҳосилаларнинг мавжуд ва узлуксиз бўлишини талаб қиламиз.

Мисолар:

1. Ҳар қандай тўғри чизиқ элементар эгри чизиқдир. Ҳақиқатдан, агар l тўғри чизиқ

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \qquad -\infty < t < +\infty \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, $t \to (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ мослик $(-\infty;+\infty)$ интервал билан l тўғри чизиқ нуқталари ўртасида топологик акслантириш бўлади.

2. Очиқ интервалда аниқланган ҳар қандай узлуксиз функциянинг графиги элементар эгри чизиқдир. Ҳақиқатдан ҳам, агар $y = f(x)$ функция (a,b) да аниқланган ва узлуксиз бўлса, $x \to (x, f(x))$ мослик (a,b) интервал билан $y = f(x)$ функция графиги нуқталари ўртасида гомеоморф акслантиришни беради.

3. Биз биринчи курсда ўрганган иккинчи тартибли чизиқлардан фақат парабола элементар эгри чизиқ бўлади. Ҳақиқатдан парабола очиқ интервалнинг топологик акслантиришдаги образидир, чунки параболани узлуксиз функциянинг графиги сифатида тасвирлаш мумкин.

Таъриф-3: Боғланишли γ тўпламга тегишли ҳар қандай M нуқтанинг бирорта U_M атрофи мавжуд бўлиб, γ нинг U_M даги қисми элементар эгри чизиқ бўлса, γ содда эгри чизиқ деб аталади.

Айлана элементар эгри чизиқ эмас, чунки у ҳеч қандай очиқ интервалга гомеоморф эмас. (нима учун? бу саволга жавобни ўқувчилар 1-бобдан топиши мумкин). Лекин у содда эгри чизиқдир. Буни кўрсатиш учун айлана ётувчи текисликда декарт координаталар системасини киритамиз ва умумийликни чегараламасдан координата боши айлана марказида деб ҳисоблаймиз. Шунда радиуси R га тенг айлананинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \qquad t \in [0;2\pi].$$

Агар $M(t_0)$ айлананинг $(R\cos t_0; R\sin t_0)$ нуқтаси бўлса, етарли кичик $\varepsilon > 0$ учун

$$t \to (R\cos t; R\sin t), \qquad t \in (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$$

акслантириш $(t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$ интервални унинг образига гомеоморф акслантиради. Демак, ихтиёрий $M(t_0)$ учун унинг етарли кичик атрофида айлана элементар эгри чизиққа айланади.

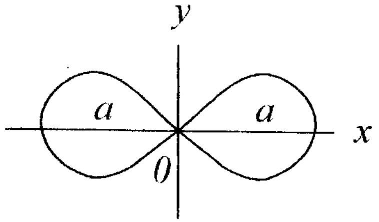
Содда эгри чизиқ структураси ҳақидаги қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема-1. Ҳар қандай содда эгри чизиқ ёки элементар эгри чизиқдир, ёки айланага гомеоморфдир.

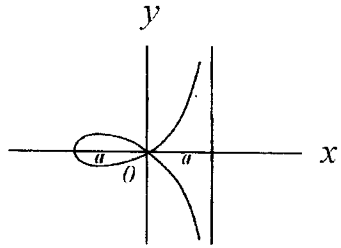
Энди чизиқлар оиласини яна кенгайтирамиз.

Бунинг учун умумий эгри чизиқ тушунчасини киритамиз. γ содда эгри чизиқ, M эса унга тегишли нуқта бўлсин. Агар U_M тўплам M нинг атрофи бўлса, $U_M \cap \gamma$ ни M нинг γ даги атрофи деб атаймиз. Натижада, γ топологик фазога айланади. (I-бобдаги келтирилган топология тушунчасига қаранг).

Бизга $f:\gamma \to R^3$ локал топологик акслантириш берилган бўлса, (яъни ихтиёрий $M \in \gamma$ учун унинг γ даги шундай U атрофи мавжуд бўлиб, $f|_U : U \to f(U)$ топологик акслантириш бўлса), $f(\gamma)$ тўплам умумий эгри чизиқ дейилади. Қуйидаги чизмаларда, содда эгри чизиқ бўлмайдиган умумий эгри чизиқлар кўрсатилган.



Чизма-3



Чизма-4

Бундан кейин, курс давомида биз эгри чизиқ деганда, элементар эгри чизиқни, содда эгри чизиқни ёки умумий эгри чизиқни тушунамиз. Умумий эгри чизиқларнинг таърифига кўра у ўзига тегишли ихтиёрий нуқтанинг етарли кичик атрофида элементар эгри чизиқнинг топологик акслантиришдаги образидир.

Шунинг учун, умумий эгри чизиқни ҳам ихтиёрий нуқтасининг атрофида (1) кўринишдаги параметрик тенгламалар ёрдамида бериш мумкин. Табиийки, агар бизга $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $a<t<b$ тенгликлар системаси берилган бўлса, бу система бирорта эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари системаси бўладими, деган савол туғилади. Бу саволга қисман қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема-2: Силлиқ $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ функциялар ҳосилалари ҳар бир $t \in (a;b)$ учун $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)>0$ шартни қаноатлантирса,

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in(a,b) \\ z=z(t). \end{cases}$$

тенгламалар системаси умумий эгри чизиқни аниқлайди.

Бу умумий эгри чизиқ (a,b) интервалнинг $f:t \to (x(t),y(t),z(t))$ акслантиришдаги образидир.

Исбот: Биз етарли кичик $\delta>0$ учун $(t_0-\delta;t_0+\delta)$да f акслантиришнинг топологик акслантириш эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун эса етарли кичик $\delta>0$ учун fнинг ўзаро бир қийматли эканлигини кўрсатиш етарлидир.

Бу фактни тескарисини фараз қилиш ёрдамида исботлаймиз. Фараз қилайлик, ҳар қандай кичик $\delta>0$ учун ҳам f акслантириш ўзаро бир қийматли бўлмасин, $\{\delta_k\}$ кетма-кетлик нолга интилувчи кетма-кетлик бўлсин. Фаразимизга кўра, ихтиёрий δ_k учун $t_k^1,t_k^2\in(t_0-\delta_k,t_0+\delta_k)$ лар мавжуд бўлиб, $t_k^1\neq t_k^2$ ва $x(t_k^1)=x(t_k^2)$, $y(t_k^1)=y(t_k^2)$, $z(t_k^1)=z(t_k^2)$ шартлар бажарилади.

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага кўра, шундай $\theta_k^1,\theta_k^2,\theta_k^3\in(t_k^1,t_k^2)$ лар мавжуд бўлиб, $x'(\theta_k^1)=0$, $y'(\theta_k^2)=0$, $z'(\theta_k^3)=0$ тенгликлар бажарилади. $\{\delta_k\}$ кетма-кетлик нолга интилгани учун $\{\theta_k^1\}$, $\{\theta_k^2\}$, $\{\theta_k^3\}$ кетма-кетликлар $k\to\infty$ да t_0 га интилади. Ҳосилалар узлуксиз бўлганлиги учун юқоридаги тенгликлардан $k\to\infty$ лимитга ўтиб, $x'(t_0)=y'(t_0)=z'(t_0)=0$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу эса теорема шартига зиддир. □

Энди (x,y) координаталар системаси киритилган текисликда

$$\varphi(x,y)=0$$

тенгламани қарайлик. Координаталари бу тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар бирорта эгри чизиқни аниқлаши мумкин, ёки аксинча аниқламаслиги ҳам мумкин.

Теорема-3: $\varphi(x,y)$ – силлиқ функция, $M=|\{(x,y):\varphi(x,y)=0\}|$ бўлсин. Агар, $(x_0;y_0)\in M$ нуқтада $\varphi_x^2+\varphi_y^2>0$ бўлса, (x_0,y_0) нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, M тўпламнинг бу атрофдаги қисми элементар эгри чизиқ бўлади.

Исбот: Фараз қилайлик, (x_0,y_0) нуқтада $\varphi_y\neq 0$ бўлсин. Шунда ошкормас функция ҳақидаги теоремага асосан шундай $\delta>0$, $\varepsilon>0$ сонлари ва $(x_0-\delta;y_0+\delta)$ интервалда аниқланган $f(x)$ силлиқ функция мавжуд бўлиб, бу интервалда $\varphi(x;f(x))=0$ тенглик ўринли бўлади, ва $\{(x;f(x)):x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\}$ тўплам M нинг $U=\{(x,y):|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\varepsilon\}$ тўпламдаги қисми бўлади. Равшанки, U тўплам (x_0,y_0) нуқтанинг атрофи, M нинг U даги қисми $y=f(x)$ функциянинг графигидир.□

Баъзи бир эгри чизиқларнинг параметрик тенгламаларини,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \quad a < t < b \\ z = z(t), \end{cases}$$

кўринишда, ёки

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \quad a < x < b \end{cases}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Баъзи масалаларни ечишда бундай кўриниш қулайлик туғдиради. Шу сабабли, қайси ҳолларда эгри чизиқларни шундай кўринишда ёзиш мумкин деган саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема-4: Силлиқ элементар эгри γ чизиқнинг параметрик тенгламалари (1) кўринишда бўлиб, $t_0 \in (a,b)$ учун $x'(t_0) \neq 0$ бўлса, (x_0, y_0, z_0) нуқтанинг кичик атрофида γ ни,

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x), \quad a < x < b \end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида аниқлаш мумкин.

Бу ерда, $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$

Исбот: Ҳақиқатдан ҳам, ошкормас функция ҳақидаги теоремага кўра, шундай $\delta > 0$ сони ва $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалда аниқланган силлиқ $t = f(x)$ функция мавжуд бўлиб, у $t_0 = f(x_0)$ ва $x = x(f(x))$ тенгликларни қаноатлантиради. $x = x(f(x))$ тегликни $x = x_0$ нуқтада диффренциаллаб, $1 = x'(t_0) \cdot f'(x_0)$ тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда $t = f(x)$ функция монотон функциядир.

Шунинг учун $x \to t = f(x)$ акслантириш $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ни $(f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta))$ га топологик акслантиради. Демак, $f(x_0 - \delta_1) < t < f(x_0 + \delta)$ бўлганда γ ни

$$y = y(f(x)) = \varphi(x)$$

$$z = z(f(x)) = \psi(x), \qquad x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1$$

кўринишда аниқлаш мумкин. [ ]

Тўртинчи теорема фазовий чизиқлар учун қуйидагича бўлади.

Теорема-5. $F(x,y,z)$ ва $G(x,y,z)$ уч ўзгарувчили силлиқ функциялар, M эса координаталари

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

системани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами бўлсин. Агар $(x_0,y_0,z_0)\in M$ нуқтада

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги иккига тенг бўлса, (x_0,y_0,z_0) нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, M нинг бу атрофдаги қисми силлиқ элементар эгри чизиқ бўлади.

Исбот. Умумийликни чегараламасдан

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}$$

детерминант, (x_0,y_0,z_0) нуқтада нолдан фарқли бўлсин, деб фараз қиламиз. Ошкормас функциялар ҳақидаги теоремага асосан шундай $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ мусбат сонлар мавжудки, $(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$ интервалга тегишли ҳар бир x учун система

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

ягона $y(x),z(x)$ ечимга эга бўлади ва бу ечим

$$|y_0-y(x)|<\delta_2, \quad |z_0-z(x)|<\delta_3$$

тенгсизликларни қаноатлантиради. Демак, (x_0,y_0,z_0) нуқтанинг $\{(x,y,z):|x_0-x|<\delta_1,\ |y_0-y|<\delta_2,|z_0-z|<\delta_3\}$ атрофида M тўплам

$$\begin{cases} x=t, \\ y=y(t), \quad x_0-\delta_1<t<x_0+\delta_1 \\ z=z(t), \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан аниқланувчи элементар эгри чизиқ бўлади.□

Таъриф-4. Силлиқ γ эгри чизиқни ўзига тегишли ҳар қандай нуқтанинг бирорта атрофида ихтиёрий $t\in(a;b)$ учун $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)>0$ шартни қаноатлантирувчи дифференциалланувчи $x(t),y(t),z(t)$ функциялар ёрдамида параметрлаш мумкин бўлса, у регуляр эгри чизиқ деб аталади.

Биз бу бобда асосан регуляр эгри чизиқларни ўрганамиз. Агар γ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси атрофида k марта дифференциалланувчи $x(t), y(t), z(t)$ функциялар ёрдамида аниқланувчи регуляр параметрлаш усули мавжуд бўлса, чизиқни k марта дифференциалланувчи чизиқ деб атаймиз.

Машқлар ва масалалар

1. Иккинчи тартибли чизиқлардан қайси бири бизнинг курсимизда киритилган маънода чизиқ бўлишини текширайлик.

Сизга маълумки, иккинчи тартибли чизиқ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (2)$$

тенглама билан аниқланади. Агар

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

детерминант нолдан фарқли бўлса, (2) тенглама ягона марказга эга бўлган иккинчи тартибли чизиқни аниқлайди. Бундай чизиқлар марказий чизиқлар деб аталади.

Марказий чизиқлар эллипс, гипербола ва иккита кесишувчи тўғри чизиқлардан иборатдир. Булардан эллипс содда чизиқ бўлади. Гипербола эса иккита элементар чизиқдан иборат. Иккита кесишувчи тўғри чизиқлар эса биз киритган маънода битта чизиқ бўлмайди. Агар $\delta = 0$ бўлса, иккинчи тартибли чизиқ ёки марказга эга бўлмайди, ёки чексиз кўп марказга эга бўлади. Демак бу ҳолда, (2) тенглама парабола, иккита параллел тўғри чизиқ ёки устма-уст тушувчи иккита тўғри чизиқлардан бирортасини аниқлайди.

Параболанинг каноник тенгламаси

$$y'^2 = 2px', \qquad p > 0$$

кўринишда бўлади. Демак, парабола $x' = \dfrac{y'^2}{2p}$ функциянинг графиги ва элементар чизиқдир. Иккита параллел тўғри чизиқлар эса иккита элементар чизиқдан, устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар эса битта элементар чизиқдан иборат.

2. Параболанинг регуляр чизиқ эканлигини исботлайлик. Бунинг учун унинг тенгламасини

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0$$

каноник кўринишда ёзамиз. Агар y=t тенглик билан параметр киритсак, парабола

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t. \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

параметрик тенгламаларга эга бўлади. Бу ерда $x'^2 + y'^2 = \dfrac{t^4}{4p^2} + 1 > 0$ бўлганлиги учун парабола чексиз кўп марта дифференциалланувчи регуляр чизиқдир.

3. Бизга $y' = ky$ дифференциал тенглама берилган бўлсин. Унинг ечими $y' = Ce^{kx}$ кўринишда бўлади. Ечимнинг графиги

$$\begin{cases} x = t, \\ y = Ce^{kt}. \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

параметрик тенгламаларга эга бўлган регуляр чизиқдир.

4. Текисликда

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган чизиқ регуляр эмас, чунки у $M(t = 0)$ нуқта атрофида регуляр параметрлаш усулига эга эмас.

5. Текисликда

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган чизиқ умумий чизиқ бўлади, чунки $M_1(t = -1)$ ва $M_2(t = 1)$ нуқталар текисликда устма-уст тушади. Бу умумий чизиқ

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланган элементар чизиқнинг

$$f(t) = (t^2 - 1, \quad t^3 - t)$$

формула билан аниқланган $f: \gamma \to R^2$ локал топологик акслантиришдаги образидир (4-чизма).

6. Бернулли лемнискатаси (3-чизма). Текисликда ҳар биридан берилган F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофаларнинг кўпайтмаси F_1 ва F_2 нуқталар орасидаги масофа ярмининг квадратига тенг бўлган нуқталар тўплами Бернулли лемнискатаси деб аталади. Бернулли лемнискатасининг умумий чизиқ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун текисликда OX ўқи сифатида $F_1 F_2$ тўғри чизиқни, OY ўқи сифатида $F_1 F_2$ кесма

ўртасидан ўтувчи ва OX ўқига перпендикуляр тўғри чизиқни олиб, $|F_1F_2| = 2C$ белгилаш киритамиз. Шунда Бернулли лемнискатасига тегишли ихтиёрий $M(x,y)$ нуқта учун

$$\sqrt{(x+C)^2+y^2}\sqrt{(x-C)^2+y^2} = C^2$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни квадратга кўтариб соддалаштириш натижасида, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз.

$$x^4+2x^2y^2+y^4-2C^2(y^2-x^2)=0.$$

Энди $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$ формулалар ёрдамида қутб координаталар системасига ўтсак

$$\rho^2 = 2C^2\cos^2\varphi$$

тенглама ҳосил қиламиз. Энди бу чизиқнинг умумий чизиқ эканлиги

$$\begin{cases} x=\cos\varphi, \\ y=\sin\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланган айлананинг

$$f: M(\varphi)\to(C\sqrt{2\cos^2\varphi},\varphi)$$

формула ёрдамида аниқланган локал топологик акслантиришдаги образи Бернулли лемнискатаси билан устма-уст тушишидан келиб чиқади.

§ 2. Вектор функциялар учун дифференциал ҳисоб

Бизнинг курсимизда вектор анализ муҳим роль ўйнайди. Шунинг учун бу параграфда қисқача вектор-функциялар устида тўхталамиз.

Бирорта G тўплам берилган бўлсин. Агар G тўпламнинг ҳар бир нуқтасига аниқ битта вектор мос қўйилган бўлса, G тўпламда вектор функция берилган дейилади. Бу мосликни $p\to\vec{r}(p)$ кўринишда ёзамиз.

Вектор-функция учун лимит тушунчаси скаляр функциялар лимити каби киритилади.

Агар $\vec{a}$ ўзгармас вектор бўлиб, $p\to p_0$ да $\left|\vec{r}(p)-\vec{a}\right|\to 0$ бажарилса, $\vec{r}(p)$ вектор $p\to p_0$ да $\vec{a}$ лимитга эга дейилади ва $\vec{r}(p)\underset{p\to p_0}{\longrightarrow}\vec{a}$ кўринишда ёзилади.

Бу ерда $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}$, $(,)$ – скаляр кўпайтмадир. Агар фазода киритилган декарт координаталар системасида

$$\vec{r}(p)=\{x(p),y(p),z(p)\},\qquad \vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$$

бўлса, $\vec{r}(p) \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} \vec{a}$ қуйидаги учта муносабатга эквивалентдир:

$$x(p) \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} a_1,\ y(p) \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} a_2,\ z(p) \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} a_3.$$

Вектор-функция лимити учун қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема-6. $\vec{r}(p)$, $\vec{\rho}(p)$ -вектор-функциялар ва $\lambda(p)$ – скаляр функция G тўпламда аниқланган бўлиб, $\vec{r}(p) \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} \vec{a}$, $\vec{\rho}(p) \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} \vec{b}$ ва $\lim\limits_{p\to p_0}\lambda(p)=\lambda_0$, бўлса, қуйидаги муносабатлар ўринлидир;

1). $\vec{r}(p) \pm \vec{\rho}(p) \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} \vec{a} \pm \vec{b}$,

2). $\lambda(p)\vec{r}(p) \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} \lambda_0\vec{a}$,

3). $(\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)) \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} (\vec{a}, \vec{b})$,

4). $[\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)] \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} [\vec{a}, \vec{b}]$.

Бу ерда $[,]$ – вектор кўпайтма белгиси.

Исбот.

1). Вектор функция лимити таърифга кўра,

$\vec{d}(p) = \vec{r}(p) \pm \vec{\rho}(p)$, $\quad \vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$ белгилаш киритиб

$$\left|\vec{d}(p) - \vec{c}\right| \underset{p\to p_0}{\longrightarrow} 0 \qquad (*)$$

муносабатни исботлаймиз. Бунинг учун

$$\left|\vec{d}(p) - \vec{c}\right| = \left|(\vec{r}(p) - \vec{a}) \pm (\vec{\rho}(p) - \vec{b})\right| \le \left|\vec{r}(p) - \vec{a}\right| + \left|\vec{\rho}(p) - \vec{b}\right|$$

тенгсизликни ёзиб оламиз. Бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги ифода $p \to p_0$ да нолга интилади. Шунинг учун $(*)$ ўринли бўлади.

2). Иккинчи муносабат

$$\left|\lambda(p)\vec{r}(p) - \lambda_0\vec{a}\right| = \left|\lambda(p)\vec{r}(p) - \lambda(p)\vec{a} + \lambda(p)\vec{a} - \lambda_0\vec{a}\right| \le$$

$$\le |\lambda(p)|\left|\vec{r}(p) - \vec{a}\right| + |\lambda(p) - \lambda_0|\left|\vec{a}\right|.$$

тенгсизликдан келиб чиқади.

3). Теореманинг учинчи тасдиғини исботлаш учун скаляр кўпайтмаларни векторнинг декарт координаталари орқали ифодалаш етарли.

4). Сиз аналитик геометрия курсидан биласизки,
Агар,

$$\vec{r}(p)=\{x_1(p),y_1(p),z_1(p)\},\quad \vec{\rho}(p)=\{x_2(p),y_2(p),z_2(p)\}$$

бўлса,

$$\left[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)\right]=\left\{\begin{vmatrix} y_1(p) & z_1(p)\\ y_2(p) & z_2(p)\end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1(p) & x_1(p)\\ z_2(p) & x_2(p)\end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1(p) & y_1(p)\\ x_2(p) & p_2(p)\end{vmatrix}\right\}$$

бўлади. $p\to p_0$ да $\vec{r}(p)\to\vec{a},\ \vec{\rho}(p)\to\vec{b}$ бўлгани учун

$$x_1(p)\to a_1,\quad y_1(p)\to a_2,\quad z_1(p)\to a_3 \text{ ва}$$

$$x_2(p)\to b_1,\quad y_2(p)\to b_2,\quad z_2(p)\to b_3.$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Бу ерда $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\quad \vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}.$
Шунинг учун,

$$\left[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)\right]\underset{p\to p_0}{\longrightarrow}\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right\}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. □

Вектор функциялар учун узлуксизлик ва дифференциалланувчанлик тушунчалари скаляр функциялар узлуксизлиги ва диффренциалланувчилиги тушунчалари каби киритилади.

G тўпламнинг p_0 нуқтасида $\vec{r}(p)\underset{p\to p_0}{\longrightarrow}\vec{r}(p_0)$, бўлса, $\vec{r}(p)$ вектор-функция p_0 нуқтада узлуксиз дейилади. $\vec{r}(p)$ нинг p_0 нуқтада узлуксизлиги $x(p),y(p),\ z(p)$ функцияларнинг p_0 нуқтада узлуксизлигига эквивалентдир.

Теорема-7. $\vec{r}(p)$ ва $\vec{\rho}(p)$ – вектор функциялар ва $\lambda(p)$ функция p_0 нуқтада узлуксиз бўлса, $\lambda(p)\cdot\vec{r}(p)$, $\vec{r}(p)\pm\vec{\rho}(p)$, $[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]$ – вектор функциялар ва $(\vec{r}(p),\vec{\rho}(p))$ функция p_0 нуқтада узлуксиздир.
Бу теорема 1-теоремадан бевосита келиб чиқади.

Энди ҳосила тушунчасини киритамиз. Вектор функция аниқланган G тўплам сонлар ўқининг қисм тўплами бўлса, $\vec{r}(p)$ вектор-функция бир ўзгарувчили вектор-функция бўлади. Агар $p_0\in G$ нуқта учун

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(p_0+h)-\vec{r}(p_0)}{h}$$

мавжуд бўлса, уни $\vec{r}\,'(p_0)$ билан белгилаймиз ва $\vec{r}(p)$ − вектор-функциянинг p_0 нуқтадаги ҳосиласи деб атаймиз.

Агар

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(p_0+h)-\vec{r}(p_0)}{h}=\vec{r}\,'(p_0)$$

тенгликни координаталар орқали ёзсак у

$$\vec{r}\,'(p_0)=\{x'(p_0),\ \ y'(p_0),\ \ z'(p_0)\}$$

кўринишда бўлади. Демак, $\vec{r}(p)$ − вектор-функция p_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиши учун $\{x'(p_0),\ \ y'(p_0),\ \ z'(p_0)\}$ ҳосилаларнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир.

Агар, G тўплам текисликдаги бирорта соҳа бўлса, $p=(u,v)$ белгилаш киритамиз. Бу ҳолда $\vec{r}(p)$ ва унинг координата функциялари $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ икки ўзгарувчили функциялар бўлади. Демак, энди хусусий ҳосилалар ҳақида гапиришимиз мумкин.

Юқоридаги ҳосила тушунчасидан фойдаланиб,

$$\vec{r}\,'_u(u,v)=\{x'_u,\ \ y'_u,\ \ z'_u\}\ \text{ва}\ \vec{r}\,'_v(u,v)=\{x'_v\ ,\ \ y'_v\ ,\ \ z'_v\ \}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Ҳосилалар учун қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема-8. $\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)$ − вектор-функциялар ва $\lambda(p)$ функция p_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

1). $(\lambda(p)\vec{r}(p))'=\lambda'\vec{r}\,'+\lambda\vec{r},$

2). $(\vec{r}(p)\pm\vec{\rho}(p))'=\vec{r}\,'(p)\pm\vec{\rho}\,'(p),$

3). $(\vec{r}(p),\vec{\rho}(p))'=(\vec{r}\,'(p),\vec{\rho}(p))+(\vec{r}(p),\vec{\rho}\,'(p)),$

4). $[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]'=[\vec{r}\,'(p),\vec{\rho}(p)]+[\vec{r}(p),\vec{\rho}\,']$.

Исбот.

1). Берилган $\vec{r}(p)$ вектор-функцияни $\lambda(p)$ га кўпайтириб

$$\lambda(p)\vec{r}(p)=\{\lambda(p)x(p),\ \ \lambda(p)y(p),\ \ \lambda(p)z(p)\}$$

тенгликни ёзсак, дарҳол бу тенгликдан

$$(\lambda(p)\vec{r}(p))' = \lambda'(p)\vec{r}(p) + \lambda(p)\vec{r}\,'$$

муносабат келиб чиқади.

2). Иккинчи тенглик исботини ўқувчиларга қолдириб, 3-ва 4-тенгликларни исботлайлик. Учинчи тенгликда скаляр кўпайтма скаляр миқдор бўлганлиги учун унинг ҳосиласини топиш учун

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\vec{r}(p+h),\vec{\rho}(p+h))-(\vec{r}(p),\vec{\rho}(p))}{h}$$

лимитни ҳисоблаймиз.
Бунинг учун

$$(\vec{r}(p+h),\vec{\rho}(p+h))-(\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)) = (\vec{r}(p+h)-\vec{r}(p),\vec{\rho}(p+h)) +$$
$$+(\vec{r}(p),\vec{\rho}(p+h)-\vec{\rho}(p))$$

тенгликдан фойдаланиб,

$$(\vec{r}(p),\vec{\rho}(p))' = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\vec{r}(p+h)-\vec{r}(p)}{h},\vec{\rho}(p+h)\right) +$$
$$+\lim_{h\to 0}\left(\vec{r}(p),\frac{\vec{\rho}(p+h)-\vec{\rho}(p)}{h}\right).$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг ўнг томони

$$(\vec{r}\,'(p),\vec{\rho}(p))+(\vec{r}(p),\vec{\rho}\,'(p))$$

миқдорга тенгдир.
4-тенгликни исботлаш учун

$$[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]' = \lim_{h\to 0}\frac{[\vec{r}(p+h),\vec{\rho}(p+h)-[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]}{h}$$

тенгликда

$$[\vec{r}(p+h),\vec{\rho}(p+h)]-[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)] = [\vec{r}(p+h),\vec{\rho}(p+h)] -$$
$$-[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p+h)]+[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p+h)]-[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]$$

муносабатдан фойдаланиш етарлидир.[]

Энди бир ўзгарувчили $\vec{r}(t)$ вектор-функция учун интеграл тушунчасини киритайлик. Агар $\vec{r}(t)$ вектор-функция учун диффренциалланувчи $\vec{\rho}(t)$ вектор-функция мавжуд бўлиб, $\vec{r}(t)=\vec{\rho}\,'(t)$ тенглик бажарилса,

$\vec{\rho}(t)$ вектор-функция $\vec{r}(t)$ вектор-функциянинг аниқмас интеграли дейилади ва қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$\vec{\rho}(t) = \int \vec{r}(t)dt$$

Аниқ интеграл эса қуйидаги формула ёрдамида аниқланади.

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{\rho}(b) - \vec{\rho}(a),$$

Вектор-функциянинг интеграллари учун қуйидаги формулалар бевосита интеграл ва ҳосила таърифлари ёрдамида исботланади:

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^c \vec{r}(t)dt + \int_c^b \vec{r}(t)dt, \text{ бу ерда, } a \le c \le b.$$

$$\int_a^b \lambda \cdot \vec{r}(t)dt = \lambda \cdot \int_a^b \vec{r}(t)dt, \text{ бу ерда, } \lambda - \text{ўзгармас сон.}$$

$$\int_a^b (\vec{r}, \vec{\rho}(t))dt = (\vec{r}, \int_a^b \vec{\rho}(t)dt), \text{ бу ерда, } \vec{r} - \text{ўзгармас вектор.}$$

$$\int_a^b [\vec{r}, \vec{\rho}(t)]dt = [\vec{r}, \int_a^b \vec{\rho}(t)dt], \text{ бу ерда, } \vec{r} - \text{ўзгармас вектор.}$$

Бу тенгликлардан учинчисини исботлаб, қолганларини ўқувчиларга ҳавола этамиз.
Бунинг учун

$$\mu(t) = (\vec{r}, \int \vec{\rho}(t)), \qquad \lambda(t) = \int (\vec{r}, \vec{\rho}(t))dt$$

белгилашлар киритамиз ва $\vec{r}$ − ўзгармас вектор эканлигини ҳисобга олиб, $\mu(t)$, $\lambda(t)$ − скаляр дифференциалланувчи функцияларнинг ҳосилаларини топамиз.

$\vec{\mu}'(t) = (\vec{r}, \vec{\rho}(t))$, $\lambda'(t) = (\vec{r}, \vec{\rho}(t))$ яъни ҳосилалари тенгдир. Демак,

$$\int_a^b \vec{\mu}'(t)dt = \int_a^b \lambda'(t)dt$$

системалар ҳам тенг бўлади.

Энди дифференциалланувчи вектор-функция учун қуйидаги муҳим теоремани исботлаймиз.

Теорема-9. Бирор сегментда аниқланган $\vec{r}(t)$ − вектор-функция учун қуйидагилар ўринлидир:

1). $\vec{r}(t)$ – вектор функциянинг узунлиги ўзгармас бўлиши учун, $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$ – бўлиши зарур ва етарлидир.

2). $\vec{r}(t)$ – вектор-функциянинг йўналиши ўзгармас бўлиши учун, $\vec{r}(t) \,//\, \vec{r}'(t)$ – бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. 1). $\left|\vec{r}(t)\right|^2 = (\vec{r}(t), \vec{r}(t))$ бўлганлиги учун, $\frac{d}{dt}\left|\vec{r}(t)\right|^2 = 2(\vec{r}(t), \vec{r}'(t))$ бўлади.

Демак, $\left|\vec{r}(t)\right|^2 = const \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = 0$

2). $\vec{r}(t)$ – векторнинг йўналиши ўзгармас бўлса, уни $\vec{r}(t) = \lambda(t)\cdot\vec{e}$ кўринишда ёзамиз, бу ерда $\vec{e}$ йўналиш $\vec{r}(t)$ – йўналишдаги бирлик вектор. Демак, $\vec{r}'(t) = \lambda'(t)\cdot\vec{e}$ ва $\vec{r}$ ва $\vec{r}'$ коллинеардир.

Агар $\vec{r}$ ва $\vec{r}'$ коллинеар бўлса, яъни $\vec{r}'(t) = \lambda(t)\cdot\vec{r}(t)$ бўлса, $\vec{r}(t)$ – нинг йўналиши ўзгармас эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун $\vec{r}(t) = \left|\vec{r}(t)\right|\vec{e}(t)$ тенгликни ёзиб, уни диффренциаллаймиз. Бу ерда $\vec{e}(t)$ бирлик вектор ва унинг йўналиши $\vec{r}(t)$ – йўналиши билан бир хилдир. Агар $\vec{r}(t) = \vec{0}$ бўлса, $\vec{e}(t)$ йўналиши ихтиёрий дифференциалланувчи бирлик вектор-функциядир. Демак, энди

$\vec{r}'(t) = \left|\vec{r}(t)\right|'\vec{e}(t) + \left|\vec{r}(t)\right|\vec{e}'(t)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан эса,

$$\left|\vec{r}(t)\right|'\vec{e}(t) + \left|\vec{r}(t)\right|\vec{e}'(t) = \lambda(t)\left|\vec{r}(t)\right|\vec{e}'(t)$$

ёки $$\left(\left|\vec{r}(t)\right|' - \lambda(t)\left|\vec{r}(t)\right|\right)\vec{e}(t) + \left|\vec{r}'(t)\right|\vec{e}'(t) = \vec{0}.$$

келиб чиқади. Бу ерда

$\vec{e}(t)$ ва $\vec{e}'(t)$ ўзаро перпендикуляр векторлар бўлганлиги учун бу тенгликдан $\dfrac{d\vec{e}(t)}{dt}=\vec{0}$ келиб чиқади. Демак, $\vec{e}(t)$-ўзгармас вектордир. □

Бу параграф охирида $n-$марта дифференциалланувчи $\vec{r}(t)$ вектор функция учун Тейлор қаторини келтирамиз. Вектор функция учун Тейлор қаторини ёзиш учун фазода декарт координаталар системасини аниқловчи ортонормал $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ базисда

$$\vec{r}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}$$

тенгликни ёзиб, $x(t),y(t),z(t)$ функциялар учун Тейлор қаторини ёзамиз:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+x'(t)\Delta t+x''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+\ldots+x^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!}+\frac{\Delta t^n}{n!}\varepsilon_1(t,\Delta t)$$

$$y(t+\Delta t)=y(t)+y'(t)\Delta t+y''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+\ldots+y^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!}+\frac{\Delta t^n}{n!}\varepsilon_2(t,\Delta t)$$

$$z(t+\Delta t)=z(t)+z'(t)\Delta t+z''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+\ldots+z^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!}+\frac{\Delta t^n}{n!}\varepsilon_3(t,\Delta t)$$

Бу тенгликлардан

$$\vec{r}(t+\Delta t)=\vec{r}(t)+\vec{r}'(t)\Delta t+\vec{r}''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+\ldots+\vec{r}^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!}+\frac{\Delta t^n}{n!}\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)=\{\varepsilon_1(t,\Delta t),\varepsilon_2(t,\Delta t),\varepsilon_3(t,\Delta t)\}$$

ва $\left|\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)\right|\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}0$ муносабат ўринлидир.

Масалан, $n=1$ ва $n=2$ бўлганда

$$\vec{r}(t+\Delta t)=\vec{r}(t)+\vec{r}'(t)\Delta t+\Delta t\,\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)$$

$$\vec{r}(t+\Delta t)=\vec{r}(t)+\vec{r}'(t)\Delta t+\vec{r}''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+\frac{\Delta t^2}{2!}\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)$$

қаторлар ҳосил бўлади.

Машқлар ва масалалар

1. Бирорта $[a,b]$ кесмада аниқланган $\vec{r}(t)$ вектор функция учун $\vec{r}(t)\neq\vec{0}$, $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$ ва $\vec{r}(t)//\vec{r}'$ шартлар ҳар бир $t\in[a,b]$ учун бажарилса,

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

тенглама тўғри чизиқ кесмасини аниқлашини кўрсатайлик.

Бунинг учун $\vec{r}(t)=\lambda(t)\vec{r}'(t)$ тенгликни ёзиб $\vec{e}(t)=\dfrac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|}$ векторнинг ўзгармас вектор эканлигини кўрсатайлик. Ҳосилани ҳисоблаб

$$\frac{d}{dt}\vec{e}(t)=\frac{|\vec{r}(t)|\vec{r}'(t)-\vec{r}(t)\dfrac{(\vec{r}(t),\vec{r}'(t))}{|\vec{r}(t)|}}{\vec{r}^{\,2}(t)}=\frac{\lambda^2|\vec{r}'(t)|^2\vec{r}'(t)-\lambda^2|\vec{r}'(t)|^2\vec{r}'(t)}{|\vec{r}(t)|^3}=\vec{0}$$

тенгликни оламиз. Демак $\vec{r}(t)-$ йўналиши ўзгармас вектор ва шунинг учун унинг учи тўғри чизиқ кесмасини чизади.

2. Текисликдаги бирорта G соҳада аниқланган дифференциалланувчи $\vec{r}(u,v)$ вектор-функция берилган. Берилган $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг узунлиги ўзгармас бўлиши учун, $(\vec{r},\vec{r}_u)=(\vec{r},\vec{r}_v)=0$ тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Бу фактни исботлаш учун

$$|\vec{r}|^2=(\vec{r},\vec{r})$$

тенгликдан фойдаланамиз. Агар $|\vec{r}(u,v)|=const$ бўлса,

$$0=\frac{d}{du}|\vec{r}|^2=\frac{d}{du}(\vec{r},\vec{r})=2(\vec{r},\vec{r}_u)$$

$$0=\frac{d}{dv}|\vec{r}|^2=\frac{d}{dv}(\vec{r},\vec{r})=2(\vec{r},\vec{r}_v)$$

тенгликлардан $(\vec{r},\vec{r}_u)=(\vec{r},\vec{r}_v)=0$ тенгликлар келиб чиқади.

Энди $\vec{r}\perp\vec{r}_u$, $\vec{r}\perp\vec{r}_v$ бўлсин деб фараз қилайлик. Бу ҳолда

$$\frac{d}{du}\left|\vec{r}\right|^2 = 2(\vec{r},\vec{r}_u) = 0, \quad \frac{d}{dv}\left|\vec{r}\right|^2 = 2(\vec{r},\vec{r}_v) = 0,$$

тенгликлардан $\left|\vec{r}\right|$ функциянинг ўзгармас эканлиги келиб чиқади.

3. Текисликдаги бирорта G соҳада аниқланган дифференциалланувчи $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторларнинг иккаласига ҳам коллинеар бўлиши унинг йўналиши ўзгармас эканлигига тенг кучли эканлигини кўрсатайлик.

Агар $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг йўналиши ўзгармас бўлса, уни $\vec{r}(u,v) = \lambda(u,v)\,\vec{e}$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $\lambda(u,v)-$скаляр функция, $\vec{e}-$ўзгармас бирлик вектор. Бу кўринишдан $\vec{r}_u = \lambda_u(u,v)\,\vec{e}$, $\vec{r}_v = \lambda_v(u,v)\,\vec{e}$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак $\vec{r}$ вектор $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ векторнинг иккаласига ҳам коллинеардир.

Энди $\vec{r}(u,v) = \lambda(u,v)\vec{r}_u$, $\vec{r}(u,v) = \mu(u,v)\vec{r}_v$ тенгликлар ўринли бўлсин деб фараз қилиб,

$\vec{e}(u,v) = \dfrac{\vec{r}(u,v)}{\left|\vec{r}(u,v)\right|}$ векторнинг ўзгармас вектор эканлигини кўрсатайлик.

Бунинг учун $\dfrac{d}{du}\vec{e} = \vec{0}$, $\dfrac{d}{dv}\vec{e} = \vec{0}$, тенгликларни исботлаймиз.

$$\frac{d}{du}\vec{e} = \frac{\vec{r}_u\left|\vec{r}\right| - \vec{r}\dfrac{(\vec{r},\vec{r}_u)}{\left|\vec{r}\right|}}{\left|\vec{r}\right|^2} = \frac{\vec{r}_u\left|\vec{r}\right|^2 - \vec{r}(\vec{r},\vec{r}_u)}{\left|\vec{r}\right|^3} = \frac{\lambda^2\left|\vec{r}_u\right|^2\vec{r}_u - \lambda^2\left|\vec{r}_u\right|^2\vec{r}_u}{\left|\vec{r}\right|^3} = \vec{0}$$

Худди шундай

$$\frac{d}{dv}\vec{e} = \frac{\mu^2\left|\vec{r}_v\right|^2\vec{r}_v - \mu^2\left|\vec{r}_v\right|^2\vec{r}_v}{\left|\vec{r}\right|^3} = \vec{0}$$

тенгликни оламиз. Демак $\vec{r}(u,v) = \left|\vec{r}(u,v)\right|\vec{e}$ бўлиб, $\vec{r}$ векторнинг йўналиши ўзгармасдир.

4. Бирорта G соҳада аниқланган дифференциалланувчи $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг хусусий ҳосилалари $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ векторлар нол вектор бўлиши $\vec{r}(u,v)$ нинг ўзгармас вектор бўлишига тенг кучли эканлигини кўрсатайлик.

Хусусий ҳосилалар учун

$$\vec{r}_u = \vec{0}, \quad \vec{r}_v = \vec{0}$$

тенгликлар ўринли бўлса, $\vec{r}$ нинг координата функциялари учун

$$x_u = 0, \qquad x_v = 0$$
$$y_u = 0, \qquad y_v = 0$$
$$z_u = 0, \qquad z_v = 0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ функциялар ўзгармасдир. Бундан эса

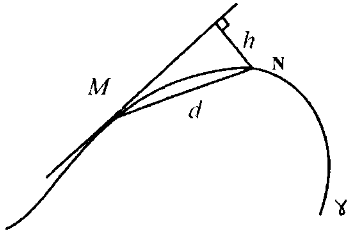
$$\vec{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$$

векторнинг ўзгармас эканлиги келиб чиқади. Аксинча $\vec{r}(u,v)$ ўзгармас эканлигидан $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ функциялар ўзгармас бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун $\vec{r}_u = \vec{r}_v = \vec{0}$ тенглик ўринли бўлади.

§ 3. Эгри чизиқ уринмаси ва нормал текислиги

Элементар γ эгри чизиқнинг M нуқтасидан ўтувчи уринма тушунчасини киритиб, унинг тенгламасини келтириб чиқарайлик. Бунинг учун M нуқтадан l тўғри чизиқни ўтказайлик, N билан M га яқин бўлган γ чизиқнинг бирорта нуқтасини белгилайлик. Эгри чизиқдаги M ва N нуқталар орасидаги масофани d билан, N нуқтадан l – тўғри чизиққача бўлган масофани h билан белгилайлик. Агар, N нуқта M га яқинлаша борса, табиийки, d ва h масофалар нолга интилади. Лекин, $\frac{h}{d}$ ифоданинг нимага интилиши ҳақида ҳеч нарса дея олмаймиз.

Таъриф: Эгри чизиқ γ нинг N нуқтаси M га интилганда $\frac{h}{d}$ ифода нолга интилса, l – тўғри чизиқ, γ нинг M нуқтадаги **уринмаси** деб аталади.



Чизма-5

Агар φ билан l ва MN тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни белгиласак, $\sin\varphi = \frac{h}{d}$ бўлади. Демак, агар l – уринма бўлса, N нуқта M га интилганда, MN тўғри чизиқ l – тўғри чизиққа интилади. Аксинча N нуқта M га интилганда MN тўғри чизиқ бирорта l – тўғри чизиққа интилсин. Шунда, равшанки l – уринма бўлади.

Теорема-9. Регуляр эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан ягона уринма ўтади. Агар γ эгри чизиқ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама ёрдамида берилган бўлса, $M(t_0)$ нуқтадаги уринма $\vec{r}'(t_0)$ векторга параллелдир.

Исбот. Аввало, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи уринма $\vec{r}'(t_0)$ векторга параллел эканлигини кўрсатайлик. Чизиқнинг $M(t_0)$ нуқтаси параметрнинг t_0 – қийматига, N нуқта параметрнинг $t_0 + \Delta t$ қийматига мос келса, $d = \left|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}\right|$ бўлади. l тўғри чизиқ ва MN тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг синуси $\frac{h}{d}$ га тенг бўлганлиги учун вектор кўпайтманинг аниқланишига мувофиқ $h = \left|\left[\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0), \vec{e}\right]\right|$ бўлади. Бу ерда $\vec{e}$ билан уринмага параллел бирлик векторни белгилаганмиз. l тўғри чизиқ M нуқтадан ўтувчи уринма бўлгани учун,

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{h}{d} = 0$ бўлади. Демак,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\left[\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0), \vec{e}\right]\right|}{\left|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)\right|} = 0$$

Лекин, касрнинг сурат ва махражини Δt га бўлсак,

$$\frac{\left|\left[\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0),\vec{e}\right]\right|}{\left|\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)\right|}=\frac{\left|\left[\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t},\vec{e}\right]\right|}{\left|\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right|}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\frac{\left|\left[\vec{r}'(t_0),\vec{e}\right]\right|}{\left|\vec{r}'(t_0)\right|}$$

муносабатни ҳосил қиламиз, теорема шартига кўра γ регуляр эгри чизиқ бўлгани учун $\left|\vec{r}'(t_0)\right|\neq\vec{0}$, ва демак, $\left|\left[\vec{r}'(t_0),\vec{e}\right]\right|=\vec{0}$.

Бундан келиб чиқадики, $\vec{r}'(t_0)$ ва $\vec{e}$ векторлар параллелдир.

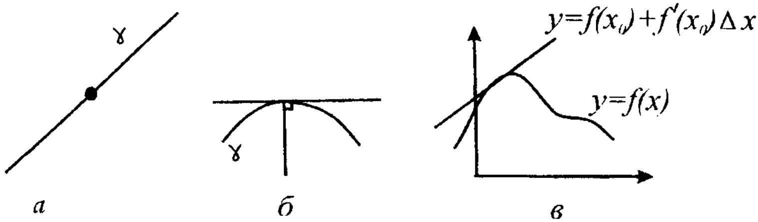
Энди M нуқтадан ўтувчи ва $\vec{r}'(t_0)$ векторга параллел l тўғри чизиқ уринма бўлишини кўрсатайлик. Юқоридаги ҳисоб-китобдан кўриниб турибдики,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h}{d}=\frac{\left|\left[\vec{r}'(t_0),\vec{e}\right]\right|}{\left|\vec{r}'(t_0)\right|};$$

Энди бу ерда, $\vec{e}=\dfrac{\vec{r}'(t_0)}{\left|\vec{r}'(t_0)\right|}$, бўлганлиги учун $\left|\left[\vec{r}'(t_0),\vec{e}\right]\right|=0$. Демак l уринмадир. П

Юқоридаги теоремадан фойдаланиб, уринмага қуйидагича таъриф беришимиз мумкин.

Таъриф. Регуляр γ эгри чизиқ $\vec{r}=\vec{r}(t)$ тенглама билан аниқланса, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{r}'(t_0)$ векторга параллел тўғри чизиқ γ нинг $M(t_0)$ нуқтасидан ўтувчи **уринмаси** деб аталади.



Чизма-6

Аналитик геометрия курсидан биламизки, агар тўғри чизиқнинг битта нуқтаси ва йўналтирувчи вектори (яъни унга параллел вектор) берилган бўлса, унинг тенгламасини туза оламиз. Регуляр γ эгри чизиқ $\vec{r}=\vec{r}(t)$ тенглама билан аниқланса унинг $M(t_0)$ нуқтасидан ўтувчи уринма тенгламаси

$$\vec{\rho}=\vec{r}(t_0)+\lambda\overrightarrow{r'}\ (t_0),\ (\lambda\text{-параметр})$$

кўринишда бўлади.

Регуляр эгри чизиқ параметрик тенгламалар ёрдамида, яъни,

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases},\quad a<t<b$$

система ёрдамида аниқланган бўлса, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи уринма тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $x_0=x(t_0),\quad y_0=y(t_0),\quad z_0=z(t_0)$.

Регуляр эгри чизиқ $y=y(x),\quad z=z(x)$ тенгламалар ёрдамида берилса, унинг уринма тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}$$

кўринишда бўлади.

Агар фазодаги эгри чизиқ

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида аниқланган ва $\begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}$ матрицанинг ранги иккига тенг бўлса, $M(x_0,y_0,z_0)$ нуқтадан ўтувчи уринма тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} \varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_x \end{vmatrix}}$$

кўринишда бўлади. Бу ерда хусусий ҳосилалар $M(x_0,y_0,z_0)$ нуқтада ҳисобланган. Ҳақиқатан, биринчи параграфдаги теоремага кўра, $M(x_0,y_0,z_0)$ нуқта атрофида γ эгри чизиқ

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида аниқланади.

Демак,

$$\varphi(x(t),\quad y(t),\quad z(t))\equiv 0,\quad \psi(x(t),\quad y(t),\quad z(t))\equiv 0$$

тенгликларни дифференциаллаб,

$$\varphi_x x' + \varphi_y y' + \varphi_z z' = 0$$
$$\psi_x x' + \psi_y y' + \varphi_z z' = 0$$

тенгликларни оламиз. Бундан эса

$$\frac{x'}{\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}} = \frac{y'}{\begin{vmatrix} \varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}} = \frac{z'}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Таъриф. Эгри чизиқнинг M нуқтасидан ўтувчи ва уринмага перпендикуляр равишда ўтадиган текислик эгри чизиқнинг M нуқтасидаги нормал текислиги деб аталади.

Нормал текислик тенглмаси

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

кўринишда бўлади.

3-параграфга доир машқ ва масалалар

1-масала. Чизиқ $0XY$ текисликда

$$y = x^2 + 4x + 3$$

функциянинг графигидан иборат. Абсциссаси -1 га тенг бўлган M нуқтадан ўтувчи уринма ва нормал тенгламасини тузинг.

Ечиш: Бунинг учун авввло M нуқтанинг ординатасини топамиз: $y_0 = (-1)^2 + 4\cdot(-1) + 3 = 0$. Энди чизиқнинг параметрик тенгламаларини

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 4t + 3, \quad -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

кўринишда ёзиб, уринма ва нормал тенгламаларини мос равишда

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} \quad \text{ва} \quad \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1}$$

ва кўринишларда ёза оламиз. Агар чизиқ тенгламасини вектор кўринишида

$$\vec{r} = \{t, \quad t^2 + 4t + 3\}$$

тенглама билан ёзсак, уринма ва нормал тенгламаларни ҳам мос равишда

$$\vec{\rho} = \{-1,0\} + \{1,2\}\lambda, \quad , \quad \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1}$$

кўринишларда ёза оламиз.

2-масала. Парабола

$$y = x^2 - 6x + 5$$

функциянинг графигидан иборат бўлса, унинг қайси нуқталаридаги уринмалари $x - 2y + 8 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади.

Ечиш: Параболанинг $M(x_0; y_0)$ нуқтасидан ўтувчи уринма тенгламаси

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2x_0 - 6}$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламани

$$2(x_0 - 3)x - y - 2(x_0 - 3)x_0 + y_0 = 0$$

кўринишда ёзиб, тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шартини ёзамиз,

$$1 \cdot 2(x_0 - 3) - 2(-1) = 0$$

ва $x_0 = 2$ қийматни топамиз. Энди ординатасини топамиз.

$$y_0 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3.$$

Демак, нуқтадан (2, 3) ўтувчи уринма берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади. Ҳақиқатан, бу нуқтадаги уринма тенгламаси $2x + y + 7 = 0$ кўринишда бўлади.

3-масала. Чизиқ $x = e^t, y = e^{-t}, \quad z = t^2$ параметрик тенгламаларга эга бўлса, параметрнинг $t = 1$ қийматига мос келувчи нуқтадаги уринма ва нормал текислик тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Параметрнинг $t = 1$ қийматига мос келувчи $M(x_0, y_0, z_0)$ нуқтанинг координаталарини топамиз:

$$x_0 = e^1 = e, \quad y_0 = e^{-1} = \frac{1}{e}, \quad z_0 = 1.$$

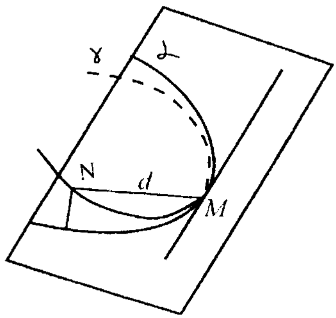
Энди уринма ва нормал текислик тенгламаларини ёзамиз.

$$\frac{x - e}{e} = \frac{y - \frac{1}{e}}{-\frac{1}{e}} = \frac{z - 1}{2} \qquad - \text{ уринма.}$$

$$e(x - e) - \frac{1}{e}\left(y - \frac{1}{e}\right) + 2(z - 1) = 0 \qquad - \text{ нормал текислик.}$$

§ 4. Ёпишма текислик ва унинг тенгламаси

Эгри чизиқ учун ёпишма текислик тушунчасини киритиб, унинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. Эгри чизиқ γ нинг M нуқтасидан ўтувчи бирорта α текислик ва чизиқдаги M га яқин N нуқта учун d билан M,N нуқталар орасидаги масофани, h билан эса N нуқтадан α текисликкача бўлган масофани белгилайлик.



Чизма-7

Таъриф. Чизиқдаги N нуқта M нуқтага яқинлашганда $\frac{h}{d^2}$ нолга интилса, α текислик γ нинг M нуқтасидаги ёпишма текислиги деб аталади.

Теорема-10: Икки марта дифференциалланувчи регуляр γ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан ўтувчи ёпишма текислик мавжуд бўлиб, уринма ёпишма текисликда ётади. Агар эгри чизиқ $\vec{r}=\vec{r}(t)$ тенглама ёрдамида аниқланган бўлса, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи ёпишма текислик $\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)$ векторларга параллел бўлади.

Исбот: Регуляр γ эгри чизиқнинг $M(t_0)$ нуқтасидан ўтувчи ёпишма текислик мавжуд бўлса, унинг $\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)$ векторларга параллел эканлигини кўрсатайлик. Ёпишма текисликни α билан, унинг бирлик нормал векторини $\vec{e}$ билан белгилайлик. Эгри чизиқ $M(t_0)$ нуқта атрофида $\vec{r}=\vec{r}(t)$ тенглама билан аниқланган бўлса, N нуқтага мос келувчи параметрнинг қиймати $t_0+\Delta t$ бўлади (N нуқта M нуқтага яқин бўлганлиги учун). Шунинг учун M ва N нуқталар орасидаги масофа d ва N нуқтадан α текисликкача бўлган масофа h учун қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади;

$$d=\left|\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)\right|,$$
$$h=\left|\left(\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0),\vec{e}\right)\right|.$$

Демак,

$$\frac{h}{d^2}=\frac{\left|\left(\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0),\vec{e}\right)\right|}{\left|\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t)\right|^2}=\frac{\left|\left(\vec{r}'(t_0)\Delta t+\frac{\vec{r}''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\vec{a}(\Delta t^2),\vec{e}\right)\right|}{\left|\vec{r}'(t_0)\Delta t+\vec{b}(\Delta t)\right|^2}=\frac{\left|\left(\frac{\vec{r}'(t_0)}{\Delta t}+\frac{\vec{r}''(t_0)}{2}+\frac{\vec{a}(\Delta t^2)}{\Delta t^2},\vec{e}\right)\right|}{\left|\ \vec{r}'(t_0)+\vec{c}(\Delta t)\ \right|^2}$$

Бу ерда, $\vec{a}(\Delta t^2),\vec{b}(\Delta t),\vec{c}(\Delta t)$ векторлар $\Delta t\to 0$ да ноль векторга интиладилар. Шунинг учун, юқоридаги тенгликда $\Delta t\to 0$ да лимитга ўтсак, ва α ёпишма текислик бўлганлиги учун $\frac{h}{d^2}$ нинг лимити нолга тенг эканлигини ҳисобга олсак

$$\left(\vec{r}'(t_0),\vec{e}\right)=0,\quad \left(\vec{r}''(t_0,\vec{e})\right)=0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак, α текислик $\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)$ векторларга параллелдир.

Энди ёпишма текисликнинг мавжуд эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун эса α билан $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)$ векторларга параллел текисликни белгилаймиз. Шунда $\vec{e}=\frac{\left[\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)\right]}{\left|\left[\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)\right]\right|}$ вектор α текисликнинг бирлик нормал вектори эканлигини ҳисобга олиб, юқоридаги ҳисоб китобларни такрорласак, $\frac{h}{d^2}=\frac{\left|\left(\vec{a}(\Delta t^2),\vec{e}\right)\right|}{\Delta t^2 \left(\vec{r}'^2(t_0)+\vec{c}(\Delta t)\right)}$ ни ҳосил қиламиз. $\vec{a}(\Delta t^2),\vec{c}(\Delta t)$ векторларнинг узунлиги $\Delta t\to 0$ да мос равишда Δt^2 ва Δt ларга нисбатан тезроқ нолга интилишини ҳисобга олсак, $\frac{h}{d}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}0$ ни ҳосил қиламиз. Демак, α ёпишма текисликдир. □

Изоҳ: Ёпишма текислик $\vec{r}'(t_0)$ ва $\vec{r}''(t_0)$ векторларга параллел бўлганлиги учун, агар бу векторлар ўзаро параллел бўлса, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи ёпишма текисликлар чексиз кўп. Лекин $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ векторлар параллел бўлмаса, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи ёпишма текислик ягонадир.

Энди ёпишма текислик тенгламасини ёзайлик. Бунинг учун $\vec{r}'(t_0)$ ва $\vec{r}''(t_0)$ векторларнинг бошларини $M(t_0)$ нуқтага жойлаштириб, $P(x,y,z)$

билан ёпишма текислик нуқтасини белгиласак, $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$, $\vec{MP}$ векторлар компланар векторлар оиласини ташкил қилади. Шунинг учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлади. Иккинчи томондан, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлгандагина $P(x,y,z)$ нуқта ёпишма текисликка тегишли бўлади. Демак, $\vec{r}$ билан Р нуқтанинг радиус векторини белгиласак, ёпишма текислик тенгламасини $(\vec{r}-\vec{r}(t_0))\vec{r}'(t_0)\vec{r}''(t_0)=0$ кўринишда ёза оламиз.

Агар эгри чизиқ $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ параметрик тенгламалар ёрдамида берилса, ёпишма текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

кўринишда бўлади.

Агар эгри чизиқ $F(x,y,z)=0$, $\Phi(x,y,z)=0$ тенгламалар ёрдамида берилса, унинг $M(x_0,y_0,z_0)$ нуқтадан ўтувчи ёпишма текислик тенгламасини келтириб чиқарайлик.

Бунинг учун эса эгри чизиқни $M(x_0,y_0,z_0)$ нуқта атрофида

$$\begin{cases} y=f(x) & x_0-\delta<x<x_0+\delta \\ z=g(x) \end{cases}$$

тенглама ёрдамида ёзиш мумкинлигидан фойдаланамиз. Бунинг учун эса $M(x_0,y_0,z_0)$ нуқтада

$$rang\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = 2$$

бўлсин деб фараз қиламиз.

Энди эса $x=t$, $y=f(t)$, $z=g(t)$ параметрик тенгламаларни ёзиб, юқоридаги кўринишдаги ёпишма текислик тенгламасини оламиз.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & f'(x_0) & g'(x_0) \\ 0 & f''(x_0) & g''(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Бу ердаги $f'(x_0), f''(x_0), g'(x_0), g''(x_0)$ ҳосилалар F ва Ф функциялар ҳосилалари орқали топилади.

Эгри чизиқнинг $M(t_0)$ нуқтасидан уринма тўғри чизиққа перпендикуляр ҳолда ўтувчи тўғри чизиқ нормал деб аталади. Нормаллар ичидан биз учун муҳимлари бош нормал ва бинормалдир.

Ёпишма текисликда ётувчи нормал бош нормал деб аталади, ёпишма текисликга перпендикуляр нормал эса бинормал деб аталади.

Албатта ёпишма текислик ягона бўлган ҳолдагина бу тушунчалар ишлатилади. Энди бош нормал ва бинормал тенгламаларини ёзайлик.

$\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)$ векторлар ёпишма текисликка параллел бўлгани учун вектор кўпайтма $\left[\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)\right]$ бинормал учун йўналтирувчи вектор бўлади. Демак бинормал тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'(t_0), & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}}$$

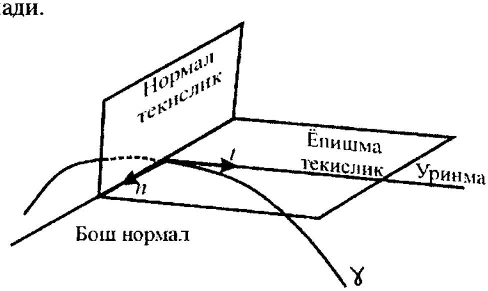
кўринишда бўлади.

Вектор кўпайтма $\left[\vec{r}'(t_0), \left[\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)\right]\right]$ эса бош нормал учун йўналтирувчи вектор бўлади. Шунинг учун бош нормал тенгламаси,

$$\frac{x-x_0}{y'(t_0)\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} - z'(t_0)\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{z'(t_0)\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} - x'(t_0)\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t) & y''(t_0) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{z-z_0}{x'(t_0)\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix} - y'(t_0)\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}}$$

кўринишда бўлади.



Чизма-8

4-параграфга доир машқ ва масалалар

1-масала. Эгри чизиқ мос равишда

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 3.$$

тенгламалар билан аниқланган сфера ва гиперболик цилиндрнинг кесишиш чизиғидан иборат. Унинг $M(2;1;2)$ нуқтасидаги ёпишма текислик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Аввало чизиқда x — ни параметр сифатида олиб чизиқнинг параметрик тенгламаларини ёзамиз. Бунинг учун M нуқта атрофида

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3}$$

тенгликлар бажарилишини ҳисобга олиб,

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t^2 - 3} \\ z = \sqrt{12 - 2t^2} \end{cases}$$

параметрик тенгламаларни ёзамиз. Параметрнинг $M(2;1;2)$ нуқтага мос келувчи қиймати маълум: $t_0 = x_0 = 2$. Энди $t_0 = 2$. нуқтада биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз.

$$x'(t_0) = 1. \quad x''(t_0) = 0.$$

$$y'(t_0) = 2. \quad y''(t_0) = -3.$$

$$z'(t_0) = -2. \quad z''(t_0) = -3.$$

Шунда ёпишма текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

кўринишда бўлади. Детерминантни биринчи сатри бўйича ёзиб ва ҳадларини ихчамлаб

$$4x - y + z - 9 = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

2-масала. Чизиқ $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^t$ тенгламалар билан берилган бўлса, параметрнинг $t = 0$ қийматига мос келувчи нуқтадаги уринма, бош нормал ва бинормал тенгламаларини ёзинг.

Ечиш. Бунинг учун аввало $t = 0$ га мос келувчи $M(x_0, y_0, z_0)$ нуқтанинг координаталарини топамиз. Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 1,$$

$$x_0' = 1, \quad y_0' = 0, \quad z_0' = 1,$$

$$x_0'' = 0, \quad y_0'' = 2, \quad z_0'' = 1,$$

Энди қуйидаги тенгламаларни ёза оламиз:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1} \text{ -уринма тенгламаси}$$

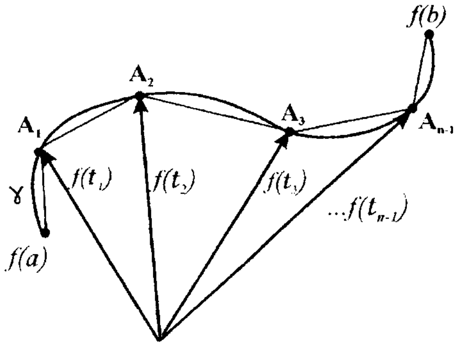
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1} \text{ -бош нормал тенгламаси}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2} \text{ -бинормал тенгламаси.}$$

§ 5. Эгри чизиқ ёйи узунлиги ва уни ҳисоблаш

Фазода γ эгри чизиқ, M эса унга тегишли нуқта бўлсин. Биз биламизки M нуқтанинг γ чизиқдаги старли кичик атрофи элементар эгри чизиқдир. Шу элементар эгри чизиқ γ_M очиқ $(a;b)$ интервалнинг f топологик акслантиришдаги образи бўлсин.

Агар $c,d \in (a,b)$ ва $c < d$ бўлса, γ_M нинг c,d – нуқталарга мос келувчи нуқталари билан чегараланган ёйи узунлиги тушунчасини киритамиз. Бунинг учун $[a,b]$ кесмани n та қисмга ажратувчи $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1}$ нуқталарни олиб, уларнинг γ_M чизиқдаги образларини $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ билан белгилайлик. Учлари $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ нуқталарда бўлган синиқ чизиқни γ_M чизиққа ички чизилган синиқ чизиқ деб атаймиз. Агар M ни ўз ичига олувчи бирорта ёй учун унга ички чизилган синиқ чизиқлар узунликлари юқоридан текис чегараланган бўлса, γ эгри чизиқ M нуқта атрофида тўғриланувчи дейилади.



Чизма-9

Теорема-11. Регуляр эгри чизиқ ўзига тегишли ҳар қандай нуқта атрофида тўғриланувчидир.

Исбот. Элементар γ_M эгри чизиқ,

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad a < t < b$$

тенглама билан берилган бўлсин ва параметрнинг M га мос келувчи қиймати t^0 учун $t^0 \in [c,d] \subset (a,b)$ муносабат бажарилсин.

Бу ерда, $c < d$, γ_M га ички чизилган синиқ чизиқ Γ нинг учлари $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1}$ нуқталарнинг образлари бўлиб, $c < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < d$

бўлсин, қулайлик учун $t_0 = c, t_n = d$ белгилашларни қабул қилиб, Γ нинг узунлигини юқоридан баҳолайлик.

Синиқ чизиқнинг t_i, t_{i+1} нуқталарга мос келувчи кесмаси узунлиги $\left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right|$ тенг, синиқ чизиқ узунлиги $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right|$ га тенг бўлади, агар $\left|\vec{r}'(t)\right| \le C$ бўлса, $\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i) = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{r}'(t)\,dt$ ни ҳисобга олиб $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right| \le \sum\limits_{i=0}^{n-1} C(t_{i+1} - t_i) \le C(d-c)$ ни ҳосил қиламиз.

Бу ерда $\left|\vec{r}'(t)\right| \le C$ тенгсизлик $\vec{r}'(t)$ функциянинг $[c,d]$ да узлуксизлигидан келиб чиқади. Демак, параметрнинг c ва d қийматларга мос келувчи нуқталар билан чегараланган ёйга ички чизилган ихтиёрий синиқ чизиқ узунлиги $C(d-c)$ сон билан чегараланган. □

Энди эгри чизиқ ёйи узунлигини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. γ_M нинг c, d – нуқталарга мос келувчи нуқталарини M_1, M_2 билан белгилаб, $M_1 \overset{\smile}{} M_2$ ёйнинг узунлиги сифатида бу ёйга ички чизилган синиқ чизиқлар узунликларининг юқори чегарасини қабул қиламиз.

Юқоридаги теоремага кўра $M_1 \overset{\smile}{} M_2$ ёй узунлиги чегараланган. Энди $\varepsilon > 0, \delta > 0$ бўлиб, Γ синиқ чизиқнинг узунлиги $M_1 \overset{\smile}{} M_2$ ёй узунлигидан ε га фарқ қилсин.

Агар Γ нинг учлари $c = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = d$ нуқталарнинг образлари бўлса, $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ шарт бажарилсин деб талаб қиламиз. Лекин бу шарт бажарилмаса, Γ ни шундай синиқ чизиқ $\overline{\Gamma}$ билан алмаштирамизки, $\overline{\Gamma}$ нинг учлари ичида Γ нинг учлари ҳам бор, лекин $\overline{\Gamma}$ учлари прообразлари учун $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ тенгсизлик бажарилади. $\overline{\Gamma}$ нинг узунлиги Γ узунлигидан кичик бўлмаганлиги учун унинг узунлиги ҳам $M_1 \overset{\smile}{} M_2$ узунлигидан ε дан кичик сонга фарқ қилади.

Демак, берилган $\varepsilon > 0, \delta > 0$ сонлар учун Γ узунлиги $M_1 \overset{\smile}{} M_2$ ёй узунлигидан ε дан кичик сонга фарқ қилади ва $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ муносабат бажарилади деб фараз қилишимиз умумийликни чегараламайди.

Энди Γ узунлигининг $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right|$ га тенглигини ҳисобга олиб,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right| = \int_c^d \left|\vec{r}'(t)\right| dt + \left\{\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)\left|\vec{r}'(t_i)\right| - \int_c^d \left|\vec{r}'(t)\right| dt\right\} +$$

$$+\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right| - \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)\left|\vec{r}'(t_i)\right|\right\}$$

тенгликни ёзиб, унинг ҳадларини $\delta \to 0$ да баҳолаймиз.

Бу тенгликнинг ўнг тарафидаги иккинчи ҳад интеграл таърифига кўра $\delta \to 0$ да нолга интилади. Учинчи ҳад учун эса

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left|\vec{r}(t_{i+1})-\vec{r}(t_i)\right|-\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\left|\vec{r}'(t_i)\right|=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\vec{r}'(t)dt\right|-\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\vec{r}'(t_i)\right|dt\right|$$

тенгликни ҳисобга олсак,

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left|\vec{r}(t_{i+1})-\vec{r}(t_i)\right|-\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\vec{r}'(t_i)\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\vec{r}'(t)-\vec{r}'(t_i)\right|dt$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Бу тенгсизликнинг ўнг тарафи $\vec{r}'(t)$ узлуксиз бўлганлиги учун $\delta \to 0$ да нолга интилади.

Шундай қилиб, $\int_c^d\left|\vec{r}'(t)\right|dt$ интеграл синиқ чизиқ Γ узунлигидан берилган ихтиёрий сондан кичик сонга фарқ қилади. Γ узунлиги эса $M_1 \overset{\smile}{} M_2$ ёй узунликдан ε дан кичик сонга фарқ қилади. Берилган ε нинг ихтиёрий танланганлигидан $M_1 \overset{\smile}{} M_2$ ёй узунлиги

$$\int_c^d\left|\vec{r}'(t)\right|dt$$ интегралга тенглиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, агар γ_M эгри чизиқ,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad a < t < b \\ z = z(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар ёрдамида берилса, $M_1 \overset{\smile}{} M_2$ ёй узунлиги

$$\int_c^d\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

формула бўйича ҳисобланади. Агар γ_M эгри чизиқ OXY текисликда $y = f(x)$ функциянинг графиги бўлса, $M_1 \overset{\smile}{} M_2$ ёй узунлиги

$$\int_c^d\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$ га тенгдир.

Ёй узунлигини эгри чизиқни параметрлаш учун ҳам ишлатиш мумкин. Агар $t_0, t \in (a,b)$ бўлса, γ_M-нинг t_0 ва t га мос келувчи нуқталари билан чегараланган ёй узунлигини $s(t)$ билан белгилаб,

$$\sigma(t) = s(t), \quad t > t_0,$$
$$\sigma(t) = -s(t), \quad t < t_0,$$
$$\sigma(t) = 0, \quad t = t_0.$$

қоида бўйича $\sigma(t)$ функциясини аниқласак, бу функция монотон ўсувчи функция бўлади. Чунки унинг ҳосиласи $|\vec{r}'(t)|$ га тенг ва демак, ҳар доим нолдан катта. Агар $\sigma(t)$ га тескари функцияни $t=t(\sigma)$ билан белгиласак ва $\vec{r}=\vec{r}(t)$ да t ўрнига қўйсак,

$$\vec{r}=\vec{r}(t(\sigma))=\vec{\rho}(\sigma)$$

тенгликни оламиз.

Ҳосил бўлган тенглама γ_{M} нинг табиий параметр ёрдамида аниқланган тенгламаси, σ эса табиий параметр дейилади.

Табиий параметрнинг муҳимлиги шундан иборатки, уринма вектор узунлиги ҳар доим бирга тенгдир.

Ҳақиқатдан ҳам,

$$\dot{\rho}(\sigma)=\vec{r}'\cdot t'=\vec{r}'\cdot\frac{1}{\sigma'(t)}=\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}, \quad \text{ва} \quad |\dot{\rho}(\sigma)|=1.$$

Бундан кейин, $\dot{\rho}$ белги $\vec{\rho}$ – нинг табиий параметр бўйича ҳосиласини билдиради. Табиий параметрини эса s билан белгилаймиз.

5-параграфга доир машқ ва масалалар

1-масала. Винт чизиғи

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \quad (a>0, \quad b>0). \\ z=bt. \end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида берилади. Винт чизиғи тенгламаларини табиий параметр ёрдамида ёзинг.

Ечиш. Бунинг учун аввало винт чизиғи учун ёй узунлигини ҳисоблаймиз ($M_1(0)$ ва $M_2(t)$ нуқталар билан чегараланган ёй узунлиги)

$$S=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t.$$

бу ердан $t=\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ни топиб,

$$\begin{cases} x = a\cos\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = a\sin\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}S \end{cases}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Текшириш учун

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dot{y} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dot{z} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

ҳосилаларни ҳисоблаб,

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$ ни ҳосил қиламиз.

2-масала. Ярим айлана

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \quad (0 \le t \le \pi) \end{cases}$$

тенгламалар билан берилган бўлса, у табиий параметр билан берилганлигини кўрсатинг.

Ечиш. Ёй узунлигини ҳисоблаймиз

$$s = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = t$$

ва тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, $t = s$ параметр табиий параметрдир.

3-масала. Чизиқ

$$\begin{cases} x^3 = 3a^2 y \\ 2xz = a^2 \quad (a \ne 0). \end{cases}$$

тенгламалар билан берилган бўлса, бу чизиқнинг $y = \frac{a}{3}$ ва $y = 9a$ текисликлар билан чегараланган ёйининг узунлигини топинг.

Ечиш. Аввало бу текисликлар билан берилган чизиқ бир мартадан кесишади. Биринчи $y = \frac{a}{3}$ текислик билан кесишиш нуқтаси $M_1(a, \frac{a}{3}, \frac{a}{2})$, иккинчи $y = 9a$ текислик билан кесишиш нуқтаси $M_2(3a, 9a, \frac{a}{6})$.

Энди чизиқнинг параметрик тенгламаларини

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{1}{3a^2}t^3 \\ z = \dfrac{a^2}{2t} \end{cases}$$

кўринишда ёзиб, ёй узунликларини ҳисоблаймиз.

$$S = \int_a^{3a} \sqrt{1^2 + \frac{t^4}{a^4} + \frac{a^4}{4t^4}}\,dt = \int_a^{3a} \sqrt{\frac{4a^4t^4 + 4t^8 + a^8}{4a^4t^4}}\,dt = \int_a^{3a} \frac{\sqrt{(a^4+2t^4)^2}}{2a^2t^2}\,dt =$$

$$= \int_a^{3a} \frac{a^4+2t^4}{2a^2t^2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int_a^{3a}\frac{dt}{t^2} + \frac{1}{a^2}\int_a^{3a} t^2\,dt = \frac{a^2}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_a^{3a} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_a^{3a} =$$

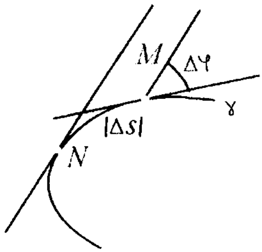
$$= -\frac{a}{6} + \frac{a}{2} + 9a - \frac{a}{3} = \frac{-a+3a-2a}{6} + 9a = 9a.$$

§ 6. Эгри чизиқ эгрилиги ва уни ҳисоблаш

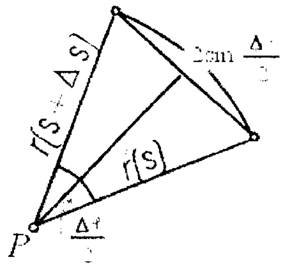
Бизга регуляр γ –эгри чизиқ ва М унга тегишли нуқта берилган бўлсин. Берилган М нуқтадаги эгрилик тушунчасини киритиб, уни ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун γ – эгри чизиқда М га яқин бўлган N нуқтани олиб, бу нуқталардан ўтувчи уринмалар орасидаги бурчакни $\Delta\varphi$ билан, $\overset{\smile}{MN}$ ёй узунлигини ΔS билан белгилайлик. Равшанки, N нуқта M га интилганда $\Delta\varphi$ ва ΔS миқдорлар нолга интилади. Аммо $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ ифода нимага интилишини олдиндан айта олмаймиз.

Таъриф. Чизиқдаги N нуқта M га интилганда $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ ифоданинг лимити мавжуд бўлса, у γ чизиқнинг М нуқтадаги эгрилиги деб аталади.

Теорема-12: Икки марта дифференциалланувчи регуляр эгри чизиқ учун $k = \lim\limits_{M \to N} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ мавжуд. Агар γ чизиқ $\vec{r} = \vec{r}(s)$ тенглама билан табиий параметр ёрдамида берилган бўлса, $k = \left|\ddot{\vec{r}}(s_0)\right|$ тенглик ўринлидир. Бу ерда s_0 табиий параметрнинг M га мос келувчи қийматдир.



Чизма-10



Чизма-11

Исбот. Фараз қилайлик, γ эгри чизиқ $\vec{r}=\vec{r}(s)$ тенглама билан табиий параметр ёрдамида берилган, $\vec{r}(s_0)$, $\vec{r}(s_0+\Delta s)$ векторлар мос равишда M ва N нуқталарнинг радиус векторлари бўлсин. Шунда $\Delta\varphi$ бурчак $\dot{\vec{r}}(s_0)$ ва $\dot{\vec{r}}(s_0+\Delta s)$ векторлар орасидаги бурчакка тенг.

Шунинг учун $\left|\dot{\vec{r}}(s_0+\Delta s)-\dot{\vec{r}}(s_0)\right|=2Sin\frac{\Delta\varphi}{2}$. Бу тенгликдан,

$$\frac{\left|\dot{\vec{r}}(s_0+\Delta s)-\dot{\vec{r}}(s_0)\right|}{\Delta s}=\frac{2Sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}=\frac{Sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

келиб чиқади. Бу тенгликда $\Delta s\to 0$ да лимитга ўтсак, $k=\left|\ddot{\vec{r}}(s_0)\right|$ ни ҳосил қиламиз.□

Энди ихтиёрий параметр учун эгриликни ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун $\vec{r}=\vec{r}(s)$ тенгликда s ни t нинг функцияси сифатида қараб, иккала томонини t бўйича дифференциаллайлик. Шунда $\vec{r}\,'=\dot{\vec{r}}\,s'$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $\dot{\vec{r}}=\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}$.

Энди бу тенгликни t бўйича дифференциаллаймиз ва

$$\ddot{\vec{r}}\,s'=\frac{\vec{r}\,''|\vec{r}\,'|-\frac{(\vec{r}\,',\vec{r}\,'')}{\sqrt{(\vec{r}\,',\vec{r}\,')}}}{|\vec{r}\,'|^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликни иккала томонини s' га бўлиб $\ddot{\vec{r}}=\frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,'|}-\frac{(\vec{r}\,',\vec{r}\,'')\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}$ ни оламиз. Энди иккала томонини квадратга ошириб,

$$k^2=\frac{\vec{r}\,''^2\vec{r}\,'^2-(\vec{r}\,',\vec{r}\,'')^2}{|\vec{r}\,'|^6}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бундан эса $k = \dfrac{\left|\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'\right|^3}$ келиб чиқади. $\left|\vec{r}\,'\right| = \sqrt{(\vec{r}\,',\vec{r}\,')} = \sqrt{\vec{r}\,'^2}$ ни ҳисобга олиб ва $k = \dfrac{\left|\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'^2\right|^{3/2}}$ кўринишда ёзиб ихтиёрий параметр учун эгриликни ҳисоблаш формуласини оламиз.

Агар $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t),\}$ бўлса, формула

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

кўринишига келади. Агар γ эгри чизиқ $y = f(x)$ функцияни графиги бўлса, эгрилик формуласи

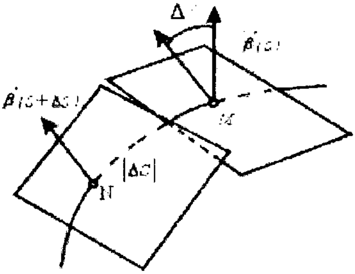
$$k = \frac{|f''|}{\left(1 + f'^2\right)^{3/2}}$$

кўринишга келади.

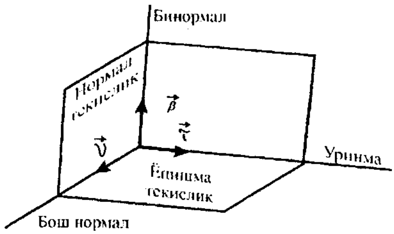
Энди, ҳамма нуқталарида эгрилиги нолга тенг бўладиган чизиқларни топайлик. Икки марта дифференциалланувчи эгри чизиқ табиий параметр ёрдамида $\vec{r} = r(s)$ тенглама ёрдамида берилган бўлса, унинг эгрилиги формула $k = \left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|$ бўйича ҳисобланади. Агар $k = 0$ бўлса, $\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right| = 0$ бўлади. Демак, $\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right| = 0$ ва $\vec{r}(s) = \vec{a}s + \vec{b}$ бўлиб, $\vec{a}, \vec{b}$ –ўзгармас векторлардир. Демак, эгри чизиқнинг ҳамма нуқталарида эгрилиги нолга тенг бўлса, у ёки тўғри чизиқ, ёки тўғри чизиқнинг очиқ кесмасидир. Албатта, бу тасдиқнинг тескариси ҳам тўғридир (исботланг).

§ 7. Эгри чизиқнинг буралиши ва уни ҳисоблаш

Эгри чизиқнинг берилган M нуқтасидаги буралиши тушунчасини киритайлик. Бизга γ эгри чизиқ ва унга тегишли M нуқта берилган бўлсин. M нуқтага яқин ва γ га тегишли нуқтани N билан, $\Delta\varphi$ билан бу нуқталардан ўтувчи ёпишма текисликлар орасидаги бурчакни, Δs билан $\breve{MN}$ ёй узунлигини белгилайлик.



Чизма-12



Чизма-13

Таъриф: N нуқта M нуқтага интилганда $\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ ифоданинг лимити γ эгри чизиқнинг M нуқтадаги абсолют бурилиши дейилади ва $|\sigma|$ билан белгиланади.

Теорема-13: Уч марта дифференциалланувчи регуляр γ эгри чизиқнинг, M нуқтада эгрилиги нолдан фарқли бўлса, $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ ифода тайин лимитга эга. Агар γ эгри чизиқ табиий параметр ёрдамида

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

тенглама билан берилган бўлса, унинг абсолют буралиши,

$$|\sigma| = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \dddot{\vec{r}}\right|}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|^2}$$

формула бўйича ҳисобланади.

Исбот: Фараз қилайлик, М нуқтадаги эгрилик нолдан фарқли бўлсин. Эгрилик узлуксиз функция бўлганлиги учун М га якин нуқталарда ҳам эгрилик нолдан фарқли бўлади

Шунинг учун, М нуқтага яқин нуқталарда $\dot{\vec{r}}$ ва $\ddot{\vec{r}}$ векторлар ўзаро ноколлинеар бўлади. Демак, ҳар бир нуқтадан ягона ёпишма текислик ўтади. Агар $\vec{\beta}(s_0)$, $\vec{\beta}(s_0+\Delta s)$ - векторлар М ва N нуқтадаги ёпишма текисликка перпендикуляр бирлик векторлар (яъни бирлик бинормал векторлар) бўлса,

$$2\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \left|\vec{\beta}(s_0+\Delta s) - \vec{\beta}(s_0)\right|$$

тенглик ўринли бўлади.

Шунинг учун

$$\frac{\left|\vec\beta(s_\circ+\Delta s)-\vec\beta(s_\circ)\right|}{\Delta s}=\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}=\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$$

тенглик ўринли. Бу тенгликда $\Delta s\to 0$ лимитга ўтиб, $|\sigma|=\left|\dot{\vec\beta}\right|$ тенгликни хосил қиламиз. Бинормал $\vec\beta$ вектор бирлик вектор бўлганлиги учун $\dot{\vec\beta}\perp\vec\beta$ бўлади. Агар $\vec\tau(s)=\dot{\vec r}(s)$ бўлса, $\vec v=\frac{\ddot{\vec r}}{k}$ – бирлик бошнормал вектор, $\bar\tau$ - бирлик уринма вектор бўлади. Шунинг учун $\vec\beta=[\vec\tau,\vec v]$ бўлади. Демак, $\dot{\vec\beta}=\left[\dot{\vec\tau},\vec v\right]+\left[\vec\tau,\dot{\vec v}\right]=\left[\vec\tau,\dot{\vec v}\right]$, чунки $\left[\dot{\vec\tau},\vec v\right]=\vec 0$. Бу тенгликдан, $\dot{\vec\beta}\perp\vec\tau$ эканлиги

келиб чиқади. Демак, $\dot{\vec\beta}\parallel\vec v$. Шунинг учун, $|\sigma|=\left|\left(\dot{\vec\beta},\vec v\right)\right|$ тенгликни ёза

оламиз. Бу тенгликка $\vec v=\frac{\ddot{\vec r}}{k}$, $\vec\beta=\frac{\left[\dot{\vec r},\ddot{\vec r}\right]}{k}$ ифодаларни қўйиб, $|\sigma|=\frac{\left|\dot{\vec r}\;\ddot{\vec r}\;\dddot{\vec r}\right|}{k^2}$

формулани ҳосил қиламиз. Энди буралишни аниқлайлик. $\dot{\vec\beta}$ вектор $\vec v$ векторга параллел бўлганлиги учун эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилсак (s ўса бошлаганда) ёпишма текислик уринма атрофида айлана бошлайди. Агар ёпишма текислик буралиши йўналиши $\vec\beta$ дан $\vec v$ га йўналган бўлса, (+) ишора билан акс ҳолда эса (-) ишора билан олиб, $\sigma=\pm|\sigma|$ формула бўйича буралишни киритамиз. $|\sigma|$ нинг ифодасини ҳисобга олиб

$$\sigma=-\frac{\dot{\vec r}\;\ddot{\vec r}\;\dddot{\vec r}}{k^2}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди ихтиёрий t параметр учун буралишни ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун ёй узунлиги $S=S(t)$ параметр t нинг функцияси эканлигидан фойдаланамиз. Эгри чизиқ тенгламаси $\vec r=r(s)$ бўлса,

$$\dot{\vec r}=\vec r'\cdot\frac{dt}{ds},\quad \ddot{\vec r}=\vec r''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\vec r'\cdot\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\dddot{\vec r}=\vec r'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3+2\vec r''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2r}{ds^2}+\vec r''\frac{d^2r}{ds^2}\frac{dt}{ds}+\vec r'\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}$$

ифодаларни буралиш формуласига қўйсак

$$\sigma=-\frac{\vec{r}'\,\vec{r}''\,\vec{r}'''}{\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]^2}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Агар бирорта чизиқнинг буралиши ҳамма нуқталарда нолга тенг бўлса, у албатта ясси чизиқ бўлади, яъни бирорта текисликда ётади (исботланг).

Юқорида кўрсатиб ўтганимиздек, агар регуляр γ чизиқ

$$\vec{r}=\vec{r}(t), \qquad a<t<b$$

тенглама билан берилиб, ҳар бир t учун $\vec{r}'(t)$ ва $\vec{r}''(t)$ векторлар коллинеар векторлар бўлмаса, γ чизиқнинг ҳар бир нуқтасига ортонормал системани ташкил қилувчи учта векторни мос қўйиш мумкин. Бу учлик бирлик уринма вектор, бирлик бош нормал вектор ва бирлик бинормал векторлардан иборат. Бу учликни Френе учлиги деб атаймиз. Ҳозир биз фазодаги ориентацияни сақловчи ҳаракат регуляр чизиқни регуляр чизиққа ўтказишини ва бунда Френе учлиги ҳам яна Френе учлигига ўтишини исботлаймиз.

Фазода регуляр γ эгри чизиқ

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}(t), \qquad a<t<b$$

тенглама билан, унинг $F\colon R^3 \to R^3$ ҳаракатдаги образи $F(\gamma)$

$$\vec{r}=\vec{r}(t), \qquad a<t<b$$

тенглама билан берилган бўлсин. Агар

$$\vec{\rho}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$$

бўлиб, F ҳаракат

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

матрица ва

$$a=\{a_1,a_2,a_3\}$$

вектор ёрдамида берилган бўлса, $F(x,y,z)$ нуқтанинг координаталари

$$x_1=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1$$

$$y_1=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2$$

$$z_1=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3$$

кўринишда бўлади. Шунинг учун $\vec{r}(t)$ векторнинг координаталари

$$x_1(t), \quad y_1(t), \quad z_1(t)$$

функциялар бўлса,

$$(x_1(t),\quad y_1(t),\quad z_1(t))=F(x(t),\quad y(t),\quad z(t))$$

тенгликдан

$$\vec{r}'(t)=A\,\vec{\rho}'(t)$$

формула келиб чиқади. Бу тенгликда $\vec{r}'(t)$ ва $\vec{\rho}'(t)$ векторлар устун кўринишда ёзилган. Бу ерда A ортогонал матрица бўлгани учун

$$\left|\vec{r}'(t)\right|=\left|A\,\vec{\rho}'(t)\right|=\left|\vec{\rho}'(t)\right|,$$

$$\left(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t)\right)=\left(A\,\vec{\rho}'(t),A\,\vec{\rho}''(t)\right)=\left(\vec{\rho}'(t),\vec{\rho}''(t)\right),$$

$$\left\|\left[\vec{r}'(t),\vec{r}''(t)\right]\right\|=\left\|\left[A\,\vec{\rho}'(t),A\,\vec{\rho}''(t)\right]\right\|=\left\|\left[\vec{\rho}'(t),\vec{\rho}''(t)\right]\right\|$$

тенгликлар ўринли. Бу тенгликлардан охиргиси ўринли бўлиши учун $\det A>0$ шартни ҳам яъни F ҳаракат ориентацияни сақлашини талаб қилдик. Бу тенгликлардан

$$\tau_1=\frac{\vec{r}'}{\left|\vec{r}'\right|}=\frac{A\,\vec{\rho}'}{\left|A\,\vec{\rho}'\right|}=\frac{A\,\vec{\rho}'}{\left|\vec{\rho}'\right|}=A(\vec{\tau})$$

$$\vec{v}_1=A(\vec{v}),\quad \vec{\beta}_1=\left[A(\vec{\tau}),A(\vec{v})\right]=A(\vec{\beta})$$

формулалар ҳосил қиламиз. Бу формулалар γ чизиқнинг Френе учлиги F акслантиришда $F(\gamma)$ чизиқнинг Френе учлигига ўтишини исботлайди.

Бу формулалардан ориентацияни сақловчи ҳаракатда чизиқларнинг эгрилиги ва буралиши ҳам ўзгармай қолиши келиб чиқади. Ҳақиқатдан, эгрилик ва буралиш формулаларидан фойдаланиб,

$$k_1=\frac{\left\|\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]\right\|}{\left(\vec{r}'^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}=k=\frac{\left\|\left[\vec{\rho}',\vec{\rho}''\right]\right\|}{\left(\vec{\rho}'^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sigma_1=-\frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}''\cdot\vec{r}'''}{k_1^2}=\sigma=-\frac{\vec{\rho}'\cdot\vec{\rho}''\cdot\vec{\rho}'''}{k^2}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

§ 8. Френе формулалари

Эгри чизиқ γ табиий параметр ёрдамида

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

тенглама билан берилган бўлсин. Агар M нуқта γ нинг параметрнинг $s_\circ$ қийматига мос келувчи нуқта бўлса, бу нуқтадан чиқувчи ўзаро ортогонал учта вектор мавжудлигини кўрдик.

Булар, $\vec{\tau}(s_\circ)$ – бирлик уринма вектор, $\vec{\nu}(s_\circ)$ – бирлик бош нормал вектор, $\vec{\beta}(s_\circ)$ – бирлик бинормал векторлардир. Эгри чизиқ γ нинг M нуқта атрофидаги қисмини текширишда M нуқтани координата боши сифатида, $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ –векторларни координата ўқларининг йўналтирувчи векторлар сифатида олайлик. Бунинг учун, олдин $\dot{\vec{\tau}}, \dot{\vec{\nu}}, \dot{\vec{\beta}}$ векторларнинг ҳосилаларини $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ векторлар орқали ифодалайлик. Биринчидан, $\dot{\vec{\tau}} = \ddot{\vec{r}} = k\vec{\nu}$ муносабатини биламиз. Олдинги параграфда $\dot{\beta} = \sigma\bar{\nu}$ ни кўрсатган эдик. Буларни ва $\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$ ни ҳисобга олиб $\dot{\vec{\nu}} = [\dot{\vec{\beta}}, \vec{\tau}] + [\vec{\beta}, \dot{\vec{\tau}}]$ дан $\dot{\vec{\nu}} = -k\vec{\tau} - \sigma\vec{\beta}$ формулани ҳосил қиламиз.

Демак,

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu} \\ \dot{\vec{\nu}} = -k\vec{\tau} - \sigma\vec{\beta} \\ \dot{\vec{\beta}} = \sigma\vec{\nu} \end{cases}$$

формулалари ҳосил қиламиз.

Энди $\vec{r}(s_\circ + \Delta s)$ вектор-функцияни Тейлор қаторига ёйайлик

$$\vec{r}(s_0+\Delta s) = \vec{r}(s_0) + \dot{\vec{r}}\,\Delta s + \ddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^2}{2} + \dddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^3}{6} + \ldots$$

M нуқта координата боши бўлганлиги учун $\vec{r}(s_0) = \vec{0}$ бу қаторда $\dot{\vec{r}} = \vec{\tau}$, $\ddot{\vec{r}} = k\vec{\nu}$, $\dddot{\vec{r}} = k\dot{\vec{\nu}} - k\sigma\vec{\beta} - k^2\vec{\tau}$ муносабатларни ҳисобга олиб,

$$\vec{r}(s_\circ + \Delta s) = \left(\Delta s - \frac{k^2\Delta s^2}{6} + \ldots\right)\vec{\tau} + \left(\frac{k\Delta s^2}{2} + \frac{\sigma\Delta s^2}{6} + \ldots\right)\vec{\nu} + \left(-\frac{k\sigma\Delta s^2}{6} + \ldots\right)\vec{\beta}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди x, y, z ўқлари мос равишда $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ векторлар йўналишларига эга эканлигидан фойдаланиб

$$x = \Delta s - k \frac{\Delta s^2}{6} + \ldots$$

$$y = k \cdot \frac{\Delta s}{2} + k \frac{\Delta s^2}{6} + \ldots$$

$$z = -k\sigma \frac{\Delta s^2}{6} + \ldots$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгламаларда фақат эгрилик ва буралиш қатнашмоқда. Демак, чизиқни аниқлаш учун унинг ҳамма нуқталарида эгрилик ва буралишни билишимиз старли.

Энди шу масалани муҳокама қилайлик. Бизга параметрланган регуляр γ эгри чизиқ берилган бўлса, унинг ихтиёрий нуқтасида учта $s(t)$, $k(t)$, $\sigma(t)$ функциялар аниқланган. Бу функциялар узлуксиз ва $k(t) > 0$, $s(t) > 0$, муносабатлар ўринлидир. Агар параметр сифатида ёй узунлигини олсак, функциялар сони 2 та бўлади.

Теорема-14. Иккита регуляр эгри чизиқларнинг ёйлари γ_1 ва γ_2 мос равишда

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t), \qquad \vec{r} = \vec{r}_2(t), \qquad a \le t \le b$$

тенгламалар ёрдамида берилиб,

$$\int_a^t \left|\vec{r}_1'(t)\right| dt = \int_a^t \left|\vec{r}_2'(t)\right| dt$$

тенглик ихтиёрий $t \in [a,b]$ учун ўринли бўлсин. Бундан ташқари ҳар бир $t \in [a,b]$ учун $k_1(t) = k_2(t)$, $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$ тенгликлар ўринли бўлса, ягона $F: R^3 \to R^3$ ҳаракат мавжуд бўлиб,

$$F(\gamma_2) = \gamma_1$$

муносабат ўринли бўлади.

Исбот. Бу чизиқларнинг узунликлари тенг бўлгани учун

$$s_0 = \int_a^b \left|\vec{r}_1'(t)\right| dt = \int_a^b \left|\vec{r}_2'(t)\right| dt$$

белгилаш киритиб, чизиқлар тенгламаларини табиий параметр ёрдамида ёзамиз. Шунда уларнинг тенгламалари

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_1(s)$$

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_2(s), \qquad 0 \le s \le s_0$$

кўринишда бўлади. Энди ҳар бир чизиқда табиий параметрнинг $s=0$ қийматига мос келувчи нуқталарини мос равишда M_1 ва M_2 билан белгилаймиз. Бу нуқталардаги Френе учликлари мос равишда, $\vec{\tau}_1(0)$, $\vec{\nu}_1(0)$, $\vec{\beta}_1(0)$ ва $\vec{\tau}_2(0)$, $\vec{\nu}_2(0)$, $\vec{\beta}_2(0)$ векторлардан иборат бўлади. Бу учликлар фазода бир хил ориентацияларни аниқлагани учун шундай $F: R^3 \to R^3$ ҳаракат мавжудки, у M_2 нуқтани M_1 нуқтага, $\vec{\tau}_2(0)$, $\vec{\nu}_2(0)$, $\vec{\beta}_2(0)$ векторларни мос равишда $\vec{\tau}_1(0)$, $\vec{\nu}_1(0)$, $\vec{\beta}_1(0)$ векторларга ўтказади. Биз $F(\gamma_2)=\gamma_1$ тенгликни исботлаймиз. Бунинг учун $F(\gamma_2(s))$ нуқтанинг радиус-векторини $\vec{\rho}(s)$ билан белгилаб, $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s)$, $s\in[0,s_0]$ тенглама билан аниқланган регуляр эгри чизиқнинг Френе учлигини $\{\vec{\tau}(s),\ \vec{\nu}(s),\ \vec{\beta}(s)\}$ билан белгилаймиз. Шунда биз $\vec{\tau}(0)=\vec{\tau}_1(0)$, $\vec{\nu}(0)=\vec{\nu}_1(0)$, $\vec{\beta}(0)=\vec{\beta}_1(0)$ тенгликларга эга бўламиз. Ҳаракатда векторларнинг скаляр кўпайтмаси сақлангани учун

$$k(s)=k_2(s), \qquad \sigma(s)=\sigma_2(s)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Демак, $k(s)=k_1(s)$, $\sigma(s)=\sigma_1(s)$ тенгликлар ҳам ўринлидир. Энди $\vec{\rho}(s)=\vec{\rho}_1(s)$ тенгликни исботлаш учун

$$h(s)=(\vec{\tau}_1(s),\vec{\tau}(s))+(\vec{\nu}_1(s),\vec{\nu}(s))+(\vec{\beta}_1(s),\vec{\beta}(s))$$

функцияни қараймиз. Бу функция учун $h(0)=3$ тенглик ўринли. Бу функцияни дифференциаллаймиз

$$h'(s)=(\vec{\tau}_1'(s),\vec{\tau}(s))+(\vec{\tau}_1(s),\vec{\tau}'(s))+(\vec{\nu}_1'(s),\vec{\nu}(s))+(\vec{\nu}_1(s),\vec{\nu}'(s))+$$
$$+(\vec{\beta}_1'(s),\vec{\beta}(s))+(\vec{\beta}_1(s),\vec{\beta}'(s))$$

ва Френе формулаларидан фойдаланиб,

$$h'(s)=k_1(\vec{\nu}_1(s),\vec{\tau}(s))+k(\vec{\tau}_1(s),\vec{\nu}(s))-k_1(\vec{\tau}_1(s),\vec{\nu}(s))-\sigma_1(\vec{\beta}_1(s),\vec{\nu}(s))-$$
$$-k(\vec{\nu}_1(s),\vec{\tau}(s))-\sigma(\vec{\nu}_1(s),\vec{\beta}(s))+\sigma_1(\vec{\nu}_1(s),\vec{\beta}(s)+\sigma(\vec{\beta}_1(s),\vec{\nu}(s))=$$
$$=(k_1-k)(\vec{\nu}_1(s),\vec{\tau}(s))+(k-k_1)(\vec{\tau}_1(s),\vec{\nu}(s))+(\sigma_1-\sigma)(\vec{\nu}_1(s),\vec{\beta}(s))-$$
$$-(\sigma_1-\sigma)(\vec{\beta}_1(s),\vec{\nu}(s))$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $k = k_1$, $\sigma = \sigma_1$ бўлгани учун $h'(s) = 0$. Демак, $h(s) = h(0) = 3$ ва $\vec{\tau}(s) = \vec{\tau}_1(s)$ тенглик ўринли бўлади. Бундан $\vec{\rho}(s) = \vec{\rho}_1(s) + \vec{c}$ тенгликни оламиз бу ерда $\vec{c}$ — ўзгармас вектор бўлгани учун $\vec{\rho}(0) = \vec{\rho}_1(0)$ тенгликдан $\vec{c} = \vec{0}$ муносабат келиб чиқади. Шундай қилиб, биз $F(\gamma_2) = \gamma_1$ муносабатни исботладик.

Теорема-15. Иккита узлуксиз $f(s)$ ва $g(s)$ функциялар $[0; s_0]$ оралиқда аниқланган ва $f(s) > 0$ бўлса, табиий параметр ёрдамида параметрланган регуляр эгри чизиқ мавжуд бўлиб, унинг эгрилиги ҳамда буралиши мос равишда $k(s)$, $\sigma(s)$ функцияларга тенгдир.

Исбот. Бизга M_0 нуқта ва ортонормал $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ система берилган бўлсин. $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ вектор функцияларга нисбатан

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = f\vec{\nu} \\ \dot{\vec{\nu}} = -f\vec{\tau} - g\vec{\beta} \\ \dot{\vec{\beta}} = g\vec{\nu} \end{cases} \qquad (1)$$

дифференциал тенгламалар системасини

$$\vec{\tau}(0) = \vec{a}, \quad \vec{\nu}(0) = \vec{b}, \quad \vec{\beta}(0) = \vec{c}$$

бошланғич шартлар билан қарайлик. Дифференциал тенгламалар системасининг ечими мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремага асосан бу системанинг $[0, s_0]$ оралиқда аниқланган ягона $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ ечими мавжуд. Бошланғич шартларга асосан $s = 0$ бўлганда бу учлик ортонормал системани ташкил қилади. Биз ихтиёрий $s \in [0, s_0]$ учун бу учликнинг ортонормал эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $X(s)$ билан биринчи сатри $\vec{\tau}(s)$ вектордан, иккинчи сатри $\vec{\nu}(s)$ вектордан ва учинчи сатри $\vec{\beta}(s)$ вектордан иборат матрицани белгиласак, (1) системани

$$X'(s) = A(s)X(s) \quad (2)$$

кўринишда ёза оламиз. Бу ерда

$$A(s)=\begin{pmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & -g(s) \\ 0 & g(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Энди $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ векторларнинг ортонормал система эканлигини кўрсатиш учун $X(s)$ матрицанинг ортогонал матрица эканлигини кўрсатиш старлидир. Демак, ихтиёрий $s\in[0,S_0]$ учун

$$X^T(s)X(s)=E$$

тенгликни исботлашимиз зарур ва етарли. Бу ерда $X^T(s)-$ транспонирланган матрица, $E-$ бирлик матрицадир.

Биз (2) тенгликдан

$$\frac{d}{ds}(X^T(s))=X^T(s)A^T(s)$$

тенгликни оламиз. Бу тенгликни ҳисобга олиб,

$$X^T(s)X(s)$$

кўпайтмани дифференциаллаймиз. Шунда

$$\frac{d}{ds}(X^T(s)X(s))=\frac{d}{ds}X^T(s)X(s)+X^T(s)\frac{d}{ds}X(s)=$$

$$=X^T(s)A^T(s)X(s)+X^T(s)A(s)X(s)=X^T(s)[A^T(s)+A(s)]X(s)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликда $A^T(s)=-A(s)$ муносабатни ҳисобга олиб,

$$\frac{d}{ds}(X^T(s)X(s))=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, $X^T(s)X(s)$ ўзгармас матрица ва $X^T(0)X(0)=E$ бўлганлиги учун

$$X^T(s)X(s)=E$$

тенглик ҳамма s лар учун ўринлидир.

Шундай қилиб, ихтиёрий $s\in[0,s_0]$ учун $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ векторлар ортонормал системани ташкил қилади. Энди

$$\vec{\rho}(s)=\vec{\rho}_0+\int_0^s\vec{\tau}(s)ds$$

тенглама билан γ чизиқни аниқлаймиз. Бу ерда $\vec{\rho}_0$ $-M_0$ нуқтанинг радиус-векторидир. Бу чизиқ учун

$$\dot{\vec{\rho}}(s) = \vec{\tau}(s), \qquad |\vec{\tau}(s)| = 1$$

$$\ddot{\vec{\rho}}(s) = \dot{\vec{\tau}}(s) = f(s)\,\vec{\nu}(s)$$

$$k = |\ddot{\vec{\rho}}| = f(s)$$

бўлганлиги учун

$$[\dot{\vec{\rho}}(s), \ddot{\vec{\rho}}(s)] \neq \vec{0}$$

муносабат келиб чиқади. Демак, бу чизиқ учун буралиш аниқланган ва

$$\sigma = -\frac{\dot{\vec{\rho}}\,\ddot{\vec{\rho}}\,\dddot{\vec{\rho}}}{k^2} = -\frac{\left(\left[\vec{\tau}, f\vec{\nu}\right], f'(s)\,\vec{\nu}(s) + f\,\dot{\vec{\nu}}\right)}{k^2} = -\frac{\left(\left[\vec{\tau}, f\vec{\nu}\right], f\,\dot{\vec{\nu}}\right)}{k^2} =$$

$$= -\frac{f^2\left(\left[\vec{\tau}, \vec{\nu}\right], -f\vec{\tau} - g\vec{\beta}\right)}{k^2} = \frac{f^2 g(\vec{\beta}, \vec{\beta})}{k^2} = g$$

тенглик ўринлидир. Демак, γ чизиқ теорема тасдиғини қаноатлантиради. Агар M_0 нуқта ўрнига бошқа M нуқта олсак, биз теорема шартини қаноатлантирувчи ва M нуқтадан чиқувчи γ_M чизиқни ҳосил қиламиз. Лекин, теорема-12 га кўра, $F: R^3 \to R^3$ ҳаракат мавжуд бўлиб, $F(\gamma_M) = \gamma$ бўлади. □

II-бобга доир машқ ва масалалар

1. Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси томонлари квадратларининг йиғиндисига тенглигини векторлар ёрдами билан исботланг.

2. Томонлари $a = i - 2j + 4k$, $b = 3i + j - 2k$ векторлардан иборат параллелограммнинг юзи топилсин.

3. Томонлари $a = 2i - 3j + 5k$, $b = i + j - k$, $c = 2i + 2j + 3k$, векторлардан иборат параллелепипеднинг ҳажми топилсин.

4. Фазода $0XYZ$ декарт координаталар системаси киритилган ва фазода ҳаракат қилаётган M нуқтанинг $0XY$ текисликдаги проекцияси $x^2 + y^2 = R^2$ айланада ω бурчак тезлик билан текис ҳаракат қилади, $0Z$ ўқдаги проекцияси эса a тезлик билан текис ҳаракат қилади. Параметрлар t сифатида вақтни олиб ва $t = 0$ да M $(R;0;0)$ нуқтада бўлишини билган ҳолда, M нуқта фазода чизган чизиқнинг параметрик тенгламаларини тузинг. Бу чизиқ винт чизиғи деб аталади(14-чизма).

Жавоб: $x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \quad z = at.$

5.Қандай чизиқнинг параметрик тенгламалари

$$x = t^2 - t + 1, \quad y = t^2 + t - 1$$

кўринишда бўлади.

Жавоб: Парабола.

6.Қандай чизиқнинг параметрик тенгламалари

$$x = a\sin^2 t, \quad y = b\cos^2 t$$

кўринишда бўлади.

7.Астроида деб аталувчи ва

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

чизиқнинг силлиқ чизиқ эканлигини кўрсатинг.

Кўрсатма: $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,$ формулалар ёрдамида параметр киритиш керак.

8. Текисликда гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенглама билан берилган бўлса, унинг параметрик тенгламаларини ёзинг.

9.Винт чизиғи

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = 2t.$$

параметрик тенгламалари билан берилган бўлса, унинг $(R;0;0)$ нуқтасидаги уринма, ёпишма текислик, бошнормал ва бинормал тенгламаларини тузинг.

10. Фазода

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида берилган чизиқнинг $P(1;3;4)$ нуқтасидаги уринма ва нормал текислик тенгламаларини тузинг.

11. Астроида узунлигини топинг.

12. Параметрик тенгламалари

$$x = acht, \quad y = asht, \quad z = at.$$

кўринишда бўлган чизиқнинг $M_1(t = 0)$ ва $M_2(t = 1)$ нуқталари орасидаги ёйининг узунлигини топинг.

13. $y^2 = 2px$ чизиқ тенгламасини табиий параметр ёрдамида ёзинг.

14. Қутб координаталар системасида

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(\varphi)$$

тенглама билан берилган чизиқ ёйи узунлигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.

15. 4-масалада берилган винт чизиғининг эгрилиги ва буралишини ҳисобланг.

16. Гиперболик винт чизиғи

$$x = acht, \quad y = asht, \quad z = at.$$

параметрик тенгламалари билан берилган, унинг тенгламаларини табиий параметр ёрдамида ёзинг.

17. Декарт япроғи деб аталувчи чизиқ тенгламаси

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

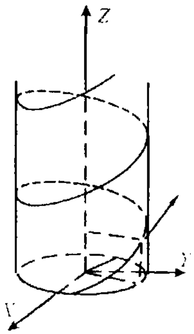
кўринишда бўлади. Унинг $P(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2})$ нуқтасидаги уринма ва нормал тенгламаларини топинг (15-чизма).

18. Параметрик тенгламалари

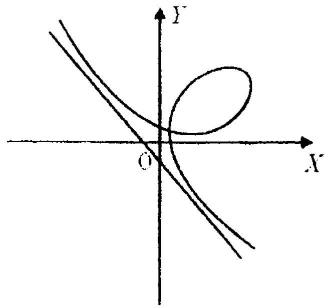
$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = tgt.$$

кўринишда бўлган чизиқнинг параметрнинг $t_0 = \frac{\pi}{4}$ қийматига мос келувчи нуқтасидаги эгрилиги ва буралишини ҳисобланг.

19. Винт чизиғининг ҳамма уринмалари $0XY$ текислиги билан бир хил бурчак остида кесишишини исботланг (4-масалага қаранг).



Чизма-14



Чизма-15

III БОБ

СИРТЛАР НАЗАРИЯСИ

§1. Сирт тушунчаси ва сиртнинг берилиш усуллари

Текисликдаги очиқ доирага гомеоморф тўпламни элементар соҳа деб атаймиз.

Таъриф-1. Фазодаги Ф тўплам элементар соҳанинг топологик акслантиришдаги образи бўлса, уни элементар сирт деб атаймиз. Демак, Ф тўплам элементар сирт бўлса, $f:G\to Ф$-топологик акслантириш мавжуд бўлиши керак.

Бу ерда $G\subset R^2$ элементар соҳа, Ф эса R^3 дан келтирилган топология ёрдамида топологик фазога айлантирилган. Ф элементар сирт бўлса, (f,G) жуфтлик Ф ни параметрлаш усули дейилади.

Албатта G_1 бошқа элементар соҳа бўлса, G ва G_1 ўзаро гомеоморф бўлади. $g:G_1\to G$ гомеоморфизм бўлса, $f\cdot g:G_1\to Ф$ ҳам гомеоморфизм-дир.

Демак, элементар сирт учун чексиз кўп параметрлаш усуллари мавжуддир. Бирорта тўпламнинг элементар сирт эканлигини кўрсатиш учун, унинг бирорта параметрлаш усулини кўрсатиш керак.

Агар Ф сирт (f,G) параметрлаш усули билан берилиб, $(u,v)\in G$ учун $f(u,v)$ нуқтанинг координаталари $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ лар бўлса

$$\begin{cases} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases} \qquad (1)$$

система Ф сиртнинг параметрик тенгламалари системаси дейилади.

Таъриф-2. Фазодаги боғланишли Ф тўпламга тегишли ҳар бир нуқтанинг бирорта атрофида Ф элементар сиртга айланса, Ф содда сирт дейилади.

Иккинчи таърифга изоҳ берамиз, демак, Ф содда сирт бўлиши учун унга тегишли ҳар бир $p\in Ф$ нуқта учун шундай U(p) атроф (R^3да) мавжуд бўлиб, кесишма $U(p)\cap Ф$ элементар сирт бўлиши керак.

Кейинчалик курс давомида сирт деганда элементар ёки содда сиртни тушунамиз.

Мисоллар.

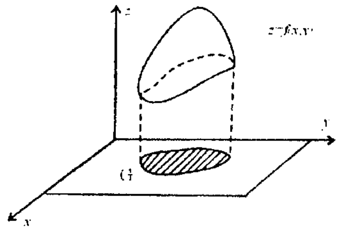
1) Ҳар қандай текислик элементар сиртдир, чунки текислик доирага гомеоморфдир.

Агар $M(x_0,y_0,z_0)$ текислик нуқтаси, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар текисликка параллел бўлса, уни

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}u+\vec{b}v,\ -\infty<u<+\infty,\ -\infty<v<+\infty$$

кўринишида параметрлаш мумкин. Бу ерда $\vec{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$ - M нуқтанинг радиус векторидир.

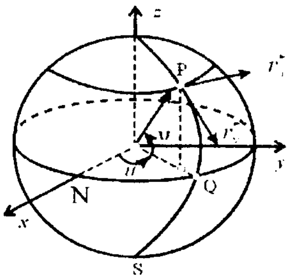
2) Элементар G-соҳада аниқланган $z = f(x,y)$ – узлуксиз функция графиги элементар сиртдир. Сабаби, $(x,y,f(x,y)) \to (x,y)$ – акслантириш (проекция) гомеоморфизмдир.



Чизма-1

3) Икки ўлчамли сфера S^2 элементар бўлмаган содда сиртдир. R радиусли сфера S^2 нинг марказига координаталар бошини жойлаштирсак, уни $S^2 = \left\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$ тўплам сифатида қарашимиз мумкин. S^2 нинг сирт эканлигини исботлаш учун унга тегишли бирорта P ни олайлик.

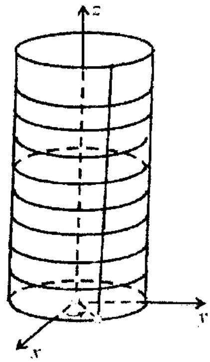
P дан фарқли S нуқтани жанубий қутб сифатида, унга диаметрик қарама-қарши бўлган N нуқтани шимолий қутб ҳисоблаб, z ўқини координата бошидан N нуқта орқали ўтказамиз, Oxy текислиги эса O нўқтадан ўтувчи ва ON га перпендикуляр текисликдир Бу текислик ва сфера кесишишидан ҳосил бўлган айланани экватор деб атаймиз. Энди u билан 0Q нур ва 0x ўқи орасидаги бурчакни, v билан 0P ва 0Q нурлар орасидаги бурчакни белгилаймиз. Бу ерда Q - NPS меридианнинг экватор билан кесишиш нуқтасидир, $0 < u < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Шунда S^2 нинг NS - меридиан чиқариб ташланган қисми $\varphi: P \to (u,v)$ акслантириш ёрдамида $]0;2\pi[\times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ элементар соҳага гомеоморф акслантиради ва $x = R\cos u \cos v$, $y = R\sin u \cos v$, $z = \sin v$ тенгламалар ёрдамида параметрланади.



Чизма-2

4) $x = R\cos u,\ y = R\sin u,\ z = v.$ тенгламалар системаси доиравий цилиндрнинг параметрик тенгламаларидир. Бу ерда $-\infty<u<+\infty$, $-\infty<v<+\infty$.

Албатта цилиндр ҳам элементар сирт эмас.



Чизма-3

Агар биз $\vec{r}(u,v) = \{x(u;v); y(u;v); z(u;v)\}$ вектор функцияни киритсак (1) ифодани

$$\vec{r} = \vec{r}(u;v), \quad (u,v) \in G \qquad (2)$$

кўринишда ёза оламиз. Бу тенглама Ф сиртнинг вектор кўринишдаги тенгламаси дейилади. Табиийки, Ф сирт элементар сирт бўлмаса, (1) ва (2) тенгламалар уни бирорта нуқта атрофида аниқлайди. Агар Ф элементар сирт бўлса, уни тўлиқ (1) ёки (2) тенгламалар ёрдамида аниқлаш мумкин.

2. Сиртнинг ошкормас кўринишда берилиши.

Бизга $G \subset R^3$ очиқ тўплам ва G да аниқланган силлиқ $F(x;y;z)$ функция берилган бўлсин.

Шунда $\Phi = \{(x;y;z) \in G: F(x;y;z) = 0\}$ тўплам F функциянинг сатҳ тўплами ёки сирти дейилади.

Агар $gradF \neq 0$ бўлса, Ф ҳақиқатдан ҳам содда сирт бўлади. Ҳақиқатдан, агар $p = (x_0;y_0;z_0) \in \Phi$ нуқтада $F_z \neq 0$ бўлса, ошкормас функция ҳақидаги теоремага кўра, шундай $\delta > 0, \varepsilon > 0$ сонлари ва $G_0 = \{(x;y): |x_0 - x| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$ соҳада аниқланган $z = f(x;y)$ функция мавжуд бўлиб, $(x;y) \in G_0$лар учун $F(x;y,f(x;y)) = 0$ тенглик, $z_0 = f(x_0;y_0)$ ва $|z_0 - f(x;y)| < \varepsilon$ муносабатлар бажарилиб,

$$\Pi = \{(x;y;z): |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta, |z_0 - z| < \varepsilon\}$$

параллелипипеднинг Ф билан кесишмаси $z = f(x;y)$ функциянинг графигидан иборатдир. Демак, Ф ўзига тегишли ҳар қандай нуқтанинг етарли кичик атрофида элементар сирт бўлади.

Бизнинг курсимизда асосий метод математик анализ бўлганлиги учун, биз сиртлардан қўшимча шартларни талаб қиламиз.

Таъриф-3. Ф сирт учун унга тегишли ихтиёрий нуқта атрофида (f,G) параметрлаш усули мавжуд бўлиб, бунда $x(u;v),y(u;v),z(u;v)$ функциялар узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ матрицанинг рангги иккига тенг бўлса, Ф сирт регуляр сирт дейилади, параметрлаш усули эса регуляр параметрлаш дейилади.

Сиртнинг регулярлик шартини $\left[\vec{r}_u,\vec{r}_v\right]\neq\vec{0}$ кўринишда ҳам ёзишимиз мумкин. Биз курсимизда асосан регуляр сиртларни ўрганамиз.

Энди сиртларнинг берилиш усуллари ҳақида қуйидаги теоремаларни исботлайлик.

Теорема-1. Бизга G соҳада аниқланган силлиқ $x(u;v),y(u;v),z(u;v)$ функциялар берилиб, ҳар бир нуқтада $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}=2$ бўлса,

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \\ z = z(u;v) \end{cases} \qquad (u;v)\in G$$

система регуляр сиртни аниқлайди.

Исбот: Теоремани исботлаш учун

Ф$=\left\{(x;y;z):x=x(u;v),y=y(u;v),z=z(u;v),(u;v)\in G\right\}$ тўпламнинг содда сирт эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун эса Ф тўпламга тегишли ихтиёрий $p_0=\left(x(u_0;v_0),y(u_0;v_0),z(u_0;v_0)\right)$ нуқтанинг етарли кичик атрофида Ф элементар сирт эканлигини кўрсатамиз. Бирорта $\varepsilon>0$ ва $G_\varepsilon=\left\{(u;v)\in G:(u_0-u)^2+(v_0-v)^2<\varepsilon\right\}$ очиқ доира учун $f:(u;v)\to(x(u;v),y(u;v),z(u;v))$ қоида билан аниқланган $f:G_\varepsilon\to f(G_\varepsilon)$ акслантиришни қараймиз.

$x(u;v),y(u;v),z(u;v)$ функциялар узлуксиз бўлганлиги учун f ҳам узлуксиз акслантиришдир. Агар f ўзаро бир қийматли бўлса, унинг тескариси f^{-1} мавжуд ва узлуксиз бўлади (f^{-1} узлуксизлиги ҳам $x(u;v),y(u;v)$ ва $z(u;v)$ функциялар узлуксизлигидан келиб чиқади), демак Ф нинг p_0 нуқтани ўз ичига олувчи $f(G_\varepsilon)$ қисми элементар сирт бўлади.

Шунинг учун бирорта $\varepsilon>0$ учун f акслантиришнинг ўзаро бир қийматли акслантириш эканлигини исботлаймиз.

Фараз қилайлик, $\varepsilon_i>0,\varepsilon_i\to0,i=1,2,3,\dots$ ва G_{ε_i} доирага тегишли $(u_i^1;v_i^1)$ ва $(u_i^2;v_i^2)$ ҳар хил нуқталар учун $f(u_i^1;v_i^1)=f(u_i^2;v_i^2)$ тенглик ўринли бўлсин. Умумийликни чегараламасдан аниқлик учун $u_i^1\le u_i^2$ ва $v_i^1\le v_i^2$ деб фараз қилайлик.

Шунда,

$$x(u_i^1;v_i^1)-x(u_i^2;v_i^2)=0,\ \ y(u_i^1;v_i^1)-y(u_i^2;v_i^2)=0,\ \ z(u_i^1;v_i^1)-z(u_i^2;v_i^2)=0$$

тенгликлардан ва Лагранж теоремасидан

$$x_u(p_i^1,v_i^1)(u_i^2-u_i^1)+x_v(u_i^2,q_i^1)(v_i^2-v_1^i)=0$$

$$y_u(p_i^2,v_i^1)(u_i^2-u_i^1)+y_v(u_i^2,q_i^2)(v_i^2-v_1^i)=0$$

$$z_u(p_i^3,v_i^1)(u_i^2-u_i^1)+z_v(u_i^2,q_i^3)(v_i^2-v_1^i)=0$$

тенгликларни оламиз. Бу ерда $p_i^1,p_i^2,p_i^3\in\left[u_i^1,u_i^2\right]$, $q_i^1,q_i^2,q_i^3\in\left[v_i^1,v_i^2\right]$ ва $u_i^2-u_i^1$ ва $v_i^2-v_i^1$ сонлари бир вақтда нолга айлана олмайди.

Шунинг учун юқоридаги тенгликлардан

$$\frac{x_u(p_i^1;v_i^1)}{x_v(u_i^2;q_i^1)}=\frac{y_u(p_i^2;v_i^1)}{y_v(u_i^2;q_i^2)}=\frac{z_u(p_i^3;v_i^1)}{z_v(u_i^2;q_i^3)}$$

муносабатни оламиз. Бу муносабатда
x_u,x_v, y_u,y_v ва z_u,z_v функциялар узлуксизлигидан фойдаланиб, $i\to\infty$ лимитга ўтсак,

$$\frac{x_u(u_0,v_0)}{x_v(u_0,v_0)}=\frac{y_u(u_0,v_0)}{y_v(u_0,v_0)}=\frac{z_u(u_0,v_0)}{z_v(u_0,v_0)}$$

муносабатни оламиз.

Бу муносабат эса теорема шартига зид бўлган,

$$rang\begin{pmatrix}x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{pmatrix}_{(u_0,v_0)}<2$$

тенгсизликка тенг кучлидир. Демак, фаразимиз нотўғри, ва $\varepsilon>0$ етарли кичик бўлганда $f:G_\varepsilon\to f(G_\varepsilon)$ акслантириш топологик акслантиришдир. Бундан эса, Ф тўпламнинг
p_0 ни ўз ичига олувчи $f(G_\varepsilon)$ қисми элементар сирт эканлиги келиб чиқади. □

Теорема-2. Регуляр Ф сирт унга тегишли $p(u_0,v_0)$ нуқта атрофида,

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v),\ \ (u,v)\in G\\ z=z(u,v)\end{cases}$$

параметрик тенгламалар ёрдамида берилиб, р нуқтада $\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}$ детерминант нолдан фарқли бўлса, шундай силлиқ $f(x,y)$ функция мавжудки р нуқтанинг атрофида Ф сирт $z=f(x,y)$ функциянинг графигидан иборатдир.

Изоҳ. Биз регуляр сиртларнинг параметрлаш усулини танлаганимизда ҳар доим x_u,x_v, y_u,y_v, z_u,z_v ҳосилалар мавжуд ва узлуксиз бўлишини талаб қиламиз.

Исбот. Теоремани исботлаш учун, $\begin{cases} x = x(u;v) & x(u_0,v_0) = x_0 \\ y = y(u;v) & y(u_0,v_0) = y_0 \end{cases}$, системага га математик анализ курсидаги тескари функциялар ҳақидаги теоремани қўллаймиз.

Бу теоремага асосан шундай $\delta > 0$ сони ва $\Pi_\delta = \{(x,y) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta\}$ соҳада аниқланган шундай дифференциалланувчи $u = u(x;y)$, $v = v(x;y)$ функциялар мавжудки, улар $x(\,u(x;y), v(x;y)\,) \equiv x$, $y(\,u(x;y), v(x;y)) \equiv y$ тенгликларни қаноатлантиради ва $u(x_0;y_0) = u_0$, $v(x_0;y_0) = v_0$, муносабатлар ўринли бўлади. Демак, р нуқта атрофида Ф сирт $z = z(\,u(x;y), v(x;y)) = f(x;y)$ функциянинг графигидан иборатдир.□

§2. Сирт устида ётувчи эгри чизиқлар

Регуляр Ф сиртнинг р∈Ф нуқта атрофида регуляр (f,G) параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

тенглама ёрдамида берилган, сирт устида р нуқтадан ўтувчи γ эгри чизиқ берилган бўлиб, у

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t), \quad a < t < b. \quad (2)$$

тенглама ёрдамида параметрланган ва $\gamma \subset f(G)$ бўлсин.

Аниқлик учун, р сирт нуқтаси сифатида $(u_0;v_0)$ координаталарга, эгри чизиқ нуқтаси сифатида параметр t нинг t_0 қийматига мос келсин. Табиийки, ҳар бир $t \in (a;b)$ учун шундай $(u(t),v(t)) \in G$ нуқта мавжуд бўлиб,

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t),v(t)) \quad (3)$$

тенглик ўринли бўлади. Агар γ силлиқ эгри чизиқ бўлса, $u(t),v(t)$ функциялар ҳам дифференциалланувчи функциялар бўлади. Буни исботлаш учун Ф нинг регуляр сирт эканлигидан фойдаланамиз. Ф регуляр сирт бўлганлиги учун $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$. Аниқлик учун $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ бўлсин деб фараз қилиб, $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$ системани қараймиз.

Агар γ силлиқ эгри чизиқ бўлса, $\vec{\rho}(t)$ вектор функциянинг координаталари $x(t),y(t),z(t)$ дифференциалланувчи функциялар бўлади. Бироpта $t^* \in (a;b)$ учун $x^* = x(t^*)$, $y^* = y(t^*)$, $z^* = z(t^*)$. ва $u^* = u(t^*)$, $v^* = v(t^*)$ белгилашлар киритиб,

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$$

системани

$$\begin{cases} x(u^*,v^*)=x^* \\ y(u^*,v^*)=y^* \end{cases}$$

бошланғич шартлар билан қараймиз. Тескари функция ҳақидаги теоремага асосан шундай $\delta>0,\varepsilon>0$ сонлари ва

$$\Pi_\delta=\{(x,y):|x^*-x|<\delta,|y^*-y|<\delta\}$$

соҳада аниқланган ва дифференциалланувчи $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ функциялар мавжуд бўлиб, улар

$$|u^*-u(x,y)|<\varepsilon,\quad x=x(u(x,y),v(x,y)),\ u^*=u(x^*,y^*)$$

$$|v^*-v(x,y)|<\varepsilon,\quad y=y(u(x,y),v(x,y)),\ v^*=v(x^*,y^*)$$

муносабатларни қаноатлантиради. Биз умумийликни чегараламасдан $\Pi_\delta=\{(u,v):|u^*-u|<\varepsilon,|v^*-v|<\varepsilon\}$ соҳа учун $\Pi_\delta\subset G$ муносабат ўринли деб ҳисоблаймиз.

Энди $\delta_0>0$ сонини шундай танлаймизки, $|t^*-t|<\delta_0$ бўлганда $|x^*-x(t)|<\delta,|y^*-y(t)|<\delta$ муносабатлар бажарилсин. $\pi:(x,y,z)\to(x,y)$ қоида билан аниқланган $\pi:R^3\to R^2$ проекция ёрдамида $|t^*-t|<\delta_0$ учун

$$(x(t),y(t))=\pi(x(t),y(t),z(t))$$

тенгликни ҳисобга олиб,

$$u(t)=u(x(t),y(t))$$

$$v(t)=v(x(t),y(t))$$

дифференциалланувчи функцияларни аниқлаймиз. Бу функциялар $u(t^*)=u^*,v(t^*)=v^*$ ва $\rho(t)=\vec{r}(u(t),v(t))$ тенгликларни қаноатлантиради ва t^* нуқта атрофида аниқланган функциялар бўлади. Бу t^* нуқта ихтиёрий танлангани учун u(t),v(t) функциялар (a,b) оралиқнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчидир. □

Агар γ регуляр эгри чизиқ бўлса, у ҳолда

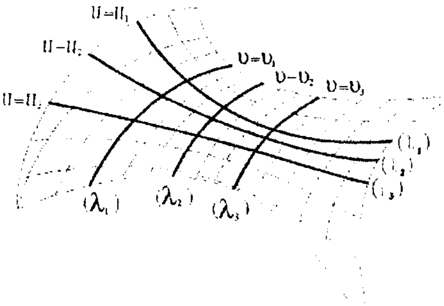
$$\vec{p}'(t)=\vec{r}_u\cdot u'+\vec{r}_v\cdot v'$$

тенгликдан u',v' ларнинг бир вақтда нолга тенг бўлмаслиги келиб чиқади. Шундай қилиб, γ эгри чизиқни

$$\begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \end{cases}$$

тенгламалар билан бериш мумкин. Бу тенгламалар γ чизиқнинг ички координаталардаги тенгламалари деб аталади.

Ф сиртда $u=t,\quad v=v_0=const$ ва $u=u_0=const,\quad v=t$ тенгламалар билан аниқланувчи эгри чизиқлар координата чизиқлари деб аталади. Координата чизиқларининг уринма векторлари мос равишда $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлардир (4-чизма).



Чизма-4

Таъриф-1. $\vec{a}$ вектор сирт устида ётувчи p нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг уринма вектори бўлса, у Ф сиртга p -нуқтадаги уринма вектор деб аталади.

Теорема-3. Регуляр сиртнинг берилган нуқтадаги уринма векторлари тўплами икки ўлчамли чизиқли фазодир.

Исбот. Ф -регуляр сирт, p -унга тегишли нуқта ва $\vec{a}$-бирорта уринма вектор бўлсин.

Агар Ф сирт (1) тенглама ёрдамида регуляр параметрланган, $\vec{a}$ вектор $u=u(t)$, $v=v(t)$ тенгламалар ёрдамида аниқланган эгри чизиқнинг p нуқтадаги уринма вектори бўлса,

$$\vec{a} = \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v',$$

тенглик ўринли бўлади. Демак, ихтиёрий уринма векторни $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ - векторлар ёрдамида чизиқли ифодалаш мумкин.

Бундан келиб чиқадики, уринма векторлар тўпламида, $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ векторлар базисни ташкил қилади. □

Таъриф-2. Ф сиртнинг p($u_0;v_0$) нуқтасидан ўтувчи ва $\vec{r}_u(u_0;v_0)$, $\vec{r}_v(u_0;v_0)$ векторларга параллел текислик p нуқтадаги уринма текислик деб аталади.

Уринма текислик таърифида сиртнинг параметрланиш усулига боғлиқ $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар қатнашишига қарамасдан уринма текислик тушунчаси сиртнинг параметрланиш усулига боғлиқ эмаслигини қуйидаги теорема кўрсатади:

Теорема-4: П — p($u_0;v_0$) нуқтадан ўтувчи текислик, q сиртнинг p га яқин нуқталаридан бири, d- p ва q нуқталар орасидаги масофа, h — q нуқтадан П текисликгача бўлган масофа бўлсин. Шунда П текислик p нуқтадаги уринма текислик бўлиши учун,

$$\lim_{q\to p}\frac{h}{d}=0 \quad (*)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исбот: П текисликнинг бирлик нормал векторини $\vec{n}$-билан белгилайлик. Ф сирт р нуқтада $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ тенглама билан параметрланган бўлса, q ва p нуқталар орасидаги масофа учун

$$d = \left|\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)\right|$$

h учун эса

$$h = \left|\left(\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0), \vec{n}\right)\right|$$

формула ўринли бўлади.

Шунда,

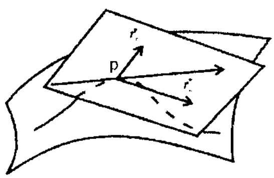
$$\lim_{q \to p} \frac{h}{d} = \lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{h}{d} = \lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{|(\Delta \vec{r}, \vec{n})|}{\left|\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)\right|}$$

бўлади. Бу ерда, $\Delta \vec{r} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)$, $u_0 + \Delta u,\ v_0 + \Delta v$ – q нуқтага мос келувчи аргументлардир.

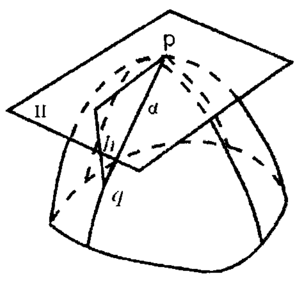
Зарурлик: П уринма текислик бўлсин. Таърифга кўра, П -текислик $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторларга параллел бўлгани учун, $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\left|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\right|}$ тенглик ўринлидир.

Тейлор формуласидан фойдаланиб, $\Delta \vec{r} = \vec{r}_u(u_0; v_0) \cdot \Delta \vec{u} + \vec{r}_v(u_0; v_0) \cdot \Delta \vec{v} + \varepsilon$ ва $\lim\limits_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \vec{\varepsilon} = \vec{0}$ ни ҳисобга олсак, $\lim\limits_{Q \to P} \frac{h}{d} = 0$ келиб чиқади.

Етарлилик: П -текислик учун (*) тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда (*) тенгликда $\Delta u = 0$ ва $\Delta v = 0$ ҳоллар учун $(\vec{r}_u; \vec{n}) = 0$ ва $(\vec{r}_v; \vec{n}) = 0$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак, П -текислик уринма текисликдир. □



Чизма-5



Чизма-6

§ 3. Сиртнинг биринчи квадратик формаси

R^3 – да регуляр Ф -сирт берилган бўлса, Ф га уринма фазо $T_P\Phi$ га тегишли иккита $\vec{a},\vec{b}$– векторлар учун уларнинг скаляр кўпайтмасини $I(\vec{a},\vec{b})$ билан белгилаймиз. Бу скаляр кўпайтма ёрдамида Ф сиртнинг биринчи квадратик формасини аниқлаймиз.

Уринма фазода $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар базисни ташкил қилганлиги учун $\vec{a} = a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v$, $\vec{b} = b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v$, -тенгликларни ёзиб,

$$I(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1\vec{r}_u^{\,2} + (a_1b_2 + a_2b_1)\cdot(\vec{r}_u, \vec{r}_v) + a_2b_2\vec{r}_v^{\,2}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Демак, $I(\vec{a},\vec{b})$ни ҳисоблаш учун, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ базисдаги координаталарини ва $E = \vec{r}_u^{\,2}$, $F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ ва $G = \vec{r}_v^{\,2}$ функцияларни билишимиз етарли.

Биринчи квадратик формани,

$$I(\vec{a},\vec{a}) = a_1^2\cdot E + 2a_1a_2\cdot F + Ga_2^2$$

кўринишда аниқлаймиз. Биринчи квадратик форма ёрдамида қуйидаги ишларни бажариш мумкин:

1. Сирт устида чизиқлар узунлигини ҳисоблаш

Ф-сиртнинг (f,G) – параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$$

тенглама ёрдамида берилиб, сиртда $u = u(t)$, $v = v(t)$. тенгламалар билан γ чизиқ берилган бўлсин. γ – учун параметрларнинг t_1 ва t_2 $(t_1 < t_2)$ қийматларига мос келувчи ёй узунлигини ҳисоблайлик.

Биламизки, бу ёй узунлиги R^3да,

$$l(\gamma)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left|\vec{\rho}'(t)\right| dt$$

формула билан ҳисобланади.

Бу ерда $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t),v(t))$ ва $\vec{\rho}'(t) = \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v'$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$l(\gamma)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\cdot u'^2 + 2F\cdot u'v' + G\cdot v'^2}\,dt$$

формулани ҳосил қиламиз.

2. Сирт устида ётувчи чизиқлар орасидаги бурчак.

Φ -сиртда $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ ва $\vec{\rho}_1=\vec{\rho}_1(s)$ тенглама билан регуляр чизиқлар берилган бўлсин. Агар бу чизиқлар кесишса (яъни $\vec{\rho}(t_0)=\vec{\rho}_1(s_0)$ тенгликни қаноатлантирувчи t_0, s_0 лар мавжуд бўлса), $\vec{\rho}'(t_0)$, $\vec{\rho}_1'(s_0)$, векторлар орасидаги бурчакни шу нуқтадаги эгри чизиқлар орасидаги бурчак деб атаймиз: Бу бурчакнинг қиймати φ бўлса,

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{\rho}'(t_0),\vec{\rho}_1'(s_0))}{\left|\vec{\rho}'(t_0)\right|\cdot\left|\vec{\rho}_1'(s_0)\right|}$$

тенглик ўринлидир. Бу ерда,

$$\vec{\rho}'(t_0)=\vec{r}_u\,u'(t_0)+\vec{r}_v\,v'(t_0),$$

$$\vec{\rho}_1'(s_0)=\vec{r}_u\,u_1'(s_0)+\vec{r}_v\,v_1'(s_0)$$

тенгликларни ҳисобга олсак,

$$\cos\varphi=\frac{Eu'(t_0)u_1'(s_0)+F(u'(t_0)v_1'(s_0)+v'(t_0)u_1'(s_0))+Gv'(t_0)v_1'(s_0)}{\sqrt{E(u'(t_0))^2+2Fu'(t_0)v'(t_0)+G(v'(t_0))^2}\cdot\sqrt{E(u_1'(s_0))^2+2Fu_1'(s_0)v_1'(s_0)+G(v_1'(s_0))^2}}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

§4. Сиртларни силлиқ акслантириш

Ф-регуляр сирт ва $g:\Phi\to R^m$ акслантириш берилган, p сиртнинг бирорта нуқтаси бўлсин.

Таъриф-1: Ф-сиртнинг p нуқта атрофида ихтиёрий силлиқ (f,G) параметрлаш усули учун $g\cdot f:G\to R^m$ силлиқ акслантириш бўлса, $g-$ акслантириш $p-$нуқтада силлиқ акслантириш дейилади. Агар $(f,G)-$параметрлаш усули $\vec{r}=\vec{r}(u,v)-$тенглама билан берилган бўлса, $g\cdot f$ акслантириш g акслантиришнинг эгри чизиқли (u,v) координаталардаги ифодаси дейилади.

Изоҳ: Таърифга кўра g силлиқ акслантириш бўлиши учун сиртнинг p нуқта атрофидаги ихтиёрий (f,G) параметрлаш усули учун, $g\cdot f:G\to R^m$ акслантириш дифференциалланувчи бўлиши керак. Бу ерда $G-(u,v)-$текисликдаги элементар соҳа бўлганлиги учун $g\cdot f$ акслантириш $m-$та

$$y_1=g_1(u,v)$$
$$y_2=g_2(u,v)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_m=g_m(u,v)$$

функциялар ёрдамида берилади. Берилган g акслантириш силлиқ бўлиши учун бу функциялар дифференциалланувчи бўлиши керак. Лекин қуйидаги теорема кўрсатадики, g силлиқ акслантириш бўлиши учун бирорта регуляр (f,G)-параметрлаш усули учун $g\cdot f$ нинг дифференциалланувчи бўлиши етарлидир.

Теорема-5: Берилган $g{:}\Phi\to R^m$ акслантириш p нуқтада силлиқ акслантириш бўлиши учун Ф сиртнинг p нуқта атрофидаги бирорта регуляр (f_1,G_1)-параметрлаш усули учун $g\cdot f_1{:}G_1\to R^m$ акслантиришнинг дифференциалланувчи бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи: Табиийки, бу ерда фақат етарлилик қисмини исботлаш лозимдир. Демак, биз ихтиёрий силлиқ параметрлаш усули (f,G)-учун $g\cdot f{:}G\to R^m$ акслантиришнинг дифференциалланувчи эканлигини кўрсатишимиз керак. p нуқтанинг (f_1,G_1)-параметрлаш усулидаги координаталари (w_0,s_0), (f,G)-параметрлаш усулидаги координаталари (u_0,v_0) ва $W=f(G)\cap f_1(G_1)$ бўлсин. Шунда $U=f^{-1}(W)$-тўплам (u_0,v_0) нуқтанинг атрофи бўлади ва бу атрофда $g\cdot f=(g\cdot f_1)\cdot(f_1^{-1}\cdot f)$ тенглик ўринли. Теорема шартига кўра, $g\cdot f_1$-дифференциалланувчи акслантиришдир. Шунинг учун, биз $f_1^{-1}\cdot f{:}U\to G_1$ акслантиришнинг дифференциалланувчи эканлигини кўрсатишимиз керак. Регуляр параметрлаш усули (f_1,G_1) дифференциалланувчи

$$\begin{cases} x=x(w,s)\\ y=y(w,s)\\ z=z(w,s)\end{cases}$$

функциялар ёрдамида берилади ва $rang\begin{pmatrix} x_w & y_w & z_w\\ x_s & y_s & z_s\end{pmatrix}=2$ тенглик ўринлидир.

Фараз қилайлик, $\begin{vmatrix} x_w & y_w\\ x_s & y_s\end{vmatrix}\neq 0$ бўлсин. Тескари функция ҳақидаги теоремани

$$\begin{cases} x=x(w,s) & x_0=x(w_0,s_0)\\ y=y(w,s) & y_0=y(w_0,s_0).\end{cases}$$

системага қўллаймиз. Шунда силлиқ $w=w(x,y)$, $s=s(x,y)$ функциялар мавжуд бўлиб,

$$x=x(w(x,y),s(x,y)),\quad w_0=w(x_0,y_0)$$
$$y=y(w(x,y),s(x,y)),\quad s_0=s(x_0,y_0).$$

тенгликлар ўринли бўлади. Учинчи координатамиз $z=z(w(x,y),s(x,y))=\gamma(x,y)$ x,y ларнинг функцияси бўлади.

Демак, p нуқта атрофида, (x,y) лар ички координаталар бўлиб, сирт $z=\varphi(x,y)$ функция графигидан иборат бўлади. Шунда $\pi:(x,y,z)\to(x,y)$ проекция ва $w=w(x,y)$, $s=s(x,y)$ функциялар ёрдамида берилган $\tilde{f}{:}(x,y)\to(w,s)$ акслантириш дифференциалланувчи бўлганлиги учун $f_1^{-1}(x,y,z)=\widetilde{f}\pi(x,y,z)$ акслантириш дифференциалланувчидир. Демак $f_1^{-1}\circ f$ ҳам дифференциалланувчидир. □

Бизга Φ_1,Φ_2 сиртлар ва $g:\Phi_1\to R^3$ акслантириш берилиб, $g(\Phi_1)=\Phi_2$ бўлса, $g:\Phi_1\to\Phi_2$ акслантириш берилган дейилади.

Табиийки, $g:\Phi_1\to R^3$ дифференциалланувчи бўлса, $g:\Phi_1\to\Phi_2$ дифференциалланувчи дейилади. Агар g дифференциалланувчи бўлса, Φ_1 сиртдаги силлиқ эгри чизиқнинг образи Φ_2 сиртда силлиқ эгри чизиқ бўлади.

Таъриф-2: Φ_1 сиртдаги ихтиёрий γ эгри чизиқнинг р нуқтадаги уринма векторини $g(\gamma)$ эгри чизиқнинг $g(p)$ нуқтадаги уринма векторига ўтказувчи $T_p\Phi_1\to T_{g(p)}\Phi_2$ акслантириш g акслантиришнинг р нуқтадаги дифференциали деб аталади ва $dg(P)$ кўринишда белгиланади.

Бизга $g:R^3\to R^3$ дифференциалланувчи акслантириш берилган ва $\Phi_2=g(\Phi_1)$ бўлса, $dg(p)-g$ акслантиришнинг р нуқтадаги Якоби матрицаси билан устма-уст тушишини кўрсатайлик.

Φ_1 сирт р нуқта атрофида

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

тенглама билан берилган ва Φ_2 сирт $g(p)$ нуқта атрофида

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}(u,v) \qquad (2)$$

тенглама билан берилган бўлса, $\vec{\rho}(u,v)$ - вектор $g(x(u,v),y(u,v).z(u,v))$ - нуқтанинг радиус векторидир. Энди $p(u_0,v_0)$ - нуқтадан ўтувчи γ эгри чизиқ ички координаталарда

$$\begin{cases}u=u(t)\\ v=v(t)\end{cases} \qquad (3)$$

тенгламалар билан берилган ва $u_0=u(t_0)$, $v_0=v(t_0)$, бўлса, γ чизиқнинг р нуқтадаги уринма вектори $\vec{a}=\vec{r}_u u'(t_0)+\vec{r}_v v'(t_0)$ вектордир.

Φ_2 сиртда $g(\gamma)$ эгри чизиқнинг $g(p)$ нуқтада уринма вектори

$$\vec{b}=\vec{\rho}_u u'(t_0)+\vec{\rho}_v v'(t_0) \quad (4)$$

вектордир.

Агар $g(x,y,z)=\{g^1(x,y,z),g^2(x,y,z),g^3(x,y,z)\}$ ва $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$, $z_0=z(u_0,v_0)$ бўлса, $\vec{b}=I(g)(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{a}$ тенглик ўринлидир.

Бу ерда,

$$I(g)(x_0,y_0,z_0)=\begin{pmatrix} g_x^1(x_0,y_0,z_0) & g_x^2(x_0,y_0,z_0) & g_x^3(x_0,y_0,z_0)\\ g_y^1(x_0,y_0,z_0) & g_y^2(x_0,y_0,z_0) & g_y^3(x_0,y_0,z_0)\\ g_z^1(x_0,y_0,z_0) & g_z^2(x_0,y_0,z_0) & g_z^3(x_0,y_0,z_0)\end{pmatrix}$$

g акслантиришнинг р нуқтадаги Якоби матрицасидир.

Теорема-6. $dg(p)$ чизиқли акслантиришдир.

Исботи. (4) формуладан кўриниб турибдики, агар $\vec{a}$ вектор $T_p\Phi_1$ фазода a_1, a_2 координаталарга эга бўлса, $\vec{b}$ вектор ҳам $T_{g(p)}\Phi_2$ фазода худди шу координаталарга эга. Координаталарнинг чизиқлилигидан $dg(p)$ акслантиришнинг чизиқли эканлиги келиб чиқади. □

§5. Изометрик акслантиришлар

Таъриф-1. Регуляр Φ_1 ва Φ_2 сиртлар учун $g:\Phi_1 \to \Phi_2$ силлиқ акслантириш берилган бўлиб, ҳар қандай $p \in \Phi_1$ нуқта учун $dg(p): T_p\Phi_1 \to T_{g(p)}\Phi_2$ акслантириш скаляр кўпайтмани сақласа (яъни чизиқли изометрик акслантириш бўлса), **g** изометрик акслантириш дейилади.

Демак, **g** изометрик акслантириш бўлса, ихтиёрий $p \in \Phi_1$ нуқта ва ихтиёрий $\bar{a}, \bar{b} \in T_p\Phi_1$ векторлар учун

$$I_1(a, \bar{b}) = I_2(dg(p)(a),\ dg(p)(\bar{b}))$$

тенглик ўринли бўлади. бу ерда I_1 ва I_2 мос равишда Φ_1 ва Φ_2 сиртларнинг 1-квадратик формаларидир.

Изометрик акслантиришлар ҳақида қуйидаги теоремаларни исботлаймиз.

Теорема-7. Изометрик акслантириш диффеоморфизмдир.

Исбот. Силлиқ $g:\Phi_1 \to \Phi_2$ акслантириш учун тескари акслантириш $g^{-1}:\Phi_2 \to \Phi_1$ мавжуд ва дифференциалланувчи бўлса, g диффеоморфизм дейилади. Демак изометрик $g:\Phi_1 \to \Phi_2$ акслантиришнинг диффеоморфизм эканлигини кўрсатиш учун g^{-1} нинг мавжуд ва дифференциалланувчи эканлигини кўрсатиш керак.

Фараз қилайлик, Φ_1 сирт (f_1, G_1) параметрлаш усули билан, Φ_2 сирт (f_2, G_2) параметрлаш усули билан берилган бўлсин. $g:\Phi_1 \to \Phi_2$ дифференциалланувчи акслантириш бўлганлиги учун, таърифга кўра $g \cdot f_1 : G_1 \to R^3$ дифференциалланувчидир. Биз $g^{-1} \cdot f_2 : G_2 \to R^3$ акслантиришнинг дифференциалланувчи эканлигини кўрсатишимиз керак. Акслантириш g изометрик бўлганлиги учун унинг дифференциали dg чизиқли эркли векторларни чизиқли эркли векторларга ўтказади. Ҳақиқатан ҳам, Φ_1 сиртнинг p нуқтасидаги $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ уринма векторлари чизиқли эркли бўлса, $\frac{|I_1(\vec{p},\vec{q})|}{|\vec{p}||\vec{q}|} \neq 1$ бўлади. Лекин

$$I_2(dg(\vec{p}), dg(\vec{q})) = I_1(\vec{p},\vec{q}),\ |\vec{p}| = |dg(\vec{p})|,\ |\vec{q}| = |dg(\vec{q})|$$

бўлганлиги учун

$$\frac{|I_2(dg(\vec{p}),dg(\vec{q}))|}{|dg(\vec{p})||dg(\vec{q})|}\neq 1$$

келиб чиқади.

Бу эса $dg(\vec{p})$, $dg(\vec{q})$ векторларнинг чизиқли эркли эканлигига тенг кучлидир. Агар $\vec{p}=df_1(\vec{a}),\vec{q}=df_1(\vec{b})$ бўлса, $dg(\vec{p})=d(g\cdot f_1)(\vec{a})$, $dg(\vec{q})=d(g\cdot f_1)(\vec{b})$ бўлади. Шунинг учун $g\cdot f_1$ акслантиришнинг ранги иккига тенгдир. Чунки $g\cdot f_1$ акслантиришнинг ранги иккидан кичик бўлса, $d(g\cdot f_1)(\vec{a})$, $d(g\cdot f_1)(\vec{b})$ векторлар чизиқли боғланишли бўлади.

Шундай қилиб, G_1 соҳанинг ихтиёрий нуқтасида $g\cdot f_1$ акслантириш ранги иккига тенг бўлади. Агар $f=g\cdot f_1$ акслантириш

$$\begin{cases} x=g^1(u,v)\\ y=g^2(u,v)\\ z=g^3(u,v)\end{cases}\qquad (1)$$

функциялар ёрдамида берилган бўлса, G_1 нинг ҳар бир нуқтасида

$$rang\begin{pmatrix} g_u^1 & g_u^2 & g_u^3\\ g_v^1 & g_v^2 & g_v^3\end{pmatrix}=2$$

тенглик ўринли бўлади.

Демак, (1) тенгламалар Φ_2 сиртнинг регуляр (f,G_1) параметрлаш усулини аниқлайди.

Тескари функция ҳақидаги теоремага асосан ([2]га қаранг) $(gf_1)^{-1}$ мавжуд. Демак, $g^{-1}=f_1\cdot(gf_1)^{-1}$ ҳам мавжуд ва g^{-1} нинг дифференциалланувчи эканлиги $g^{-1}f(u,v)=f_1(u,v)$ тенгликдан келиб чиқади. □

Берилган силлиқ $g{:}\Phi_1\to\Phi_2$ акслантириш изометрия бўлишини текшириш учун қуйидаги теоремалардан фойдаланилади.

Теорема-8. Силлиқ $g{:}\Phi_1\to\Phi_2$ акслантириш изометрия бўлиши учун бу акслантиришда ихтиёрий чизиқлар ёйи узунлиги сақланиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Изометрик акслантириш $g:\Phi_1\to\Phi_2$ ва Φ_1да ётувчи γ эгри чизиқ $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ тенглама ёрдамида берилган бўлсин. Шунда бу чизиқ ёйи узунлиги $\int\limits_{t_1}^{t_2}|\vec{\rho}'(t)|\,dt$ формула билан ҳисобланади. Агар $g(\gamma)$ чизиқнинг уринма вектори $\vec{\tau}'(t)$ бўлса, g изометрик бўлганлиги учун $|\vec{\tau}'(t)|=|\vec{\rho}'(t)|$ тенглик ўринли. Демак,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}|\vec{\rho}^1(t)|\,dt=\int\limits_{t_1}^{t_2}|\vec{\tau}'(t)|\,dt\,.$$

Аксинча, силлиқ $g{:}\Phi_1 \to \Phi_2$ акслантириш берилган бўлиб, у ихтиёрий чизиқ ёйи узунлигини сақласин. Ихтиёрий $p \in \Phi$ нуқта ва $\vec{a} \in T_p\Phi_1$ векторни қарайлик. Ихтиёрий уринма вектор бирорта эгри чизиқнинг p нуқтасидаги уринма вектори бўлганлиги учун, шундай силлиқ γ эгри чизиқ мавжудки, унинг p нуқтадаги уринма вектори $\vec{a}$ га тенг. Фараз қилайлик, γ чизиқ $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган ва $\vec{\rho}'(t_0) = \vec{a}$ бўлсин. Теорема шартига кўра

$$\int_{t_0}^{t} |\,\vec{\rho}'(s)\,|\,ds = \int_{t_0}^{t} |\,\vec{\tau}'(t)\,|\,dt, \qquad (2)$$

бу ерда $\vec{\tau}'(t) - g(\gamma)$ эгри чизиқнинг уринма вектори.

Биз (2) тенгликнинг иккала томони t бўйича дифференциаллаймиз ва $|\vec{\rho}'(t_0)| = |\vec{\tau}'(t_0)|$ тенгликни ҳосил қиламиз. Демак дифференциал $dg(p)$ ихтиёрий $\vec{a}$ векторнинг узунлигини сақлайди, яъни $|\vec{a}| = |dg(p)(\vec{a})|$. Энди ихтиёрий $\vec{a}, \vec{b}$ векторлар учун

$$I_1(\vec{a},\vec{b}) = \tfrac{1}{2} I_1(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}) - \tfrac{1}{2} I_1(\vec{a},\vec{a}) - \tfrac{1}{2} I_1(\vec{a},\vec{b}) = \tfrac{1}{2} I_2(dg(p)(\vec{a}+\vec{b}), dg(p)(\vec{a}+\vec{b})) -$$

$$- \tfrac{1}{2} I_2(dg(p)(\vec{a}), dg(p)(\vec{a})) - \tfrac{1}{2} I_2(dg(p)(\vec{b}), dg(p)\vec{b})) = I_2(dg(p)(\vec{a}), dg(p)(\vec{b}))$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, $dg(p)$ скаляр кўпайтмани сақлайди. □

Теорема-9. Силлиқ $g{:}\Phi_1 \to \Phi_2$ акслантириш изометрия бўлиши учун Φ_1 га тегишли ихтиёрий p нуқтанинг атрофи учун Φ_1 нинг шундай (f,G) параметрлаш усули мавжуд бўлиб, Φ_1 ва Φ_2 сиртларнинг (f,G) ва $(g \cdot f, G)$ параметрлаш усуллари учун ҳисобланган 1-квадрат формалари коэффициентларининг мос равишда тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Акслантириш $g{:}\Phi_1 \to \Phi_2$ -изометрия, $p \in \Phi_1$ ва p нинг атрофида Φ_1 сиртнинг (f,G) параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$$

тенглама ёрдамида берилган бўлсин. Биринчи теоремага кўра g-диффеоморфизм, ва $(g \cdot f, G)$ - Φ_2 сиртнинг параметрлаш усули бўлади. Фараз қилайлик, Φ_2 нинг бу параметрлаш усули

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(u,v)$$

тенглама билан берилсин. Шунда

$$\vec{\rho}_u = dg(p)(\vec{r}_u), \vec{\rho}_v = dg(p)(\vec{r}_v)$$

тенгликлардан g изометрия бўлганлиги учун

$$E_1 = I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_v) = I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v) = E_2$$

$$F_1 = I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_v) = I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v) = F_2$$

$$G_1 = I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_v) = I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v) = G_2$$

тенгликлар келиб чиқади.

Энди, аксинча p нуқта атрофидан Φ_1 сиртнинг (f,G) параметрлаш усули ва Φ_2 сиртнинг $g(P)$ нуқта атрофидаги $(g\cdot f,G)$ параметрлаш усуллари учун

$$E_1(u,v)=E_2(u,v),$$
$$F_1(u,v)=F_2(u,v),$$
$$G_1(u,v)=G_2(u,v)$$

тенгликлар ўринли бўлсин.

Шунда, $dg(p)(\vec{r}_u)=\vec{\rho}_u$, $dg(p)(\vec{r}_v)=\vec{\rho}_v$ тенгликларни ҳисобга олиб,

$$I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_v)=E_1(u,v)=E_2(u,v)=I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v),$$
$$I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_v)=F_1(u,v)=F_2(u,v)=I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v),$$
$$I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_v)=G_1(u,v)=G_2(u,v)=I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Демак, $dg(p)$ акслантириш $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ векторларнинг скаляр кўпайтмаларини сақлайди.

Дифференциал $dg(p)$ чизиқли акслантириш эканлигидан ва скаляр кўпайтманинг бичизиқлилигидан $dg(p)$ нинг скаляр кўпайтмани сақлаши келиб чиқади.

§ 6. Сиртнинг иккинчи квадратик формаси

Ф сиртнинг 2-квадратик формаси ҳам $T_p\Phi$ га тегишли векторлар жуфти учун аниқланган бичизиқли (яъни ҳар бир аргументи бўйича чизиқли) функция ёрдамида аниқланади. Ф сиртнинг p нуқтасидаги бирлик нормал векторини $\vec{n}$ билан белгилайлик. Иккинчи квадратик формани II билан белгилаб, уни $\vec{a}\in T_p\Phi$ учун $II(\vec{a},\vec{a})$ ни бериш ёрдамида аниқлаймиз.

Агар p нуқта атрофида Ф сиртни параметрлаш усули $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ тенглама билан аниқланиб, Ф сиртда p нуқтадан ўтувчи γ эгри чизиқ $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган ва $\vec{\rho}'(t_0)=\vec{a}$ бўлсин. Юқорида кўрсатилганидек, $u=u(t)$ $v=v(t)$ дифференциалланувчи функциялар мавжуд бўлиб $\vec{\rho}(t)=\vec{r}(u(t),v(t))$ тенглик бажарилади. Иккинчи квадратик форманинг $\{\vec{a},\vec{a}\}$ жуфтлик учун қийматини $II(\vec{a},\vec{a})=(\vec{\rho}''(t_0),\vec{n})$ формула билан аниқлаймиз. Энди $\vec{\rho}'(t_0)=\vec{r}_u(u_0,v_0)u'(t_0)+\vec{r}_v(u_0,v_0)v'(t_0)$ ва

$$\vec{\rho}''(t_0)=\vec{r}_{uv}(u'(t_0))^2+\vec{r}_{uv}u'v'+\vec{r}_u u''+\vec{r}_{vu}u'v'+\vec{r}_{vu}(v')^2+\vec{r}_v(v)''$$

тенгликларни ҳисобга олиб,

$$II(\vec{a},\vec{a})=(\vec{r}_{uv}(u_0,v_0),\vec{n})(\frac{du}{dt})^2+2(\vec{r}_{uv}(u_0,v_0),\vec{n})\frac{du}{dt}\frac{dv}{ut}+(\vec{r}_{vu}(u_0,v_0),\vec{n})(\frac{dv}{dt})^2$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди

$$L=(\vec{r}_{uv},\vec{n}),M=(\vec{r}_{uv},\vec{n}),N=(\vec{r}_{uv},\vec{n})$$

белгилашларни киритиб, иккинчи квадратик формага мос келувчи бичизиқли функцияни

$$II(\vec{a},\vec{b})=La^1b^1+M(a^1b^2+a^2b^1)+Na^2b^2$$

формула ёрдамида аниқлаймиз. Бу ерда $\vec{a}=\vec{r}_u a^1+\vec{r}_v a^2$, $\vec{b}=\vec{r}_u b^1+\vec{r}_v b^2$.

Биринчи ва иккинчи квадратик формалар коэффициентларидан тузилган

$$A=\begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} L(p) & M(p) \\ M(p) & N(p) \end{pmatrix}$$

матрицаларни киритамиз. Биз биламизки, detA>0 бўлганлиги учун тескари A^{-1} матрица мавжуд. $A^{-1}B$ матрица учун қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема-10. $A^{-1}B$ матрицанинг хос сонлари ҳақиқий бўлиб, улар ҳар хил бўлганда уларга мос келувчи хос векторлар ўзаро перпендикулярдир.

Исбот. $A^{-1}B$ матрицанинг хос сонларини топиш учун $\det|A^{-1}B-\lambda E|=0$ тенгламани ечиш керак. Бу тенглама $\det|B-\lambda A|=0$ тенгламага тенг кучлидир. Ф сиртга тегишли p нуқтани фиксирласак A,B сонли матрицалар бўлади. A симметрик бўлганлиги учун уни бирорта $C:T_p\Phi\to T_p\Phi$ матрица ёрдамида бирлик матрицага айлантириш мумкин. Бунда A матрица CAC^T матрицага ўтади. Демак $CAC^T=E$ ёки $A=C^{-1}(C^{-1})^T$ бу ерда C^T транспонирланган матрица. Шунда

$$\det|B-\lambda E|=\det|C^{-1}\widetilde{B}(C^{-1})^T-\lambda C^{-1}(C^{-1})^T|=\det|C^{-1}(\widetilde{B}-\lambda E)(C^{-1})^T|=$$

$$=\det C^{-1}\det|\widetilde{B}-\lambda E|\det(C^{-1})^T$$

бу ерда $\widetilde{B}=CBC^T$. Демак, $\det|B-\lambda A|=0$ тенглама $\det|\widetilde{B}-\lambda E|=0$ тенгламага тенг кучлидир. Лекин

$$\widetilde{B}^T=(CBC^T)^T=CB^TC^T=CBC^T,$$

яъни $\widetilde{B}$ симметрик бўлганлиги учун унинг хос сонлари ҳақиқийдир. Демак, $A^{-1}B$ матрицанинг хос сонлари ҳақиқий, ва улар ҳар хил бўлганда хос векторлар ўзаро ортогоналдир[1]. □

Агар λ_1,λ_2-хос сонлар, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$-хос векторлар бўлса, яъни $A\vec{e}_1=\lambda_1\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2=\lambda_2\vec{e}_2$, тенгликлар бажарилса $\lambda_1\neq\lambda_2$ бўлганда $\lambda_1>\lambda_2$ деб ҳисоблаймиз.

---

[1] И.М.Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М:, Наука, 1971.

Таъриф-1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлганда $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар аниқловчи тўғри чизиқлар p нуқтадаги бош йўналишлар деб аталади.

Нормал эгрилик ва Менье теоремаси

Ф сиртни унинг p нуқтасидан ўтувчи текислик билан кессак, кесимда P нуқтадан ўтувчи силлиқ эгри чизиқ ҳосил бўлади. Бундай эгри чизиқни текис кесим деб атаймиз. Агар γ текис кесим бўлса, албатта унинг буралиши нолга тенг бўлади. (нима учун?)

Энди Ф сиртнинг p нуқта атрофидаги $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ параметрлаш усулини қарайлик. Аниқлик учун p нинг ички координаталари $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$ бўлсин. Текис кесим γ тенгламасини табиий параметр (яъни ёй узунлиги) ёрдамида $\vec{\rho} = \vec{r}(u(s), v(s))$ кўринишда ёзиб, унинг учун Френе формулаларини ёзайлик (буралиш нолга тенглигини ҳисобга олиб)

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = -k\vec{\tau} \end{cases}.$$

Бу ерда $\vec{\tau} = \dot{\vec{\rho}}, \vec{v}$ - бирлик нормал вектор, k эса γ чизиқнинг p нуқтадаги эгрилиги. Шунда

$$II(\vec{\tau},\vec{\tau}) = (\dot{\vec{\tau}},\vec{n}) = (k\vec{v},n) = k\cos\theta$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\theta -$ $\vec{n}$ ва $\vec{v}$ векторлар орасидаги бурчак. Энди γ ни $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан аниқласак (бу ерда t-ихтиёрий параметр), унда t-ни s нинг функцияси эканлигидан ва

$$\vec{\rho}' = \dot{\vec{\rho}}\frac{ds}{dt}, \vec{\rho}'' = \ddot{\vec{\rho}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot{\vec{\rho}}\frac{d^2s}{dt^2}$$

тенгликларни ҳисобга олиб

$$II(\vec{\rho}',\vec{\rho}') = (\vec{\rho}'',\vec{n}) = (\tfrac{ds}{dt})^2(\ddot{\vec{\rho}},\vec{n}) = (\tfrac{ds}{dt})^2 k\cos\theta$$

ни ҳосил қиламиз.

Бундан

$$k\cos\theta = \frac{II(\vec{\rho}',\vec{\rho}')}{(\frac{ds}{dt})^2} = \frac{II(\vec{\rho}',\vec{\rho}')}{I(\vec{\rho}',\vec{\rho}')} \qquad (1)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг ўнг томони фақат $\vec{\rho}'$ векторга боғлиқлиги кўриниб турибди. Агар γ дан бошқа текис кесим γ' ни олсак, ва улар умумий уринмага эга (яъни бир хил йўналишга эга бўлса), улар учун (1) тенгликнинг ўнг томони бир хилдир. Бу формулани теорема шаклида ёзамиз.

Теорема-11 (Менье). Ф сиртнинг Р нуқтасидаги ихтиёрий $\vec{a}$ уринма вектор ва Р нуқтадаги уринма вектори $\vec{a}$ га тенг бўлган текис кесим учун (1) формула ўринлидир.

Энди кесувчи текислик П нормал $\vec{n}$ векторга параллел бўлсин. Бу ҳолда текис кесим уринмасига $\vec{n}$ вектор перпендикуляр бўлади. Демак $\cos\theta = \pm 1$ ва (1) тенглик

$$k = \pm \frac{II(\vec{\rho}', \vec{\rho}')}{I(\vec{\rho}', \vec{\rho}')}$$

кўринишга келади.

Бу ҳолда текис кесимни нормал кесим деб атаймиз.

Таъриф-2. $\frac{II(\vec{a}, \vec{a})}{I(\vec{a}, \vec{a})}$ сони Ф сиртнинг р нуқтадаги $\vec{a}$ йўналиш бўйича нормал эгрилиги дейилади ва $k_n(\vec{a})$ билан белгиланади.

Шундай қилиб, сиртнинг $\vec{a}$ йўналиш бўйича нормал эгрилиги $\vec{a}$ вектор аниқловчи нормал кесимнинг эгрилигига абсолют қиймати бўйича тенг, ишораси фарқ қилиши мумкин.

Теорема-12. $A^{-1}B$ матрицанинг хос $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар йўналишлари бўйича нормал эгриликлар мос равишда шу матрицанинг хос сонларига тенг бўлади.

Исбот.

$$k_n(\vec{e}_i) = \frac{II(\vec{e}_i, \vec{e}_i)}{I(\vec{e}_i, \vec{e}_i)}$$

ни ҳисоблаш учун $T_p\Phi$ да $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ хос векторлардан иборат ортонормал базисни танласак,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ ва } B = A\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$ тенгликлар ўринли бўлади.

$I(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$ нинг скаляр кўпайтма эканлигини ҳисобга олсак,

$$I(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1^2 + 0^2, I(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0^2 + 1^2$$

келиб чиқади. Демак бу базисда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Демак,

$$k_n(\vec{e}_1) = \frac{II(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}{I(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{\lambda_1 \cdot 1^2 + \lambda_2 \cdot 0^2}{1} = \lambda_1,\ k_n(\vec{e}_2) = \frac{II(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}{I(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \frac{\lambda_1 \cdot 1^2 + \lambda_2 \cdot 0^2}{1} = \lambda_2$$

тенгликлар келиб чиқади.

Таъриф-3. Бош йўналишларга мос келувчи нормал эгриликлар бош эгриликлар деб аталади.

Энди $T_p\Phi$-уринма фазода базис сифатида бирлик хос $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторларни олиб, ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун φ билан $\vec{a}$ ва $\vec{e}_1$ орасидаги бурчакни белгилайлик.

Теорема-13 (Эйлер). Ихтиёрий $\vec{a}\in T_p\Phi$ уринма вектор учун

$$k_n(\vec{a})=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi$$

тенглик ўринлидир. Бу ерда k_1,k_2-бош эгриликлар бўлиб, аниқлик учун $k_1\ge k_2$ деб ҳисоблаймиз.

Исбот. Уринма векторни $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$ кўринишда ёзиб $k_n(\vec{a})$ ни ҳисоблаймиз:

$$k_n(\vec{a})=\frac{II(\vec{a},\vec{a})}{I(\vec{a},\vec{a})}=\frac{\lambda_1a_1^2+\lambda_2a_2^2}{a_1^2+a_2^2}=\lambda_1\frac{a_1^2}{|a|^2}+\lambda_2\frac{a_2^2}{|a|^2}=\lambda_1\cos^2\varphi+\lambda_2\cos^2\alpha=$$

$$=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi.$$

Натижа. Бош эгриликлар нормал эгриликнинг экстремал қийматларидир.

Ҳақиқатан ҳам, уринма фазода $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ортонормал базисларни танласак, $\vec{a}$ йўналиш аниқловчи $k_n(\vec{a})$ нормал эгриликни φнинг функцияси сифатида қараймиз:

$$k_n(\varphi)=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi.$$

$\varphi=0$да $\vec{a}=e_1$ ва

$$k_n(0)=k_n(\vec{a})=k_1,\varphi=\frac{\pi}{2}$$

да $\vec{a}=\vec{e}_2$ ва $k_n(\frac{\pi}{2})=k_n(\vec{a})=k_2$. Ихтиёрий φ учун юқоридаги формулани

$$k=(k_1-k_2)\cos^2\varphi+k_2$$

кўринишда ёзиб,

$$k'(\varphi)=2(k_1-k_2)\cos\varphi\sin\varphi=(k_1-k_2)\sin 2\varphi$$

ни ҳосил қиламиз. $\sin 2\varphi=0$ тенгламани ечиб $\varphi=0$ ва $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ни топамиз. Демак, k_1ва k_2, $k_n(\varphi)$ функциясининг экстремал қийматларидир. ξ'

§ 7. Дьюпен индикатрисаси. Сирт эгриликлари

Регуляр Ф сиртнинг p нуқтасини фиксирлаб, ихтиёрий уринма $\vec{a}$ вектор бўйича $k_n(\vec{a})$ нормал эгриликни ҳисоблаб, уринма текисликда $\vec{a}$ йўналиш бўйича боши p нуқтада жойлашган узунлиги $\frac{1}{\sqrt{|k|}}$ га тенг бўлган кесма олиб, бу кесмалар учларининг геометрик ўрнини Дьюпен индикатрисаси деб атаймиз.

Дьюпен индикатрисаси иккинчи тартибли чизиқ эканини исботлаш учун Ф сиртнинг $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ тенглама билан аниқлаган параметрлаш усулини танлаб $p(u_0,v_0)$ нуқтадан ўтувчи уринма текисликда

$\vec{r}_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0,v_0)$ векторларни базис сифатида олиб, аффин координаталар системасини киритамиз. Ихтиёрий $\vec{a}$ йўналиш бўйича боши р нуқтада ва узунлиги $\frac{1}{\sqrt{|k_n(\vec{a})|}}$ га тенг бўлган кесма охирини $m(x,y)$ билан белгиласак

$$\overline{pm} = \vec{r}_u x + \vec{r}_v y = \frac{1}{\sqrt{|k_n(\vec{a})|}} \frac{\vec{r}_u x + \vec{r}_v y}{|r_u x + r_v y|}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга ошириб,

$$E(u_0,v_0)x^2 + 2F(u_0,v_0)xy + Gy^2 = \frac{1}{|k_n(\vec{a})|}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$k_n(\vec{a}) = \frac{L(u_0,v_0)x^2 + 2M(u_0,v_0)xy + N(u_0,v_0)y^2}{E(u_0,v_0)x^2 + 2F(u_0,v_0)xy + G(u_0,v_0)y^2}$$

тенгликни ҳисобга олсак,

$$|L(u_0,v_0)x^2 + 2M(u_0,v_0)xy + N(u_0,v_0)y^2| = 1$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Демак, Дьюпен индикатрисаси иккинчи тартибли чизиқдир. Биз аналитик геометрия курсида иккинчи тартибли чизиқларни ўрганган эдик. Шунинг учун айта оламизки, агар

а) $LN - M^2 > 0$ бўлса, Дьюпен индикатрисаси эллипс бўлади.

б) $LN - M^2 < 0$ бўлса Дьюпен индикатрисаси гипербола бўлади.

в) $LN - M^2 = 0$ бўлса Дьюпен индикатрисаси 2 та параллел тўғри чизиқ бўлади.

Ф сиртнинг р нуқтасидаги бош эгриликлар k_1, k_2 бўлса, $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ва $K = k_1 \cdot k_2$ ифодалар мос равишда Ф сиртнинг p нуқтадаги ўрта ва тўлиқ (ёки Гаусс) эгриликлари деб аталади. Бош эгриликлар $\det|B - \lambda A| = 0$ тенгламанинг ечими эканлигини ҳисобга олсак

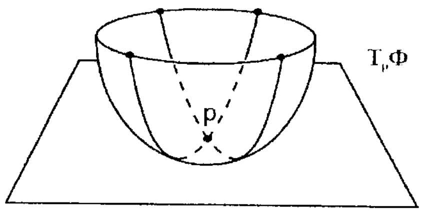
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \text{ ва } H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

формулаларни ҳосил қиламиз. Биринчи квадратик форма мусбат аниқлангани учун Гаусс эгрилигининг ишораси $LN - M^2$ ифоданинг ишорасига боғлиқдир. Агар p^0 нуқтада K>0 бўлса, уни эллиптик нуқта, K<0 бўлса, гиперболик нуқта, агар K=0 бўлса, р ни параболик нуқта деб атаймиз.

Бирорта $\vec{a}$ йўналиш бўйича $k_n(\vec{a})=0$ бўлса, бундай йўналишни асимптотик йўналиш деб атаймиз. $\vec{a}=\{x,y\}$ вектор аниқловчи йўналиш асимптотик йўналиш бўлиши учун $Lx^2+2Mxy+Ny^2=0$ бўлиши зарур ва етарлидир.

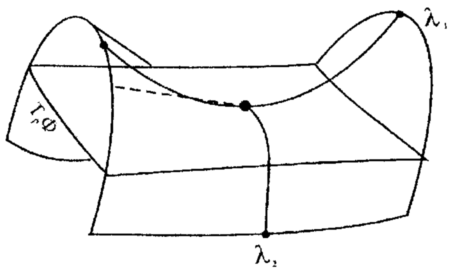
Эллиптик нуқтада асимптотик йўналишлар йўқ, гиперболик нуқтада иккита асимптотик йўналиш мавжуд, параболик нуқтада битта асимптотик йўналиш мавжуд ва ниҳоят яссиланиш нуқтасида (яъни $k_1=0, k_2=0$ бўлганда) ҳамма йўналишлар асимптотик йўналишдир.

Ф сиртда силлиқ γ чизиқ $u=u(t)$, $v=v(t)$ тенглама билан берилиб, унинг ҳар бир нуқтасида уринма вектори асимптотик йўналишни аниқласа, бундай чизиқ асимптотик чизиқ дейилади. Табиийки, сиртда тўғри чизиқ ётса, у асимптотик чизиқ бўлади. Аналитик геометрия курсидан биламизки, бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасида иккита асимптотик йўналиш мавжуд. γ асимптотик чизиқ бўлиши учун $u(t), v(t)$ функциялар $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$ дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлиши зарур ва етарлидир. Ф сиртда $u=const$ ва $v=const$ тенглама билан аниқланадиган чизиқлар (яъни координата чизиқлари) асимптотик чизиқлар бўлиши учун $L=N=0$ бўлиши зарур ва етарлидир.



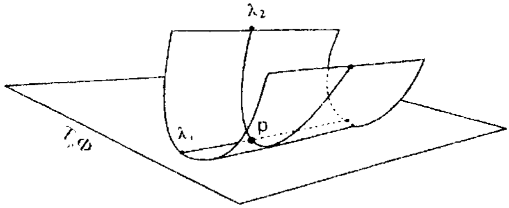
Эллиптик нуқта

Чизма-7



Гиперболик нуқта

Чизма-8



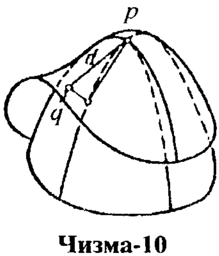
Параболик нуқта

Чизма-9

§ 8. Ёпишма параболоид

Ф регуляр сирт (камида икки марта дифференциалланувчи), p унга тегишли нуқта, F – учи p нуқтада бўлган ва p нуқтада Ф билан уринувчи параболоид бўлсин (яъни p нуқтада Ф ва F сиртларнинг уринма текисликлари устма-уст тушади). Энди Ф сиртда p га яқин q нукта олиб, q дан F сиртгача бўлган масофани h билан, q ва p нуқталар орасидаги масофани d билан белгилайлик.

Таъриф-1. Сиртда q нукта p нуқтага интилганда $\frac{h}{d^2} \to 0$ бўлса, F-параболоид Ф сиртнинг p нуқтадаги ёпишма параболоиди деб аталади.



Чизма-10

Теорема-14. Икки марта дифференциалланувчи регуляр сиртнинг ҳар бир нуқтасида ягона ёпишма параболоид мавжуд.

Исбот. Ф-регуляр сирт, p унга тегишли нуқта бўлсин. Координата бошини p нуқтада жойлаштириб, фазода x,y,z-декарт координаталар системасини шундай киритамизки, бунда xy-текислиги Ф сиртнинг p нуқтадаги уринма текислиги билан устма-уст тушади, z ўқини уринма текисликка перпендикуляр қилиб оламиз. Бу координаталар системасида Ф сиртнинг регуляр параметрлаш усули $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ тенглама ёрдамида берилган бўлса $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq 0$ бўлганлигидан ва $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ векторнинг z ўқига параллеллигидан $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ келиб чиқади. Шунда 2-теоремага кўра шундай икки марта дифференциалланувчи $f(x,y)$ функция мавжуд бўлиб Ф сиртни р нуқта атрофида $z=f(x,y)$ тенглама ёрдамида аниқлаш мумкин. Бу координаталар системасида р координата боши бўлганлиги учун $f(0,0)=0$ бўлади. Уринма текислик тенгламаси

$$z=z_x(0,0)x+z_y(0,0)y$$

бўлиб, у xy текислик билан устма-уст тушганлиги учун

$$z_x(0,0)=0, z_y(0,0)=0$$

бўлади.

Энди учи координата бошида жойлашган параболоид тенгламасини

$$z=\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2) \quad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкинлигидан фойдаланамиз. Агар (1) параболоид р нуқтадаги ёпишма параболоид бўлса, унинг ягоналигини кўрсатамиз. Бунинг учун Ф сиртдаги $q(x_0,y_0,z_0)$ нуқтанинг координаталари параболоид тенгламасига қўйиб

$$\lambda(x_0,y_0,z_0)=z_0-\frac{1}{2}(ax_0^2+2bx_0y_0+cy_0^2)$$

функцияни ҳосил қиламиз ва q нуқта координата бошига интилганда λ ва h миқдорларнинг нолга интилиши тартиби бир хил эканлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун $\frac{\lambda}{h}$ миқдор $q\to p$да аниқ чекли лимитга интилишини кўрсатамиз.

$$\varphi(x,y,z)=z-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)$$

функция учун $\varphi_z\neq 0$ бўлади. q нуқтани p га етарли яқин деб ҳисоблаймиз ва p_m билан (1) параболоидга тегишли шундай нуқталарни белгилаймизки, $|qp_m|$ масофалар h га, p_mнуқталар эса бирорта p_* нуқтага интилсин. Шунда p_* нуқта ҳам (1) параболоидга тегишли бўлади. Энди $\vec{\rho}_0$ билан q нуқтанинг радиус вектори белгиласак, ва

$$\vec{\rho}=\{x,y,\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)\}$$

вектор функциясини киритсак $|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|^2$ функция $\vec{\rho}=\vec{\rho}_*$ нуқтада минимумга эришади. Бу ерда $\vec{\rho}_*-p_*$ нуқтанинг радиус-вектори. Демак,

$$(\vec{\rho}_*-\vec{\rho}_0,\vec{\rho}_x)=0$$

$$(\vec{\rho}_*-\vec{\rho}_0,\vec{\rho}_y)=0$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бундан p_*q кесманинг параболоид уринма текислигига перпендикулярлиги келиб чиқади. p_* нуқтанинг координаталарини x_*,y_*,z_* билан, p_*q тўғри чизиқнинг йўналтирувчи косинусларини n_1,n_2,n_3 билан белгилаб,

$$x_* = x_0 + n_1 h,\ y_* = y_0 + n_2 h,\ z_* = z_0 + n_3 h$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Энди $\varphi(x^*, y^*, z^*)$ функцияни Тейлор қаторига ёйиб

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) + (\varphi_x n_1 + \varphi_y n_2 + \varphi_z n_3)h + h\varepsilon = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан эса

$$\frac{\varphi(x_0, y_0, z_0)}{h} \xrightarrow[q \to p]{} (\varphi_x n_1 + \varphi_y n_2 + \varphi_z n_3)$$

ни ҳосил қиламиз. $\varphi_z(0,0,0) = 1$ ва $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ бўлганлиги учун ўнг томондаги ифода нолдан фарқлидир. Демак, $\frac{\lambda(x_0, y_0, z_0)}{h}$ ифода $q \to p$ да чекли нолдан фарқли лимитга эга. Энди $f(x, y)$ функцияни p нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз.

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)yx + f_{yy}(0,0)y^2) + \varepsilon(x, y)(x^2 + y^2).$$

Энди q нуқтанинг $x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ координаталарини параболоид тенгламасига қўямиз ва

$$z_0 = f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)x_0^2 + 2f_{xy}(0,0)x_0, y_0 + f_{yy}(0,0)y^2\} +$$
$$+ \varepsilon(x_0, y_0)(x_0^2 + y_0^2)$$

тенгликни ҳисобга олиб

$$\lambda(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}\{(f_{xx}(0,0) - a)x_0^2 + 2(f_{xy}(0,0) - b)x_0 y_0 + (f_z(0,0) - c)y_0^2\} +$$
$$+ (x_0^2 + y_0^2)\varepsilon_1(x_0, y_0)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Сиртнинг q ва p нуқталари орасидаги масофа квадрати учун

$$d^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + f^2(x_0, y_0)$$

тенгликдан фойдаланамиз. Энди (1) ёпишма параболоид эканлиги учун $\frac{h}{d^2}$ ифода $q \to p$ да нолга интилиши маълум. Демак, $\frac{\lambda}{d^2}$ ифода ҳам нолга интилади. $y_0 = 0, x_0 \to 0$ да

$$\frac{\lambda}{d^2} = \frac{\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0) - a)x_0^2 + x_0^2\varepsilon_1(x_0, y_0)}{x_0^2 + x_0^2\varepsilon_2(x_0, y_0)}$$

ифода нолга интилиши керак. Бундан $a = f_{xx}(0,0)$ келиб чиқади. Худди $x_0 = 0, y_0 \to 0$ ва $x_0 = y_0 \to 0$ ҳолларни кўриб $b = f_{xy}(0,0)\ c = f_{yy}(0,0)$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак, уринма параболоид

$$z = \frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\} \quad (2)$$

тенгламага эга ва ягонадир. Иккинчи томондан танланган координаталар системасида (2) параболоид уринма бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{\lambda}{d^2} = \frac{(x_0^2 + y_0^2)\varepsilon_0(x_0, y_0)}{x_0^2 + y_0^2 + (x_0^2 + y_0^2)\varepsilon_1(x_0, y_0)}$$

тенгликда x_0, y_0 лар нолга интилганда $\frac{\lambda}{d^2} \to 0$ бўлади. □

Юқоридаги 14-теорема исботидагидек координаталар системасини киритсак, Ф сирт

$$z = f(x,y), f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

тенглама билан, уринма параболоид

$$z = \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_y(0,0)y^2\right\}$$

тенглама билан берилади. $f(x,y)$ функцияни Тейлор қаторига ёйсак

$$z = \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_y(0,0)y^2\right\} + 0(x^2 + y^2)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламалардан кўриниб турибдики, сирт ва ёпишма параболоиднинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари коэффициентлари мос равишда тенг бўлади. Бевосита ҳисоблаш натижасида

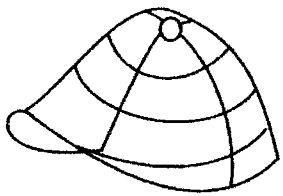
$$L = f_{xx}(0,0),\ M = f_{xy}(0,0),\ N = f_{yy}(0,0)$$

тенгликларни оламиз. Демак, ёпишма параболоид тенгламасини

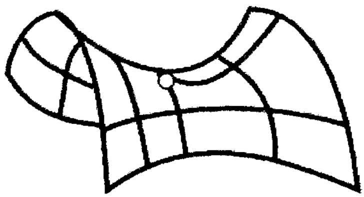
$$z = \frac{1}{2}\left\{Lx^2 + 2Mxy + Ny^2\right\}$$

кўринишда ёза оламиз. Энди қуйидаги теорема ёпишма параболоид тенгламасидан келиб чиқади.

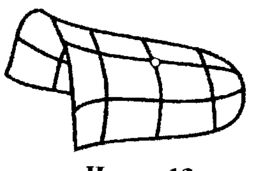
Теорема-15. Эллиптик нуқтада ёпишма параболоид эллиптик параболоид бўлади, гиперболик нуқтада ёпишма параболоид гиперболик параболоид, ва параболик нуқтада параболик цилиндр бўлади.



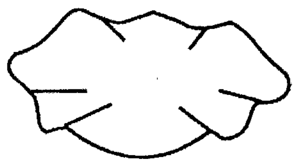
Чизма-11



Чизма-12



Чизма-13



Чизма-14

Регуляр сирт Ф нинг p нуқтасида бош эгриликлар ўзаро тенг бўлса, омбилик нуқта, агар бош эгриликлар нолга тенг бўлса, p нуқта яссиланиш нуқтаси дейилади. Яссиланиш нуқтада ёпишма параболоид сиртнинг шу нуқтадаги уринма текислиги билан устма-уст тушади. Чунки Эйлер теоремасига кўра ихтиёрий $\vec{a}$ уринма вектор учун

$$k_n(\vec{a}) = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi = k_1(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = k_1 = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак нормал кесим ёки тўғри чизиқ, ёки тўғри чизиқ кесмасидир. Энди координаталар системасини юқоридагидек киритсак ва уринма текисликда x,y координаталар ўқларини бош йўналишлар бўйича йўналтирсак биринчи квадратик форма матрицаси бирлик матрица бўлади, иккинчи квадратик форма матрицаси $B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ кўринишда бўлади. Демак бу ҳолда ёпишма параболоид $z = \frac{1}{2}\{k_1x^2 + k_2y^2\}$ функциянинг графиги бўлади. Шунинг учун $k_1 = k_2 = 0$ бўлганда ёпишма параболоид $z = 0$ текисликка айланади.

Теорема-16. Регуляр Ф сиртнинг ҳамма нуқталари омбилик нуқталар бўлса, у сфера ёки сферанинг қисми, агар Ф сиртнинг ҳамма нуқталари яссиланиш нуқталари бўлса, у текислик ёки текислик қисми бўлади.

Исбот. Ф сиртнинг ҳамма нуқталари омбилик нуқталар бўлсин. Ихтиёрий $p \in \Phi$ нуқта олиб, p нуқта атрофида Ф сиртнинг регуляр $\vec{r} = \vec{r}(u,v),(u,v) \in G$ параметрлаш усулини қараймиз. Бу тенглама билан аниқланувчи сирт нуқталари учун уринма текисликларда базис сифатида $A^{-1}B$ матрицанинг ортонормал хос векторларини оламиз. Шунда

$$E = G = 1, F = M = 0, L = N = \lambda(u,v)$$

бўлади. Бу ерда

$$\lambda(u,v) = k_1(u,v) = k_2(u,v).$$

Маълумки, ихтиёрий параметрлаш усули учун

$$L = (\vec{r}_u, \vec{n}_u), M = (\vec{r}_u, \vec{n}_v) = -(F_v, \vec{n}_u), N = -(F_v, n_v)$$

бўлиб, $\vec{n}(u,v) - q(u,v)$ нуқтадаги бирлик нормал вектор. $M = 0$ бўлганлиги учун $\vec{n}_u \perp \vec{r}_v, \vec{n}_v \perp \vec{r}_u$ ва $\vec{n}$ бирлик вектор бўлганлиги учун $\vec{n}_u, \vec{n}_v$ векторлар уринма текислик параллел. Бундан $\vec{n}_u = \lambda\vec{r}_u, \vec{n}_v = \lambda\vec{r}_v$ тенгликлар келиб чиқади. Бу тенгликларни дифференциаллаб

$$\vec{n}_{uv} = \lambda_v\vec{r}_u + \lambda\vec{r}_{uv}, \vec{n}_{vu} = \lambda_u\vec{r}_v + \lambda\vec{r}_{uv}$$

тенгликларни ва натижада $\lambda_v\vec{r}_u - \lambda_u\vec{r}_v = \vec{0}$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ векторлар чизиқли эрклилигидан $\lambda_u = \lambda_v = 0$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак, p нуқта атрофида $\lambda = const$ экан. Энди p дан фарқли ихтиёрий q нуқтани оламиз ва p,q нуқталарни чизиқ билан туташтирамиз (бу мумкин, чунки сирт таърифига кўра, Ф боғланишли ва локал чизиқли боғланишли. Бундан эса сиртнинг чизиқли боғланишли эканлиги келиб чиқади). Бу чизиқ $\gamma : [a,b] \to \Phi$ акслантириш ёрдамида параметрланган бўлиб, $\gamma(a)=p,\gamma(b)=q$ бўлсин. Ҳар бир $t\in[a,b]$ учун $\gamma(t)$ нуқтанинг атрофида юқоридагидек λ ни ўзгармас эканлигини кўрсатамиз. $\gamma([a,b])$ компакт бўлганлиги учун γ ни чекли сондаги атрофлар билан қоплаш мумкин. Ҳар бир атрофда λ ўзгармас, атрофлар кесишади. Шунинг учун p нуқтани ўз ичига олувчи атрофда $\lambda=\lambda_0$ бўлса, ҳамма атрофларда, шу жумладан q нуқтада $\lambda=\lambda_0$ бўлади. Демак, λ ўзгармас сондир. Энди

$$n_u-\lambda r_u=\frac{\partial}{\partial u}(n-\lambda r)=0$$

$$n_v-\lambda r_v=\frac{\partial}{\partial v}(n-\lambda r)=0$$

тенгликлар $\vec{n}-\lambda\vec{r}$ векторнинг ўзгармас вектор эканлигини кўрсатади. Шунинг учун

$$\vec{n}(u,v)-\lambda\vec{r}(u,v)=\vec{n}(u_0,v_0)-\lambda\vec{r}(u_0,v_0)$$

ёки

$$\vec{r}(u,v)-\vec{r}(u_0,v_0)+\frac{1}{\lambda}\vec{n}(u_0,v_0)=\frac{1}{\lambda}\vec{n}$$

ва $|\vec{r}(u,v)-\vec{r}(u_0,v_0)+\frac{1}{\lambda}\vec{n}(u_0,v_0)|=\frac{1}{|\lambda|}$ муносабатлар ўринлидир.

Бу тенгликлар $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ тенглама билан аниқланувчи сирт нуқталари марказининг радиус вектори $\vec{r}(u_0,v_0)-\frac{1}{\lambda}\vec{n}(u_0,v_0)$ бўлган ва радиуси эса $\frac{1}{|\lambda|}$га тенг бўлган сферада ётишини билдиради.

Агар $\lambda=0$ бўлса,

$$\vec{n}_u(u,v)=\vec{0},\vec{n}_v(u,v)=0$$

тенгликлардан, $\vec{n}(u,v)$ ўзгармас вектор эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун $(\vec{r},\vec{n})_u=0,(\vec{r},\vec{n})_v=0$ тенгликлар ҳосил қиламиз. Бундан эса $(\vec{r}-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{n})=0$ тенглама келиб чиқади. Бундан эса сирт нуқталари $\vec{n}$ векторга перпендикуляр текисликда ётиши келиб чиқади.

§ 9. Деривацион формулалар

Бу параграфда биз сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари орасидаги боғланишларни кўрсатамиз. Регуляр Ф сирт $p(u_0,v_0)$ нуқта атрофида регуляр $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ параметрлаш усули билан берилган бўлсин. Ҳосил бўладиган формулаларни ихчамлаш учун тензор ҳисобкитобдаги белгилашлардан фойдаланамиз. Бунинг учун $u_1=u,u_2=v$ белгилашларни киритамиз. Бундан ташқари биринчи квадратик форма матрицаси элементларини g_{ij}лар билан, иккинчи квадратик форма матрицаси элементларини q_{ij}лар билан белгилаймиз. Демак,

$$A=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Йиғиндиларда агар биронта индекс юқорида ва пастда бир хил марта учраса бу индекслар бўйича йиғинди белгисини ташлаб ёзамиз. Мисол учун

$$a_1b^1+a_2b^2+...a_nb^n=\sum_{i=1}^{n}a_ib^i=a_ib^i,$$

$$\sum_i\sum_j a_{ij}b^j=\sum_i a_{ij}b^j$$

Энди R^3 да $\vec{r}_{u_1},\vec{r}_{u_2}$ ва $\vec{n}=\dfrac{[\vec{r}_{u_1},\vec{r}_{u_2}]}{|[\vec{r}_{u_1},\vec{r}_{u_2}]|}$ векторларни базис сифатида олиб, $\vec{n}_{u_1},\vec{n}_{u_2}$ ва $\vec{r}_{u_iu_j}$ векторларни бу базис векторлар ёрдамида чизиқли ифодалаймиз:

$$\begin{cases} \vec{r}_{u_iu_j}=\Gamma_{ij}^k\vec{r}_{u_k}+b_{ij}\vec{n} \\ \vec{n}_i=a_i^k\vec{r}_{u_k}+c_i\vec{n} \end{cases} \qquad i=1,2;\ j=1,2; \qquad (1)$$

Бу ерда $\vec{n}_i=\vec{n}_{u_i}$. Агар биринчи тенгликда $i=1, j=2$ бўлса

$$\vec{r}_{u_1u_2}=\Gamma_{12}^1\vec{r}_{u_1}+\Gamma_{12}^2\vec{r}_{u_2}+b_{12}\vec{n}$$

тенглик ҳосил бўлади.

Ана шу ёзилган (1) формулаларда Γ_{ij}^k ва b_{ij},a_i^k,c_i функциялар (коэффициентлар) фақат биринчи ва иккинчи квадратик формалар коэффициентлари орқали ифодаланишини кўрсатамиз. Бунинг учун $\vec{r}_{u_iu_j}=\Gamma_{ij}^k\vec{r}_{uk}+b_{ij}\vec{n}$ тенгликни $\vec{n}$ векторга скаляр кўпайтирамиз ва

$$(\vec{r}_{u_k},\vec{n})=0,\quad (\vec{r}_{u_iu_j},\vec{n})=\Gamma_{ij}^k(\vec{r}_{u_k},\vec{n})+b_{ij}(\vec{n},\vec{n})$$

тенгликларни ҳисобга олиб

$$b_{ij}=(\vec{r}_{u_iu_j},\vec{n})=q_{ij}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди $\vec{n}_i=a_i^k\vec{r}_{u_k}+c_i\vec{n}$ тенгликни $\vec{r}_{u_j}$ га скаляр кўпайтирамиз ва

$$(\vec{n}_i,\vec{r}_{u_j})=a_i^k(\vec{r}_{u_j},\vec{r}_{u_j})+c_i(\vec{n},\vec{r}_{u_j}),\ (\vec{n},\vec{r}_{u_j})=0$$

тенгликларни ҳисога олиб

$$-q_{ij}=a_i^kg_{kj} \qquad (2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликни одатдаги кўринишда ёзсак

$$\begin{cases} -q_{11} = a_1^1 g_{11} + a_1^2 g_{21} \\ -q_{12} = a_1^1 g_{12} + a_1^2 g_{22} \\ -q_{21} = a_2^1 g_{11} + a_2^2 g_{21} \\ -q_{22} = a_2^1 g_{12} + a_2^2 g_{22} \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системадан $\det A > 0$ бўлганлиги учун a_i^k коэффициентларни топиш мумкин. g^{ij} билан A^{-1} матрицанинг элементларини белгилаймиз. Шунда $A^{-1}A = E$ тенгликни

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

кўринишда ёза оламиз. Бундан фойдаланиб, (2) тенгликни g^{jl}га кўпайтириб ва j индекс бўйича йиғиб, қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз: $-q_{ij} g^{jl} = a_i^k g_{kj} g^{jl}$. Бундан $a_i^k = -\sum_{j=1}^{2} q_{ij} g^{jk}$ тенглик келиб чиқади.

Мисол учун $k = 1, i = 1$ да

$a_1^1 = -q_{1j} g^{j1} = -q_{11} g^{11} - q_{12} g^{21}$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$g^{11} = \frac{1}{\det A} g_{22}, \quad g^{21} = -\frac{1}{\det A} g_{12}$$

бўлади. Шундай қилиб, a_i^k, b_{ij} функцияларни топдик. Энди

$$\vec{r}_{u_i u_j} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{u_k} + b_{ij} \vec{n}$$

тенгликни $\vec{r}_{u_e}$ векторга скаляр кўпайтириб

$$(\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{r}_{u_l}) = \Gamma_{ij}^k (\vec{r}_{u_k}, \vec{r}_{u_l})$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $(\vec{r}_{u_k}, \vec{r}_{u_l}) = g_{kl}$ эканлиги маълум. Биз (1) системадаги Γ_{ij}^k коэффициентларни топмоқчимиз. Бунинг учун $\Gamma_{ij,l} = (\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{r}_{u_l})$ белгилашни киритиб

$$\Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} \qquad (3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди

$$(\vec{r}_{u_i}, \vec{r}_{u_l}) = g_{il}$$

тенгликни u_j бўйича дифференциаллаб

$$(\vec{r}_{u_l u_j}, \vec{r}_{u_l}) + (\vec{r}_{u_i}, \vec{r}_{u_l u_j}) = \frac{\partial}{\partial u_j}(g_{il})$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликни $\Gamma_{ij,l}$ функциялар орқали ёзсак

$$\Gamma_{ij,l} + \Gamma_{lj,i} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} \tag{4}$$

кўринишда бўлади. Бу тенгликда индексларни айлантириб яна иккита тенгликни ёзамиз

$$\Gamma_{jl,i} + \Gamma_{il,j} = \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ij}, \Gamma_{li,j} + \Gamma_{ji,l} = \frac{\partial}{\partial u_i} g_{lj} \quad . \tag{5}$$

Энди (4) тенгликдан (5) тенгликларни айириб

$$\Gamma_{ij,l} - \Gamma_{ji,l} + \Gamma_{lj,i} - \Gamma_{jl,i} - \Gamma_{il,j} - \Gamma_{li,j} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ji} - \frac{\partial}{\partial u_l} g_{lj} \tag{6}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ji,l}$ тенгликни ҳисобга олиб (6)ни қуйидагича ёзамиз

$$-2\Gamma_{il,j} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ji} - \frac{\partial}{\partial u_i} g_{lj} .$$

Бундан эса

$$\Gamma_{il,j} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_l} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ji} - \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il}\right\} \tag{7}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди Γ_{ij}^k функцияларни топа оламиз. Бунинг учун (3) ни g^{ls} га кўпайтириб l индекс бўйича йиғсак

$$\Gamma_{ij,l} g^{ls} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} g^{ls} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^s = \Gamma_{ij}^s$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, $\Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,l} g^{ls}$ формулани ҳосил қилдик. Ниҳоят (7) тенгликни g^{jk} га кўпайтириб j индекс бўйича йиғамиз ва натижада

$$\Gamma_{il}^k = \Gamma_{il,j} g^{jk} = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} g_{l_j} + \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il}\right) \tag{8}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу (8) формула бизга 6 та Γ_{ij}^k функцияларни топиш имконини беради. Мисол учун $i = k = l = 1$ да

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} - \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11}\right\} + \frac{1}{2} g^{21}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1} g_{12} + \frac{\partial}{\partial u_1} g_{12} - \frac{\partial}{\partial u_2} g_{11}\right\} =$$

$$= g^{11} \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + g^{21} \frac{\partial}{\partial u_1} g_{12} - \frac{1}{2} g^{21} \frac{\partial}{\partial u_2} g_{11}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Юқоридаги (8) формуладан кўриниб турибдики, Γ_{ij}^{k} функциялар фақат биринчи квадратик форма коэффициентлари ва уларнинг ҳосилалари орқали ҳисобланади. Ниҳоят (1) формуладаги ҳамма коэффициентлар топилди. Энди (1)ни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$\begin{cases} \vec{r}_{u_i u_j} = \Gamma_{ij}^{k}\vec{r}_{uk} + q_{ij}\vec{n} \\ \vec{n}_{u_i} = -q_{ij}g^{jk}\vec{r}_{u_k} \end{cases} \qquad (9)$$

Бу формулалар деривацион формулалар деб аталади. Деривацион формулаларни биринчи ва иккинчи квадратик формалар орасидаги боғланишни топиш учун ишлатамиз. Бунинг учун

$$\vec{r}_{u_i u_j u_k} = \vec{r}_{u_i u_k u_j}, \vec{n}_{u_i u_j} = \vec{n}_{u_j u_i} \qquad (10)$$

тенгликларни ёзиб, $\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{r}_{u_i u_k}, n_{u_i}, n_{u_j}$ функцияларни деривацион формулалар ёрдамида ифодалаймиз. Шунда (10) тенгликлар

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\Gamma_{ij}^{l}\vec{r}_{u_e} + q_{ij}\vec{n}) - \frac{\partial}{\partial u_j}(\Gamma_{ik}^{l}\vec{r}_{u_e} + q_{ik}\vec{n}) = 0$$

ва

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(q_{il}g^{lk}\vec{r}_{u_k}) - \frac{\partial}{\partial u_i}(q_{jl}g^{lk}\vec{r}_{u_k}) = 0$$

кўринишга келади. Бу тенгликларда дифференциаллаш амалини бажариб

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\Gamma_{ij}^{l}\vec{r}_{ul} + \Gamma_{ij}^{l}\vec{r}_{u_e u_i} + \frac{\partial}{\partial u_k}(q_{ij})\vec{n} + q_{ij}\vec{n}_{u_k} - \left[\frac{\partial}{\partial u_j}(\Gamma_{ik}^{l})\vec{r}_{u_l} + \Gamma_{ik}^{l}\vec{r}_{u_l u_j} - \frac{\partial}{\partial u_j}(q_{ik})\vec{n} + q_{ik}\vec{n}_{u_j}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(q_{il}g^{lk})\vec{r}_{uk} + q_{il}g^{lk}\vec{r}_{u_k u_j} - \left[\frac{\partial}{\partial u_j}(q_{il}g^{lk})\vec{r}_{uk} + q_{il}g^{lk}\vec{r}_{u_k u_i}\right] = 0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликларда яна бир марта деривацион формулалардан фойдаланамиз. Шунда $\vec{r}_{u_m}, \vec{n}$ векторлар чизиқли эркли бўлганлиги учун улар олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштириб

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\Gamma_{ij}^{m} - \frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{ik}^{m} + \sum_{l=1}^{2}(\Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{lk}^{m} - \Gamma_{ik}^{l}\Gamma_{lj}^{m}) = \sum_{l=1}^{2}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm} \qquad (11)$$

ва

$$\sum_{m=1}^{2}\Gamma_{ij}^{m}q_{mk} - \sum_{m=1}^{2}\Gamma_{ik}^{m}q_{mj} + \frac{\partial}{\partial u_k}q_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j}q_{ik} = 0 \qquad (12)$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Бу муносабатлардан биринчиси Гаусс тенгламаси, иккинчи Петерсон-Кодацци тенгламалари деб аталади. Гаусс тенгламасини g_{ms} га кўпайтириб индекс m бўйича йиғайлик:

$$\sum_m g_{ms}\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\Gamma_{ij}^m - \frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{ik}^m + \sum_{l=1}^{2}(\Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lj}^m)\right) =$$

$$= \sum_{l,m=1}^{2}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm}g_{ms}$$

Шунда ўнг томондаги ифода

$$\sum_{l,m=1}^{2}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm}g_{ms} = \sum_{l=1}^{2}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})\delta_l^s = q_{ij}q_{ks} - q_{ik}q_{js}$$

кўринишга келади. Бу ерда $i = j = 1, k = s = 2$ бўлганда

$$q_{11}q_{22} - q_{12}^2 = \sum_{m=1}^{2} g_{m2}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\Gamma_{11}^m - \frac{\partial}{\partial u_1}\Gamma_{12}^m + \sum_{l=1}^{2}(\Gamma_{11}^l\Gamma_{l2}^m - \Gamma_{12}^l\Gamma_{l1}^m)\right) \quad (13)$$

кўринишга келади.

Демак, Гаусс эгрилиги K фақат биринчи квадратик форма коэффициентларига боғлиқ экан. Бу эса унинг изометрик акслантиришларда ўзгармай қолишини кўрсатади.

§ 10. Сиртлар назариясининг асосий теоремалари

Бу параграфда берилган иккита квадратик формалар учун сиртнинг мавжудлиги ва фазодаги ҳаракатга нисбатан унинг ягоналиги ҳақидаги теоремаларни исботлаймиз.

Теорема-16 (Мавжудлик). Текисликдаги G соҳада аниқланган g_{ij}, q_{ij} дифференциаллапувчи функциялар берилган бўлиб, $g_{ij} = g_{ji}, q_{ij} = q_{ji}$ муносабатлар бажарилган ва $\{g_{ij}\}$ матрицанинг детерминанти нолдан катта бўлсин. Бундан ташқари бу функциялар учун Гаусс ва Петерсон-Кодацци тенгламалари бажарилган бўлсин. Шунда ҳар бир $(u_0, v_0) \in G$ учун бу нуқтанинг $V \subset G$ атрофи ва

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in V$$

тенглама билан аниқланган регуляр Φ сирт мавжуд бўлиб, унинг биринчи ва иккинчи квадратик формаларининг матрицалари мос равишда $\{g_{ij}\}$ ва $\{q_{ij}\}$ матрицалар билан устма-уст тушади.

Исбот. Берилган $\{g_{ij}\}$ матрицага тескари матрица элементларини g^{jk} билан белгилаймиз ва

$$\Gamma_{il}^k = \Gamma_{il,j}g^{jk} = \frac{1}{2}g^{jk}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}g_{lj} + \frac{\partial}{\partial u_l}g_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j}g_{il}\right)$$

бўйича Γ_{ij}^k функцияларни топамиз. Энди қуйидаги X_1, X_2, N вектор функцияларга нисбатан қуйидаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасини қарайлик.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial_{u_j}}(X_i) = \Gamma_{ij}^k X_k + q_{ij} N \\ N_{u_i} = -q_{ij} g^{jk} X_k \end{cases} \quad (1).$$

Бу ерда $u_1 = u$, $u_2 = v$ белгилашлардан фойдаланди. Шуни ҳисобга олиб (1) системани ҳар бир индекс учун ёзсак, у

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u} X_1 = \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 + q_{11} N \\ &\frac{\partial}{\partial v} X_1 = \Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2 + q_{12} N \\ &\frac{\partial}{\partial u} X_2 = \Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2 + q_{21} N \\ &\frac{\partial}{\partial v} X_2 = \Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2 + q_{22} N \\ &\frac{\partial N}{\partial u} = a_1^1 X_1 + a_1^2 X_2 \\ &\frac{\partial N}{\partial v} = a_2^1 X_1 + a_2^2 X_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

кўринишга келади. Энди бу хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасининг ечими мавжудлик шартларини ёзамиз:

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_j \partial u_k} = \frac{\partial X_i}{\partial u_k \partial u_j}, \quad \frac{\partial N}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial N}{\partial u_j \partial u_i} \quad (3).$$

Бу мавжудлик шартлари Гаусс ва Петерсон-Кодацци тенгламаларига эквивалент эканлигини олдинги параграфда кўрсатдик. Демак бизнинг (1) системамиз учун G соҳанинг ҳар бир нуқтасида ечимнинг мавжудлик шартлари бажарилган. Демак, бирорта $(u_0, v_0) \in G$ нуқта олсак, шу нуқтанинг бирорта V атрофида (1) система (u_0, v_0) нуқтада берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ягона ечимга эга яъни V соҳада аниқланган вектор функциялар

$$X_1(u,v), X_2(u,v), N(u,v)$$

мавжуд ва (1) системани қаноатлантиради. Бошланғич шартларни қуйидагича танлаймиз:

$$|N(u_0,v_0)| = |N^0| = 1, (X_1(u_0,v_0), N(u_0,v_0)) = (X_2(u_0,v_0), N(u_0,v_0)) = 0,$$

$$g_{ij}(u_0,v_0) = (X_i(u_0,v_0), X_j(u_0,v_0))$$

ва

$$X_1(u_0,v_0), X_2(u_0,v_0), N(u_0,v_0)$$

векторлар ўнг системани ташкил қилади. Бу бошланғич шартларни қаноатлантирувчи векторлар мавжудлиги $\{g_{ij}(u_0,v_0)\}$ матрицанинг мусбат аниқланганлигидан келиб чиқади. Энди $\vec r=\vec r(u,v)$ вектор функция учун

$$\begin{cases}\vec r_u = X_1,\\ \vec r_v = X_2\end{cases} \qquad (4)$$

системасини қараймиз. Бу система учун ечимнинг мавжудлик шарти $\vec r_{uv}=\vec r_{vu}$ тенгликдан иборатдир. Лекин $g_{ij}=g_{ji}$ бўлганлиги учун $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$ ундан ташқари $q_{ij}=q_{ji}$ муносабат ҳам бор. Демак,

$$\frac{\partial}{\partial v}X_1=\frac{\partial}{\partial u}X_2$$

муносабат ва $\vec r_{uv}=\vec r_{ru}$ тенглик ўринлидир.

Шундай қилиб, агар $(u_0,v_0)\in V$ нуқта учун (4) системани $\vec r(u_0,v_0)=\vec a$ бошланғич шарт билан қарасак. (u_0,v_0) нуқтанинг бирорта $V_0\subset V$ атрофида аниқланган $\vec r(u,v)$ ечим мавжуд. Энди $\vec r=\vec r(u,v)$, $(u,v)\in V_0$ тенглама билан аниқланган Φ сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари коэффициентларини ҳисоблаймиз. Бунинг учун

$$(X_i,X_j),(X_i,N),N^2$$

функцияларни дифференциаллаш ёрдамида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u_k}(X_i,X_j)=\Gamma_{ik}^l(X_l,X_j)+\Gamma_{jk}^l(X_l,X_i)+q_{ik}(N,X_j)+q_{jk}(N,X_i)\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial u_i}(N,X_j)=-q_{il}g^{lk}(X_k,X_j)+\Gamma_{ij}^l(X_l,N)+q_{ij}N^2\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial u_i}(N,N)=-2q_{il}g^{lk}(X_k,N)\end{cases} \qquad (5)$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системаси учун

$$(X_i,X_j)=q_{ij},(X_j,N)=0,(N,N)=N^2=1$$

функциялар ечим бўлади. Охирги тенглама учун бу фактни бевосита

$$N^2=1,(X_j,N)=0$$

ифодаларни тенгламага қўйиб текшириш мумкин. Иккинчи тенглама учун текширамиз

$$q_{il}g^{lk}g_{kj}+q_{ij}=q_{il}\delta_j^l+q_{ij}=-q_{ij}+q_{ij}=0.$$

Биринчи тенгламани текшириш учун

$$\Gamma_{ik}^l=\frac{1}{2}g^{lm}\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}g_{km}+\frac{\partial}{\partial u_k}g_{im}-\frac{\partial}{\partial u_m}g_{ik}\right\}$$

тенгликни g_{lj} га кўпайтириб, индекс l бўйича йиғамиз.

Натижада

$$\Gamma_{ik}^{l} g_{lj} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_i} g_{kj} + \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j} g_{ik}\right\}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Худди шундай

$$\Gamma_{jk}^{l} g_{li} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ji} - \frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk}\right\}$$

тенглик ҳам ўринли. Бундан

$$\Gamma_{ik}^{l} g_{lj} + \Gamma_{jk}^{l} g_{li} = \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij}$$

муносабат келиб чиқади. Бу муносабат ўз навбатида

$$(X_i, X_j) = g_{ij}, (X_i, N) = 0$$

функциялар 1-тенглама учун ечим эканлигини кўрсатади. Бу ечимлар учун бошланғич шартларга кўра

$$(X_i, X_j)(u_0, v_0) = g_{ij}(u_0, v_0), (X_i(u_0, v_0) N(u_0, v_0)) = 0$$

$$| N^2(u_0, v_0) = 1$$

муносабатлар ўринли ва

$$X_1(u_0, v_0), X_2(u_0, v_0), N(u_0, v_0$$

векторлар ўнг системани ташкил этади. Бундан эса, (5) системанинг ечими ягоналигига кўра

$$g_{ij} = (X_i, X_j), (X_j, N) = 0, N^2 = 1$$

тенгликлар ва аралаш кўпайтма учун $X_1 X_2 N > 0$ муносабат V_0 соҳанинг ҳамма нуқтасида бажарилиши келиб чиқади. Демак, Φ сирт учун

$$(\vec{r}_{u_i}, \vec{r}_{u_j}) = g_{ij}, (\vec{r}_{u_i}, N) = 0, N^2 = 1$$

муносабатлар ўринли. Бундан эса Φ сиртнинг биринчи квадратик формаси матрицаси $\{g_{ij}\}$ матрица билан устма-уст тегишли келиб чиқади.

Иккинчи томондан

$$(\vec{r}_u, \vec{N}(u, v)) = (\vec{r}_v, \vec{N}(u, v)) = 0$$

бўлганлиги учун $\vec{N}(u, v)$ вектор Φ сиртнинг бирлик нормал вектори бўлади. Демак,

$$-(\vec{r}_{u_l}, \vec{N}_{u_i}) = -(X_l, \vec{N}_{u_i}) = q_{ij} g^{jk} (X_k, X_l) = q_{ij} g^{jk} g_{kl} = q_{il}$$

муносабат ўринли бўлиб, Φ сиртнинг иккинчи квадратик форма матрицаси q_{il} матрица билан устма-уст тушади.

Теорема-17 (ягоналик). Мавжудлик ҳақидаги теорема шартларини қаноатлантирувчи регуляр Φ_1, Φ_2 сиртлар учун шундай ягона, $C: R^3 \to R^3$ ҳаракат мавжуд бўлиб, $C(\Phi_1) = \Phi_2$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, Φ_1, Φ_2 регуляр сиртларнинг (f_1, V_0) ва (f_2, V_0) регуляр параметрлаш усуллари мос равишда

$$\vec{r}=\vec{r}^{\,1}(u,v) \qquad (u,v)\in V_0$$
$$\vec{r}=\vec{r}^{\,2}(u,v)$$

тенгламалар билан аниқланиб, уларнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари мос равишда ҳар бир $(u,v)\in V_0$ нуқтада тенг бўлсин. Бу сиртлар учун радиуси вектори $\vec{r}_1(u,v)$ га тенг бўлсин нуқтани радиус вектори $\vec{r}_2(u,v)$ бўлган нуқтага ўтказувчи $F:\Phi_1\to\Phi_2$ акслантиришни қарайлик. Демак, F акслантириш Φ_1 сиртдаги (u,v) координатали нуқтани Φ_2 сиртдаги (u,v) координата нуқтага акслантиради ва демак F дифференциалланувчи акслантиришдир. Бу акслантиришнинг дифференциалланувчи эканлигини кўрсатиш учун 5-теоремага кўра $F\cdot f_1:V_0\to R^3$ акслантиришнинг дифференциалланувчи эканлигини кўрсатиш керак. Агар $x^2(u,v),y^2(u,v),z^2(u,v)$ дифференциалланувчи функциялар $\vec{r}^{\,2}(u,v)$ вектор-функциянинг координаталари бўлса,

$$F\cdot f_1(u,v)=\{x^2(u,v),y^2(u,v),z^2(u,v)\}$$

тенглик ўринли бўлади ва шунинг учун $F\cdot f_1(u,v)$ дифференциалланувчи акслантиришдир. Ҳар бир $(u,v)\in V_0$ нуқтада $I_1(u,v)=I_2(u,v)$ бўлганлиги учун 9-теоремага кўра F акслантириш изометрик акслантиришдир. Демак, F акслантиришда скаляр кўпайтма, хусусан уринма векторлар орасидаги бурчаклар сақланди. Демак (u_0,v_0) нуқтада $\vec{r}_u^{\,1},\vec{r}_v^{\,1}$ ва $\vec{n}^1=\dfrac{[\vec{r}_u^{\,1},\vec{r}_v^{\,1}]}{|[\vec{r}_u^{\,1},\vec{r}_v^{\,1}]|}$ векторлар ўнг (чап) ориентацияни аниқласа $\vec{r}_u^{\,2},\vec{r}_v^{\,2}$ ва $\vec{n}^2=\dfrac{[\vec{r}_u^{\,2},\vec{r}_v^{\,2}]}{|[\vec{r}_u^{\,2},\vec{r}_v^{\,2}]|}$ векторлар ҳам ўнг (мос равишда чап) ориентацияни аниқлайди. Демак

$$P(x^1(u_0,v_0),y^1(u_0,v_0),z^1(u_0,v_0))$$

нуқтада

$$\vec{r}_u^{\,1}(u_0,v_0),\vec{r}_v^{\,1}(u_0,v_0),\vec{n}^1(u_0,v_0)$$

векторлар,

$$Q=(x^2(u_0,v_0),y^2(u_0,v_0),z^2(u_0,v_0))$$

нуқтада эса

$$\vec{r}_u^{\,2}(u_0,v_0),\vec{r}_v^{\,2}(u_0,v_0),\vec{n}^2(u_0,v_0)$$

векторлар базисни ташкил этиб, бу базислар бир хил ориентацияни ташкил этади ва

$$|\vec{r}_u^{\,1}|=|\vec{r}_u^{\,2}|,|\vec{r}_v^{\,1}|=|\vec{r}_v^{\,2}|,|\vec{n}^1|=|\vec{n}^2|$$

тенгликлар бажарилади. Аналитик геометриядаги маълум теоремага кўра P нуқтани Q нуқтага, $(\vec{r}_u^{\,1},\vec{r}_v^{\,1},\vec{n}^1)$ базисни $(\vec{r}_u^{\,2},\vec{r}_v^{\,2},\vec{n}^2)$ базисга ўтказувчи $C:R^3\to R^3$ акслантириш мавжуд бўлиб, у параллел кўчириш ва буришдан иборат бўлади [1]. Бу акслантириш изометрик акслантириш бўлади, чунки параллел кўчириш ва буриш изометрик акслантиришлардир. Энди $C: R^3 \to R^3$ акслантиришда $C(\Phi_1) = \Phi_2$ эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун $\vec{\rho}(u,v) = C^*(\vec{r}^1(u,v))$ белгилаш киритайлик. Бу ерда C^* акслантириш, C акслантиришнинг дифференциалидир. Акслантириш C изометрия бўлганлиги учун C^* - ортогонал матрицадир. Демак,

$$\vec{\rho}(u_0,v_0) = \vec{r}_2(u_0,v_0), \vec{\rho}_u(u_0,v_0) = C^*(\vec{r}_u^1(u_0,v_0)), \vec{\rho}_v(u_0,v_0) = C^*(\vec{r}_v^1(u_0,v_0))$$

тенгликлардан ташқари $C(\Phi_1)$ сиртнинг биринчи квадратик формаси Φ_1 сиртнинг ва демак Φ_2 сиртнинг биринчи квадратик формаси билан устма-уст тушади. Акслантириш C ориентацияни сақланганлиги учун, $C(\Phi_1)$ ва Φ_2 сиртларнинг иккинчи квадратик формалари ҳам устма-уст тушишини кўрсатамиз. Уринма $\vec{a},\vec{b} \in T_p\Phi_1$ векторлар берилган ва $\vec{a}^* = C^*(\vec{a}), \vec{b}^* = C^*(\vec{b})$ бўлсин. $II_1(\vec{a},\vec{b}) = II^*(\vec{a}^*,\vec{b}^*)$ тенгликни кўрсатишимиз керак.

Бунинг учун,

$$L = (\vec{r}_{uu},\vec{n}_1) = (\vec{\rho}_{uu},\vec{n}), M = (\vec{r}_{uv},\vec{n}_1) = (\vec{\rho}_{uv},\vec{n})$$

ва $N = (\vec{r}_{vv},\vec{n}_1) = (\vec{\rho}_{vv},\vec{n})$ тенгликлари кўрсатамиз. Бу ерда $\vec{n}$ - $C(\Phi_1)$ сиртнинг нормал вектори. $\vec{\rho}(u,v) = C^*(\vec{r}(u,v))$ тенгликни дифференциаллаймиз ва $\vec{\rho}_u(u,v) = C^*(\vec{r}_u), \vec{\rho}_v = C^*(\vec{r}_v)$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Бундан ташқари $\vec{n} = \dfrac{[\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v]}{|[\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v]|} = C^*(\vec{n}_1)$ тенглик ҳам ўринли, чунки вектор кўпайтма ориентация сақловчи изометрияда сақланади. Юқоридаги тенгликни дифференциаллаб, $\vec{n} = C^*(\vec{n}_u^1)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Демак,

$$L = (\vec{r}_{uu},\vec{n}^1) = -(\vec{r}_u,\vec{n}_u) = -(\vec{\rho}_u,\vec{n}_u) = (\vec{\rho}_{uu},\vec{n})$$

бўлади. Худди шундай иккинчи квадратик форманинг бошқа коэффициентлари ҳам тенгдир. Натижада, Φ_2 сирт ва $C(\Phi_1)$ сиртларнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари тенглигини ҳосил қилдик. Демак,

$$\vec{\rho}(u\ ,v\ ),\quad \vec{r}_2(u\ ,v\ )$$

вектор функциялар деривацион формулаларга кўра битта хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасининг ечими бўлади. Бундан

$$\vec{\rho}(u_0,v_0) = \vec{r}_2(u_0,v_0)$$

тенгликка асосан $\vec{\rho}(u,v) = \vec{r}_2(u,v)$ келиб чиқади. Демак, $C(\Phi_1) = \Phi_2$ тенглик исботланди.

§ 11. Сиртларнинг ички геометрияси

Сиртнинг унда ётувчи чизиқлар узунлигига боғлиқ хоссалари унинг ички геометриясини ташкил қилади. сирт ички геометриясини ўрганишда геодезик чизиқлар муҳим роль ўйнайди. Сиртларда геодезик чизиқлар ўзларининг хоссалари бўйича текисликдаги тўғри чизиқларга яқин туради.

1. Геодезик чизиқлар

Регуляр Ф сирт ва унда ётувчи икки марта дифференциалланувчи параметрланган γ эгри чизиқ $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган бўлсин.

Таъриф. Параметр t нинг ҳар бир қийматида $\vec{\rho}''(t)$ вектор сиртнинг $\gamma(t)$ нуқтасидаги уринма текисликка перпендикуляр бўлса, бундай чизиқ геодезик чизиқ деб аталади. Бу ерда $\gamma(t)$ радиус вектори $\vec{\rho}(t)$ бўлган нуқта.

Теорема-18. Геодезик чизиқ $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган бўлса, унинг тезлик вектори $\vec{\rho}'(t)$ ўзгармас узунликка эга.

Исбот. Скаляр кўпайтма $(\vec{\rho}',\vec{\rho}')$ узунлик квадрати бўлганлиги учун уни дифференциаллаб унинг ҳосиласи нолга тенг эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $(\vec{\rho}',\vec{\rho}')'=2(\vec{\rho}'',\vec{\rho}')=0$. Демак, $|\vec{\rho}'(t)|=\sqrt{(\vec{\rho}',\vec{\rho}')}$ ўзгармасдир.

Теорема-19. Геодезик чизиқ $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган бўлиб, $s=s(t)$ дифференциалланувчи функция ёрдамида $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s)$ параметрланган чизиқ ҳосил бўлсин. Параметр алмаштирилгандан кейин чизиқ геодезик бўлиши учун $s=\alpha t+\beta$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. $s=s(t)$ формула параметрни алмаштириш формуласи бўлгани учун $s'(t)>0$ (ёки $s'(t)<0$) деб фараз қилишимиз мумкин. Агар $\rho_1=\rho_1(s)$ тенглама геодезик чизиқни аниқласа,

$$\vec{\rho}(t)=\vec{\rho}_1(s(t)),\vec{\rho}'(t)=\vec{\rho}_1's'(t),\vec{\rho}''(t)=\vec{\rho}_1''(s'(t))^2+\rho_1's''(t)$$

ва

$$0=(\vec{\rho}',\vec{\rho}'')=(s')^3(\vec{\rho}_1',\vec{\rho}_1'')+s's''(\vec{\rho}_1',\vec{\rho}_1')=s's''(\vec{\rho}_1',\vec{\rho}_1')$$

ни ҳосил қиламиз. $s'(t)>0$ бўлгани учун $s''=0$ ҳосил бўлади. Демак, $s(t)=\alpha t+\beta$.

Энди $s(t)=\alpha t+\beta$ деб фараз қилсак, $\vec{\rho}''(t)=\vec{\rho}_1''s'^2$ тенглик $\vec{\rho}_1''(t)$ ва $\vec{\rho}_1''$ векторларнинг коллинеар эканлигини кўрсатади.

Натижа. Ҳар қандай геодезик чизиқ табиий параметрга нисбатан ҳам геодезик чизиқ бўлади, чунки $s(t)$ ёй узунлиги учун

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\vec{\rho}'(t)|\,dt=\alpha(t-t_0)$$

тенглик ўринлидир.

Энди геодезик чизиқлар учун дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз. Регуляр Ф сиртнинг (f,G) параметрлаш усули $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ тенглама билан берилган бўлсин.

Агар геодезик чизиқнинг ички координаталардаги тенгламалари $u = u(t), v = v(t)$ кўринишда бўлса, 9-параграфдагидек $u_1 = u, u_2 = v$ белгилаш киритиб

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u_1(t), u_2(t)), \vec{\rho}'(t) = \vec{r}_{u_1} u_1' + \vec{r}_{u_2} u_2',$$

$$\vec{\rho}''(t) = \vec{r}_{u_1 u_2} (u_1')^2 + \vec{r}_{u_1} u_1'' + \vec{r}_{u_2 u_2} (u_2')^2 + \vec{r}_{u2} u''$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Энди $\vec{r}_{u_1 u_1}, \vec{r}_{u_1 u_2}, \vec{r}_{u_2 u_2}$ ифодалар учун деривацион формулаларни ишлатиб

$$\vec{\rho}''(t) = \sum_{k=1}^{2} (u_k'' + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k u_i' u_j') \vec{r}_{u_k} + \sum_{i,j=1}^{2} q_{ij} u_i' u_j' \vec{n}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Энди $\vec{\rho}''(t)$ векторнинг $\vec{n}$ векторга коллинеар эканлиги ва $\vec{r}_{u1}, \vec{r}_{u2}, \vec{n}$ векторларнинг чизиқли эркли эканлигидан

$$u_k'' + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k u_i' u_j' = 0, \ k = 1,2$$

келиб чиқади. Демак, $u = u_1(t), u = u_2(t)$ тенгламалар геодезик чизиқни аниқлаш учун $u_1(t), u_2(t)$ функциялар

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_1}{dt^2} + \sum\limits_{i,j} \Gamma_{ij} \dfrac{du_i}{dt} \dfrac{du_j}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2 u_2}{dt^2} + \sum\limits_{i,j} \Gamma_{ij} \dfrac{du_i}{dt} \dfrac{du_j}{dt} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

системанинг ечими бўлиши зарур ва етарлидир.

Теорема-20. Регуляр сиртнинг ҳар бир нуқтасидан ҳар бир йўналиш бўйича ягона геодезик чизиқ чиқади.

Исбот. Берилган $p(u_0, v_0) \in \Phi$ нуқта ва $\vec{a} \in T_p \Phi$ уринма вектор учун (1) системанинг

$$u_1(0) = u^0, u_2(0) = v_0, u_1'(0) = a_1, u_2'(0) = a_2$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $\vec{a}$ йўналиш бўйича геодезик чизиқни аниқлайди.

Геодезик чизиқларни характерловчи катталик, геодезик эгрилик тушунчасини киритамиз. Регуляр Ф сиртнинг р нуқтасидан ўтувчи γ эгри чизиқ берилган бўлсин. Чизиқнинг р нуқта атрофидаги қисмининг р нуқтадан ўтувчи уринма текисликка проекциясини γ_0 билан белгилаймиз. Табиийки, γ_0 ҳам силлиқ эгри чизиқ бўлади. Проекциялаш натижасида ҳосил бўлган γ_0 эгри чизиқнинг р нуқтадаги эгрилигини γ чизиқнинг геодезик эгрилиги деб атаймиз.

Бизнинг мақсадимиз, γ геодезик чизиқ бўлиши учун унинг геодезик эгрилиги нолга тенг бўлиши зарур ва етарли эканлигини кўрсатишдир. Бунинг учун γ_0 ва γ чизиқлар эгриликлари орасидаги боғланишларни топамиз. Аввало, γ чизиқ нуқталаридан (р нуқтадан ўтувчи) уринма текисликка перпендикуляр тўғри чизиқлар ўтказиб, цилиндрик сирт ҳосил қилиб, уни F билан белгилаймиз. Бу цилиндрик сиртни α текислик билан кесганимизда γ_0 ҳосил бўлади (α-Ф сиртнинг р нуқтадаги уринма текислиги). Демак, F цилиндр учун γ_0 нормал кесим ва унинг бош нормали F нинг нормалига коллинеардир. γ ва γ_0 чизиқлар умумий уринмаларга эга. Шунинг учун, цилиндрик сиртга нисбатан Менье теоремасидан фойдаланиб $k_0 =| k\cos\varphi |$тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда φ – γ_0 ва γ чизиқлар бош нормаллари орасидаги бурчакдир, k_0, k – мос равишда γ_0ва γ чизиқларнинг p нуқтадаги эгриликларидир. Энди γ чизиқни ёй узунлиги ёрдамида параметрлаб, унинг тенгламасини $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$кўринишда ёзамиз ва р нуқтага мос кесувчи параметрнинг қийматини s_0 билан белгилаймиз. Шунда $\vec{\tau} = \dot{\vec{\rho}}(s)$-уринма вектор, $\vec{v}(s_0)$-бош нормал вектори бўлса, $\vec{\tau}$-вектор γ_0 учун ҳам р нуқтадаги уринма вектор бўлиб, $[\vec{\tau},\vec{n}]$вектор γ_0 нинг бош нормали бўйлаб йўналган бўлади.

Шунинг учун

$$| k_0 |=| k\cos\varphi |=| (\ddot{\vec{\rho}},[\dot{\vec{\rho}},\vec{n}]) |=| \ddot{\vec{\rho}}\dot{\vec{\rho}}\vec{n} |$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан кўриниб турибдики, k_0=0 бўлиши учун бош нормал вектор сиртнинг нормал вектори $\vec{n}$ га коллинеар бўлиши зарур ва етарлидир. Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани исботладик.

Теорема-21. Сиртда ётувчи чизиқ геодезик чизиқ бўлиши учун унинг геодезик эгрилиги ҳар бир нуқтада нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Регуляр Ф сирт параметрланганда координата чизиқларининг бир оиласи геодезик чизиқлардан иборат бўлиб, ҳар бир нуқтада шу нуқтадан ўтувчи координата чизиқлари ўзаро ортогонал бўлса, бундай параметрлаш усули ярим геодезик параметрлаш усули деб аталади.

Теорема-22. Регуляр Ф сиртга тегишли ҳар бир нуқта атрофида унинг учун ярим геодезик параметрлаш усули мавжуддир.

Исбот. Сиртнинг р нуқта атрофидаги регуляр параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in G$$

тенглама ёрдамида берилган, $p(u_0, v_0)$ нуқтадан ўтувчи ва икки марта дифференциалланувчи γ чизиқ ички координаталарда

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \qquad a < t < b$$

тенгламалар ёрдамида аниқланган ва $u_0 = u(t_0), \upsilon_0 = \upsilon(t_0)$ бўлсин. Шунда γ нинг фазодаги вектор тенгламаси

$$\vec{\rho} = \vec{r}(u(t), v(t)) \qquad a < t < b$$

кўринишда бўлади. Ҳар бир t учун $\vec{\rho}'(t)$ векторга перпендикуляр бирлик уринма векторни $\vec{a}(t)$ билан белгилаймиз. Бундан ташқари $\vec{a}(t)$ векторни шундай танлаймизки, $\{\vec{\rho}'(t), \vec{a}(t)\}$ векторлар уринма фазода $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ векторлар билан бир хил ориентацияни аниқласин. Уринма фазода $\vec{a}(t)$ вектор, $a_1(t), a_2(t)$ координаталарга эга бўлса, $a_1(t), a_2(t)$, функциялар дифференциалланувчи функциялар бўлади. Ҳар бир t учун $Q(u(t), v(t))$ нуқтадан $\vec{a}(t)$ йўналиш бўйича чиқувчи геодезик чизиқни μ_t билан, унинг уринма векторини $\dot{\mu}_t$ билан белгилаймиз.

Ҳар бир t учун μ_t геодезик чизиқда табиий параметр киритсак, унинг ички координаталарда тенгламалари

$$\begin{matrix} u = u_t(s) \\ v = v_t(s) \end{matrix} \quad -\varepsilon(t) < s < \varepsilon(t)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $u_t(s)$, функциялар (1) дифференциал тенгламалар системасининг

$$u_t(0) = u(t), v_t(0) = v(t), \dot{u}_t(0) = a_1(t), \dot{v}_t(0) = a_2(t)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимидир. Энди шундай $\delta > 0, \varepsilon > 0$ сонларни топамизки, $|t_0 - t| < \delta$ бўлганда, $u_t(s), v_t(s)$ функциялар $(-\varepsilon, \varepsilon)$ оралиқда аниқлангандир. Бу ерда t_0 параметр t нинг p нуқтага мос келувчи қийматидир. Бунинг учун (1) дифференциал тенгламалар системасини ҳар бир фиксирланган t учун

$$\begin{cases} \dfrac{du_t}{ds} = q_1 \\ \dfrac{dv_t}{ds} = q_2 \\ \dfrac{dq_k}{ds} = -\sum \Gamma_{ij}^{k}(q_1, q_2) q_i q_j \quad 1 \le i, j, k \le 2 \end{cases} \qquad (2)$$

кўринишда ёзамиз. Бу ерда (u_t, v_t, q_1, q_2) ларни R^4 фазонинг нуқтаси сифатида қараймиз. Бошланғич шартлар, яъни $u_t(0), v_t(0), q_1(t,0) = q_1(t), \quad q_2(t,0) = q_2(t)$ функциялар t параметр (a,b) оралиқда ўзгарганда R^4 да силлиқ чизиқни аниқлайди.

Дифференциал тенгламалар системасининг ечими мавжудлиги ва ечимнинг бошланғич шартларига узлуксиз боғлиқлиги ҳақидаги теоремага асосан [4].

$$\mu_{t_0}(0) = \{u_{t_0}(0), v_{t_0}(0)\ \}, \qquad q_1(t_0) = a_1(t_0,0), q_2(t_0) = a_2(t_0,0)\} t_0$$

нуқтанинг шундай V атрофи ва шундай $\varepsilon > 0$ сони мавжудки, V атрофга тегишли ҳар бир нуқтадан чиқувчи ечим $-\varepsilon < s < \varepsilon$ оралиқда аниқланган. Агар биз $\delta > 0$ сонини шундай танласакки, $|t - t_0| < \delta$ бўлганида $\{u(t), v(t),\ a_1(t),\ a_2(t)\}$, нуқта V атрофга тегишли бўлсин. Демак, $|t - t_0| < \delta$ бўлганда $u_t(s)$, $v_t(s)$ функциялар $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ атрофда аниқланган. Энди сиртнинг р нуқта атрофидаги

$$\vec{r}(t,s) = \vec{r}(u_t(s),\ v_t(s))\ \ (t,s) \in G_\circ = \left\{ \begin{matrix} (t,s) : |t - t_0| < \delta \\ |s| < \varepsilon \end{matrix} \right\}$$

параметрлаш усулини қарайлик. Дифференциал тенгламалар системаси ечими бошланғич қийматларнинг дифференциалланувчи функцияси бўлганлиги учун $\vec{r}(t,s)$ дифференциалланувчи функциядир. Бундан ташқари $[\vec{r}_t, \vec{r}_s] \neq 0$ бўлганлиги учун $\vec{r} = \vec{r}(t,s)$ тенглама регуляр сиртнинг параметрлаш усулини аниқлайди. Энди унинг ярим геодезик параметрлаш усули эканлигини кўрсатайлик.

Ҳар бир t учун μ_t геодезик чизиқ бўлганлиги учун

$(\ddot{\vec{r}}_{ss}(t,s), \ddot{\vec{r}}'_t) = 0$ ва $(\dot{\vec{r}}_s, \dot{\vec{r}}_s) = 1$

тенгликлар ўринли. Лекин

$$(\ddot{\vec{r}}_{ss}, \dot{\vec{r}}_s) = \frac{d}{ds}(\dot{\vec{r}}_s, \vec{r}'_t) - (\dot{\vec{r}}_s, \vec{r}''_{ts}) =$$

$$= \frac{d}{ds} F(t,s) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_s, \dot{\vec{r}}_s) = \frac{d}{ds} F = 0$$

муносабатлардан ва F(t,o)=o тенгликдан F(t,s)=0 эканлиги келиб чиқади.

Энди геодезик чизиқларнинг яна бир муҳим хоссасини исботлайлик. Регуляр Ф сирт нуқта атрофидаги (f,G) параметрлаш усули $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ тенглама ёрдамида берилган бўлсин. Агар Ф сиртда γ геодезик чизиқ берилган бўлса, у ўзига тегишли етарли яқин ихтиёрий иккита нуқтани туташтирувчи энг қисқа чизиқ эканлигини исботлаймиз.

Умумийликни чегараламасдан γ геодезик чизиқ $p_0(u_0, v_0)$ нуқтадан ўтсин деб фараз қиламиз. $p_0(u_0, v_0)$ нуқтадан γ га перпендикуляр бирорта γ_0 чизиқ чиқарамиз ва $\gamma_\circ$ ёрдамида p_0 нуқта атрофида ярим геодезик координаталар системасини киритамиз. Демак, v=const чизиқлар геодезик чизиқлар бўлиб, улар $\gamma_\circ$ чизиққа перпендикуляр бўлади.

Бу координаталар системасида γ чизиқ $v = v_0$ тенглама ёрдамида аниқланади. Фараз қилайлик γ чизиқда ётувчи p ва q нуқталар p_0 нуқтанинг геодезик координаталар системаси киритилган атрофида ётсин. Ярим геодезик координаталар системаси киритилган p_0 нуқтанинг атрофини V(p_0) билан белгилаб, $\varepsilon > 0$ ни шундай танлаймизки,

$V_\varepsilon(p_0)$-доира V(p) нинг қисми бўлсин. Шунда p ва q нуқталар $\frac{V_\varepsilon}{2}(p_0)$га тегишли бўлса, γ чизиқнинг $\breve{pq}$ ёй узунлигидан кичик узунликка эга бўлган $\tilde{\gamma}$ чизиқ албатта V(p) да ётади. Ҳақиқатан $\tilde{\gamma}$ чизиқ V(p) да ётмаса, унинг $\frac{V_\varepsilon}{2}(p_0)$ доира чегарасини биринчи ва охирги марта кесишиш нуқталарини r ва s билан белгилаймиз. Шунда

$$|\breve{p_0p}|+|\breve{pr}|>\varepsilon, |\breve{p_0q}|+|\breve{qs}|>\varepsilon$$

муносабатлардан

$$|\breve{p_0p}|+|\breve{pr}|+|\breve{p_0r}+|\breve{qs}|>2\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Лекин иккинчи томондан

$$|\breve{pr}|+|\breve{qs}|<|\breve{p_0p}|+|\breve{p_0q}|<\varepsilon$$

қарама-қаршилик мавжуд. Демак $\tilde{\gamma}$ чизиқ V(p) да ётади. Унинг узунлигини ҳисобласак,

$$\ell(\tilde{\gamma})=\int\limits_p^q\sqrt{u'^2+Gv'^2}dt>\int\limits_p^q|u'|dt\geq u|_N-u|_M=|\breve{pq}|$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, бу қарама-қаршиликдан γ нинг $\breve{pq}$ ёйи энг қисқа ёй эканлиги келиб чиқади.

Мисоллар.

1. Ҳар қандай сиртда чизиқли параметрлаш усули билан берилган тўғри чизиқ геодезик чизиқдир. Бу ҳолда $\vec{\rho}(t)=\vec{a}t+\vec{s}$ бўлиб, бу ерда $\vec{a}$, $\vec{s}$ ўзгармас векторлардир. Шунинг учун $\vec{\rho}''(t)=0$ тенглик ўринли бўлади.
2. Регуляр Ф сирт сифатида ошкормас кўринишда берилган доиравий цилиндрни олайлик. Координаталар системаси қулай танланганда тенглама $x^2+y^2=R^2$ кўринишда бўлади. Бу цилиндрда

$$\begin{cases} x=R\cos(\alpha t+\beta) \\ y=R\sin(\alpha t+\beta) \\ z=at+\beta \end{cases}$$

тенглама билан берилган чизиқ геодезик чизиқ бўлади. Бу ерда

$$\vec{\rho}''(t)=\left\{-\alpha^2R\cos(\alpha t+\beta), -\alpha^2R\sin(\alpha t+\beta), 0\right\}$$

бўлиб, $gradF(x,y,z)=\{2x, 2y, 0\}$ векторга коллинеардир.

$F(x,y,z)=x^2+y-R^2$ функциянинг градиенти $F(x,y,z)=0$ сиртга ортогонал бўлганлиги учун $\vec{\rho}''(t)$ вектор ҳам уринма текисликка перпендикуляр бўлади. Агар $\alpha=0$ бўлса бу чизиқ цилиндрнинг ясовчиси бўлади, $a=0$ бўлса айлана ҳосил бўлади. Умумий ҳолда эса винт чизиғига айланади.

3. Икки ўлчамли S^2 сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ тенглама билан берилган бўлса, иккита ўзаро ортогонал $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ бирлик векторлар учун $\vec{\rho}(t)=R\cos t\vec{e}_1+R\sin t\vec{e}_2$ тенглама геодезик чизиқни аниқлайди. Ҳақиқатан $|\vec{\rho}(t)|=R$ бўлиб,

$$\vec{\rho}''(t)=-R\cos t\vec{e}_1-R\sin t\vec{e}_2=-\vec{\rho}(t)$$

бўлиб, $\vec{\rho}(t)$ радиус вектор, демак $\vec{\rho}(t)$ вектор ҳам сфера уринма текислигига перпендикуляр бўлади. Бу чизиқни ҳосил қилиш учун $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ векторларга параллел ва координата бошидан ўтувчи текислик билан сферани кесамиз. Демак, бу чизиқ сферадаги катта айланалардан бири-дир. Ҳар бир нуқтада ихтиёрий йўналиш бўйича битта катта айлана ўтганлиги учун сферада ҳар қандай геодезик чизиқ катта айлана ёки катта айлана ёйидан иборатдир.

4. Евклид фазоларида тўғри чизиқлар ва фақат тўғри чизиқлар геодезик чизиқлар бўлади.

§ 12. Векторларни параллел кўчириш

Евклид геометриясида текисликда ва фазода векторларни бир нуқтадан иккинчи нуқтага параллел кўчиришни биз яхши биламиз. Лекин сиртларда бир нуқтадаги уринма векторни иккинчи нуқтадаги уринма векторга параллел кўчиришда Евклид фазодаги параллел кўчиришдан фойдаланиб бўлмайди, чунки, битта нуқтадаги уринма вектор иккинчи нуқтада сиртга уринма вектор бўлмай қолиши мумкин. Шунинг учун сиртларда параллел кўчириш қоидасини бошқача йўл билан аниқлашга киришамиз. Аввало биз вектор майдонлар ва уларни ковариант дифференциаллаш тушунчаларини киритамиз.

1. Вектор майдонлар

Уч ўлчамли Евклид фазосининг бирорта очиқ G қисм тўплами берилган бўлсин. Агар G тўпламга тегишли ҳар бир p нуқтага битта X(p) вектор мос қўйилса, бу мослик вектор майдон деб аталади. Фазода 0xyz декарт координаталар системасини киритиб, X(p) векторни базис векторлар орқали ифодаласак

$$X(p)=X_1(p)\vec{i}+X_2(p)\vec{j}+X_3(p)\vec{k}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $X(p)$ векторнинг $X_1(p)$, $X_2(p)$, $X_3(p)$ координаталари p нуқтанинг функцияларидир. Демак, вектор майдон бериш учун

$$X_1(x,y,z),\quad X_2(x,y,z),\quad X_3(x,y,z)$$

функциялар кўрсатилиши етарлидир. Агар

$$X_1(x,y,z),\quad X_2(x,y,z),\quad X_3(x,y,z)$$

функциялар дифференциалланувчи функциялар бўлса,

$$X:(x,y,z)\to\{X_1(x,y,z),\ X_2(x,y,z),\ X_3(x,y,z)\}$$

вектор майдон силлиқ (ёки дифференциалланувчи) вектор майдон дейилади. Вектор майдон X учун

$$X_1(x,y,z),\quad X_2(x,y,z),\quad X_3(x,y,z)$$

функцияларни унинг координата функциялари деб атаймиз.

Таъриф. Бирорта $G\subset R^3$ соҳада X вектор майдон берилган бўлиб ва шу соҳада $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ тенглама билан аниқланган дифференциалланувчи γ чизиқ ҳам берилган бўлсин. Агар ҳар бир t учун $\vec{\rho}'(t)=X(\gamma(t))$ бўлса γ чизиқ X вектор майдоннинг интеграл чизиғи дейилади. Бу ерда $\gamma(t)$-чизиқнинг радиус-вектори $\vec{\rho}(t)$ бўлган нуқтаси.

Теорема-23. Силлиқ вектор майдон берилган соҳанинг ҳар бир нуқтасидан шу вектор майдоннинг ягона интеграл чизиғи ўтади.

Исбот. Вектор майдоннинг

$$X_1(x,y,z), X_2(x,y,z), X_3(x,y,z)$$

координата функциялари, $(x_0,y_0,z_0)\in G$ нуқта берилган бўлса

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=X_1(x,y,z)\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=X_2(x,y,z)\\ \dfrac{dz(t)}{dt}=X_3(x,y,z)\end{cases}\qquad(1)$$

дифференциал тенгламалар системасининг

$$x(0)=x_0, y(0)=y_0, z(0)=z_0$$

бошланғич шартларини қаноатлантирувчи $\{x(t),y(t),z(t)$ ечими (x_0,y_0,z_0) нуқтадан ўтувчи интеграл чизиқни аниқлайди.

Энди сиртларда берилган вектор майдонларни қарайлик. Регуляр Ф сиртнинг р нуқта атрофидаги (f,G) параметрлаш усули $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ тенглама билан берилган бўлсин. Агар Ф сиртга тегишли ҳар бир нуқтага шу нуқтадан чиқувчи вектор мос қўйилган бўлса, сиртда вектор майдон берилган дейилади. Агар вектор майдоннинг координата функциялари Ф сиртда аниқланган дифференциалланувчи функциялар бўлса, вектор майдон силлиқ вектор майдон дейилади. демак, $X=\{X_1,X_2,X_3\}$ вектор майдон р нуқта атрофида силлиқ бўлиши учун

$$X_1\cdot f:G\to R^3, X_2\cdot f:G\to R^3, X_3\cdot f:G\to R^3$$

функциялар дифференциалланувчи функциялар бўлиши лозим. Сиртда берилган X вектор майдонни $X(q)=X^{\tau}(q)+X^{n}(q)$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $X^{\tau}(q)$, $X^{n}(q)$ векторлар мос равишда $X(q)$ векторнинг q нуқтадан ўтувчи уринма текисликка ва нормалга проекцияларидир. Шундай қилиб, сиртга уринувчи $X^{\tau}: q \to X^{\tau}(q)$ ва сиртга перпендикуляр $X^{n}: q \to X^{n}(q)$ вектор майдонлар ҳосил бўлди. Агар X силлиқ вектор майдон бўлса, $X^{\tau}(q), X^{n}(q)$ вектор майдонлар ҳам силлиқ бўлади.

Буни исботлаш учун берилган р нуқта атрофида уларнинг силлиқ эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун X ни $X = X^{\tau} + \lambda(u,v)\vec{n}$ кўринишда ёзиб, бу тенгликни $\vec{n}$ векторга скаляр кўпайтириб $\lambda(u,v) = (X, \vec{n})$ муносабат ҳосил қиламиз. Бу ерда $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$.

Демак, $X^{n} = \lambda\vec{n}$, $X^{\tau} = X - \lambda\vec{n}$ тенгликлар ҳосил бўлади. Берилган X вектор майдон ва $\vec{n}$ силлиқ вектор майдонлар бўлганлиги учун $\lambda(u,v)$ дифференциалланувчи функциядир. Шунинг учун $X^{\tau}(q), X^{n}(q)$ лар ҳам силлиқ вектор функциялар бўлади.

Энди $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан параметрланган силлиқ γ чизиқ берилиб, ҳар бир t учун $\gamma(t)$ нуқтадан чиқувчи X(t) вектор мос қўйилса, γ чизиқда вектор майдон берилган дейилади. Берилган вектор майдоннинг координата функциялари дифференциалланувчи функциялар бўлса, у силлиқ вектор майдон дейилади. Агар

$$X(t) = \{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$$

силлиқ вектор майдон бўлса

$$\frac{dX}{dt} = \left\{\frac{dX_1}{dt}, \frac{dX_2}{dt}, \frac{dX_3}{dt}\right\}$$

вектор майдон X нинг γ чизиқ бўйлаб дифференциали деб аталади.

Энди γ чизиқ регуляр Ф сиртда ётувчи чизиқ бўлиб, γ да силлиқ вектор майдон X берилиб, ҳар бир t учун X(t) сиртнинг γ(t) нуқтасидаги уринма вектор бўлсин. Шунда вектор майдон $\dfrac{dX}{dt}$ сиртга уринма вектор майдон бўлиши шарт эмас. Лекин ҳар бир t учун

$$\frac{dX(t)}{dt} = \left[\frac{dX}{dt}(t)\right]^{\tau} + \left[\frac{dX}{dt}(t)\right]^{n}$$

тенгликни ёзсак, Ф сиртда $\left[\dfrac{dX(t)}{dt}\right]^{\tau}$ уринма вектор майдонни ҳосил қилади. Бу вектор майдон учун

$$\frac{Dx}{dt}(t)=\left[\frac{dX}{dt}(t)\right]^{\tau}$$

белгилаш киритиб, уни X нинг ковариант дифференциали деб атаймиз. Агар регуляр Ф сирт $p=\gamma(t_0)\in\Phi$ нуқта атрофида $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ тенглама билан берилган бўлса ҳар бир t учун

$$X(t)=\vec{r}_{u_1}(u_1(t),u_2(t))x^1(t)+\vec{r}_{n_2}(u_1(t),u_2(t))x^2(t)$$

тенгликни ёза оламиз. Бу ерда $u_1=u_1(t),u_2=v_2(t)$ функциялар γ нинг ички координаталардаги тенгламаларидир. $x^1(t),x^2(t)$ функциялар эса векторнинг $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ базисдаги координаталар бўлиб, улар t нинг дифференциалланувчи функцияларидир.

Энди

$$\frac{dX(t)}{dt}=\sum_{i,j=1}^{2}\vec{r}_{u_iu_j}(u_1(t),u_2(t))x^i(t)\frac{du_j}{dt}+\sum_{i=1}^{2}\vec{r}_{u_i}\frac{dx^i}{dt},$$

тенгликда $\vec{r}_{u_iu_j}=\Gamma_{ij}^k\vec{r}_k+q_{ij}\vec{n}$ деривацион формулалардан фойдаланиб

$$\frac{dX(t)}{dt}=\sum_{i,j,k}\Gamma_{ij}^k\vec{r}_{u_k}x^i\frac{du_j}{dt}+\sum_{i,j}q_{i,j}x^i\frac{du_j}{dt}\vec{n}+\sum_{k}\frac{dx^k}{dt}\vec{r}_{u_k}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ердан эса ковариант дифференциал учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$\frac{DX(t)}{dt}=\sum_{k}\left\{\frac{dx^k}{dt}+\sum_{ij}\Gamma_{ij}^k\frac{du_j}{dt}\right\}\vec{r}_{u_k}. \quad (2)$$

2. Векторларни параллел кўчириш

Регуляр Ф сиртнинг бир нуқтасидан иккинчи нуқтасига шу нуқталарни туташтирувчи бирорта чизиқ бўйлаб уринма векторни параллел кўчириш масаласини кўрайлик. Сиртда ётувчи γ чизиқ бўйлаб берилган X вектор майдон учун $\frac{DX}{dt}=0$ бўлса, X вектор майдон γ чизиқ бўйлаб параллел вектор майдон дейилади.

Таъриф. Ф сиртда p ва q нуқталарни туташтирувчи силлиқ γ чизиқ ва $\vec{a}\in T_p\Phi,\vec{b}\in T_q\Phi$ уринма векторлар берилган бўлсин. Агар γ чизиқ бўйича параллел X вектор майдон бўлиб, $X(t_1)=\vec{a},X(t_2)=\vec{b}$ тенгликлар бажарилса, $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ векторни γ чизиқ бўйлаб параллел кўчириш натижасида ҳосил қилинган дейилади. Бу ерда t_1, t_2 лар мос равишда параметрнинг p ва q нуқталарга мос келувчи қийматларидир.

Теорема-24. Регуляр Ф сиртда p ва q нуқталарни туташтирувчи силлиқ γ чизиқ $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилиб, $\gamma(t_1) = p, \gamma(t_2) = q$ бўлсин. Шунда ихтиёрий $\vec{a} \in T_p\Phi$ учун ягона $\vec{b} \in T_q\Phi$ вектор мавжуд бўлиб, у $\vec{a}$ ни γ чизиқ бўйлаб параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлади.

Исбот. Сиртнинг бирорта нуқта атрофида

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in G \qquad (3)$$

тенглама билан параметрласак, ички координаталарда $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)$ тенгламалар билан берилган γ чизиқ бўйлаб координата функциялари $X^1(t), X^2(t)$ бўлган X вектор майдон параллел бўлиши учун

$$\sum_k \left\{ \frac{dx^k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{du_j}{dt} \right\} \vec{r}_{u_k} = 0$$

бўлиши зарур ва етарлидир. Бу ерда $\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}$ векторларнинг чизиқли эркли эканлигини ҳисобга олсак

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} + \sum\limits_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dfrac{du_j}{dt} = 0 \\ \dfrac{dx^2}{dt} + \sum\limits_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dfrac{du_j}{dt} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Энди бевосита теорема исботига ўтайлик. Агар p,q нуқталарни туташтирувчи чизиқ Ф сиртнинг (3) тенглама билан параметрланган қисмида ётса, (4) дифференциал тенгламалар системасининг $x^1(0) = a_1, x^2(0) = a_2$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $\{x^1(t), x^2(t)\}$ бизга γ чизиқ бўйлаб параллел бўлган $X(t) = \vec{r}_{u_1} x^1 + \vec{r}_{u_2} x^2$ вектор майдонни беради. Бу ерда a_1, a_2 лар $\vec{a}$ векторнинг координаталари. Энди теорема тасдиғидаги b вектор сифатида $X(t_2)$ векторни оламиз. Агар p ва q нуқталарни туташтирувчи чизиқ γ сиртнинг бирорта параметрланган қисмида тўлиқ ётмаса, бу чизиқни чекли сондаги майда-майда бўлакларга шундай қилиб ажратамизки, ҳар бир бўлак сиртнинг бирорта параметрланган соҳасида ётади. Ҳар бир бўлакда юқоридагидек параллел вектор майдонни аниқласак, γ чизиқ бўйлаб параллел вектор майдонни ҳосил қиламиз.

Агар $\vec{b} = X(t_2)$ бўлса, у $\vec{a}$ векторни γ бўйлаб q нуқтага параллел кўчириш натижасидир.

Теорема-25. Сиртда ётувчи ихтиёрий чизиқ бўйича уринма векторларни параллел кўчириш операцияси скаляр кўпайтмани сақловчи чизиқли изоморфизмдир.

Исбот. Регуляр Ф сиртда $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан γ чизиқ берилиб, $\gamma(t_1) = p, \gamma(t_2) = q$ бўлсин. Агар $\vec{a}, \vec{b} \in T_p Ф$ уринма векторларни γ бўйлаб q нуқтага кўчириш натижасида $\vec{a}_1, \vec{b}_1$ векторлар ҳосил бўлса, бу чизиқ бўйлаб параллел X,Y вектор майдонлар мавжуд бўлиб,

$$X(t_1) = \vec{a}, X(t_2) = \vec{a}_1, Y(t_1) = \vec{b}, Y(t_2) = \vec{b}_1$$

тенгликлар бажарилади. Бу вектор майдонлар параллел бўлганлиги учун X+Y вектор майдон ва ихтиёрий λ ҳақиқий сон учун λX вектор майдон ҳам γ бўйлаб параллел бўлади, чунки

$$\frac{DX}{dt} = 0, \frac{DY}{dt} = 0$$

тенгликлардан

$$\frac{D(X+Y)}{dt} = 0, \frac{D(\lambda X)}{dt} = 0$$

муносабатлар келиб чиқади. Бу муносабатларни исботлаш учун

$$\frac{D(X+Y)}{dt} = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(X,Y) = \left(\frac{DX}{dt}, Y\right) + \left(X, \frac{DY}{dt}\right), \qquad \frac{D(fX)}{dt} = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$$

формулаларни исботлаймиз. Бу ерда f(t) дифференциалланувчи функция fX вектор майдон $fX(t) = f(t)X(t)$ қоида бўйича аниқланади.

Бу формулаларни исботлаш учун

$$\frac{d(X+Y)}{dt} = \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt}, \frac{d}{dt}(X,Y) = \left(\frac{dX}{dt}, Y\right) + \left(X, \frac{dY}{dt}\right), \frac{d(fX)}{dt} = \frac{df}{dt}X + f\frac{dX}{dt}$$

тенгликлардан фойдаланамиз. Учинчи формулани исботлайлик:

$$\frac{D(fx)}{dt} = \left[\frac{d(fX)}{dt}\right]^{\tau} = \left[\frac{df}{dt}(t)X(t)\right]^{\tau} + \left[f(t)\frac{dX}{dt}(t)\right]^{\tau} = \frac{df}{dt}X + f\frac{Dx}{dt}$$

Иккинчи формуланинг исботи

$$\left(\frac{dX}{dt}, Y\right) = \left(\left[\frac{dX}{dt}\right]^{\tau} + \left[\frac{dX}{dt}\right]^{n}, Y\right) = \left(\frac{DX}{dt}, Y\right),$$

$$\left(X, \frac{dY}{dt}\right) = \left(X, \left[\frac{dY}{dt}\right]^{\tau} + \left[\frac{dY}{dt}\right]^{n}\right) = \left(X, \frac{DY}{dt}\right)$$

тенгликлардан келиб чиқади. Энди теорема исботига қайтайлик. қуйидаги

$$(X+Y)(t_1)=X(t_1)+Y(t_1)=\vec{a}+\vec{b},$$

$$(X+Y)(t_2)=X(t_2)+Y(t_2)=\vec{a}_1+\vec{b}_1$$

$$\lambda X(t_1)=\lambda\vec{a}$$

муносабатлардан γ чизиқ бўйлаб параллел кўчириш операцияси $\gamma^{п}:T_p\Phi\to T_q\Phi$ уринма фазолар орасидаги чизиқли изоморфизм эканлиги келиб чиқади.

Энди $\gamma^{п}$ акслантиришда скаляр кўпайтманинг сақланишини кўрсатайлик.

$$\frac{d}{dt}(X(t),Y(t))=\left(\frac{DX(t)}{dt},Y(t)\right)+\left(X(t),\frac{DY(t)}{dt}\right)$$

тенгликда ҳар бир t учун

$$\frac{DX(t)}{dt}=0,\ \frac{DY(t)}{dt}=0$$

бўлганлиги учун $\dfrac{d}{dt}(X(t),Y(t))=0$ ни ҳосил қиламиз.

Демак, γ чизиқ бўйлаб $\gamma(t_1)$ нуқтадан $\gamma(t_2)$ нуқтага ҳаракат қилганимизда $(X(t),Y(t))$ скаляр кўпайтма ўзгармайди ва

$$(X(t_1),Y(t_1))=(X(t_2),Y(t_2))$$

тенглик ўринли бўлади.

Регуляр Ф сиртда ётувчи ва $\rho=\rho(t)$ тенглама билан аниқланган γ чизиқ геодезик чизиқ бўлиши учун унинг $\vec{\rho}'(t)$ уринма вектори γ бўйлаб параллел бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Уринма векторнинг ковариант дифференциалини ҳисобласак

$$\frac{D\vec{\rho}'_{(t)}}{dt}=\left[\frac{d}{dt}\vec{\rho}'_{(t)}\right]^{T}=\left[\vec{\rho}''_{(t)}\right]^{T}$$

муносабатини ҳосил қиламиз. Демак, γ геодезик чизиқ бўлиши учун $\dfrac{D\vec{\rho}'_{(t)}}{dt}=0$ бўлиши зарур ва етарлидир. □

Мисол. Доиравий цилиндр 0XYZ декарт координаталар системасида $x^2+y^2=R^2$ тенглама билан берилса, унда ётувчи

$$x=R\cos t,y=R\sin t,z=Rt$$

тенглама билан аниқланувчи винт чизиғи учун унинг

$$\vec{\rho}'_{(t)}=\{-R\sin t,R\cos t,R\}$$

уринма вектори шу чизиқ бўйлаб параллелдир, чунки

$$\vec{\rho}''_{(t)}=\{-R\cos t,-R\sin t,0\}$$

вектор уринма текисликка ортогонал ва демак $\dfrac{D\vec{\rho}'_{(t)}}{dt} = \left[\dfrac{d\vec{\rho}''_{(t)}}{dt}\right]^{T} = 0.$

Регуляр Φ_1 ва Φ_2 сиртлар учун $F:\Phi_1 \to \Phi_2$ дифференциалланувчи акслантиришлар берилиб, Φ_1 сиртда $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан аниқланган γ чизиқ бўйлаб сиртга уринувчи $X(t)$ вектор майдон берилган Φ_2 сиртда γ чизиқнинг образи $F(\gamma)$ силлиқ чизиқ бўлади, ва $F(\gamma)$ бўйлаб аниқланган $Y = dF(X)$ силлиқ вектор майдон ҳосил бўлади.

Теорема-26. Регуляр Φ_1, Φ_2 сиртлар учун $F:\Phi_1 \to \Phi_2$ изометрик акслантириш бўлса,

$$dF\left(\frac{DX}{dt}\right) = \frac{DY}{dt}$$

тенглик ўринлидир, яъни ковариант дифференциал изометрик акслантиришларга нисбатан нивариантдир.

Исбот. Ихтиёрий t_0 учун

$$dF_{(t_0)}\left(\frac{DX}{dt}(t_0)\right) = \frac{DY_{(t_0)}}{dt}$$

тенгликни исботлаш етарлидир. Фараз қилайлик, $\gamma(t_0)$ нуқта атрофида Φ_1 сирт $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ тенглама ёрдамида аниқланган ва γ чизиқ $u = u_1(t), v = u_2(t)$ тенгламалар билан берилган бўлсин. Энди Φ_2 сиртни $F(\gamma(t_0)) = Q$ нуқта атрофида $\vec{a} = \vec{a}(u,v)$ тенглама ёрдамида параметрлаймиз. Бу ерда $\vec{a}(u,v)$ вектор Φ_2 сиртнинг $F(P_{(u,v)})$ нуқтаси радиус-векторидир. Акслантириш F дифференциалланувчи бўлганлиги учун $\vec{a}(u,v)$ дифференциалланувчи вектор функциядир. Бу параметрлашда $F(\gamma)$ чизиқни $\vec{b}(t) = \vec{a}(u_1(t), u_2(t))$ тенглама билан параметрласак, $F(\gamma)$ чизиқнинг Φ_2 сирт ички координаталаридаги тенгламалари $u = u_1(t), v = u_2(t)$ кўринишда бўлади. Бизга маълумки, $dF(\gamma(t))(\vec{r}_{u_i}(t)) = \vec{a}_{u_i}(t)$ тенглик ўринли бўлади. Ундан ташқари биз биламизки, F изометрик акслантириш бўлганлиги учун Φ_1 ва Φ_2 сиртларнинг юқоридаги параметрлаш усуллари билан аниқланган биринчи квадратик формаларининг коэффициентлари мос равишда тенг бўлади; шунинг учун Кристофель символлари ҳам ўзаро тенг бўлади. Энди

$$\frac{DX(t)}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dx^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{du_j}{dt} \right\} \vec{r}_{u_k}$$

формуладан

$$\frac{DY}{dt}(t_0) = dF(\gamma(t_0))\left(\frac{DX}{dt}(t_0)\right)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Чунки X(t) уринма вектор учун $X(t) = \vec{r}_u x^1(t) + \vec{r}_v x^2(t)$ тенгликдан $Y(t) = \vec{a}_u x^1(t) + \vec{a}_v x^2(t)$ тенглик келиб чиқади.

Натижа. Теорема шартлари бажарилганда γ геодезик чизиқ бўлса, $F(\gamma)$ ҳам геодезик чизиқ бўлади ва аксинча.

§ 13. Гаусс-бонне теоремаси

Бу параграфда сиртда берилган ёпиқ чизиқ бўйлаб бирорта уринма векторни параллел кўчириб бошланғич нуқтага қайтганимизда, векторнинг бошланғич ва охирги ҳолатлари орасидаги бурчак билан сиртнинг тўлиқ эгрилиги орасидаги муносабатни топмоқчимиз.

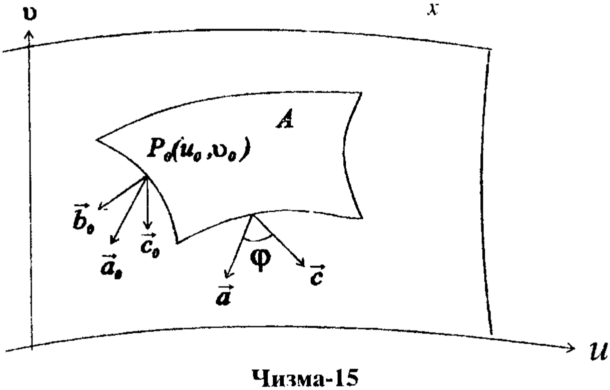
Фараз қилайлик, регуляр Ф сирт

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \qquad (u, v) \in G$$

тенглама ёрдамида параметрланган бўлсин. Фазода

$$\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$$

векторлар ёрдамида ориентацияни аниқлаб, сиртда $\vec{r}_u$ вектордан $\vec{r}_v$ векторга бурилишни мусбат бурилиш деб ҳисоблаймиз.



Чизма-15

Сиртда чегараси бир нечта $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots\ldots \gamma_m$ силлиқ чизиқлардан иборат бўлган бир боғланишли А соҳа қараб, унинг чегарасини Г билан белгилайлик. Бу соҳанинг чегарасида бирорта $p(u_0, v_0)$ нуқта ва битта сиртга уринма $\vec{a}_0$ вектор берилган бўлсин. Мусбат йўналиш бўйича $\vec{a}_0$

векторни Г чизиқ бўйлаб параллел кўчириб яна $p(u_0,v_0)$ га қайтсак. $\vec{a}_0$ ни параллел кўчириш натижасида $\vec{b}_0$ векторни ҳосил қиламиз. Бу векторлар орасидаги бурчак $\Delta\varphi$ билан белгилаб уни ҳисоблашга киришамиз. Бунинг учун Ф сиртда бирлик $\vec{c}$ уринма вектор майдонни қараймиз ва $\vec{c}_0=\vec{c}(u_0,v_0)$ белгилаш киритиб, φ_0 билан $\vec{a}_0$ ва $\vec{c}_0$ векторлар орасидаги бурчакни белгилаймиз. Соҳанинг чегараси Г чизиқнинг ҳар бир нуқтасида $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ векторлар орасидаги бурчакни φ билан белгиласак, $\varphi(u_0,v_0)=\varphi_0$ бўлади. Энди параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлган $\vec{b}_0$ вектор билан $\vec{c}_0$ орасидаги бурчакни φ_1 деб белгиласак, $\varphi_1=\varphi_0+\Delta\varphi$ тенгликни ҳосил қиламиз. Чунки, биз мусбат йўналиш бўйича ҳаракат қилганимиз учун бурчак ортиб боради.

Шунинг учун $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_0$ бўлиб, у соҳанинг чегарасини бир марта айланиб чиқишда ҳосил бўлган бурчак орттирмасига тенг бўлиб, уни

$$\Delta\varphi=\oint d\varphi \qquad (1)$$

кўринишда ёза оламиз. Ҳисоб китоб қулайлиги учун $|\vec{a}_0|=1$ деб ҳисобласак, Г нинг ҳамма нуқталарида $|\vec{a}|=1$ бўлади. Энди φ бурчакнинг дифференциали $d\varphi$ ни ҳисоблаш учун $(\vec{a},\vec{c})=\cos\varphi$ тенгликдан фойдаланамиз. Бу тенгликни дифференциаллаб

$$(d\vec{a},\vec{c})+(\vec{a},d\vec{c})=-\sin\varphi d\varphi$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Уринма $\vec{a}$ вектор Г чизиқ бўйлаб, $\vec{a}_0$ векторни параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлганлиги учун $d\vec{a}$ векторнинг уринма текисликка проекцияси ноль векторга тенг бўлади, демак, $(d\vec{a},\vec{c})=0$ ва $-\sin\varphi d\varphi=(\vec{a},d\vec{c})$ тенглик ҳосил бўлади.

Бурчак дифференциали $d\varphi$ ни ҳисоблашда яна бир нарсани ҳисобга олишимиз зарур. Агар $\vec{a}_0$ векторни бошқа бирлик $\vec{g}_0$ вектор билан алмаштириб, α_0 билан $\vec{a}_0,\vec{g}_0$ векторлар орасидаги бурчакни белгиласак, унда уларни Г чизиқ бўйлаб параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлган $\vec{a},\vec{g}$ векторлар орасидаги бурчак ҳам α_0 га тенг бўлади. Шунинг учун, агар ψ билан $\vec{c},\vec{g}$ векторлар орасидаги бурчакни белгиласак, $\psi=\varphi\pm\alpha_0$ бўлади ва демак $d\psi=d\varphi$ тенглик ўринлидир.

Энди сиртнинг ҳар бир нуқтасида $\vec{c}$ га перпендикуляр бўлган $\vec{p}$ векторни шундай танлаймизки, ҳар бир нуқтада $\{\vec{c},\vec{p},\vec{n}\}$ векторлар оиласи ўнг системани ҳосил қилсин.

Мисол учун, бундай векторни ҳамма нуқталарда $\vec{c}$ векторни уринма текисликда $+90^0$ га буриб ҳосил қилиш мумкин. Соҳа чегарасига тегишли q нуқтани олиб, бу нуқтадаги $\vec{p}$ векторни M_0 нуқтага параллел кўчириб $\vec{p}_q$ билан белгилаймиз. Энди параллел кўчирилиши лозим бўлган $\vec{a}_0$ вектор ўрнига $\vec{p}_q$ векторни Г чизиқ бўйлаб параллел кўчирамиз ва натижада Г нинг ҳамма нуқталарида берилган векторни $\vec{p}_{\Pi}$ билан белгилаймиз. Агар ψ бурчак $\vec{c}$ ва $\vec{p}_{\Pi}$ орасидаги бурчак бўлса, q нуқтада $\vec{p}_{\Pi}$ вектор $\vec{p}$ вектор билан устма-уст тушганлиги учун бу нуқтада $\psi_q = \frac{\pi}{2}$ бўлади ва демак

$$d\psi_{q(q)} = -(\vec{p}, d\vec{c}) \qquad (2)$$

тенглик ўринли бўлади.

Биз q нуқтани ихтиёрий танлаганимиз учун бу ишни ҳамма q лар учун такрорлаб, (2) тенгликни ҳосил қиламиз. Энди $d\varphi$ нинг ихтиёрий q нуқтадаги қийматини ҳисоблаш учун $d\varphi = d\psi_q$ тенгликдан фойдаланамиз ва натижада

$$d\varphi(q) = d\psi_q(q) = -(\vec{p}, d\vec{c}) \qquad (3)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула биз учун муҳим аҳамиятга эга, чунки $(\vec{p}, d\vec{c})$ скаляр кўпайтмани ҳисоблай оламиз.

Энди биз $(\vec{p}, d\vec{c})$ скаляр кўпайтмани ҳисоблашга киришамиз. Бунинг учун $d\vec{c} = \vec{c}_u du + \vec{c}_v dv$ тенгликни ва (3) ни ҳисобга олиб (1) ни $\Delta\varphi = -\oint\limits_{\Gamma}\{(\vec{p}, \vec{c}_u)du + (\vec{p}, c_v)dv\}$ кўринишда ёзамиз.

Биз

$$\oint\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy) = \iint\limits_{A}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

формуладан фойдаланиб

$$\Delta\varphi = \iint\limits_{A}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\vec{p}, c_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{P}, c_u)\right\}dudv = -\iint\limits_{A}\{(\vec{c}_v, \vec{p}_u) - (\vec{c}_u, \vec{p}_v)\}dudv$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \vec{n}\,|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ ва $[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = K[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ тенгликлардан $[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = K\,|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,\vec{n}$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда K сиртнинг Гаусс эгрилигидир. Бу тенгликдан $(\vec{c}_v, \vec{p}_u) - (\vec{c}_u, \vec{p}_v)$ ифодани ҳисоблашда фойдаланамиз. Бунинг учун

$$\vec{c}_u = c_1^1\vec{c} + c_1^2\vec{p} + c_1^3\vec{n},\ \ \vec{c}_v = c_2^1\vec{c} + c_2^2\vec{p} + c_2^3\vec{n}$$

$$\vec{p}_u = p_1^1\vec{c} + p_1^2 p + p_1^3\vec{n},\ \ \vec{p}_v = p_2^1\vec{c} + p_2^2\vec{p} + p_2^3\vec{n}$$

ифодалардан фойдаланамиз. Лекин $\vec{c}$ ва $\vec{p}$ бирлик векторлар бўлгани учун

$$(\vec{c}, \vec{c}_u) = (\vec{c}, \vec{c}_v) = 0, (\vec{p}, \vec{p}_u) = (\vec{p}, \vec{p}_v) = 0$$

тенгликлар ўринли. Демак, $c_1^1 = c_2^1 = p_1^1 = p_2^2 = 0$ бўлади. Хуллас

$$\vec{c}_u = c_1^2 p + c_1^3 \vec{n} \quad \vec{c}_v = c_2^2 \vec{p} + c_2^3 \vec{n}$$

$$\vec{p}_u = p_1^1 \vec{c} + p_2^3 \vec{n}, \ \vec{p}_v = p_2^1 \vec{c} + p_2^3 \vec{n}$$

тенгликларни ҳисобга олиб

$$(\vec{c}_v \cdot \vec{p}_u) - (\vec{c}_u, \vec{p}_v) = c_2^3 p_2^3 - c_1^3 p_2^3$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди

$$\vec{n}_u = N_1^1 \vec{c} + N_1^2 \vec{p}, \vec{n}_v = N_2^1 c + N_2^2 \vec{p}$$

ёйилмалардан

$$[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = N_1^1 N_2^2 [\vec{c}, \vec{p}] + N_1^2 N_2^1 [\vec{p}, \vec{c}] = N_1^1 N_2^2 \vec{n} - N_1^2 N_2^1 \vec{n} =$$

$$= (N_1^1 N_2^2 - N_1^2 N_2^1)\vec{n}$$

тенгликни ёзиш мумкин. Лекин $\vec{n} = [\vec{c}, \vec{p}]$ ва

$$\vec{n}_u = [\vec{c}_u, \vec{p}] + [\vec{c}, \vec{p}_u] \quad \vec{n}_v = [\vec{c}_v, \vec{p}] + [\vec{c}, \vec{p}_v]$$

тенгликни ҳисобга олиб $[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = (c_1^3 p_2^3 - c_2^3 p_2^3)\vec{n}$ муносабатни ҳосил қиламиз. Демак,

$$(c_1^2 p_2^3 - c_1^3 p_2^3)\vec{n} = K \mid [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \mid \vec{n}$$

тенглик ва натижада эса

$$c_1^2 p_2^3 - c_1^3 p_2^3 = K\sqrt{EG - F^2}$$

тенглик ўринли бўлади. Шунда

$$\Delta\varphi = \iint K\sqrt{EG - F^2}\,dudv \quad (4)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди юқоридаги (4) формуладан фойдаланиб Гаусс-Бонне теоремасини исботлайлик. Бунинг учун А соҳани чегараловчи Г чизиқ бир нечта силлиқ чизиқлардан иборат эканлигини эслатиб ўтамиз. Демак, бу чизиқнинг уринма вектори $\vec{\tau}$ аниқланган бўлиб, Гни айланиб чиқиш давомида у силлиқ чизиқларнинг туташ нуқталарида функция сифатида узилишга эга бўлади, яъни унинг йўналиши сакраб ўзгаради. Соҳанинг чегараси Г чизиқ бўйлаб параллел кўчирилаётган $\vec{a}$ вектор билан $\vec{\tau}$ вектор орасидаги бурчакни ψ билан, $\vec{c}$ вектор ва $\vec{a}$ вектор орасидаги бурчакни юқоридагидек φ билан белгиласак, $\vec{c}$ ва $\vec{\tau}$ векторлар орасидаги бурчак μ учун $\mu = \varphi + \psi$ тенглик ўринли бўлади. Биз Г чизиқни бир марта айланиб чиқсак,

$$\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}(u_0, v_0), \vec{c}_0 = \vec{c}(u_0, v_0)$$

векторлар яна ўз вазиятига қайтади. Демак, μ бурчакнинг орттирмаси $2\pi k$ га тенг бўлиши керак. Аслида эса бу орттирма 2π га тенгдир. Чунки А соҳа доирага ва чегараси эса айланага гомеоморфдир.

Демак, $\Delta\mu = 2\pi$ ёки $\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi$. Параллел кўчирилаётган $\vec{a}$ вектор ва чизиқнинг уринма вектори $\vec{\tau}$ орасидаги бурчак орттирмаси учун

$$\Delta\psi = \oint d\psi + \sum_{i=1}^{n}\Delta\psi_i$$

ўринли бўлади.

Бу ерда $\Delta\psi_i$ $i-$ чи туташиш нуқтасидаги бурчак орттирмасидир. Энди $d\psi$ ни ҳисоблаш учун $d\psi = -(\vec{b}, d\vec{\tau})$ тенгликдан фойдаланамиз. Бу ерда $\vec{b}$ вектор сифатида $\vec{\tau}$ ни сиртнинг уринма текислигида $+90^0$га буриб ҳосил қилинган векторни қабул қиламиз. Энди $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{m}$ тенгликни ҳисобга олиб $\frac{d\psi}{ds} = k(\vec{b}, \vec{m})$ формулани ҳосил қиламиз. Бу ерда $\vec{m}$ чизиқнинг бош нормалидир. Шунда $(\vec{b}, \vec{m})$ скаляр кўпайтма $\vec{m} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}$ векторнинг уринма текисликдаги проекцияси эканлигидан ва чизиқнинг эгрилиги $\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$га тенглигидан $\frac{d\psi}{ds} = k_g$ тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу ерда k_g-чизиқнинг геодезик эгрилигидир. Энди буларни ҳисобга олиб $\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi$ тенгликни

$$\iint\limits_A K\sqrt{EG - F^2}dudv + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\gamma_i} K_g ds + \sum_{i=1}^{n}\Delta\psi_i = 2\pi \qquad (5)$$

кўринишда ёзамиз. Ҳосил бўлган формула Гаусс-Бонне теоремаси деб аталади. Энди

$$\iint\limits_A \sqrt{EG - F^2}dudv$$

интеграл А соҳанинг юзасига тенг эканлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун аввало соҳа юзаси тушунчасини киритамиз. Сиртдаги А соҳани кичкина соҳачаларга ажратиб, ҳар бир кичкина соҳачанинг чегараси ёпиқ чизиқ бўлиб, бу ёпиқ чизиқ чекли сондаги силлиқ чизиқлардан иборат бўлишини талаб қиламиз. Бу кичкина соҳачаларни a билан белгилайлик. Энди ҳар бир a соҳадан биттадан P_a нуқта олиб, шу нуқтадан сиртга уринма текислик ўтказамиз. Кичкина a соҳачалар шунчалик кичик бўлиши керакки, a соҳани P_a нуқтадан ўтадиган уринма текисликка проекциялаш ўзаро бир қийматли мослик бўлиши керак. Уринма текисликдаги a соҳанинг проекциясини a_n билан унинг юзасини $S(a_n)$ билан белгилаймиз.

$\sum\limits_{a} S(a_n)$ ифоданинг соҳалар сони чексизликка интилгандаги лимитини А соҳанинг юзаси деб атаймиз ва S(A) билан белгилаймиз. Энди $S(A)$ ни ҳисоблашга киришамиз. Бунинг учун ҳар бир a учун $S(a_n)$ни ҳисоблаймиз. Агар P_a нуқтани координата боши сифатида қабул қилиб, Z ўқини шу нуқтадаги нормал бўйича йўналтирсак, XY текислиги P_a нуқтадаги уринма текислик билан устма-уст тушади. Бу координаталар системасида $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ тенгликлар a_n соҳача билан G соҳадаги бирорта $\tilde{a}_n$ соҳача ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади. Агар

$$\vec{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$$

бўлса,

$$z_u(u_0,v_0) = 0, z_v(u_0,v_0) = 0$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу ерда u_0, v_0 сиртда P_a нуқтанинг ички координаталаридир. Бундан ташқари, $[r_u, \vec{r}_v] \neq 0$ ва

$$[r_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0,v_0)] = \left\{0,0, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\right\}$$

тенгликлардан

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

муносабат келиб чиқади. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлгани учун

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

детерминант $p_a(u_0,v_0)$ нуқтага етарли яқин нуқталарда ҳам нолдан фарқли бўлади. Фараз қилайлик $\sigma_a > 0$ сон учун $|u - u_0| < \sigma_a, |v - v_0| < \sigma_a$ тенгсизликлар бажарилганда юқоридаги детерминант нолдан фарқли бўлиб, сиртнинг

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in \{(u,v) : |u-u_0| < \sigma, |v-v_0| < \sigma\} \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланган қисми a соҳани ўз ичига олсин. Шунда

$$\begin{cases} x = x(u,v), x(u_0,v_0) = 0 \\ y = y(u,v), x(u_0,v_0) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан ошкормас функция ҳақидаги теоремага асосан дифференциалланувчи $u = u(x,y), v = v(x,y)$ функциялар мавжуд бўлади. Шунда a соҳани уринма текисликка проекциялаш $(x,y,z) \to (x,y)$ формула орқали ифодаланганн учун $u = u(x,y), v = v(x,y)$ функциялар a_n соҳачани G соҳадаги $\tilde{a}_n$ соҳачага гомеоморф акслантиради. Демак, a_n соҳача юзасини ҳисоблаш учун каррали интегралдан фойдаланиб $S(a_n) = \iint\limits_{a_n} dxdy$ кўринишда ёзсак, уни $x = x(u,v), y = y(u,v)$ алмаштиришдан кейин

$$S(a_n) = \iint\limits_{\tilde{a}_n} abs\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} dudv$$

кўринишда ёза оламиз.

Бу ерда

$$abs\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

билан $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ детерминантнинг абсолют қиймати белгиланган. Энди

P_a нуқтада

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = abs\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

тенглик ўринли бўлгани ва $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ функциянинг узлуксизлигидан ҳар бир $(u,v) \in a_n$ нуқта учун

$$abs\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| + \varepsilon_a(u,v)$$

тенгликни ёза оламиз. Бу ерда $\varepsilon_a(u,v)$ етарли кичик миқдор бўлиб, a кичиклашганда у нолга интилади.

Юқоридагиларни ҳисобга олиб

$$\sum_a S(a_n) = \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \left(|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| + \varepsilon_a(u,v) \right) dudv = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \, dudv + \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \varepsilon_a(u,v) dudv$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\tilde{A}$ билан G соҳадаги А соҳага мос келувчи соҳа белгиланган.

Шундай қилиб,

$$\sum_a S(a_n) = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \, dudv + \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \varepsilon_a(u,v) dudv \qquad (6)$$

тенгликни ҳосил қилдик. Бу тенгликда a соҳачаларни етарли кичик қилиш ҳисобига бирорта $\varepsilon > 0$ учун $\varepsilon_a(u,v) < \varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилишини таъминлаймиз. Натижада

$$\left| \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \varepsilon_a(u,v) dudv \right| < \varepsilon \sum_a S(\tilde{a}_n) = \varepsilon S(\tilde{A})$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Энди (6) тенгликда A соҳачалар сонини чексизликка интилтириб лимитга ўтсак

$$\lim \sum_a S(\tilde{a}_n) = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \, dudv$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак,

$$S(A) = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \, dudv$$

формулани ҳосил қилдик. Бу ерда

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$$

тенгликдан фойдалансак

$$S(A) = \iint_{\tilde{A}} \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

формулани ҳосил қиламиз. Энди

$$ds = \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

белгилаш киритсак Гаусс-Бонне теоремасини

$$\iint_{\tilde{A}} K ds + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} K g ds + \sum_{i=1}^{n} \Delta \psi_i = 2\pi$$

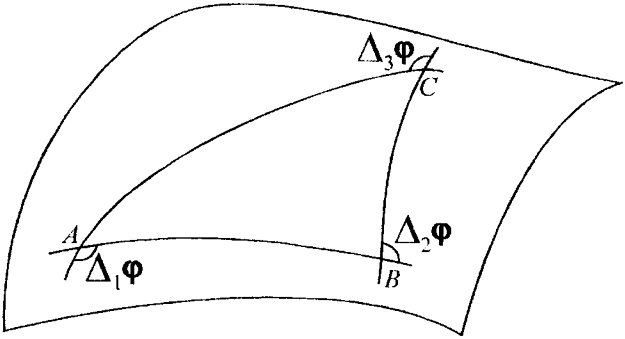
кўринишда ёзиб олиш мумкин. Энди Гаусс-Бонне теоремасини А соҳа учта $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ геодезик чизиқлар билан чегараланган ҳолни кўрайлик. Геодезик чизиқлар учун $Kg = 0$ бўлганлигидан Гаусс-Бонне теоремасига кўра

$$\iint_{\tilde{A}} K ds + \sum_{i=1}^{3} \Delta \psi_i = 2\pi$$

кўринишга келади. Бу ҳолда А соҳа геодезик учбурчак бўлиб, унинг ички бурчаклари α_i лар учун $\alpha_i = \pi - \Delta\psi_i$ ўринли бўлади. Шунинг учун юқоридаги формула

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_A K ds$$

кўринишга келади. Бу ерда K=0 бўлса (мисол учун Ф сирт текислик бўлса) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ тенгликни ҳосил қиламиз.



Чизма-16

§ 14. Эгрилиги ўзгармас сиртлар

Сиртнинг Гаусс эгрилиги ҳамма нуқталарда битта ўзгармас сонга тенг бўлса, бундай сиртни эгрилиги ўзгармас сирт деб атаймиз. Мисол учун текисликнинг ҳамма нуқталарида Гаусс эгрилиги нолга тенг бўлади.

Биз Гаусс эгрилиги ўзгармас сиртларда Гаусс-Бонне теоремасини геодезик учбурчак учун ёзсак

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + KS(A)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $S(A)$-геодезик учбурчак юзаси, K-сиртнинг Гаусс эгрилиги. Текислик учун K=0 ва демак $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^0$. OXYZ-декарт координаталри киритилган фазода

$$S_R^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

сферанинг Гаусс эгрилиги ўзгармас ва ҳамма нуқталарда $K = \frac{1}{R^2}$ бўлади. Шунинг учун сферада геодезик учбурчак ички бурчакларнинг йиғиндиси 180^0 дан катта бўлади.

Энди Гаусс эгрилиги ўзгармас манфий сон бўлган сиртга мисол келтирайлик. Бунинг учун OXZ текислигида

$$\begin{cases} x = R\sin u \\ z = R(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u), \ \frac{\pi}{2} < u < \pi, R > 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

тенглама ёрдамида параметрланган эгри чизиқни OZ ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртни қарайлик.

Бу сиртнинг параметрик тенгламалари

$$\begin{cases} x = R\sin u\cos v & \frac{\pi}{2} < u < \pi \\ y = R\sin u\sin v & \\ z = R(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u) & 0 < v < 2\pi \end{cases}$$

кўринишда бўлади. Биринчи ва иккинчи квадратик формалар коэффициентларини ҳисоблаш натижасида

$$E = R^2ctg^2u, F = 0, G = R^2\sin^2 u, L = -Rctgu, M = 0, N = Rctgu\sin^2 u$$

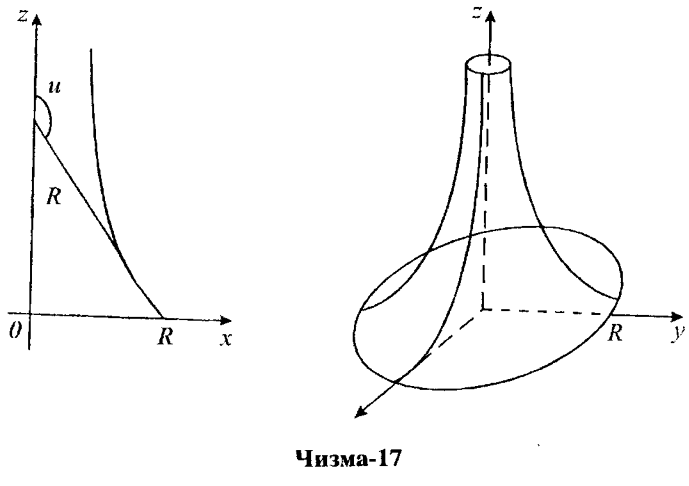
ифодаларни топамиз. Гаусс эгрилигини

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

формуладан фойдаланиб ҳисобласак

$$K = \frac{-R^2ctg^2u\sin^2 u}{R^2ctg^2uR^2\sin^2 u} = -\frac{1}{R^2}$$

натижасини оламиз. Бу сирт псевдосфера ёки Бельтрами сирти деб аталади. Гаусс-Бонне теоремасига кўра бу сиртда геодезик учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180^0 дан кичик бўлади.



Чизма-17

Энди регуляр Ф сиртнинг ярим геодезик параметрлаш усули $\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in G$ тенглама билан берилган бўлсин. Бу ҳолда $E=1, F=0$ бўлишини биламиз. Демак бу ҳолда Гаусс эгрилигини G орқали ифодалаш мумкин. Гаусс эгрилигини G орқали ифодасининг соддалаштириш учун Γ_{ij}^k Кристоффел символларини ҳисоблаймиз. Бу ҳолда

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Гаусс тенгламасини g_{ms} га кўпайтириб m индекс бўйича йиғсак

$$\sum_m g_{ms}\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma_{ij}^m - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma_{ik}^m + \sum_l \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m\right) = \sum_{l,m}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm}g_{ms}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонини

$$\sum_{l,m}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm}g_{ms} = \sum_l (q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})\sigma_s^l =$$

$$\sum_l (q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})\sigma_s^l = q_{ij}q_{ks} - q_{ik}q_{js}$$

кўринишга олиб келиб, $i=j=1, k=s=2$ қўйсак юқоридаги тенгликдан

$$q_{11}q_{22} - q_{12}^2 = \sum_m g_{m2}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{11}^m - \frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{12}^m + \sum_l \Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^m - \sum_l \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^m\right)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $u^1 = u, u^2 = v, \{g_{ij}\}$ биринчи квадратик форма матрицаси, $\{q_{ij}\}$-иккинчи квадратик форма матрицасидир. Энди

$$K = \frac{q_{11}q_{22} - q_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

формулада $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = G$ ва $q_{11}q_{22} - q_{12}^2$ учун юқоридаги формуладан фойдалансак

$$K = \frac{1}{4G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Бундан ташқари

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}$$

ва

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}=\frac{1}{2\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}-\frac{1}{4\sqrt{G^3}}\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2$$

тенгликларни ҳисобга олсак

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу тенгликни

$$\sqrt{G}K+\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Биз ярим геодезик параметрлаш усулини киритиш учун $u^1=0$ тенглама билан аниқланган чизиққа ортогонал геодезик чизиқларни $(v=const)$ киритган эдик. Агар биз $u_1=0$ чизиқнинг ёй узунлиги ёрдамида параметрланган геодезик чизиқ бўлишини талаб қилсак

$$1=\sqrt{(\vec{r}_v(0,v),\vec{r}_v(0,v))}=\sqrt{G(0,v)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан ташқари $u_1=0,u_2=t$ ифодаларни геодезик чизиқ тенгламаларига қўйиб

$$\Gamma_{22}^1(0,v)=0,\Gamma_{22}^2(0,v)=0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\frac{\partial G(0,v)}{\partial u}=0$$

ёки

$$\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G(0,v)}=0.$$

Энди K ни ўзгармас сонга тенг деб ҳисоблаб,

$$\sqrt{G}K+\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=0$$

тенгликни $\sqrt{G}$ га нисбатан хусусий ҳосилали дифференциал тенглама сифатида қараймиз. Бошланғич шартлар

$$\sqrt{G(0,v)}=1,\frac{\partial\sqrt{G(0,v)}}{\partial u}=0$$

тенгликлардан иборат бўлади. Бу тенгламада K=0 бўлса, $G(u,v)=1$ бўлиб, сирт текисликка локал изометрик бўлади. Агар K>0 бўлса, бу тенглама ечими $\sqrt{G(u,v)}=\cos\sqrt{K}u$ кўринишда бўлади. Демак бу ҳолда

$$E=1,F=0,G(u,v)=\cos^2\sqrt{K}u$$

бўлади.

Агар K<0 бўлса, бу тенглама ечими $\sqrt{G}=ch\sqrt{-K}u$ кўринишда бўлади.

Теорема. Регуляр Ф сирт ўзгармас К Гаусс эгрилигига эга бўлса:
1)K=0 бўлганда у текисликка локал изометрикдир.

2)K>0 бўлганда у радиуси $\frac{1}{\sqrt{K}}$ га тенг бўлган сферага локал изометрикдир.

3)K<0 бўлса, сирт параметри $l=\frac{1}{\sqrt{-K}}$ га тенг бўлган Бельтрами сиртига локал изометрикдир.

Исбот. Регуляр Φ_1 ва Φ_2 сиртлар ўзгармас К сонига тенг бўлган Гаусс эгрилигига эга бўлсин. Бу сиртларга тегишли p_1 ва p_2 нуқталардан ўтувчи γ_1 ва γ_2 геодезик чизиқларни қарайлик. Бу нуқталар атрофида Φ_1 ва Φ_2 сиртларнинг регуляр параметрлаш усуллари мос равишда

$$\vec{r}=\vec{r}^{\,1}(u,v)$$

$$\vec{r}=\vec{r}^{\,2}(u,v),\quad (u,v)\in G$$

тенгламалар ёрдамида берилган бўлсин. Геодезик чизиқлар мос равишда

$$\gamma_1:\begin{cases}u=u^1(s)\\ v=v^1(s)\end{cases}$$

$$\gamma_2:\begin{cases}u=u^2(s)\\ v=v^2(s)\end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида берилган бўлсин.

Бу ерда аниқлик учун $P_1(u_0^1,v_0^1),P_2(u_0^2,v_0^2)$ нуқталар учун

$$u_0^1=u^1(0)=0,v_0^1=v^1(0)=0,u_0^2=u^2(0)=0,v_0^2=v^2(0)=0$$

тенгликлар ўринли деб ҳисоблаймиз. Демак,

$$\gamma_1(0)=p_1,\gamma_2(0)=p_2$$

бўлади. Бу чизиқларда параметр сифатида ёй узунлигини олиб ва бу чизиқларга ортогонал геодезик чизиқлар оиласини қуриб, $\gamma_1(0)=p_1$ ва $\gamma_2(0)=p_2$ нуқталар атрофида ярим геодезик параметрлаш усулларини аниқлаймиз (22-теоремага қаранг). Энди

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}^{\,1}(w,s)$$

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}^{\,2}(w,s)\quad (w,s)\in G$$

тенгламалар мос равишда p_1 ва p_2 нуқта атрофидаги ярим геодезик параметрлаш усуллари бўлсин. Шунда w=0 тенглама мос равишда Φ_1 ва

Φ_2 сиртларда γ_1 ва γ_2 чизиқларни аниқлайди ва биринчи квадратик формалар коэффициентлари учун $E^1 = E^2 = 1, F^1 = F^2 = 0$ тенгликлар ўринли бўлади. G^1, G^2 коэффициентлар эса

$$\sqrt{G}K + \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0$$

тенгламанинг

$$\sqrt{G(o,s)} = 1 \quad \frac{\partial \sqrt{G(o,s)}}{\partial u} = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимлари бўлади. Ечимнинг ягоналигига кўра $G^1(w,s) = G^2(w,s)$ тенглик ўринли бўлади.

Демак, 9-теоремага кўра $p(u,v) \to q(u,v)$ формула билан аниқланган F акслантириш p_1 нуқта атрофини p_2 нуқта атрофига изометрик акслантиради. Демак, агар бирорта Ф сиртнинг Гаусс эгрилиги нолга тенг бўлса, унга тегишли ихтиёрий нуқтанинг бирорта атрофи текисликдаги бирорта соҳага изометрик бўлади. Агар Ф сирт учун K>0(K<0) бўлса, унга тегишли ҳар бир нуқтанинг бирорта атрофи сферанинг (мос равишда псевдосферанинг) қисмига изометрик бўлади.

III-бобга доир машқ ва масалалар

1. Эллиптик параболоид

$$z = x^2 + y^2 \quad (x,y) \in R^2$$

тенглама билан берилган бўлса,

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2+v^2}, \quad z = \frac{1}{u^2+v^2} \quad (1)$$

ва

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u^2 \quad (2)$$

тенгламалар системаси параболоид учун ҳар хил параметрлаш усулларини беради. Бу параметрлаш усулларидан биринчиси параболоидни М (0,0,0) нуқта атрофида аниқламайди, аммо бошқа нуқталар учун регуляр параметрлаш усулини беради. Иккинчи параметрлаш усули параболоид учун унинг ҳамма нуқталари атрофида регуляр параметрлаш усулидир.

2. Текислик $x = u\cos v$, $y = \sin v$, $z = 0$ тенгламалар билан параметрланган бўлса, унинг координата чизиқларини аниқланг.

Ечиш: Текисликда (u_0, v_0) нуқта олсак, бу нуқтадан чиқувчи координата чизиқларидан биринчиси $u = t$, $v = v_0$ тенгламалар билан аниқланади.

Бу чизиқнинг фазодаги тенгламалари

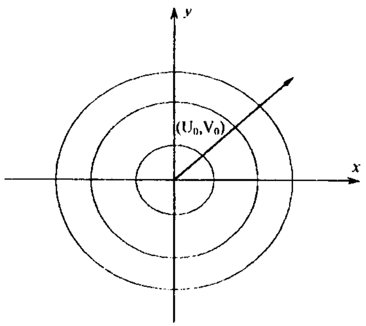
$$\begin{cases} x = t\cos v_0, \\ y = t\sin v_0, \\ z = 0 \end{cases}$$

кўринишда бўлади. Берилган (u_0, v_0) нуқтадан чиқувчи иккинчи координата чизиғи $u = u_0,\ \ v = t$ тенгламалар билан аниқланади.

Демак, унинг фазодаги тенгламалари

$$\begin{cases} x = u_0\cos t \\ y = u_0\sin t, \\ z = 0 \end{cases}$$

кўринишда бўлади. Биринчи координата чизиғи ярим тўғри чизиқ (нур), иккинчи координата чизиғи эса радиуси u_0 га тенг айланадир (чизма-18).



Чизма-18

2. Сирт $z = x^3 + y^3$ функциянинг графигидан иборат. Унинг M(1;2;9) нуқтадаги уринма текислиги, нормал тенгламалари тузилсин, биринчи ва иккинчи квадратик формалар топилсин.

Ечиш: Аввало сиртнинг параметрик тенгламаларини

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$$

кўринишда ёзиб, $M(u = 1; v = 2)$ нуқтадаги x, y, z функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$x_u = 1,\ \ y_u = 0,\ \ z_u = 3,\ \ x_v = 0,\ \ y_v = 1,\ \ z_v = 12,\ \ x_{uu} = 0,\ \ y_{uu} = 0,\ \ z_{uu} = 6,$$
$$x_{vv} = 0,\ \ y_{vv} = 0,\ \ z_{vv} = 12,\ \ x_{uv} = 0,\ \ z_{uv} = 0.$$

1). Уринма текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } 3x+12y-z-18=0$$

2) Нормал тенгламаси

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}$$

3) Биринчи квадратик форма.

$$g_{11}(1;2) = E(1;2) = 10, \quad g_{12}(1;2) = F(1;2) = 36, \quad g_{22}(1;2) = G(1;2) = 145.$$

Демак, биринчи квадратик форма

$$I = 10du^2 + 72dudv + 145dv^2$$

кўринишда бўлади.

4) Иккинчи квадратик формани топиш учун бирлик нормал

$$\vec{n} = \left\{ \frac{-3}{\sqrt{154}} ; \frac{-12}{\sqrt{154}} ; \frac{1}{\sqrt{145}} \right\}$$

векторни топамиз. Энди

$$q_{11}(1;2) = L(1;2) = \left(\vec{r}_{uu}, \vec{n}\right) = \frac{6}{\sqrt{154}}, \quad q_{11}(1;2) = M(1;2) = \left(\vec{r}_{uv}, \vec{n}\right) = 0,$$

$$q_{11}(1;2) = N(1;2) = \left(\vec{r}_{uu}, \vec{n}\right) = \frac{12}{\sqrt{154}}.$$

Иккинчи форма

$$II = \frac{6}{\sqrt{154}} du^2 + \frac{12}{\sqrt{154}} dv^2$$

кўринишда бўлади.

3. Сирт $z = xy$ функциянинг графигидан иборат бўлса, унинг M(1;1;1) нуқтасидаги бош эгриликлари ҳисоблансин.

Бунинг учун биринчи ва иккинчи квадратик формалар матрицаларини топамиз. Сиртнинг параметрик тенгламалари

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv \end{cases}$$

кўринишда бўлиб, M нуқтанинг ички координаталари $u = 1, \quad v = 1$ бўлади. Демак,

$$x_u = 1, \ y_u = 0, \ z_u = 1, \ x_v = 0, \ y_v = 1, \ z_v = 1, \ x_{uu} = 0, \ y_{uu} = 0, \ z_{uu} = 0,$$
$$x_{vv} = 0, \ y_{vv} = 0, \ z_{vv} = 0, \ x_{uv} = 0, \ y_{uv} = 0, \ z_{uv} = 1.$$

$$q_{11}E(1;1) = 2, \quad q_{12} = F(1;1) = 1, \quad q_{22} = G(1;1) = 2,$$
$$\vec{r}_u = \{1;0;1\} \quad \vec{r}_v = \{0;1;1\} \quad \vec{n} = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{3}} ; \frac{-1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$q_{11}=L(1;1)=(\vec{r}_{uu},\vec{n})=0,\quad q_{12}=M(1;1)=(\vec{r}_{uv},\vec{n})=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad q_{22}=0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Энди бош эгриликларни топиш учун $\det(B-\lambda A)=0$ тенгламани ечамиз. Бу ерда

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}.$$

Демак, $\det(B-\lambda A)=0$ тенглама

$$\begin{vmatrix}-2\lambda & \frac{1}{\sqrt{3}}-\lambda\\ \frac{1}{\sqrt{3}}-\lambda & -2\lambda\end{vmatrix}=4\lambda^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\lambda\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2\lambda+\frac{1}{\sqrt{3}}-\lambda\right)\left(2\lambda-\frac{1}{\sqrt{3}}+\lambda\right)0\quad \lambda_1=-\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \lambda_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

4. Сиртнинг параметрик тенгламалари

$$\begin{cases}x=u\sin v\\ y=u\cos v\\ z=v\end{cases}$$

кўринишида бўлса, унда $u=0$, $u=shv$, $v=t$, $0\le t\le t_0$ чизиқлар билан чегараланган учбурчак юзини топинг.

Ечиш: Аввало биринчи квадратик форма матрицасини топамиз.

$$x_u=\sin v,\quad y_u=\cos v,\quad z_u=0,\quad x_v=u\cos v,\quad y_v=-u\sin v,\quad z_v=1,$$

$$q_{11}=E=1,\quad q_{12}=F=0,\quad q_{22}=G=1+u^2,\quad A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+u^2\end{pmatrix}$$

$$\det A=1+u^2.$$

Биз биламизки, юза

$$S=\iint_G\sqrt{\det A}\,du\,dv$$

формула билан ҳисобланади. Бу ерда G-берилган учбурчак. Интеграл ҳисоблаш учун $(u;v)\in G$ нуқтанинг

$$0\le u\le shv,\ 0\le v\le v_0,\quad v_0=t_0.$$

Ўзгариш чегараларини ҳисобга олиб,

$S=\int_0^{v_0}dv\int_0^{shv}\sqrt{1+u^2}\,du$ тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу интегралда $u=shw$ формула билан ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$\int_0^{shv}\sqrt{1+u^2}\,du=\int_0^v ch^2w\,dw=\int\left(\frac{e^w+e^{-w}}{2}\right)^2dw=\int_0^v\frac{e^{2w}+2+e^{-2w}}{4}dw=$$

$$=\left(\frac{e^{2w}}{8}-\frac{e^{-2w}}{8}+\frac{w}{2}\right)\Big|_0^v=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2v}-e^{-2v}}{2}\right)+2v=\frac{1}{4}sh2v+\frac{v}{2}.$$

Энди

$$\int_0^{v_0}\left(\frac{1}{4}sh2v+\frac{1}{2}v\right)dv=\frac{1}{8}ch2v+\frac{1}{4}v^2\Big|_0^{v_0}=$$
$$=\frac{1}{8}ch2v_0+\frac{1}{4}v_0^2-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\left\{\frac{ch2v_0-1}{2}+v_0^2\right\}=$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{e^{2v_0}+e^{-2v_0}-2}{4}+v_0^2\right\}=\frac{1}{4}\left(sh^2v_0+v_0^2\right)$$

Демак, $S=\frac{1}{4}\left(sh^2v_0+v_0^2\right)$

Мустақил ишлаш учун масалалар

1. Йўналтирувчи чизиғи $\vec{p}=\vec{p}(u)$ тенглама билан берилган, ясовчилари $\vec{e}$ векторга параллел бўлган цилиндрнинг параметрик тенгламалари тузилсин.

2. Фазода $x=ach\left(\frac{u}{a}\right)$, $y=0$, $z=u$ тенгламалар билан берилган чизиқнинг OZ ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг (катеноид) тенгламаларини ёзинг.

3. Гиперболик параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

каноник тенглама билан берилган бўлса, унинг шундай параметрик тенгламаларини ёзингки, координата чизиқлари ясовчилардан иборат бўлсин.

4. Сфера

$$x=a\cos u\cos v,\quad y=a\sin u\cos v,\quad z=a\sin v$$

параметрик тенгламалари билан берилган бўлса, унинг биринчи квадратик формасини топинг.

5. Эллиптик параболоид

$$x=\sqrt{pv}\cos u,\quad y=\sqrt{qv}\sin u,\quad z=\frac{v^2}{2}$$

тенгламалар билан берилган, унинг биринчи квадратик формасини топинг.

6. Биринчи квадратик формаси $I=du^2+(u^2+a^2)dv^2$ кўринишда бўлган сиртда $u=\frac{1}{2}av^2$, $u=-\frac{1}{2}av^2$, $v=1$ чизиқлар ҳосил қилган учбурчакнинг периметрини ва бурчакларини топинг.

7. Биринчи квадратик форма 6-масаладаги кўринишда бўлган сиртда $u=av, u=-av, v=1$ чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

8. Биринчи квадратик форма 6-масаладаги кўринишда бўлган сиртда $u+v=0, u-v=0$ чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

9. Бир паллали гиперболоид

$$x = achu\cos v,\quad y = achu\sin v,\quad z = cchu$$

тенгламалар билан берилган бўлса, унинг иккинчи квадратик формасини топинг.

10. Доиравий цилиндр

$$x = R\cos v, y = R\sin v, z = u$$

тенгламалар билан берилган бўлса, унинг иккинчи квадратик формасини топинг.

11. Сирт $F(x,y,z) = 0$ тенглама билан берилган. Унинг Гаусс эгрилигини топинг.

12. Сирт $z = f(x,y)$ дифференциалланувчи функциянинг графигидан иборат. Унинг Гаусс ва ўрта эгрилигини ҳисобланг.

13. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ тенглама билан берилган. Унинг $M(3,4,12)$ нуқтадан ўтувчи уринма текислиги ва нормал тенгламалари тузилсин.

14. Геликоид

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$$

тенгламалар билан берилган. Унинг ўрта эгрилигини топинг.

15. Сирт $xyz = 1$ тенглама билан берилган. Унинг $x + y + z - 3 = 0$ текисликка параллел уринма текисликларини топинг.

16. Геликоид учун геодезик чизиқларнинг тенгламаларини ёзинг (14-масала).

17. Сирт $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$ тенгламалар билан берилган. Унинг $P(u = 1, v = 1)$ нуқтасидаги $v = u^2$ чизиқ йўналиши бўйича нормал эгрилигини топинг.

18. Сирт $z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2$ тенглама билан берилган. Унинг $M(0,0,0)$ нуқтасидаги Дьюпен индикатрисаси тенгламасини тузинг.

IV БОБ

ТЕНЗОР АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

§ 1. Чизиқли формалар

Ҳақиқий сонлар майдони устида аниқланган чекли ўлчамли чизиқли фазони V билан, унинг ўлчамини эса n билан белгилаймиз, яъни $n = \dim V$. Чизиқли фазода аниқланган

$$\omega : V \to R^1$$

функция учун

$$\omega(\lambda \bar{x} + \mu \bar{y}) = \lambda\omega(\bar{x}) + \mu\omega(\bar{y})$$

тенглик ихтиёрий $\bar{x}, \bar{y}$ векторлар ва барча λ, μ ҳақиқий сонлар учун бажарилса, ω чизиқли форма деб аталади. Чизиқли V фазода аниқланган ҳамма чизиқли формалар тўпламини V^* билан белгилаймиз.

Теорема 1. *Чизиқли формалар тўплами V^* n ўлчамли чизиқли фазодир.*

Исбот. Иккита ω_1, ω_2 чизиқли формаларни қўшиш

$$(\omega_1 + \omega_2)(\bar{x}) = \omega_1(\bar{x}) + \omega_2(\bar{x})$$

тенглик бўйича, ва λ ҳақиқий сон учун ω чизиқли формани λ сонга кўпайтириш

$$(\lambda\omega)(\bar{x}) = \lambda\omega(\bar{x})$$

тенглик бўйича аниқланади ва натижада V^*чизиқли фазога айланади.

Бу киритилган амаллар учун чизиқли фазо аксиомалари бажарилишини текшириш қийин эмас. Агар ихтиёрий $\bar{x}$ учун $\omega(\bar{x}) = 0$ бўлса, ω чизиқли V^*фазо учун “ноль вектор” бўлади ва $\tilde{0}$ кўринишда белгиланади.

Энди V^* n ўлчамли чизиқли фазо эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун V фазодаги бирорта $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ базис учун

$$\omega^i(\bar{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

қоида билан n та $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ чизиқли формаларни аниқлаймиз. Ихтиёрий

$$\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + \ldots + x^n\bar{e}_n$$

вектор учун $\omega^i(\bar{x}) = x^i$ тенглик ўринли бўлади, яъни ω^i форма $\bar{x}$ векторга унинг i-координатасини мос қўяди.

Энди $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ формалар V^* учун базис эканлигини кўрсатайлик.

Агар $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ҳақиқий сонлар учун

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \omega^i = \tilde{0}$$

тенглик бажарилса, ҳар бир $\bar{x}$ вектор учун

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \omega^i(\bar{x}) = 0$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар $\bar{x} = \bar{e}_j$ бўлса, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \omega^i(\bar{x}) = \beta_j = 0$ тенглик ҳосил бўлади.

Демак $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ тенгликлар ўринли. Бундан эса $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ формаларнинг чизиқли эркли эканлиги келиб чиқади.

Энди ихтиёрий $\omega \in V^*$ учун

$$\omega(\bar{x}) = x^1\omega(\bar{e}_1) + x^2\omega(\bar{e}_2) + \ldots + x^n\omega(\bar{e}_n) =$$
$$= \alpha_1\omega^1(\bar{x}) + \alpha_2\omega^2(\bar{x}) + \ldots + \alpha_n\omega^n(\bar{x})$$

тенгликни ёзсак, $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega^i$ ни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\alpha_i = \omega(\bar{e}_i)$ лар ω форманинг $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ базисдаги координаталаридир.□

Энди $V = R^n$ бўлган ҳолда қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема 2. *Ҳар қандай ω чизиқли форма учун шундай ягона $\bar{x}_0 \in R^n$ вектор мавжудки,*

$$\omega(\bar{x}) = (\bar{x}_0, \bar{x})$$

тенглик ҳамма $\bar{x} \in R^n$ лар учун ўринли бўлади.

Исбот. Бу теоремани исбот қилиш учун R^n да $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ векторлардан иборат ортонормал базисни танлаб, қўшма фазодаги базисни $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ билан белгилаймиз.

Биламизки

$$\omega(\bar{x}) = \alpha_1\omega^1(\bar{x}) + \alpha_2\omega^2(\bar{x}) + \ldots + \alpha_n\omega^n(\bar{x})$$

тенглик ҳар бир $\bar{x}$ учун ўринли бўлади.

Энди

$$\bar{x}_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

векторни киритсак,

$$(\bar{x}_0, \bar{x}) = \alpha_1\omega^1(\bar{x}) + \alpha_2\omega^2(\bar{x}) + \ldots + \alpha_n\omega^n(\bar{x})$$

тенглик бажарилади. Албатта $\overline{x}_0$ вектор ω га боғлиқ. Агар ω учун иккита $\overline{x}_0, \overline{y}_0$ векторлар мавжуд бўлиб,

$$\overline{\omega}(\overline{x}) = (\overline{x}_0, \overline{x}), \quad \omega(\overline{x}) = (\overline{y}_0, \overline{x})$$

тенгликлар бажарилса,

$$(\overline{x}_0 - \overline{y}_0, \overline{x}) = 0$$

тенгликдан $\overline{x}_0 = \overline{y}_0$ келиб чиқади.□

Энди V чизиқли фазода ва қўшма V^* чизиқли фазода базис ўзгарганда вектор ва чизиқли формаларнинг координаталари учун ўзгариш қоидасини аниқлаймиз.

Агар $\tilde{\overline{e}}_1, \tilde{\overline{e}}_2, ..., \tilde{\overline{e}}_n$ векторлар V чизиқли фазода бошқа базис бўлса, ҳар бир $\tilde{\overline{e}}_i$ ни $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ базис орқали ифодалаймиз:

$$\tilde{\overline{e}}_i = a_i^1 \overline{e}_1 + \ldots + a_i^n \overline{e}_n .$$

ва натижада

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз. Бу матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлади (нима учун?).

Энди $\tilde{\overline{e}}_1, \tilde{\overline{e}}_2, ..., \tilde{\overline{e}}_n$ базисга қўшма $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^n$ базисни

$$\tilde{\omega}^i(\tilde{\overline{e}}_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

қоида билан аниқлаймиз. Ҳар бир $\tilde{\omega}^i$ формани $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ базис орқали ифодалаб,

$$\tilde{\omega}^i = b_1^i \omega^1 + b_2^i \omega^2 + \ldots + b_n^i \omega^n$$

тенглик ёрдамида

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \cdots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз.

Энди

$$\delta_j^i = \tilde{\omega}^i(\tilde{\overline{e}}_j), \quad \tilde{\omega}^i = \sum_k b_k^i \omega^k \quad \text{ва} \quad \tilde{\overline{e}}_j = \sum_s a_j^s \overline{e}_s$$

тенгликлардан фойдаланиб

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n$ ва $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ базислар ўзаро қўшма базис бўлганлиги учун

$$\omega^k\left(\overline{e_s}\right) = \delta_s^k$$

тенглик ўринли. Демак

$$\delta_j^i = \sum_{k,s} b_k^i a_j^s \delta_s^k = \sum_k b_k^i a_j^k$$

муносабатдан $\{b_k^i\}$ матрица $\{a_j^k\}$ матрицага тескари матрица эканлиги келиб чиқади.

Чизиқли V фазога тегишли x векторнинг $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ базисдаги координаталари $x^1, x^2, \dots, x^n$, $\widetilde{\overline{e}}_1, \widetilde{\overline{e}}_2, \dots, \widetilde{\overline{e}}_n$ базисдаги координаталари $y^1, y^2, \dots, y^n$ бўлса,

$$\overline{x} = x^1\overline{e_1} + x^2\overline{e_2} + \dots + x^n\overline{e_n} = y^1\widetilde{\overline{e}}_1 + y^2\widetilde{\overline{e}}_2 + \dots + y^n\widetilde{\overline{e}}_n$$

ва

$$\widetilde{\overline{e}}_i = \sum a_i^j e_j;$$

тенгликлардан

$$x^i = \sum a_k^i y^k, \quad y^i = \sum b_k^i x^k \quad (1)$$

тенгликлар келиб чиқади. Бу формулалар базис ўзгарганда вектор координаталарининг ўзгариш қонунини кўрсатади.

Энди чизиқли формалар координаталари ўзгариш қонунини кўрайлик.

Бунинг учун

$$\omega = \sum_i \alpha_i \omega^i, \quad \omega = \sum_i \beta_i \widetilde{\omega}^i \quad \text{ва} \quad \widetilde{\omega}^j = \sum_i b_i^j \omega^i$$

тенгликлардан фойдаланиб

$$\alpha_i = \sum_j b_i^j \beta_j, \quad \beta_i = \sum_k a_i^k \alpha_k \quad (2)$$

формулаларни ҳосил қиламиз.

§ 2. Чизиқли фазода тензорлар

Чизиқли V фазо ва унга қўшма V^* фазо учун

$$T : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{r} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{s} \to R^1$$

функцияни қарайлик. Бу функция $r+s$ аргументли бўлиб r та аргументи векторлар, s та аргументи чизиқли формалардир.

Таъриф. Берилган $T\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_r},\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^s\right)$ функция ҳар бир аргументи бўйича чизиқли бўлса(бошқа аргументлари фиксирланган ҳолда), у (r,s) типдаги тензор деб аталади.

Мисоллар.

1. Бизга $\overline{x}$ вектор берилган бўлса, ҳар бир $\omega\in V^*$ чизиқли форма учун $\omega(\overline{x})$ скаляр миқдор бўлади. Демак $\overline{x}$ векторни $x:V^*\to R^1$ функция сифатида қарашимиз мумкин. Шунинг учун вектор $(0,1)$ типдаги тензор бўлади.
2. Ҳар бир

$$\omega:V\to R^1$$

чизиқли форма $(1,0)$ типдаги тензордир. Чизиқли форма ковектор деб ҳам аталади.

3. Регуляр Ф сиртнинг $p(u_0,v_0)$ нуқтасидаги биринчи квадратик формаси $\{g_{ij}\}$ матрица билан, иккинчи квадратик формаси $\{q_{ij}\}$ матрица билан берилса,

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)\in \mathrm{T}_p\Phi\times\mathrm{T}_p\Phi\to g_{ij}a^ib^j,$$

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)\in \mathrm{T}_p\Phi\times\mathrm{T}_p\Phi\to q_{ij}a^ib^j$$

функциялар $(2,0)$ типдаги тензорлар бўлади. Бу ерда $\{a^i\},\{b^j\}$ сонлари мос равишда $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларнинг координаталаридир.

Ҳамма (r,s) типли тензорлар тўпламини $\mathrm{T}_s^r(V)$ деб белгилаймиз.

Теорема 3. *Ҳамма (r,s) типдаги тензорлар тўплами чекли ўлчамли чизиқли фазодир.*

Аввало иккита (r,s) типдаги T,S тензорлар ва ҳақиқий λ сон учун чизиқли амаллар қуйидагича аниқланади:

$$(\mathrm{T}+S)\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_r},\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S\right)=$$
$$=\mathrm{T}\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_r},\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S\right)+$$
$$+S\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_r},\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S\right),$$

$$(\lambda T)\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_r},\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S\right)=$$
$$\lambda T\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_r},\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S\right)$$

Энди $\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}$ векторлар чизиқли V фазода базисни, $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n$ ковекторлар V^*фазода қўшма базисни аниқласин.

$\mathrm{T}_s^r(V)$ фазода

$$\Omega^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\left(\overline{e_{k_1}},\overline{e_{k_2}},\dots,\overline{e_{k_r}},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\dots,\omega^{l_s}\right)=\delta^{i_1}_{k_1}\delta^{i_2}_{k_2}\dots\delta^{i_r}_{k_r}\delta^{l_1}_{j_1}\delta^{l_2}_{j_2}\dots\delta^{l_s}_{j_s}$$

қоида бўйича $\Omega^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ тензорларни аниқлаймиз. Бу ерда $1\le i_1,i_2,\dots,i_r,j_1,j_2,\dots,j_s\le n$ бўлиб, бу тензорлар сони n^{r+s} га тенг. Бу тензорларни чизиқли эркли эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун

$$\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_r\le n\\ 1\le j_1,j_2,\dots,j_s\le n}}\alpha^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\Omega^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}=0$$

тенгликдан $\alpha^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}=0$ тенглик, индексларнинг ҳамма қийматларида ўринли эканлигини кўрсатайлик. Шу мақсадда

$$\sum\alpha^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\Omega^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\left(\overline{e_{k_1}},\overline{e_{k_2}},\dots,\overline{e_{k_r}},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\dots,\omega^{l_s}\right)$$

ни ҳисоблаймиз ва натижада

$$\sum\alpha^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\Omega^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\left(\overline{e_{k_1}},\overline{e_{k_2}},\dots,\overline{e_{k_r}},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\dots,\omega^{l_s}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_r\\ j_1,j_2,\dots,j_s}}\alpha^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\delta^{i_1}_{k_1}\delta^{i_2}_{k_2}\dots\delta^{i_r}_{k_r}\delta^{l_1}_{j_1}\delta^{l_2}_{j_2}\dots\delta^{l_s}_{j_s}=\alpha^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_r}=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак $\Omega^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ тензорлар чизиқли эркли оилани ташкил қилади.

Бу тензорларнинг $T^r_s(V)$ фазода тўлиқ оила эканлигини исботлайлик. Бунинг учун (r,s) типдаги ихтиёрий T тензор учун

$$T^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}=T\left(\overline{e}_{j_1},\overline{e}_{j_2},\dots,\overline{e}_{j_r},\omega^{i_1},\omega^{i_2},\dots,\omega^{i_s}\right)$$

белгилашни киритиб

$$T=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_s\\ j_1,j_2,\dots,j_r}}T^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}\Omega^{j_1\dots j_r}_{i_1\dots i_s}$$

тенгликни исботлаймиз. Бунинг учун тенгликнинг иккала томонидаги тензорларнинг $\left(\overline{e}_{k_1},\overline{e}_{k_2},\dots,\overline{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\dots,\omega^{l_s}\right)$ оила учун қийматларини ҳисоблаймиз:

$$T\left(\overline{e}_{k_1},\overline{e}_{k_2},\dots,\overline{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\dots,\omega^{l_s}\right)=T^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_r},$$

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_s\\ j_1,j_2,\dots,j_r}}T^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}\Omega^{j_1\dots j_r}_{i_1\dots i_s}\left(\overline{e}_{k_1},\overline{e}_{k_2},\dots,\overline{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\dots,\omega^{l_s}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_s\\ j_1,j_2,\dots,j_r}}T^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}\delta^{j_1}_{k_1}\delta^{j_2}_{k_2}\dots\delta^{j_r}_{k_r}\delta^{l_1}_{i_1}\delta^{l_2}_{i_2}\dots\delta^{l_s}_{i_s}=$$

$$=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_s\\ j_1,j_2,\dots,j_r}}T^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}\delta^{k_1}_{k_1}\delta^{k_2}_{k_2}\dots\delta^{k_r}_{k_r}\delta^{l_1}_{l_1}\delta^{l_2}_{l_2}\dots\delta^{l_s}_{l_s}=T^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_r}$$

Демак, тензорларнинг қиймати базисларни ташкил қилувчи ихтиёрий векторлар ва ковекторлар оиласи учун устма-уст тушади. Тензорларнинг ҳар бир аргумент бўйича чизиқли эканлигидан уларнинг тенглиги келиб чиқади. Шундай қилиб (r,s) типдаги тензорлар тўплами чекли ўлчамли чизиқли фазони ташкил қилади.□

Энди чизиқли V фазода базис ўзгарганда тензорлар координаталарининг ўзгариш қоидасини аниқлайлик. Бунинг учун V да янги базисни $\tilde{\bar{e}}_1, \tilde{\bar{e}}_2, ..., \tilde{\bar{e}}_n$ билан белгилаб, янги базис векторларини эски базис орқали ифодалайлик:

$$\tilde{\bar{e}}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^i e_i$$

Янги базисга қўшма $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \dots, \tilde{\omega}^n$ элементларини ҳам

$$\tilde{\omega}^i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j \omega^i$$

кўринишда ёзсак, $\{\beta_j^i\}$ матрица $\{\alpha_j^i\}$ матрицага тескари матрица эканлигини биламиз. Бу янги базисларга мос келувчи $T_s^r(V)$ фазонинг базиси

$$\tilde{\Omega}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}\left(\tilde{\bar{e}}_{k_1}, \tilde{\bar{e}}_{k_2}, \dots, \tilde{\bar{e}}_{k_r}, \tilde{\omega}^{l_1}, \tilde{\omega}^{l_2}, \dots, \tilde{\omega}^{l_s}\right) =$$

$$= \delta_{k_1}^{i_1} \delta_{k_2}^{i_2} \dots \delta_{k_r}^{i_r} \delta_{j_1}^{l_1} \delta_{j_2}^{l_2} \dots \delta_{j_s}^{l_s}$$

қоида бўйича аниқланади. Бу янги базиснинг эски базисдаги координаталарини топиш учун

$$\tilde{\Omega}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}\left(\bar{e}_{k_1}, \bar{e}_{k_2}, \dots, \bar{e}_{k_r}, \omega^{l_1}, \omega^{l_2}, \dots, \omega^{l_s}\right)$$

миқдорни ҳисоблайлик. Бунинг учун

$$\bar{e}_j = \sum_k \beta_j^k \tilde{\bar{e}}_k, \qquad \omega^i = \sum_k \alpha_k^i \tilde{\omega}^k$$

тенгликлардан фойдаланамиз. Натижада

$$\tilde{\Omega}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}\left(\sum_{n_1} \beta_{k_1}^{n_1} \tilde{\bar{e}}_{n_1}, \sum_{n_2} \beta_{k_2}^{n_2} \tilde{\bar{e}}_{n_2}, \dots, \sum_{n_r} \beta_{k_r}^{n_r} \tilde{\bar{e}}_{n_r}, \sum_{m_1} \alpha_{m_1}^{l_1} \tilde{\omega}^{m_1}, \dots, \sum_{m_s} \alpha_{m_s}^{l_s} \tilde{\omega}^{m_s}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_r \\ m_1, m_2, \dots, m_s}} \beta_{k_1}^{n_1} \beta_{k_2}^{n_2} \dots \beta_{k_r}^{n_r} \alpha_{m_1}^{l_1} \dots \alpha_{m_s}^{l_s} \delta_{n_1}^{i_1} \delta_{n_2}^{i_2} \dots \delta_{n_r}^{i_r} \delta_{j_1}^{m_1} \delta_{j_2}^{m_2} \dots \delta_{j_s}^{m_s} =$$

$$= \beta_{k_1}^{i_1} \beta_{k_2}^{i_2} \dots \beta_{k_r}^{i_r} \alpha_{j_1}^{l_1} \dots \alpha_{j_s}^{l_s}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\widetilde{\Omega}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r\\ l_1,l_2,\dots,l_s}} \beta^{i_1}_{k_1}\beta^{i_2}_{k_2}\dots\beta^{i_r}_{k_r}\alpha^{l_1}_{j_1}\alpha^{l_2}_{l_2}\dots\alpha^{l_s}_{j_s}\Omega^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}$$

Энди T тензорнинг янги базисдаги координаталарини топайлик:

$$\widetilde{\mathrm{T}}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = \mathrm{T}\left(\widetilde{e}_{i_1},\widetilde{e}_{i_2},\dots,\widetilde{e}_{i_r},\widetilde{\omega}^{j_1},\widetilde{\omega}^{j_2},\dots,\widetilde{\omega}^{j_s}\right)=$$

$$= \mathrm{T}\left(\sum_{k_1}\alpha^{k_1}_{i_1}\overline{e_{k_1}},\sum_{k_2}\alpha^{k_2}_{i_2}\overline{e_{k_2}},\dots,\sum_{k_r}\alpha^{k_r}_{i_r}\overline{e_{k_r}},\sum_{l_1}\beta^{j_1}_{l_1}\omega^{l_1},\sum_{l_2}\beta^{l_2}_{l_2}\omega^{l_2},\dots,\sum_{l_s}\beta^{j_s}_{l_s}\omega^{l_s}\right)=$$

$$= \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r\\ l_1,l_2,\dots,l_s}} \alpha^{k_1}_{i_1}\alpha^{k_2}_{i_2}\dots\alpha^{k_r}_{i_r}\beta^{j_1}_{l_1}\beta^{j_2}_{l_2}\dots\beta^{j_s}_{l_s}\mathrm{T}^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_r}$$

Демак,

$$\widetilde{\mathrm{T}}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r\\ l_1,l_2,\dots,l_s}} \alpha^{k_1}_{i_1}\alpha^{k_2}_{i_2}\dots\alpha^{k_r}_{i_r}\beta^{j_1}_{l_1}\beta^{j_2}_{l_2}\dots\beta^{j_s}_{l_s}\mathrm{T}^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_r} \quad (1)$$

формула ўринли. Бу формула янги координаталарни эски координаталар билан $\{\alpha^i_j\}$, $\{\beta^i_j\}$ матрицалар орқали ифодалайди. Бу формулани тензор ўзгариш қонуни деб атаймиз. $r=0, s=1$ ва $r=1, s=0$ бўлганда бу формула мос равишда вектор ва ковектор координаталарининг ўзгариш қоидасини беради.

Бу параграф охирида тензорлар устида алгебраик амалларни киритамиз. Юқорида тензорларни қўшиш ва ҳақиқий сонга кўпайтириш амаллари киритилган эди.

1. Агар T ва S тензорларнинг координаталари $\mathrm{T}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_k}$ ва $S^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$ лардан иборат бўлса, $\mathrm{T}+S$ тензорнинг координатлари

$$\mathrm{T}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_k} + S^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$$

сонлардан, λ ҳақиқий сон учун $\lambda\mathrm{T}$ тензорининг координаталари T нинг ҳар бир координатасини шу сонга кўпайтириш ёрдамида ҳосил бўлади, яъни

$$\lambda\mathrm{T}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$$

сонларига тенг бўлади.

Энди бошқа алгебраик амалларни киритамиз. Қулайлик учун $0\le r\le 3, 0\le s\le 3$ ҳолларни кўрамиз.

2. Тензорларни кўпайтириш. Тензорларни кўпайтириш учун уларнинг типлари бир хил бўлиши шарт эмас. Тензор кўпайтма

координаталари берилган иккита тензор координаталарини кўпайтириш натижасида ҳосил бўлади. Агар $(2,3)$ типдаги T тензорнинг координаталари $T_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3}$, $(1,2)$ типдаги S тензорнинг координаталари $S_{\alpha}^{\beta_1 \beta_2}$ бўлса, $T \cdot S$ тензорнинг координаталари

$$T_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3} \cdot S_{\alpha}^{\beta_1 \beta_2}$$

сонлардан иборат бўлади. Демак кўпайтма

$$T \cdot S = \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 \\ i_1, i_2, i_3}} T_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3} S_{i_3}^{j_4 j_5} \Omega_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5}^{i_1 i_2 i_3}$$

кўринишда бўлади.

3. Бир хил типдаги индексларни алмаштириш. Бизга T тензор берилган бўлса, унинг координаталарида ихтиёрий 2 та бир хил индекс жойларини алмаштириш ёрдамида бошка тензорни ҳосил қиламиз. Масалан (3,0) типдаги T тензорнинг координаталари T_{ijk} сонлардан иборат бўлса, координаталари T_{ikj} сонлардан иборат тензор

$$R = \sum_{ijk} T_{ikj} \Omega^{ijk} \text{ кўринишда бўлади.}$$

Худди шундай (0,2) типдаги $\{T^{ij}\}$ тензор учун

$$R = \sum_{ij} T^{ji} \Omega_{ij}$$

формула билан бошқа тензорни ҳосил қиламиз.

4. Индекслар бўйича йиғиш. Бизга $(2,3)$ типдаги $\{T_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3}\}$ тензор берилган бўлса,

$$R_{i_2}^{j_1 j_3} = \sum_k T_{k i_2}^{j_1 k j_3}$$

қоида бўйича $R_{i_2}^{j_1 j_3}$ сонларни аниқласак, $(1,2)$ типдаги $\{R_{i_2}^{j_1 j_3}\}$ тензорни ҳосил қиламиз. Бу амал κ-индекс бўйича йиғиш деб аталади.

5. Индексларни тушириш ва кўтариш. Бизга $(2,0)$ типдаги $A = \{a_{ij}\}$ тензор берилган ва $\det A \neq 0$ бўлсин. Тескари A^{-1} матрица элементларини a^{ik} билан белгиласак, $\sum a^{ik} a_{kj} = \delta_j^i$ тенглик ўринли бўлади.

Энди бизга $(3,2)$ типдаги $T = \{T_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2}\}$ тензор берилган бўлса,

$$S_{i_1 i_2}^{i j_1 j_2} = \sum_k a^{ik} T_{k i_1 i_2}^{j_1 j_2}$$

қоида билан $(2,3)$ типдаги $\{S^{ij_1j_2}_{i_1i_2}\}$ тензорни аниқлаймиз. Бу операция индексни кўтариш операцияси деб аталади. Худди шундай

$$S^{j_1}_{ji_1i_2} = \sum_k a_{ki} \mathrm{T}^{j_1k}_{i_1i_2}$$

қоида билан $(4,1)$ типдаги $\{S^{j_1}_{ii_1i_2}\}$ тензорни аниқлаш ммумкин. Бу операция индексларни тушириш опрацияси дейилади.

Тензор белгилашлар:

Тензор анализда қулайлик учун қуйида ва юқорида бир хил маротаба такрорланувчи индекслар буйича йиғинди ёзилганда йиғинди белгиси ёзилмайди.

Масалан,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \bar{e}_i = x^i \bar{e}_i$$

$$\sum_k a^{ik} \mathrm{T}^{j_1j_2}_{ki_1i_2} = a^{ik} \mathrm{T}^{j_1j_2}_{ki_1i_2}$$

демак

$$S^{ij_1j_2}_{i_1i_2} = a^{ik} \mathrm{T}^{j_1j_2}_{ki_1i_2}$$

Кейинчалик бу қоидадан фойдаланганимизда бу ҳақда эслатиб ўтирмаймиз.

§ 3. Сиртларда тензор майдонлар

Регуляр Φ сирт берилган бўлиб, у

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \qquad (u,v) \in G \qquad (1)$$

тенглама ёрдамида параметрланган бўлсин.

Ҳар бир $p(u,v)$ нуқта учун сиртнинг шу нуқтадаги уринма фазосини $\mathrm{T}_p\Phi$ билан белгилаган эдик. Уринма фазога қўшма фазони $\mathrm{T}^*_p\Phi$ билан белгилаб, (r,s) типдаги тензорни

$$R(u,v) : \underbrace{\mathrm{T}_p\Phi \times \mathrm{T}_p\Phi \times \ldots \times \mathrm{T}_p\Phi}_{r} \times \underbrace{\mathrm{T}^*_p\Phi \times \mathrm{T}^*_p\Phi \times \ldots \times \mathrm{T}^*_p\Phi}_{s} \to R^1$$

акслантириш сифатида аниқлаймиз.

Таъриф-1. Сиртнинг ҳар бир нуқтасига

$$(u,v) \to R(u,v)$$

акслантириш билан (r,s) типдаги тензор мос қўйилган бўлса, Φ сиртда (r,s) типдаги R тензор майдон берилган дейилади.

Мисоллар.

1. Сиртда аниқланган вектор майдон (0,1) типдаги тензор майдонга мисол бўлади.
2. Сиртда аниқланган чизиқли форма майдони (1,0) типдаги тензор майдондир.
3. Сиртнинг 1–чи ва 2–квадратик формалари ҳам сиртда (2,0) типдаги тензор майдонларни аниқлайди.

Агар $\vec{a}=\{a^1,a^2\},\vec{b}=\{b^1,b^2\}$ вектор майдонлар, $\{g_{ij}\},\{q_{ij}\}$ матрицалар мос равишда 1–чи ва 2–квадратик формалар матрицалари бўлса,

$$T_1(\vec{a},\vec{b})=\sum_{i,j}g_{ij}a^ib^j,\quad T_2(\vec{a},\vec{b})=\sum_{i,j}q_{ij}a^ib^j$$

формулалар

$$T_1,T_2:T_p\Phi\times T_p\Phi\to R^1$$

тензор майдонларни аниқлайди.

Маълумки $p(u,v)$ нуқтадаги $T_p\Phi$ уринма фазо учун $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ векторлар базисни ташкил қилади. Қўшма $T_p^*\Phi$ фазодаги ω_p^1,ω_p^2 қўшма базисни

$$\omega_p^i\left(\vec{r}_{u_j}\right)=\delta_j^i$$

қоида бўйича аниқланади. Бу ерда $u_1=u,\quad u_2=v,\quad i,j=1,2$. Биз биламизки, агар Ф сирт етарли даражада силлиқ бўлса, $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ векторлар u, v ларнинг дифференциалланувчи функцияларидир. Худди шунингдек ω_p^1, ω_p^2 чизиқли формалар ҳам u, v ларнинг дифференциалланувчи функциялари бўлади. Буни кўрсатиш учун ω_p^1,ω_p^2 формаларнинг ихтиёрий силлиқ X вектор майдон учун қийматлари u, v ларнинг дифференциалланувчи функциялари эканлигини кўрсатишимиз керак. Агар

$$X(u,v)=\vec{r}_ua^1(u,v)+\vec{r}_va^2(u,v)\text{ бўлса,}$$

$$\omega_p^1(X)=a^1(u,v),\quad \omega_p^2(X)=a^2(u,v)$$

тенгликлар ўринлидир. X силлиқ вектор майдон бўлганлиги учун $a^1(u,v)$, $a^2(u,v)$ лар дифференциалланувчи функциялардир.

Таъриф 2. Тензор майдон R учун

$$R_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s}=R\left(\vec{r}_{u_{j_1}},\vec{r}_{u_{j_2}},\ldots,\vec{r}_{u_{j_r}},\omega_p^{i_1},\omega_p^{i_2},\ldots,\omega_p^{i_s}\right)$$

функциялар дифференциалланувчи бўлса, R дифференциалланувчи тензор деб аталади. Бу ерда $1\le i_1,i_2,\ldots,i_s,j_1,j_2,\ldots,j_r\le 2$.

Таърифда киритилган функциялар R тензорнинг координата функциялари деб аталади.

Энди геометрияда муҳим роль ўйнайдиган эгрилик тензорини киритамиз. Бунинг учун аввало вектор майдонлар учун коммутатор тушунчасини киритамиз.

Ф сиртда дифференциалланувчи X ва Y вектор майдонлар берилган бўлсин. Бу вектор майдонларни

$$X = x^1(u,v)\vec{r}_u + x^2(u,v)\vec{r}_v$$
$$Y = y^1(u,v)\vec{r}_u + y^2(u,v)\vec{r}_v$$

кўринишда ёзиб

$$[X,Y](u,v) = \left(\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^1}{\partial u_i} - y^i\frac{\partial x^1}{\partial u_i}\right)\right)\vec{r}_u + \left(\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^2}{\partial u_i} - y^i\frac{\partial x^2}{\partial u_i}\right)\right)\vec{r}_v \quad (2)$$

қоида билан янги $[X,Y]$ вектор майдонни ҳосил қиламиз. Бу вектор майдон X ва Y вектор майдонларнинг *коммутатори* деб аталади.

Агар $f:\Phi \to R^1$ дифференциалланувчи функция бўлса, ҳар бир силлиқ X вектор майдон ёрдамида

$$X(f) = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial u_i}x^i$$

қоида билан $X(f)$ функция аниқланади. Бу $X(f)$ функциянинг $p(u,v)$ нуқтадаги қиймати f функциянинг $X(p)$ вектор йўналиши бўйича ҳосиласидир.

Энди коммутатор ҳақида қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема 4. *Силлиқ X, Y вектор майдонлар ва дифференциалланувчи f функция учун қуйидагилар ўринлидир:*

1) $[X,X]=0$
2) $[X,Y]=-[Y,X]$
3) $[\lambda X_1+\mu X_2,Y]=\lambda[X_1,Y]+\mu[X_2,Y], \quad \lambda,\mu\in R^1$
4) $[\ ,\ ]\ [\ ,\ ]\ (\ )\ ,\ [\ ,fY].\ f[X,Y].\ X(f)Y$
5) $[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))$

Исбот. Теорема исботи коммутаторнинг аниқланиши ва дифференциаллаш қоидаларидан бевосита келиб чиқади. Шунинг учун фақат 4-пунктни исботлаб, қолган пунктларни исботлашни ўқувчиларга ҳавола этамиз.

Силлиқ

$$X = x^1(u,v)\vec{r}_u + x^2(u,v)\vec{r}_v$$

вектор майдон ва дифференциалланувчи f функция берилган бўлса,

$$fX = fx^1(u,v)\vec{r}_u + fx^2(u,v)\vec{r}_v$$

тенгликни ҳисобга олиб, $[fX,Y]$ коммутаторни ҳисоблаймиз:

$$[fX,Y] = \left\{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(fx^i\frac{\partial y^1}{\partial u_i} - y^i\frac{\partial fx^1}{\partial u_i}\right)\right)\right\}\vec{r}_u + \left\{\sum_{i=1}^{2}\left(fx^i\frac{\partial y^2}{\partial u_i} - y^i\frac{\partial fx^2}{\partial u_i}\right)\right\}\vec{r}_v =$$

$$= f\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^1}{\partial u_i} - y^i\frac{\partial x^1}{\partial u_i}\right)\right\}\vec{r}_u + f\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^2}{\partial u_i} - y^i\frac{\partial x^2}{\partial u_i}\right)\right\}\vec{r}_v -$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\left(y^i\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\left(x^1\vec{r}_u + x^2\vec{r}_v\right) = f[X,Y] - Y(f)X.$$

Худди шундай

$$[X,fY] = f[X,Y] + X(f)Y$$

тенгликни ҳосил қиламиз.□

Сиртда ётувчи ва

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad a < t < b \\ z == z(t) \end{cases}$$

тенгламалар билан берилган γ чизиқ ва X вектор майдон учун

$$\vec{\rho}\,'(t) = X(x(t), y(t), z(t))$$

тенглик бажарилса, γ чизиқ X нинг *интеграл чизиғи* деб аталади. Бу ерда $\vec{\rho}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$. Бу тенглик дифференциал тенгламалар системаси бўлганлиги учун, ҳар бир $(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ нуқтасидан чиқувчи X нинг интеграл чизиғи мавжуд.

Бу факт

$$\begin{cases} \vec{\rho}\,'(t) = X(x(t), y(t), z(t)) \\ \vec{\rho}(t_0) = \{x_0, y_0, z_0\} \end{cases} \quad (3)$$

Коши масаласининг ечими мавжудлигидан келиб чиқади. Демак $(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ нуқта учун $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ оралиқда аниқланган $\vec{\rho}(t)$ вектор функция мавжуд бўлиб, у (3) системани қаноатлантиради.

Сиртда аниқланган дифференциалланувчи Y вектор майдон берилган бўлса, ҳар бир $t \in (a,b)$ учун X нинг интеграл чизиғига тегишли $(x(t),y(t),z(t))$ нуқтада $Y(x(t),y(t),z(t))$ вектор аниқланган бўлади. Энди

$$\nabla_X Y(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{DY(x(t),y(t),z(t))}{dt}\right|_{t=t_0}$$

қоида билан $\nabla_X Y$ вектор майдонни Ф сиртда аниқлаймиз. Бу ерда $x_0=x(t_0), y_0=y(t_0), z_0=z(t_0)$. Бу вектор майдон учун қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема 5. *Силлиқ X,Y,Z вектор майдонлар ва дифференциалланувчи f,g функциялар учун қуйидагилар ўринлидир:*

1) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$
2) $\nabla_X(fY)=f\nabla_x Y+X(f)Y$
3) $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$

Исбот.

$$1)\ \nabla_X(Y+Z)(x_0,y_{0,}z_0)=\left.\frac{D(Y(x(t),y(t),z(t))+Z(x(t),y(t),z(t)))}{dt}\right|_{t=t_0}=$$

$$=\left.\frac{DY}{dt}\right|_{t=t_0}+\left.\frac{DZ}{dt}\right|_{t=t_0}=\nabla_X Y(x_0,y_{0,}z_0)+\nabla_X Z(x_0,y_{0,}z_0)$$

Бу ерда $\vec{\rho}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ вектор функция X вектор майдоннинг $t=t_0$ бўлганда $(x_0,y_0,z_0)\in Ф$ нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғини аниқлайди.

$$2)\ \nabla_X(fY)(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{D(fY(x(t),y(t),z(t)))}{dt}\right|_{t=t_0}=$$

$$=\left.\frac{fDY(x_0,y_0,z_0)}{dt}\right|_{t=t_0}+Y(x_0,y_0,z_0)\left.\frac{df(x(t),y(t),z(t))}{dt}\right|_{t=t_0}=$$

$$=f\nabla_X Y(x_0,y_0,z_0)+X(f)Y(x_0,y_0,z_0)$$

3. Теореманинг 3-қисмини исботлаш учун

$$\nabla_{fX}Z=f\nabla_X Z \quad \text{ва} \quad \nabla_{X+Y}Z=\nabla_X Z+\nabla_Y Z$$

тенгликларни исботлаш етарлидир.
Аввало

$$\nabla_{fX}Z=f\nabla_X Z$$

тенгликни исботлайлик.

Бунинг учун $\vec{\rho}_1'(t) = fX(x,y,z)$ системанинг ечимини $\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)\}$ билан, $\vec{\rho}'(t) = X(x,y,z)$ системани ечимини $\{x(t), y(t), z(t)\}$ билан белгиласак

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) &= fx'(t) \\ \tilde{y}'(t) &= fy'(t) \\ \tilde{z}'(t) &= fz'(t) \end{aligned}$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Энди шу тенгликларни ҳисобга олиб, $\nabla_{fX} Z(x,y,z)$ ни ҳисоблаймиз.

$$\nabla_{fX} Z(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{D(Z(\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)\}))}{dt} \right|_{t=t_0} =$$

$$= \left[\left. \frac{d(Z(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)))}{dt} \right|_{t=t_0} \right]^{\tau} = \left[\tilde{x}(t_0) Z_x + \tilde{y}(t_0) Z_y + \tilde{z}(t_0) Z_z \right]^{\tau} =$$

$$= \left[fx'(t_0) Z_x + fy'(t_0) Z_y + fz'(t_0) Z_z \right]^{\tau} = f \left. \frac{DZ(x(t), y(t), z(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = f \nabla_X Z(x_0, y_0, z_0)$$

Энди $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ тенгликни ҳисоблаш учун

$$\vec{\rho}_1'(t) = X(x,y,z) + Y(x,y,z)$$

системанинг $t = t_0$ да (x_0, y_0, z_0) нуқтадан чиқувчи ечимини $\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)\}$ билан белгиласак,

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) &= x_1^1(t) + x_2^1(t) \\ \tilde{y}'(t) &= y_1^1(t) + y_2^1(t) \quad (4) \\ \tilde{z}'(t) &= z_1^1(t) + z_2^1(t) \end{aligned}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу ерда $\{x_1(t), y_1(t), z_1(t)\}$ ва $\{x_2(t), y_2(t), z_2(t)\}$ вектор функциялар мос равишда X ва Y вектор майдонларнинг $t = t_0$ да (x_0, y_0, z_0) нуқтадан чиқувчи интеграл чизиқларни аниқлайди. Энди (4) тенгликларни ҳисобга олиб $\nabla_X (Y + Z)(x_0, y_0, z_0)$ ни топамиз:

$$\nabla_X(Y+Z)(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{D(Z(\{\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t),\widetilde{z}(t)\}))}{dt}\right|_{t=t_0}=$$

$$=\left[\left.\frac{d(Z(\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t),\widetilde{z}(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\right]^{\tau}=$$

$$=\left[(\widetilde{x}_1(t_0)+\widetilde{x}_2(t_0))Z_x+(\widetilde{y}_1(t_0)+\widetilde{y}_2(t_0))Z_y+(\widetilde{z}_1(t_0)+\widetilde{z}_2(t_0))Z_z\right]^{\tau}=$$

$$=\left[\left.\frac{D(Z(x_1(t),y_1(t),z_1(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\right]^{\tau}+\left[\left.\frac{D(Z(x_2(t),y_2(t),z_2(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\right]^{\tau}=$$

$$=\nabla_X Z(x_0,y_0,z_0)+\nabla_Y Z(x_0,y_0,z_0)\ .\square$$

Энди эгрилик тензорини аниқлашга киришайлик. Бунинг учун X,Y,Z вектор майдонлар учун

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

вектор майдонни киритамиз. Бу вектор майдон ихтиёрий учта силлиқ X,Y,Z вектор майдонлар ва ω ковектор майдон учун

$$(X,Y,Z,\omega)\to\omega(R(X,Y)Z)$$

қоида бўйича (3,1) типдаги тензор майдонни аниқлайди. Геометрияда $R(X,Y)Z$ ни эгрилик тензори деб аташади. Бу тензорнинг номидаги "эгрилик" қўшимчаси қуйидаги теорема билан асосланади.

Теорема 6. *Сиртда аниқланган силлиқ X,Y вектор майдонлар ҳар бир нуқтада ортонормал системани аниқласа,*

$$K=-I(R(X,Y)X,Y)$$

тенглик ўринлидир.

Бу ерда K–сиртнинг Гаусс эгрилиги, I–биринчи форма.

Исбот. Теорема шартига кўра ҳар бир $p\in\Phi$ учун $X(p)$, $Y(p)$ векторлар ўзаро ортогонал бирлик векторлардир. Шунинг учун

$$\begin{aligned}\vec{r}_u&=a_1X+a_2Y\\ \vec{r}_v&=b_1X+b_2Y\end{aligned}\qquad(5)$$

тенгликларни ёза оламиз. Энди R нинг ҳар бир аргументи бўйича чизиқли эканлигидан

$$I(R(\vec{r}_u,\vec{r}_v)\vec{r}_u,\vec{r}_v)=(a_1b_2-a_2b_1)^2 I(R(X,Y)X,Y)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда (5) системадан

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2=|\vec{r}_u|^2|\vec{r}_v|^2-(\vec{r}_u,\vec{r}_v)^2=g_{11}g_{22}-g_{12}{}^2$$

тенгликни олиш қийин эмас. Демак, теоремани исботлаш учун

$$-\frac{I(R(\vec r_u,\vec r_v)\vec r_u,\vec r_v)}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=K$$

тенгликни исботлашимиз керак.

Бунинг учун аввало

$$\nabla_{\vec r_{u_i}}\vec r_{u_j}=\Gamma_{ji}^{\ k}\vec r_{u_k} \qquad (6)$$

тенгликни исботлайлик. Ковариант дифференциални топиш учун $\vec r_{u_i}$ вектор майдонининг интеграл чизиғи $u_i=t$ тенглама билан аниқланишини ҳисобга олсак

$$\nabla_{\vec r_{u_i}}\vec r_{u_j}=\frac{D\vec r_{u_j}}{dt}=\left[\frac{d\vec r_{u_j}}{dt}\right]^{\tau}=\left[\vec r_{u_ju_i}\right]^{\tau}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди

$$\vec r_{u_ju_i}=\sum_k\Gamma_{ji}^k\vec r_{u_k}+q_{ji}\vec n$$

деривацион формуладан фойдалансак (6) тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан ташқари

$$[r_u,r_v]=0 \qquad (7)$$

тенглик ҳам ўринлидир. Бу ерда $[r_u,r_v]$ эса r_u ва r_v вектор майдонларнинг коммутаторидир. Юқоридаги (5) ва (6) тенгликларни ҳисобга олиб

$$R(\vec r_u,\vec r_v)r_u=\nabla_{\vec r_u}\nabla_{\vec r_v}\vec r_u-\nabla_{\vec r_v}\nabla_{\vec r_u}\vec r_u=\nabla_{\vec r_u}\left(\sum_k\Gamma_{12}^k\vec r_{u_k}\right)-\nabla_{\vec r_v}\left(\sum_k\Gamma_{11}^k\vec r_{u_k}\right)=$$

$$=\sum_k\Gamma_{12}^k\nabla_{\vec r_u}\vec r_{u_k}+\left(\sum_k\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^k\right)\vec r_{u_k}-\sum_k\Gamma_{11}^k\nabla_{\vec r_u}\vec r_{u_k}-\left(\sum_k\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^k\right)\vec r_{u_k}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^1-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^1\right)\vec r_u+\left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^2-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^2\right)\vec r_v+\sum_k\Gamma_{12}^k\left(\sum_m\Gamma_{k1}^m r_{u_m}\right)-\sum_k\Gamma_{11}^k\left(\sum_m\Gamma_{k2}^m r_{u_m}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^1-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^1\right)\vec r_u+\left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^2-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^2\right)\vec r_v+\sum_m\left(\sum_k\Gamma_{12}^k\Gamma_{k1}^m-\sum_k\Gamma_{11}^k\Gamma_{k2}^m\right)\vec r_{u_m}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди $I(R(\vec r_u,\vec r_v)\vec r_u,\vec r_v)$ ни ҳисоблаймиз:

$$I(R(\vec r_u,\vec r_v)\vec r_u,\vec r_v)=\left\{\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^m-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^m+\sum_k\Gamma_{12}^k\Gamma_{k1}^m-\sum_k\Gamma_{12}^k\Gamma_{k2}^m\right)\right\}g_{m2}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $g_{m2}=I(\vec r_{u_m},\vec r_v)$

Демак,

$$I(R(X,Y)X,Y)=\frac{I((R(\bar r_u,\bar r_v)\bar r_u,\bar r_v))}{g_{11}^2g_{22}^2-g_{12}^2}=$$

$$=-0\frac{1}{\det A}\left\{\sum_{m=1}^{2}\left\{\frac{\partial\Gamma_{11}^m}{\partial v}-\frac{\partial\Gamma_{12}^m}{\partial u}+\sum_k\Gamma_{11}^k\Gamma_{k2}^m-\sum\Gamma_{12}^k\Gamma_{k1}^m\right\}\right\}g_{m2}$$

тенглик ўринлидир.

Биз Гаусс эгрилигини ҳисоблаш учун

$$K=\frac{\det B}{\det A}$$

формуладан ва

$$\det B=q_{11}q_{22}-q_{12}^2=\sum_m\left(\frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{11}^m-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^m+\sum_k\Gamma_{11}^k\Gamma_{k2}^m-\sum\Gamma_{12}^k\Gamma_{k1}^m\right)g_{m2}$$

тенгликдан фойдалансак,

$$K=-I(R(X,Y)X,Y)$$

тенглик келиб чиқади.□

§ 4. Фазода тензор майдонлар (мисоллар)

Фазода $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ нуқта берилган бўлса, боши шу нуқтага қўйилган векторлар тўплами чизиқли R^n фазони ташкил этади. Бу векторлар фазосини T_xR^n билан белгилаймиз.

Бизга $G\subseteq R^n$ соҳа берилиб, унинг ҳар бир x нуқтасига битта $S_x\in T_r^s(T_xR^n)$ тензор мос қўйилган бўлса, G соҳада (r,s) типдаги $S:x\to S_x$ тензор майдон берилган дейилади. Демак ҳар бир x учун

$$S_x:\underbrace{T_xR^n\times T_xR^n\times...\times T_xR^n}_{r}\times\underbrace{T_x^*R^n\times T_x^*R^n\times...\times T_x^*R^n}_{s}\to R^1$$

функция (r,s) типдаги тензордир.

Агар $T_{i_1...i_r}^{j_1...j_s}(x)$ билан S_x тензорнинг координаталарини белгиласак, бу координаталар x нуқтанинг функцияларидир.

Таъриф. Берилган G соҳада

$$T_{i_1...i_r}^{j_1...j_s}(x)$$

функциялар дифференциалланувчи бўлса, S силлиқ тензор майдон деб аталади.

Мисоллар.

1. Берилган G соҳада дифференциалланувчи $f(x^1,x^2,...,x^n)$ функция аниқланган бўлса, унинг x нуқтадаги градиенти

$T(x) = gradf(x) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right\}$ (1,0) типдаги тензор бўлиб, $\vec{a} \in T_x R^n$ векторга

$$T(x)(\vec{a}) = a^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \ldots + a^n \frac{\partial f}{\partial x^n}$$

сонини мос қўяди. Агар берилган функция f камида икки марта дифференциалланувчи бўлса, $x \to T(x)$ мослик $(1,0)$ типдаги силлиқ тензор майдондир.

2. **Инерция моментлари тензори.** Уч ўлчамли евклид фазосида О нуқта (координата боши) атрофида айланаётган қаттиқ жисм берилган бўлсин. Қаттиқ жисм ўзаро вазиятлари ўзгармайдиган N та материал нуқтадан иборат бўлиб, уларнинг массалари $m_1, m_2, \ldots, m_N$, t вақтдаги координаталари эса $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \ldots, \bar{x}_N(t)$ векторлар билан аниқлансин деб фараз қиламиз. Бу векторларни

$$\bar{x}_1(t) = \{x_1^1(t), x_1^2(t), x_1^3(t)\}, \quad \bar{x}_2(t) = \{x_2^1(t), x_2^2(t), x_2^3(t)\}, \ldots,$$
$$\bar{x}_N(t) = \{x_N^1(t), x_N^2(t), x_N^3(t)\}$$

кўринишида ёзиб,

$$a_{ij} = -\sum_{k=1}^{N} m_k x_k^i x_k^j + \delta^{ij} \sum_{k=1}^{N} m_k |\bar{x}_k|^2$$

формула билан симметрик $\{a_{ij}\}$ матрицани аниқлаймиз.

Агар қўзғалмас O нуқта орқали l тўғри чизиқ ўтказиб, унинг бирлик йўналтирувчи векторини $\bar{e} = \{e^1, e^2, e^3\}$ билан белгиласак жисмнинг l ўққа нисбатан инерция моменти $H(l)$ учун

$$H(l) = \sum_{ij} a_{ij} e^i e^j = -\sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{i=1}^{3} x_k^i e^i \sum_{j} x_k^j e^j + \sum_{ij} \delta^{ij} e^i e^j \sum_{1}^{N} m_k |\bar{x}_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(m_k \left(|\bar{x}_k|^2 - (\bar{x}_k, \bar{e}) \right)^2 \right)$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу скаляр миқдор жисмнинг инерция моментидир. Бу ердаги $\{a_{ij}\}$ матрица (2,0) типдаги тензор майдон бўлиб , у инерция моментлари тензори деб аталади.

3. **Деформация тензори**. Бизга R^n фазодаги бирорта G соҳани тўлдирувчи туташ муҳит берилган бўлсин. Бу муҳит ташқи куч таъсирида деформацияланса, $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ нуқта $(x^1 + u^1(x), \ldots, x^n + u^n(x))$ нуқтага ўтади. Иккита яқин $A(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ва $B(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ нуқталар орасидаги масофа

$$(\Delta e)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x^i-y^i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x^i\right)^2$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $y^i=x^i-\Delta x^i$ деб ҳисоблаймиз. Бу нуқталар деформациядан кейин $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ нуқталарга ўтса, $\widetilde{A}$ ва $\widetilde{B}$ нуқталар орасидаги масофа квадрати учун

$$(\Delta\widetilde{e})^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y^i+u^i(y)-x^i-u^i(x)\right)^2=\sum\left(\Delta x^i+\Delta u^i\right)^2=$$

$$=(\Delta e)^2+2\sum\Delta x^i\Delta u^i+\sum\left(\Delta u^i\right)^2$$

тенглик ўринли.

Агар $\Delta u^i=\sum\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\Delta x^k$ тенгликни ҳисобга олсак

$$(\Delta\widetilde{e})^2-(\Delta e)^2=2\sum_{i,k}\frac{\partial u_i}{\partial x^k}\Delta x^i\Delta x^k+\sum_i\left(\sum\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\Delta x^k\right)^2=$$

$$=2\sum_{i,k}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\Delta x^i\Delta x^k+\sum_{i,k,\rho}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^\rho}\Delta x^k\Delta x^\rho=$$

$$=\sum_{i,k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k}+\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)\Delta x^i\Delta x^k+\sum_{i,k,\rho}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^\rho}\Delta x^i\Delta x^\rho$$

тенгликни оламиз.

Агар деформацияни аниқловчи $u^i(x)$ функциялар старли даражада кичик бўлса,

$$(d\widetilde{e})^2-(de)^2\cong\sum_{i,k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k}+\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)dx^i dx^k \quad (1)$$

муносабат ўринли деб ҳисоблашимиз мумкин.

Биз

$$\eta_{ij}(x)=\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}$$

белгилаш ёрдамида (2,0) типдаги тензор майдонни аниқлаймиз. Бу тензор майдон деформация тензори деб аталади. Бу тензор ёрдамида (1) ни

$$(d\widetilde{e})^2-(de)^2=\eta_{ij}dx^i dx^j$$

кўринишда ёза оламиз. Бу ерда такрорланувчи индекслар бўйича йиғинди белгиси ёзилмаган.

§ 5. Кучланиш тензори ва Гук қонуни.

Деформацияланган эластик жисмда кучланиш пайдо бўлади. Жисмнинг P нуқтасидан ўтувчи текисликда бу нуқтани ўз ичига олувчи кичкина соҳачани dG, унинг P нуқтадаги нормал векторини $\vec{n}(P)$ билан белгилаб, соҳада нормал вектор ёрдамида ориентация киритамиз: $P \to \vec{n}(P)$ мослик узлуксиз бўлишини талаб қиламиз. Бу эластик жисмни P нуқта атрофида соҳача икки қисмга ажратади. Кучланиш деганда жисм бир қисмининг иккинчи қисмига таъсир кучи тушунилади. Бу кучни $\vec{F}$ билан белгиласак, у нормал векторнинг функцияси бўлади, чунки P нуқтадан ўтувчи текисликлар чексиз кўп, шунинг учун ҳар бир текисликда соҳачалар олиб, уларнинг шаклини эътиборга олмаймиз.

Механикада $\vec{F}$ кучни нормал векторнинг чизиқли функцияси деб ҳисобланади(бу ҳолда реал жараёндан жуда кўп узоқлашмаймиз). Бундан ташқари таъсир этувчи куч соҳа юзаси ds га тўғри пропорционал деб қабул қиламиз. Шунда

$$F^i = Q^i_j n^j ds$$

тенгликни оламиз. Бу ердаги матрица Q^i_j (1,1) типдаги тензор майдонни аниқлайди ва кучланиш тензори деб аталади. Кучланиш ва деформация тензори орасидаги боғланишни берувчи Гук қонуни

$$Q^i_j = \alpha^{ikl}_j \eta_{kl}$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда фазо ўлчами учга тенг бўлганлиги учун α^{ikl}_j, функциялар сони 81 та бўлади: $81 = 3^{r+s} = 3^4$.

IV- бобга доир машқ ва масалалар

1. Берилган

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ функциянинг $P(1,1,1)$ нуктадаги $\vec{a} = \{2,1,0\}$ вектор йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

Ечиш. Бунинг учун аввало f функциянинг градиентини топамиз:

$$\omega(x,y,z) = gradf = \left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}.$$

Биз биламизки, ω ковектор майдон бўлиб, унинг

$$\omega(1,1,1)(\vec{a}) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{0}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

қиймати f функциянинг P нуқтадаги $\vec{a}$ йўналиши бўйича ҳосиласидир. Бу ерда $\omega(x,y,z)$ ковектор $G=R^3/\{0,0,0\}$ соҳада аниқланган силлиқ ковектор майдондир.

2. Текисликда берилган $X(x,y)=\{y,x\}$ вектор майдоннинг интеграл чизиқларини топинг.

Бу вектор майдоннинг (x_0,y_0) нуқтадан чиқувчи интеграл чизиғини топиш учун

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x\end{cases}$$

системани $x(0)=x_0, y(0)=y_0$ бошланғич шартлар билан ечамиз. Бу ерда $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ матрицанинг хос сонлари $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$, хос векторлари эса $e_1=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix},\bar{e}_2=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$ векторлардан иборатдир.

Шунинг учун ечим вектор кўринишда $\bar{r}(t)=c_1\bar{e}_1e^{-t}+c_2\bar{e}_2e^{t}$ тенглама билан, координаталар орқали ёзсак

$$x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{t}$$

$$y(t)=-c_1e^{-t}+c_2e^{t}$$

тенгламалар билан берилади. Бошланғич шартларни ҳисобга олиб

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{x_0-y_0}{2}e^{-t}+\dfrac{x_0+y_0}{2}e^{t}\\[2mm] y(t)=\dfrac{x_0-y_0}{2}e^{-t}+\dfrac{x_0+y_0}{2}e^{t}\end{cases}\qquad(1)$$

тенгламаларни оламиз. Демак (x_0,y_0) нуқтадан чиқувчи интеграл чизиқ (1) параметрик тенгламалар билан берилади.

3. Доиравий цилиндрнинг Гаусс эгрилигини топинг.

Бунинг учун $x^2+y^2=R^2$ тенгламадан фойдаланиб

$$\begin{cases}x=u\\ y=\pm\sqrt{R^2-u^2} & -R<u<R\\ & -\infty<v<\infty\\ z=v\end{cases}$$

параметрик тенгламаларни ёзамиз. Аниқлик учун $P(u,v)$ нуқта атрофида $y=\sqrt{R^2-u^2}$ бўлсин.

Энди

$$\bar{r}_u = \left\{1, \frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2}}, 0\right\}, \bar{r}_v = \{0,0,1\}$$

$$\bar{r}_{uu} = \left\{0, \frac{2u^2-R^2}{\left(R^2-u^2\right)^{3/2}}, 0\right\}, \bar{r}_{uv} = \{0,0,0\}$$

$$\bar{r}_{vv} = \{0,0,0\}$$

ҳосилаларни ҳисобга олиб $R(\bar{r}_u, r_v)\bar{r}_u$ ни ҳисоблаймиз.

$$R(\bar{r}_u,\bar{r}_v)\bar{r}_u = \nabla_{\bar{r}_u}\nabla_{\bar{r}_v}\bar{r}_u - \nabla_{\bar{r}_v}\nabla_{\bar{r}_u}\bar{r}_u = 0 - \nabla_{r_v}\left(\Gamma_{12}^k\bar{r}_{u_k}\right) =$$

$$= -\Gamma_{12}{}^k\nabla_{\bar{r}_v}\bar{r}_{u_k} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\Gamma_{12}^k\right)\bar{r}_{u_k} = 0.$$

Бу ерда Γ_{12}^k–коэффициентлар g_{11}, g_{12}, g_{22} функциялар орқаси ифодаланади. Бизда эса $\{g_{ij}\}$ коэффициентлар фақат u га боғлиқ. Шунинг учун $\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^k = 0$ тенглик $k = 1,2$ бўлганда ўринлидир.

Демак,

$$K = -\frac{I\left(R\left(\bar{r}_u,\bar{r}_v\right)\bar{r}_u,\bar{r}_v\right)}{g_{11}^2 g_{22}^2 - g_{12}^2} = 0$$

Мустақил иш учун масалалар

1. Берилган функцияларнинг берилган нуқталарда кўрсатилган йўналишлар бўйича ҳосилалари ҳисоблансин.

1) $f(x,y,z) = x^2y + xz^2 - 2,\quad$ $P(1,1,-1), \bar{a} = \{1,-2,4\}$

2) $f(x,y,z) = xe^y + ye^x - z^2,\quad$ $P(3,0,2), \bar{a} = \{1,1,1\}$

3) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x},\quad$ $P(1,1,), \bar{a} = \{4,5\}$

2. Берилган функцияларнинг кўрсатилган нуқталардаги берилган чизиқлар йўналишлари бўйича ҳосилаларини топинг.

а) $f(x,y) = x^2 + y^2, P(1,2), \gamma : x^2 + y^2 = 5$

б) $f(x,y) = 2xy + y^2, P(\sqrt{2},1), \gamma : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

в) $f(x,y)=x^2-y^2, P(5,4), \gamma: x^2-y^2=9$

3. Бизга регуляр сиртда силлиқ Y вектор майдон берилган бўлса,

$$(Y,\omega)\to\omega(\nabla_x Y)$$

мослик (1,1) типдаги тензор майдонни аниқланишини кўрсатинг.

4. Эгрилик тензори ёрдамида икки ўлчамли сферанинг Гаусс эгрилигини топинг.

5. Эгрилик тензори ёрдамида эллиптик параболоиднинг Гаусс эгрилигини ҳисобланг.

6. Текисликда берилган $X(x,y)=\{x,y\}$ вектор майдоннинг интеграл чизиқларини топинг.

7. Текисликда берилган $X(x,y)=\{x,y\}$ ва $Y=\{y,-x\}$ вектор майдонларнинг коммутаторини топинг.

Адабиёт

1. Александров А.Д. Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М:Наука,1990
2. Азларов Т.А, Мансуров Х. Математик анализ. 1,2 қисмлар, Т., Ўзбекистон, 1994, 1995.
3. Бегматов А., Мусина Н.Г. Тензор ҳисоб элементлари. Т., Университет, 1993.
4. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. Ленинградский университет, 1981, стр. 232.
5. Нарманов А.Я. Кўпхилликларларнинг Эйлер характеристикаси. Т., ТошДУ нашриёти, 1990.
6. Нарманов А.Я, Пшеничнов ва бошқалар. Умумий топологиядан машқ ва масалалар. Т., ТошДУ нашриёти, 1996.
7. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1974.
8. Петрова В.Т. Лекции по алгебре и геометрии. Часть-1,2. М., Влад., 1999.

МУНДАРИЖА

Абдуғаппор Якубович Нарманов

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ

Муҳаррир З.Ахмеджанова

Босишга рухсат этилди 5.02.2003 й. Бичими 60×84 1/16. Офсет босма усулида босилди. Нашриёт ҳисоб табоғи 11,0. Шартли ҳисоб табоғи 19,3. Адади 2000 нусха. Баҳоси шартнома асосида. Буюртма № 53.

“Университет” нашриёти. Тошкент – 700174. Талабалар шаҳарчаси. ЎзМУ маъмурий бино, 2 қават 7 хона.

ЎзМУ босмахонасида чоп этилди.