ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ИҚТИСОДИЁТ УНИВЕРСИТЕТИ

А.БОЙЗОҚОВ, Ш.ҚАЮМОВ

# ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИ АСОСЛАРИ

(Ўқув қўлланмаси)

Тошкент - 2000

А.Бойзоқов, Ш.Қаюмов. Ҳисоблаш математикаси асослари. - Ўқув қўлланмаси. -Тошкент, ТДИУ, 2000. -166 б.

Мазкур ўқув қўлланмада ҳисоблаш математикасининг асосий тушунчалари баён қилинади. Қўлланмада хатолар назарияси, алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ечишнинг аниқ ва тақрибий усуллари, функцияларни интерполяциялаш, тақрибий дифференциаллаш ва интеграллаш, оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш ва корреляция назарияси тўғрисида сўз юритилади.

Ўқув қўлланма университетларнинг "Математика", "Амалий математика", "Физика", "Механика" ва шунингдек, иқтисодиёт университети ҳамда техника университети талабалари учун мўлжалланган.

Масъул муҳаррир - доц. Э.Бозоров.

Тақризчилар: доц. Э.Солиев, доц. Х.Жумаев

# КИРИШ

Ўқувчининг эътиборига ҳавола қилинаётган мазкур қўлланма, университетларнинг, педагогика институтларининг "Математика", "Амалий математика" ва "Физика", шунингдек, иқтисод ва техника университетларининг талабалари учун ҳам мўлжалланган бўлиб, унда ҳозирги замон фан ва техникасининг асосий бўлимларидан бири - ҳисоблаш усуллари назарияси асослари баён қилинади. Шу нарсани таъкидлаш лозимки, республикамизда давлат тилидаги дарсликлар етишмаслиги туфайли талабаларнинг мустақил билим олишида, олий ўқув юртларининг дастурлари асосида кенгроқ маълумот олишларида маълум қийинчиликлар сезилмоқда. Бундан ташқари, ҳисоблаш методлари бўйича чоп этилган деярли барча дарсликлар кўпроқ "Математика", "Амалий математика", "Механика" мутахассисликларига мўлжалланган бўлиб, иқтисодчи ва муҳандисларга маълум маънода оғирлик қилади. Буларни ҳисобга олган ҳолда ушбу қўлланма иқтисодчи ва муҳандислик мутахассисликлари бўйича таълим олаётган талабалар учун ҳам мўлжалланган бўлиб, содда ва равон тилда ёзилган.

Ҳозирги замон шахсий компьютерларида халқ хўжалигининг турли масалаларининг математик моделларини ечишда қўлланиладиган ҳисоблаш математикасининг асосий усулларини баён қилувчи дарслик зарур.

Дарсликни тайёрлашда машҳур олимлар томонидан яратилган адабиётлардан, жумладан: А.А.Самарский, В.Н.Крилов, В.В.Бобков, П.И.Монастирний, Г.И.Марчук, Н.Н.Яненко, А.Н.Тихонов, И.С.Березин, Н.П.Жидков, Б.П.Демидович, М.И.Исроилов ва бошқаларнинг дарсликлари ва рисолаларидан фойдаланилади.

Ўқув қўлланма хатолар назариясидан бошланиб, корреляция назариясигача бўлган бобларни ўз ичига қамраб олган.

Масалан, 3-бобда алгебраик ва трансцендент тенгламаларни тақрибий ечишнинг ватар ва уринмалар усули тўғрисида сўз юритилса, 4 ва 5-бобларда матрицалар алгебраси ва тенгламалар системасини ечишнинг аниқ ва тақрибий ечиш усуллари баёни берилган.

Шунингдек, ўқув қўлланмада тақрибий дифференциаллаш ва тақрибий интеграллашнинг қулай усуллари тўғрисида ҳар томонлама маълумотлар бериб ўтилган.

Оддий дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг кетма-кет яқинлашиш усули, Эйлер усули, Эйлер-Коши ва Рунге-Кутте усуллари тўғрисида сўз юритилади.

Чегаравий масалаларни ечишнинг тўр ва Галеркин усулларининг тўлиқ изоҳини беришга ҳаракат қилинди.

Ўқувчи баён этилган усулларни янада яхшироқ, амалий жиҳатдан мукаммал ўрганиши учун ҳар бир усул мисоллар ёрдамида батафсил ёритиб берилган.

"Ҳисоблаш математикаси асослари" китоби шу соҳада тажриба сифатида чиқарилаётгани учун, эҳтимол камчиликлардан ҳоли эмас. Шунинг учун ҳам, дарсликнинг баёни, мазмуни ҳақидаги барча фикр ва мулоҳазаларни муаллифлар миннатдорчилик билан қабул қиладилар.

# I-БОБ. ХАТОЛАР НАЗАРИЯСИ ҲАҚИДА АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

## 1.1. Тақрибий сон

Инсоният ўзининг амалий фаолияти давомида сонлар билан бевосита муносабатда бўлади. Сонлар - табиатнинг у ёки бу ҳодисаларини ўлчаш натижаларидир.

Кўпинча турмушда учрайдиган катталикларни аниқ ўлчаш мумкин эмас. Демак, биз бу катталикларни маълум аниқликкача ўлчаб, шу билан кифояланишга мажбурмиз. Шундай ҳоллар бўладики, бирор катталикни ўлчагандаги аниқлик, бошқа катталикни ўлчагандаги аниқликка мутлақо яроқсиз бўлиши мумкин. Масалан, уй қурилишида ярокли деб топилган ўлчов аниқлиги, станокда ишлаб чиқарилаётган деталнинг ўлчов аниқлигига мутлақо ярокcиз бўлиши табиий.

Масалани ечишда ишлатиладиган дастлабки маълумотлар асосан тажрибадан олинганлиги сабабли, аниқ қийматга эга бўлмасдан, тақрибий қийматга эгадир. Шу сабабли қўйилган масалани қандай аниқликда ечмайлик, дастлабки маълумотларнинг тақрибийлиги туфайли олинган ечим ҳам тақрибий характерга эга бўлади.

## 1.2. Абсолют ва лимит абсолют хато

Ҳисоблашлар охирида аниқ $A$ сондан сезиларсиз фарқ қиладиган $a$ сон **т а қ р и б и й  с о н** деб аталади.

Агар $a<A$ бўлса, $a$ тақрибий сон $A$ аниқ сондан ками билан олинган, $a>A$ бўлса, кўпи билан олинган дейилади.

**1-мисол.** $A=\sqrt{3}$ аниқ сон учун 1,732 тақрибий сон ками билан олинган бўлса, 1,733 кўпи билан олинган дейилади, яъни $1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733$.

**2-мисол.** $A=13{,}265$ кг аниқ сон учун 13 кг ками билан олинган бўлса, 13,5 кг кўпи билан олинган, яъни 13 кг $<$ 13,265 кг $<$ 13,5 кг.

Аниқ $A$ сон билан $a$ тақрибий сон орасидаги фарқ, тақрибий сонниг хатоси $\Delta a$ деб аталади:

$$\Delta a=A-a.$$

Агар $A>0$ бўлса, хато мусбат, яъни $\Delta a>0$, агар $A<a$ бўлса, хато $\Delta a<0$ манфий бўлади.

Аниқ $A$ сонни ҳосил қилиш учун тақрибий $a$ сонга унинг хатосини қўшиш керак:

$$A=a+\Delta a$$

Кўпинча хато ишораси номаълум бўлади, шунинг учун амалий масалаларда абсолют хато тушунчаси ишлатилади.

**1-таъриф.** Аниқ $A$ сон билан тақрибий $a$ сон айирмасининг абсолют қиймати $\Delta$, тақрибий сонниг абсолют хатоси деб аталади:

$$\Delta = |A - a|. \qquad (1.1)$$

Агар $A$ сони бизга маълум бўлса, абсолют хато (1.1) формула орқали осон ҳисобланади. Аммо амалий масалаларнинг кўпчилигида аниқ сонниг ўзини аниқлаш мумкин эмас. Масалан, бирор масофани 0,1 см аниқликкача ҳисоблаш сўралган бўлсин. Лекин, уни бундай аниқликда ҳисоблаб бўлмайди, чунки ўлчанаётган масофанинг ўзи аниқ нимага тенглиги бизга маълум эмас.

Шунинг учун кўпчилик амалий масалаларда номаълум абсолют хато $\Delta$ ўрнига, ундан кам бўлмаган лимитик абсолют хато тушунчасидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

**2-таъриф.** Абсолют хатосидан кичик бўлмаган ҳар қандай тақрибий сон **л и м и т  а б с о л ю т  х а т о** деб атлади.

Агар аниқ $A$ сонни тақрибий $a$ сон билан алмаштиргандаги лимит абсолют хатони $\Delta a$ билан белгиласак, у вақтда:

$$\Delta = |A - a| \le \Delta a, \qquad (1.2)$$

$$\Delta \le \Delta a \qquad (1.3)$$

ёки абсолют қиймат таърифига асосан

$$-\Delta a \le A - a \le \Delta a, \qquad (1.4)$$

бундан

$$a - \Delta a \le A \le a + \Delta a. \qquad (1.5)$$

Агар $a_1$ тақрибий сон $A$ аниқ сонга яқин бўлиб, ундан ошмаса ва $a_2$ тақрибий сон $A$ дан кам бўлмаса, у ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$a_1 \le A \le a_2, \qquad (1.6)$$

бу ерда $a_1 = a - \Delta a$ (ками билан олинган тақрибий сон), $a_2 = a + \Delta a$ (кўпи билан олинган тақрибий сон).

Лимит абсолют хатони ўрта арифметик қиймат қоидаси орқали ҳисоблаймиз. Тақрибий $a$ сонниг ўрта арифметик қиймати:

$$a = \frac{(a_1 + a_2)}{2}.$$

Энди $a_2 = a + \Delta a$ дан $a_1 = a - \Delta a$ ни айириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta a = \frac{a_2 - a_1}{2}.$$

Ушбу $\Delta a$ нинг қийматини (1.5) га қўйсак,

$$a - \frac{a_2 - a_1}{2} \le A \le a + \frac{a_2 - a_1}{2}, \text{ бундан } -\frac{a_2 - a_1}{2} \le A - a \le \frac{a_2 - a_1}{2}$$

ва натижада

$$|A - a| \le \frac{a_2 - a_1}{2}.$$

Шундай қилиб, $\frac{a_2-a_1}{2}$ тақрибий сон учун лимитик абсолют хато қуйидагидан иборат бўлади:

$$\Delta a=\frac{a_2-a_1}{2}.$$

**Мисол.** Агар $\sqrt{5}$ сони учун 2,236 ва 2,237 сонлар ками ва кўпи билан олинган тақрибий сонлардан иборат бўлса, у вақтда $a=\frac{2,236+2,237}{2}=2,2365$ сони $\sqrt{5}$ нинг тақрибий қийматидан иборат бўлиб, лимитик абсолют хато қуйидагига тенг бўлади:

$$\Delta a=\frac{2,237-2,236}{2}=\frac{0,001}{2}=0,0005.$$

### 1.3. Нисбий ва лимит нисбий хато

Биз юқорида кўриб ўтган абсолют ва лимит абсолют хатолар ўлчаш аниқлигини етарли даражада тўлиқ ифодалаб бера олмайди. Масалан, қурилишда қўлланилган ва етарли даражада аниқ деб топилган 5 см аниқликкача яроқли деб олинган лимитик абсолют хатони станокда ясаладиган детал учун қўллаб бўлмайди ёки омборда 1 кг гача тўғри деб топилган лимитик абсолют хато грамм ёки миллиграммларни ҳисобга оладиган лабораториялар учун мутлақо яроқсиздир. Шунинг учун биз тақрибий сонларнинг абсолют хатосидан ташқари, энинг нисбий ва нисбий лимит хатосини ҳам билишимиз зарур.

**3-таъриф.** Абсолют хатонинг $\Delta$ аниқ $A$ сон модулига нисбати тақрибий соннинг *нисбий хатоси* $\delta$ деб аталади:

$$\delta=\frac{\Delta}{|A|},\quad A\neq 0, \qquad (1.7)$$

бундан

$$\Delta=|A|\delta.$$

Агар 20*м* масофани ўлчаганда, абсолют хато 0,5*м* бўлиб, 1000*км* масофани ўлчашдаги абсолют хато 1*км* бўлса, уларнинг нисбий хатолари мос равишда:

$$\frac{0,5}{20}=0,025 \text{ ва } \frac{1}{1000}=0,001 \text{ бўлади.}$$

Амалда кўпинча нисбий хатолар фоизда олинади $(1\%,\ 1\%=0,01\delta a)$ ёки жуда аниқ ҳисоблашлар талаб қилинган масалаларда промиллида $(^0/_{00},\ 1^0/_{00}=0,001a)$ олинади. Бир промилли процентнинг ўндан бир қисмига тенг.

Олдин айтиб ўтганимиздек, абсолют хатони аниқлаш қийин бўлгани учун, унинг ўрнига лимит абсолют хато олинган эди. Худди шунингдек, нисбий хатони аниқлаш қийин бўлгани учун лимит нисбий хато аниқланади.

4-таъриф: Тақрибий сонининг нисбий хатосидан кичик бўлмаган ҳар қандай сон лимит нисбий хато - $\delta_a$ деб аталади:

$$\delta \le \delta_a , \qquad (1.8)$$

ёки

$$\frac{\Delta}{|A|} \le \delta_a , \qquad (1.9)$$

бундан

$$\Delta \le |A|\delta_a . \qquad (1.10)$$

Шундай қилиб, $a$ тақрибий сонинг лимит абсолют хатосини қуйидагича ёзиш мумкин

$$\Delta_a = |A|\delta_a . \qquad (1.11)$$

Амалда кўпинча аниқ $A$ сонининг ўзини аниқлаш қийин бўлгани учун $A \approx a$ деб олинади. Буни ҳисобга олсак, (1.11) формула қуйидагича ёзилади:

$$\Delta_a = a\delta_a .$$

Аниқ $A$ сон $a(1-\delta_a)$ ва $a(1+\delta_a)$ оралиқда ётгани учун, уни шартли равишда қуйидагича ёзиб оламиз:

$$A = a(1 \pm \delta_a).$$

Аниқлик учун $A > 0$, $a > 0$ ва $\Delta_a < a$ десак, у вақтда

$$\delta_a = \frac{\Delta}{A} \le \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a} . \qquad (1.12)$$

Бу ифодага лимит нисбий хатони ҳисоблаш формуласи деб аталади. Бундан лимит абсолют хатони ҳисоблаш формуласини ҳам келтириб чиқариш мумкин:

$$\Delta = A\delta \le (a + \Delta_a)\delta_a .$$

$\Delta_a = (a + \Delta_a)\delta_a$ тенгликдан қуйидаги лимитик абсолют хатони ҳисоблаш формуласини топамиз:

$$\Delta_a = \frac{a\delta_a}{1 - \delta_a} ,$$

агар $\Delta_a << a$ ва $\delta_a << 1$ бўлса, у вақтда

$$\delta_a \approx \frac{\Delta_a}{a}$$

деб олиш мумкин. Бундан $\Delta_a \approx a\delta_a$.

1-мисол. Геометрик фигуранинг юзи ўлчанганда 2,42 $м^2$ натижа олинган бўлиб, унинг лимитик абсолют хатоси $5 см^2$ бўлса, шу сонининг лимитик нисбий хатоси топилсин.

Берилган: $a = 2{,}42\ м^2 = 2{,}42 \cdot 10^4 см^2$, $\Delta_a = 5 см^2$.

Ечиш: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{a} = \frac{5\ см^2}{2{,}42 \cdot 10^4 см^2} = 2{,}066 \cdot 10^{-4}$ ёки фоиздаги қиймати

$$\delta_a = 2{,}066 \cdot 10^{-4} \cdot 100\% = 2{,}066 \cdot 10^{-2}\%.$$

**2-мисол.** Икки хил оғирликдаги дон тарозида ўлчаганда $125{,}46\,кг$ ва $4{,}33\,кг$ эканлиги аниқланди, ўлчанда лимитик абсолют хато $10\,г$ чегарагача қабул қилинди. Иккала ҳол учун ҳам лимит нисбий хато ҳисоблансин.

Берилган: $a_1 = 125{,}46\,кг = 125{,}46 \cdot 10^3\,г$, $a_2 = 4{,}15\,кг = 4{,}15 \cdot 10^3\,г$, $\Delta a_1 = \Delta a_2 = 10\,г$.

Ечиш: $\delta a_1 = \frac{\Delta a_1}{a_1} = \frac{10}{125{,}46 \cdot 10^3} = 0{,}0797 \cdot 10^{-3}$, $\delta a_2 = \frac{\Delta a_2}{a_2} = \frac{10}{4{,}15 \cdot 10^3} = 2{,}4096 \cdot 10^{-3}$.

## 1.4. Хатонинг асосий манбалари

Математика масалаларида учрайдиган хатолар асосан бешта гуруҳга бўлинади.

1. Математика масаласининг берилишида йўл қўйиладиган хато. Одатда, тузилган математик моделларнинг деярли ҳаммаси идеаллаштирилгандир. Демак, математик моделда формулалар реал ҳолатни айрим ҳоллардагина аниқ ифодалаши мумкин.

Одатда, математик моделларни тузиш жараёнида айрим чекланишлар ва шартларга эътибор берган ҳолда соддароқ модел тузишга тўғри келади. Бундай вақтда йўл қўйилган хато математик моделни тузишдаги масаланинг хатоси деб аталади.

Шундай ҳоллар ҳам бўладики, масалани аниқ қўйилган математик модел билан ечиш қийин, ҳатто мумкин эмас. У вақтда бу масалани унга яқин бўлган тақрибий масала билан алмаштириб ечиш мумкин. Демак, биз бу ерда қисман хатога йўл қўямиз. Бундай хато усулнинг хатоси деб аталади.

2. Математика формулаларидан фойдаланиш жараёнида, кўпинча чексиз кетма-кетлик ва қаторлардан фойдаланишга тўғри келади. Бу чексиз кетма-кетликларнинг лимити масаланинг ечими бўлади. Лекин, инсон тезкор ЭҲМлар ёрдамида ҳам чексиз кетма-кетликнинг ҳаммасини ҳисобга олишга қодир эмас. Шунинг учун чексиз кетма-кетликларнинг чекли сондаги ҳадларини олиш билан чекланамиз. Бунинг натижасида йўл қўйилган хато қолдиқ хато деб аталади.

3. Математика ва физика масалаларини ечишда қўлланиладиган айрим сонли параметрларнинг тақрибий олинишидир. Айтайлик, ҳамма физик катталиклар, жисмларнинг эркин тушиш тезланиши $g = 9{,}81\,м/с^2$, газ босимининг термик коэффициенти $\nu = \frac{1}{273}\,град^{-1}$ ва бошқалар.

Бундай хатоларни, биз шартли равишда бошланғич хато деб атаймиз.

4. Ҳисоблаш жараёнида қилинган хато. Рационал сонлар билан

арифметик амаллар бажариш жараёнида сонларда вергулдан кейин чексиз рақамлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Бундай вақтда вергулдан кейин маълум қоида асосида чекли сондаги рақамларни олиб ҳисоблашни давом эттирамиз.

Масалан: $\frac{1}{3} = 0,333....$, $\pi = 3,14159...$

Биз бу ерда 0,333 ва 3,142 сонларни олишимиз мумкин. Бунда йўл қўйилган хато яхлитлаш хатоси деб аталади.

5. Кўпинча математик амалларни бажариш жараёни тақрибий сонлар билан боғланган бўлиб, бу амаллар хатоси деб аталади. Маълумки, ҳисоблаш охирида қўлланилган тақрибий сонлар ва бошланғич хатоларни қандайдир йўллар билан ҳисобга олишга ҳаракат қилинади. Бундай ҳолларда амаллар хатоси тузатиб бўлмайдиган хато деб аталади.

## 1.5. Тақрибий сонларнинг қийматли ва ишончли рақамлари

Бизга маълумки, ҳар қандай тақрибий $a$ сони чекли ёки чексиз ўнли каср шаклида ифодалаш мумкин.

Агар ўнли каср шаклида ёзилган тақрибий сонинг чап томонидан бошлаб рақамларни кузатиб борсак, нолдан фарқли бўлган биринчи қийматли рақамга дуч келамиз.

Масалан: 5,2138... сондаги биринчи қийматли рақам 5 бўлса, 0,00028... да эса биринчи қийматли рақам 2 дан иборат бўлади.

Умуман, ҳар қандай тақрибий сон ўнли каср шаклида қуйидагича ифодаланади:

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \ldots \qquad (1.13)$$

Бундаги $\alpha_i$ лар тақрибий $a$ сонинг рақамларидан иборат бўлиб, $\alpha_i = \{0,1,2,...,9\}$ қийматларни қабул қилади. Бундан ташқари $m$ бутун сон бўлиб, $a$ сонда қатнашувчи 10 нинг энг юқори даражасидир.

1-таъриф. Ўнли каср шаклида ифодаланган нолдан фарқли ва ноль, агар у иккита қийматли рақам орасида жойлашган бўлса ёки ўнли хонани сақловчи номзоддан иборат бўлган ҳар қандай рақамга маъноли рақам деб аталади. Масалан: 0,0004070 сондаги чапдан биринчи тўртта ноллар маъноли рақам ҳисобланмайди, кейинги иккита ноллар маъноли рақамлардир, чунки улардан бири иккита маъноли рақамлар 4 ва 7 орасида жойлашган бўлса, охиридаги ноль эса ўнли хонани сақлашга хизмат қилади.

Агар сонлар одатдагидай ёзилган бўлса, унинг маъноли рақамларини аниқлаш ноқулай. Масалан: 764000 сонида нечта маъноли рақам борлигини айтиб бўлмайди, лекин бу сонда камида учта маъноли рақам бор. Бундай ноаниқликни йўқотиш учун, ушбу сонни ўнли каср шаклида ёзишга тўғри келади. Берилган сон учта маъноли рақамга эга бўлса $7,64 \cdot 10^5$, агар тўртта маъноли рақамга эга бўлса $7{,}640\cdot10^5$ ва хоказо. Сонларни бундай ўнли каср шаклида ёзиш анча кулай ва ихчамдир. Масалан, $0{,}0000000750 = 7{,}50\cdot10^{-9}$.

**2-таъриф.** Тақрибий соннинг биринчи $n$ та маъноли рақамлари чапдан ўнгга хисоблаганда $n$-маъноли рақам бўйича шу соннинг абсолют хатоси ярмидан ошмаса, шу $n$ та маъноли рақамлар ишончли рақамлар деб аталади.

Агар $a$ тақрибий соннинг аниқ $A$ қиймати маълум бўлса,

$$\Delta = |A-a| \le 10^{m-n+1}\cdot 0{,}5,$$

у вақтда 2-таърифга асосан тақрибий $a$ соннинг $n$ та рақами $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_{m-n+1}, \ldots$ ишончли бўлади.

**1-мисол.** $A_1 = 43{,}87$ аниқ сон учун $a_1 = 43{,}91$ сони учта ишончли рақам бўйича тақрибий сон бўлади, яъни таърифга асосан

$|A_1 - a_1| = |43{,}87 - 43{,}90| = 0{,}03 < \frac{1}{2}\cdot10^{-1-1+1} = \frac{1}{2}\cdot10^{-1}$, бундан: $|43{,}87 - 43{,}90| = 0{,}03 < \frac{1}{2\cdot10}$.

**2-мисол.** Қуйидаги $A_2 = 107{,}13$ аниқ сон учун унинг тақрибий қиймати $a_2 = 107{,}12$ тўртта ишончли рақамга эга. Чунки

$$|A_2 - a_2| = |107{,}13 - 107{,}12| = 0{,}01 < \frac{11}{2}\cdot10^{-1}.$$

## 1.6. Сонларни яхлитлаш

Кўпинча, амалиётда ўнли каср шаклида берилган сонларни яхлитлаб олишга тўғри келади. Аммо сонларни яхлитлаш учун хисобловчи маълум қоидаларга амал қилиши мақсадга мувофиқдир.

Ўнли каср шаклида берилган бирор $a$ аниқ ёки тақрибий сон ишончли рақамлар сони кам бўлган $a_1$ тақрибий сон билан алмаштирганда $|a_1 - a|$ фарқ энг кам бўлиши талаб қилинади.

Оммавий хисоблашларда қуйидаги яхлитлаш қоидаларига эътибор бериш тавсия қилинади.

1. Агар ташланадиган рақамлардан биринчиси 5 дан катта бўлса, қоладиган рақамларнинг энг охиргиси кучайтирилади, яъни унга 1 қўшиб ёзилади.

**Мисол.** Берилган $a = 2{,}35671$ сонни вергулдан кейин учта рақамгача яхлитлаш талаб қилинган бўлса, яхлитланган сон $a_1 = 2{,}357$ бўлади.

2. Агар ташландиган рақамлардан биринчиси 5 дан кичик бўлса, қоладиган рақамларнинг энг охиргиси кучайтирилмайди, яъни унга 1 қўшилмасдан ўзгаришсиз ёзилади.

**Мисол.** Берилган $a = 4{,}8144$ сонни вергулдан кейин учта ва иккита рақамгача яхлитлаш талаб қилинса, қуйидагича бўлади:

$$b_1 = 4{,}814 \quad \text{ва} \quad b_2 = 4{,}81.$$

3. Агар ташланадиган рақамлардан биринчиси 5 бўлиб, ундан кейинги

қийматли рақамлар бўлмаса, энг яқин жуфт сонни кўзда тутиб яхлитланади, яъни агар қоладиган охирги рақам жуфт бўлса кучайтирилмайди, агар тоқ бўлса, кучайтириб, 1 қўшиб жуфт қилинади. Бу жуфт рақам қоидаси деб аталади.

**1-мисол.** Берилган $a = 2{,}835$ сонни вергулдан кейин иккита рақамгача яхлитлаш талаб қилинган бўлса, бу сон $a_1 = 2{,}84$ бўлади.

**2-мисол.** $a = 3{,}0685$ сонида вергулдан кейин учта рақамгача яхлитлаш талаб қилинса, $a_1 = 3{,}068$ бўлади.

3-қоидани айрим сонларга татбиқ қилишимиз билан биз яхлитлашнинг аниқлик даражасини оширa олмаслигимиз ҳам мумкин.

Масалан, 0,2765 сони вергулдан кейин учта рақамгача яхлитланса, 0,276 бўлади. Демак, қоладиган охирги рақам кучайтирилмайди, лекин 0,277 ҳам 0,276 билан 0,2765 га бир хилда яқин сонлардан иборат.

Аммо биз кўп сонлар билан ҳисоблашларни бажарганимизда, кўпинча, ками билан яхлитлаб олинган сонлар, кўпи билан яхлитлаб олинган сонларга қарийб тенг бўлиб, ҳисоблаш натижаси хатонинг кам бўлишига олиб келади.

## 1.7. Хатони ҳисоблашнинг умумий формуласи

Бизга $n$ та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ эркли ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган дифференциалланувчи

$$U = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (1.14)$$

функция берилган бўлсин.

Бундаги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ эркли ўзгарувчиларнинг абсолют хатолари мос равишда $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ бўлсин. У вақтда функциянинг абсолют хатоси қуйидагича бўлади:

$$\Delta U = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Бундан

$$U + \Delta U = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots x_n + \Delta x_n) \qquad (1.15)$$

Энди $\Delta U$ ифодани аниқлаш учун (1.15) тенгламанинг ўнг томонини бир нечта ўзгарувчига боғлиқ бўлган функциялар учун Тейлор қаторига ёйиб чиқамиз:

$$f(x_1 + \Delta x_1, \ldots x_n + \Delta x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(\Delta x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + (\Delta x_n)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} + 2\Delta x_1 \Delta x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots\right] + \ldots$$

Одатда $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ абсолют хатолар $x_1, x_2, \ldots x_n$ ларга нисбатан жуда кичик бўлгани учун хусусий ҳосилаларнинг иккинчи ва ундан юқори тартибли ҳадларини ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

Демак, айтилганларга асосан (1.15)нинг Тейлор қаторига ёйилмаси қуйидагича ёзилади:

$$U+\Delta U=f(x_1,...,x_n)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+....+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (1.16)$$

Энди, (1.15) дан (1.14) ни айириб (1.16) ни эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta U=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \text{ ёки}$$

$$\Delta U=\frac{\partial U}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial U}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (1.17)$$

Бу $n$ та эркли ўзгарувчига боғлиқ бўлган $U$ функция учун абсолют хато ҳисоблаш формуласи деб аталади. Шунингдек $U$ функциянинг нисбий хатосини ҳисоблаш учун умумий формула қуйидагича бўлади:

$$\delta=\frac{\Delta U}{U}\approx\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{U}+...+\frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{U}. \qquad (1.18)$$

Амалий масалаларни ечишда, кўпинча, функциянинг ўзгарувчилар бўйича олинган хусусий ҳосилаларининг абсолют қийматини олиш анча қулайдир:

$$\Delta U=\left|\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|\Delta x_1+...+\left|\frac{\partial U}{\partial x_n}\right|\Delta x_n \text{ ва нисбий хато } \delta=\left|\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|\frac{\Delta x_1}{U}+...+\left|\frac{\partial U}{\partial x_n}\right|\frac{\Delta x_n}{U}.$$

Олдинги параграфларда айтиб ўтганимиздек, амалий масалаларнинг кўпчилигида абсолют ва нисбий хатолар ўрнига лимит абсолют ва лимит нисбий хатолар қабул қилишини эсга олсак, лимит абсолют хато:

$$\Delta_U=\left|\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|\Delta x_1+...+\left|\frac{\partial U}{\partial x_n}\right|\Delta x_n \qquad (1.19)$$

ва лимит нисбий хато

$$\delta_U=\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\ln U\right|\Delta x_1+...+\left|\frac{\partial}{\partial x_n}\ln U\right|\Delta x_n. \qquad (1.20)$$

**Мисол.** Берилган $U=x_1+x_2^2+x_3^3$ функциянинг $x_1,x_2$ ва $x_3$ қийматларида лимит абсолют хато ва лимит нисбий хатолари топилсин.

$$x_1=2{,}24(\pm0{,}01);\ x_2=4{,}15(\pm0{,}01);\ x_3=8{,}18(\pm0{,}01).$$

Ечиш: $x_1=2{,}24;\ x_2^2=17{,}2225,\ x_3^3=547{,}3434;\ U=566{,}8059;\ \frac{\partial U}{\partial x_1}=1;\ \frac{\partial U}{\partial x_2}=2x_2;\ \frac{\partial U}{\partial x_3}=3x_3^2$

Лимит абсолют хатони ҳисоблаймиз:

$$\Delta_U=\left|\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|\Delta x_1+\left|\frac{\partial U}{\partial x_2}\right|\Delta x_2+\left|\frac{\partial U}{\partial x_3}\right|\Delta x_3=1\cdot0{,}01+2\cdot4{,}15\cdot0{,}01+3\cdot(8{,}18)^2\cdot0{,}01=2{,}1004$$

Энди лимит нисбий хатони ҳисобласак,

$$\delta_U=\frac{2{,}1004}{566{,}8059}=0{,}0037 \text{ ёки буни фоизда ёзсак, } \delta_U=0{,}37\% \text{ бўлади.}$$

## 2-БОБ. ФУНКЦИЯ ҚИЙМАТИНИ ҲИСОБЛАШ

### 2.1. Умумий мулоҳазалар

Ҳисоблаш машиналари ёрдамида формула кўринишида берилган функцияларнинг қийматини ҳисоблаш маълум маънода ушбу формулаларнинг қандай кўринишда ёзилишига боғлиқдир. Математик нуқтаи назарда бир-бирига эквивалент бўлган ифодалар тақрибий ҳисоблашда бир-бирига эквивалент бўлмаслиги ҳам мумкиндир. Шу сабабли амалий жиҳатдан муҳим бўлган масала, яъни элементар функцияларнинг энг қулай аналитик кўринишдаги ифодаларини топиш масаласи вужудга келади.

Бизга маълумки, ҳар қандай ЭҲМдаги ҳисоблаш операцияларининг кўпчилиги арифметик амаллар (қўшиш, айриш, кўпайтириш ва бўлиш) ва мантиқий амаллар ёрдамида бажарилади.

Демак, биз ечилаётган математик масалани кетма-кет бажарилаётган элементар операциялар деб тасаввур қилишимиз заруур экан.

Агар ҳисоблаш математикасида функция қийматини ҳисоблаш жараёнини такрорланувчи циклларга келтириб олишга эришилса, ҳисоблаш яхши натижа беради.

Қуйида биз ўқувчиларни функция қийматини ҳисоблашнинг айрим усуллари билан таништириб чиқамиз.

### 2.2. Кўпҳад қийматини ҳисоблаш. Горнер схемаси

Ихтиёрий $n$-даражали кўпҳад берилган бўлсин:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n. \qquad (2.1)$$

Бу ердаги $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициентлар ҳақиқий сонлардан иборат.

Бу кўпҳад бирор $x = \xi$ қийматда ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин:

$$P_n(\xi) = a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \xi + a_n. \qquad (2.2)$$

$P_n(\xi)$ кўпҳаднинг қийматини ҳисоблаш учун (2.2) ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$P_n(\xi) = (\ldots(((a_0 \xi + a_1)\xi + a_2)\xi + \ldots + a_{n-1})\xi + a_n).$$

Бу ерда қуйидаги сонлар кетма-кетлиги тартиб билан ҳисобланади:

$$\left.\begin{array}{l} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 + b_0 \xi, \\ b_2 = a_2 + b_1 \xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n = a_n + b_{n-1} \xi \end{array}\right\}, \qquad (2.3)$$

бу ерда $b_n = P_n(\xi)$.

Биз бу ердаги $b_0=a_0,\ b_1,\dots,b_{n-1}$ сонлар $P_n(x)$ кўпҳадни $x=\xi$ га бўлганда ҳосил бўлган бўлинма - $P_{n-1}(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари эканлигини кўрсатамиз. Умумий олганда, $P_{n-1}(x)$ кўпҳаднинг кўриниши қуйидагича бўлсин:

$$P_{n-1}(x)=\beta_0 x^{n-1}+\beta_1 x^{n-2}+\dots+\beta_{n-1}, \qquad (2.4)$$

демак,

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)(x-\xi)+\beta_n. \qquad (2.5)$$

Безу теоремасига асосан қолдиқ ҳад $\beta_n$ қуйидагидан иборат:

$$\beta_n=P_n(\xi).$$

Энди (2.4) ва (2.5) формулалардан қуйидагига эга бўламиз:

$$P_n(x)=\left(\beta_0 x^{n-1}+\beta_1 x^{n-2}+\dots+\beta_{n-1}\right)(x-\xi)+\beta_n.$$

Қавсларни очиб, ўхшаш ҳадларини ихчамлайлмиз:

$$P_n(x)=\beta_0 x^n+(\beta_1-\beta_0\xi)x^{n-1}+\dots+(\beta_{n-1}-\beta_{n-2}\xi)x+(\beta_n-\beta_{n-1}\xi). \qquad (2.6)$$

Энди (2.1) ва (2.6) даги кўпҳадларнинг бир хил даражалари бўйича коэффициентларини тенглаштириб оламиз:

$$\begin{array}{lcl}
\beta_0=a_0, & & \beta_0=a_0,\\
\beta_1-\beta_0\xi=a_1, & & \beta_1=a_1+\beta_0\xi,\\
\beta_2-\beta_1\xi=a_2, & ,\ \text{бундан} & \beta_2=a_2+\beta_1\xi,\\
\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\\
\beta_{n-1}-\beta_{n-2}\xi=a_{n-1}, & & \beta_{n-1}=a_{n-1}+\beta_{n-2}\xi,\\
\beta_1-\beta_{n-1}\xi=a_n & & \beta_1=a_n+\beta_{n-1}\xi.
\end{array}$$

Ҳосил бўлган ифодани (2.3) билан таққосласак, $\beta_0=b_0,\ \beta_1=b_1,\dots,\beta_n=b_n$ эканлиги келиб чиқади.

Биз юқоридаги натижани исбот қилишни олдимизга мақсад қилиб қўйган эдик.

Шундай қилиб (2.3) формула ёрдамида бўлиш амалини бажармасдан $P_n(x)$ кўпҳаднинг коэффициентларини ва $P_n(x)$ қолдиқ ҳадини топиш мумкин. Бу ердаги $b_0,b_1,b_2,\dots,b_{n-1}$ сонлар Горнер схемаси деб аталадиган усул билан топилади.

Амалий ҳисоблашларда қўлланиладиган бу схемага асосан (2.3) тенгликлар қуйидагича ёзиб олинади:

$$\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\
 & b_0\xi & b_1\xi & \cdots & b_{n-1}\xi\\
\hline
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n=P_n(\xi)
\end{array}$$

Бу ерда $b_0=a_0$ бўлиб, охирги қатордаги қолган ҳамма сонлар уларнинг устида турган иккита соннинг йиғиндисидан иборатдир.

Горнер схемаси бўйича $P_n(x)$ кўпҳаднинг бирор $x=\xi$ даги қийматини ҳисоблаш учун $n$ та кўпайтириш ва $n-k$ та қўшиш амаллари бажарилади. Бу ерда $k$ сони $a_i$ коэффициентларининг ноллари сони. Оддий йўл билан ҳисоблаганда фақат кўпайтиришнинг ўзига $2n-1$ та амал бажаришга тўғри келади.

Ҳозирги найтгача ҳисоблаш математикасида функция қийматини Горнер схемасидек содда ва тез ҳисоблайдиган бирорта усул топилган эмас. Горнер схемасининг устунлиги, у машина вақтини яхши тежайди.

1-мисол. Қуйидаги берилган $P_n(x)=2x^3-3x^2+5x+4$ кўпҳад $x=2$ қийматда ҳисоблансин.

Ечиш. Горнер схемасини тузамиз:

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 5 & 4 \\ & 2\cdot 2 & 1\cdot 2 & 7\cdot 2 \\ \hline 2 & 1 & 7 & 18=P(2) \end{array}$$

Ҳақиқатан ҳам $P(2)=2\cdot 2^3-3\cdot 2^2+5\cdot 2+4=18$.

2-мисол. $P(x)=x^3-2x^2+8x+5$ кўпҳад $x=3$ қийматда Горнер схемаси бўйича ҳисоблансин.

Ечиш:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 8 & 5 \\ & 3 & 3 & 33 \\ \hline 1 & 1 & 11 & 38=P(3) \end{array}$$

Текшириш: $P(3)=3^3-2\cdot 3^2+8\cdot 3+5=38$.

Ушбу мисолда арифметик амаллар сонини ҳисоблаймиз. Горнер схемасида кўпайтириш $1\cdot 3$; $1\cdot 3$; $11\cdot 3$ амали 3 марта бажарилди, қўшиш амали ҳам $-2+3$; $8+3$; $5+33$ 3 марта бажарилди. Жами 6 та амал бажарилди.

Текширишда кўриниб турибдики, оддий усулда эса кўпайтириш $3\cdot 3\cdot 3$; $2\cdot 3\cdot 3$; $8\cdot 3$ амали 5 марта, қўшиш амали 3 марта бажарилди. Жами 8 та амал бажарилади.

# 3-БОБ. АЛГЕБРАИК ВА ТРАНСЦЕНДЕНТ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

## 3.1. Алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ечишнинг тақрибий усуллари

Алгебраик ва трансцендент тенгламалар мураккаб бўлса, уларнинг аниқ ечимини айрим ҳолларда гина топиш мумкин. Умуман олганда, уларнинг аниқ ечимларини топиш мумкин эмас.

Бу биринчи навбатда трансцендент тенгламаларга, яъни номаълум трансцендент функциянинг аргументи бўлган тенгламаларга таалуқлидир. Шунингдек, бешинчи ва ундан юқори даражали ҳар қандай алгебраик тенгламаларнинг радикалларида ечилмаслиги амалий жиҳатдан исботланган.

Тенгламаларнинг аниқ ечимини топиш кўпгина ҳолларда зарур бўлмайди. Тенгламаларнинг илдизларини керакли аниқликда топа олсак ва бунда йўл қўйилиши мумкин бўлган хатоликнинг чегарасини кўрсата олсак, тенгламаларнинг илдизларини топиш масаласи амалда ҳал этилган бўлади. Шунинг учун тенгламаларнинг илдизларини маълум аниқликкача ҳисоблаш муҳим аҳамиятга эгадир.

Биз бу бобда юқори тартибли алгебраик ва трансцендент тенгламаларнинг ҳақиқий илдизларини тақрибий ечиш усуллари билан танишиб чиқамиз.

Бу ерда таклиф қилинадиган усуллар алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ЭҲМларда ҳисоблашга кенг имконият яратади ҳамда ҳисоблаш жараёнида мумкин қадар ҳисобловчининг меҳнатини енгиллаштиришига ёрдам беради.

Бу усуллардан қайси бирини танлаш ҳисобловчининг хоҳишига боғлиқ. Масалан, қуйидаги тенглама берилган бўлсин:

$$f(x)=0.$$

Бу ерда $f(x)$ функция $a<x<b$ чекли ёки чексиз оралиқда аниқланган ва узлуксиз. Бундан ташқари, $f(x)$ функциянинг $f'(x)$ биринчи ва айрим ҳолларда иккинчи тартибли ҳосилалари мавжуд бўлсин.

Агар $f(x)$ функция қандайдир $\xi$ қийматда нолга айланса, яъни

$$f(\xi)=0.$$

У вақтда $\xi$ (3.1) тенгламанинг аниқ илдизи ёки $f(x)$ функциянинг ноли деб аталади.

Агар (3.1) тенгламанинг илдизлари маълум бир атрофли соҳаларга эга бўлиб, шу атрофли соҳаларда тенгламанинг битта илдизидан бошқа илдизлари бўлмаса, бундай ажралган илдизлар деб аталади.

Тенгламанинг яккаланган ҳақиқий илдизини топиш икки босқичда олиб борилади.

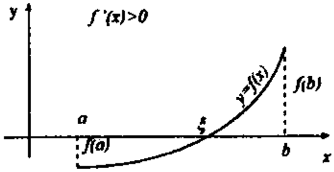
1. Илдизларни ажратиш, яъни иложи борича шундай кичик оралиқ олиш керакки, натижада, шу оралиқда (3.1) тенгламаларнинг битта ва фақат битта илдизи мавжуд бўлсин.

2. Тақрибий илдизларни аниқлаштириш, яъни уни етарли аниқлик даражасида давом эттириш.

Алгебраик ва трансцендент тенгламаларнинг илдизларини ажратиш учун математик анализ курсидаги қуйидаги теоремалардан фойдаланамиз:

Теорема 1. Агар узлуксиз $f(x)$ функция ўзининг ҳар хил ишорали қийматларини $[a,b]$ кесманинг четларида қабул қилиб, $f(a)\cdot f(b)<0$ шарт бажарилса, у вақтда $f(x)=0$ тенгламанинг $[a,b]$ кесмада ҳеч бўлмаганда битта ҳақиқий илдизи мавжуд бўлади, яъни шундай $\xi\in(a,b)$ сон топиладики, $f(\xi)=0$ бўлади.

Агар $f(x)$ функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи мавжуд бўлиб, у $(a,b)$ оралиқда ўзгармас ишорани сақласа, яъни $f'(x)>0, f'(x)<0$, у вақтда (3.1) тенглама ягона $\xi$ илдизга эга бўлади (1-чизма).




1-чизма.

Илдизларни ажратиш жараёни $f(x)$ функциянинг оралиқни четки нуқталаридаги ишораларини аниқлаш билан бошланади. $[a,b]$ кесманинг ички нуқталарида $f(x)$ функциянинг ишоралари текшириб борилади. Агар $(a_k,a_{k+1})$ оралиқда $f(a_k)f(a_{k+1})<0$ шарт бажарилса, юқоридаги теоремага асосан (3.1) тенгламанинг мавжуд илдизи бўлади.

Шу оралиқдаги илдиз тенглама учун ягона илдиз бўла оладими ёки йўқми, бунга ишонч ҳосил қилиш учун амалиётда тенг иккига (яримга) бўлиш усули ишлатилади. Яримга бўлиш усулининг маъноси шундан иборатки, оралиқни иккига, тўртга, саккизга ва ҳоказо тенг оралиқларга бўлиб, ҳар бир оралиқнинг четки нуқталарида $f(x)$ функциянинг ишоралари аниқлаб борилади.

Тенгламанинг илдизларини тақрибан график усулда ҳам аниқлаш мумкин, чунки $f(x)$ функция эгри чизиғининг $OX$ ўқ билан кесишган нуқтаси тенгламанинг ҳақиқий илдизидан иборатдир.

Биз бу усул билан кейинги бўлимда батафсил танишиб ўтамиз.

**Мисол 1.** Қуйидаги $f(x)=1{,}2x^3-8{,}2x+3=0$ тенгламанинг илдизлари ажратилсин.

**Ечиш:** Берилган тенглама $x=-3$ да манфий ишорани қабул қилади, яъни:

$$f(-3)=-1{,}2\cdot 27-8{,}2\cdot(-3)+3=-4{,}8<0.$$

$x=-2$ да мусбат ишорага эга

$$f(-2)=-1{,}2\cdot 8-8{,}2\cdot(-2)+3=9{,}8>0.$$

Демак, берилган тенгламанинг битта илдизи $(-3;-2)$ оралиқда жойлашган. Шунингдек, тенгламанинг яна иккита илдизлари $(0;1)$ ва $(1;3)$ оралиқларда мавжуд эканлигини аниқлаш мумкин.

Демак, тенглама учта ҳақиқий илдизга эга бўлиб, булар $(-3;-2)$, $(0;1)$ ва $(1;3)$ оралиқларда жойлашган экан.

**Мисол 2.** Қуйидаги $f(x)=\frac{2}{3}x+e^{2x}+4$ трансцендент тенгламанинг ҳақиқий илдизлари аниқлансин.

**Ечиш:** $f(x)$ функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи

$$f'(x)=\frac{2}{3}+2e^{2x}=2\left(\frac{1}{3}+e^{2x}\right)>0,$$

ва $f(-\infty)=-\infty$, $f(+\infty)=+\infty$ қийматларга эга бўлиб, берилган тенглама фақат битта ҳақиқий илдизга эгадир.

Алгебраик ва трансцендент тенгламаларни тақрибий ечишда йўл қўйиладиган хатони умумий ҳолда баҳолаш учун қуйидаги теоремани кўриб чиқамиз.

**Теорема 2.** Агар $[a,b]$ кесмада $\xi$ сони $f(x)=0$ тенгламанинг аниқ, $\bar{x}$ эса тақрибий ечимидан иборат бўлиб, бундан ташқари иккаласи ҳам $a\le x\le b$ кесмада жойлашган бўлиб, $|f'(x)|\ge m_1>0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги баҳо ўринлидир:

$$|\bar{x}-\xi|\le\frac{f(\bar{x})}{m_1} \qquad (3.2)$$

Исбот. $f(x)=0$ тенгламанинг $x=\xi$ аниқ ечими $(f(\xi)=0)$ эканлигини ҳисобга олиб Лагранж теоремасини қўлласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$f(\bar{x})-f(\xi)=(\bar{x}-\xi)f'(C),$$

бу ерда $C$ - $\bar{x}$ ва $\xi$ лар орасидаги сон, яъни $C\in(a,b)$.

Энди $f(\xi)=0$ ва $|f'(C)|\ge m$ эканлигини эътиборга оламиз

$$|f(\bar{x})-f(\xi)|=|f(\bar{x})|\ge m_1|\bar{x}-\xi|, \text{ натижада,}$$

$$|\bar{x}-\xi|\le\frac{|f(\bar{x})|}{m_1} \qquad (3.3).$$

Хусусий ҳолда $m_1$ ўрнига $a\le x\le b$ кесмада $f'(x)$ нинг энг кичик қийматини олиш мумкин.

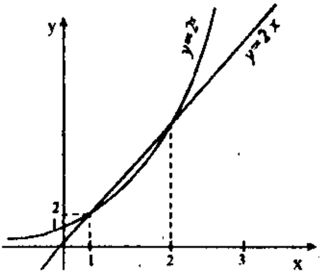
*Эслатма.* Баъзи бир ҳолларда (3.2) формула кўпроқ натижа бериши мумкин. Бундай ҳолларда $[a,b]$ ораликни маълум бир усуллар билан торайтириб, хатони қуйидагича ҳам баҳолаш мумкин: $|\bar{x}-\xi|\le(b-a)$.

## 3.2. Алгебраик ва трансцендент тенгламаларни график усулда ечиш

Тенгламаларнинг илдизларини график усул билан ечишни қараймиз. Маълумки, $y=f(x)$ функциянинг $OX$ ўқ билан кесишган нуқтаси тенгламанинг ҳақиқий илдизидан иборат бўлар эди. Тенгламанинг илдизини график усулда аниқлаш учун, кўпинча, (3.1) тенгламани унга тенг кучли бўлган тенглама билан алмаштириб олинади, яъни $\varphi(x)=\psi(x)$, бу ерда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $f(x)$ функцияга нисбатан ҳисоблашга қулай бўлган содда функциялардан иборат. $y=\varphi(x)$ ва $y=\psi(x)$ функциялар графикларини чизиб, изланаётган илдизларни шу эгри чизиқларнинг абцисса ўқида кесишган нуқталарида ахтарамиз. Тенгламани бундай ечиш график усул деб аталади.

Мисол. Берилган $y=2^x-2x=0$ тенгламани график усулда ечинг.

Ечиш. Берилган тенгламани $2^x=2x$ кўринишда ёзиб оламиз, кейин $y=2^x$ ва $y=2x$ функцияларнинг графикларини чизиб оламиз (2-чизма.).




2-чизма.

Берилган $2^x-2x=0$ тенглама 2та: $x_1=1$ ва $x_2=2$ илдизга эга.

## 3.3. Тенг иккига бўлиш усули

Қуйидаги тенглама берилган бўлсин:

$$f(x)=0 \qquad (3.4)$$

Бу ерда $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз, бундан ташқари унинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларни қабул қилиб, $f(a)\cdot f(b)<0$ шарт бажарилсин.

(3.4) тенгламанинг $[a;b]$ кесмада ётган илдизини топиш $\xi=\frac{a+b}{2}$ ҳақиқий сон (3.4) тенгламанинг илдизидан иборат бўлади (лекин бундай ҳол амалий масалаларда деярли учрамайди). Агар $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$ бўлса, у вақтда $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ ёки $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ кесмаларнинг чегараларида функциянинг ишораси ҳар хил бўлган кесма танлаб олинади.

Биз шартли равишда танлаб олинган кесмани $[a_1;b_1]$ деб белгилаб оламиз. Янги, торайган $[a_1;b_1]$ кесмани яна тенг иккига бўлиб, ҳар бир кесма чегараларида функция ишораларини текшириб борамиз. Натижада, маълум бир босқичда берилган (3.4) тенгламанинг аниқ ечимини ёки бир-бирининг ичида жойлашган чексиз $[a_1;b_1]$, $[a_n;b_n]$ кесмалар кетма-кетлигини ҳосил қиламизки,

$$f(a_n)f(b_n)<0,\ (n=1,2,3\dots) \qquad (3.5)$$

шарт бажарилади ва натижада охирги, торайган кесма қуйидагидан иборат бўлади:

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a). \qquad (3.6)$$

Бу ерда кесмаларнинг чап тарафининг охирги нуқталари $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\dots$ камаймайдиган монотон кетма-кетликдан иборат бўлса, ўнг тарафининг охирги нуқталари $b_1,b_2,\dots b_n,\dots$ эса ўсмайдиган монотон кетма-кетликдан иборат бўлади. Натижада, (3.6) тенгликнинг лимити

$$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n \qquad (3.7)$$

берилган (3.4) тенгламанинг илдизидан иборат бўлади.

Бунда йўл қўйилган хато $\Delta x_n=\frac{b-a}{2^n}$, талаб қилинган $\varepsilon$ (бу масала шартида берилган бўлади) аниқлик билан солиштириб чиқилади. Агар $\Delta x_n\le\varepsilon$ шарт бажарилса, масала ечилган бўлади ва унинг ечими $\xi=x_n\pm\Delta x_n$ бўлади.

**Мисол.** Тенг иккига бўлиш усули* ёрдамида $[0,1]$ кесмада $f(x)=x^3+2x-1=0$ тенгламанинг битта илдизи $\xi=0{,}01$ аниқликкача топилсин.

**Ечиш.** Тенг иккига бўлиш жараёнини қуйидаги кўринишда ёзиб чиқамиз:

$$f(0)=0^3+2\cdot 0-1=-1<0;\quad f(1)=1^3+2\cdot 1-1=2>0;$$
$$f(0{,}5)=0{,}5^3+2\cdot 0{,}5-1=0{,}125>0;\quad f(0{,}25)=0{,}25^3+2\cdot 0{,}25-1=-1{,}484375<0,$$
$$f(0{,}375)=0{,}375^3+2\cdot 0{,}375-1=-0{,}198265625<0;$$
$$f(0{,}4375)=0{,}4375^3+2\cdot 0{,}4375-1=-0{,}0413<0,$$
$$f(0{,}46875)=0{,}46875^3+2\cdot 0{,}46875-1=0{,}0404>0.$$

Бу ерда торайган $[0{,}4375;\ 0{,}46875]$ кесмада тенгламанинг битта тақрибий илдизи сифатида қуйидагини олиш мумкин:

$$\xi = \frac{1}{2}(0{,}4375 + 0{,}46875) = 0{,}453125$$

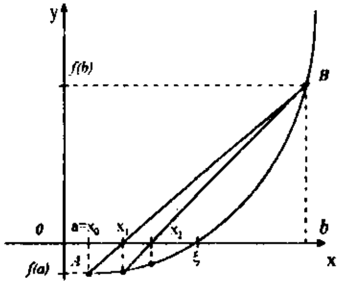
Тенг иккига бўлиш усули электрон ҳисоблаш машиналари учун анча қулай усул бўлиб ҳисобланади, аммо бу усул берилган тенгламанинг кўпроқ ечимларини топишга мослашгандир. Тенгламанинг аниқроқ ечимини топиш учун жуда кўп ҳисоблаш ишларини бажаришга тўғри келадики, бу ЭҲМлар учун анча вақт сарфлашни талаб этади.

Биз кейинги бўлимларда бошқа усуллар ёрдамида тенгламаларнинг аниқроқ ечимларини топиш билан танишиб чиқамиз.

### 3.4. Пропорционал бўлиш усули (ватар усули)

Энди (3.4) тенгламанинг илдизини берилган $[a;b]$ кесмада тез ва аниқроқ топиш усули билан танишиб чиқамиз. Берилган $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва унинг чегараларида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлиб, $f(a)\cdot f(b) < 0$ шарт бажарилсин.

Биз бу ерда яқинлашиш жараёнини кўрсатиш учун функциянинг илдизи ажралган ва иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосила $[a;b]$ кесмада ўзгармас ишорани сақлайди, деб фараз қиламиз. Аниқлик учун $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ ва $f''(x) > 0$ (3-чизма).




3-чизма.

Бу ерда $[a;b]$ кесмани тенг иккига бўлиш ўрнига ундан табиийроқ бўлган бўлиш усулини, яъни $f(a) : f(b)$ нисбатини қараймиз. Демак, берилган $[a;b]$ кесма $[a, x_1]$ ва $[x_1; b]$ кесмаларга бўлинади (3-чизма).

Пропорционал бўлиш усулининг геометрик маъноси $y = f(x)$ эгри чизиқни $A[a; f(a)]$ ва $B[b; f(b)]$ нуқталардан ўтувчи ватар билан алмаштиришдан иборатдир. $AB$ ватар тенгламаси қуйидагидан иборат:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}. \qquad (3.8)$$

Бу ерда $x = x_1$ ва $y = 0$ деб олсак, (3.8) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \qquad (3.9)$$

Агар $h_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$ деб белгиласак, (3.9) дан $x_1 = a + h_1$ кўринишдаги (3.4) тенгламанинг тақрибий илдизини топган бўламиз.

$a = x_0$ ни эътиборга олсак, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - a)$.

Шунингдек, $A_1[x_1; f(x_1)]$ ва $B[b, f(b)]$ нуқталар орқали $OX$ ўқни $x_2$ нуқтада кесиб ўтувчи $AB$ ватарни ўтказиб $x_2$ тақрибий илдизни топамиз:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1). \qquad (3.10)$$

Чизмадан кўриниб турибдики $x_2$ нинг қиймати $\xi$ илдизга $x_1$ га нисбатан анча яқиндир.

Бу жараённи кетма-кет давом эттириб, $(n+1)$-яқинлашиш $x_{n+1}$ ни ҳисоблайдиган қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n). \qquad (3.11)$$

(3.11)-формулага $\xi$ илдизга кетма-кет яқинлашувчи тақрибий илдизни топиш формуласи дейилади. $x$ нинг топилган қийматлари $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi \ldots < b$ монотон ўсувчи кетма-кетликни ташкил қилади.

Агар $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ ва $f''(x) > 0$ бўлса, кетма-кет яқинлашувчи $x_{n+1}$ тақрибий илдизни ҳисоблаш учун қуйидаги формула қўлланади (3-чизма):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a). \qquad (3.12)$$

Умуман, $f'(x)$ ва $f''(x)$ ҳосилаларнинг ишораларига комбинация асосан $y = f(x)$ эгри чизиқ координата текислигида тўрт хил кўринишда жойлашади.

1. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ ва $f''(x) > 0$ бўлганда, эгри чизиқ ватардан пастда жойлашган бўлади (3-чизма).

2. $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$ ва $f''(x) > 0$ бўлса ҳам, эгри чизиқ ватардан пастда жойлашган бўлади (3-чизма).

3. $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$ ва $f''(x) < 0$.

4. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ ва $f''(x) < 0$.

3 ва 4 ҳолларда $f(x)$ функция қавариқ функция бўлганлигидан, эгри чизиқ ватардан юқорида жойлашган бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз: ватар усули ёрдамида илдизларни аниқлаганда, унинг битта нуқтаси ҳаракатланувчи бўлса, иккинчиси ҳаракатланмайдиган бўлади. Демак, $f(a) \, f''(x) < 0$ шарт бажарилса, (3.11) формула қўлланилади.

Иккала ҳолда ҳам ҳар бир кейинги $x_{n+1}$ яқинлашиш $x_n$ га нисбатан $\xi$ га яқинроқ бўлади.

Энди ватар усулининг хатосини баҳолаймиз. $f'(x)$ ҳосила $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва ўзининг ишорасини сақлайди, деб фараз қиламиз. $\xi$ ва $x_n$ (3.1) тенгламанинг аниқ ва тақрибий ечимларидан иборат бўлсин, у вақтда:

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}| \qquad (3.13)$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, бу ерда $m_1$ ва $M_1$ ларни $[a;b]$ кесмада $f'(x)$ нинг модули бўйича энг катта ва энг кичик қийматларни олиш мумкин. Хусусий ҳолда, агар $[a;b]$ кесма жуда қисқа бўлса, $M_1 < 2m_1$ деб олиш мумкин. У вақтда (3.13) тенгсизлик қуйидагича бўлади:

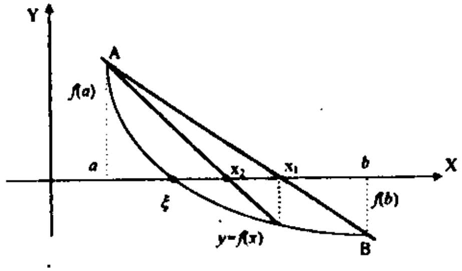
$$|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|. \qquad (3.14)$$

Кўпинча амалиётда, агар талаб қилинган аниқлик $\varepsilon > 0$ сонидан иборат бўлса, хатони аниқлаш учун охирги $x_n$ яқинлашиш $x_{n-1}$ яқинлашишдан $\varepsilon$ га нисбатан камроқ фарқ қилса, яъни $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ бўлса, у вақтда лимит абсолют хато сифатида қуйидаги олинади:

$$|\xi - x_n| < \varepsilon.$$

Мисол. Қуйидаги $f(x) = 2x^2 - 0{,}3$ тенгламанинг битта илдизи $\xi = 0{,}005$ аниқлик билан топилсин.

Ечиш: $f(0) = -0{,}5 < 0$; $f(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5^2 - 0{,}3 = 0{,}2 > 0$.




4-чизма.

Демак, изланаётган $\xi$ илдиз $(0;0{,}5)$ оралиқда жойлашган $0 < \xi < 0{,}5$, $f(a) = f(0) < 0$, $f(b) = f(0{,}5) > 0$ бўлгани учун (3.11) формуладан фойдаланамиз.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - a) = 0 + \frac{0{,}5}{0{,}2 - 0{,}5}(0{,}5 - 0) = 0{,}17857;$$

$$f(x_1) = 2 \cdot (0{,}17857)^2 - 0{,}3 = -0{,}23623; \quad x_2 = 0{,}17857 + \frac{0{,}23623}{0{,}2 + 0{,}23623}(0{,}5 - 0{,}17857) = 0{,}35264;$$

$$f(x_2) = 2 \cdot (0{,}35264)^2 - 0{,}3 = -0{,}05129; \quad x_3 = 0{,}35264 - \frac{0{,}05129}{0{,}2 + 0{,}05129}(0{,}5 - 0{,}35264) = 0{,}38272;$$

$f(x_3) = 2\cdot(0{,}38272)^2 - 0{,}3 = 0{,}00705$; $x_4 = 0{,}38272 + \frac{0{,}00705}{0{,}2 + 0{,}00705}(0{,}5 - 0{,}38272) = 0{,}38671$.

Талаб қилинган аниқликка эришилди, чунки, $|x_4 - x_3| < \varepsilon$ шартга асосан $|0{,}38671 - 0{,}38272| < 0{,}005$.

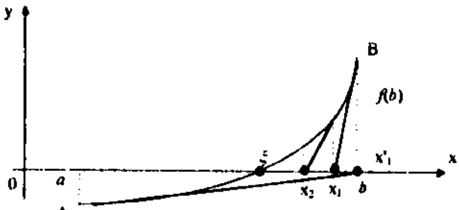
### 3.5. Ньютон усули (уринмалар усули)

Уринмалар усули алгебраик тенгламаларнинг илдизини тақрибий ҳисоблаш учун энг қулай усуллардан бири ҳисобланади.

Фараз қилайлик, $f(x)=0$ тенгламанинг $[a,b]$ оралиқда илдизи мавжуд бўлсин, бундан ташқари функциянинг $f'(x)$ ва $f''(x)$ ҳосилалари узлуксиз бўлиб, шу кесмада ўзгармас ишораларини сақласин.

Аниқлик учун $f'(x)>0$ ва $f''(x)>0$ деб оламиз. Ньютон усулининг геометрик маъноси $y=f(x)$ эгри чизиқни, шу эгри чизиқнинг бирор нуқтасидан ўтган уринма билан алмаштириб олишдан иборатдир.

$y=f(x)$ эгри чизиқнинг $B[x_0; f(x_0)]$ нуқтасидан уринма ўтказамиз, бу ерда $f(a)<0$ ва $f(b)>0$ бўлиб, $x_0=b$ да $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ (5-чизма).




5-чизма.

$B_1[x_1, f(x_1)]$ илдизга биринчи яқинлашиш сифатида $x_1$ ни оламиз. Энди $B_1[x_1; f(x_1)]$ нуқтадан $OX$ ўқини $x_2$ нуқтадан кесиб ўтувчи уринмани ўтказамиз. Бу жараённи давом эттириб, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз.

Равшанки, $B_n[x_n, f(x_n)]$ нуқтадан ўтувчи уринма тенгламаси қуйидагича $(n=0,1,2,\ldots)$ ифодаланади:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n). \qquad (3.15)$$

Агар (3.15) формулада $y=0$ ва $x=x_{n+1}$ деб олсак, қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (3.16)$$

Агар биз $x_0=a$ ва $f(x_0)\cdot f''(x_0)<0$ деб олсак, $A[x_0, f(x_0)]$ нуқтадан ўтувчи уринма $OX$ ўқининг $[a,b]$ кесмадан ташқарида ётувчи $x'_1$ нуқтасидан кесиб ўтади. Демак, бошланғич нуқта сифатида олинган $a$ нуқта учун Ньютон усули яроқсиз бўлиб қолади. Шунинг учун координата системасида эгри чизиқнинг қандай жойлашишига қараб, $[a;b]$ кесмадаги нуқталарнинг қайси бири ҳаракатланувчи эканлигини билиб, Ньютон усулини қўллаш мумкин бўлади.

Агар (3.16) формулада $h \to \infty$ да лимитга ўтсак, бу кетма-кетлик $\xi$ аниқ илдизга монотон яқинлашувчи кетма-кетликдан иборат бўлади:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi . \qquad (3.17)$$

Энди $n$-яқинлашишда $x_n$ тақрибий илдиз учун Ньютон усулининг хатосини қуйидагича баҳолаймиз:

$$|\xi - x_n| \le \frac{f(x_n)}{m},$$

бу ерда $m$ сони $[a;b]$ кесмадаги $|f'(x)|$нинг энг кичик қиймати.

**Мисол.** Қуйидаги $f(x) \equiv 3x^3 - x - 1 = 0$ тенглама $[0.5,\ 1]$ кесмада Ньютон усули ёрдамида $\varepsilon = 0{,}005$ аниқликкача ҳисоблансин.

Ечиш: $f'(x) = 9x^2 - 1$; $f(0{,}5) = -1{,}125 < 0$; $f(1) = 1 > 0$; $f'(x_0)\big|_{x_0 = 1} = 8$.

Энди (3.16) ифода ёрдамида берилган тенгламанинг тақрибий илдизини ҳисоблашга киришамиз:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1}{8} = 1 - 0{,}125 = 0{,}875;\ f(x_1) = 3 \cdot (0{,}875)^3 - 0{,}875 - 1 = 0{,}1347,$$

$$f'(x_1) = 9 \cdot (0{,}875)^2 - 1 = -5{,}8906;\ x_2 = 0{,}8481,\ f(x_2) = -0{,}0180;\ f'(x_2) = 5.4735;$$

$$x_3 = 0{,}85139;\ f(x_3) = 0{,}00004;\ f'(x_3) = 5{,}5238;\ x_4 = 0{,}851385.$$

Итерация жараёни керакли аниқликкача давом эттирилди, чунки $|\xi - x_4| \le f(x_4)/m_1 = 0{,}0000028$, бу ерда $m_1 = 5{,}4735$; $\xi = 0{,}851385 \pm 0{,}0000028$.

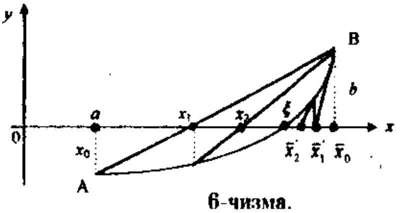
### 3.6. Аралаш усули (комбинированний усул)

Амалда кўпинча ватарлар ва уринмалар усулини бир пайтда кетма-кет қўллашдан иборат бўлган аралаш (комбинированний) усулдан фойдаланилади.

Агар биз ватарлар усули билан Ньютон усулига эътибор берсак, ватарлар усулида олинган $x_n$ тақрибий илдиз ҳамма вақт аниқ илдиз $\xi$ га нисбатан ками билан олинса, Ньютон усули бўйича олинган тақрибий илдиз $\bar{x}_n$ кўпи билан олинади.

Демак, тенгламанинг аниқ $\xi$ илдизи $x_n$ ва $\bar{x}_n$ лар орасида жойлашган бўлади. Олдинги темаларда кўриб ўтганимиздек (3.4), $f'(x)$ ва $f''(x)$ ҳосилаларнинг ишораларига қараб $y = f(x)$ эгри чизиқнинг координата системасида жойлашиши тўрт хилда бўлар эди.

Биз бу ерда $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$ бўлган ҳол учун аралаш усул билан таниишиб чиқамиз (6-чизма). $a \le x \le b$ кесмада $x_0 = a$, $\bar{x}_0 = b$ деб оламиз.




6-чизма.

Ватарлар ва Ньютон усуллари бўйича яқинлашувчи $x_{n+1}$ тақрибий илдизлар учун қуйидаги формулаларни ёзиб оламиз:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n), \qquad (3.18)$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}, \ (n = 0,1,2,...) \qquad (3.1)$$

Демак, тенгламанинг аниқ илдизи $x_n < \xi < \bar{x}_n$ орасида ётган бўлади.

Агар $x_n$ тақрибий илдизнинг йўл қўйилиши мумкин бўлган абсолют хатоси $\xi$ берилган бўлса, яқинлашиш жараёни $\bar{x}_n - x_n < \xi$ шарт бажарилиши билан тўхтатилади. Натижада, тақрибий илдиз сифатида $x_n$ ва $\bar{x}_n$ ларнинг ўртача арифметик қиймати олинади:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + x_n).$$

Мисол. Қуйидаги $f(x) \equiv x^3 - 0,2 = 0$ тенгламанинг битта илдизи $[0,1]$ кесмада 0,005 аниқликкача ҳисоблансин.

Ечиш: $f(0) = -0,2 < 0$; $f(1) = 0,8 > 0$

Демак, тенгламанинг битта илдизи $[0,1]$ оралиқда жойлашган бўлиб, бу оралиқда $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ ҳосилалар ишораларини сақлайди.

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x.$$

Энди $x_0 = 0$ ва $\bar{x}_0 = 1$ деб аралаш усулни қўллаймиз.

$$f(x_0) = f(0) = -0,2; \quad f(0) = -0,2; \quad f(\bar{x}_0) = f(1) = 0,8; \quad f'(\bar{x}_0) = f'(1) = 3.$$

Сўнгра (3.18) ва (3.19) формулалар орқали тақрибий илдизларни топишга киришамиз:

$$x_1 = 0 + \frac{0,2}{0,8 - 0,2}(0,8 - 0) = 0,266, \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \frac{f(\bar{x}_0)}{f'(\bar{x}_0)} = 1 - \frac{0,8}{3} = 0,734.$$

$$f(x_1) = (0,266)^3 - 0,2 = 0,0188 - 0,2 = -0,1812; \quad f(\bar{x}_1) = (0,734)^3 - 0,2 = 0,3954 - 0,2 = 0,1954,$$

$$f'(\bar{x}_1) = 3 \cdot (0,734)^2 = 1,6163;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(\bar{x}_1) - f(x_1)}(\bar{x}_1 - x_1) = 0,266 + \frac{0,1812}{0,1954 + 0,1812}(0,734 - 0,266) = 0,266 - \frac{0,0848}{0,3766} = 0,4912;$$

$$\bar{x}_2 = x_1 - \frac{f(\bar{x}_1)}{f'(\bar{x}_1)} = 0,734 - \frac{0,1954}{1,16163} = 0,6131, \ f(x_2) = (0,4912)^3 - 0,2 = -0,0815,$$

$$f(\bar{x}_2) = (0,6131)^3 - 0,2 = 0,0304,\ f'(\bar{x}_2) = 3\cdot(0,6131)^2 = 1,1277;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(\bar{x}_2) - f(x_1)}(\bar{x}_2 - x_2) = 0,4912 + \frac{0,0815}{0,0304 + 0,0815}(0,6131 - 0,4912) = 0,5811;$$

$$\bar{x}_3 = 0,5849.$$

Бу ерда $\bar{x}_3 - x_3 = 0,5849 - 0,5811 = 0,0038$, керакли аниқликка эришилди. Тақрибий илдиз сифатида $\xi = \frac{1}{2}(0,5849 + 0,5811) = 0,5830$ қийматни олиш мумкин.

**Мисол.** Қуйидаги $f(x) = x^5 - x - 0,2 = 0$ тенгламанинг ягона илдизини 0,0005 аниқликда ҳисобланг.

**Ечиш:** Функциянинг илдизи ётган оралиқни топамиз:

$$f(1) = -0,2 < 0; \quad f(1,1) = 0,31051 > 0.$$

Функциянинг ҳосилалари $f'(x) = 5\cdot x^4 - 1$, $f''(x) = x^3$ қаралаётган оралиқда $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$

Демак, аралаш усулни қўллаш мумкин, яъни $x_0 = 1$ ва $\bar{x}_0 = 1,1$ деб оламиз. У ҳолда $f(x_0) = -0,2$; $f(\bar{x}_0) = 0,3105$; $f'(\bar{x}_0) = 6,3205$.

Юқоридаги ( 3.18 ) ва ( 3.19 ) формулаларидан

$$x_1 = 1 + 0,1\cdot 0,2/0,51051 = 1,04469; \qquad \bar{x}_1 = 1,1 - 0,31051/6,3205 = 1,051$$

Бу ерда $\bar{x}_1 - x_1 = 0,012$ бўлиб, аниқлик етарли эмаслигидан кейинги яқинлашишларни ҳисоблаймиз

$$x_2 = 1,039 + 0,012\cdot 0,0282/0,0595 \approx 1,04469;$$

$$\bar{x}_2 = 1,051 - 0,0313/5,1005 \approx 1,04487,$$

$$\bar{x}_2 - x_2 = 1,04487 - 1,04469 = 0,00018$$

Етарли аниқликка эришилди. Демак, $\xi = \frac{1}{2}(1,04469 + 1,04487) = 1,04478$.

Абсолют хатолик $0,00018/2 + 0,00022 = 0,00031 < \frac{1}{2}10^{-3}$.

## 3.7. Итерация усули

Алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ечишнинг энг муҳим усулларидан бири итерация усули ҳисобланади. Бу усул кетма-кет яқинлашиш усули деб ҳам аталади.

Қуйидаги алгебраик ёки трансцендент тенглама берилган бўлсин:

$$f(x) = 0 \qquad (3.20)$$

Бу ерда $f(x)$ узлуксиз функция бўлиб, унинг ҳақиқий илдизини топиш талаб қилинган бўлсин. (3.20) тенгламани ўзига тенг кучли бўлган ва ҳисоблаш учун қулай бўлган

$$x = \varphi(x) \qquad (3.21)$$

тенглама билан алмаштириб оламиз. Бу ерда $\varphi(x)$ узлуксиз функция.

Энди (3.21) тенгламанинг ҳақиқий илдизини итерация усули орқали топишга киришамиз.

Итерация жараёни қуйидагидан иборат: биринчи навбатда берилган тенгламанинг бирорта тақрибий илдизи график ёки бошқа бирор усул орқали топиб олинади, кейин уни (3.21) тенгламанинг ўнг томонига қўйиб, $x_0$ га нисбатан аниқроқ бўлган $x_1$ тақрибий сон топилади:

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Бу жараённи кетма-кет давом эттириб, қуйидаги сонлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2 \qquad (3.22)$$

Агар бу кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, яъни қуйидаги лимит мавжуд бўлса

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

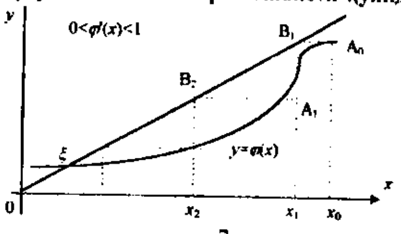
у ҳолда (3.22) тенгликнинг иккала томонида лимитга ўтиб

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(\varphi(x_{n-1})) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}),$$

яъни $\xi = \varphi(\xi)$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, $\xi$ илдиз (3.21) тенгламанинг, шу билан бирга (3.21) тенглама (3.22) тенглама билан тенг кучли бўлгани учун, (3.20) тенгламанинг ҳам ечими эканлиги келиб чиқади.

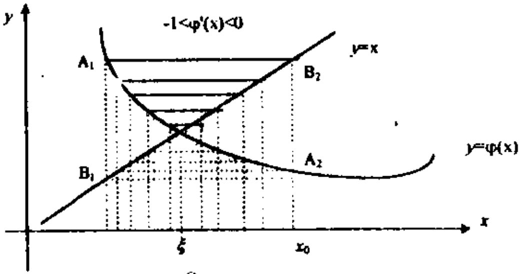
Итерация усулининг геометрик маъноси қуйидагича бўлади (7-чизма).




7-чизма.

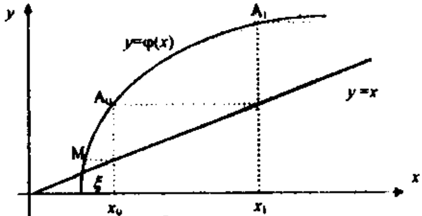
$XOY$ координата текислигида $y = x$ ва $y = \varphi(x)$ функцияларнинг графикларини ясаб оламиз. (3.21) тенгламанинг ҳақиқий $\xi$ илдизи иккала графикнинг кесишган нуқтасининг абсцисса нуқтасидир. Сўнгра $A_0[x_0, \varphi(x_0)]$ нуқтадан зинапоя шаклидаги $A_0B_1A_1B_2A_2$ синиқ чизиқ бўйича ҳаракатланамиз. Бу ердаги зинапоя поғоналари $OX$ ва $OY$ ўқларига параллел бўлиб, $A_0, A_1, A_2, \ldots$ учлари $y = \varphi(x)$ эгри чизиқда жойлашган. $B_1, B_2, \ldots$ нуқталар эса $y = x$ тўғри чизиқда жойлашгандир.

Бу ерда эса $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ нуқталар абсцисса ўқидаги $\xi$ аниқ илдизга интилувчи $x_1, x_2, \ldots$ нуқталар кетма-кетлиги билан мос тушади. Бунда шу нарсани кўриш мумкинки, агар $\varphi'(x)>0$ бўлса, тенгламанинг тақрибий ечими зинапоя шаклидаги йўналиш бўйича топилади (8-чизма).




8-чизма.

Аммо $|\varphi'(x)|>1$ бўлган ҳолни қарасак, яқинлашиш жараёни узоқлашувчи бўлади (9-чизма).




9-чизма.

Бунинг геометрик маъноси шундан иборатки, зинапоянинг поғоналари (спиралнинг бўғинлари) борган сари катталашади, шу сабабли $A_0, A_1$ нуқталар M () га яқинлашмайди, балки узоқлашади.

Шунинг учун амалий масалаларни ечишда итерация жараёнини қўллаш учун унинг яқинлашишидаги етарлилик шартини аниқлашимиз зарур. Бунинг учун қуйидаги теорема билан танишиб чиқамиз [9.12].

**Теорема.** Агар $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аниқланган ва дифференциалланувчи бўлиб, унинг барча қийматлари $\varphi(x)\in[a;b]$ ва $a<x<b$ да $|\varphi'(x)|\le q<1$ шарт бажарилса.

1. $x_n=\varphi(x_{n-1})$ итерация жараёни $x_0$ бошланғич қийматнинг қандай берилишидан қатъий назар, яқинлашувчи бўлади $x_\xi\in[a;b]$.

2. $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ лимит $x=\varphi(x)$ нинг $[a;b]$ даги ягона илдизи бўлади.

Итерация усулининг хатосини баҳолаш учун қуйидаги формуладан фойдаланамиз.

$$|\xi - x_n| < \frac{q}{1-q}(x_1 - x_0). \qquad (3.23)$$

Агар бу ерда $q$ қанчалик кичик бўлса, итерация жараёни шунчалик тез яқинлашади.

Бир неча шакл алмаштиришдан кейин (3.23) формулани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз

$$|\xi - x_n| < \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.$$

Агар $q \le 1$ бўлса, хато баҳоси соддалашади.

$$|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|.$$

Итерация усулининг бошқа усулларга нисбатан устунлиги шундаки, операцияларнинг бажарилиши ҳар бир қадамда бир хил бўлиб, ЭҲМ да программа тузиш ишларини сезиларли даражада енгиллаштиради.

**Мисол.** Қуйидаги $f(x) = 0,2x^3 - 0,5x - 190 = 0$ тенгламанинг энг катта мусбат илдизи $10^{-3}$ аниқликкача топилсин:

**Ечиш.** Биринчи тақрибий яқинлашиш сифатида $x_0 = 10$ деб оламиз, равшанки $\xi < x_0$. Берилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$0,2^3 - 0,5x - 190 = 0, \qquad x = \sqrt[3]{2,5x + 950}.$$

Охирги тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{2,5x + 950},\ \varphi(x) \text{ нинг ҳосиласи } |\varphi'(x)| \le \frac{2,5}{3 \cdot \sqrt[3]{(2,5 \cdot 10 + 950)^2}}.$$

Демак, итерация жараёни яқинлашувчидир.

Сўнгра яқинлашувчи кетма-кетликни қуйидаги формула орқали топамиз $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, яъни $x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt[3]{2,5 \cdot x_0 + 950} = \sqrt[3]{975} \approx 9,916$;

$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt[3]{2,5 \cdot x_1 + 950} = \sqrt[3]{974,79} \approx 9,915$; $x_3 = \varphi(x_2) = \sqrt[3]{2,5 \cdot x_2 + 950} = \sqrt[3]{974,7875} \approx 9,9145$

Маълумки, берилган тенгламанинг ечими $9 < \xi < 10$ оралиқда ётибди, шу сабабли тақрибий $x_3$ ни ҳам маълум хатолик билан ечим деб қабул қилиш мумкин. Агар биз берилган тенгламани $x = 0,4x^3 - 380$ кўринишда ёзиб олсак, $\varphi(x) = 0,4x^3 - 380$ ни ҳосиласи $\varphi'(x) = 1,2x^2$ бўлиб, $x$ нинг $9 \le x \le 10$ қийматларида $\varphi'(x)$ ҳосила $\varphi'(x) \ge 97$ бўлиб, итерация жараёнининг яқинлашиш шарти бажарилмайди.

Демак, бундан кўринадики, (3.20) тенгламани (3.21) кўринишда ихтиёрий усулда ёзиб олиш мақсадга етишга ёрдам бермаслиги ҳам мумкин экан. Яъни, итерация усулини яқинлашиши $\varphi(x)$ функцияни танлаб олишга боғлиқ экан. Итерация усулининг яқинлашиши ёки узоқлашиши (3.20) тенгламанинг илдизини кичик атрофида $\varphi'(x)$ ҳосиланинг қийматига боғлиқ эканлиги итерация усулини кенг қўлланишига тўсқинлик қилувчи омиллардан биридир.

1958 йилда Ж.Х.Вегстейн итерация усулига баъзи бир ўзгартишлар киритиб, итерация усулини яқинлашиши $\varphi'(x)$ нинг қийматига боғлиқ бўлмаслиги ҳам мумкинлигини исботлади. Бу усул адабиётда Вегстейн усули деб ном олди. Вегстейн усулига асосан $x_0$ ни яқинлашиш танлаб олинганда $z_0 = x_0$ деб олинади. Сўнгра оддий итерация усулига асосан $x_1 = \varphi(x_0)$ ҳамда $z_1 = \varphi(z_0)$ лар ҳисоблаб олинади. Шундай кейин $x_2 = \varphi(z_1)$ топилиб $z_2$ ва ҳоказо қийматлар

$$z_{n+1} = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - z_n)}{x_{n+1} - z_n + z_{n-1} - x_n}$$

формуладан топилади. Топилган $z_{n+1}$ ни қийматига асосан $x_{n+2} = \varphi(z_{n+1})$ (3.25) ҳисобланади. Кейинги ҳисоблашлар (3.24) ва (3.25) формулаларни кетма-кет ишлатиш орқали бажарилади. Вегстейн усулини қўллаш учун $n \ge 2$ бўлиши керак. Бу усулнинг яқинлашиш тезлигини асослаб ўтирмасдан, уни мисолда кўрамиз.

**Мисол.** Юқорида келтирилган мисолни $x = 0{,}4x^3 - 380$ кўринишда қараймиз.

Маълумки, бу ҳолда оддий итерация усулини яқинлашиш шарти бажарилмасди. Нолинчи яқинлашишни $x_0 = 10$ деб оламиз.

Тенгламанинг ечимига Вегстейн усули билан топилган кетма-кет яқинлашишлар қуйидаги жадвалда келтирилган.

| $n$ | $x_{n+1}=\varphi(z_n)$ | $z_n$ | $x_{n+1}=\varphi(z_n)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 10 | 10 |
| 1 | 20 | 20 | 20 |
| 2 | 2820 | 10 | 2820 |
| 3 | 20 | 9,965 | 8970306820,0 |
| 4 | 15,8147 | 9,9157 | |
| 5 | 9,969 | 9,9152 | |
| 6 | 9,9120 | 9,9152 | |
| 7 | 9,9122 | 9,9152 | |

Жадвалда учинчи устун $n = 2$ дан бошлаб (3.24) формула ёрдамида топилган. Тўртинчи устун оддий итерация усулида ҳисобланган бўлиб, итерация усулини узоқлашишини кўрсатиб турибди.

Шундай қилиб, Вегстейн усулини қўллаш учун $n \ge 2$ бўлиши керак экан.

## 3.8. Икки номаълумли икки тенгламалар системаси учун Ньютон усули

Алгебраик ва трансцендент тенгламалар системасини ҳам Ньютон ёки итерация усули ёрдамида ечиш мумкин. Биз энди икки номаълумли икки тенгламалар системасини Ньютон усули ёрдамида ечишни ўрганамиз.

Қуйидаги тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y)=0, \\ G(x,y)=0 \end{array}\right\} \qquad (3.26)$$

Бу тенгламалар системасининг тақрибий илдизлари $x_n$ ва $y_n$ бўлсин. У ҳолда системанинг аниқ илдизлари

$$x=x_n+h_n, \qquad y=y_n+k_n.$$

Бу қийматларни (3.26) га қўйсак,

$$\left.\begin{array}{l} F(x_n+h_n;y_n+k_n)=0, \\ G(x_n+h_n;y_n+k_n)=0. \end{array}\right\} \qquad (3.27)$$

Сўнгра (3.27) тенгламалар системасига $F(x_n+h_n;y_n+k_n)$ ва $G(x_n+h_n;y_n+k_n)$ функцияларни Тейлор қатори бўйича ёйиб чиқамиз ва $h_n$ ҳамда $k_n$ нинг $x_n,y_n$ га нисбатан кичик сонлар эканлигини ҳисобга олиб, Тейлор формуласидаги чизиқли қисмидан кейинги юқори тартибли ҳосилали ҳадларини ташлаб юборамиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} F(x_n,y_n)+h_nF'_x(x_n,y_n)+k_nF'_y(x_n,y_n)=0 \\ G(x_n,y_n)+h_nG'_x(x_n,y_n)+k_nG'_y(x_n,y_n)=0 \end{array}\right\} \qquad (3.28)$$

(3.28) тенгламалар системасининг Якобиан детерминанти нолдан фарқли бўлса, унинг ечимлари $h_n$ ва $k_n$ ларни топамиз

$$h_n=\frac{\begin{vmatrix} -F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ -G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix}}{D}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix},$$

$$k_k=\frac{\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & -F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & -G(x_n,y_n) \end{vmatrix}}{D}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n) \end{vmatrix}$$

формуладан ҳисобланади.

Бу ерда Якобиан детерминанти

$$D=\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (3.29)$$

Натижада (3.26) системанинг ечими

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix}, \qquad (3.30)$$

$$y_{n+1}=y_n-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n) \end{vmatrix}, \quad n=0,1,2.. \qquad (3.31)$$

Бошланғич $x_0$ ва $y_0$ яқинлашишлар сифатида қўпол яқинлашишни ҳам олиш мумкин.

Мисол. Қуйидаги берилган тенгламалар системасининг ҳақиқий илдиз ларини топилсин.

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 9 = 0,$$
$$G(x,y) = xy - 2 = 0.$$

**Ечиш.** Бу системанинг кўпол ечими график усулда топилганда $x_0 = 1{,}2;\ y_0 = 1{,}8$ бўлсин. Бу қийматларни берилган тенгламалар системасига қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$F(1{,}2;1{,}8) = 1{,}2^3 + 1{,}8^3 - 9 = -1{,}44, \qquad G(1{,}2;1{,}8) = 1{,}2 \cdot 1{,}8 - 2 = 0{,}16.$$

$F$ ва $G$ функцияларнинг ҳосилаларини топиб,

$$F'_x = 3x^2,\ F'_y = 3y^2,\ G'_x = y,\ G'_y = x.$$

Якобиан детерминанатини ҳисоблаймиз.

$$D = \begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot(1{,}2)^2 & 3\cdot(1{,}8)^2 \\ 1{,}8 & 1{,}2 \end{vmatrix} = -12{,}312 \neq 0.$$

Сўнгра (3.30) ва (3.31) формулалардан фойдаланиб, $x_1$ ва $y_1$ ни топамиз.

$$x_1 = 1{,}2 + \frac{1}{12{,}312}\begin{vmatrix} -0{,}971 & 9{,}72 \\ 0{,}16 & 1{,}2 \end{vmatrix} = 1{,}2 + \frac{-1{,}1652 - 1{,}5552}{12{,}312} = 1{,}2 - \frac{2{,}7204}{12{,}312} = 1{,}2 - 0{,}221 = 0{,}979;$$

$$y_1 = 1{,}8 + \frac{1}{12{,}312}\begin{vmatrix} 4{,}32 & -1{,}44 \\ 1{,}8 & 0{,}16 \end{vmatrix} = 2{,}066.$$

Ҳисоблаш жараёнини давом эттириб, етарли даражада аниқликдаги $x$ ва $y$ тақрибий илдизларни топиш мумкин.

## 3.9. Икки номаълумли икки тенгламалар системаси учун итерация усули

Қуйидаги икки номаълумли иккита тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) = 0, \\ \psi(x,y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.32)$$

Бу тенгламалар системасини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned} x = F_1(x,y), \\ y = F_2(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (3.33)$$

Агар $x_0$ ва $y_0$ қийматлар (3.32) тенгламалар системасининг кўпол тақрибий илдизларидан иборат бўлса, одатда, $x_0, y_0$ лар (3.32) тенгламалар системаси учун нолинчи яқинлашиш ҳам деб аталади. У вақтда биринчи, иккинчи ва кейинги яқинлашишлар аниқланади:

1 - яқинлашиш $x_1 = F_1(x_0, y_0);\ y_1 = F_2(x_0, y_0);$

2 - яқинлашиш $x_2 = F_1(x_1, y_1);\ y_2 = F_2(x_1, y_1);$

3 - яқинлашиш $x_3 = F_1(x_2, y_2);\ y_3 = F_2(x_2, y_2);$

..........................................................

$n$ - яқинлашиш $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1});\ y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}).$

Агар итерация жараёни яқинлашувчи бўлса, яъни $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$, $\eta = \lim_{n\to\infty} y_n$ лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F_1(x_n, y_n); \quad \eta = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F_2(x_n, y_n).$$

лимитик қийматлар (3.33) системанинг, яъни (3.32) системанинг илдизи бўлади.

Учта номаълумли учта тенгламалар ва ундан юқори тенгламалар системаси учун ҳам шу йўл билан тақрибий илдизни ҳисоблаш мумкин.

Умуман, тенгламалар системасини итерация усули билан ечганда, нолинчи яқинлашиш сифатида исталган сонни олиш ҳам мумкин, аммо айрим ҳолларда шундай масалалар учрайдики, уларда яқинлашиш жараёни жуда секин бўлади. Демак, ҳисобловчи нолинчи яқинлашувчи қиймат учун иложи борича тенгламалар системасининг аниқ ечимига яқинроқ қийматларни олиш тавсия қилинади. Одатда, бу нолинчи яқинлашувчи қийматларни график усулда ёки соддароқ усул орқали осон топиш мумкин.

**Мисол.** Берилган тенгламалар системасининг тақрибий илдизи топилсин:

$$\varphi(x, y) = x + 3\cdot\lg x - y^2$$

$$\psi(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1.$$

**Ечиш.** Тенгламалар системасининг қўпол тақрибий ечимлари, яъни нолинчи яқинлашиши $x_0 = 3{,}4$ ва $y_0 = 2{,}2$ бўлсин.

Берилган тенгламалар системасини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$x = \sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}, \qquad y = \sqrt{x + 3\cdot\lg x}$$

Сўнгра нолинчи яқинлашишдаги қийматлардан фойдаланиб, биринчи, иккинчи ва кейинги итерацияларни топамиз:

$$x_1 = \sqrt{\frac{3{,}4(2{,}2+5)-1}{2}} = 3{,}426; \quad y_1 = \sqrt{3{,}426 + 3\lg 3{,}426} = 2{,}243;$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{3{,}426(2{,}243+5)-1}{2}} = 3{,}451; \quad y_2 = \sqrt{3{,}451 + 3\lg 3{,}45} = 2{,}2535$$

$$x_3 = 3{,}466, \quad y_3 = 2{,}255; \quad x_4 = 3{,}475; \quad y_4 = 2{,}258,$$

$$x_5 = 3{,}480, \quad y_5 = 2{,}259, \quad x_6 = 3{,}483; \quad y_6 = 2{,}260$$

Шундай қилиб, ечим сифатида $\xi = 3{,}487$; $\eta = 2{,}262$ қийматларни олиш мумкин.

Бу ерда итерация жараёни жуда секин яқинлашаётганини кўрамиз. Айрим ҳолларда бошланғич ноль ечимни кўр-кўрона олиш, кейинги қадамларда ечимнинг ёмонлашиб кетишига сабаб бўлиши мумкин.

Биз итерация усулидан қайси пайтда унумли фойдаланиш ва нималарга эътибор бериш кераклиги билан кейинги параграфда тўлиқ танишиб чиқамиз.

## 3.10. Икки номаълумли икки тенгламалар системаси учун итерация жараёнининг яқинлашиши

Икки номаълумли икки тенгламалар системаси учун яқинлашиш шартини текширамиз. (3.32) тенгламалар системасини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{array}{l} x = F_1(x,y), \\ y = F_2(x,y). \end{array}\right\} \qquad (3.34)$$

(3.34) тенгламалар системаси учун биринчи яқинлашиш:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = F_1(x_0,y_0), \\ y_1 = F_2(x_0,y_0). \end{array}\right\} \qquad (3.35)$$

Сўнгра (3.34) тенгламалардан (3.35) тенгламаларни мос равишда айириб қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} x - x_1 = F_1(x,y) - F_1(x_0,y_0) \\ y - y_1 = F_2(x,y) - F_2(x_0,y_0) \end{array}\right\} \qquad (3.36)$$

(3.36) тенгламалар системасидаги биринчи тенгламанинг ўнг тарафига икки ўзгарувчили функция учун ўртача қиймат теоремасини қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$F_1(x,y) - F_1(x_0,y_0) = (x-x_0)\frac{\partial \overline{F}_1}{\partial y} + (y-y_0)\frac{\partial \overline{F}_1}{\partial y}. \qquad (3.37)$$

Бу ерда $\dfrac{\partial \overline{F}_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}F_1(x_0+\Theta(x-x_0), y_0+\Theta(y-y_0)),\ 0 \le \Theta \le 1,$

ва $\dfrac{\partial \overline{F}_1}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}F_1(x_0+\Theta(x-x_0), y_0+\Theta(y-y_0)).$

Шу йўл билан (3.36) тенгламалар системасидаги иккинчи тенгламанинг ўнг томони учун қуйидагини топамиз:

$$F_2(x,y) - F_2(x_0,y_0) = (x-x_0)\frac{\partial \overline{F}_2}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial \overline{F}_2}{\partial y}. \qquad (3.38)$$

Бу ерда $\dfrac{\partial \overline{F}_2}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}F_2(x_0+\Theta(x-x_0), y_0+\Theta(y-y_0)),$ $\dfrac{\partial \overline{F}_2}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}F_2(x_0+\Theta(x-x_0), y_0+\Theta(y-y_0))$

(3.37) ва (3.38) ифодаларни (3.36) тенгламалар системасининг ўнг томонига қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} x - x_1 = (x-x_0)\dfrac{\partial \overline{F}_1}{\partial x} + (y-y_0)\dfrac{\partial \overline{F}_1}{\partial y} \\ y - y_1 = (x-x_0)\dfrac{\partial \overline{F}_2}{\partial x} + (y-y_0)\dfrac{\partial \overline{F}_2}{\partial y} \end{array}\right\}. \qquad (3.39)$$

Системанинг ўнг ва чап томонларини мос равишда қўшиб абсолют қийматларини оламиз.

$$|x-x_1|+|y-y_1|\le|x-x_0|\left\{\left|\frac{\partial \bar F_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial \bar F_2}{\partial x}\right|\right\}+|y-y_0|\left\{\left|\frac{\partial \bar F_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial \bar F_2}{\partial y}\right|\right\}. \qquad (3.40)$$

Фараз қилайлик, $\left|\frac{\partial \bar F_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial \bar F_2}{\partial x}\right|$ ва $\left|\frac{\partial \bar F_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial \bar F_2}{\partial y}\right|$ хусусий ҳосилаларнинг энг катта қийматлари тўғри каср бўлиб, $m$ га тенг бўлсин, у ҳолда (3.40) тенгсизлик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$|x-x_1|+|y-y_1|\le m\{|x-x_0|+|y-y_0|\}.$$

Бу тенгсизлик биринчи яқинлашиш учун ўринлидир. Қолган яқинлашишлар учун ҳам шунга ўхшаш тенгсизликларни ёзиш мумкин:

$$|x-x_2|+|y-y_2|\le m\{|x-x_1|+|y-y_1|\}$$
$$|x-x_3|+|y-y_3|\le m\{|x-x_2|+|y-y_2|\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|x-x_n|+|y-y_n|\le m\{|x-x_{n-1}|+|y-y_{n-1}|\}$$

Бу тенгсизликларнинг чап ва ўнг томонларини мос равишда ҳадма-ҳад кўпайтириб, кейин натижани $\{|x-x_1|+|y-y_1|\}\{|x-x_2|+|y-y_2|\}\ldots\{|x-x_n|+|y-y_n|\}$ умумий кўпайтувчига бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$|x-x_n|+|y-y_n|\le m^n\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \qquad (3.41)$$

Маълумки, бу ерда $m$ тўғри касрдан иборат, демак, итерация жараёнини истаганча давом эттириб, (3.41) тенгсизликнинг ўнг томонини истаганча кичик қилиб олиш мумкин. Бошқача айтганда, аниқ ва тақрибий сонлар айирмасининг абсолют қийматларини $|x-x_n|$, $|y-y_n|$ истаганча кичик қилиб олишимиз мумкин. Шундай қилиб, икки ўзгарувчили икки тенглама учун интерация жараёни

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|\le 1 \text{ ва } \left|\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|\le 1$$

шартлари бажарилса, $(x_0, y_0)$ нуқта атрофида яқинлашувчи бўлади.

Итерация жараёни тез яқинлашувчи бўлиши учун $F'_{1x}+F'_{2x}$ ва $F'_{1y}+F'_{2y}$ қийматлар бирдан анча кичик бўлиши зарур. Биз олдинги параграфда кўриб ўтган мисолда

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|=0{,}521+0{,}304=0{,}825,$$
$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|=0{,}162$$

биринчи йиғинди 1 га анча яқин бўлгани учун итерация жараёни жуда секин бўлган эди.

Ушбу хосса амалий масалаларда муҳим аҳамиятга эга бўлиб, ЭҲМларда итерация жараёнини сезиларли даражада камайтириб, машина вақтини тежашга ёрдам беради.

# 4-БОБ. МАТРИЦАЛАР АЛГЕБРАСИ

## 4.1. Асосий тушунчалар

Интеграл тенгламаларни, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ва оддий дифференциал тенгламаларнинг ечимларини аниқлаш учун уларни чизиқли алгебраик тенгламалар системасига келтиришга тўғри келади. Бундан ташқари, чизиқли бўлмаган масалаларни ечиш учун уларни ҳам аниқлик даражаси кетма-кет ўсиб борувчи чизиқли алгебраик тенгламалар системаси билан алмаштириш керак.

Демак, бу ерда ҳам чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга тўғри келар экан. Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишдан аввал матрицалар алгебраси билан танишиб чиқиш муҳимдир.

Ихтиёрий $a_{ij}$ сонларни $m$ та сатр ва $n$ та устун бўйича жойлаштиришдан ҳосил бўлган, ушбу

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

кўринишдаги жадвалга матрица деб аталади. (4.1) жадвалнинг сатрлари ва устунлари унинг қаторлари деб аталади.

Матрицадаги сатрлар сони устунлар сонидан катта, кичик ва унга тенг бўлиши мумкин, яъни $m>n$, $m<n$ ва $m=n$. $a_{ij}$ - сонларга матрицанинг элементлари деб аталади, бу ерда $i=1,2,...,m$ матрицанинг сатрлари номери. $j=1,2,...,n$ устунлар номери. А матрицани қуйидаги $A=\|a_{ij}\|$ ёки $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$ кўринишда ёзиш мумкин.

А матрицага $m\times n$ ўлчамли матрица дейилади. $a_{11},a_{22},...,a_{mn}$ элементлар матрицанинг бош диагонали, $a_{1n},a_{2,n-1},...,a_{mn}$ элементлар эса иккинчи диагонали элементларини ифодалайди.

Агар матрицадаги сатрлар сони устунлар сонига тенг бўлса $(m=n)$ у $n$-тартибли квадрат матрица деб аталади.

Агар $m\neq n$ бўлса, матрица тўғри тўртбурчакли матрица деб аталади.

Хусусий ҳолда матрица $1\times n$ ўлчамли бўлса, вектор - сатр, $m\times 1$ ўлчамли бўлса вектор - устун деб аталади.

Скаляр сонни 1х1 ўлчамли матрица деб қараш мумкин.

Агар квадрат матрицанинг бош диагналидан бошқа ҳамма элементлари ноллардан иборат бўлса, бундай матрица диагонал матрица деб аталади.

Масалан:

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Диагонал матрицани қисқача қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]$$

Агар диагонал матрицанинг бош диагоналидаги элементлари бир сондан иборат бўлса, яъни $\alpha_i=1$ $(i=1,2,\dots n)$, у ҳолда матрица бирлик матрица деб аталади ва у Е ҳарфи билан белгиланади:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$ Кронекер символини киритсак, $\delta_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{агар } i\neq j \\ 1, & \text{агар } i=j \end{cases}$'

бирлик матрицани кронекер символи орқали қуйидагича ёзамиз: $E=[\delta_{ij}]$.

Матрицанинг ҳамма элементлари нолдан иборат бўлса, матрица ноль матрица деб аталади ва бу 0 ёки $O_{n,n}$ орқали белгиланади. Квадрат матрицанинг детерминанти (аниқловчиси) деб қуйидагича белгиланган сонга айтилади.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Матрица билан детерминант турли хил маънога эгадир. Матрица тўғри тўртбурчак кўринишида, тартиб билан жойлашган сонлар системасидан иборат бўлса, матрицанинг детерминанти маълум қоида билан аниқланадиган сондан иборатдир. Юқори тартибли детерминант қийматини ҳисоблаш анча мураккаб. Хусусий ҳолда иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларни ҳисоблаш қоидасини келтирамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

## 4.2. Матрица устида амаллар

Умуман, матрицалар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш амалларидан ташқари логарифмлаш, илдиз чиқариш, дифференциаллаш ва интеграллаш амалларини ҳам бажариш мумкин. Биз қуйида бу амаллардан айримлари билан танишиб ўтамиз.

Дастлаб икки матрицанинг тенглик шартини аниқлаймиз.

Агар иккита $A=\left[a_{ij}\right]$ ва $B=\left[b_{ij}\right]$ $(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ матрицаларнинг сатрлари ва устунларидаги ҳар бир элемент мос равишда бир-бирига тенг бўлса, яъни $a_{ij}=b_{ij}$, у ҳолда $A$ ва $B$ матрицалар бир-бирига тенг деб аталади $A=B$.

<u>1. Матрицаларни қўшиш ва айриш.</u> Иккита бир хил ўлчамли $A=\left[a_{ij}\right]$ ва $B=\left[b_{ij}\right]$ матрицалар йиғиндиси деб шундай $C=\left[c_{ij}\right]$ матрицага айтиладики, унинг $c_{ij}$ элементлари мос равишда $A$ ва $B$ матрицаларнинг элементлари йиғиндисидан иборат бўлади, яъни $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Демак:

$$C=A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрицаларни қўшиш:

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$; 2. $A+B=B+A$; 3. $A+0=A$; 4. $A-A=0$; 5. $A-B=A+(-B)$.

хоссаларга бўйсинади.

<u>2. Матрицани сонга кўпайтириш.</u> $A=\left[a_{ij}\right]$ матрицани $\lambda$ сонга кўпайтириш учун, шу сонни матрицанинг ҳар бир элементига кўпайтириш зарур:

$$A\cdot\lambda=\begin{bmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & \dots & \lambda.a_{1n} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} & \dots & \lambda.a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda.a_{m1} & \lambda.a_{m2} & \dots & \lambda.a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрицани сонга кўпайтириш таърифидан қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

1. $1\cdot A=A$; 2. $0\cdot A=0$; 3. $\alpha(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)A$; 4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$; 6. $\alpha A=A\alpha$.

Бу ерда $A$ ва $B$ матрицалар, $\alpha$ ва $\beta$ сонлар.

Агар матрица квадрат матрицадан иборат бўлса, $\det\lambda\cdot A=\lambda^n\det A$.

<u>3. Матрицаларни кўпайтириш.</u> Икки матрицани бир-бирига кўпайтирганда, биринчи матрицанинг устунлар сони иккинчи матрицанинг сатрлар сонига тенг бўлиши керак. Масалан, A ва B матрицалар берилган бўлсин:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

Бу ерда A ва B матрицаларнинг тартиблари мос равишда $m\times n$ ва $p\times q$ бўлиб $n=p$ бўлсин.

А ва В матрицаларнинг кўпайтмаси деб шундай $m\times q$ ўлчамли С матрицага айтиладики, у қуйидагича аниқланади:

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{bmatrix},$$

яъни, $C=A\cdot B$.

Бунда А матрицанинг В матрица билан кўпайтмасидан иборат бўлган С матрицанинг $c_{ij}$ элементи қуйидагича топилади:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}.$$

Матрицаларни кўпайтириш:

1. $A(BC)=(AB)C$; 2. $\alpha(AB)=(\alpha A)B$; 3. $(A+B)C=AC+BC$; 4. $C(A+B)=CA+CB$

қоидаларга бўйсинади.

**Мисол 1.** А ва В матрицаларнинг кўпайтмаси ҳисоблансин.

$$A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

демак,

$$C=A\cdot B=\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

**Мисол 2.** Ушбу матрицалар берилган:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A, В ва В, А кўпайтмалар топилсин.

**Ечиш.**

$$C=AB=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot1+1\cdot3+3\cdot1+4\cdot1 & 2\cdot2+1\cdot(-1)+3\cdot0+4\cdot4 \\ 2\cdot1+(-3)\cdot3+1\cdot1+0\cdot1 & 2\cdot2+(-3)\cdot(-1)+1\cdot0+0\cdot4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 12 & 19 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$D=BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & -11 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Биз бундан қуйидаги натижага келамиз. Матрицаларни кўпайтиришда ўрин алмаштириш қоидаси ўринли эмас, яъни $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Хусусий ҳолда AB=BA бўлса, у вақтда A ва B лар ўрин алмаштирувчи матрицалар деб аталади. Масалан, E бирлик матрица ҳар қандай A квадрат матрица билан ўрин алмаштирувчидир.

Агар A ва B матрицаларнинг тартиблари бир хил бўлса кўпайтманинг аниқловчиси, аниқловчилар кўпайтмасига тенг бўлади, яъни

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \det B.$$

## 4.3. Транспонирланган матрица

Берилган A матрицанинг сатрларини мос равишда устунларига алмашти риш натижасида ҳосил қилинган $A^T$ матрица транспонирланган матрица деб аталади.

Агар A матрица $m\times n$ ўлчамли бўлса:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

транспонирланган $A^T$ матрица $n\times m$ ўлчамдан иборат бўлади:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Хусусий ҳолда вектор - сатр учун:

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)$$

транспонирланган матрица вектор устундан иборат бўлади:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Транспонирланган матрица қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. Икки марта транспонирланган матрица дастлабки матрица би лан мос келади:

$$A^{TT} = (A^T)^T = A.$$

2-хосса. Матрицалар йиғиндисининг транспонирлангани тран спонирланган матрицалар йиғиндисига тенг:

$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$

3 хосса. Матрицалар кўпайтмасининг транспонирлангани транспонирланган матрицалар кўпайтмасига тенг:

$$(AB)^T = A^T B^T.$$

Агар А матрица ўзининг транспонирланган матрицаси билан мос келса, бундай матрица симметрик матрица деб аталади, яъни

$$A^T = A.$$

Бундан шу нарса маълумки, симметрик матрица квадрат матрицадан иборат бўлиб, элементлари бош диагонал элементларига нисбатан симметрикдир, яъни $a_{ij} = a_{ji}$.

Агар А квадрат матрицадан иборат бўлса,

$$\det A^T = \det A.$$

Кўриниб турибдики, А матрицани $A^T$ га кўпайтмаси симметрик матрицадир.

## 4.4. Тескари матрица

1-таъриф. А матрицани бирор $A^*$ матрицага ўнгдан ва чапдан кўпайтирганда бирлик матрицани берса, $A^*$ матрица А матрицага тескари матрица деб аталади:

$$A^* \cdot A = A \cdot A^* = E,$$

бу ерда Е - бирлик матрица.

Одатда, А матрицага тескари матрицани $A^{-1}$ деб белгилаш қабул қилинган, яъни

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \qquad (4.2)$$

2-таъриф. Агар квадрат матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса махсус, аксинча махсус бўлмаган матрица, деб аталади.

3-таъриф. $n$-тартибли детерминантда $a_{ij}$ элементнинг минори деб, шу элемент турган $i$-сатр ва $j$-устунни ўчиришдан кейин ҳосил бўлган $n-1$-тартибли детерминантга айтилади ва $M_{ij}$ деб белгиланади.

Мисол.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

матрицанинг $a_{32}(a_{32} = 8)$ элементининг минори

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

дан иборатдир.

4-таъриф. А матрицанинг $a_{ij}$ элементининг алгебраик тўлдирувчиси деб, қуйидаги ифодага айтилади.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

**Теорема: Ҳар қандай махсус бўлмаган матрица тескари матрицага эга.**

**Исбот:** $n$ - тартибли махсус бўлмаган матрица берилган бўлсин:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

бу ерда $\det A=\Delta\neq 0$

A матрица учун бириктирилган (тиркалган) матрица деб аталувчи матрицани тузамиз:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (4.3)$$

бу ерда $A_{ij}$ лар, $a_{ij}$ ларга мос алгебраик тўлдирувчилардан иборат:

$$(i=1,2,\dots,n),\ (j=1,2,\dots,n).$$

Бириктирилган $\tilde{A}$ матрицанинг $A_{ij}$ элементлари A матрицадаги $a_{ij}$ элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларининг сатрларини устунлари билан алмаштирилганидан иборат.

Бириктирилган $\tilde{A}$ матрицанинг ҳар бир элементларини, A матрицанинг аниқловчиси $\Delta$ га бўлиб ёзамиз:

$$A^{*}=\begin{bmatrix} A_{11}/\Delta & A_{21}/\Delta & \dots & A_{n1}/\Delta \\ A_{12}/\Delta & A_{22}/\Delta & \dots & A_{n2}/\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}/\Delta & A_{2n}/\Delta & \dots & A_{nn}/\Delta \end{bmatrix}. \qquad (4.4)$$

Биз $A^{*}$ матрица изланаётган тескари матрица эканлигини исбот қиламиз.

Маълумки,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}\Delta \qquad (4.5)$$

ва

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\delta_{ij}\Delta, \qquad (4.6)$$

бу ерда

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{агар } i=j \text{ булса,} \\ 0, & \text{агар } i\neq j \text{ булади.} \end{cases}$$

Бу хоссага асосан A матрицани $A^{*}$ га кўпайтмаси

$$AA^{*}=\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}/\Delta & \dots & A_{n1}/\Delta\\ \dots & \dots & \dots\\ A_{1n}/\Delta & \dots & A_{nn}/\Delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E. \qquad (4.7)$$

Бу ерда (4.5) ва(4.6) формулаларини ҳисобга олсак:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_{k}\frac{A_{k}}{\Delta}\right]=\left[\delta_{ij}\right]=E.$$

$A^{*}\cdot A=E$ эканлигига ҳам ишонч ҳосил қилиш мумкин. Натижада, $A^{*}=A^{-1}$, бу ерда:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\left[A_{ij}\right]$$

1-эслатма. Берилган А матрица учун битта ва фақат битта тескари $A^{-1}$ матрица мавжуд.

2-эслатма. Махсус квадрат матрица учун тескари матрица мавжуд эмас, чунки:

$$\det A=0.$$

**Мисол:** Берилган А матрица учун тескари $A^{-1}$ матрица топилсин.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 4 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

**Ечиш:** Берилган А матрицанинг аниқловчисини ҳисоблаймиз:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 4 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=6-24+2+8=-8\neq 0.$$

Демак, А матрица махсус матрица эмас экан.

Сўнгра А матрицага тиркалган матрица тузамиз:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 2\\ -7 & 10 & -11\\ 8 & -8 & 8\end{bmatrix}, \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{8} & \frac{4}{8} & -\frac{2}{8}\\ \frac{7}{8} & -\frac{10}{8} & \frac{11}{8}\\ -\frac{8}{8} & \frac{8}{8} & -\frac{8}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{7}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{11}{8}\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

А матрицага тескари бўлган $A^{-1}$ матрицани ҳосил қилдик:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 4 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{7}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{11}{8}\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E$$

## 4.5. Тескари матрицанинг хоссалари

**1-хосса.** Тескари матрицанинг аниқловчиси дастлабки берилган матрица аниқловчисининг тескари қийматига тенг.

**Исбот.** Маълумки: $A^{-1}\cdot A=E$, бундан $\det A^{-1}\det A=\det E=1$. Натижада

$$\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}.$$

**2-хосса.** Иккита A ва B матрицалар кўпайтмасининг тескариси, шу матрицалар тескарисининг ўрин алмаштиргандаги кўпайтмасига тенг:

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$

**Исбот.** Ҳақиқатдан ҳам $AB(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$ ва

$$(B^{-1}A^{-1})AB=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E.$$

Демак, $B^{-1}A^{-1}$ матрица $AB$ учун тескари матрица.

**Натижа.** $n$ та матрицалар кўпайтмасининг тескариси шу матрицаларга тескари бўлган матрицаларнинг ўрин алмаштиргандаги кўпайтмасига тенг:

$$(A_1A_2\ldots A_n)^{-1}=A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\ldots A_1^{-1}.$$

Натижани математик индукция усули орқали исботлаш мумкин.

**3-хосса.** Тескари матрицанинг транспонирланган транспонирланган матрицанинг тескарисига тенг:

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}.$$

**Исбот.** Биз $A^{-1}A$ муносабатни транспонирлаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(A^{-1}A)^T=A^T(A^{-1})^T=E^T=E,\text{ бундан } A^T(A^{-1})^T=E.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини чапдан $(A^T)^{-1}$ матрицага кўпайтирсак, 3-хосса исботланади:

$$(A^T)^{-1}A^T(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}E \text{ ёки } (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}.$$

## 4.6. Матрицанинг нормаси ва абсолют қиймати

$A=[a_{ij}]$ ва $B=[b_{ij}]$ бир хил ўлчамли матрицалар берилган бўлсин. Бу матрицаларни ҳар доим ҳам ўзаро таққослаб бўлмайди, чунки $A\le B$ тенгсизлигидан $a_{ij}\le b_{ij}$ келиб чиқади.

Матрицанинг абсолют қиймати $|A|$ деб, қуйидаги $|A|=[|a_{ij}|]$ матрицага айтилади. Бу ерда $|a_{ij}|$ берилган $A$ матрица элементларининг абсолют қийматидан иборат. Агар A ва B матрицалар учун қўшиш A+B ва кўпайтириш A*B амаллари маънога эга бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгсизликлар ўринлидир:

1. $|A+B|\le|A|+|B|$; 2. $|A\cdot B|\le|A|\cdot|B|$, 3. $|\alpha\cdot A|\le|\alpha|\cdot|A|$; ($\alpha$ - доимий сон);

4. $|A^k|\le|A|^k$ ($k$ - натурал сон).

Матрица $A=(a_{ij})$ нинг нормаси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ҳақиқий $\|A\|$ сонга айтилади:

1. Норма ҳар доим мусбат ёки нолга тенг, яъни:

$\|A\|\geq 0$, бу ерда $\|A\|=0$ тенгсизлик фақат ва фақат A=0 бўлгандагина ўринли бўлади.

2. Доимий сонни норма ишорасидан абсолют миқдордан чиқариш мумкин:

$$\|\alpha\cdot A\|=|\alpha|\cdot\|A\| \ (\alpha \text{ -доимий сон}), \text{ хусусий ҳолда } \|-A\|=\|A\|.$$

3. Норма учбурчак тенгсизлигини қаноатлантиради, яъни

$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|.$$

4. Кўпайтманинг нормаси нормалар кўпайтмасидан катта эмас, яъни

$$\|A\cdot B\|\leq\|A\|\cdot\|B\|.$$

Агар A квадрат матрица бўлиб, A=B бўлса, бу муносабатдан $\|A^k\|\leq\|A\|^k$ тенгсизлик келиб чиқади (K натурал сон).

5. Агар A ва B лар бир хил тартибда бўлса, $\|A-B\|\geq\|B\|-\|A\|$ тенгсизлик ўринлидир.

Шуни эслатиб ўтиш керакки, норма кўпгина ҳолларда ўлчамни, яъни масофа, узунлик ва ҳоказоларни билдиради. Ўлчамни турли хил усулда киритиш мумкинлигидан нормани ҳам турли усулда киритиш мумкин, яъни масалан,

1. $\|A\|_m=\max\sum_j|a_{ij}|$, бунга $m$ - норма дейилади.

2. $\|A\|_k=\sqrt{\sum_{ij}\xi_{ij}|a_{ij}|^2}$, бунга $k$ - норма дейилади.

3. $\|A_l\|=\max_j\sum_i|a_{ij}|$, бунга $l$ - норма дейилади.

Мисол.

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix} \text{ матрица берилган бўлсин.}$$

Бу матрица учун юқоридаги нормаларни қараб чиқамиз.

$$\|C\|_m=\max_i\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=\max(1+1+5,\ 2+3+1,\ 4+1+3)=\max(6,7,8)=8;$$

$$\|C\|_k=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{3}|a_{ij}|^2}=\sqrt{1^2+1^2+5^2+2^2+3^2+1^2+4^2+1^2+3^2}=\sqrt{67}\approx 8{,}18;$$

$$\|C\|_l=\max_j\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=\max(1+2+4,\ 1+3+1,\ 5+1+3)=\max(7,5,9)=9$$

Эслатма. Юқорида киритилган $m, k, l$ нормалар, норма таърифининг ҳамма аксиомаларини қаноатлантиради. Норма таърифининг 1 ва 2 шартларининг қаноатлантиришини текширганда Коши тенгсизлиги деб ата лувчи ушбу $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$ тенгсизликдан фойдаланилади.

## 4.7. Матрицанинг ранги

Берилган бўлсин

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

матрица ва унга мос

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (4.9)$$

аниқловчи. Агар А матрицада К та устун ва К та сатр танлаб олинса, бу ерда $k \le \min(m, n)$, у ҳолда бу сатрлар ва устунларни кесишиш нуқталаридаги элементлар К-тартибли квадрат матрица ҳосил қилади. Ҳосил бўлган квадрат матрицанинг аниқловчисига А матрицанинг К-тартибли минори дейилади.

Минорларнинг тартиби турли хил 1,2,3 ва ҳоказо $n$-тартибли бўлиши мумкин. Масалан: $[m \times n]$ ўлчамли матрицада $C_m^k C_n^k$ - та К-тартибли минорлар тузиш мумкин.

Мисол:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицада биринчи тартибли минорлар $C_4^1 4_3^1 = 4 \cdot 3 = 12$ та,

2-тартибли минорлар

$$C_4^2 C_3^2 = 6 \cdot 3 = 18; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ ва ҳоказо.}$$

3-тартибли минорлар $C_4^3 C_3^3 = 4$ та, яъни

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Текшириб кўриш мумкинки, ҳамма 3-тартибли минорлар нолга тенг бўлиб, 2-тартибли минорлар орасида эса нолга тенг бўлмаганлари ҳам мавжуд (масалан, биринчиси). Бундай ҳолда биз А матрицанинг ранги 2 га тенг дей миз. Демак, матрицанинг ранги деб, матрицанинг нолга тенг бўлмаган минорларининг энг юқори тартибига айтилади. Шундай қилиб, агар матрицанинг ранги $K$ га тенг бўлса, у ҳолда бу матрицанинг минорлари орасида камида битта нолга тенг бўлмаган $K$-тартибли минори мавжудки, қолган ҳамма $K+1$ ва ундан юқори тартибли минорлар нолга тенгдир. А матрицанинг ранги $r(A)$ деб белгиланади.

Ихтиёрий матрицада элементар ўзгартиришлар, яъни транспонирлаш, икки сатр ёки икки устунларни алмаштириш, сатр ёки устуннинг ҳамма элементларини бирор доимий сонга кўпайтириш, бирор сатр ёки устун элементларига, иккинчи бир сатр ёки устун элементларини мос равишда қўшиш натижасида матрицанинг ранги ўзгармайди. Шуни эътиборга олиш керакки, аниқловчининг минори тушунчаси, аниқловчининг бирорта элементига нисбатан ҳам ишлатилади. Масалан, $a_{ik}$ элементининг минори $M_{ik}$ деб, $\Delta$-аниқловчида $i$ ва $k$ устунни ўчириб ташлаш натижасида ҳосил бўлган аниқловчига айтилади. Худди шу маънода $a_{ik}$ элементининг алгебраик тўлдирувчиси $A_{ik}$ қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}.$$

**Мисол:**

$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&0&-1\\0&4&5\end{bmatrix}$ матрица учун учинчи тартибли минор $\begin{vmatrix}3&2&1\\2&0&-1\\0&4&5\end{vmatrix}=0$ га тенг бўлиб,

2-тартиблиси $\begin{vmatrix}3&2\\2&0\end{vmatrix}=0-4\neq0$ бўлганлигидан $r(A)=2$.

Алгебраик тўлдирувчилар, масалан, 1-сатр ва 1-устун кесишган $a_{11}=3$ элементники $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}0&1\\4&5\end{vmatrix}$ га тенгдир. Худди шундай $a_{32}=4$ сони учун $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}$ ва ҳоказо.

Бошқа элементлар учун ҳам алгебраик тўлдирувчиларни юқоридагидек топиш мумкин.

## 4.8. Матрицанинг даражаси

Фараз қилайлик, (4.1) матрица квадрат $(m=n)$ матрица бўлсин. А матрицани ўз-ўзига Р марта кўпайтириш амалига А матрицанинг Р даражаси дейилади.

$$\underbrace{AA...A}_{P\text{ марта}}=A^P,(P\geq0).$$

Хусусий ҳолда P=0 бўлса, $A^0 = E$ бирлик матрица ҳосил бўлади. Агар A матрица махсусмас матрица бўлса, у ҳолда бу матрица учун манфий даража тушунчаси ҳам ўринлидир, яъни:

$$A^{-P} = (A^{-1})^P .$$

Матрицаларнинг даражалари бутун сонлардан иборат бўлса, қуйидаги қоидалар ўринлидир:

$$1.\ A^pA^q = A^{p+q}; \quad 2.\ (A^p)^q = A^{pq} .$$

**Мисол:**

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$ матрицани P-даражага кўтаринг.

$$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2^2&0&0&0\\0&2^2&0&0\\0&0&2^2&0\\0&0&0&2^2\end{bmatrix}, \quad A^3 = AAA = \begin{bmatrix}2^3&0&0&0\\0&2^3&0&0\\0&0&2^3&0\\0&0&0&2^3\end{bmatrix}$$

ва ҳоказо. $A^P = \begin{bmatrix}2^P&0&0&0\\0&2^P&0&0\\0&0&2^P&0\\0&0&0&2^P\end{bmatrix}$

Агар A ва B матрицалар бир хил тартибдаги квадрат матрицалар бўлиб $A\cdot B = B\cdot A$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда матрицалар йиғиндиси учун Ньютон биноми формуласи ўринлидир.

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k} .$$

Мисол: Берилган A ва B матрицалар учун $A\cdot B = B\cdot A$ шарт бажарилса, Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\2&1&1\end{bmatrix} \text{ ва } B=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\4&1&2\end{bmatrix}$$

матрицаларнинг 4-даражали йиғиндисини топинг.

$$(A+B)^4 = \left(\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\2&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\4&1&2\end{bmatrix}\right)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k \begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\2&1&1\end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\0&1&2\end{bmatrix}^{4-k}$$

$$= C_4^0\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\2&1&1\end{bmatrix}^0 \cdot \begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\4&1&2\end{bmatrix}^4 + C_4^1\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\2&1&1\end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\4&1&2\end{bmatrix}^3 +$$

$$+C_4^2\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\2&1&1\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\4&1&2\end{bmatrix}^2+C_4^3\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\2&1&1\end{bmatrix}^3\cdot\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\4&1&2\end{bmatrix}^1+C_4^4\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\2&1&1\end{bmatrix}^4\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\4&1&2\end{bmatrix}^0=$$

$$=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&1\\4&1&2\end{bmatrix}+4\cdot\begin{bmatrix}160&161&115\\232&195&153\\168&153&115\end{bmatrix}+6\cdot\begin{bmatrix}172&134&112\\160&130&104\\152&138&104\end{bmatrix}+4\cdot\begin{bmatrix}142&102&90\\132&102&96\\128&100&84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&3\\2&1&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2243&1859&1494\\2416&1969&1623\\2102&1842&1423\end{bmatrix}.$$

## 4.9. Катакли матрицалар

Катакли матрицалар - матрицалар алгебрасининг асосий тушунчаларидан бири ҳисобланади. Катакли матрицаларни қуйидагича тасаввур қилиш мумкин. Ихтиёрий берилган $m$-сатрли ва $n$-устунли матрица, горизонтал ва вертикал тўсиқлар билан бир нечта кичик ўлчамли матрицаларга ажратилади. Масалан, қуйидаги матрица, ҳар хил ўлчамдаги тўртта кичик матрицаларга ажратилган:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\\hline a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{array}\right],\quad A_1=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix};$$

$$A_2=\begin{bmatrix}a_{14}&a_{15}\\a_{24}&a_{25}\\a_{34}&a_{35}\end{bmatrix};\quad A_3=\begin{bmatrix}a_{41}&a_{42}&a_{43}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}\end{bmatrix};\quad A_4=\begin{bmatrix}a_{44}&a_{45}\\a_{54}&a_{55}\end{bmatrix}.$$

Демак, биз берилган A матрицани бир нечта матрицалардан тузилган мураккаб матрица деб тасаввур қилишимиз мумкин экан. Бундай матрицаларни катакли ёки блокли матицалар деб атаймиз.

Катакли матрицаларнинг хусусий кўринишларидан бири квазидиагонал матрица ҳисобланади. Бу матрицанинг кўриниши қуйидагича:

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{A_1}&&&\\&\boxed{A_2}&&\\&&\ldots&\\&&&\boxed{A_n}\end{bmatrix}$$

бу ерда, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ катаклар, квадрат матрицалардан иборат. A матрицанинг қолган элементлари ноллардан иборат.

Квадрат матрицалар аниқлавчиларининг кўпайтмаси A матрицанинг аниқловчисига тенг:

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \ldots \det A_k$$

Катакли матрицаларнинг хусусий кўринишларидан бири ҳошияланган матрицадир. Бунинг маъноси шуки, берилган $n$-тартибли квадрат матрица $n-1$-тартибли квадрат матрицага ва шунингдек биттадан устун ва сатр матрицаларга ва битта элементли матрицага ажратилади:

$$A_n = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} A_{n-1} & U_n \\ \hline V_n & a_{nn} \end{array} \end{bmatrix},$$

бу ерда

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$ $n-1$ тартибли матрица,

$$U_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix}$$ - устун матрица,

$V_n = [a_{n,1} \quad a_{n,2} \quad \ldots \quad a_{n,n-1}]$ - сатр матрица ва $a_{nn}$ - элемент матрица (сон).

Катакли матрицалар устида бажариладиган амаллар, оддий матрицалар устида бажариладиган амаллар каби бўлади.

## 4.10. Учбурчакли матрицалар

Квадрат матрицаларнинг хусусий кўринишларидан бири, учбурчакли матрицалар ҳсобланади.

**Таъриф.** Агар квадрат матрицанинг бош диагоналидан юқоридаги ёки пастдаги барча элемантлар фақат ноллардан иборат бўлса, бундай матрицалар учбурчакли матрицалар деб аталади.

Масалан,

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

юқори учбурчакли матрица (бу ерда $i > j$ да $t_{ij} = 0$) ва пастки учбурчакли матрицадир. $(j > i)$ да $(t_{ij} = 0)$.

Диагонал матрица ҳам пастки ва юқори учбурчакли матрицаларнинг хусусий ҳоли ҳисобланади.

Учбурчакли матрицанинг аниқловчиси (детерминанти) диагонал элементларининг кўпайтмасига тенг.

$$\det A = t_{11} \cdot t_{22} \ldots t_{nn}.$$

Учбурчакли матрица махсус бўлмаслиги учун, унинг диагонал элементларининг ҳаммаси нолдан фарқли бўлиши шарт.

Учбурчакли матрицалар устида бажариладиган амаллар, квадрат матрицалар устида бажариладиган амаллар каби бўлади. Шунингдек, махсус бўлмаган учбурчакли A матрицанинг тескарисининг тузилиши $A^{-1}$ ҳам A матрицанинг тузилиши каби бўлади.

**Мисол.** Қуйидаги учбурчакли матрица топилсин:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Ечиш:** Демак, изланаётган тескари матрицанинг тузилиши A матрицаники каби бўлиши керак:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{31} & t_{32} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Энди A ва $A^{-1}$ матрицаларни кўпайтириб қуйидагига эга бўламиз

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t_{11} & 0 & 0 \\ t_{11} + 3t_{21} & 3t_{22} & 0 \\ 2t_{11} - t_{21} + t_{31} & -t_{22} + t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Маълумки, тескари матрицаларни бир-бирига кўпайтирсак, бирлик матрица ҳосил бўлади. Бирлик матрицанинг диагонал элементлари бирга тенг бўлиб, қолган элементларнинг ҳаммаси нолга тенг бўлишини ҳисобга олсак:

$$\begin{aligned} &2t_{11} = 1, && 3t_{22} = 1, \\ &t_{11} + 3t_{21} = 0, && -t_{22} + t_{32} = 0, \\ &2t_{11} - t_{21} + t_{31} = 0, && t_{33} = 1. \end{aligned}$$

Энди булардан, тескари матрицанинг элементларини топамиз:

$$t_{11} = 1/2; \quad t_{21} = -1/6; \quad t_{22} = 1/3; \quad t_{31} = -7/6; \quad t_{32} = 1/3; \quad t_{33} = 1$$

Демак,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{7}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

**Теорема.** Бош диагонал минорлари нолдан фарқли бўлган

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_n = |A| \neq 0,$$

ихтиёрий

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

квадрат матрицани иккита ҳар хил тузилишдаги (қуйи ва юқори) матрицалар кўпайтмасига ажратиш мумкин [3].

Биз бу ерда теоремани исботламасдан учбурчакли матрицаларга қандай ўтиш усули билан танишиб чиқамиз. $n$-тартибли А квадрат матрица $T_1$ ва $T_2$ учбурчакли матрицалар кўпайтмасидан иборат бўлсин:

$$A = T_1 \cdot T_2, \qquad (4.10)$$

бу ерда

$$T_1 = [b_{ij}] \quad (j>i \text{ учун } b_{ij} = 0) \quad (4.11)$$

$n$ - тартибли қуйи учбурчакли матрица.

Шунингдек,

$$T_2 = [c_{ij}] \quad (i>j \text{ учун } c_{ij} = 0) \quad (4.12)$$

$n$ - тартибли юқори учбурчакли матрица.

Бу иккала учбурчакли матрицаларни кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} = a_{ij}, \quad (i, j = 1,2,\dots n) \qquad (4.13)$$

(4.13) система (4.11) ва (4.12) шартларга асосан қуйидаги кўринишни қабул қилади: $\sum_{k=1}^{j} b_{ik} c_{kj} = a_{ij}$, агар $i \geq j$ бўлса,

$\sum_{k=1}^{i} b_{ik} c_{kj} = a_{ij}$, агар $i < j$ бўлса, бу ерда $(j = 1,2,\dots n;\ i = 1,2,\dots n-1)$.

**Мисол.** Қуйидаги А квадрат матрица

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

иккита $T_1$ ва $T_2$ учбурчакли матрицалар кўпайтмаси кўринишда ифодаланаси

Ечиш. $T_1$ ва $T_2$ учбурчакли матрицаларни қуйидаги кўринишда ифодаласин:

$$T_1 = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} \qquad T_2 = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Буларни ҳисобга олсак:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}=T_1\cdot T_2=\begin{bmatrix}t_{11} & t_{11}r_{12} & t_{11}r_{13}\\ t_{21} & t_{21}r_{12}+t_{22} & t_{21}r_{13}+t_{22}r_{23}\\ t_{31} & t_{31}r_{12}+t_{32} & t_{31}r_{13}+t_{32}r_{23}+t_{33}\end{bmatrix}$$

Бундан,

$t_{11}=2;$ $t_{11}r_{12}=-1;$ $t_{11}r_{13}=3;$ $r_{12}=-1/2;$ $r_{13}=3/2;$ $r_{23}=-7/5;$

$t_{21}=1;$ $t_{21}+t_{22}=2;$ $t_{21}r_{13}+t_{22}r_{23}=-2;$ $t_{11}=2;$ $t_{21}=1;$ $t_{31}=3;$

$t_{31}=3;$ $t_{31}r_{12}+t_{32}=-1;$ $t_{31}r_{13}+t_{32}r_{23}+t_{33}=1;$ $t_{32}=1/2;$ $t_{33}=-14/5;$ $t_{22}=5/2.$

Демак, изланган $T_1$ ва $T_2$ учбурчакли матрицаларни ёзиб оламиз:

$$T_1=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & \frac{5}{2} & 0\\ 3 & \frac{1}{2} & -\frac{14}{5}\end{bmatrix},\qquad T_2=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{7}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Бу иккала $T_1$ ва $T_2$ матрицаларни кўпайтирсак, А матрица ҳосил бўлади.

Юқорида айтилганлардан шундай хулоса чиқариш мумкинки, агар А квадрат матрицанинг детерминанти $\det A\neq 0$ бўлса, у албатта иккита ҳар хил тузилишдаги учурчакли матрицаларга ажратилади ва уларнинг кўпайтмаси А матрицага тенг бўлади:

$$A=T_1\cdot T_2.$$

Шунингдек, А матрицанинг тескари матрицаси $A^{-1}$ ни ҳам, $T_1^{-1}$ ва $T_2^{-1}$ тескари учбурчакли матрицаларнинг кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин:

$$A^{-1}=T_2^{-1}\cdot T_1^{-1}.$$

## 4.11. Аниқловчиларни (детерминантларни) ҳисоблаш

Матрицалар алгебрасида матрицаларнинг аниқловчиларини ҳисоблаш муҳим аҳамиятга эга. Матрицанинг тартиби юқори бўлса, уни элементар алмаштиришлар ёрдамида аниқловчиларининг тартиби қадамба-қадам пасайтирилиб борилади.

Бизга $n$ сатр ва $n$ устундан иборат бўлган А матрицанинг аниқловчиси берилган бўлсин:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}. \qquad (4.14)$$

$\Delta_n$ аниқловчининг нолдан фарқли бўлган битта элементини танлаб оламиз ва уни бош элемент деб ҳисоблаймиз. Қулайлик учун бу элемент $a_{11}\neq 0$ бўлсин. Энди $\Delta_n$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\Delta_n = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Энди, Жордан-Гауссниг элементларни кетма-кет йўқотиш усулидан фойдаланиб, $\Delta_n$ аниқловчини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\Delta_{n-1},$$

бу ерда

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \qquad (4.15)$$

ва $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \quad (i, j = 2,3,\dots n)$.

Шунингдек, $\Delta_{n-1}$ ва бошқа аниқловчилар учун ҳам ўтказилган жараённи такрорлаб, қуйидагини топамиз:

$$\Delta_n = a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(1)}\dots a_{nn}^{(n-1)}.$$

Умумий ҳолда, танланган бош элемент $a_{pq}$ бўлса (матрица аниқловчисидаги $p$-сатр ва $q$-устунда жойлашган элемент ), у ҳолда

$$\Delta_n = (-1)^{p+q}\Delta_{n-1}.$$

**Мисол.**

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 33 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ечиш: Бош элемент сифатида $a_{11} = 1 \neq 0$ ни олишимиз мумкин $(p = 1, \ q = 1.)$

$$\Delta_3 = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1+2 & 1-6 & -2-4 \\ -2+3 & 3-9 & 4-6 \\ 2 & 1 & 3+3 & 1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 1 & -6 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -5 & 18 & -6-9 \\ -6-6 & & -2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & -15 \\ -12 & -5 \end{vmatrix} = 115 - 180 = -65.$$

## 4.12. Матрицанинг хос қиймати ва хос вектори

Амалий масалаларни ечишда матрицаларнинг хос сони ва хос векторларини аниқлашга тўғри келади. Бундай масалаларга хос сонларнинг тўлиқ муаммоси дейилади. Фараз қилайлик, $A=[a_{ij}]$ квадрат матрица берилган бўлсин.

Нолдан фарқли $x$ вектор А матрицанинг хос вектор дейилади, агарда шундай $\lambda$ сон топилиб,

$$Ax=\lambda x \qquad (4.16)$$

тенглик бажарилса. $\lambda$ сонга А матрицанинг хос қиймати дейилади.

Матрицанинг хос сони ва хос вектори ҳақидаги маълумотлар математикада ва бошқа турли соҳаларда кенг қўлланилади. Кейинги бўлимларда ўрганиладиган $x=Bx+C$ чизиқли алгебраик тенгламалар системасини кетма-кет яқинлашиш усули билан ечишда яқинлашиш тезлиги В матрицанинг модули бўйича энг катта хос сонининг қийматига боғлиқ бўлади. Тебраниш жараёнларида, ядро масалаларида ҳам матрица хос сонларининг энг катта ёки кичикларини топиш зарур бўлади. Матрицаларнинг битта ёки бир нечта хос сон ва хос векторларини топиш масаласига хос сонларининг қисмий муаммоси дейилади.

(4.16) тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$(A-\lambda E)x=0. \qquad (4.17)$$

Бу система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун

$$\varphi(\lambda)=\det(A-\lambda E)x=0 \qquad (4.18)$$

тенглик бажарилиши керак.

(4.18) тенгламага А матрицанинг характеристик тенгламаси дейилади. Характеристик тенгламанинг ёйилган ҳолдаги кўриниши

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (4.19)$$

ёки $\varphi(\lambda)=(-1)^n P(\lambda)=0$ бўлиб, бу ерда

$$P(\lambda)=\lambda^n-P_1\lambda^{n-1}-P_2\lambda^{n-2}-\dots-P_n \qquad (4.20)$$

кўпҳадга А матрицанинг хос кўпҳади ёки характеристик кўпҳади дейилади. Хос кўпҳаднинг илдизлари матрицанинг хос сонлари бўлади. (4.20) кўпҳадни ечиб $\lambda_1 \dots \lambda_n$ хос қийматларини топиб, ҳар бир $\lambda_i(i=\overline{1,n})$ нинг қийматида (4.17) системани, яъни $(A-\lambda_i E)x=0$ системани ечиб, $\lambda_i$ га мос хос $x^{(i)}$ векторларини топамиз.

Агар (4.20) характеристик тенгламанинг илдизлари ҳар хил бўлса, ҳар бир хос сонга фақат битта хос вектор мос келади. Демак, А матрицанинг хос сонлари ва хос векторларини топиш учта босқичдан иборат бўлар экан.

1. $P(\lambda)$ кўпҳадни тузиш.

2. $P(\lambda)=0$ тенгламани ечиб, $\lambda_i(i=\overline{1,n})$ хос сонларни топиш.

3. Ҳар бир $\lambda_i$ га мос хос векторларни, (4.17) системани ечиб топиш.

Бу босқичларнинг ҳар бири маълум бир мураккаблик даражасидаги масалалардир. Хос сонлар тўпламига А матрицанинг спектори дейилади. $P(\lambda)$ кўпҳаднинг коэффициентлари А матрицанинг $i$-тартибли бош минорлари, $P_i$-ларни $(-1)^{i-1}$ ишора билан олинган йиғиндиларидан иборатдир.

Жумладан:

$$P_1=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=\sum_{j=1}^{n}a_{jj},\quad P_2=-\sum_{j<k}\begin{vmatrix}a_{jj}&a_{jk}\\a_{kj}&a_{kk}\end{vmatrix},$$

$$P_3=\sum_{j\le k\le l}\begin{vmatrix}a_{jj}&a_{jk}&a_{jl}\\a_{kj}&a_{kk}&a_{kl}\\a_{lj}&a_{lk}&a_{ll}\end{vmatrix},\ldots,\quad P_n=(-1)^{n-1}\det A.$$

Виет теоремасига асосан

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=P_1$$
$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n=\det A.$$

Бундан кўринадики, А матрицанинг бирорта хос сони нолга тенг бўлиши учун $\det A=0$ бўлиши заруp ва кифоя экан.

Хос сон ва хос векторларни топиш усуллари икки гуруҳга, яъни аниқ ва кетма-кет яқинлаш усулларига асослангандир.

Аниқ усулларда юқоридаги 3 та босқич кетма-кет бажарилади ва бу хос сонларнинг тўлиқ муаммосини ҳал қилиш учун ишлатилади. Итерация усуллари хос сонларни характеристик кўпҳаднинг коэффициентларини топмасдан бевосита ҳисоблайди ва хос сонларнинг қисмий муаммосини ечиш учун ишлатилади. Бу усулда хос сон ва хос векторлар сонли ва векторли кетма-кетликнинг лимити сифатида топилади.

Хос сон ва хос векторларни топишнинг аниқ усулларидан энг кўп қўлланадигани А.Н.Крилов усули, К.Ланцош усули, А.М.Данилевский усули, Леверья усули, Д.К.Фадеев усули, ноаниқ коэффициентлар усули, ҳошиялаш усулларидир.

Итерация усулларидан кўп ишлатиладигани даражали усул, скаляр кўпайтмалар усули, охирига етказиш усули, мусбат аниқланган матрицаларни хос сонларини топишнинг итерация усулидир. Бу усуллар билан танишиб чиқишни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз. Ушбу усуллар ҳақида тўлиқ маълумотни [2,3,9,12,14,15,28] адабиётлардан олиш мумкин.

Мисол.

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\5&4\end{bmatrix}$$

матрицанинг хос сонлари ва хос векторларини топинг.

Ечиш: A матрицанинг характеристик кўпҳади

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-6.$$

Тенгламанинг илдизлари: $\lambda_1=6, \lambda_2=-1$.

Демак, A матрицанинг хос сонлари иккита бўлиб, $\lambda_1=6, \lambda_2=-1$ га тенг экан.

A матрицанинг хос векторини

$$\begin{cases}(1-\lambda_i)x_1+2x_2=0,\\ 5x_1+(4-\lambda_i)x_2=0\end{cases}$$

системадан топамиз.

$$\lambda_1=6 \text{ бўлганда, } \begin{cases}-5x_1+2x_2=0,\\ 5x_1-2x_2=0.\end{cases}$$

Тенгламалар бир хил бўлганлиги учун биттасини $5x_1-2x_2=0$ қараш етарлидир. Бундан $5x_1=2x_2$ ёки $\frac{x_1}{x_2}=\frac{2}{5}$, яъни $x_1:x_2=2:5$.

Хос вектор сифатида $x^{(1)}=(2;5)$ ни олиш мумкин.

$$\lambda_2=-1 \text{ бўлганда, } \begin{cases}2x_1+2x_2=0,\\ 5x_1+5x_2=0\end{cases} \text{ бўлиб,}$$

бундан $x_1+x_2=0$ ёки $x_1 \; x_2=-1$ ни ҳосил қиламиз. Демак, иккинчи хос вектор $x^{(2)}=(1;-1)$ ни олиш мумкин. Шундай қилиб, A матрицанинг хос сонлари $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-1$, хос векторлари $x^{(1)}=(2;5)$, $x^{(2)}=(1;-1)$ га тенг экан.

# 5-БОБ. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИШ

## 5.1. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг умумий характеристикаси

Ҳисоблаш математикасида чизиқли тенгламалар системасини ечиш масалалари кўп учрайди. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг хил-ма хил усуллари мавжуд бўлиб, биз бу ерда асосан ЭҲМ да фойдаланишга қулай бўлган усуллар билан танишиб чиқамиз.

Чизиқли тенгламалар системасини ечиш усулларини икки синфга ажратиш мумкин. Аниқ усуллар ва итерация усуллари.

а) Аниқ усуллар. Бундай усулларга Крамер қоидаси, Гаусс усули, бош элементлар усули, квадрат илдиз усули ва бошқалар киради.

б) Итерация усуллари. Бундай усулларга оддий итерация, Зейдел усули, релаксация усули ва бошқалар киради.

Умуман олганда, тенгламалар системасини аниқ усуллар билан ечганда ҳам аниқ ечимни топа олмаслигимиз мумкин. Чунки берилган системадаги айрим коэффициентлар тақрибан олинган бўлиши мумкин, бундан ташқари ҳисоблаш жараёнида сонларни яхлитлашга тўғри келади, демак тенгламалар системасининг аниқ ечимини топа олмаймиз.

Лекин аниқ усуллар билан итерация усуллари бир хил экан, деган хулоса чиқариш ярамайди. Итерация усулларида яхлитлаш хатоларидан ташқари усулнинг хатоси ҳам мавжуддир.

Биз бу усулларнинг айримлари билан танишиб чиқамиз.

## 5.2. Крамер қоидаси

Тенгламалар системасини ечишнинг аниқ усулларидан бири бўлган Крамер қоидасини баён қиламиз.

Бизга $n$ номаълумли $n$ та чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}. \qquad (5.1)$$

Буни матрица кўринишида ифодаласак

$$A \cdot X = B. \qquad (5.2)$$

бу ерда, A - матрица, B - вектор устун, X - вектор устун (изланаётган номаълумлар).

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Агар А матрицанинг детерминанти (аниқловчиси) нолган фарқли бўлса, $\det A=\Delta\neq 0$, у тескари $A^{-1}$ матрицага эга.

(5.2) нинг иккала томонини чапдан $A^{-1}$ га кўпайтирсак,

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B.$$

Бундан $A^{-1}$ А=Е бирлик матрица эканлигини ҳисобга олиб, (1.2) тенгламалар системасининг ечимини топамиз:

$$X=A^{-1}\cdot B. \qquad (5.3)$$

Аммо, А матрицанинг тартиби юқори бўлса, унга тескари $A^{-1}$ матрицани ҳисоблаш жуда қийинлашиб кетади. Шунинг учун амалиётда (5.3) формуладан кам фойдаланилади.

Маълумки, $A^{-1}=\tilde{A}/\Delta$, бу ерда, А тиркалган матрица:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Демак,

$$X=\tilde{A}\cdot B/\Delta \text{ ёки } x_i=\Delta_i/\Delta, \qquad (5.4)$$

бу ерда

$$\Delta_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}b_j=\begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1}\dots a_{1n} \\ a_{21}\dots a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\dots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1}\dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Юқорида келтирилган (5.4) формулаго Крамер формулалари деб аталади.

**Мисол.** Берилган тенгламалар системаси Крамер қоидаси ёрдамида ечилсин.

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3&=4 \\ 2x_1+x_2+x_3&=3 \\ x_1+2x_2+x_3&=1 \end{aligned}\right\}.$$

Ечиш: Бу системанинг аниқловчиси

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1+1+8-2-2-2=4\neq 0$$

Қўшимча аниқловчиларни топамиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

бу ерда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Демак, (5.1) тенгламалар системасининг аниқловчиси нолдан фарқли бўлса, тенгламалар системасининг ечими (5.4) формула орқали ҳисобланади. Бу формуладаги касрнинг махражи асосий A матрицанинг аниқловчисидан иборат бўлиб, касрнинг сурати эса, асосий A матрица аниқловчисидан $i$-устунни озод ҳад устунига алмаштириб тузилгандаги аниқловчидан иборатдир.

## 5.3. Гаусс усули

Олдинги мавзуда ўрганилган Крамер қоидасидан алгебраик тенгламалар системасида номаълумлар сони камроқ бўлган ҳолларда фойдаланиш қулай бўлиб, номаълумлар сони кўп бўлса, бу усулдан фойдаланиб системанинг ечимини топиш жуда қийин.

Биз тенгламалар системасини ечишнинг қулай усулларидан бири бўлган Гаусс усули билан танишиб чиқамиз. Бу усул ўзгарувчиларни кетма-кет йўқотиш усули деб ҳам аталади.

Бизга (5.1) тенгламалар системаси берилган бўлсин. Система детерминанти (аниқловчиси) $\det A = \Delta \neq 0$ деб фараз қиламиз. Демак (5.1) тенгламалар системаси ягона ечимга эга.

Гаусс усулини соддароқ изоҳлаш учун тўрт номаълумли тенгламалар системасини текшириш билан кифояланамиз.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{aligned}\right\}. \qquad (5.5)$$

(5.5) тенгламалар системасидан нолдан фарқли бўлган исталган коэффициентни танлаб оламиз. Қулайлик учун $a_{11} \neq 0$ ни танлаб оламиз ва буни бош элемент деб атаймиз.

Биз энди (5.5) тенгламалар системасидаги биринчи тенглама номаълумларининг коэффициентларини $a_{11}$ га бўлиб қуйидагини ёзиб оламиз:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \qquad (5.6)$$

бу ерда $b_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $(j > 1)$.

Энди (5.6) тенгламани кетма-кет $a_{21}$, $a_{31}$ ва $a_{41}$ га кўпайтириб, мос равишда (5.5) тенгламалар системаси иккинчи, учинчи ва тўртинчи тенгла маларидан айириб, $x_1$ ни йўқотамиз.

Ҳосил бўлган янги тенгламалар системаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 &= a_{25}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 &= a_{35}^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 &= a_{45}^{(1)}. \end{aligned}\right\} \quad (5,5)'$$

Бу ерда $a_{ij}^{(1)}$ коэффициентлар қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}, \quad (i, j \geq 2). \qquad (5.7)$$

Энди (5.5) тенгламалар системасидаги $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ни бош элемент деб олиб, системанинг биринчи тенгламасидаги ўзгарувчиларнинг коэффициентларини $a_{22}^{(1)}$ коэффициентга бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, \qquad (5.6)$$

бу ерда $b_{2j} = \dfrac{a_{2j}}{a_{22}^{(1)}}$, $(j > 2)$.

Олдингидек (5.5)' тенгламалар системасидан $x_2$ ни йўқотамиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 &= a_{35}^{(2)}; \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 &= a_{45}^{(2)}. \end{aligned}\right\}, \qquad (5.5)''$$

бу ерда

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(2)}b_{2j}^{(1)}, \quad (i, j \geq 3). \quad (5.7)'$$

Шунингдек (5.5)'' тенгламалар системасидаги биринчи тенгламани $a_{33}^{(2)} \neq 0$ бош элементга бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}, \quad (5.6)''$$

бу ерда $b_{3j}^{(2)} = \dfrac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$, $(j > 3)$.

Яна $x_3$ ни илгаригидан (5.5)'' дан йўқотиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}, \quad (5.5)'''$$

бу ерда

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)}b \quad (i, j \geq 4). \quad (5.7)''$$

(5.5)''' дан $x_4 = \dfrac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} = b_{45}^{(3)}$.

Қолган номаълум ўзгарувчилар кетма-кет (5.6)'', (5.6)' ва (5.6) тенгламалардан топилади:

$$x_4 = b_{45}^{(3)}, \quad x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4, \quad x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)}x_4 - b_{23}^{(1)}x_3, \quad x_1 = b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2.$$

Шундай қилиб, тенгламалар системасини ечиш икки босқичда олиб борилади:

а) Тўғри юриш. Берилган тенгламалар системасини учбурчакли матрица кўринишига келтирилади.

б) Тескари юриш. Кейин (5.6)'', (5.6)' ва (5.6) формулалар ёрдамида

$x_4, x_3, x_2$ ва $x_1$ номаълумлар кетма-кет аниқланади.

**Мисол:** Берилган тенгламалар системасини Гаусс усули ёрдамида ечинг:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2. \end{array}\right\}. \qquad (5.8)$$

**Ечиш. Тўғри юриш.** Берилган тенгламалар системасининг биринчи тенгламасидан коэффициенти нолдан фарқли бўлган ўзгарувчи танланади Масалан, $x_1$ нинг коэффициенти $a_{11} = 1 \neq 0$.

Буни ҳал қилувчи коэффициент деб қабул қиламиз ва биринчи тенгламанинг ҳар бир коэффициентини $a_{11} = 1$ га бўлиб чиқамиз:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \qquad (5.9)$$

бу ерда $b_{12} = 1;\ b_{13} = 1;\ b_{14} = 1;\ b_{15} = 2.$ Энди (5.7) формула орқали $a_{ij}^{(1)}$ коэффициентларни ҳисоблаб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{21}b_{12} = -3 - 2\cdot 1 = -5;\quad a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13} = 2 - 2\cdot 1 = 0;$$

$$a_{24}^{(1)} = a_{24} - a_{21}b_{14} = -4 - 2\cdot 1 = -6;\quad a_{25}^{(1)} = a_{25} - a_{21}b_{15} = 2 - 2\cdot 2 = -2;$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32} - a_{31}b_{13} = 1 - 3\cdot 1 = -2;\quad a_{33}^{(1)} = a_{33} - a_{31}b_{13} = -5;$$

$$a_{34}^{(1)} = -5;\quad a_{35}^{(1)} = -2;\quad a_{42}^{(1)} = -2;\quad a_{43}^{(1)} = -7;\quad a_{44}^{(1)} = -3;\quad a_{45}^{(1)} = -6.$$

Шундай қилиб, уч номаълумли учта тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} -5x_2 - 6x_4 = -2, \\ 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 2, \\ -2x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -6. \end{array}\right\}. \qquad (5.8)'$$

(5.8) тенгламалар системасида биринчи тенглама ўзгарувчиларининг ҳамма коэффициентларини $a_{22}^{(1)} = 5 \neq 0$ га бўлиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x_2 + 1{,}2x_4 = 0{,}4,\ \text{бу ерда}\ b_{23}^{(1)} = 0;\ b_{24}^{(1)} = 1{,}2;\ b_{25} = 0{,}4.$$

Энди (5.7)' формула орқали $a_{ij}^{(2)}$ коэффициентларни аниқлаймиз:

$$a_{33}^{(2)} = 5;\quad a_{34}^{(2)} = -1;\quad a_{35}^{(2)} = 0;\quad a_{43}^{(2)} = 7;\quad a_{44}^{(2)} = 0{,}6;\quad a_{45}^{(2)} = 5{,}2$$

Натижада икки номаълумли иккита тенгламалар системаси ҳосил бўлди:

$$\left.\begin{array}{l} 5x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_3 + 0{,}6x_4 = 5{,}2 \end{array}\right\}. \qquad (5.8)''$$

Шунингдек, (5.8)'' тенгламалар системасининг биринчи тенгламасидаги $a_{33} = 5 \neq 0$ ни бош элемент деб қабул қилиб, системанинг биринчи тенгламасидаги ўзгарувчиларининг коэффициентларини бўламиз:

$$x_3 - 0{,}2x_4 = 0,\ \text{бу ерда}\ b_{34}^{(2)} = -0{,}2;\quad b_{35}^{(2)} = 0.$$

Энди (5.7)'' формула орқали $a_{ij}^{(3)}$ коэффициентларни топамиз:

$$a_{44}^{(1)} = 2, \quad a_{44}^{(1)} = 5{,}2 .$$

Шундай қилиб, бир номаълумли битта тенгламани ҳосил қиламиз:

$$2x_4 = 5{,}2.$$

Булардан фойдаланиб, учбурчакли матрица кўринишдаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ &x_2 + 1{,}2x_4 = 0{,}4; \\ &x_3 - 0{,}2x_4 = 0; \\ &2x_4 = 5{,}2. \end{aligned}$$

Тескари юриш орқали номаълумларни кетма-кет аниқлаймиз:

$$x_4 = 2{,}6; \; x_3 = 0{,}52; \; x_2 = -2{,}72; \; x_1 = -1{,}6.$$

Масалани ечиш жараёнида сонларни яхлитламай ечганимиз туфайли топилган ечим аниқ ечимдир.

## 5.4. Гауссниг ихчам схемаси

Тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечиш жараёнида номаълум ўзгарувчиларнинг бевосита иштирок этиши, ҳисоблаш ишларини мураккаблаштириб юборади. Бундан ташқари, ҳисоблаш жараёнида хатога йўл қўйишимиз мумкин. Шунинг учун, ҳисоблаш жараёнини назорат қилиб боришга тўғри келади. Назорат қилишнинг энг қулай усулларидан бири "назорат йиғинди" усулидир. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, тенгламалар системасидаги ҳар бир тенгламадаги ўзгарувчиларнинг коэффициентлари ва озод ҳадлар йиғиндиси назорат қилиб борилади:

$$a_{i6} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij}, \quad (i = \overline{1,5}).$$

Қуйидаги жавдал ёрдамида Гаусснинг ихчам схемасини ифодалаймиз. Бу жадвалда тенгламалар системасининг коэффициентлари иштирок этади холос.

Тўғри юриш. а) Жадвалнинг биринчи босқичида берилган тенгламалар системасининг коэффициентлари ёзилиб, охирги устунга (бу назорат устун деб аталади), тенгламалар системасидаги сатрлар бўйича ўзгарувчиларнинг коэффициентларини ва озод ҳадларни қўшишдан ҳосил бўлган йиғинди $a_{i5}$ ёзилади.

б) (5.5) тенгламалар системасининг биринчи тенгламасидан коэффициенти нолдан фарқли бўлган ўзгарувчи танланади (умуман, системанинг исталган тенгламасини олиш мумкин), масалан, танланган коэффициент $a_{11} \neq 0$. Бу коэффициентни аниқловчи коэффициент деб атаймиз ва уни квадрат катакчага белгилаб қўямиз.

| | $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | озод ҳадлар | назорат йиғинди |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ |
| | 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $a_{26}$ |
| | 3 | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ | $a_{36}$ |
| | 4 | $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ | $a_{45}$ | $a_{46}$ |
| | $m+1$ | 1 | $b_{12}$ | $b_{13}$ | $b_{14}$ | $b_{15}$ | $b_{16}$ |
| II | | | $a_{22}^{(1)}$ | $a_{23}^{(1)}$ | $a_{24}^{(1)}$ | $a_{25}^{(1)}$ | $a_{26}^{(1)}$ |
| | | | $a_{32}^{(1)}$ | $a_{33}^{(1)}$ | $a_{34}^{(1)}$ | $a_{35}^{(1)}$ | $a_{36}^{(1)}$ |
| | | | $a_{42}^{(1)}$ | $a_{43}^{(1)}$ | $a_{44}^{(1)}$ | $a_{45}^{(1)}$ | $a_{46}^{(1)}$ |
| III | $m+1$ | | 1 | $b_{23}^{(1)}$ | $b_{24}^{(1)}$ | $b_{25}^{(1)}$ | $b_{26}^{(1)}$ |
| | | | | $a_{33}^{(2)}$ | $a_{34}^{(2)}$ | $a_{35}^{(2)}$ | $a_{36}^{(2)}$ |
| | | | | $a_{43}^{(2)}$ | $a_{44}^{(2)}$ | $a_{45}^{(2)}$ | $a_{46}^{(2)}$ |
| | $m+1$ | | | 1 | $b_{34}^{(2)}$ | $b_{35}^{(2)}$ | $b_{36}^{(2)}$ |
| IV | | | | | $a_{44}^{(3)}$ | $a_{45}^{(3)}$ | $a_{46}^{(3)}$ |
| | $m+1$ | | | | 1 | $b_{45}^{(3)}$ | $b_{46}^{(3)}$ |
| V | | | | | 1 | $x_4$ | |
| | | | | 1 | | $x_3$ | |
| | | | 1 | | | $x_2$ | |
| | | 1 | | | | $x_1$ | |

Тенгламадаги барча коэффициентлар, озод ҳад ва назорат йиғиндини $a_{11}$ га бўлиб, $m+1$ сатрга ёзиб қўйилади. $m+1$ сатрдаги коэффициентлар $b_{ij} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$ формула орқали ҳисобланади. Кейин $\sum_{i=1}^{n} b_{1j}$ йиғиндини ҳисоблаймиз ва арифметик амалларнинг тўғри ёки нотўғри бажарилганлигини текшириб чиқамиз.

в) жадвалнинг иккинчи босқичида $a_{ij}^{(1)}$ коэффициентлар (5.7) формула орқали ҳисобланиб, кейин назорат йиғинди тузилади.

г) II босқичда системанинг биринчи тенгламасидаги ўзгарувчиларнинг коэффициентларини $a_{22}^{(1)}$ га бўлиб, $m+1$ сатрга ёзиб чиқамиз:

$$b_{2j}^{(1)} = \frac{a_{2j}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

д) III босқичда ҳам биринчи тенгламадаги ўзгарувчиларнинг ҳамма коэффициентларини $a_{33}^{(1)} \neq 0$ га бўлиб, $m+1$ сатрга ёзиб оламиз. Бу сатрдаги элементлар $b_{3j}^{(2)} = \frac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$ ни ҳисоблаймиз, кейин текшириш ўтказамиз. Энди $a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{41}^{(2)} a_{3j}^{(2)}$ ни ҳисоблаймиз ва натижани IV босқичга ёзиб қўямиз.

**Тескари юриш.** Тескари юриш билан $x_4, x_3, x_2$ ва $x_1$ ларни ҳисоблаймиз.

$$x_4 = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}, \quad x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4, \quad x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)}x_3 - b_{23}^{(1)}x_4, \quad x_1 = b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2.$$

**Мисол.** Қуйидаги тенгламалар системаси ечилсин:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}.$$

**Ечиш.** Жадвалнинг I босқичига берилган алгебраик тенгламалар системасининг коэффициентларини, озод ҳадларини ва "назорат йиғинди" сини ёзамиз. Сўнгра биринчи тенгламадан коэффициенти нолдан фарқли бўлган ўзгарувчи танланади. Масалан, $x_1$ нинг коэффициенти $(2 \neq 0)$ танланади ва квадрат катакчага олинади. Энди биринчи тенгламанинг ҳар бир ҳадини ва назорат йиғиндини 2 га бўлиб, $m+1$ сатрга ёзиб қўямиз.

Жадвалнинг иккинчи босқичи қуйидагича тўлдирилади: $m+1$ сатрдаги тенгламани мос равишда -1 га ва -3 сонларга кўпайтириб, системанинг иккинчи ва учинчи тенгламаларига қўшиб, $x_1$ ўзгарувчиларни йўқотамиз.

| | $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | озод ҳадлар | назорат йиғинди | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | $\boxed{2}$ | 1 | 3 | 13 | 19 | |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 6 | 9 | |
| | 3 | 3 | 1 | 1 | 8 | 13 | |
| | $m+1$ | 1 | 1/2 | 3/2 | 13/2 | 19/2 | (-1)(-3) |
| II | | 0 | $\boxed{1/2}$ | -1/2 | -1/2 | -1/2 | |
| | | 0 | -1/2 | -7/2 | -23/2 | -31/2 | |
| | | | 1 | -1 | -1 | -1 | 1/2 |
| | | | 0 | $\boxed{-4}$ | -12 | -16 | |
| III | | | | 1 | 3 | 4 | |
| IV | | | | 1 | 3 | | |
| | | | 1 | | 2 | | |
| | | 1 | | | 1 | | |

II босқичда ҳосил бўлган икки номаълумли иккита тенгламалар системасидан коэффициенти нолдан фарқли бўлган ўзгарувчи танланади, бу танланган $x_2$ ўзгарувчининг коэффициенти 1/2 квадрат катакчага олинади, кейин шу тенгламанинг ҳар бир коэффициентини, озод ҳадини ва назорат йиғиндисини 1/2 га бўлиб, $m+1$ сатрга ёзиб қўямиз.

Энди II босқичдаги $m+1$ сатрни 1/2 га кўпайтириб, шу босқичдаги иккинчи тенгламага қўшиб, III босқични ҳосил қиламиз. III босқичда $x_3 = 3$ ни топамиз ва тескари йўл билан $x_2$ ва $x_1$ ларни аниқлаймиз:

$$x_2 - x_3 = -1;\quad x_2 = 3 - 1 = 2;\quad x_2 = 2$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{13}{2} \text{ тенгламадан } x_1 = 1.$$

Жавоб: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3$.

## 5.5. Оддий итерация усули

Чизиқли тенгламалар системасида номаълумлар сони кўпайиб кетса, уни аниқ усуллар (Крамер қоидаси, Гаусс усули ва бошқалар) билан ечиш жуда қийинлашиб кетади. Бундай ҳолларда чизиқли тенгламалар системасини тақрибий усуллар билан ечишга тўғри келади. Тақрибий усулларга оддий итерация усули, Зейдел усули ва бошқалар киради. Бу ерда оддий итерация усули билан танишиб чиқамиз.

Итерация усулининг моҳияти қуйидагича: Берилган $n$ номаълумли $n$ та тенгламалар системаси учун ихтиёрий $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ векторни тақрибий, яъни қўпол ечим сифатида қабул қиламиз, буни биз нолинчи яқинлашиш деб атаймиз.

Бу тақрибий ечимдан аниқроқ бўлган шундай

$$x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$$
$$x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{(n+1)} = \left(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \ldots, x_n^{(n+1)}\right)$$

ечимлар кетма-кетлигини ҳосил қиламизки, бу кетма-кетликларнинг лимити берилган тенгламалар системанинг ечимидан иборат бўлади.

Аммо, ихтиёрий олинган бошланғич ечим итерация жараёнини кескин ошириб юбориши мумкин, шунинг учун иложи борича бошланғич ечимни изланаётган ечимга яқинроқ қилиб олиш керак.

Биз бу ерда $x^{(0)}$ яқинлашишини қандай танлаш ҳоллари билан танишиб чиқамиз. (5.1) тенгламалар системасида А матрицанинг бош диагонал элементларини $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ нолдан фарқли деб, (5.1) чизиқли тенгламалар системасини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

бу ерда $i \neq j$ учун $\beta_i = b_i / a_{ii}$, $\alpha_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}$ ва $i = j$ бўлганда $\alpha_{ij} = 0$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Бу ерда (5.10) тенгламалар системасини кетма-кет яқинлашиш усули билан қуйидагича ечамиз.

Кўпинча $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ нолинчи яқинлашиш сифатида (5.10) тенгламалар системасида $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ озод ҳадлар қабул қилинади.

Биринчи яқинлашиш:

$$x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \alpha_{13}x_3^{(0)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(0)},$$
$$x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(0)} + \alpha_{23}x_3^{(0)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(0)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^{(1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(0)} + \alpha_{n2}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)}.$$

Иккинчи яқинлашиш:

$$x_1^{(2)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(1)} + \alpha_{13}x_3^{(1)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(1)},$$
$$x_2^{(2)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{23}x_3^{(1)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^{(2)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(1)} + \alpha_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)}.$$

ва ҳоказо $k+1$ яқинлашиш:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)},$$
$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{23}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}.$$

Бу ерда $k \to \infty$ да (5.1) тенгламалар системаси аниқ ечимга интилади.

Агар (5.10) тенгламалар системасини матрица кўринишда ифодаласак, қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$X = \beta + \alpha X. \qquad (5.11)$$

(5.11) тенгламалар системасида нолинчи яқинлашиш сифатида, масалан озод ҳадлар устунини олишимиз мумкин:

$$X^{(0)} = \beta. \qquad (5.12)$$

Сўнгра биринчи яқинлашиш $X^{(1)} = \beta + \alpha X^{(0)}$, иккинчи яқинлашиш $X^{(2)} = \beta + \alpha X^{(1)}$ ва ҳоказо $k+1$ яқинлашиш

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)}, \ (k = 0,1,2,\ldots) \ (5.13)$$

формуладан топилади. Агар $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ яқинлашишлар кетма-кетлиги чекли лимитга эга бўлса, $x = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ бу лимит $k \to \infty$ да (5.11) системанинг аниқ ечимини беради.

(5.13) формула кетма-кет яқинлашиш усули ёки итерация усули деб аталади.

Мисол. Берилган чизиқли тенгламалар системасини оддий итерация усули ёрдамида ечинг:

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}04x_3 = 4, \\ &0{,}03x_1 + x_2 - 0{,}05x_3 = 3, \\ &0{,}08x_1 - 0{,}16x_2 + 8x_3 = 40. \end{aligned}\right\}. \qquad (5.14)$$

Ечиш: Бу тенгламалар системасининг диагонал коэффициентлари бўйича $x_1, x_2, x_3$ ларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3, \\ x_2 &= 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3, \\ x_3 &= 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.15)$$

Нолинчи яқинлашиш сифатида озод ҳадларни оламиз:

$$x_1^{(0)} = 2; \quad x_2^{(0)} = 3; \quad x_3^{(0)} = 5.$$

Бу қийматларни (5.15) га қўйиб, биринчи яқинлашишни топамиз:

$$x_1^{(1)} = 2 - 0{,}06 \cdot 3 + 0{,}02 \cdot 5 = 1{,}92; \quad x_2^{(1)} = 3 - 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}05 \cdot 5 = 3{,}19;$$

$$x_3^{(1)} = 5 - 0{,}01 \cdot 2 + 0{,}02 \cdot 3 = 5{,}04.$$

Бу жараённи давом эттириб, иккинчи яқинлашиш:

$$x_1^{(2)} = 1{,}9094, \quad x_2^{(2)} = 3{,}1944, \quad x_3^{(2)} = 5{,}0446,$$

учинчи яқинлашиш:

$$x_1^{(3)} = 1{,}90923; \quad x_2^{(3)} = 3{,}19995; \quad x_3^{(3)} = 5{,}04485$$

натижаларини ҳисоблаш мумкин.

Итерация жараёни яқинлашишининг етарлилик шартини исботсиз теорема орқали келтирамиз.

**Теорема:** Агар келтирилган (5.11) тенгламалар системаси учун қуйидаги шартлардан камида биттаси бажарилса,

$$1.\ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \ (i = 1,2,\ldots,n) \ \text{ёки} \ 2.\ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \ (j = 1,2,\ldots,n)$$

у ҳолда итерация жараёни бошланғич, нолинчи яқинлашишнинг қандай танланишига боғлиқ бўлмасдан ягона ечимга яқинлашади.

## 5.6. Халецкий усули (схемаси)

Чизиқли тенгламалар системасининг ихчам кўринишларидан бири, унинг матрица кўринишидаги ифодасидир.

Матрица кўринишидаги чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$AX = b, \qquad (5.16)$$

бу ерда $A$ – $n$ - тартибли квадрат матрица:

$$A = [a_{ij}], \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \ldots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}.$$

Маълумки, ҳар қандай махсус бўлмаган квадрат матрицани иккита учбурчакли матрицанинг кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин:

$$A = BC, \qquad (5.17)$$

бу ерда

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Қуйи ва юқори учбурчакли матрицалардаги $b_{ij}$ ва $c_{ij}$ лар қуйидаги формулалар орқали аниқланади.

$$\left.\begin{aligned} & b_{i1}=a_{i1}, \\ & b_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj},\ (i\ge j>1) \end{aligned}\right\} \qquad (5.18)$$

ва

$$\left.\begin{aligned} & c_{1j}=\frac{a_{1j}}{b_{11}},\ (1<i<j) \\ & c_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}\right)/b_{ii} \end{aligned}\right\}. \qquad (5.19)$$

Изланаётган X вектор қуйидаги тенгламалар системасидан топилади:

$$By=b,\ \ CX=y.\ (5.20)$$

B ва C учбурчакли матрицалар бўлгани учун, бу системаларни осонлик билан ечиш мумкин, яъни:

$$\left.\begin{aligned} & y_1=\frac{a_{1,n+1}}{b_{11}}, \\ & y_i=\frac{1}{b_{ii}}\left(a_{i,n+1}-\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k\right), \\ & i>1. \end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

ва

$$\left.\begin{aligned} & x_n=y_n, \\ & x_i=y_i-\sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k\,(i<n) \end{aligned}\right\} \qquad (5.22)$$

Чизиқли тенгламалар системасининг бундай ечилиши Халецкий схемаси деб аталади. Хусусий ҳолда A симметрик матрицадан иборат бўлса, яъни $a_{ij}=a_{ji}$ бўлса, у вақтда

$$c_{ij}=b_{ji}/b_{ii}\,(i<j).$$

Мисол.

$$\left.\begin{aligned} & x_1-3x_2-6x_4=9, \\ & 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ & 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ & x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{aligned}\right\}$$

Ечиш. Системани ечишда жадвалдан фойдаланамиз. Жадвал уч бўлимдан иборат. Иккинчи бўлимнинг биринчи сатрини ҳосил қилиш учун, биринчи бўлимнинг барча элементларини $a_{11} = b_{11}$ га бўлиб оламиз:

Мисолимизда

$$a_{11} = b_{11} = 1; \quad c_{12} = -3; \quad c_{13} = 0; \quad c_{14} = -6; \quad c_{15} = 9, \quad c_{16} = 1$$

Жадвалдаги иккинчи бўлимнинг иккинчи устунини тўлдирамиз. (5.18) формуладан фойдаланиб $b_{j2}$ ларни аниқлаймиз:

$$b_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12} = 8, \qquad b_{33} = a_{32} - b_{31}c_{12} = 2, \qquad b_{42} = a_{42} - b_{41}c_{12} = 7$$

Шунингдек, (4.19) формуладан фойдаланиб $c_{2j}$, $\left(j = \overline{3,6}\right)$ ни топамиз ҳамда жадвални қолган қисми тўлдирилади.

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | | $\sum$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ | 1 | -3 | 0 | -6 | 9 | 1 |
| I | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $a_{26}$ | 2 | 1 | -5 | 1 | 8 | 7 |
| | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ | $a_{36}$ | 0 | 2 | -1 | 2 | -5 | -2 |
| | $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ | $a_{45}$ | $a_{46}$ | 4 | 4 | -7 | 6 | 0 | 4 |
| | $b_{11}^1$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{14}$ | $c_{15}$ | $c_{16}$ | 1 1 | -3 | 0 | -6 | 9 | 1 |
| II | $b_{21}$ | $b_{21}^1$ | $c_{23}$ | $c_{24}$ | $c_{25}$ | $c_{26}$ | 2 | 8 1 | -0,625 | 1,625 | -1,25 | 0,625 |
| | $b_{31}$ | $b_{32}$ | $b_{33}^1$ | $c_{34}$ | $c_{35}$ | $c_{36}$ | 0 | 2 | 0,25 1 | -5 | -10 | -13 |
| | $b_{41}$ | $b_{42}$ | $b_{43}$ | $b_{44}^1$ | $c_{45}$ | $c_{46}$ | 1 | 7 | -2,625 | -10,5 1 | 2,52 | 3,38 |
| | | | | | $y_1$ | $x_1$ | | | | | 9 | 3 |
| III | | | | | $y_2$ | $x_2$ | | | | | $-\frac{10}{8}$ | -4 |
| | | | | | $y_3$ | $x_3$ | | | | . | -10 | 1 |
| | | | | | $y_4$ | $x_4$ | | | | | 1 | 1 |

## 5.7. Зейдел усули

Биз оддий итерация усулидан мукаммалроқ бўлган Зейдел усули билан танишиб чиқамиз. (5.1) тенгламалар системасининг матрицаси бош диагонал элементлари $a_{ii} \neq 0$, $\left(i = 1,2,\dots,n\right)$ деб фараз қиламиз ва системанинг сатрларини мос $a_{ii}$ элементларига бўлиб, қуйида келтирилган тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \quad \left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right). \qquad (5.23)$$

Тенгламалар системасининг илдизларининг ихтиёрий нолинчи яқинлашишни сифатида $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ қийматларини $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумларга маълум маънода мосроқ қилиб танлаб оламиз. $x_i^{(k)}$ илдизларнинг $k$-яқинлашишини маълум деб фараз қилиб, Зейдел усули бўйича илдизларини $k+1$-яқинлашишини қуйидаги формулалар ёрдамида топамиз:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)},$$

..........................................................

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)},$$

..........................................................

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}.$$

Зейдел усули билан оддий итерация усулининг фарқи шундан иборатки, оддий итерацияда $k$-яқинлашишни топиш учун $k-1$-яқинлашишидан фойдаланилади. Зейдел усулида эса $x_i$ номаълумларнинг $k+1$ яқинлашишини ҳисоблаганда, $k$-яқинлашиш билан биргаликда $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ номаълумларнинг ҳисоблаб топилган $k+1$ яқинлашишидан ҳам фойдаланилади.

Одатда Зейдел усули оддий итерация усулига нисбатан ечимга тезроқ яқинлашади. Бу иккала усулнинг яқинлашишлари устма-уст тушмайди, лекин кесишади. Айрим ҳолларда оддий итерация усули узоқлашувчи бўлганда ҳам, Зейдел усули ечимга яқинлашиши мумкин. Амалиётда шундай ҳоллар ҳам учрайдики, оддий итерация усулига нисбатан Зейдел усули секин яқинлашиши ҳам мумкин.

Агар система матрицасининг диагонал элементлари $\sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}| < (a_{ii})$ тенгсизликни қаноатлантирса, ечимга яқинлашиш жараёни тезроқ бўлади.

**Мисол.** Берилган тенгламалар системаси Зейдел усули ёрдамида ечилсин:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}\right\},$$

ёки

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \qquad x_2 = 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3, \qquad x_3 = 2 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2.$$

Илдизнинг нолинчи яқинлашиши сифатида $x_1^{(0)} = 2,\ x_2^{(0)} = 1,\ x_3^{(0)} = 2$ озод ҳадларни оламиз.

Зейдел усулини кетма-кет қўллаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x_1^{(1)} = 2 - \frac{1}{2}x_2^{(0)} - \frac{1}{2}x_3^{(0)} = 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 0;\ x_2^{(1)} = 2 - \frac{1}{3}x_1^{(1)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)} = 2 - \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 2 = 1{,}333,$$

$$x_3^{(1)} = 2 - \frac{1}{5}x_1^{(1)} - \frac{1}{5}x_2^{(1)} = 2 - \frac{1}{5}\cdot 0 - \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3} = 1{,}75$$

Иккинчи яқинлашиш:

$$x_1^{(2)} = 2 - \frac{1}{2}x_2^{(1)} - \frac{1}{2}x_3^{(1)} = 2 - \frac{1}{2}\cdot 1{,}333 - \frac{1}{2}\cdot 1{,}75 = 0{,}459;$$

$$x_2^{(2)} = 2 - \frac{1}{3}x_1^{(2)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} = 2 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}459 - \frac{1}{3}\cdot 1{,}75 = 1{,}277;$$

$$x_3^{(2)} = 2 - \frac{1}{5}x_1^{(2)} - \frac{1}{5}x_2^{(2)} = 2 - \frac{1}{5}\cdot 0{,}459 - \frac{1}{5}\cdot 1{,}277 = 1{,}684.$$

Учинчи яқинлашиш:

$$x_1^{(3)} = 2 - \frac{1}{2}x_2^{(0)} - \frac{1}{2}x_3^{(2)} = 0{,}520; \qquad x_2^{(3)} = 2 - \frac{1}{2}x_1^{(3)} - \frac{1}{3}x_3^{(2)} = 1{,}179;$$

$$x_3^{(3)} = 2 - \frac{1}{5}x_1^{(3)} - \frac{1}{5}x_2^{(3)} = 1{,}664.$$

Тўртинчи яқинлашиш:

$$x_1^{(4)} = 0{,}576; \qquad x_2^{(4)} = 1{,}157; \qquad x_3^{(4)} = 1{,}426.$$

Бешинчи яқинлашиш:

$$x_1^{(5)} = 0{,}7085; \qquad x_2^{(5)} = 1{,}3327; \qquad x_3^{(5)} = 1{,}6534.$$

Олтинчи яқинлашиш:

$$x_1^{(6)} = 0{,}5169; \qquad x_2^{(6)} = 1{,}309; \qquad x_3^{(6)} = 1{,}604.$$

Бу топилган қийматларни берилган тенгламалар системасига қўйсак, улар системани тахминан қаноатлантиради.

## 5.8. Релаксация усули

Биз чизиқли тенгламалар системасини тақрибий ечишнинг оддий итерация ва Зейдел усуллари билан танишиб ўтган эдик. Бу усулларнинг алгоритмлари бир-бирига жуда ўхшаш эканлигини биламиз.

Чизиқли тенгламалар системасини тақрибий ечишдаги релаксация усули алгоритми оддий итерация ва Зейдел усулларидан анча фарқ қилади.

$n$ номаълумли $n$ та тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2} + x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\} \qquad (5.24)$$

Бу тенгламалар системасини элементар алмаштиришлардан кейин қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + c_1 = 0, \\ -x_2 + b_{21}x_1 + \ldots + b_{2n}x_n + c_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_n + b_{n1}x_1 + \ldots + b_{n,n-1}x_{n-1} + c_n = 0 \end{array}\right\}. \qquad (5.25)$$

Бу ерда (5.24) тенгламалар системасидаги биринчи тенгламани $-a_{11}$

га, иккинчи тенгламани $-a_{22}$ га, шунингдек, $n$-тенгламани $-a_{nn}$ га бўлиб чиқдик ва $b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $(i \neq j)$, $c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ деб белгилади.

Келтирилган (5.25) тенгламалар системаси учун $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ лар ечимнинг нолинчи яқинлашиши бўлсин. Бу қийматларни (5.25) тенгламалар системасига қуйиб, қуйидаги фарқни (хатоликни) аниқлаймиз:

$$\left.\begin{array}{l} R_1^{(0)} = c_1 - x_1^{(0)} + \sum\limits_{j=2}^{n} b_{1j} x_j^{(0)}, \\ R_2^{(0)} = c_2 - x_2^{(0)} + \sum\limits_{j=1}^{n} b_{2j} x_j^{(0)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_n^{(0)} = c_n - x_n^{(0)} + \sum\limits_{j=1}^{n} b_{nj} x_j^{(0)}. \end{array}\right\} \quad (5.26)$$

Агар, номаълумлардан бирортасига, масалан $x_s^{(0)}$ га $\delta \cdot x_s^{(0)}$ орттирма берсак, бу номаълумга мос келган $R_s^{(0)}$ фарқ $\delta \cdot x_s^{(0)}$ миқдорга камаяди. Қолган $R_s^{(0)}$ фарқлар эса $b_{is}\delta \cdot x_s^{(0)}$ миқдорга ошади. Шундай қилиб, навбатдаги $R_s^{(1)}$ фарқни нолга айлантириш учун, $x_s^{(0)}$ миқдорга $\delta \cdot x_s^{(0)} = R_s^{(0)}$ орттирма бериш етарли. Шундан кейин $R_s^{(1)}$ га эга бўламиз, шунингдек $i \neq s$ да

$$R_s^{(1)} = R_s^{(0)} + b_{is}\delta \cdot x_s^{(0)}. \qquad (5.27)$$

Релаксация сўзи "кучсизланиш" маъносини билдиради. Релаксация усулининг алгоритми шундан иборатки, ҳар бир қадамда фарқларнинг абсолют қиймат бўйича энг каттаси танланиб, нолга айлантирилади. Агар охирги алмаштиришда системадаги ҳамма $R_s^{(k)}$ фарқлар талаб қилинган аниқликда нолга тенг бўлса, масалани ечиш жараёни тўхтатилади.

Мисол. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системаси релаксация усули ёрдамида ечилсин.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Ечиш. Тенгламалар системасини релаксация учун қулай кўринишга келтириб ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} -x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 1{,}2 = 0, \\ -x_2 - 0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 + 1{,}3 = 0, \\ -x_3 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 1{,}4 = 0. \end{cases}$$

Бошланғич ечим учун қуйидагини қабул қилишимиз мумкин:

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0.$$

Энди (5.26) формуладан фойдаланиб, $R_1^{(0)}$, $R_2^{(0)}$ ва $R_3^{(0)}$ хатоликларни аниқлаймиз:

$$R_1^{(0)} = 1{,}2; \quad R_2^{(0)} = 1{,}3; \quad R_3^{(0)} = 1{,}4$$

Энг катта фарқ $R_3^{(0)}$ бўлгани учун, орттирма сифатида $\delta x_3^0 = 1{,}4$ қийматни оламиз. Бундай фойдаланиб, навбатдаги $R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}$ фарқларни аниқлаймиз:

$$R_1^{(1)} = R_1^{(0)} + b_{13}\delta x_3^0 = 1{,}06, \quad R_2^{(1)} = R_2^{(0)} + b_{23}\delta x_3^0 = 1{,}16, \quad R_3^{(1)} = R_3^{(0)} - R_3^{(0)} = 0.$$

Сўнгра $\delta x_2^1 = 1{,}16$ деб оламиз ва $R_i^{(0)}$ фарқларни ҳисоблаймиз:

| | $X_1$ | $R_1$ | $X_2$ | $R_2$ | $X_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1,2 | 0 | 1,3 | 0 | 1,4 |
| | | $\frac{-0{,}14}{1{,}06}$ | | $\frac{-0{,}14}{1{,}06}$ | 1,4 | $\frac{-1{,}4}{0}$ |
| | | $\frac{-0{,}116}{0{,}944}$ | 1,16 | $\frac{-0{,}116}{0}$ | | $\frac{-0{,}232}{-0{,}232}$ |
| | 0,944 | $\frac{-0{,}944}{0}$ | | $\frac{-0{,}1888}{0{,}1888}$ | | $\frac{-0{,}189}{-0{,}421}$ |
| | | $\frac{0{,}0421}{0{,}0421}$ | | $\frac{0{,}0421}{-0{,}1469}$ | −0,421 | $\frac{0{,}421}{0}$ |
| | | $\frac{0{,}0147}{0{,}0568}$ | −0,1469 | $\frac{0{,}147}{0}$ | | $\frac{0{,}0294}{0{,}0294}$ |
| | 0,0568 | $\frac{-0{,}0568}{0}$ | | $\frac{-0{,}0114}{-0{,}0114}$ | | $\frac{-0{,}0114}{0{,}018}$ |
| $\sum$ | 1,0008 | | 1,0131 | | 0,979 | |

$$R_1^{(2)} = R_2^{(1)} + b_{12}\delta x_2^{(1)} = 1{,}06 - \frac{1}{10}\cdot 1{,}16 = 0{,}944; \quad R_2^{(2)} = R_2^{(1)} - R_2^{(1)} = 0;$$

$$R_3^{(2)} = R_3^{(1)} + b_{32}\delta x_2^{(1)} = 0 - \frac{2}{10}\cdot 1{,}16 = -0{,}232.$$

Кейинги орттирма сифатида энг катта фарқ $\delta x_1^{(2)}$ ни олиб яна $R_i^{(3)}$, $(i=\overline{1,3})$ ларни топамиз. Шундай қилиб, ҳисоблаш натижаларини жадвалга ёзамиз. Ҳисобнинг тўғри бажарилишини тақрибий қийматини берувчи йиғиндидан фойдаланилади. Демак,

$$x_1 = 0 + 0{,}944 + 0{,}0568 = 1{,}0008; \quad x_2 = 1{,}16 - 0{,}1469 = 1{,}0131; \quad x_3 = 1{,}4 - 0{,}421 = 0{,}979$$

Назорат учун топилган $x_i$, $(i=\overline{1,3})$ ечимларни берилган тенгламалар системасига қўямиз:

$$10\cdot 1{,}0008 + 1{,}041 + 0{,}979 = 12{,}072, \; 2\cdot 1{,}0008 + 1{,}0131 + 0{,}979 = 13{,}126,$$

$$2\cdot 1{,}0008 + 2\cdot 1{,}0131 + 10\cdot 0{,}979 = 13{,}832.$$

Натижани яхлитласак, системанинг ўнг ва чап томонларининг тенг эканлигига ишонч ҳосил қиламиз, яъни:

$$12{,}072 \approx 12; \quad 13{,}126 \approx 13; \quad 13{,}832 \approx 14.$$

# 6-БОБ. ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ

## 6.1. Интерполяциялаш масаласининг қўйилиши

Олий математика курсида функциялар ҳар томонлама ўрганилган эди. Амалий масалаларда учрайдиган функцияларнинг кўриниши кўпинча мураккаб бўлиб, уларнинг аналитик ифодасини айрим ҳоллардагина топиш мумкин, бошқа ҳолларда уларнинг аналитик ифодасини топиш мумкин эмас. Бундай ҳолларда берилган мураккаб функцияни ўрганиш қулайроқ бўлган соддароқ функция билан алмаштириш мақсадга мувофиқдир.

Интерполяция деганда, эркли ўзгарувчи миқдор билан функциянинг дискрет нуқталардаги мос қийматлари орасидаги муносабати маълум бўлган ҳолда функционал боғланишнинг тақрибий ёки аниқ аналитик ифодасини тузиш тушунилади. Интерполяциянинг асосий масаласи $[a;b]$ оралиқнинг ихтиёрий нуқталарда $f(x)$ функция қийматини бу функциянинг ўша оралиққа қарашли бўлган чекли сондаги $x_i$, $(i=\overline{1,n})$ нуқталардаги $y_i=f(x_i)$ қийматлари орқали топишдан иборатдир. Бошқача айтганда, интерполяциялаш - бу функциянинг дискрет қийматларидан фойдаланиб, унинг аналитик ифодасини тузиш демакдир. Фараз қилайлик, $[a;b]$ оралиқнинг $x_i$, $(i=\overline{0,n})$ нуқталарида $y=f(x)$ функциянинг $y_i$, $(i=\overline{0,n})$ қийматлари маълум бўлсин:

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1,\ ...,\ f(x_n)=y_n.$$

Шундай $\varphi(x)$ функцияни тузиш керакки, бу функция маълум функциялар синфига тегишли бўлиб, $x_i$ нуқталарда $f(x)$ функциянинг $f(x_i)$ қийматларини қабул қилсин, яъни $\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi(x_1)=y_1,...,\ \varphi(x_n)=y_n$.

Функциянинг маълум қийматларига кўра унинг аналитик ифодасини топиш масаласи, геометрик нуқтаи назардан, $(x_0,y_0), (x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ нуқталар берилганда, бу нуқталар орқали ўтувчи эгри чизиқни топишни билдиради. Одатда берилган нуқталардан чексиз кўп эгри чизиқ ўтказиш мумкин.

Агар $f(x)$ функцияни интерполяцияловчи $\varphi(x)$ функция кўпҳад кўринишда бўлса, бунга кўпҳад кўринишдаги интерполяциялаш деб аталади. Агар $\varphi(x)$ функция тригонометрик кўпҳаддан иборат бўлса, тригонометрик кўринишдаги интерполяциялаш деб аталади. Бундан ташқари $\varphi(x)$ функция кўрсаткичли функция шаклида, Лежандр кўпҳади, Бессел функцияси кўринишида ҳам тузилади. Амалиётда кўпинча содда ва қулай бўлган кўпҳад кўринишидаги интерполяцион формулалар қўлланилади. Баъзи ҳолларда, агар берилган функция даврий функциядан иборат бўлса, уни тригонометрик кўринишдаги кўпҳад билан алмаштириш мақсадга мувофиқ.

Берилган функцияни кўпҳад ёки тригонометрик кўринишдаги кўпҳад билан алмаштириш назарияси, 1885 йилда Вейерштрасс томонидан исботланган иккита теоремага асослангандир. Теоремаларнинг мазмунини исботсиз келтирамиз:

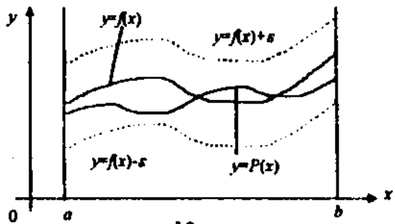
**1-Теорема.** Ҳар қандай $[a;b]$ оралиқда берилган узлуксиз $f(x)$ функцияни шундай $P(x)$ кўпҳад билан алмаштириш мумкин, буларнинг аниқлик даражалари бир-бирига исталганча яқин бўлади. Бошқача айтганда $[a;b]$ оралиқда шундай $P(x)$ кўпҳад топиш мумкинки, $x$ нинг ҳар қандай қийматида $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$ шарт бажарилади, бу ерда $\varepsilon>0$ етарлича кичик мусбат сон.

**2-Теорема.** Даври $2\pi$ бўлган ҳар қандай узлуксиз $f(x)$ функцияни қуйидаги тригонометрик кўпҳад билан алмаштириш мумкин:

$$g(x)=a_0+a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx+b_1\cos x+\ldots+b_n\cos nx,$$

бу алмаштиришда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x$ нинг ихтиёрий қийматида $|f(x)-g(x)|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантиради, бу ерда $\delta$ ихтиёрий кичик мусбат сон.

Бу теоремаларнинг геометрик маъносини қуйидагича изоҳлаш мумкин (10-чизма).




10-чизма.

Агар $y=f(x)$, $y=f(x)+\varepsilon$ ва $y=f(x)-\varepsilon$ функцияларнинг графигини чизсак, у вақтда шундай алгебраик ёки тригонометрик кўпҳадни топиш мумкинки, бу кўпҳадга мос эгри чизиқ $x$ нинг $[a;b]$ оралиқдаги барча қийматлари учун $y=f(x)+\varepsilon$ ва $y=f(x)-\varepsilon$ эгри чизиқлар билан чегараланган соҳада жойлашган бўлади.

Бу теоремаларнинг моҳияти шундан иборатки, берилган функцияни исталган аниқликдаги кўпҳад билан алмаштириш мумкин.

## 6.2. Чекли айирмалар

Агар $y=f(x)$ узлуксиз функция $y_0,y_1,y_2,\ldots,y_n$ қийматларига эга бўлса, у вақтда $y_1-y_0$, $y_2-y_1,\ldots$, $y_n-y_{n-1}$ айирмалар биринчи тартибли чекли айирмалар деб аталади. Бу айирмаларни мос равишда $\Delta y_0,\Delta y_1,\Delta y_2,\ldots$ кўринишда белгилаб, қуйидаги 1-тартибли чекли айирмаларга эга бўламиз:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \Delta y_2 = y_3 - y_1, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1},\ \Delta y_n = y_{n+1} - y_n.$$

Биринчи тартибли чекли айирмаларнинг фарқи иккинчи тартибли чекли айирма деб аталади:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0;$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - y_2 - y_2 + y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = y_{n+2} - y_{n+1} - y_{n+1} + y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Учинчи тартибли чекли айирмани ҳам қуйидагича топиш мумкин:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n = y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n.$$

Шу йўл билан $n$-тартибли чекли айирмани ҳам топиш мумкин.

## 6.3. Кўпҳаднинг чекли айирмалари

Бизга ихтиёрий $n$-тартибли кўпҳад берилган бўлсин:

$$y = f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + kx + l \qquad (6.1)$$

Бу кўпҳад учун чекли айирмалар кетма-кетлигини тузамиз. Бунинг учун, агар аргументга $x + \Delta x$ орттирма берсак, функция ҳам $y + \Delta y$ орттирмани қабул қилади:

$$y + \Delta y = f(x+h)^n = a(x+h)^n + \ldots + k(x+h) + b, \qquad (6.2)$$

бу ерда $h = \Delta x$, агар (6.2) дан (6.1) ни айирсак қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta y = a\left[(x+h)^n - x^n\right] + \ldots + k\left[(x+h) - x\right]$$

Ньютон биноми бўйича $(x+h)^n, (x+h)^{n-1}, \ldots$ кўпҳадларни очиб чиқсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta y = a\left[x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2} + \ldots - x^n\right] +$$

$$+ b\left[x^{n-1} + (n-1)hx^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}h^2x^{n-3} + \ldots - x^{n-1}\right] + \ldots + kh,$$

ёки

$$\Delta y = anhx^{n-1} + \left[ah^2\frac{(n-1)n}{2} + b(n-1)h\right]x^{n-2} +$$

$$+ \left[ha^3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + bh^2\frac{(n-1)(n-2)}{2} + ch(n-2)\right]x^{n-3} + \ldots + kh.$$

Агар $\Delta x = h$ ўзгармас сондан иборат бўлса, охирги формуладаги квадрат қавслар ичидаги $x^{n-2}$, $x^{n-3}$ ва ҳоказо ўзгарувчиларнинг коэффициентлари ҳам ўзгармас сондан иборат бўлади. Буларни мос равишда $b'$, $c'$ ва ҳоказо деб белгиласак, у вақтда қуйидаги кўринишга эга бўламиз:

$$\Delta y = anhx^{n-1} + b'x^{n-2} + c'x^{n-3} + \ldots + k'x + l'. \qquad (6.3)$$

Шундай қилиб, $n$-тартибли кўпҳаднинг биринчи чекли айирмаси $n-1$-тартибли кўпҳаддан иборат экан.

Иккинчи тартибли чекли айирмани топиш учун $x$ га $\Delta x = h$ орттирма берамиз, у вақтда (6.3 ) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\Delta y + \Delta(\Delta y) = anh(x+h)^{n-1} + b'(x+h)^{n-2} + \ldots + l'. \qquad (6.4)$$

(6.4) дан (6.3) ни айириб қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta(\Delta y) = \Delta^2 y = anh\left[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}\right] + b'\left[(x+h)^{n-2} - x^{n-2}\right] + \ldots + k'h.$$

Ньютон биноми бўйича $(x+h)^{n-1}$, $(x+h)^{n-2}$ кўпҳадларни очиб чиқиб $x^{n-3}, x^{n-4}, \ldots$ ўзгарувчиларнинг коэффициентларини олдингидек мос равишда $b''$, $c''$,..., $e''$ ҳарфлар билан белгилаб, кўпҳаднинг қуйидаги иккинчи тартибли айирмасини ҳосил қиламиз:

$$\Delta^2 y_n = an(n-1)h^2 x^{n-2} + b'' x^{n-3} + \ldots + k'' x + l''.$$

Демак, $(n-2)$-даражали кўпҳад иккинчи тартибли чекли айирмадан иборат экан. Бу жараённи давом эттириб, берилган кўпҳад учун $n$-тартибли чекли айирмани ҳосил қиламиз:

$$\Delta^n y_n = a\left[n(n-1)(n-2)\ldots 1\right]h^n x^{n-n} = an!h^n x^0 = ah^n n!.$$

Натижада $n$-даражали чекли айирма ўзгармас сондан иборат экан.

Мисол. Қуйидаги $y = 3x^3 - x^2 + 4x - 2$ функция учун горизонтал жадвалдан фойдаланиб чекли айирма тузилсин. $x_0 = 0$ бошланғич қийматдан қадамни $h = 1$ деб қабул қилинсин.

Ечиш. $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ қийматларда функция мос равишда қуйидагиларга эга бўлади:

$$y_0 = -2;\ y_1 = 4;\ y_2 = 18.$$

Чекли айирмалар эса

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 4 - (-2) = 6; \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 18 - 4 = 14; \quad \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 14 - 6 = 8$$

## 6.4. Умумлашган даража

Биз кейинги мавзуларда айрим мураккаб математик ифодаларни содда ва қулай усулда ёзиш учун умумлашган даража тушунчасидан фойдаланамиз.

Таъриф. Агар $n$ та кўпайтувчининг ҳар бири олдингисидан $h$ ўзгармас сонга кичик бўлса, бундай кўпҳад $x$ нинг $n$-даражали умумлашган даражаси деб аталади:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\ldots\left[x-(n-1)h\right], \qquad (6.5)$$

бу ерда $h$ - ўзгармас сон.

Одатда умумлашган даражанинг кўрсаткичи $[r]$ кўринишда ёзилади. Хусусий ҳолда, агар $r = 0$ бўлса, $x^{[0]} = 1$ бўлади. Агар $r = n$ бўлса, умумлашган даража одатдаги даража билан мос келади: $x^{[n]} = x^n$.

Умумлашган даражалар учун чекли айирмаларни ҳисоблаймиз. Биринчи чекли айирма учун, (6.5) ифодани ҳисобга олган ҳолда қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]} = (x+h)x \ldots [x-(n-2)h] - x(x-h) \ldots [x-(n-1)h] =$$
$$= x(x-h) \ldots [x-(n-2)h][(x+h)-[x-(n-1)h]] = x(x-h) \ldots [x-(n-2)h]nh = nhx^{[n-1]},$$

яъни,

$$\Delta x^{[n]} = nhx^{[n-1]}. \qquad (6.6)$$

Иккинчи чекли айирма қуйидагича бўлади:

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x^{[n]}) = \Delta(nhx)^{[n-1]} = nh(n-1)hx^{[n-2]} = nh^2(n-1)x^{[n-2]}$$

Шунингдек, $k$-чекли айирма қуйидагича бўлади:

Агар $k > n$ бўлса, $\Delta^k x^{[n]} = 0$ бўлади.

(6.6) формуладан оддий чекли йиғинди формуласини келтириб чиқариш мумкин.

Агар $x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$, тенг узоқликда ётган нуқталар бўлиб, улар орасидаги масофалар ўзгармас $h$ қадамдан иборат бўлса, $x_{i+1} - x_i = h$ қуйидаги йиғиндини қараймиз:

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]}.$$

Биз (6.6) формула бўйича қуйидагига эга бўламиз;

$$x^{[n]} = \Delta x^{[n+1]} / h(n+1).$$

Бу формулага асосан чекли йиғинди қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$S_N = \frac{1}{h(n+1)} \sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n+1]} = \frac{1}{h(n+1)} \left\{x_i^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} + x_2^{[n+1]} - x_1^{[n+1]} + \ldots + x_N^{[n+1]} - x_{N-1}^{[n+1]}\right\} =$$
$$= \frac{1}{h(n+1)} (x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}),$$

демак,

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]} = \frac{x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}}{h(n+1)} \qquad (6.7)$$

Бу формула бутун мусбат даражалар учун одатдаги Ньютон-Лейбниц формуласидан иборат.

## 6.5. Ньютоннинг биринчи интерполяция формуласи

Ньютоннинг биринчи интерполяциялаш масаласининг моҳияти қуйидагича изоҳланади.

Бирор оралиқда $y = f(x)$ функция аниқланган бўлсин. Бу функцияни ечиш қулай бўлган шундай $P_n(x)$ кўпҳад билан алмаштиришни мақсад қилиб қўямиз. Танланган $P_n(x)$ кўпҳад $n$-даражали кўпҳаддан иборат. Берилган $y = f(x)$ функция $x$ нинг тенг узоқликда жойлашган $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ қийматларида $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ қийматларни қабул қилсин. Кўпҳадни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}) \quad (6.8)$$

Биз $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициентларни шундай аниқлайликки, натижада

$$P_n(x_0)=y_0, P_n(x_1)=y_1, P_n(x_2)=y_2, \ldots, P_n(x_n)=y_n$$

бўлсин. Нуқталар тенг узоқликда ётилганлиги учун $x-x_0=h$, $x_2-x_0=2h$, ... $x_n-x_0=nh$ бўлади.

Буларни ҳисобга олсак $y_0=a_0$ ёки $a_0=y_0$ ёки

$$y_1=a_0+a_1(x-x_0)=y_0+a1!h, \quad a_1=(y_1-y_0)/h=\Delta y_0/h,$$

$$y_2=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=y_0+\frac{y_1-y_0}{h}2h+a_2 2!h^2.$$

Бундан $a_2$ коэффициентни ҳисоблаймиз:

$$a_2=(y_2-2y_1+y_0)/(2!h^2)=\Delta^2 y_0/(2!h^2).$$

$$y_3=a_0+a_1(x_3-x_0)+a_2(x_3-x_0)(x_3-x_1)+a_3(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)=$$

$$=y_0+\frac{y_1-y_0}{h}3h+\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}6h^2+a_3 6h^3,$$

бундан $a_3$ коэффициентни аниқлаймиз:

$$a_3=\frac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{6h^3}=\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}.$$

Ушбу жараённи давом эттириб, $a_n$ коэффициентни аниқлаймиз $a_n=\dfrac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$

Бу коэффициентни (6.8) формулага қўйиб, Ньютоннинг I-интерполяция формуласини ҳосил қиламиз:

$$f(x)\approx P_n(x)=y_0+\Delta y_0(x-x_0)/h+\Delta^2 y_0(x-x_0)(x-x_1)/(2!h^2)+$$

$$+\Delta^3 y_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)/(3!h^3)+\ldots\ldots+\frac{\Delta^n y_0(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}{n!h^n} \quad (6.9)$$

Амалиётда Ньютон интерполяциялаш формуласининг содда усули қўлланилади. Бунинг учун (6.9) формулани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$P_n(x)=y_0+\Delta y_0\frac{(x-x_0)}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\frac{(x-x_0)}{h}\frac{(x-x_1)}{h}+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}\frac{(x-x_0)}{h}\frac{(x-x_1)}{h}\ldots\frac{(x-x_{n-1})}{h} \quad (6.10)$$

Бу ерда $(x-x_0)/h=q$ белгилаш киритсак, $x=x_0+qh$ бўлади. Нуқталар тенг узоқликда ётганлиги учун $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h, \ldots$, $x_n=x_0+nh$ бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-(x_0+h)}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=\frac{x-x_0}{h}-\frac{h}{h}=q-1;$$

$$\frac{x-x_2}{h}=\frac{x-(x_0+2h)}{h}=\frac{x-x_0}{h}-\frac{2h}{h}=q-2;$$

.....................................................................

$$\frac{x-x_{n-1}}{h}=\frac{x-[x_0+(n-1)h]}{h}=\frac{x-x_0}{h}-\frac{(n-1)h}{h}=q-(n-1).$$

Бу қийматларни (6.10) га қўйсак, қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$f(x) \approx P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$
$$\dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (6.11)$$

бу ерда $q$, $x_0$ нуқтадан $x$ нуқтагача етиш керак бўладиган қадамлар сонидан иборатдир. Бу формула Ньютоннинг I-интерполяциялаш формуласининг охирги кўринишидир.

Шуни эътиборга олиш керакки, (6.11) формула $y = f(x)$ функция $|q|$ нинг кичик қийматида $x_0$ нуқтанинг атрофида интерполяциялаш учун ишлатиш қулайдир. (6.11) формуладан $n = 1$ бўлса, $P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0$ - чизиқли интерполяция, $n = 2$ бўлса $P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + q(q-1)\Delta^2 y_0/2$ - параболик ёки квадратик интерполяция формуласи ҳосил бўлади.

Мисол. Берилган $y = e^{2x}$ функция учун $[1;\ 1{,}4]$ кесмада $h = 0{,}1$ қадам бўйича интерполяция кўпҳади $P_3(x)$ тузилсин. Жадвалда $x$ га мос $y$ нинг қийматлари берилган:

| $x$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7,38906 | 9,02501 | 11,023 | 13,464 | 16,445 |

Ечиш.

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 7,38906 | 1,63595 | 0,36204 | 0,08097 |
| 1,1 | 9,02501 | 1,99799 | 0,44301 | 0,09699 |
| 1,2 | 11,0230 | 2,44100 | 0,54000 | |
| 1,3 | 13,4640 | 2,98100 | | |
| 1,4 | 16,4450 | | | |

Энди $n = 3$ ва $x_0 = 1$; $y_0 = 7{,}38906$ қийматларни ҳисобга олсак ва (6.11) формуладан фойдалансак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$P_3(x) = 7{,}38906 + 1{,}63595 \cdot q + 0.36204 \cdot \frac{q(q-1)}{2} + 0{,}081 \cdot \frac{q(q-1)(q-2)}{6}, \text{ ёки}$$

$$P_3(x) = 7{,}38906 + 1{,}63595 \cdot q + 0{,}181 \cdot \frac{q(q-1)}{2} + 0{,}013 \cdot q(q-1)(q-2), \text{ бу ерда } q = \frac{x-1}{0{,}1} = 10 \cdot (x-1).$$

## 6.6. Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласи

Ньютоннинг биринчи интерполяция формуласида $y = f(x)$ функциянинг қийматини $x_0$ бошланғич қиймати атрофида ҳисоблаш қулай бўлиб, функцияни жадвалнинг охиридаги қийматлари учун ҳисоблаш ноқулай. Шунинг учун $y = f(x)$ функциянинг жадвалдаги ихтиёрий қийматларини ҳисоблаш учун

Ньютоннинг 1-интерполяция формуласи $x_0$ дан олдинга қараб бажарилса, Ньютоннинг 2-интерполяция формуласи охиридан $x_0$ дан орқага қараб бажарилади.

Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласини келтириб чиқариш учун танланадиган кўпҳадни қуйидаги кўринишда қабул қиламиз:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+a_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})+\ldots+ \\ +a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1). \qquad (6.12)$$

Биз бу ерда $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ коэффициентларни шундай аниқлайликки, натижада (6.12) кўпҳаддаги $x$ ўрнига, кетма-кет $x_n,x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_1$ қийматларни қўйгандан $P_n(x_n)$, $P_n(x_{n-1}),\ldots$, $P_n(x_1)$ бўлсин. Агар $P_n(x_n)=y_n$, $P_n(x_{n-1})=y_{n-1},\ldots$ $P_n(x_1)=y_1$ деб олсак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y_n=a_0,\quad y_{n-1}=a_0+a_1(x_{n-1}-x_n)=y_n+a_1(-h)$$

ёки $a_0=y_n$, $a_1=(y_n-y_{n-1})/h$ Агар $y_n-y_{n-1}=\Delta^1 y_n$ деб олсак,

$$a_1=\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=\frac{\Delta^1 y_n}{h}.$$

$$y_{n-2}=a_0+a_1(x_{n-2}-x_n)+a_2(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})=y_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h}(-2h)+a_2(-2h)(-h),$$

$$a_2=\frac{y_n-2y_{n-1}+y_{n-2}}{2h^2}=\frac{\Delta^2 y_n}{2!h^2},$$

Қолган коэффициентларни ҳам шу усулда аниқлаймиз:

$$a_3=\frac{\Delta^3 y_n}{3!h^3},\quad a_4=\frac{\Delta^4 y_n}{4!h^4},\ldots,\quad a_n=\frac{\Delta^n y_n}{n!h^n}.$$

Энди топилган $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ коэффициентларнинг қийматларини (6.12) формулага қўйиб, Ньютоннинг 2-интерполяция формуласини келтириб чиқарамиз:

$$P_n(x)=y_n+\frac{\Delta^1 y_n}{h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_n}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+ \\ \frac{\Delta^3 y_n}{3!h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})+\ldots+\frac{\Delta^n y_n}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1) \qquad (6.13)$$

(6.13) формула $q=(x-x_n)/h$ эканлигини ҳисобга олсак, у вақтда

$$\frac{x-x_{n-1}}{h}=\frac{x-x_n+h}{h}=\frac{x-x_n}{h}+1=q+1,\qquad \frac{x-x_{n-2}}{h}=q+2,\ldots$$

Бу қийматларини (6.13) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_n(x)=y_n+q\Delta y_n+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_n+\ldots+\frac{q(q+1)\ldots(q+h-1)}{n!}\Delta^n y_n. \qquad (6.14)$$

Бу Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласи деб аталади.

Мисол. Қуйидаги жадвалда $y=\sin x$ функциянинг қийматларидан фойдаланиб, функциянинг $\sin 1{,}95$ қиймати ҳисоблансин.

| $x$ | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,99749 | 0,99957 | 0,99166 | 0,97385 | 0,94630 | 0,90930 |

Ечиш. Функциянинг берилган қийматлардан фойдаланиб, чекли айирмаларни ҳисоблаймиз.

| $X$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,5 | 0,99749 | 0,00208 | -0,00989 | -0,00001 |
| 1,6 | 0,99957 | -0,00791 | -0,00990 | 0,00016 |
| 1,7 | 0,99166 | -0,01781 | -0,00974 | - 0,01919 |
| 1,8 | 0,97385 | -0,02755 | 0,00945 | |
| 1,9 | 0,94630 | -0,03700 | | |
| 2,0 | 0,90930 | | | |

Энди $x_n = 2{,}0$ эканлигини ҳисобга олсак, у вақтда

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1{,}95 - 2{,}0}{0{,}1} = -\frac{0{,}05}{0{,}1} = -0{,}5;$$

$$\sin(1{,}95) = 0{,}90930 + (-0{,}5)\cdot(-0{,}03700) + (-0{,}5)\cdot(-0{,}5+1)\cdot 0{,}00945/2 +$$
$$+ (-0{,}5)\cdot(-0{,}5+1)(-0{,}5+2)\cdot 0{,}01919/2 = 0{,}92373.$$

## 6.7. Лагранжнинг интерполяция формуласи

Олдинги мавзуларда танишиб чиққан Ньютоннинг биринчи ва иккинчи интерполяция формулалари $x$ ўзгарувчининг тенг узоқликда ётган нуқталари учун яроқли эди. Кўпинча амалиётда функциянинг қийматларини ўзгарувчининг тенг оралиқдаги қийматлари учун ҳисоблаш ноқулай, ҳатто мумкин бўлмай қолади. Бундай ҳолларда ҳар хил узоқликда ётган нуқталар учун интерполяция формуласидан фойдаланиш қулай. Биз бу ерда ҳар хил узоқликда ётган нуқталар учун Лагранж интерполяция формуласи билан танишиб чиқамиз.

$[a;b]$ кесмада $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$; $(n+1)$ та нуқта берилган бўлсин, шу нуқталарда $y = f(x)$ функция $y_0, y_1, \ldots, y_n$ қийматларини қабул қилсин. Берилган функцияни қуйидаги $n$-даражали кўпҳад билан алмаштирамиз:

$$L_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) + a_1(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n) + \ldots +$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \qquad (6.15)$$

Бу кўпҳаддаги ҳар бир ҳад $(n+1)$ та кўпайтувчидан иборат.

(6.15) формуладаги $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ўзгармас қийматларни шундай аниқлайликки, натижада $L(x_0) = y_0$, $L(x_1) = y_1, \ldots,$ $L(x_n) = y_n$ бўлсин. Энди (6.15) формулага $x = x_0$ ва $L(x_0) = y_0$ қийматларни қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$y_0 = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\ldots(x_0 - x_n), \text{ бундан } a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

Шунингдек, (6.15) формулада $x = x_1$ ва $L(x_1) = y_1$ қийматларни қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y_1 = a_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n), \text{ бундан } a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}.$$

Бу жараённи давом эттириб, (6.15) кўпҳаднинг $a_0, a_1, \dots, a_n$ коэффициентларини топамиз:

$$a_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\dots(x_2 - x_n)}, \dots, \quad a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})}$$

Энди $a_0, a_1, \dots, a_n$ коэффициентларнинг қийматларини (6.15) га қўямиз:

$$L_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} y_1 + \dots + \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})} y_n \tag{6.16}$$

Бу ҳар хил узоқликда ётган нуқталар учун Лагранжнинг интерполяция формуласи деб аталади. Лагранж интерполяция формуласи тенг узоқликда ётган нуқталар учун ҳам қўлланилади. Лагранжнинг интерполяция формуласи ўзида иккита $x$ ва $y$ ўзгарувчининг муносабатини акс эттиради.

Шунинг учун уларнинг ҳар бирини эркли ўзгарувчи сифатида қараш мумкин, $y$ни эркли ўзгарувчи сифатида қабул қилсак, яъни $x$ билан $y$ нинг жойини алмаштирсак, (6.16) формула қуйидагича бўлади:

$$L_n(y) = \frac{(y - y_1)(y - y_2)\dots(y - y_n)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)\dots(y_0 - y_n)} x_0 + \frac{(y - y_0)(y - y_2)\dots(y - y_n)}{(y_1 - y_1)(y_1 - y_2)\dots(y_1 - y_n)} x_1 + \dots + \frac{(y - x_0)\dots(x - y_{n-1})}{(y_n - y_0)\dots(y_n - y_{n-1})} x_n. \tag{6.17}$$

**1-мисол.** Жадвалда берилган қийматлар бўйича Лагранж интерполяция формуласини тузинг.

| $y$ | 1 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | -7 | 5 | 8 | 14 |

Бу қийматларни (6.17) формулага қўйиб, Лагранж интерполяция кўпҳадини чиқарамиз:

$$L_4(y) = \frac{(y-3)(y-4)(y-5)}{(1-3)(1-4)(1-6)} \cdot (-7) + \frac{(y-1)(y-4)(y-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} \cdot 5 + \frac{(y-1)(y-3)(y-6)}{(4-1)(1-4)(1-6)} \cdot 8 + \frac{(y-1)(y-3)(y-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} \cdot 14 = \frac{1}{5} \cdot (y^3 - 13y^2 + 69y - 92).$$

Демак, $L_4(y) = \frac{1}{5} \cdot (y^3 - 13y^2 + 69y - 92)$

**2-мисол.** Қуйидаги жадвалда $x$ нинг ва $y = \lg x$ функциянинг қийматлари берилган:

| $x$ | 321,0 | 328,8 | 324,2 | 325,0 |
|---|---|---|---|---|
| $y = \lg x$ | 2,50651 | 2,50893 | 2,51081 | 2,51188 |

Логарифмик функцияни $x = 323,5$ да ҳисобланг.

**Ечиш.** $x = 323,5$; $x_0 = 321,0$, $x_1 = 322,8$, $x_2 = 324,2$; $x_3 = 325,0$

Бу қийматларни (6.16) формулага қўйиб ҳисоблаймиз.

$$\lg 323{,}5=\frac{(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-324{,}2)(323{,}5-325{,}0)}{(321{,}0-322{,}8)(321{,}0-324{,}2)(321{,}0-325{,}0)}\cdot 2{,}50651+$$
$$+\frac{(323{,}5-321{,}0)(323{,}5-324{,}2)(323{,}5-325{,}0)}{(322{,}8-321{,}0)(322{,}8-324{,}2)(322{,}8-325{,}0)}\cdot 2{,}50893+$$
$$+\frac{(323{,}5-321{,}0)(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-324{,}2)}{(324{,}2-321{,}0)(324{,}2-322{,}8)(324{,}2-325{,}0)}\cdot 2{,}51081+$$
$$+\frac{(323{,}5-321{,}0)(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-324{,}2)}{(325{,}0-321{,}0)(325{,}0-322{,}8)(3250-324{,}2)}\cdot 2{,}51188=2{,}50987.$$

## 6.8. Ньютоннинг биринчи, иккинчи ва Лагранжнинг интерполяция формулаларининг хатосини баҳолаш

Биз олдинги мавзуларда бирор оралиқда берилган функцияни ҳисоблашга қулай бўлган кўпҳад билан алмаштириш устида иш кўрдик. Танлаб олинган кўпҳаднинг қийматлари, берилган функциянинг қийматлари билан $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$,..., $(x_n;y_n)$ нуқталарда мос тушади. Бундан қуйидаги хулосага келиш мумкин.

Оралиқдаги нуқталар сонининг ошиши билан кўпҳаднинг қиймати берилган функциянинг қиймати билан исталганча яқин бўлиши мумкин. Бу хулоса оралиқ кичик бўлган ҳолларда яроқли. Агар оралиқ жуда катта бўлса, вазият бошқача бўлади, яъни бу оралиқдаги нуқталар сони $x_0, x_1,...,x_n$ чекланмаган даража ошиб боради. Демак, интерполяцияланувчи кўпҳад мураккаблашиб, чексиз қаторга алмашиб кетади. Бундай ҳолларда интерполяция формулаларининг қолдиқ ҳадларини, яъни хатоликларини баҳолаш зарур бўлади.

Ньютоннинг биринчи ва Лагранжнинг интерполяция формулаларининг хатолари Тейлор формуласининг қолдиқ ҳадлари билан мос тушади.

Биз бу қолдиқ хатоларни ҳисоблаш учун $z$ ҳақиқий ўзгарувчи бўйича $F(z)$ функцияни қуйидагича танлаб оламиз:

$$F(z)=f(z)-\varphi(z)-[f(x)-\varphi(x)]\frac{(z-x_0)(z-x_1)...(z-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)} \qquad (6.18)$$

(6.18) формуладаги $f(x)$ берилган функция бўлиб, $\varphi(x)$ эса интерполяцияланган кўпҳад.

Фараз қилайлик, $f(x)$ узлуксиз функция интерполяция тугунларининг ҳаммасида $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(n+1)}(x)$ тартибли ҳосилаларга эга бўлсин.

$F(z)$ функция $z=x$; $x_0$; $x_1$;...; $x_n$ қийматларни қабул қилганда, яъни $n+2$ нуқтада нолга айланади. $f(z)$ ва $F(z)$ функциялар ҳам $f(x)$ функция каби хусусиятларга эга бўлиб, ихтиёрий тартибли ҳосилага эга. $F(z)$ функция Ролл теоремасини қаноатлантиради, шу сабабли унинг биринчи тартибли ҳосиласи икки нуқта ўртасида камида бир марта нолга айланади. Демак, $F(z)$ функциянинг биринчи тартибли $F'(z)$ ҳосиласи $x_0$ нуқтадан $x_n$ нуқтагача $n+1$ марта нолга айланиши керак, $F''(z)$ эса $n$ марта, $F'''(z)$ эса $n-1$ марта,.. $F^{(n+1)}(z)$ эса $x_0$ ва $x_n$ нуқталар орасида ҳеч бўлмаганда 1 марта нолга айланади.

$\varphi(z)$ кўпҳад $n$-даражали кўпҳаддан иборат бўлиб, унинг $n+1$- тартибли ҳосиласи нолга тенг.

(6.18) формулада $(z-x_0)(z-x_1)...(z-x_n)$ кўпайтма $(n+1)$ та ҳадлар кўпайтмасидан иборат.

(6.18) формулани $z$ бўйича $n+1$ марта дифференциаллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$F^{(n+1)}(z)=f^{(n+1)}(z)-[f(x)-\varphi(x)]\frac{(n+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)},$$

бу ҳосила $z=\xi$ да $F^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)=0$ бўлсин,

у вақтда $0=f^{(n+1)}(\xi)-[f(x)-\varphi(x)]\dfrac{(n+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}$.

Бундан $\quad f(x)-\varphi(x)=\dfrac{f(n+1)(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$.

Бу формуладаги $f(x)-\varphi(x)$ айирма $f(x)$ функцияни $\varphi(x)$ кўпҳад билан алмаштиргандаги хатодан иборат. Шунинг учун хатолик қуйидагича аниқланади:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n). \qquad (6.19)$$

Бу ерда $\xi$ сони $x_0$ ва $x_n$ нуқталар орасидаги $x$ нинг қиймати. Бу формула Ньютоннинг биринчи ва Лагранжнинг интерполяция формулаларининг хатоси деб аталади. Агар $q=(x-x_0)/h$ эканлигини эътиборга олсак,

$$x-x_0=qh,\ x-x_1=h(q-1),\ x-x_2=h(q-2),...,\ x-x_n=h(q-n)$$

Бу қийматларни (6.19) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$R_n(x)=\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}q(q-1)(q-2)...(q-n). \qquad (6.20)$$

Агар $f(x)$ функциянинг аналитик ифодаси номаълум бўлса, у вақтда $f^{(n+1)}(\xi)$ нинг қийматини чекли айирмалар орқали ифодалаш яхшироқ. Одатда ҳосила билан чекли айирма ўртасидаги муносабат қуйидагича аниқланади:

$$\Delta^n f(x)=(\Delta x)^n f^{(n)}(x+\Theta n\Delta x),\quad 0<\Theta<1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}=f^{(n)}(x). \qquad (6.21)$$

Агар $x=x_0$ ва $\Delta x=h$ деб қабул қилсак, (6.21) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$f^{(n)}(x+\Theta nh)=\frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n}.$$

Амалиётда, кўпинча қуйидаги формула қўлланилади:

$$f^{(n)}(\xi) \approx f^{(n)}(x_0 + \Theta nh) \approx \Delta^n f(x_0)/h^n.$$

Буларга асосан: $f^{(n+1)}(\xi) \approx \dfrac{\Delta^{n+1} f(x_0)}{h^{n+1}}$ топилган бу қийматни (6.20) формулага қўйиб, қолдиқ ҳаднинг тақрибий ифодасини ҳосил қиламиз:

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)(q-2)...(q-n). \qquad (6.22)$$

Шунингдек, Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласи учун хатони қуйидаги формула орқали ифодалаш мумкин:

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^n y_n}{(n+1)!} q(q+1)...(q+n). \qquad (6.23)$$

Агар нуқталар орасидаги қадамлар қанчалик кичик бўлса, тақрибий қолдиқ ҳадлар (6.22) ва (6.23) лар қолдиқ ҳадга шунчалик яқин бўлади.

## 6.9. Тригонометрик интерполяциялаш

Олдинги мавзуларда ўрганилган Ньютоннинг биринчи, иккинчи ва Лагранжнинг интерполяция формулалари кўпҳад кўринишдаги интерполяция формулаларидан иборат эди. Агар берилган функциянинг кўриниши даврий бўлса, тригонометрик интерполяция формулаларидан фойдаланиш анча қулай.

Амалиётда, кўпинча даврий функциялар учун Эрмитнинг интерполяция формуласидан фойдаланилади:

$$Э_n(x) = \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)...\sin(x-x_n)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)...\sin(x_0-x_n)} \cdot y_0 +$$

$$+\frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_2)\sin(x-x_3)...\sin(x-x_n)}{\sin(x_1-x_0)\sin(x_1-x_2)...\sin(x_1-x_n)} \cdot y_1 + ... + \frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_1)...\sin(x-x_{n-1})}{\sin(x_n-x_0)\sin(x_n-x_1)...\sin(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n.$$

Бу ерда функция $2\pi$ даврга эга, яъни бунга ишонч ҳосил қилиш учун $x$ ни $x+2\pi$ билан алмаштириш кифоя.

Эрмитнинг даврий функциялар учун келтирилган интерполяция формуласи Лагранжнинг даврий бўлмаган интерполяция формуласи ва Ньютоннинг биринчи ва иккинчи формулаларидан анча афзалликка эга.

Мисол. Қуйидаги жадвалда $x$ ва $f(x)$ функциянинг қийматлари радиан бўйича берилган; $f(x)$ нинг $x = 0{,}6$ даги қиймати ҳисоблансин.

| $x$ | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,0977 | 0,0088 | -0,1577 | -0,2192 |

Ечиш: Бу ерда $x_0 = 0{,}4$, $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 0{,}7$; $x_3 = 0{,}8$; $\underline{x = 0{,}6}$

Бу қийматларни формулага қўйиб ҳисоблаймиз:

$$Э_3(x)=\frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\sin(x-x_3)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)\sin(x_0-x_3)}\cdot y_0+\frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_2)\sin(x-x_3)}{\sin(x_1-x_0)\sin(x_1-x_2)\sin(x_1-x_3)}\cdot y_1+$$

$$+\frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_1)\sin(x-x_3)}{\sin(x_2-x_0)\sin(x_2-x_1)\sin(x_2-x_3)}\cdot y_2+\frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)}{\sin(x_3-x_0)\sin(x_3-x_1)\sin(x_3-x_2)}\cdot y_3.$$

$$Э_3(x)=\frac{\sin(0,1)\sin(-0,1)\sin(-0,2)}{\sin(-0,1)\sin(-0,3)\sin(-0,4)}\cdot 0,0977+\frac{\sin(0,2)\sin(-0,1)\sin(-0,2)}{\sin(0,1)\sin(-0,2)\sin(-0,3)}\cdot 0,0088+$$

$$+\frac{\sin(0,2)\sin(0,1)\sin(-0,2)}{\sin(0,3)\sin(0,2)\sin(-0,1)}\cdot(-0,1577)+\frac{\sin(0,2)\sin(0,1)\sin(-0,1)}{\sin(0,4)\sin(0,3)\sin(0,1)}\cdot(-0,2192).$$

ёки

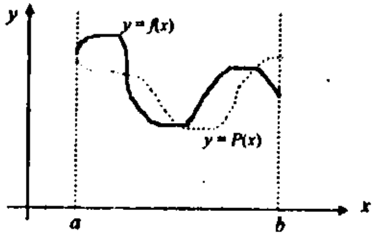
$$y=f(x)=-0,01684+0,00592+(-0,10601)+0,03778=-0,07915.$$

# 7-БОБ. ТАҚРИБИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

## 7.1. Масаланинг қўйилиши

Функцияларни тақрибий дифференциаллаш усули билан танишамиз. Амалий масалаларни ечишда, кўпинча тақрибий дифференциаллаш усули кўп ишлатилади. Одатда $y = f(x)$ функциянинг қийматлари жадвал кўринишда берилган бўлса, уларнинг ҳосилаларини топишга тўғри келади. Бундай ҳолларда функцияни интерполяция формулалари ёрдамида тиклаб дифференциаллаш мумкин бўлади. Маълумки, агар $y = f(x)$ функция мураккаб кўринишда бўлса, уни ҳисоблашга қулайроқ бўлган функция билан кўпинча кўпҳад билан алмаштирилади.

Агар $[a,b]$ оралиқда берилган $f(x)$ функция интерполяция кўпҳади $P(x)$ билан етарлича аниқликда устма-уст тушса ва $f(x)$ функция $[a;b]$ да силлиқ функция бўлиб текис ўзгарса, у ҳолда интерполяция кўпҳаднинг ҳосиласи ҳам талаб қилинаётган ҳосиладан кам фарқ қилади, яъни $a \le x \le b$ кесмада $f'(x) \approx P'(x)$.




11-чизма.

Шунингдек, бу тасдиқ функциянинг юқори тартибли ҳосилалари учун ҳам ўринлидир:

$$f'(x) \approx P'(x);$$
$$f''(x) \approx P''(x);$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) \approx P^{(n)}(x),$$

тақрибий тенгламаларга эга бўламиз. Лекин шу нарсани эсдан чиқармаслик керакки, интерполяция тугунлари орасида $f(x)$ функция кўп сондаги экстремумларга эга бўлмаслиги учун, бу тугунлар орасидаги масофа етарли даражада кичик деб олинади. Акс ҳолда $f(x)$ функция билан интерполяцияланган $P(x)$ кўпҳад қийматлари орасидаги фарқ кичик бўлсада, уларнинг ҳосилалари орасида ҳеч бир умумийлик (ўхшашлик) бўлмаслиги мумкин.

Агар берилган $y = f(x)$ функция интерполяция тугунлари орасида силлиқ ўзгарса, у ҳолда жадвал кўринишида берилган функциянинг ҳосилаларини топиш учун уни бемалол интерполяция кўпҳади билан алмаштириш мумкин.

Биз бу ерда Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласига асосан ва Стирлингнинг интерполяция формулаларига асосан тақрибий дифференциаллаш усуллари билан танишиб чиқамиз.

Бу формулалар ичида қайси биридан фойдаланиш масаласи ҳосилани қайси нуқта атрофида излашга боғлиқ. Агар ҳосилани жадвал қаторининг бошидаги нуқталар атрофида изланса, Ньютоннинг биринчи, агар ҳосилани жадвал охиридаги қаторнинг нуқталари атрофида изласак, Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласидан фойдаланамиз. Агар ҳосила жадвал ўртасидаги нуқта қийматлари атрофида қаралса, у ҳолда Стирлинг ёки Бессел формулаларидан фойдаланилади.

Агар интерполяцион $P(x)$ кўпҳаднинг хатолиги $R(x) = f(x) - P(x)$ маълум бўлса, $P(x)$ функция ҳосиласининг хатоси қуйидагича аниқланади:

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x).$$

Демак, интерполяцион кўпҳад ҳосиласининг хатолиги шу кўпҳад хатолигидан олинган ҳосилага тенг экан.

Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, умумий ҳолда тақрибий дифференциаллаш жараёни интерполяциялаш жараёнига нисбатан камроқ аниқликка эга. Ҳақиқатан ҳам $y = f(x)$ ва $y = P(x)$ икки эгри чизиқ ординатасининг $[a;b]$ кесмада бир-бирига яқинлиги, уларнинг $f'(x)$ ва $P'(x)$ ҳосилаларининг яқинлигини таъминлаб бера олмайди.

## 7.2. Ньютоннинг биринчи интерполяция формуласига асосан тақрибий дифференциаллаш

Берилган $y = f(x)$ функциянинг $[a;b]$ кесмадаги тенг узоқликда ётган $x_i$ нуқталарида (тугунларида) $y_i = f(x_i)$ қийматлари аниқланган бўлсин. Бу ерда $x_i = x_0 + ih$, $(i = \overline{1,2..n})$ бўлиб, $h$ интерполяция қадами деб аталади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция қаралаётган $[a;b]$ кесмада етарли тартибдаги ҳосилаларга эга бўлсин. Биз $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$, .., $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ ва ҳоказо ҳосилаларни топишда тенг узоқликда ётувчи нуқталар учун Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласидан фойдаланамиз:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots \quad (7.1)$$

бу ерда $q = (x - x_0)/h$, $h = x_{i+1} - x_i$, $(i = 0,1,2,..)$

(7.1) формуладаги ҳадларни ихчамлаб ёзамиз:

$$y(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q^2-q}{2}\Delta^2 y_0+\frac{q^3-3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_0+\frac{q^4-6q^3+11q^2-6q}{24}\Delta^4 y_0+\ldots$$

Ушбу формуладан $q$ аргумент бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{dy(x)}{dq}=\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+\ldots \qquad (7.2)$$

Мураккаб $y[q(x)]$ функцияни дифференциаллаш қуйидагича эди:

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$ лекин $\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}$ эканлигини эътиборга олсак, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\frac{dy}{dq}$ га эга бўламиз.

У ҳолда (7.2) формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+\ldots\right]. \qquad (7.3)$$

Шунингдек, $y''(x)=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$ эканлигини эътиборга олиб, (7.3) дан ҳосила оламиз:

$$y''(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0+\ldots\right]. \qquad (7.4)$$

Шу усул билан $y(x)$ функциянинг исталган тартибдаги ҳосиласини ҳисоблаш мумкин.

Баъзи ҳолларда $y(x)$ функциянинг $x_i$ нуқталардаги ҳосиласини ҳисоблаш зарур бўлиб қолади. $x_0$ нуқтада $y(x_0)$ ва $q=0$ эканлигидан фойдалансак, хусусий ҳолда қуйидаги формулалар ҳосил бўлади:

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\ldots\right], \qquad (7.5)$$

$$y''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\ldots\right]. \qquad (7.6)$$

Агар $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^n y_0$ чекли айирмалардан ташкил топган Ньютон интерполяцион кўпҳад $P_n(x)$ нинг хатосини $R_n(x)$ десак, яъни $R_n(x)=y(x)-P_n(x)$, у вақтда унинг биринчи тартибли ҳосиласи $R_n'(x)=y'(x)-P_n'(x)$ га тенг.

Энди қолдиқ ҳад формуласидан фойдалансак:

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi), \qquad (7.7)$$

бу ерда $\xi$ ўзгарувчи $x$ нинг $x_0, x_1, \ldots, x_n$ қийматлари орасидаги сон. Энди (7.7) дан биринчи тартибли ҳосила олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$R'_n(x)=\frac{dR_n}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{h^n}{(n+1)!}\left\{y^{(n+1)}(\xi)\frac{d}{dq}[q(q-1)\ldots(q-n)]+q(q-1)\ldots(q-n)\frac{d}{dq}\left[y^{(n+1)}(\xi)\right]\right\}.$$

Агар $\frac{d}{dq}\left[y^{(n+1)}(\xi)\right]$ ифодани чегараланган деб фараз қилсак ҳамда $\frac{d}{dq}[q(q-1)\ldots(q-n)]=(-1)^n n!$ эканлигини эътиборга олсак ва $x=x_0$, $q=0$ бўлса, қуйидагига эга бўламиз:

$$R_n'(x_0) = (-1)^n \frac{h^n}{(n+1)} y^{(n+1)}(\xi). \qquad (7.8)$$

Айрим ҳолларда $y = f(x)$ функция учун $h$ етарлича кичик бўлса, $y^{(n+1)}(\xi)$ ни чекли айирмага алмаштириб олиш мумкин:

$$y^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{(n+1)} y_0}{h^{n+1}} \text{ ва натижада}$$

$$R_n'(x_0) \approx \frac{(-1)^n \Delta^{(n+1)} y_0}{(n+1)} \qquad (7.9)$$

Шундай йўл билан $y''(x_0)$ учун ҳам $R_n'(x_0)$ хатони топиш мумкин.

Мисол. Жадвалда берилган $y = \ln x$ функциянинг қийматлари орқали $y'|_{x=5}$ даги қиймати ҳисоблансин:

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 1,6094 | 0,6932 | -0,2877 | 0,0598 |
| 10 | 2,3026 | 0,4055 | -0,1279 | |
| 15 | 2,7081 | 0,2776 | | |
| 20 | 2,9857 | | | |

Ечиш. $h = 5$, $x = x_0$ бўлгани учун (7.3) формуладан фойдаланамиз:

$$y'|_{x=5} = \frac{1}{5}[0,6932 - 0,1438 + 0,0199] = 0,1158$$

## 7.3. Стирлинг интерполяция формуласига асосан тақрибий дифференциаллаш

Олдинги мавзуда ўрганилган $y(x)$ функциянинг $x = x_0$ нуқтада сонли дифференциаллаш формуласи функциянинг фақат $x > x_0$ қийматлари учун фойдаланишга яроқли. Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласини тақрибий дифференциаллаш формуласидан умумийроқ бўлган формула билан таниишиб чиқамиз.

Функциянинг $x > x_0$ ҳамда $x < x_0$ даги қийматларидан фойдаланиладиган дифференциаллашнинг симметрик формулалари катта аниқликка эгадир. Бундай турдаги формулаларга дифференциаллашнинг марказий формулалари дейилади. Ушбу турдаги формулалардан бири Стирлинг формуласидир.

Фараз қилайлик, бир-биридан тенг $h = x_{i+1} - x_i$ узоқликда ётувчи $\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ нуқталарда $y = f(x)$ функциянинг $y_i = f(x_i)$ қийматлари маълум бўлсин. Бу функция учун Стирлинг интерполяцион формуласи қуйидагидан иборат:

$$y = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$
$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots \qquad (7.10)$$

Агар $q=(x-x_0)/h$ ва $y'_x = y'_q \cdot q'_x = \frac{1}{h}y'_q$ қийматларни ҳисобга олсак, кейин (7.10) дан биринчи тартибли ҳосила олсак, қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + q\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{4q^3-2q}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{5q^4-15q^2+4}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \frac{6q^5-20q^3+8q}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots\right]$$

Шунингдек, иккита ва ундан юқори ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1} + q\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{12q^2-2}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{20q^3-30q^2}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \right.$$
$$\left. \frac{30q^4-60q^2+8}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots\right],$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{h^3}\left[\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + q\Delta^4 y_{-2} + \frac{60q^2-30}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \frac{120q^3-120q}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots\right],$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_{-2} + q\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} - \frac{360q^2-120}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots\right],$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{1}{h^5}\left[\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + q\Delta^6 y_{-3} + \ldots\right]$$

Хусусий ҳолда, агар $x = x_0$ бўлса, $q = 0$ бўлиб, юқоридаги формулалар қуйидагича бўлади:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{4}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \ldots\right],$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{8}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots\right],$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x_0} = \frac{1}{h^3}\left[\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} - \frac{30}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \ldots\right],$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x_0} = \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_{-2} - \frac{120}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots\right], \quad \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_{x_0} = \frac{1}{h^5}\left[\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \ldots\right]$$

Эслатма. Тақрибий дифференциаллашда яқинлашиш жараёни анча қўпол бўлади, шунинг учун тақрибий дифференциаллашда аниқ яқинлашиш кам ҳолларда рўй беради.

Мисол. Қуйидаги жадвалда берилган қийматлардан фойдаланиб, $x = 0{,}6$ қийматида биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар ҳисоблансин.

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,4 | 1,5836494 | | | | |
| | | 0,2137932 | | | |
| 0,5 | 1,7974426 | | 0,0330018 | | |
| | | 0,2467950 | | 0,0034710 | |
| 0,6 | 2,0442376 | | 0,0364728 | | 0,003648 |
| | | 0,2832678 | | 0,0038358 | |
| 0,7 | 2,3275054 | | 0,0403086 | | |
| | | 0,3235764 | | | |
| 0,8 | 2,6510818 | | | | |

Ечиш. Бу ерда $x_0 = 0{,}6$; $q = 0$ қийматларни ва жадвалдаги чекли айирмаларни, юқоридаги формуланинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларига қўйиб, $x = x_0$ да ҳисоблаймиз: $h = 0{,}1$.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0,6} = 10\cdot\left[0{,}2650314 - 0{,}0006081\right] = 2{,}644233,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0,6} = 100\cdot\left[0{,}0364728 - 0{,}0000296\right] = 3{,}64432.$$

Берилган функция $y = 2e^x - x - 1$. Бундан $\dfrac{dy}{dx} = 2e^x - 1$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2e^x$.

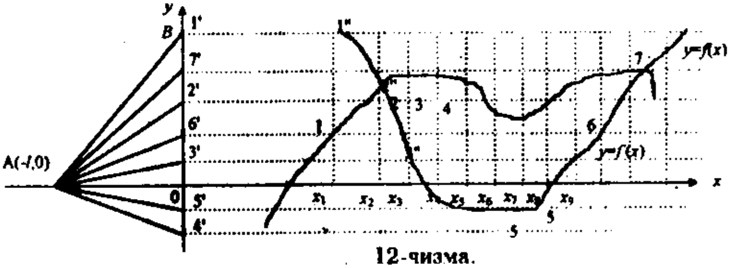
Энди $x = 0{,}6$ қийматни бу ҳосилаларга қўямиз:

$$\frac{dy}{dx} = 2{,}644238; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 3{,}644238.$$

Бу ерда сонли дифференциаллаш орқали топилган биринчи тартибли ҳосила 4 та ишончли рақам билан тўғри келади. Демак, дифференциаллаш тартибини оширган сари хато ҳам ортиб борар экан.

## 7.4. График усулда дифференциаллаш

Бу усулнинг моҳияти асосида, агар $y = f(x)$ функцияни чизмаси берилган бўлса, шу чизмага асосан $y = f'(x)$ ҳосиланинг чизмасини чизиш ётади. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функциянинг чизмаси (12-чизма) берилган бўлсин.




12-чизма.

ОХ ўқини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталар ёрдамида $n$ та бўлакка бўламиз. Бу нуқталарни шундай зич қилиб оламизки, иложи борича функция графигининг энг характерли нуқталарини абсцисса ўқидаги координаталари ушбу нуқталарга мос тушсин. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталарни функция чизмасидаги мос ўринларини топиб, уларни 1,2,3,4.... рақамлар билан белгилаймиз.

Ушбу белгиланган нуқталарга функция графигига уринмалар ўтказамиз. 0X ўқидаги $A(-l,0)$ нуқтадан 1,2,3,.. нуқталарга ўтказилган уринмаларга параллел қилиб $A_1'$, $A_2'$, $A_3'$,... тўғри чизиқларни ўтказамиз.

Бу тўғри чизиқларнинг 0Y ўқи билан кесишган нуқталарни 1', 2', 3',... деб белгилаймиз. У ҳолда координата бошидан 0Y ўқида ётган 1', 2', 3',... нуқталаргача бўлган 01', 02', 03',... кесмалар пропорционал ҳолда $y = f(x)$ функция графигида ётган нуқталарнинг ординатасини беради. Ҳақиқатан ҳам 1 рақамли нуқта учун

$$\frac{0B}{0A} = tg\alpha \quad \text{ёки} \quad 0B = l \cdot tg\alpha_1 = lf'(x), \; (0A = l)$$

Қолган ҳамма нуқталар учун худди шундай натижалар ҳосил қиламиз. Шундан сўнг 1', 2', 3',... нуқталардан абсцисса ўқига параллел ўтказилган тўғри чизиқларнинг 1,2,3,.... нуқталар ординатаси билан кесишган нуқталари 1'', 2'', 3'',... $Y = lf'(x)$ функциянинг графигига тегишли нуқталар бўлади. Шу нуқталарни бирлаштириб, $l$ ўлчамдаги $y$ функциянинг ҳосиласи $y'$ нинг чизмасини ҳосил қиламиз. Чизманинг аниқлигини ошириш учун уринманинг йўналишини аниқ кўрсатиш ва сўнгра уриниш нуқталарини белгилаш тавсия қилинади.

# 8-БОБ. ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ

## 8.1. Тақрибий интеграллаш масаласининг қўйилиши

Маълумки, $[a;b]$ кесмада аниқланган $f(x)$ узлуксиз функциянинг бошланғич функцияси $F(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда бу функциядан олинган аниқ интеграл Ньютон-Лейбниц формуласи билан ҳисобланар эди:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (8.1)$$

бу ерда $F'(x) = f(x)$.

Аммо кўпинча, амалиётда бошланғич функция $F(x)$ ни элементар усуллар ёрдамида топиб бўлмайди ёки топилса ҳам мураккаб кўринишда бўлгани учун аниқ интегрални ҳисоблаш қийин бўлади. Бундан ташқари $f(x)$ функция жадвал кўринишда берилган бўлса, бошланғич функция тушунчасининг ўзи ҳам маънога эга бўлмай қолади. Бундай ҳолларда аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади. Масалан,

$$\int_0^{1,5} \ln(1+x^2)dx; \quad \int_0^1 \sin x^2 dx$$

интегралларнинг бошланғич функциялари мавжуд бўлмаганлиги сабабли, уларни элементар функциялар кўринишидаги аналитик ечимини топиб бўлмайди. Демак, бундай ҳолларда интегрални тақрибий ҳисоблашга мажбурмиз.

Аниқ интегрални интеграл остидаги функциянинг олдиндан берилган бир қатор қийматларида ҳисоблаш тақрибий интеграллаш деб аталади. Бир каррали интегрални сонли ҳисоблашга механик квадратура, икки каррали сонли ҳисоблашга механик кубатура дейилади. Уларга мос формулаларни квадратура ва кубатура формулалари дейилади.

Биз бу ерда бир каррали интегралларни сонли ҳисоблаш масаласига тўхталамиз. Механик квадратуранинг оддий усули қуйидагидан иборат. Қаралаётган $[a;b]$ кесмада берилган $f(x)$ функцияни ҳисоблаш қулай бўлган $\varphi(x)$ билан алмаштирилади ва қуйидаги

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

муносабат бажарилишини талаб қилади.

## 8.2. Ньютон-Котес квадратура формулалари

Тенг узоқликда ётган нуқталар учун Ньютон-Котес формуласи билан танишиб чиқамиз. $[a;b]$ кесмада $y = f(x)$ узлуксиз функция берилган бўлиб

$$J=\int_a^b f(x)dx, \qquad (8.2)$$

интегрални ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин. $[a,b]$ кесмада $f(x)$ функция учун тенг узоқликда ётган $(n+1)$ та нуқталар берилган бўлсин:

$$x_0=a,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_{n-1},\ x_n=b.$$

Бу нуқталарда $y=f(x)$ функциянинг қийматлари қуйидагидан иборат:

$$y_i=f(x_i),\quad (i=0,1,2,\dots n).$$

Берилган $f(x)$ функцияни Лагранжнинг $L_n(x)$ - интерполяция формуласи билан алмаштирамиз.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b L_n(x)dx+R_n. \qquad (8.3)$$

Бу ерда, $R_n$ -квадратура формуласининг хатоси, $L_n(x)$ Лагранж кўпҳади, яъни

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}P_i(x)y_i,$$

$$P_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \qquad (8.4)$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$q=\frac{x-x_0}{h};$$

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots\dots(x-x_n)=h^{n+1}q(q-1)\dots(q-n)=h^{n+1}q^{[n+1]}$$

$$\Pi'_{n+1}(x)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)=(-1)^{n-i}h^n i!(n-i)!.$$

Бу белгилашларни ҳисобга олсак, қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\frac{q^{[n+1]}}{q-i}y_i \qquad (8.5)$$

(8.2) интегралдаги $y=f(x)$ функцияни (8.5) формула билан алмаштирамиз ва

$$\int_{x_0}^{x_n}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\frac{q^{[n+1]}}{q-i}\cdot y_i dx=\sum_{i=0}^{n}A_i\cdot y_i$$

деб белгилаймиз Бу ифоданинг чап томонидаги интеграл билан йиғиндининг ўрнини алмаштирамиз (чунки, йиғиндининг ҳадлари $x$ аргументнинг узлуксиз функцияси бўлгани учун, йиғинди ҳадлаб интегралланади):

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\int_{x_0}^{x_n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dx\right)y_i=\sum_{i=0}^{n}A_iy_i,\ \text{бу ердан}\ A_i=\int_{x_0}^{x_n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dx.$$

Агар $dq=\dfrac{dx}{h}$ ҳамда $x=x_0$, $q=0$, $x=x_n$ бўлса, $A_i$ қуйидагича ёзилади:

$$A_i=\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dx.$$

Охирги тенгликда $h=(b-q)/h$ эканлигини ҳисобга олсак, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A_i=(b-a)H_i.$$

Бу ерда

$$H_i = \frac{1}{n}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}dq, \qquad (8.6)$$

ифода Котес коэффициенти деб аталади.

Буларни ҳисобга олсак, Ньютон-Котес формуласи қуйидагича ёзилади:

$$I = \int_a^b ydx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i, \qquad (8.7)$$

бу ерда $h = \frac{b-a}{n}$, $\quad y_i = f_i(a+ih)$, $(i=\overline{0,n})$.

Котес коэффициентлари $\sum_{i=0}^{n} H_i = 1$, $H_i = H_{n-i}$ шартларни қаноатлантиради.

## 8.3. Трапеция формуласи

Агар (8.7) формулада $n=1$ деб олсак,

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{q(q-1)}{q}dq = \frac{1}{2} \quad \text{ва} \quad H_1 = \int_0^1 qdq = \frac{1}{2}.$$

У ҳолда (8.7) формула хусусий ҳолда қуйидагича бўлади:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} ydx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \qquad (8.8)$$

Бу формула аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун трапеция формуласи деб аталади.

Ушбу формуланинг геометрик маъноси 13-чизмадаги эгри чизиқли ёй билан чегараланган трапециянинг юзини, эгри чизиқ ёйига ўтказилган ватар билан чегараланган трапеция юзини топишга алмаширишдан иборат.


13-чизма.

(8.8) формулада катта оралиқлар учун фойдаланиш мақсадга мувофиқ эмас, бундай ҳолларда қаралаётган $[a;b]$ кесмани $h$ та $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ бўлакка бўлиб, бу оралиқларда (8.8) трапеция формуласи $n$ марта қўлланилади. Бунда эгри чизиқ синиқ чизиқ билан алмаштирилади (13-чизма).

$$\int_{x_0}^{x_1} ydx = h\frac{y_0+y_1}{2}; \quad \int_{x_1}^{x_2} ydx = h\frac{y_1+y_2}{2};$$

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx = h\frac{y_1+y_2}{2};\ldots,\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} ydx = h\frac{y_{n-1}+y_n}{2}.$$

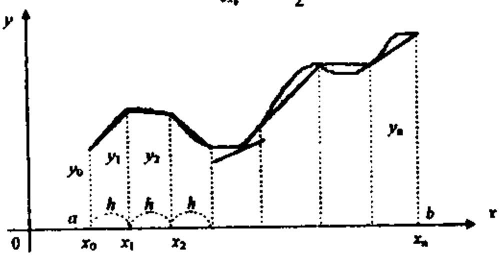
Бу формулаларни мос равишда қўшиб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b ydx = h\left[\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right]. \qquad (8.9)$$

Бу формула трапециялар формуласи деб аталади.

Энди (8.8) трапеция формуласининг хатосини ҳисоблашга киришамиз. Кўриниб турибдики, бу хатолик (8.8) формуланинг чап қисмидан ўнг қисмини айириб ташлаш орқали топилади:

$$R = \int_{x_0}^{x} ydx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$




14-чизма.

Агар $R$ хатоликни $h$ қадамнинг функцияси деб қарайдиган бўлсак, охирги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} ydx - \frac{h}{2}\left[y(x_0) + y(x_0+h)\right]$$

Бу ифодани $h$ бўйича дифференциаллаймиз:

$$R'(h) = y(x_0+h) - \frac{1}{2}\left[y(x_0) + y(x_0+h)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0+h) = \frac{1}{2}\left[y(x_0+h) - y(x_0)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0+h)$$

Ҳосил бўлган ифодадан яна бир марта ҳосила оламиз.

$$R''(h) = \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{h}{2}y''(x_0+h) = -\frac{h}{2}y''(x_0+h) \qquad (8.10)$$

Агар $h=0$ деб олсак, $R(0)=0$ ва $R'(0)=0$ бўлади.

Юқоридаги (8.8) формулани 0 дан $h$ гача интеграллаймиз.

$$\int_0^h R''(t)dt = \int_0^h\left(-\frac{t}{2}\right)y''(x_0+t)dt, \text{ ёки } R'(h) - R'(0) = \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^h ty''(x_0+t)dt.$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлласак,

$$R'(h) = R'(0) - \frac{1}{2}\int_0^h ty''(x_0+t)dt = -\frac{1}{2}y''(\xi_1)\int_0^h tdt = -\frac{h^2}{4}y''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_0, x_0+h).$$

Охирги ифодани яна бир марта интеграллаймиз:

$$R(h)-R(0)=-\frac{1}{4}\int_0^h t^2y''(\xi_1)dt=-\frac{1}{4}y''(\xi)\int_0^h t^2dt=-\frac{1}{4}y''(\xi)\frac{h^3}{3}=-\frac{h^3}{12}y''(\xi),$$

бу ерда $\xi\in(x_0,x_0+h)$.

Шундай қилиб, хатони ҳисоблаш формуласи қуйидагидан иборат:

$$R=-\frac{h^3}{12}y''(\xi) \qquad (8.11)$$

Агар $y''>0$ бўлса, (8.11) формулада интеграл қиймати кўпи билан, агар $y''<0$ бўлса, ками билан олинган бўлади.

Трапециялар формуласи(8.9) нинг хатолиги қуйидагига тенг:

$$R=\int_a^b ydx-\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i)=\int_{x_0}^{x_n}ydx-\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i)=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}ydx-\frac{h}{2}(y_{i-1}+y_i)\right],$$

$$R=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}ydx-\frac{h}{2}[y_{i-1}+y_i]\right].$$

Агар тенгликнинг ўнг томонида йиғинди остидаги ўрта қавс ичидаги ифода учун (8.11) формулани қўлласак, қуйидаги хатоликни ҳосил қиламиз:

$$R=-\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n}y''(\xi_i),\quad \xi_i\in(x_{i-1},x_i). \qquad (8.12)$$

Фараз қилайлик, $\mu$ сони $y''$ нинг энг кичик $m_1$ ва энг катта $M_1$ орасида жойлашган ўрта арифметик қиймати бўлсин:

$$\mu=\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}y''(\xi_i). \qquad (8.13)$$

$y''$ ҳосила $[a;b]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун, бу оралиқда ўзининг энг катта $M_1$ ва энг кичик $m_1$ қийматларига эришади. Демак, бу оралиқда ётган шундай $\xi\in[a,b]$ нуқта топиладики бу нуқта учун $\mu=f''(\xi)$ тенглик бажарилади. У ҳолда $y''(\xi)=f''(\xi)$ бўлганлигидан (8.13) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$\sum_{i=1}^{n}y''(\xi_i)=\mu\cdot n=ny''(\xi).$$

Бу тенгликни эътиборга олсак, (8.12) формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$R=-\frac{nh^3}{12}y''(\xi)=-\frac{(b-a)h^2}{12}y''(\xi),\ \text{ёки}\ R=-\frac{(b-a)h^2}{12}y''(\xi)$$

Бу формула орқали трапеция формуласининг хатосини ҳисоблаш мумкин.

Мисол. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ аниқ интегрални $n=10$ да тақрибий ҳисоблаш ва хатосини аниқлаш.

Ечиш. $[0,1]$ кесмани $n=10$ бўлакка бўлсак, $h=1/10=0{,}1$ қадамга эга бўламиз. У ҳолда (8.9) формуладан фойдаланамиз:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=0{,}1\left[\frac{y_0+y_{10}}{2}+y_1+y_2+\dots+y_9\right]$$

Берилган функция $y=e^{-x^2}$ бўлганлиги учун $y_0,y_1,\dots,y_{10}$ ларни ҳисоблаймиз:

$$y(0)=y_0=e^{-0}=1;\quad y(0{,}1)=y_1=e^{-(0{,}1)^2}=0{,}9900;\ y(0{,}2)=y_2=e^{-(0{,}2)^2}=0{,}9608;\quad y(0{,}3)=0{,}9139;$$
$$y_4(0{,}4)=0{,}8521;\quad y_5(0{,}5)=0{,}7788;\quad y_6(0{,}6)=0{,}6977;\quad y_7(0{,}7)=0{,}6126;$$
$$y_8(0{,}8)=0{,}5273;\quad y_9(0{,}9)=y_9=0{,}4486;$$
$$y(1)=y_0=0{,}3679.$$

Демак,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=0{,}1\left[\frac{1+0{,}3679}{2}+0{,}9900+0{,}9608+0{,}9139+0{,}8521+\right.$$
$$\left.+0{,}7798+0{,}6977+0{,}6126+0{,}5273+0{,}4486\right]=0{,}746575.$$

Қолдиқ ҳадни баҳолаймиз:

$$y'=-2xe^{-x^2},\quad y''=-2e^{-x^2}-2x(-2x)e^{-x^2}=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Бу ифодадан $[0;\ 1]$ кесмада иккинчи тартибли ҳосила $|y''(x)|$ ўзининг энг катта қийматига $x=0$ нуқтада тенг эканлигини топамз.

$$\max|y''(x)|=|y''(0)|=|-2|=2.$$

Демак, хатолик

$$R=\frac{|b-a|h^2}{12}|\max y''(x)|=\frac{1\cdot 0{,}1^2}{12}\cdot 2=0{,}0016<0{,}002.$$

## 8.4 Симпсон формуласи (параболалар формуласи)

Амалиётда кўпроқ фойдаланиладиган Симпсон формуласи билан танишиб чиқамиз. Биз (8.6) формуляда $n=2$ деб оламиз, яъни иккинчидан юқори тартибли барча айирмаларини ташлаб юборамиз:

$$H_0=\frac{1}{4}\int_0^2(q-1)(q-2)dq=\frac{1}{4}\int_0^2(q^2-3q+2)dq=\frac{1}{6},$$
$$H_1=-\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-2)dq=\frac{2}{3};\quad H_2=\frac{1}{4}\int_0^2 q(q-1)dq=\frac{1}{6}$$

Буларни ҳисобга олсак:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h}ydx=\int_{x_0}^{x_2}ydx=h\left[2y_0+2\Delta y_0+\left(\frac{8}{3}-2\right)\frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right]=$$
$$=h\left[2y_0+2y_1-2y_0+\frac{1}{3}(y_2-2y_1+y_0)\right]=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

Бундан Симпсон формуласини ҳосил қиламиз:

$$\int_{x_0}^{x_2}ydx=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2). \qquad (8.14)$$

Симпсон формуласининг геометрик маъносини қуйидагича изоҳлаш мумкин. Берилган $y=f(x)$ функция эгри чизиғини (графигини), берилган $x_0, x_1$ ва $x_2$ нуқталардан ўтувчи $y=ax^2+bx+c$ парабола билан алмаштирилади (15-чизма).

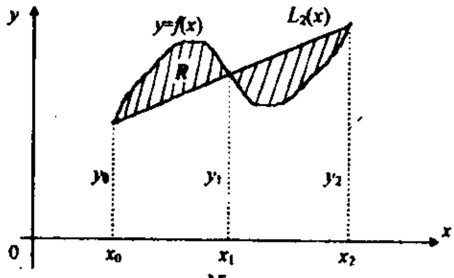
(8.14) формуладан, трапециялар каби, интегралнинг бутун $[a,b]$ кесмада тақрибий ҳисоблаш формуласини ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун $[a, b]$ кесмани $2n$ та тенг бўлакка бўламиз ва бу оралиқнинг ҳар жуфти учун (8.14) формулани қўллаймиз:

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} y dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

..........................................

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} y dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$




15-чизма.

Бу формулаларни мос равишда қўшиб, қуйидагини хосил қиламиз:

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx + \int_{x_2}^{x_4} y dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) +$$
$$+ \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

бундан

$$I = \int_a^b y dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right] \qquad (8.15)$$

Бунга Симпсоннинг умумий формуласи деб аталади. Энди Симпсон формуласининг хатосини аниқлаймиз: $R(h) = \int_{x_0}^{x_2} y dx - \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Бу қолдиқ хатони 15-чизма бўйича қуйидагича ёзиб оламиз:

$$R(h) = \int_{x_1 - h}^{x_1 + h} y dx - \frac{h}{3}\left[y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)\right].$$

Қолдиқ хатони $h$ бўйича уч марта дифференциаллаб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$R'(h) = \left[y(x_1 + h) + y(x_1 - h)\right] - \frac{1}{3}\left[y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)\right] - \frac{h}{3}\left[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)\right] =$$
$$= \frac{2}{3}\left[y(x_1 - h) + y(x_1 + h)\right] - \frac{4}{3}y(x_1) - \frac{h}{3}\left[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)\right]$$

$$R''(h)=\frac{1}{3}[y'(x_1-h)+y'(x_1+h)]-\frac{1}{3}[y'(x_1-h)+y'(x_1+h)]-\frac{h}{3}[-y''(x_1-h)+y''(x_1+h)]=$$

$$=-\frac{h}{3}[y''(x_1+h)-y''(x_1-h)]=-\frac{2}{3}h^2y^{IV}(\xi_3)\cdot h^2, \quad \xi_3\in(x_1-h;\ x_1+h)$$

Агар биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларда $h=0$ деб олсак, $R(0)=0$, $R'(0)=0$, $R''(0)=0$ бўлади. Энди $R'''(h)$ ни кетма-кет интеграллаб, ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$R''(h)=R'(0)+\int_0^h R'''(t)dt=-\frac{2}{3}\int_0^h t^2y^{IV}(\xi_3)dt=-\frac{2}{3}y^{IV}(\xi_2)\int_0^h t^2dt=-\frac{2}{9}h^3y^{IV}(\xi_2),$$

$$R'(h)=R'(0)+\int_0^h R''(t)dt=-\frac{2}{9}\int_0^h t^3y^{IV}(\xi_2)dt=-\frac{2}{9}y^{IV}(\xi_1)\int_0^h t^3dt=-\frac{1}{18}h^4y^{IV}(\xi_1),$$

$$R(h)=R(0)+\int_0^h R'(t)dt=-\frac{1}{18}\int_0^h t^4y^{IV}(\xi_1)dt=-\frac{1}{18}y^{IV}(\xi)\int_0^h t^4dt=-\frac{h^5}{90}y^{IV}(\xi),$$

бу ерда $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ лар $(x-h,\ x+h)$ оралиқда ётади.

Демак, $(x_0,x_2)$ оралиқ учун Симпсон формуласининг хатоси қуйидагига тенг:

$$R(h)=-\frac{h^5}{90}y^{IV}(\xi) \qquad (8.16)$$

Энди Симпсоннинг умумий формуласи (8.15) учун қолдиқ хатони ҳисоблаймиз, бунинг учун ҳар бир иккиланган $[x_{2i-2},\ x_{2i}]$ оралиқ учун трапециялар формуласининг қолдиқ ҳадини топиш усули бўйича қуйидагини топамиз:

$$R=-\frac{(b-a)}{180}h^4y^{IV}(\xi),\quad \xi\in[a,b] \qquad (8.17)$$

Агар $M=\max|y^{IV}(x)|$ деб олсак, (8.16) ва (8.17) формулалар қуйидагича бўлади:

$$R(h)=-\frac{h^5}{90}M;\quad R=-\frac{(b-a)}{180}h^4M$$

Агар $y=f(x)$ функция жадвал кўринишда бўлса ва унинг ҳосиласини топиш қийинроқ бўлса, хатоликни чекли айирмалар орқали ҳам ҳисоблаш мумкин:

$$R_1\approx-\frac{b-a}{12}\overline{\Delta^2y};\quad R_2\approx-\frac{b-a}{180}\overline{\Delta^4y},\quad R_3\approx\frac{b-a}{80}\overline{\Delta^4y}$$

($\overline{\Delta^2y}$, $\overline{\Delta^4y}$ чекли айирманинг ўртача қиймати).

Мисол. $\int_0^1\frac{dx}{1+2x}$ интегрални $n=10$ учун ҳисобланг.

Ечиш. $n=10$ бўлгани учун, $2m=10$ бўлади ва $h=0,1$, у ҳолда

$$\int_0^1\frac{dx}{1+2x}=\int_0^1ydx=\frac{0,1}{3}[y_0+y_{10}+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)].$$

$y=\frac{1}{1+2x}$ функцияни $x$ нинг қийматларида ҳисоблаймиз:

$y_0=1;\quad y_1=0{,}83333;\quad y_2=0{,}714285;\quad y_3=0{,}62500;\quad y_4=0{,}55556;\quad y_5=0{,}5;$
$y_6=0{,}454545;\quad y_7=0{,}416666;\quad y_8=0{,}38452;\quad y_9=0{,}35714;\quad y_{10}=0{,}3333.$

Демак,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x}=0{,}549305.$$

Энди қолдиқ хатони баҳолаймиз. Маълумки, $y=(1+2x)^{-1}$, бундан тўртинчи тартибли ҳосила оламиз:

$$y^{IV}=\frac{384}{(1+2x)^5},\ \text{бундан}\ 0\le x\le 1\ \text{ва}\ \max\left|y^{IV}\right|=384.$$

Берилган масалада хатоликни $\varepsilon=10^{-5}$ деб олсак, $x=0$ ва

$$R=-\frac{(1-0)}{180}(0{,}1)^4\cdot 384=-0{,}0002133.$$

Квадратура формулаларининг жуда кўп хиллари мавжуд бўлиб, (Чебишев, Гаусс, Мелляр, оптимал квадратура формулалари) улар билан танишишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

## 8.5. Функцияни қаторлар ёрдамида тақрибий интеграллаш

Бизга қуйидаги интегрални тақрибий ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин.

$$F(x)=\int_a^b f(x)dx. \qquad (8.18)$$

Интеграл остидаги $f(x)$ функция $(a;b)$ оралиқдаги бирор $x_0$ нуқта атрофида ҳосилалари мавжуд бўлсин. У вақтда $f(x)$ функцияни $x_0$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёзиш мумкин.

Демак, $f(x)$ функциянинг аниқланиш қийматини бу соҳанинг исталган нуқтасида Тейлор қатори ёрдамида топиш мумкин. Аммо, амалиётда функциянинг аниқ қийматини айрим ҳоллардагина топиш мумкин бўлиб, кўпинча функциянинг тақрибий қийматини топишга мажбурмиз.

Интеграл остидаги $f(x)$ функция қуйидаги даражали қаторга ёйилган бўлсин:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k.$$

Бу қатор $[a,b]$ кесмада ётувчи $(-R,R)$ оралиқда яқинлашуви даражали қатор бўлсин.

Даражали қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш теоремасидан фойдалансак, (8.18) формула қуйидагича ёзилади:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right). \qquad (8.19)$$

Агар (8.19) қатор тез яқинлашса, бу қаторни унинг қисмий йиғиндиси билан алмаштириб олиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right). \qquad (8.20)$$

**Мисол.** $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ интеграл 0,0001 аниқликкача ҳисоблансин.

**Ечиш:**

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \dots$$

Топилган сонли қатор ишоралари алмашувчи қатордан иборат бўлиб, у тез яқинлашади.

Лейбниц теоремасига асосан, бундай қаторнинг йиғиндисини унинг қисмий йиғиндиси билан алмаштириш мумкин, алмаштиришда ҳосил бўладиган хатонинг абсолют қиймати ташлаб юборилган биринчисининг абсолют қийматидан катта бўлмайди. Шу сабабли қаторнинг биринчи еттита ҳади билан чекланиш мумкин, чунки саккизинчи ҳади

$$\left|-\frac{1}{75600}\right| < 0{,}0001, \text{ яъни, } 0{,}0000132 < 0{,}0001$$

Бу еттита ҳаднинг йиғиндисини ҳисоблаб, $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}7468$ натижани ҳосил қиламиз.

## 8.6. График усулда интеграллаш

График усулда интеграллашнинг асосий масаласи узлуксиз $y = f(x)$ функциянинг графиги берилган бўлса, унинг бошланғич $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ функциясининг графигини ясашдан иборатдир.

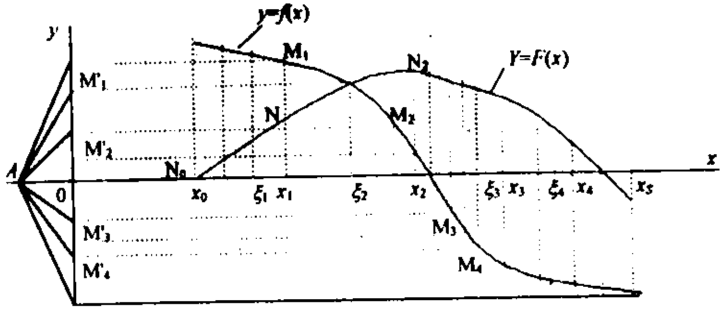
Яъни, шундай $y = F(x)$ функциянинг графигини ясаш лозимки, унинг ҳар бир $x$ нуқтадаги ординатаси сон қиймати жиҳатидан $y = f(x)$ билан чегараланган, асоси $[a;\ x]$ бўлган, эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг. Шу эгри чизиқли трапециянинг юзини $x_0, x_1, x_2,\ (a = x_0 < x_1 \dots)$ нуқталар орқали ўтган ордината ўқлари ёрдамида тор вертикал йўлакларга бўламиз (16-чизма).

Шу йўлакларнинг ҳар бирини ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан юзалари тенг, асослари бир хил $f(\xi_i)$ бўлган тўғри тўртбурчаклар билан алмаштирамиз, бу ерда $\xi_i$ қуйидаги $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots)$ оралиқда ётувчи нуқта. У ҳолда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Энди $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ бошланғич функциянинг қиймати $F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$ эканлигидан фойдаланиб,

$$F(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_{i-1}} f(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F(x_{i-1}) + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$




16-чизма.

Фараз қилайлик, $M_1(\xi_1, f(\xi_1))$, $M_2(\xi_2, f(\xi_2))$ нуқталар $y = f(x)$ эгри чизиқнинг нуқталари бўлсин. Бу нуқталарнинг $0Y$ ўқидаги проекцияларини $M_1', M_2', \ldots$ деб белгилаймиз. $0A = 1$ масофада ётган $0X$ ўқидаги $A$ қутб нуқтасини танлаб оламиз ва бу нуқтадан $AM_1', AM_2', \ldots$ тўғри нурларни ўтказамиз. $x_0$ нуқтадан бошланғич нурларга параллел қилиб тор йўлакларини ординаталари билан кесишгунча кичик-кичик тўғри чизиқлар ўтказамиз. Ҳосил бўлган $N_0, N_1, N_2, N_3 \ldots$ синиқ чизиқларни туташтириб $y = F(x)$ эгри чизиқни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$N_0N_1 \parallel AM_1';\ N_1N_2 \parallel AM_2' \ldots$$

Ҳақиқатан ҳам $N_{i-1}, N_i$ кесманинг бурчак коэффициенти

$$K = (F(x_i) - F(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)$$

бўлиб, $0M_i'$ нурнинг бурчак коэффициенти эса $K_i' = \frac{f(\xi_i)}{1} = f(\xi_i)$.

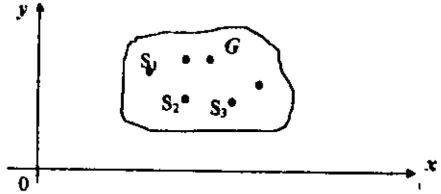
Демак, $N_{i-1}N_i \parallel 0M_i'$, $(i = 1, 2, \ldots)$. Шундай қилиб, $Y = F(x)$ функциянинг графигини чизиш қуйидагича бажарилар экан.

$N_0(x_0; y_0)$ нуқтадан бошлаб $AM_1'$ нурга параллел тўғри чизиқни $x = x_1$ нуқтанинг ординатаси билан кесишгунча давом эттирамиз, сўнгра ўша кесишиш нуқтасини $N_1$ деб, шу $N_1$ дан $AM_2'$ нурга параллел чизиқни то $x_1 = x_2$ нуқтанинг ординатаси билан кесишгунча давом эттирамиз. Кесишиш нуқтасини $N_2$ деб, сўнгра яна шу нуқтадан $AM_3'$ нурга параллел тўғри чизиқ то $x = x_3$ нуқта ординатаси билан кесишгунча давом эттирамиз ва ҳоказо ҳосил бўлган синиқ чизиқ тақрибий интеграллашни қийматини беради. Шуни эътиборга олиш кераки, бу ерда $x_i$ нуқталарни тенг узоқликда олиш унчалик шарт эмасдир. Чизманинг аниқлигини ошириш учун $y = f(x)$ функциянинг характерли нуқталарини албатта эътиборга олиш лозим. Бу усулнинг аниқлиги унча юқори эмасдир, аммо зарурат учун ишлатса бўлади.

## 8.7. Кубатура формулалари

Икки каррали интегралларни ҳисоблаш учун кубатура формулалари деб аталувчи формулалар ишлатилади.

Берилган бўлсин $z=f(x,y)$ икки ўзгарувчили бирор $G$ соҳада аниқланган узлуксиз функция. Бу соҳада $S_i(x_i,y_i)$, $(i=\overline{1,N})$ нуқталар (тугунлар) тўплами $\sigma$ ни танлаб оламиз. $z=f(x,y)$ функциядан $G$ соҳадаги $\sigma$ нуқталар тўплами бўйича олинган $\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун бу интегрални $\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy=\sum\limits_{i=1}^{N} A_i f(x_i,y_i)$ кўринишда оламиз.




17-чизма.

Бу ердаги $A_i$ коэффициентларини топиш учун кубатура формуласи ихтиёрий

$$P_n(x,y)=\sum_{k+l\le n} G_{kl}x^k x^l \qquad (8.21)$$

полиномлар учун бажарилсин деймиз. Бунинг учун $x^k y^l$, $(k,l=\overline{0,n})$ кўпайтма учун (8.21) аниқ бўлиши керак. (8.21) да $f(x,y)=x^k x^l$ десак, у ҳолда

$$I_{kl}=\iint\limits_{\sigma} x^k y^l dxdy=\sum_{i=1}^{N} A_i x^k y^l \quad \text{бўлади.}$$

Ушбу системадан $A_i$ коэффициентлар аниқланади. Бу система аниқланган бўлиши учун номаълум $N$ лар сони тенгламалар сонига тенг бўлиши лозим. Бундан

$$N=(n+1)+n+(n-1)+\ldots+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Бу ерда берилган соҳадаги тугунларни рационал танлаб олиш масаласи анча қийин масаладир.

Агар интегралланиш соҳаси $y=\varphi(x)$, $y=\psi(\varphi)$, $(\varphi(x)\le\psi(x))$ эгри чизиқлар ва $x=0$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган бўлса, интегрални $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy$

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy=\int_a^b F(x)dx$$

деб ёзиб оламиз.

Бу ерда $F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$. Бунга бирорта квадратура формуласини кўлласак, $\iint_{(\sigma)} f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i)$, $(x_i \in [a,b])$ тенгликни хосил киламиз $F$ га навбатида $F(x_i)=\int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i,y)dy=\sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i,y_j)$ деб оламиз. Бу ерда $B_{ij}, A_i$ лар доимий кийматга эга коэффициентлардир. Натижада

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i,y_j)$$

кубатура формуласини хосил киламиз. Кубатура формуласининг хиллари жуда кўп бўлиб, шулардан Симпсон туридаги кубатура формулаларини келтирамиз.

Фараз килайлик, интеграллаш сохаси $G=\{(x,y)\ a\le x\le b, c\le y\le d\}$ бўлсин. Хар бир $[a,b],[c;d]$ ораликларни 2 та бўлакка бўламиз:

$$x_0=a,\quad x_1=a+h,\quad x_2=a+2h=b,\quad h=\frac{b-a}{2},$$

$$y_0=c,\quad y_1=c+k,\quad y_2=c+2k=d,\quad k=\frac{d-c}{2}.$$

Натижада $(x_i,y_j)$, $(i=\overline{0,9};\ j=\overline{0,9})$ 9 та нукталардан ташкил топган тўп там хосил бўлади. Энди

$$\iint_{(G)} f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

десак, ички интегрални Симпсон формуласига асосан

$$\iint_{(G)} f(x,y)dxdy=\int_a^b \frac{k}{3}\left[f(x,y_0)+4f(x,y_1)+f(x,y_2)\right]dx=$$

$$=\frac{k}{3}\left[\int_a^b f(x,y_0)dx+4\int_a^b f(x,y_1)dx+\int_a^b f(x,y_2)dx\right].$$

Хар бир интегралга яна бир марта Симпсон формуласини кўлласак:

$$\iint_{(G)} f(x,y)dxdy=\frac{hk}{9}\{[f(x_0,y_0)+4f(x_1,y_0)+f(x_2,y_0)]+$$

$$+4[f(x_0,y_1)+4f(x_1,y_1)+f(x_2,y_1)]+[f(x_0,y_2)+4f(x_1,y_2)+f(x_2,y_2)]\}=$$

$$=\frac{hk}{9}\{[f(x_0,y_0)+f(x_2,y_0)+f(x_0,y_0)+f(x_2,y_2)]+$$

$$+4[f(x_1,y_0)+f(x_0,y_1)+f(x_2,y_1)+f(x_1,y_2)]+16f(x_1,y_1)\}$$

Бу формулага Симпсон квадаратура формуласи дейилади.

Демак,

$$\iint_{(G)} f(x,y)dxdy=\frac{kh}{9}(\sigma_0+4\sigma_1+16\sigma_2)$$

бўлиб, бу ерда $\sigma_0$ - интеграл остидаги $f(x,y)$ функциянинг тўртбурчак учларидаги кийматлари йиғиндисидан иборат, $\sigma_1$ - тўртбурчак томонларининг ўртасидаги қийматлари йиғиндисини, $\sigma_2$ - функциянинг тўртбурчак марказидаги қийматларидан иборатдир. Агар $G$ соҳанинг ўлчами катта бўлса, кубатура формуласининг аниқлигини ошириш учун $G$ соҳани катта тўртбурчакларга бўлинади ва ҳар бирига Симпсон формуласи қўлланилади.

**Мисол:** Кубатура формуласи ёрдамида $\int_4^5\int_0^1 \frac{dxdy}{(x+y)^2}$ интеграл тақрибий ҳисоблансин.

**Ечиш:** $h=\frac{5-4}{2}=0,5$; $k=\frac{1-0}{2}=0,5$ деб оламиз. $f(x+y)=(x+y)^{-2}$ функция учун жадвал тузамиз:

| $y_i$ \ $x_i$ | 4 | 4,5 | 5 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,06250 | 0,04938 | 0,04000 |
| 0,5 | 0,04938 | 0,04000 | 0,03307 |
| 1 | 0,04000 | 0,03307 | 0,16667 |

у ҳолда

$$\int_4^5\int_0^1 \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \frac{0,5\cdot 0,5}{9}[0,06550+0,08000+0,16667+$$
$$+0,19752+0,16752+0,13228+16\cdot 0,04]=0,044688$$

# 9-БОБ. ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

## 9.1. Умумий мулоҳазалар. Масаланинг қўйилиши

Мазкур дарсликнинг ушбу қисмида биринчи ва иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун бошланғич, чегаравий масалаларнинг қўйилиши ҳамда уларни тақрибий ечиш усулларини ўрганамиз.

Дифференциал тенгламалар курсидан маълумки, биринчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг баъзи турлари квадратура формулалари орқали ҳисобланар эди. Чунки оддий дифференциал тенгламаларни ечиш масаласи бир каррали интегралларни ечишга нисбатан анча мураккаб ва шу сабабли аниқ интеграллаш мумкин бўлган масалалар миқдори анча камдир.

Биз аниқ интеграллаш деганда, дифференциал тенглама ечимини чекли элементар амаллар (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, логарифмлаш, потенцирлаш, синус ва косинуслар) ёрдамида ҳисоблашни кўзда тутамиз. Аниқ интегралланувчи масалаларга ечими махсус функциялар (масалан, Бессел функцияси) орқали ифодаланадиган масалалар ҳам киради.

Шунга қарамасдан ечиш мумкин бўлган турдаги масалалар ечилиши керак бўлган масалаларга нисбатан оз қисмни ташкил этади.

Сонли усулларнинг яратилиши ва ЭҲМларнинг кенг қўлланилиши дифференциал тенгламаларнинг шу пайттача ечилиши қийин бўлган турларини ҳам ечишга имконият туғдирди.

Оддий дифференциал тенгламаларни ечиш икки турга бўлинади:

а) АНАЛИТИК УСУЛ. Бу усулда дифференциал тенгламанинг тақрибий ечими аналитик (формулалар) кўринишида ифодаланади.

б) СОНЛИ УСУЛ. Бу ерда тақрибий ечим жадвал кўринишда ифодаланади.

Биз бу ерда оддий дифференциал тенгламаларни сонли усуллар ёрдамида ечишни ўрганамиз.

Оддий дифференциал тенгламаларни сонли усулда ечиш қуйидаги босқичлардан иборат:

*Биринчи босқич.* <u>Сонли усулларни танлаб олиш</u>. Берилган масалани ечиш учун бир неча усуллар мавжуд бўлиб, шу усуллардан масаланинг характерига мос тушадиган усул танланади.

*Иккинчи босқич.* <u>Масаланинг алгоритмини тузиш</u>. Масалани ечиш жараёнининг кетма-кетлик тартиби, яъни масаланинг алгоритми тузилади.

*Учинчи босқич.* <u>Ҳисоблаш ишларига бевосита тайёргарлик</u>. Бунинг учун қуйидагиларга амал қилиш лозим:

а) ечимни талаб қилинган аниқликда ҳосил қилиш учун ҳамма амалларни шундай аниқликда бажаришни таъминлаш;

б) ҳисоблаш учун зарур бўлган ёрдамчи воситалар - ҳисоблаш машиналари ва керакли жадвалларни танлаб олиш;

в) ҳисоблаш учун зарур бўлган бланкалар, қоғозлар ва дастурларни тайёрлаш.

*Тўртинчи босқич.* Ҳамма ҳисоблашларни бажариш ва натижани олиш. Агар ҳисоблаш ЭҲМда бажарилса, масаланинг дастури ЭҲМ хотирасига киритилади ва машина ҳисобининг натижаси олинади.

## 9.2. Коши масаласининг қўйилиши ва уни ечиш усуллари

Ҳосилага нисбатан ечилган қуйидаги биринчи тартибли дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$y' = f(x,y). \qquad (9.1)$$

(9.1) тенгламанинг умумий ечими $y=\varphi(x,c)$ кўринишидаги функциялар оиласидан иборат бўлиб, у C параметрга боғлиқ. Бу ечимни бирор $X$ нуқтага мос қийматини ҳисоблаш учун $y=\varphi(x,c)$ ечимлар оиласидан бирорта хусусий ечимни ажратиш зарур. Хусусий ечимни ажратиш ихтиёрий $x_0$ нуқтада

$$y(x)|_{x=x_0} = y_0 \qquad (9.2)$$

бошланғич шартни бериш билан амалга оширилади. (9.1), (9.2) масалага бошланғич шартли масала ёки Коши масаласи дейилади ва у қуйидагича талқин қилинади: (9.1) дифференциал тенгламанинг умумий ечимидан (9.2) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ягона ечимни топиш керак. Демак, (9.1) дифференциал тенгламанинг (9.2) бошланғич шартни қаноатлантирадиган хусусий ечимини топишга Коши масаласи дейилади.

Агар $n$-тартибли дифференциал тенглама берилган бўлса, яъни

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad (9.3)$$

Бу ҳолда Коши масаласи: (9.3) дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартларини $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0, \ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, қаноатлантирувчи ечимни топишдан иборат бўлади. Шунингдек, биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системаси учун ҳам Коши масаласини қўйиш мумкин. Қуйидаги дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \qquad (9.4)$$

Бу система учун бошланғич ечим қуйидагидан иборат:

$$y_1(x_0)=y_0,\quad y_2(x_0)=y_{20},\dots,\ y_n(x_0)=y_{n0}. \qquad (9.5)$$

Ушбу дифференциал тенглама учун Коши масаласи қуйидагича қўйилади.

Биринчи тартибли (9.4) дифференциал тенгламалар системасининг шундай ечимини топиш керакки, у (9.5) бошланғич шартларни

$$y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),\dots,\ y_n=y_n(k)\quad .$$

ҳам қаноатлантирсин.

Агар (9.1) дифференциал тенгламанинг ёки (9.4) дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечими маълум бўлса, Коши масаласини ечиш, унинг умумий ечимда қатнашадиган ихтиёрий ўзгармас параметрларининг қийматини аниқлашдан иборат. Умуман Коши масаласининг умумий ечими камдан-кам ҳоллардагина топилиб, уни кўпинча тақрибий ечишга тўғри келади.

## 9.3. Кетма-кет дифференциаллаш усули

Биринчи тартибли дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$y'=f(x,y),$$

бу ерда $x_0\le x\le X$.

Бу дифференциал тенгламани $x=x_0$ нуқтада бошланғич $y(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантирувчи $y=y(x)$ ечимни топиш талаб қилинган бўлсин.

Қўйилган Коши масаласи ечимининг мавжудлик ва ягоналик шарти бажарилган ҳамда $f(x,y)$ функция зарур бўлган тартибдаги ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз. Берилган $y'=f(x,y)$ тенгламанинг $y_n(x)$ тақрибий ечимини қуйидаги кўринишда қидирамиз

$$y_n(x)=\sum_{r=0}^{n}(x-x_0)^r y^{(r)}(x_0), \qquad (9.6)$$

бу ерда $y^{(r)}(x_0)$ берилган функциянинг $r$-тартибли ҳосиласи. Бу ҳосилаларни қуйидагича топамиз: $r=0$ бўлганда $y^{(0)}(x_0)=y_0$, бўлиб, бошланғич шартга асосан олдиндан берилган. $r=1$ бўлса $y'(x_0)$ ҳосила $y'=f(x,y)$ тенгламадан $x$ ўзгарувчи ўрнига $x_0$ қиймат қўйиб топилади, яъни $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$.

$r$ нинг $r>1$ қийматлари учун $y^{(r)}(x_0)$ ҳосилалар $y'=f(x,y)$ тенгламани кетма-кет дифференциаллаш усули билан топилади:

$$y^{(2)}(x_0)=[y'(x_0)]'=[f(x_0,y_0)]'=f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)y_0'=f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)f(x_0,y_0)$$

$$y^{(3)}(x_0)=[y^{(2)}(x_0)]'=\left[f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)f(x_0,y_0)\right]'=$$

$$=f_{xx}''(x_0,y_0)+f_{xy}''(x_0,y_0)y_0'+f_{yx}''(x_0,y_0)f(x_0,y_0)+$$

$$+f_{yy}''(x_0,y_0)y_0'f(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)f_x'(x_0,y_0)+$$
$$+f_y'(x_0,y_0)f_y'(x_0,y_0)y_0'=f_{xx}''(x_0,y_0)+$$
$$+2f_{xy}''(x_0,y_0)+f^2(x_0,y_0)f_{yy}''(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)\cdot\left[f_x'(x_0,y_0)+f(x_0,y_0)f_y'(x_0,y_0)\right]$$

..................................................................

$$y^{(n)}(x_0)=F_n\left(f,f_x',f_y',f_{xx}'',f_{xy}'',f_{yy}'',\ldots\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

Охирги тенгламада $F_n$ функциянинг - кўпҳаднинг кўриниши мураккаб бўлганлиги учун унинг ёйилмасини келтирмадик.

Бу усул $n$ нинг етарлича катта бўлганда $x_0$ нинг $x$ га яқин қийматларида $y'=f(x,y)$ тенгламанинг $y(x)$ аниқ ечимига яқинлашувчи ечимни беради.

**Эслатма.** Агар $|x-x_0|$ масофа катталашиб борса, тақрибий ечимнинг абсолют хатоси ошиб боради ва $x$ нинг қиймати(9.5) Тейлор қаторининг яқинлашиш доирасидан чиқиб кетганда бу усулни қўллаб бўлмайди.

**Мисол.** Қуйидаги $y'=x+2y^2$, $y(0)=1$ Коши масаласининг қатор кўринишдаги тақрибий ечимининг биринчи 5 та ҳади йиғиндисини топинг.

**Ечиш.** Масалани ечиш учун (9.0) формуладан фойдаланамиз. Бу ерда $f(x,y)=x+2y^2$, $x_0=0$ бўлиб $y_0=1$

$$y_5(x)=\sum_{r=0}^{5}x^r y^{(r)}(0)=x^{(0)}y^{(0)}(0)+xy'(0)+x^2y''(0)+x^3y'''(0)+x^4y^{IV}(0)+x^5y^{V}(0)$$

Йиғиндида қатнашган ҳосилаларни берилган дифференциал тенгламадан фойдаланиб топамиз, яъни,

$$y'=x+2y^2,\quad y''=1+4yy',\quad y'''=4(y')^2+4yy'',$$
$$y^{IV}=12y'y''+4yy''',\quad y^{V}=12(y'')^2+16y'y'''+4yy^{IV}$$

Бу ифодаларни $x=0$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз. Масаланинг шартига асосан $r=0$ бўлганда $y^{(0)}(0)=y(0)=1$ тенгдир.

$r=1$ да, $y'(0)=2y^2(0)=2\cdot1=2$, $r=2$ да, $y''(0)=1+4\cdot1\cdot2=9$,

$r=3$ да, $y'''(0)=52$, $r=4$ да, $y^{IV}(0)=424$, $r=5$ да, $y^{V}(0)=4332$

Демак, қидирилаётган ечим $y_5(x)=1+2x+9x^2+52x^3+424x^4+4332x^5$ дан иборат.

## 9.4. Аниқмас коэффициентлар усули

Ушбу усул моҳиятини баён қилишда иккинчи тартибли дифференциал тенгламадан фойдаланамиз. Дифференциал тенглама учун Коши масаласи қўйилган бўлсин.

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=\varphi(x)\qquad(9.7)$$

ва қуйидаги бошланғич шартлар берилган бўлсин:

$$y(x)|_{x=0}=y_0,\quad y'(x)|_{x=0}=y_0'. \qquad (9.8)$$

Фараз қилайлик, (9.7) дифференциал тенгламанинг $P(x), Q(x)$ ва $\varphi(x)$ коэффициентларини $x$ нинг даражаси бўйича қаторга ёйиш мумкин бўлсин, яъни

$$P(x)=\sum_{r=0}^{\infty}P_r x^r;\quad Q(x)=\sum_{r=0}^{\infty}Q_r x^r;\quad \varphi(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\varphi_r x^r. \qquad (9.9)$$

Берилган (9.7) дифференциал тенгламанинг ечимини қуйидаги қатор кўринишида излаймиз:

$$y(x)=\sum_{r=0}^{\infty}C_n x^n, \qquad (9.10)$$

бу ерда $C_n$ аниқланиши лозим бўлган коэффициентлардир. Изланаётган (9.10) ечимнинг иккала томонини $x$ бўйича икки марта дифференциаллаймиз:

$$y'(x)=\sum_{r=1}^{\infty}rC_r x^{r-1};\quad y''(x)=\sum_{r=2}^{\infty}r(r-1)x^{r-2}C_r,$$

энди $y'(x)$, $y''(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ ва $\varphi(x)$ ларнинг қийматларини (9.7) га қўямиз:

$$\sum_{r=2}^{\infty}r(r-1)C_r x^{r-2}+\sum_{r=0}^{\infty}P_r x^r\sum_{r=1}^{\infty}rC_r x^{r-1}+\sum_{r=0}^{\infty}Q_r x^r\sum_{r=0}^{\infty}C_r x^r=\sum_{r=0}^{\infty}\varphi_r x^r.$$

Энди 9.11 тенгламадаги қаторларни ўзаро кўпайтириб, ўнг ва чап томондаги $x$ ларнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни ўзаро тенглаштириб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & 2C_2+C_1P_0+C_0Q_0=\varphi_0, \\
x^1 & 3\cdot 2\cdot C_3+2C_2P_0+C_1P_1+C_1Q_0-C_0Q_1=\varphi_1, \\
x^2 & 4\cdot 3\cdot C_4+3C_3P_0+2C_2P_1+C_1P_2+C_2Q_0+C_1Q_1+C_0Q_2=\varphi_2 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^r & (r+2)(r+1)C_{r+2}+\Phi(C_{r+1},C_r,\ldots C_1,C_0)=Q_r
\end{array}\Bigg\}. \qquad (9.12)$$

Бу ерда $\Phi(C_{r+1},C_r,\ldots\ldots C_1,C_0)$ чизиқли функция.

(9.12) системани ечиб номаълум $C_i(i=\overline{2,n})$ коэффициентларни топамиз, улардаги $C_0$ ва $C_1$ коэффициентлар (9.8) бошланғич шартидан аниқланади.

Агар бошланғич шарт $x=x_0$ нуқтада берилса, у ҳолда қаралаётган масала $x-x_0=t$ алмаштириш ёрдамида юқорида қаралаётган ҳолга келтирилади.

Агар (9.9) қаторнинг ҳар бири $|x|<R$ соҳада яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (9.10) қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, у (9.7) иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг ечимидан иборат бўлади.

Мисол. Берилган

$$y''-xy'+y=\sin x, \qquad (9.13)$$

дифференциал тенгламанинг қуйидаги бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечими топилсин

$$y(0)=0 \text{ ва } y'(0)=1.$$

Ечиш: Бу ерда $P(x)=-x$, $Q(x)=1$, $\varphi(x)=\sin x$. Маълумки, $\sin x$ нинг қатор ёйилмаси қуйидагидан иборат:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{r+1}\frac{x^{2r-1}}{(2r-1)!}. \qquad (9.14)$$

Ечимни қуйидаги қатор кўринишида излаймиз:

$$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_rx^r+\ldots \ . \quad (9.15)$$

Бунинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+rc_rx^{r-1}+\ldots,$$

$$y''=2c_2+6c_3x+12c_4x^2+\ldots+r(r-1)c_rx^{r-2}+\ldots \qquad (9.16)$$

Энди (9.16), (9.15 ) ва (9.14) қаторларни (9.13) га қўямиз:

$$2c_2+6c_3x+12c_4x^2+\ldots+r(r-1)c_rx^{r-1}+\ldots-c_1x-2c_2x^2-3c_3x^3-\ldots-rc_rx^r-\ldots+$$

$$+c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_rx^r+\ldots=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\ldots+(-1)^r\frac{1}{(2r-1)!}x^{2r-1}+\ldots$$

Бу тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$1\cdot 2c_2+c_0+2c_3x+(4\cdot 3c_4-c_2)x^2+(4\cdot 5c_5-2c_3)x^3+(5\cdot 6c_6-3c_4)x^4+(6\cdot 7c_7-4c_6)x^6+$$

$$+(8\cdot 9c_9-6c_7)x^7+\ldots+\left[(r+1)(r+2)c_{r+2}-(r-1)c_r\right]x^r+\ldots=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{r+1}}{(2r-1)!}x^{2r-1}+\ldots$$

Тенгламанинг иккала томонидаги $x$ ларнинг мос даражаси олдидаги коэффициентларни тенглаштирамиз.

$$\left.\begin{array}{c|l}
x^0 & 2c_2+c_1=0\\
x^1 & 2\cdot 3c_3=1\\
x^2 & 3\cdot 4c_4=c_2\\
x^3 & 4\cdot 5c_5-2c_3=-\dfrac{1}{3!}\\
x^4 & 5\cdot 6c_6-3c_4=0\\
x^5 & 6\cdot 7c_7-4c_5=1/5!\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}. \qquad (9.17)$$

Энди (9.15) да ва (9.16) нинг биринчи тенгламасида $x=0$ десак, $y(0)=c_0$ ва $y'(0)=c_1$ ни ҳосил қиламиз. Буларни ва бошланғич шартларни ҳисобга олсак, $c_0=0$ ва $c_1=1$ эканлигини топамиз.

Энди (9.17) системадан кетма-кет $c_i$ коэффициентларни топамиз.

$$c_2=0;\ c_3=\frac{1}{2\cdot 3};\ c_4=0;\ c_5=-\frac{1}{3!4\cdot 5}+\frac{2}{2\cdot 3}=\frac{2}{3!}\cdot\frac{1}{5!},\ c_6=0;\ c_7=\frac{1}{7!}+4\cdot\left(\frac{2}{3!}-\frac{1}{5!}\right);$$

$$c_k = 0;\ c_{2r} = 0;\ c_{2r+1} = \frac{(-1)^{r-1}}{(2r+1)!} + (2r-2)\left(\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)!} + 2(r-4)\left(\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-3)!} + \ldots\right)\ldots\right).$$

Демак, изланаётган ечим қуйидагидан иборат экан:

$$y(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 = \left(\frac{2}{3!} - \frac{1}{5!}\right)x^5 + \left[\frac{1}{7!} + 4\left(\frac{2}{3!} - \frac{1}{5!}\right)\right]x^7 + \ldots + \left[\frac{(-1)^{r-1}}{(2r+1)!} + (2r-2)\left(\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)!}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left(\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-3)!}\right) + \ldots\right)\ldots\right)\Bigg]x^{2r+1} + \ldots$$

## 9.5. Кетма-кет яқинлашиш усули

Биринчи тартибли дифференциал тенглама учун Коши масаласи қўйилган бўлсин.

$$y' = f(x,y), \qquad (9.18)$$

$$y(x_0) = y_0. \qquad (9.19)$$

Коши масаласининг ечимини топиш учун кетма-кет яқинлашиш усулини қўллаймиз. Бу усулга асосан (9.18) дифференциал тенгламанинг ечими қуйидаги реккурент формула орқали изланади:

$$y_r(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{r-1}(x))dx,\ (r = 1,2,\ldots) \qquad (9.20)$$

Агар (9.18) да $f(x,y)$ бирорта $R\{|x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$ ёпиқ тўртбурчакда бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N|y_1 - y_2|,\ (N = const) \qquad (9.21)$$

у ҳолда $y_0$ бошланғич функцияни танлаб олишга боғлиқ бўлмаган ҳолда $y_r(x)$ ечимлар кетма-кетлиги $[x_0, x_0 + h]$ оралиқда (9.18) ва (9.19) масаланинг ечимига яқинлашади ва ечимнинг хатоси қуйидагига тенг бўлади:

$$\varepsilon_n = |y(x) - y_r(x)| < MN^r \frac{(x - x_0)^{r+1}}{(r+1)!}, \qquad (9.22)$$

бу ерда $M = \max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$, $h = n\min(a, \frac{b}{M})$.

Бошланғич $y_0(x)$ қиймат учун аниқ ечимга яқин бўлган ихтиёрий функция олинади. $y_0(x)$ бошланғич ечимнинг танланиши яқинлашиш жараёнини секинлаштириш ва тезлаштириши мумкин.

Мисол. Қуйидаги $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$ Коши масаласининг 5 та ечимлари кетма-кетлиги топилсин.

Ечиш. Берилган дифференциал тенгламани қуйидаги интеграл тенглама билан алмаштирамиз:

$$y_r(x) = \int_0^x (x^2 - y_{r-1}^2)dx.$$

Бошлангич яқинлашиш сифатида $y(0)=0$ ни оламиз.

Биринчи яқинлашиш қуйидагича топилади:

$r=1$ да, $y_1(x)=\int_0^x (x^2-y_0^2)dx=\int_0^x (x^2-0)dx=\int_0^x x^2dx=\frac{x^3}{3}$,

$r=2$ да, $y_2(x)=\int_0^x (x^2-y_1^2)dx=\int_0^x (x^2-\frac{x^3}{3})dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3\cdot 4}$,

$r=3$ да, $y_3(x)=\int_0^x (x^2-y_2^2)dx=\int_0^x (x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3\cdot 4})dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3\cdot 4}-\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5}$,

$r=4$ да, $y_4(x)=\int_0^x (x^2-y_3^2)dx=\int_0^x (x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3\cdot 4}-\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5})dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3\cdot 4}-\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$

Демак, изланаётган ечимнинг $r$-яқинлашиши қуйидагича бўлади:

$$y_r(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3\cdot 4}-\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}-\ldots-\frac{x^{r+2}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(r+1)(r+2)}.$$

## 9.6. Эйлер усули. Эйлер-Коши усули

Дифференциал тенгламаларни ечишнинг энг қулай усулларидан бири Эйлер усули ҳисобланади. Эйлер усулининг моҳияти қуйидагидан иборат. Бу усулда изланаётган ечимнинг чизиқли экстраполяцияси биринчи даражали кўпҳад билан алмаштиралади. Биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$y'=f(x,y) \qquad (9.23)$$

ва унинг бошлангич шарти

$$y(x_0)=y_0 \qquad (9.24)$$

берилган бўлсин.

Бу ерда $x$ ўзгарувчи $[a;b]$ оралиқда ўзгарсин. $[a;b]$ кесмани $x_i$ нуқталар ёрдамида тенг узунликдаги кесмаларга бўлиб чиқамиз. Кесмаларнинг узунликлари $\Delta x$ бўлсин, яъни

$$\Delta x=h=x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots=x_n-x_{n-1}.$$

Демак, $h=\frac{x_n-x_0}{n}=\frac{b-a}{n}$.

Агар (9.23) дифференциал тенгламанинг ечимини $y=\varphi(x)$ кўринишга эга деб ҳисобласак, бу ечимнинг $x_0,x_1,\ldots,x_n$ нуқталарга мос қийматлари қуйидагича бўлади:

$$y_0=\varphi(x_0),\; y_1=\varphi(x_1),\ldots,\; y_n=\varphi(x_n).$$

Қуйидаги белгилашлар киритамиз:

$$\Delta y_0=y_1-y_0,\; \Delta y_1=y_2-y_1,\; \Delta y_2=y_3-y_2,\ldots,\; \Delta y_{n-1}=y_n-y_{n-1}.$$

(9.23) да $y'$ ни чекли айирмалар нисбати билан алмаштирамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x,y) \quad \text{ёки} \quad \Delta y=f(x,y)\Delta x \qquad (9.25)$$

Энди (9.25) ни $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталардаги қийматлари бўйича кетма-кет ёзиб чиқамиз:

$x = x_0$ бўлганда, $\Delta y_0 = f(x_0, y_0)\Delta x$ ёки $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$

Бу ерда $y_0, x_0$ ва $h$ лар маълум бўлгани учун $y_1$ нинг қийматини қуйидаги формула орқали ҳисоблаб топиш мумкин:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

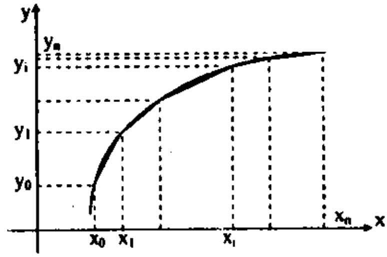
$x = x_1$ да $\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\Delta x$ ёки $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h$, бундан $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$ бўлади.

Шунингдек,

$$\left.\begin{array}{l} x = x_2 \text{ да } y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x = x_{n-1} \text{ да } y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h \end{array}\right\}. \qquad (9.26)$$

Демак, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталарда (9.23) дифференциал тенгламаларнинг тақрибий ечими топилади. Буни қуйидагича геометрик изоҳлаш мумкин.

Декарт координаталар текислигида $(x_0, y_0)(x_1, y_1) \ldots (x_n, y_n)$ нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари орқали туташтириб чиқамиз. Натижада тўғри чизиқли кесмалардан иборат бўлган синиқ чизиқ ҳосил бўлади. Бу синиқ чизиқ Эйлер синиқ чизиғи деб аталади.




18-чизма.

Бу синиқ чизиқ (9.23) дифференциал тенглама интеграл эгри чизиғининг тақрибий кўриниши ҳисобланади.

Агар $f(x, y)$ қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

а) ихтиёрий $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса;

б) функциянинг $x$ бўйича ҳосиласи юқоридан чегараланган,

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le N;$$

в) $y$ нинг функцияси бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса,

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le \alpha|y_2 - y_1|,$$

у ҳолда тақрибий ечим билан аниқ ечим орасидаги хатолик қуйидаги формула орқали баҳоланади:

$$|y_k - y(x_k)| \le \frac{hN}{2L}\left|e^{a(x_k-x_0)} - 1\right|. \qquad (9.27)$$

Бу ерда, $N$ ва $L$ доимий сонлар.

**Мисол.** $y' = 2x + y$ дифференциал тенглама $y(0) = 0$ бошланғич шарти билан берилган бўлсин. Ушбу дифференциал тенгламани $[0; 1]$ кесмада тақрибий ечими $h = 0{,}1$ қадам билан топилсин.

**Ечиш.** Шартга асосан $a = x_0 = 0$ ва $b = x_n = 1$ $f(x,y) = 2x + y$. Нуқталар сони $n$ ни топамиз:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0{,}1} = 10.$$

Энди (9.26) формулага асосан $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ нуқталар учун $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ қийматларини ҳисоблаймиз:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = y_0 + (2x_0 + y_0)h = 0 + (2\cdot 0 + 0)\cdot 0{,}1 = 0;$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = y_1 + (2x_1 + y_1)h = 0 + (2\cdot 0 + 0)\cdot 0{,}1 = 0{,}02;$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h = y_2 + (2x_2 + y_2)h = 0{,}02 + (2\cdot 0{,}2 + 0{,}02) = 0{,}062;$$

$$y_4 = 0{,}1282; \quad y_5 = 0{,}22102; \quad y_6 = 0{,}34312; \quad y_7 = 0{,}4974;$$

$$y_8 = 0{,}68714; \quad y_9 = 0{,}91585; \quad y_{10} = 1{,}18744.$$

Берилган дифференциал тенгламанинг аниқ ечими $y(x) = 2e^x - 2x - 2$ га тенг бўлиб, унинг $[0; 1]$ оралиқдаги $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ нуқталардаги қийматлари қуйидагилардан иборат:

$$x_0 = 0; \; x_1 = 0{,}1; \; x_2 = 0{,}2; \; x_3 = 0{,}3; \; x_4 = 0{,}4; \; x_5 = 0{,}5;$$

$$x_6 = 0{,}6; \; x_7 = 0{,}7; \; x_8 = 0{,}8; \; x_9 = 0{,}9; \; x_{10} = 10.$$

$$y_0 = 0; \; y_1 = 0{,}01034; \; y_2 = 0{,}0428; \; y_3 = 0{,}09972; \; y_4 = 0{,}18264; \; y_5 = 0{,}29744;$$

$$y_6 = 0{,}44424; \; y_7 = 0{,}6275; \; y_8 = 0{,}85108; \; y_9 = 1{,}1192; \; y_{10} = 1{,}43656.$$

Бундан кўринадики, тақрибий ечим аниқ ечимдан фарқ қилади.

Эйлер усулида ечимнинг аниқлигини оширишдаги энг яхши йўл интеграллаш қадамини жуда кичрайтириб олишдир.

Умуман (9.27) формуладан кўринадики, ҳар бир қадамда Эйлер усулининг хатоси анча катта. Бу хатони камайтириш учун такомиллаштирилган Эйлер усули қўлланилади. Такомиллаштирилган Эйлер усулида ҳисоблаш ҳар бир $k$ қадамда икки қисмдан иборат ҳолда олиб борилади, яъни $X_{k+\frac{1}{2}} = X_k + \frac{h}{2}$ нуқтага мос $y_{k+\frac{1}{2}}$ нинг қиймати $y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{hf(x_k, y_k)}{2}$ формула билан ҳисобланади. Сўнгра $y_{k+1}$ қуйидаги формула билан топилади:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}). \qquad (9.28)$$

Яна такомиллаштирилган Эйлер усулларидан бири Эйлер-Коши усулидир. Бу усулга асосан (9.26) формула ёрдамида ҳар бир $k+1$ қадамда $y_{k+1}^{(0)}$ - қиймат ҳисобланади:

$$y_{k+1}^{(0)} = Y_k + hf(x_k, y_k).$$

Сўнгра бу қиймат қуйидаги формула билан қайта аниқланади:

$$y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)})\right] \qquad (9.29)$$

Бу усулнинг хатолик тартиби $h^2$ га тенг. Юқоридаги мисолни Эйлер Коши усули билан ечамиз:

$$x_0 = 0; \quad y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0{,}1(2\cdot 0 + 0) = 0;$$

$$x_1 = 0{,}1; \quad y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(2x_0 + y_0 + 2x_1 + y_1^{(0)}\right) = 0 + 0{,}05(2\cdot 0{,}1 + 0{,}01 + 0) = 0{,}01;$$

$$x_2 = 0{,}2; \quad y_2^{(0)} = y_1 + h(2x_1 + y_1) = 0{,}01 + \frac{0{,}1}{2\cdot 0{,}1} + 0{,}01) = 0{,}031,$$

$$y_2 = y_1 + 0{,}05(2x + y_1 + 2x_2 + y_2^{(0)}) = 0{,}042;$$

$$x_3 = 0{,}3; \quad y_3^{(0)} = 0{,}0862; \quad y_3 = 0{,}0984, \quad x_4 = 0{,}4, \quad y_4^{(0)} = 0{,}1628; \quad y_4 = 0{,}1817;$$

$$x_5 = 0{,}5; \quad y_5^{(0)} = 0{,}2798; \quad y_5 = 0{,}2997; \quad x_6 = 0{,}6; \quad y_6^{(0)} = 0{,}4242; \quad y_6 = 0{,}4406;$$

$$x_7 = 0{,}7; \quad y_7^{(0)} = 0{,}6046; \quad y_7 = 0{,}6228; \quad x_8 = 0{,}8; \quad y_8^{(0)} = 0{,}8250; \quad y_8 = 0{,}8451;$$

$$x_9 = 0{,}9; \quad y_9^{(0)} = 1{,}0896, \quad y_9 = 1{,}1118. \quad x_{10} = 1; \quad y_{10}^{(0)} = 1{,}4029; \quad y_{10} = 1{,}4175.$$

Бу ечимни аниқ ечим билан солиштирсак, улар орасидаги фарқ кам эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

## 9.7. Рунге-Кутте усули

Ушбу

$$y' = f(x,y) \qquad (9.30)$$

дифференциал тенглама қуйидаги

$$y(x_0) = y_0 \qquad (9.31)$$

бошланғич шарт билан берилган бўлсин. Бу масалани Рунге-Кутте усули билан ечамиз.

Рунге-Кутте усулида ҳисоблаш формулаларида $y(x)$ функцияни Тейлор қаторига ёйиш ва бу қатор қисмини ҳосила қатнашмайдиган қилиб ўзгартириш ётади. Агар ҳисоблаш формулалари Тейлор қаторининг $m$ тартибли ҳосиласини ўзгартириш йўли билан ҳосил қилинган бўлса, бу $m$-тартибли усул дейилади. Рунге-Кутте усулида ихтиёрий $i$-қадамдаги тақрибий ҳисоблаш қуйидаги формула орқали бажарилади:

$$y_{i+1} = y_i + \lambda_i \qquad (9.32)$$

Бу ерда $\lambda_i$ ни танлашига қараб Рунге-Кутте усулини турли тартибдаги ҳисоблаш йўлларини ҳосил қилиш мумкин.

Масалан, учинчи тартибли ҳисоблаш формулалари учун $\lambda_i$ ни қуйидагича танлаш мумкин:

$$\lambda_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 4k_2^{(i)} + k_3^{(i)}\right), \qquad (9.33)$$

бу ерда,

$$\left.\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_2^{(i)} - k_1^{(i)}) \end{aligned}\right\}. \qquad (9.34)$$

Тўртинчи тартибли ҳисоблаш формулалари учун $\lambda$, қуйидаги кўринишни олади:

$$\lambda_i = \frac{1}{6}\left[k_1^{(i)} + 2(k_2^{(i)} + k_3^{(i)}) + k_4^{(i)}\right] \qquad (9.35)$$

бу ерда, $k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}, k_4^{(i)}$ лар қуйидагича ҳисобланади:

$$\left.\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \\ k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \end{aligned}\right\}. \qquad (9.36)$$

Рунге-Кутте усулининг бундан юқори тартибдаги ҳисоблаш формулаларида $\lambda$, нинг кўриниши анча мураккаб бўлганлиги учун, уларни бу ерда келтирамиз. Рунге-Кутте усулидаги ҳисоблаш ишлари қуйидаги жадвал ёрдамида олиб борилади.

| $i$ | $x$ | $y$ | $k = hf(x, y)$ | $\Delta y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_0$ | $y_0$ | $k_1^{(0)}$ | $k_1^{(0)}$ |
| | $x_0 + h/2$ | $y_0 + k_1^{(0)}/2$ | $k_2^{(0)}$ | $2k_2^{(0)}$ |
| | $x_0 + h/2$ | $y_0 + k_2^{(0)}/2$ | $k_3^{(0)}$ | $2k_3^{(0)}$ |
| | $x_0 + h$ | $y_0 + k_3^{(0)}$ | $k_4^{(0)}$ | $k_4^{(0)}$ |
| | | | | |
| 1 | $x_1$ | $y_1$ | | |

Жадвални тўлдириш қуйидаги тартибда бажарилади:

1) Биринчи сатрга $x_0$, $y_0$ ларнинг қийматларини ёзамиз.

2) $f(x_0, y_0)$ ни ҳисоблаб, $h$ га кўпайтириб, $k_1^{(0)}$ сифатида жадвалга ёзамиз.

3) Иккинчи қаторга $x_0 + h/2$, $y_0 + k_1^{(0)}/2$ ларнинг қийматларини ёзамиз.

4) $f(x_0 + h/2, \; y_0 + k_1^{(0)}/2)$ ни ҳисоблаб, $h$ га кўпайтириб, жадвалга $k_2^{(0)}$ сифатида ёзамиз.

5) Учинчи қаторга $x_0 + h/2$, $y_0 + k_1^{(0)}/2$ ларнинг қийматларини ёзамиз.

6) $f(x_0 + h/2, \; y_0 + k_1^{(0)}/2)$ ифодани ҳисоблаб, $h$ га кўпайтириб, жадвалга

$k_1^{(0)}$ сифатида ёзиб қўямиз.

7) Тўртинчи қаторга $x_0+h$, $y_0+k_3^{(0)}$ ларнинг қийматларини ёзамиз.

8) $f(x_0+h,\ y_0+k_3^{(0)})$ функцияни ҳисоблаб, $h$ га кўпайтириб, $k_4^{(0)}$ сифатида жадвалга ёзамиз.

9) $\Delta y$ турган устунга $k_1^{(0)}$, $2k_2^{(0)}$, $2k_3^{(0)}$, $k_4^{(0)}$ қийматларни ёзиб қўямиз.

10) $\Delta y$ устунда турган сонларни қўшиб 6 га бўламиз ва жадвалга $\Delta y_0$ сифатида ёзамиз.

11) $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ ни ҳисоблаймиз.

Кейинги қадамда $(x_1, y_1)$ нуқтани бошланғич нуқта деб ҳамма ҳисоблаш ишлари қайта бажарилади ва ҳоказо. Юқорида келтирилган Рунге-Кутте усулининг тартиби $h^4$ га тенгдир. Ҳисоблашни текшириб туриш учун

$$\Theta = \left|\frac{k_2^{(i)} - k_3^{(i)}}{k_1^{(i)} - k_2^{(i)}}\right|$$

формуладан фойдаланилади.

Агар $\Theta \le 10^{-2}$ шарт бажарилса, $h$ қадам тўғри танлаб олинган деб ҳисобланади, акс ҳолда $h$ ни камайтириб, сўнгра яна $\Theta$ ни текшириб кўриш лозим.

Умумий ҳолда Рунге-Кутте усулининг хатосини баҳолаш анча қийин, шунинг учун кўпинча асосий ҳад хатолигини баҳолаш билан чегараланилади.

Рунга-Кутте усулида асосий ҳад хатолигини қуйидаги формула орқали топилади:

$$y(x) - y_{2h} \approx \frac{y_{2h} - y_h}{2^m - 1},$$

бу ерда, $y(x)$ функция $x$ нуқтадаги аниқ ечим; $y_{2h}$ - $x$ нуқтадаги $h$ қадам билан топилган тақрибий ечим; $y_h$ - $x$ нуқтадаги $2h$ қадам билан ҳисобланган тақрибий ечим.

**Мисол.** Қуйидаги $y' = 0{,}25y^2 + x^2$ дифференциал тенглама ва бошланғич шарт $y(0) = -1$ берилган бўлсин. Тенгламани $[0,1]$ оралиқда $h = 0{,}2$ қадам билан ечимини топинг.

**Ечиш.** Юқоридаги (9.23), (9.33) ва (9.36) формулалардан фойдаланиб тақрибий ечимларни топамиз.

$i=0$ бўлганда, $y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2(k_2^{(0)} + k_3^{(0)}) + k_4^{(0)})$ бўлади. Энди $k_i^{(0)}$ $(i=\overline{1,4})$ ларни ҳисоблаймиз:

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = h(0{,}25y_0^2 + x_0^2) = 0{,}2\cdot(0{,}25\cdot(-1)^2 + 0^2) = 0{,}050.$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = h\left(0{,}25\left(y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right)^2 + \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)^2\right) = 0{,}2\cdot(0{,}25\cdot(-1)^2 + \left(\frac{0{,}05}{2}\right)^2 +$$

$$+\left(0 + \frac{0{,}2}{2}\right)^2 = 0{,}2(0{,}25\cdot(0{,}925)^2 + (0{,}1)^2) = 0{,}04953$$

Худди шундай тарзда давом эттириб, натижаларни қуйидаги жадвалга ёзиб борамиз:

| $i$ | $x$ | $y$ | $k^{(i)} = hf(x,y)$ | $\Delta y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0 | -1,0 | 0,050 | 0,050 |
| | 0,1 | -0,975 | 0,04953 | 0,09906 |
| | 0,1 | -0,9752 | 0,04955 | 0,09910 |
| | 0,2 | -0,95045 | 0,05317 | 0,05317 |
| | | | | **0,05022** |
| 1 | 0,2 | -0,94978 | 0,0531 | 0,0531 |
| | 0,3 | -0,92323 | 0,06062 | 0,121235 |
| | 0,3 | -0,89292 | 0,057865 | 0,115731 |
| | 0,4 | -0,835055 | 0,119865 | 0,114865 |
| | | | | **0,067489** |
| 2 | 0,4 | -0,88229 | 0,0709 | 0,0709 |
| | 0,5 | -0,8468 | 0,0858 | 0,1716 |
| | 0,5 | -0,8398 | 0,0852 | 0,1704 |
| | 0,6 | -0,7970 | 0,1037 | 0,1031 |
| | | | | |
| 3 | 0,6 | -0,7961 | 0,1036 | 0,1036 |
| | 0,7 | -0,7443 | 0,1256 | 0,2512 |
| | 0,7 | -0,7333 | 0,1248 | 0,2496 |
| | 0,8 | -0,6713 | 0,1505 | 0,1505 |
| | | | | **0,1258** |
| 4 | 0,8 | -0,6703 | 0,1504 | 0,1504 |
| | 0,9 | -0,5951 | 0,1797 | 0,3594 |
| | 0,9 | -0,5805 | 0,1788 | 0,3576 |
| | 1,0 | -0,4915 | 0,2120 | 0,2120 |
| | | | | **0,1799** |
| 5 | 1,0 | -0,4904 | | |

# 10-БОБ. ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

## 10.1. Масаланинг қўйилиши

Биз бу бўлимда, асосан иккинчи тартибли ўзгарувчан коэффициентли оддий дифференциал тенгламалар учун чегара масаласининг қўйилишини ва уни тақрибий ечиш усуллари билан танишамиз. Бу усуллар электрон ҳисоблаш машиналари пайдо бўлмасдан илгари ҳам маълум эди, аммо катта ва кичик электрон ҳисоблаш машиналарининг вужудга келиши ва такомиллашиши бу усуллардан кўпроқ фойдаланишга, усулларнинг қўлланиш доираси кенгайишига олиб келди.

Бу усуллардан энг кўп тарқалганлари прогонка усули, тўр усули ва бошқалардир. Қуйида биз шу усуллар билан кенгроқ ҳолда танишиб чиқамиз. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун чегара масаласининг моҳияти қуйидагидан иборат. Бизга иккинчи тартибли ошкормас ҳолдаги оддий дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (10.1)$$

Бу тенглама учун шундай $y = f(x)$ функцияни топиш керакки, бу функция $x$ нинг ўзгариши орқали $[a;b]$ нинг ички нуқталарида (10.1) тенгламани қаноатлантириб, кесманинг четки нуқталарида эса қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$\Psi_1[y(a), y'(a)] = 0, \quad \Psi_2[y(b), y'(b)] = 0. \qquad (10.2)$$

Агар (10.1) тенглама ва (10.2) чегаравий шарт чизиқли бўлса, бундай чегаравий масала чизиқли деб аталади. У ҳолда (10.1) ва (10.2) тенгламаларнинг кўриниши қуйидагича ошкор кўринишда бўлади:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a, b) \qquad (10.3)$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_0, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1. \qquad (10.4)$$

бу ерда, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ функциялар $[a;b]$ ораликда узлуксиз, олдиндан аниқланган функциялардир.

$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$ лар берилган доимий сонлар бўлиб, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ шартларни қаноатлантиради. Агар $f(x) = 0$ ва $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$ бўлса, (10.3) ва (10.4) чегаравий масалага, бир жинсли чегаравий масала дейилади, акс ҳолда бир жинссиз чегаравий масала деб аталади. Чегаравий масалаларни тақрибий ечишнинг икки гуруҳдан иборат усуллари мавжуддир.

1. Аналитик усуллар.
2. Айирмали усуллар.

Кейинги бўлимларда шу гуруҳларнинг вакили бўлган, энг кўп қўлланиладиган айрим усуллар билан танишиб чиқамиз.

## 10.2. Дифференциал прогонка усули

Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (10.5)$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_0, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1. \qquad (10.6)$$

Берилган тенгламани ечишнинг дифференциал прогонка усулини баён қилишдан олдин (10.5) ва (10.6) тенгламани ечиш масаласи, 2 та Коши масаласини ечишга келиш усулини чиқарамиз. Фараз қилайлик, (10.6) чегаравий шартлари параметрлар $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$ ва $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$ шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда (10.5) тенгламанинг ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$y(x) = CU(x) + V(x), \qquad (10.7)$$

бу ерда, $C$ - номаълум доимий коэффициент, $U = U(x)$ функция (10.5) тенгламага мос бўлган

$$U'' + p(x)U' + q(x)U = 0 \qquad (10.8)$$

бир жинсли тенгламани ечимидан иборат бўлиб, $V = V(x)$ функция эса (10.5) тенгламага мос бўлган бир жинслимас

$$V'' + p(x)V' + q(x)V = f(x) \qquad (10.9)$$

тенгламанинг ечимидир. Ҳосил бўлган (10.8) ва (10.9) тенгламалар учун бошланғич шартлар (10.7) ечимни $x = a$ нуқтада (10.6) шартни қаноатлантиришдан келтириб чиқарилади, яъни

$$U(a) = k\alpha_1, \quad U'(a) = -k\alpha_0, \qquad (10.10)$$

бу ерда, $k \neq 0$ ихтиёрий доимий сон.

Агар (10.6) шартда $\alpha_0 \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$V(a) = \frac{\gamma_1}{\alpha_0}, \quad V'(a) = 0, \qquad (10.11)$$

деб олиш мумкин, $\alpha_1 \neq 0$ бўлса,

$$V(a) = 0, \quad V'(a) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}. \qquad (10.12)$$

Шундай қилиб, (10.5) ва (10.6) чегаравий масала (10.8),(10.10) ва (10.9), (10.11) ёки (10.12) Коши масалаларини ечишга келтирилади. Коши масалалари эса қўлланманинг олдинги бўлимларида баён қилинган усуллар билан ечилади.

Юқоридаги (10.7) ечимда $C$ сони ечимни (10.6) шартнинг $x = b$ нуқтадаги кўринишидан топилади, яъни

$$C = \frac{\gamma_1 - \beta_0 V(b) - \beta_1 V'(b)}{\beta_0 U(b) + \beta_1 U'(b)}. \qquad (10.13)$$

Бундан кўринадики, $C$ параметр мавжуд бўлиши учун $\beta_0 U(b) + \beta_1 U'(b) \neq 0$ шарт бажарилиши зарур экан. Бу ҳолда чегаравий масала ягона ечимга эга бўлади.

Агарда $\beta_0 U(b)+\beta_1 U'(b)=0$ бўлса, чегаравий масала ёки ечимга эга эмас ёки чексиз кўп ечимларга эга бўлади. Бу усул назарий жиҳатдан соддалиги учун жуда қулай бўлиб, кўпгина ҳолларда аниқлиги яхши бўлган натижаларга олиб келади, аммо айрим ҳолларда катта хатоликларга ҳам олиб келиши мумкин. Чунки, (10.8) тенгламанинг ечими $U(x)$, $x$ нинг ўсиши билан абсолют қиймати бўйича ўса бошлайди, айниқса бу ўсиш $P(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқда қиймати катта бўлган ҳолда, жуда ҳам тез бўлади. Шунинг учун сонли усуллар ёрдамида тез ўсувчи ечимни қидирганда $[a;b]$ кесманинг охири $x=b$ нуқтасида катта хатоликка олиб келади. Бу эса (10.13) формуладан $C$ ўзгармас сонни қўполлик билан топишга олиб келади. Яъни, чегаравий масалани ечишда катта хатоликка олиб келади. Бундай қийинчиликдан қутилиш йўлларидан бири сифатида дифференциал прогонка усули тавсия қилинган. Бу усулнинг ғояси асосида чегаравий иккинчи тартибли дифференциал тенгламани ечиш масаласи, учта биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларга - Коши масалаларини ечишга келтирилади. Фараз қилайлик, (10.3) тенгламанинг $y(x)$ ечими ва унинг биринчи дифференциали қуйидагича чизикли боғланган бўлсин:

$$y'(x)=A(x)y(x)+B(x), \qquad (10.14)$$

бу ерда, $A(x)$ ва $B(x)$ функциялар кейинчалик аниқланадиган номаълум функциялардир. (10.14) тенгламани яна бир марта дифференциаллаймиз, яъни, $y''(x)=(A'(x)+A^2(x))y(x)+A(x)B(x)+B'(x)$. $y'(x)$ ва $y''(x)$ ларни (10.3) га қўйсак, қуйидаги дифференциал тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\left[A'(x)+A^2(x)\right]y(x)+A(x)B(x)+B'(x)+P(x)\left[A(x)y(x)+B(x)\right]+q(x)y(x)=f(x). \text{ ёки}$$

$$\left[A'(x)+A^2(x)+p(x)A(x)+q(x)\right]y(x)+B'(x)+(A(x)B(x)+p(x)B(x)=f(x),$$

бу ерда $y(x)$ ечим нолдан фарқли бўлганлиги учун қуйидагини ёзиш мумкин:

$$A'(x)=-A^2(x)-p(x)A(x)-q(x), \qquad (10.15)$$

$$B'(x)=f(x)-A(x)B(x)-p(x)B(x). \qquad (10.16)$$

Бу тенгламалар учун бошланғич шартни $x=a$ нуқтада (10.6) ифодаларининг биринчи тенгламасидан фойдаланиб топамиз:

$$\alpha_0 y(a)+\alpha_1\left[A(a)y(a)+B(a)\right]=\gamma_0, \text{ ёки } \left[\alpha_0+\alpha_1 A(a)\right]y(a)+\alpha_1 B(a)=\gamma_0.$$

Бу ердан қуйидагиларни ёзиб оламиз:

$$\alpha_0+\alpha_1 A(a)=0, \quad \alpha_1 B(a)=\gamma_0, \qquad (10.17)$$

демак,

$$A(a)=-\alpha_0/\alpha_1, \quad B(a)=\gamma_0/\alpha_1. \qquad (10.18)$$

Шундай қилиб, (10.5), (10.6) масала (10.15)-(10.16) биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни ва (10.17)-(10.18) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $A(x)$, $B(x)$ функцияларни топишга келтирилди. $A(x)$, $B(x)$ функцияларни $[a,b]$ оралиқда топгандан сўнг $x=b$ бўлганда (10.14) дан

$$y'(b)=A(b)y(b)+B(b) \qquad (10.19)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Шу билан (10.6) чегаравий шартдан фойдаланиб (10.17) бошланғич шарт ёрдамида (10.15) ва (10.16) тенгламаларни ечиб, $[a,b]$ кесманинг чап қисмидан ўнг қисмига ҳайдаб ўтиб тўғри ҳайдашни (прогонкани) амалга оширдик. Энди (10.19) ифода ва $x=b$ нуқтада (10.6) чегаравий шартдан фойдаланиб, $y(x)$ функциянинг $[a;b]$ кесмани ўнг томонидаги, яъни $x=b$ нуқтадаги қийматини топамиз

$$y(b)=\frac{\gamma_1-B(b)\beta_1}{\beta_0+\beta_1A(b)}. \qquad (10.20)$$

Демак, (10.14) дифференциал тенглама учун (10.20) ифода бошланғич шарт бўлади ва яна Коши масаласи ҳосил бўлади. (10.14 ) тенгламани ўнгдан чапга қараб интеграллаб, (10.5-10.6) чегаравий масаланинг ечимини топамиз. Бу жараёнга тескари ҳайдаш дейилади.

(10.14)-(10.20), (10.15), (10.17), (10.16), (10.18) Коши масалаларига ўхшаш масалалар учун, ечиш жараёнида тез ўсувчи ечим учрамаслиги ва бу масалаларни ечишда сонли усулларнинг қўлланилиши катта хатолар йиғилишига олиб келмаслиги, яъни ҳайдаш (прогонка) усули турғун эканлиги назарий томондан исбот қилинган.

## 10.3. Чекли айирмалар (тўр) усули

Биз бу қисмда юқорида берилган (10.3), (10.4) чегаравий масалани чекли айирмалар (тўр) усули билан ечишни қараймиз. Иккинчи тартибли дифференциал тенглама

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (10.21)$$

ва чегаравий шартлар берилган:

$$\alpha_0y(a)+\alpha_1y'(a)=\gamma_0, \quad \beta_0y(b)+\beta_1y'(b)=\gamma_1. \qquad (10.22)$$

Бу масалани тақрибий усул - чекли айирмалар усули билан ечиш учун берилган $[a;b]$ оралиқни узунлиги бир хил $h$ қадам билан $n$ та бўлакка бўлиб чиқамиз:

$$x_i=x_0+ih,\ (i=\overline{1,n};\ x_0=a,\ x_1=h,\ x_2=2h,\dots,\ x_r=rh,\dots,x_n=nh=b),\ h=(b-a)/n.$$

У ҳолда $x_i$ нуқталарга мос бўлган $p(x_i)$, $q(x_i)$, $y(x_i)$, $f(x_i)$ функцияларни қуйидагича белгилаймиз:

$$y_i=f(x_i),\ p_i=p(x_i),\ q_i=q(x_i),\ f_i=f(x_i).$$

Юқоридаги (10.21) тенгламада қатнашадиган ҳосила $y'$ ва $y''$ ларни уларга мос келадиган чекли айирмалар билан алмаштирамиз:

$$y'\approx\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}, \quad y''\approx\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}.$$

Оралиқнинг четки $x_0=a$ ва $x_n=b$ нуқталарида $y'$ ҳосила қуйидагича чекли айирмалар билан алмаштирилиши мумкин:

Биринчи тартибдаги аниқликда олинса,

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \qquad y_n' \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Иккинчи тартибдаги аниқликда олинса,

$$y_0' \approx \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \qquad y_n' \approx \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}.$$

У ҳолда (10.21) ва (10.22) тенгламаларга мос бўлган чекли айирмали тенгламалар қуйидагича ёзилади:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\alpha_0 y_0 + \frac{\alpha_1 (y_1 - y_0)}{h} = \gamma_0, \qquad \beta_0 y_n + \frac{\beta_1 (y_n - y_{n-1})}{h} = \gamma_1.$$

Ёки $\alpha_0 y_0 + \alpha_1(-y_2 + 4y_1 - 3y_0)/(2h) = \gamma_0, \qquad \beta_0 y_n + \beta_1(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2})/(2h) = \gamma_1.$

Бу ифодаларни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -d_i, \qquad (10.23)$$

$$y_0 = x_1 y_1 + \mu_1, \; y_n = x_2 y_{n-1} + \mu_2, \qquad (10.24)$$

бу ерда,

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}, \quad b_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}, \quad x_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0 h}, \quad x_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_0 h + \beta_1},$$

$$c_i = \frac{2}{h^2} - q_i, \quad d_i = -f_i, \quad \mu_1 = \frac{\gamma_0 h}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad \mu_2 = \frac{h\gamma_1}{h\beta_0 + \beta_1}$$

Биз (10.24) чегаравий шартларни соддалик учун ҳосилаларни биринчи тартибли аниқликда акслантирган ҳол учун ёздик. Шундай қилиб, биз (10.21), (10.22) чегаравий масалани (10.23), (10.24) чекли айирмали чегаравий масалага келтирдик. Бу чекли айирмали чегаравий масала, чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ташкил қилиб, унинг матрицаси ўлчами $(n+1)(n+1)$ бўлган, уч диагоналли матрицадан иборат. Яъни бу матрицани $A$ десак,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_i & -c_i & b_i \ldots 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-1} & -c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -\chi_2 & 1 \end{pmatrix},$$

у ҳолда (10.23) системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$AY = f, \qquad (10.25)$$

бу ерда, $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$, $f = (\mu_1, -f_1, \ldots, -f_{n-1}, \mu_2)$ векторлардир.

Агар (10.22) чегаравий шартларда $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ бўлса, у ҳолда A матрицани ўлчами $(n-1)(n-1)$ га тенг бўлади. Чекли айирмали чегаравий масала

(10.23), (10.24) ни, яъни (10.25) алгебраик тенгламалар системасини ечиш учун ўзгарувчиларни йўқотиш усули, яъни прогонка (ҳайдаш) усулидан фойдаланамиз. Фараз қилайлик, изланаётган $y_i$ ва $y_{i+1}$ ечимлар ўзаро $G_{i+1}$, $S_{i+1}$ аниқмас коэффициентлар ёрдамида чизиқли боғланган бўлсин:

$$y_i = G_{i+1} y_{i+1} + S_{i+1} . \qquad (10.25)$$

Агар бу ифодани $i-1$ нуқтада ўринли десак, яъни $y_{i-1} = G_i y_i + S_i$ ва бу қийматни (10.23) алгебраик тенгламалар системасига қўйсак ва ҳосил бўлган ифодани $y_i$ га нисбатан ечсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_i = \frac{b_i}{c_i - a_i G_i} y_{i+1} + \frac{d_i + a_i S_i}{c_i - a_i G_i} .$$

Бу тенгликни (10.25) тенглик билан таққослаб, $G_{i+1}$ ва $S_{i+1}$ номаълумларнинг кўринишини топамиз:

$$G_{i+1} = b_i / (c_i - a_i G_i), \quad S_{i+1} = (d_i + a_i S_i)/(c_i - a_i G_i), \quad i = \overline{1, N-1} . \qquad (10.26)$$

Сўнгра (10.24) чегаравий шартлардан фойдаланиб, $i = 0$ бўлганда

$$G_1 = \chi_1 ; \quad S_1 = \mu_1 \qquad (10.27)$$

эканлигини топамиз. Демак, $G_1$ ва $S_1$ лар қийматини (10.27) формуладан билган ҳолда (10.26) формулалардан $i$ нинг $1,2,\ldots,n-1$ қийматларига мос $G_i$, $S_i$ ларнинг $x_i$ нуқталар тўпламидаги қийматларини кетма-кет ҳисоблаймиз. Шундай қилиб, $G_i$, $S_i$ ларнинг ҳамма нуқталардаги қийматлари ҳисоблагандан сўнг, изланаётган ечим $y_i$ (10.25) формула орқали $i+1$ дан $i$ га ўтиш (яъни, $y_{i+1}$ ни билган ҳолда $y_i$ ни топиш) йўли билан ҳисобланади. Бу ҳисоблашни амалга ошириш учун аввало $i = n$ нуқтада $y_n$ нинг қийматини ҳисоблаш лозим бўлади. Унинг учун (10.24) шартларни иккинчисидан ва (10.25) ифодани $i = n-1$ нуқтадаги қийматидан фойдаланилади, яъни $i = n-1$ бўлса, $y_{n-1} = G_n y_n + S_n$ бўлганлигидан ва демак, $y_n = \chi_2 y_{n-1} + \mu_2 = \chi_2 (G_n y_n + S_n) + \mu_2$ тенгликдан $y_n$ ни топамиз:

$$y_n = \frac{\mu_2 + \chi_2 S_n}{1 - \chi_2 G_n} . \qquad (10.28)$$

Юқорида келтирилган ҳисоблаш кетма-кетлигида $G_1$, $S_1$ қийматлардан фойдаланиб $G_2, S_2, \ldots, G_n, S_n$ ларни топишга тўғри юриш, $y_n$ қийматдан фойдаланиб $y_{n-1}, \ldots, y_0$ ларни топишга тескари юриш дейилади. Энди юқорида келтирилган прогонка формулаларини ҳисоблаш тартиби бўйича кетма-кет ёзиб чиқамиз:

$$G_1 = \chi_1 , S_1 = \mu_1 , \qquad (10.28)$$

$$\overset{(\to)}{G}_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i G_i}, \quad \overset{(\to)}{S}_{i+1} = \frac{d_i + a_i S_i}{c_i - a_i G_i}, \quad i = \overline{1, n-1} \qquad (10.29)$$

$$y_n = \frac{\mu_2 + \chi_2 S_n}{1 - \chi_2 G_n}, \quad \overset{(\leftarrow)}{y}_i = G_{i+1} y_{i+1} + S_{i+1}, \quad i = \overline{n-1, 0} \qquad (10.30)$$

Функциялар юқорисига қўйилган йўналиш белгиси ҳисоблашнинг йўналишини кўрсатиб туради, яъни $(\to)$ белги $i$ дан $i+1$ га қараб, $(\leftarrow)$ белги эса, $i+1$ дан

$i$ га қараб юришни кўрсатади. Бу ўринда (10.29) формуладан қачон фойдаланиш мумкин деган савол туғилади.

Албатта, аввалломбор бу формулаларнинг махражи $c_i - a_i G_i \neq 0$ бўлиши зарурдир. Бу шарт бажарилиш учун $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|$, $i = \overline{1, n-1}$; $|\chi_1| \leq 1$, $|\chi_2| \leq 1$, $|\chi_1| + |\chi_2| < 2$ тенгсизликлар ўринли бўлиши етарлидир.

Бу усул билан ҳисоблаш, айниқса электрон ҳисоблаш машиналари қўлланилганда жуда яхши натижалар беради.

Мисол. Прогонка усули билан $y'' + (x-1)y' + 3{,}125y = 4x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1{,}367$ чегаравий масаланинг тақрибий ечимини $h = 0{,}1$ қадам билан топинг.

Ечиш. Масала шарти бўйича

$P(x) = x - 1$, $q(x) = 3{,}125$; $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\gamma_0 = 1$, $a = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 1{,}367$; $b = 1$.

Масаланинг шартига асосан $h = 0{,}1$ бўлганлиги учун $[0;1]$ оралиқни 10 та бўлакка бўламиз, яъни $h = (b-a)/n$ формуладан $n = (1-0)/0{,}1 = 10$ бўлади, демак $x_i = x_0 + i \cdot 0{,}1$, $(i = \overline{0,10})$ ва $x_0 = 0$ эканлигидан $x_i = 0{,}1 \cdot i$. У ҳолда $P_i = x_i - 1 = 0{,}1 \cdot i - 1$, $q_i = 3{,}125$, $f_i = 4x_i = 0{,}4i$.

Прогонка формулаларидаги коэффициентларни кўринишини топамиз

$$b_i = \frac{1}{h^2} + \frac{P_i}{2h} = \frac{1}{(0{,}1)^2} + \frac{0{,}1i - 1}{2 \cdot 0{,}1} = 100 + (0{,}5i - 5) = 95 + 0{,}5i; \quad a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{P_i}{2h} = 105 - 0{,}5i;$$

$$c_i = \frac{2}{h^2} - q_i = 196{,}875, \quad d_i = -0{,}4i.$$

Прогонка формулаларининг бошланғич шартлари эса қуйидагиларга тенг бўлади: $G_1 = \chi_1 = 0$, $S_1 = \mu_1$, $y_{10} = 1$. Демак, ҳисоблаш жараёнининг тўғри юриш (10.29) формулаларининг кўриниши ушбу ҳолда қуйидагича бўлади:

$$G_1 = 0; \; S_1 = 1; \; G_{i+1} = \frac{95 + 0{,}5i}{196{,}875 - (105 - 0{,}5i)G_i}; \quad S_{i+1} = \frac{-0{,}4i + (105 - 0{,}5i)S_i}{196{,}875 - (105 - 0{,}5i)G_i}; \quad i = \overline{1,9}$$

Тескари юриш (10.30) формулаларининг кўриниши эса қуйидагича

$$y_{10} = 1, \; y_i = G_{i+1}y_{i+1} + S_{i+1}, \quad i = \overline{9,0},$$

бўлади. Ҳисоблаш натижаларини жадвал кўринишда ифодалаймиз.

| $i$ | $G_i$ | $S_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1,09356 |
| 1 | 0,4825396 | 0,531302 | 1,165210 |
| 2 | 0,6528014 | 0,3763824 | 1,209898 |
| 3 | 0,743862 | 0,297108 | 1,22609 |
| 4 | 0,804936 | 0,246492 | 1,217613 |
| 5 | 0,851127 | 0,208734 | 1,185352 |
| 6 | 0,889319 | 0,149544 | 1,164720 |
| 7 | 0,923096 | 0,121072 | 1,130595 |
| 8 | 0,954635 | 0,091963 | 1,087989 |
| 9 | 0,985497 | 0,060665 | 1,042504 |
| 10 | 1,017044 | 0,025460 | 1,000000 |

## 10.4. Галеркин усули

Юқорида келтирилган чекли айирмалар усули берилган чегаравий масаланинг жадвал кўринишидаги тақрибий ечимни топишга имкон беради.

Биз қуйида чегаравий масаланинг тақрибий ечимини аналитик кўринишда топишга олиб келадиган баъзи бир аналитик усулларни кўрамиз. Чунки айрим ҳолларда физика ва механика масалаларининг ечимини аналитик кўринишда ифодалаш қулайдир. Шундай хоссаларга эга бўлган усуллар: Галеркин усули, энг кичик квадрат усули, коллакация усули ва бошқалардир. Бу усуллар қўлланиши ва ишлатилиши жиҳатидан чекли айирмали ва шунга ўхшаш усулларга нисбатан камроқ қўлланилади, аммо ечимни аналитик кўринишда топишга имкон берганлиги сабабли маълум устунликларга эгадир. Шу усуллардан бири бўлган коллакация усулини қараймиз. (10.21), (10.22) дифференциал тенгламалар берилган бўлсин. Уларни кўринишини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$Z[y]=y''+P(x)y'+q(x)y=f(x), \qquad (10.31)$$

$$\Gamma_a[y]=\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=\gamma_0, \quad \Gamma_b[y]=\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=\gamma_1. \qquad (10.32)$$

Фараз қилайлик, (10.31), (10.32) чегаравий масала $[a;b]$ оралиқда ягона ечимга эга ва бу ечим биринчи, иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Қуйидаги $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ базис функцияларни танлаб оламиз. Бу функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

а) $\varphi_0(x)$ функция (10.32) бир жинсли мос чегаравий шартларни қаноатлантирсин: $\Gamma_a[\varphi_0(x)]=\gamma_0$, $\Gamma_b[\varphi_0(x)]=\gamma_1$.

$\varphi_i(x)$ функциялар эса бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирсин: $\Gamma_a[\varphi_0(x)]=0$, $\Gamma_b[\varphi_0(x)]=0, i=\overline{1,n}$;

б) $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ функциялар чизиқли боғланмаган функциялардир;

в) $\{\varphi_i(x)\}$ функциялар тўплами икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар классида тўлиқдир.

У ҳолда (10.31) тенгламанинг ечими шу базис координата функцияларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида изланади

$$y_n(x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x), \qquad (10.33)$$

бу ерда, $c_i$ лар номаълум коэффициентлардир. Изланаётган (10.33) ечим (10.32) чегаравий шартларни қаноатлантиради, яъни

$$\Gamma_a[y_n(x)]=\Gamma_a[\varphi_0(x)]+\sum_{i=1}^{n}c_i\Gamma_a[\varphi_i]=\gamma_0, \quad \Gamma_b[y_n(x)]=\Gamma_b[\varphi_0(x)]+\sum_{i=1}^{n}c_i\Gamma_b[\varphi_i]=\gamma_1.$$

(10.33) ечимни (10.31) га қўямиз, у ҳолда

$$Z[\varphi_0]+\sum_{i=1}^{n}c_iZ[\varphi_i]=f(x) \text{ ёки } Z[\varphi_0]+\sum_{i=1}^{n}c_iZ[\varphi_i]-f(x)=R(x,c_1,c_2,\ldots,c_n).$$

Бу тенгликни $[a,b]$ ораликнинг ички нуқталари тўплами $x_i$ да (бу нуқталарга коллакация нуқталари дейилади) нолга тенглаштирамиз, яъни

$$R(x_i, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{10.34}$$

Натижада биз $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ларга нисбатан алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз ва бу системадан $c_i$ ларни топиб, (10.33) га қўйиб тақрибий ечимни хисоблаш мумкин. Масалан, $[a,b]$ оралиқ учун $\varphi_i(x)$ функциялар системаси сифатида қуйидагиларни олиш мумкин. $\varphi_0(x) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{b-a}(x-a)$ $\varphi_i(x) = (x-a)(b-x)x^{i-1}$, ёки оралиқ $[0,\pi]$ бўлса, у холда $\varphi_0(x) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{b-a}(x-a)$, $\varphi_i(x) = \sin\left[i\pi\frac{x-a}{b-a}\right]$, $i = \overline{1,n}$, чунки бу функциялар юқоридаги ҳамма шартларни қаноатлантиради.

**Мисол.** Коллакация усули билан $y'' + (1+x^2)y' + y = -1$, $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$ чегаравий масаланинг тақрибий ечимини топинг.

**Ечиш.** Биз қараётган ҳол учун $P(x) = 1 + x^2$, $q(x) = 1$, $f(x) = -1$ $a = -1$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_0 = 0$, $b = 1$, $\gamma_1 = 0$ Базис функциялар сифатида қуйидаги функцияларни оламиз: $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_1(x) = 1 - x^2$, $\varphi_2(x) = (1 - x^2)^2$. Кўриниб турибдики, бу функциялар чегаравий шартларни қаноатлантиради ва чизиқли ўзаро боғланмаган ҳамда биринчи ва иккинчи тартибли дифференциаллари мавжуд функциялардир. Демак, ечимни $y(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i\varphi_i(x) = c_1(1-x^2) + c_2(1-x^2)^2$ кўринишда қидириш мумкин. Биз бу ерда соддалик учун фақат иккита базис функцияларни танлаб олдик. Бундай функцияларни ихтиёрий $n$ та қилиб танлаб олиш мумкин. Ечимни дифференциаллаймиз ва берилган тенгламага қўямиз:

$$y'(x) = c_1(-2x) - 2c_2(1-x^2)2x, \quad y''(x) = 2c_1 - 4c_2(1-x^2) + 8c_2x^2 = -2c_1 + c_2(12x^2 - 4)$$

$$-2c_1 + c_2(12x^2 - 4) + (1+x^2)(-2c_1x - 4c_2(1-x^2)) + c_1(1-x^2) + c_2(1-x^2)^2 = -1$$

ёки $R(x, c_1, c_2) = 1 - c_1 - 2c_1x - c_1x^2 - 2c_1x^3 - 7c_2 + 10c_2x^2 + 5c_2x^4$

Коллакация нуқталар сифатида $x_0 = 0$, $x_2 = -0{,}5$ нуқталарни танлаб оламиз. $R(x)$ функцияни коллакация нуқталарида ҳисоблаб нолга тенглаштирсак.

$$\begin{cases} 1 - c_1 - 7c_2 = 0 \\ 1 - 7c_2 + \frac{5}{2}c_1 + \frac{5}{16}c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - c_1 - 7c_2 = 0 \\ -67c_2 + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - c_1 - 7c_2 = 0 \\ c_2 = 16/67 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -\frac{45}{67}, c_2 = \frac{16}{67}.$$

Демак, тақрибий ечим

$$y(x) = \frac{16}{67}(1-x^2)^2 - \frac{45}{67}(1-x^2).$$

Юқорида келтирилган (10.31), (10.32) чегаравий масалани Галеркин усули билан ечиш учун $\varphi_i(x)(i = \overline{0,n})$ базис функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантириши шарт:

а) Базис функциялар системаси ортогоналдир, яъни

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ агар } i \neq j, \\ \neq 0, \text{ агар } i = j. \end{cases}$$

б) Базис функциялар системаси тўлиқдир, яъни $\varphi_i(x)$, $(i=\overline{0,n})$ функцияларга ортогонал бўлган нолдан фарқли бошқа функциялар мавжуд эмас.

в) Базис функцияларнинг чекли қисми $\{\varphi_i(x); (i=\overline{0,n})\}$ шундай танлаб олинадики. $\varphi_0(x)$ функция бир жинслимас чегаравий шартларни қаноатлантирсин: $\Gamma_a[\varphi_0(x)]=\gamma_0, \Gamma_b[\varphi_0(x)]=\gamma_1$; $\varphi_i(i=\overline{0,n})$ функциялар эса бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирсин: $\Gamma_a[\varphi_i(x)]=\Gamma_b[\varphi_i(x)]=0, (i=\overline{0,n})$. У ҳолда ечим қуйидаги кўринишда изланади:

$$y(x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x). \qquad (10.35)$$

Бу ифодани (10.31) га қуйиб, натижани $R$ билан белгилаймиз ва $c_1, c_2, \ldots, c_n$ коэффициентларни шундай танлаймизки, $R(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ функция энг кичик қийматига эга бўлсин. Бунинг учун, $R$ функциянинг $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ функциялар билан ортогонал бўлиши етарлидир, яъни

$$\int_a^b \varphi_1(x)R(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)dx = 0,$$

$$\int_a^b \varphi_2(x)R(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)dx = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_a^b \varphi_n(x)R(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)dx = 0,$$

ёки бу тенгламаларни бошқача кўринишда ёзадиган бўлсак,

$$\int_a^b \{Z[y]-f\}\varphi_k(x)dx = 0, \quad k=1,2,\ldots \qquad (10.36)$$

яъни, $\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \varphi_k(x) Z[\varphi_i(x)]dx = \int_a^b \varphi_k(x)\{f(x)-Z[\varphi_0]\}dx$.

Демак, $c_i$ коэффициентларни аниқлаш учун чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўлдик. Охирги тенгламалар системасидан $c_i$ лар топилгандан сўнг (10.35) га $c_i$ ларни қийматларини қўйсак, (10.31), (10.32) чегаравий масаланинг тақрибий ечимига эга бўламиз Бу тақрибий ечим аниқ ечимга, $n$ нинг етарли катта қийматларида яқинлашади.

Мисол. Галеркин усули билан $y''-y'\cos x+y\sin x=\cos x$, $y(-\pi)=y(\pi)=2$ чегаравий масаланинг тақрибий ечимини топинг.

Ечиш. Базис функциялар сифатида қуйидаги тригонометрик функцияларни оламиз: $\varphi_0=2$; $\varphi_1=\sin x$; $\varphi_2=\cos x+1$; $\varphi_3=\sin 2x$; $\varphi_4=\cos 2x-1$ Бу функциялар $[-\pi,\pi]$ кесмада чизиқли боғланмаган ва $\varphi_0$ функция чегаравий шартни қаноатлантиради, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_i$ функциялар эса чегарада ноллик шартни қаноатлантиради. Демак, ечимни қуйидаги кўринишда қидирамиз,

$$y=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{4}c_i\varphi_i(x)=2+c_1\sin x+c_2(\cos x+1)+c_3\sin 2x+c_4(\cos 2x-1)$$

Бизнинг мисолимизда $Z[y]=y''-y'\cos x+y\sin x$. Базис функцияларнинг ҳосилаларини топамиз:

$$\varphi_0'=0,\ \varphi_0''=0,\ \varphi_1'=\cos x,\ \varphi_1''=\sin x,\ \varphi_2'=-\sin x,\ \varphi_2''=-\cos x,\ \varphi_3'=2\cos 2x,$$

$$\varphi_3''=-4\sin 2x,\ \varphi_4'=-2\sin 2x,\ \varphi_4''=-4\cos 2x.$$

Сўнгра $Z[\varphi_i]$ функционалларини ҳисоблаймиз:

$$Z[\varphi_0]=0-0\cos x+\varphi_0\sin x=\varphi_0\sin x=2\sin x;\ Z[\varphi_1]=-\sin x-\cos x\cos x+\sin x\sin x=-\sin x-\cos 2x,$$

$$Z[\varphi_2]=-\cos x+\sin x\cos x+(\cos x+1)\sin x=\sin x-\cos x+\sin 2x;$$

$$Z[\varphi_3]=-4\sin 2x-2\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x=-\frac{1}{2}\cos x-4\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 3x;$$

$$Z[\varphi_4]=-\frac{1}{2}\sin x-4\cos 2x+\frac{3}{2}\cos 3x;\ f(x)=-Z[\varphi_0]=\cos x-2\sin x.$$

Энди (10.36) формуладаги интегралларни қуйидагича белгилаймиз:

$$a_{ik}=\int_a^b\varphi_i(x)Z[\varphi_k]dx,\qquad b_i=\int_a^b\varphi_i(x)\{f(x)-Z[\varphi_0]\}dx.$$

Бу $a_{ik}$, $b_i$ интегралларни ҳисоблаш учун $1$, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$ функцияларнинг ортогоналлигини ҳисобга оламиз ва $k$ нинг $k=1,2,3,4$ қийматларида ҳисоблаймиз:

$$b_1=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(x)\{f(x)-Z[\varphi_0]\}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\{\cos x-2\sin\}dx=\int_{\pi}^{\pi}\sin x\cos x dx-\int_{-\pi}^{\pi}2\sin^2 x dx=$$

$$=\frac{\sin^2 x}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-2\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{\sin 2x}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}(0+0)-2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\quad -2\pi;$$

$$b_2=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_2(x)(\cos x-2\sin x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x+1)(\cos x-2\sin x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx-2\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin x dx+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx-2\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-2\sin^2\frac{x}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi}+2\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi;$$

$$b_3=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_3(x)[f(x)-Z[\varphi_0]]dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x[\cos x-2\sin x]dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos x dx-2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\sin x dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos x dx-2\int_{\pi}^{\pi}\sin 2x\sin x dx=\left(-\frac{\cos 3x}{6}-\frac{\cos x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-2\left(-\frac{\sin 3x}{6}+\frac{\sin x}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{\pi}=0;$$

$$b_4=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_4(x)[f(x)-Z[\varphi_0]]dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2x-1)(\cos x-2\sin x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos x dx-2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\sin x dx-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx+2\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=\left(-\frac{\sin 3x}{6}+\frac{\sin x}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{\pi}-2\left(-\frac{\cos 3x}{6}+\frac{\cos x}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{\pi}-\sin x\Big|_{\pi}^{\pi}-2\cos x\Big|_{\pi}^{\pi}=0;$$

$$a_{11}=\int_{\pi}^{\pi}\varphi_1(x)Z[\varphi_1]dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x(-\sin x-\cos 2x)dx=-\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx-\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\sin x dx=-\pi;$$

$$a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(x)Z[\varphi_1]dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + 1)(-\sin x - \cos 2x)dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos x dx -$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx = 0;$$

$$a_{13} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_3(x)Z[\varphi_1]dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x(-\sin x - \cos 2x)dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 2x dx = 0 - 0 = 0;$$

$$a_{14} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_4(x)Z[\varphi_1]dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2x - 1)(-\sin x - \cos 2x)dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \sin x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 2x dx +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx = -\pi;$$

$$a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x)Z[\varphi_2]dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x(-\sin x - \cos x + \sin 2x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x dx = \pi;$$

$$a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(x)Z[\varphi_2]dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + 1)(-\sin x - \cos x + \sin 2x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin 2x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = 0 - \pi + 0 + 0 - 0 + 0 = -\pi;$$

$$a_{23} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_3(x)Z[\varphi_2]dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x(\sin x - \cos x + \sin 2x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x dx = \pi;$$

$$a_{24} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_4(x)Z[\varphi_2]dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2x - 1)(\sin x - \cos x + \sin 2x)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \cos 2x - \cos x \cos 2x + \sin 2x \cos 2x - \sin x + \cos x - \sin 2x)dx = 0;$$

$$a_{31} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x)Z[\varphi_3]dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\left(-\frac{1}{2}\cos x - 4\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 3x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx - \int_{-\pi}^{\pi} 4\sin x \sin 2x dx - \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0;$$

$$a_{32} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(x)Z[\varphi_3]dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + 1)\left(-\frac{1}{2}\cos x - 4\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 3x\right)dx = -\frac{\pi}{2};$$

$$a_{33} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_3(x)Z[\varphi_3]dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\left(-\frac{1}{2}\cos x - 4\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 3x\right)dx = -4\pi;$$

$$a_{34} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_4(x)Z[\varphi_3]dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2x - 1)\left(-\frac{1}{2}\cos x - 4\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 3x\right)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{\cos 2x \cos x}{2} - 4\cos 2x \sin 2x - \frac{3}{2}\cos 2x \cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + 4\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 3x\right)dx = 0;$$

$$a_{41} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x)Z[\varphi_4]dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\left(-\frac{\sin x}{2} - 4\cos 2x - \frac{3\cos 3x}{2}\right)dx = -\frac{\pi}{2};$$

$$a_{42}=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_2(x)Z[\varphi_4]dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x+1)\left(-\frac{\sin x}{2}-4\cos 2x+\frac{3}{2}\cos 3x\right)dx=0;$$

$$a_{43}=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_3(x)Z[\varphi_4]dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\left(-\frac{\sin x}{2}-4\cos 2x+\frac{3}{2}\cos 3x\right)dx=0;$$

$$a_{44}=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_4(x)Z[\varphi_4]dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2x-1)(-\frac{1}{2}\sin x-4\cos 2x+\frac{3}{2}\cos 3x)dx=-4\pi;$$

Бу қийматларни (10.36) формулага қўйишдан олдин унинг ёйилмасини ёзамиз.

$$c_1a_{11}+c_2a_{21}+c_3a_{31}+c_4a_{41}=b_1,$$
$$c_1a_{12}+c_2a_{22}+c_3a_{32}+c_4a_{42}=b_2,$$
$$c_1a_{13}+c_2a_{23}+c_3a_{33}+c_4a_{43}=b_3,$$
$$c_1a_{14}+c_2a_{24}+c_3a_{34}+c_4a_{44}=b_4.$$

У ҳолда

$$c_1(-\pi)+c_2\pi-c_4\frac{\pi}{2}=-2\pi,\quad c_2(-\pi)-c_3\frac{\pi}{2}=\pi,\quad c_2\pi-4c_3\pi=0,\quad c_1(-\pi)-4c_4\pi=0.$$

Демак, $-2c_1+2c_2-c_4=-4$, $2c_2-c_3=2$, $c_2-4c_3=0$, $c_1+4c_4=0$. Бу система дан $c_1,c_2,c_3,c_4$ ларнинг қийматларини топамз:

$$c_1=\frac{176}{49};\quad c_2=\frac{8}{7};\quad c_3=\frac{2}{7};\quad c_4=-\frac{44}{49}.$$

Уларни эътиборга олганда, изланаётган ечим

$$y=2+\frac{176}{49}\sin(x)+\frac{8}{7}(\cos(x+1)+\frac{2}{7}\sin(2x)-\frac{48}{49}(\cos(2x)-1)$$ кўринишда бўлади.

# 11-БОБ. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

## 11.1. Умумий тушунчалар

Жуда кўп физика, техника ва иқтисодиёт масалалари чизиқли ёки чизиқсиз хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга келтирилади. Бу тенгламалар математик физиканинг тенгламалари ҳисобланиб, параболик, гиперболик ва эллиптик хилларга бўлинади.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясида масалалар қўйилишининг хилма-хиллиги бизни қуршаб турган дунёнинг (воқеликни) турли хиллиги билан боғлиқдир. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг жуда кўп қисмининг аниқ ошкор кўринишдаги ечимини топиб бўлмайди. Шунинг учун хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишда тақрибий усуллар жуда кенг кўламда қўлланилмоқда. Ушбу тенгламаларни тақрибий ечиш усулларининг ривожланишига асосий сабаблардан яна бири, электрон ҳисоблаш машиналарининг янада ривожланиши ва такомиллашидир. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг тури кўп бўлганлиги учун, биз бу ерда ўқувчини кенг тарқалган хусусий ҳосилали иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар билан таништирамиз.

Биз бу ўринда ўқувчи кўп ўзгарувчили функция тушунчаси $f(x,y,z,...)$ ва функциянинг аргументлари бўйича олинадиган хусусий ҳосилалар тушунчасини ҳамда уларнинг турли тартибдаги ҳосилалари

$$f'_x=\frac{\partial f}{\partial x},\ f'_y=\frac{\partial f}{\partial y},\ f''_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ f''_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},...$$

ҳақида етарли маълумотларга эга деб фараз қиламиз.

Иккинчи тартибли чизиқли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2E(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+2\Phi(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+G(x,y)=F(x,y),\ (x,y)\in D. \quad (11.1)$$

Бунда, $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $E(x,y)$, $\Phi(x,y)$, $G(x,y)$ лар тенгламанинг коэффициентлари, $F(x,y)$ эса тенгламанинг озод ҳади ҳисобланади. Бу функциялар олдиндан берилган маълум функциялар бўлиб, ёпиқ $\overline{D}=D+\Gamma$ соҳада аниқлангандир. $D$ соҳа иккита $X$ ва $Y$ ўзгарувчиларнинг ўзгариш соҳаси бўлиб, $\Gamma$ контур билан чегарлангандир.

Юқоридаги (11.1) тенгламада қуйидагича операторли белгилашни киритамиз:

$$L(U)=A(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2E(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+2\Phi(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}+G(x,y)U.$$

У ҳолда (11.1) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$L(U) = F(x,y). \qquad (11.2)$$

Бу ерда, $L$ - дифференциал оператордир. Агар (11.1) тенгламада $B^2 - AC > 0$ бўлса, у ҳолда бу тенгламага $D$ соҳада гиперболик хилдаги тенглама; $B^2 - AC < 0$ бўлса, эллиптик хилдаги; $B^2 - AC = 0$ бўлса, параболик хилдаги тенглама дейилади.

Дифференциал тенгламанинг хилига қараб унга ҳар хил чегаравий ва бошланғич шартлар қуйилади. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар хилларининг вакилларига мисол сифатида қуйидаги тенгламаларни келтириш мумкин:

1. Тўлқин тарқалиш тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x,y),$$

бу тенгламада $A=1$, $B=E=\Phi=G=0$, $C=-1$, $F=f$ бўлиб, $B-AC=0-1(-1)=1>0$ бўлганлиги учун у гиперболик хилга киради.

2. Иссиқлик тарқалиш тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + f(x,y),$$

бу ерда, $A=1$, $B=0$, $C=0$, $E=0$, $G=0$, $\Phi=-\frac{1}{2}$, $F=f$ ва $B^2 - AC = 0 - 1\cdot 0 = 0$,

демак, бу тенглама параболик хилдаги тенгламадир (бу ерда $t$ иккинчи ўзгарувчидир).

2. Пуассон тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x,y),$$

бунда, $A=-1$, $B=0$, $C=1$, $F=f$, $E=\Phi=G=0$ ва $B^2 - AC = 0 - 1\cdot 1 = -1 < 0$

Демак, Пуассон тенгламаси эллиптик хилдаги тенгламадир.

## 11.2. Тўр тушунчаси ва тўр функцияси

Юқорида эслатиб ўтганимиздек, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани ечиш асосан тақрибий усуллар ёрдамида амалга оширилади. Бунга асосий сабаблардан бири, тенгламанинг коэффициентлари чизиқсиз, баъзан эса изланаетган функцияга ва унинг ҳосилаларига ҳам боғлиқ бўлишидир. Бундай ҳолларда умуман аналитик ечимлар қуриб бўлмайди.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишда энг кўп қўлланиладиган усуллардан бири - тўр усулидир. Бу усулни асосий моҳияти $D$ соҳада аниқланган (11.2) тенгламанинг узлуксиз $U(x,y)$ ечимни топиш масаласи, шу $D$ соҳада ётган дискрет нуқталар тўпламидан иборат бўлган $\omega_{h_1,h_2}$ соҳада аниқланган $U_{h_1,h_2} \approx U(ih_1, jh_2) \approx U(x,y)$ тақрибий ечимларни топиш масаля сига келтиришдан иборатдир.

Берилган дифференциал тенгламани тақрибий ифодаловчи айирмали тенгламани ёзиш учун иккита иш бажарилиши керак бўлади.

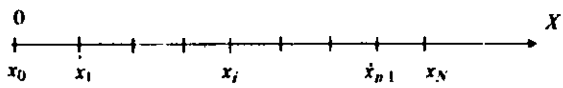
1. Аргументни узлуксиз ўзгариш соҳасини дискрет ўзгариш соҳасига алмаштириш.

2. Дифференциал операторларини айирмали операторларга, чегаравий ва бошланғич шартларни айирмали ўхшашликларига ўтказиш.

Бу ишлар амалга оширилгандан сўнг алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламани тақрибий ечиш масаласи алгебраик тенгламалар системасининг ечимини топиш масаласига келтирилади. Берилган дифференциал тенгламани сонли ечишда айирмали ечимни аргументнинг ўзгариш соҳасидаги ҳамма қийматлари учун ҳосил қилиб бўлмайди. Табиийки, бундай ҳолда шу соҳанинг қандайдир чекли нуқталар тўпламини олиб, тақрибий ечимни шу нуқталарда излаш лозим. Бу нуқталар тўпламига тўр деб аталади. Алоҳида олинган нуқталарга эса тўрни тугун нуқталари дейилади. Тўрни тугун нуқталарида аниқланган функцияга тўр функцияси дейилади. Шундай қилиб, аргументнинг узлуксиз ўзгарувчи соҳаси тўр билан алмаштирилади, яъни бошқача айтганда, дифференциал тенглама ечимининг фазоси тўр функцияси фазосига акслантирилади. Айирмали ечимнинг аниқ ечимга яқинлик масаласи тўрни танлашга боғлиқ.

**Мисол 1.** Кесмадаги текис тўр. Қаралаётган $[0,1]$ кесма $N$ та текис бўлакка бўлинади. $x_i$ ва $x_{i-1}$ қўшни нуқталар орасидаги $h = \varsigma_i - x_{i-1}$ масофага тўр қадами, $x_i = ih$ бўлиниш нуқталарига тўрни тугун нуқталари дейилади.

$\varpi_h = \{x_i = ih,\ i = 1,2,\dots,N-1\}$ нуқталар тўплами тўрни ташкил этади (19-чизма).




19-чизма.

Агар бу тўрга чегаравий $x_0 = 0$, $x_N = 1$ нуқталарни қўшсак, $\bar{\varpi}_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0, N-1}\}$ тўрни ҳосил қиламиз. Бу ҳолда $[0,1]$ кесмада аниқланган узлуксиз $U(x)$ функция ўрнига дискрет нуқталар тўплами $\bar{\varpi}_h$ да аниқланган $y_i = y_h(x_i) \approx U(ih)$ дискрет аргументли функция қаралади. Бу функциянинг қиймати $\varpi_h$ тўрни тугунлари $x_i$ да ҳисобланади ва $h$ - тўр қадамига боғлиқ бўлади.

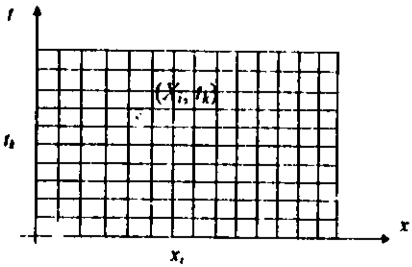
Умуман олганда тўр функциясини бутун аргумент $i$ ни функцияси сифатида ҳам қараш мумкин

$$y(i) = y_i,\quad i = 0,1,\ N$$

Агар $[0,1]$ оралиқни $N$ та бўлакка $x_i=\sum_{i=1}^{i} h_i$ нуқталар орқали бўлинса ҳосил бўлган тўр $\overline{\omega_h}=\{x_i,\ i=\overline{0,N}\}$ кесмадаги нотекис (текисмас) тўр дейилади. Бу ҳолда тўр қадами $h_i=x_i-x_{i-1}$ бўлиб, у $\sum_{i=1}^{N} h_i=1$ - шартни қаноатлантиради.

**Мисол 2.** Икки ўлчамли соҳадаги тўр.

Фараз қилайлик, $\overline{D}=\{x,t;\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ соҳада $U(x,t)$ функция аниқланган бўлсин. $x$ ва $t$ ўзгарувчиларни ўзгариш оралиқлари $[0,1]$ ва $[0,T]$ ларни $x_i=ih,\ (i=\overline{0,N_1}),\ t_k=k\tau\ (k=\overline{0,N_2})$ нуқталар ёрдамида $N_1$ ва $N_2$ та нуқталаридан координата ўқларига мос равишда параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларни кесишиш нуқталари $(x_i,t_k)$ тўрни ташкил қилади (20-чизма).



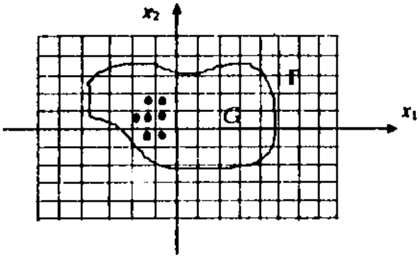

20-чизма.

Бу тўр $\overline{\omega_{h\tau}}=\{(x_i,t_k);\ x_i=ih,\ i=\overline{0,N_1},\ t_k=k\tau,\ k=\overline{0,N_2}\}$ деб белгиланади ва текис тўр (тенг ўлчамли тўр) деб аталади.

Агар текисликни координаталари $x=(x_1,x_2)$ бўлиб, шу текисликни $\Gamma$ чегарага эга бўлган бирор $G$ соҳасида $U(x_1,x_2)$ функция аниқланган бўлса, у ҳолда бу соҳада координата ўқларига параллел $x_1^{(i)}=ih_1$ ва $x_2^{(j)}=jh_2$ $(i=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $(j=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ тўғри чизиқлар ўтказиб, уларни кесишиш нуқталаридан ташкил топган, $(x_1,x_2)$ текисликдаги $(ih_1,jh_2)$ тугунлардан иборат нуқталар тўплами - тўрни ҳосил қиламиз. Тўр ҳар бир $0x_1$ ва $0x_2$ йўналиши бўйича бир хил ўлчамга эга бўлиб, у $\overline{G}=G+\Gamma$ соҳада ётган $\overline{\omega_h}=\omega_h+\gamma$ дискрет нуқталар тўпламини ифодалайди. Бу ерда

$$\omega_h=\{x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}\ \ x_1^{(i)}=ih_1,\ x_2^{(j)}=jh_2,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M}\}$$

тўрга кирган тугун нуқталар $G$ соҳага тегишли бўлиб, унга тўрни ички тугун нуқталари тўплами деб аталади. $\Gamma$ чегара билан $x_1^{(i)}=ih_1$ ва $x_2^{(j)}=jh_2$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталар тўпламини чегаравий тугун нуқталари деб аталади ва ҳамма чегаравий нуқталар тўпламини $\gamma_h$ деб белгилаймиз.




21-чизма.

Юқоридаги 21-чизмадан кўриниб турибдики, тўр қаралаётган соҳада $x_1$ ва $x_2$ лар бўйича текис бўлса ҳам $\overline{\omega}_k$ тўр чегара атрофида нотекисдир. Шундай қилиб, аргументларнинг узлуксиз ўзгарувчи $\overline{G}$ соҳаси шу $\overline{G}$ соҳага тегишли бўлган чекли $x_i$ нуқталар тўплами $\overline{\omega}_k$ тўр билан алмаштирилади. Узлуксиз ўзгарувчи $U(x_1,x_2)$ функция ўрнига $\omega_k$ тўр тугун нуқталари $\left(x_1^{(i)},x_2^{(j)}\right)$ да аниқланган $y_k = y\left(x_1^{(i)},x_2^{(j)}\right) = y(ih_1, jh_2)$ тўр функцияси қаралади.

Қаралаётган функция $y(x_i)$ ни вектор сифатида қараш мумкин. Агар ҳамма тугун $x_i$ нуқталарни қандайдир тартиб билан $x_1, x_2, \ldots, x_N$ номерлаб чиқилса, у ҳолда тўр функциясининг тугун нуқталаридаги қийматларини

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_N \end{pmatrix}$$

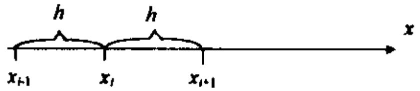
вектор компонентлари (ташкил этувчилари) сифатида қараш мумкин. Агар $G$ соҳа чекли бўлса, $\vec{y}$ векторни ўлчами $N$ чекли, $G$ чексиз бўлса, $G$ соҳада ётган тўрни тугун нуқталари чексиз кўп бўлганлиги учун $\vec{y}$ векторни ўлчами ҳам чексиз бўлади. Узлуксиз $U(x)$ функция $(x \in G)$ бирор функционал $H_0$ фазони элементи бўлганлиги учун, тўр функция $y_k(x)$ лари тўплами ҳам $H_k$ фазони ташкил қилади, Шундай қилиб, чекли айирмалар усули ёрдамида $H_0$ фазони тўр функцияси $y_k(x)$ нинг $H_k$ фазосига алмаштирилар экан.

## 11.3. Дифференциал операторларни аппроксимациялаш (алмаштириш)

Биз юқорида 10.3 бўлимда иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламани прогонка усули билан ечишда чекли айирмали тенгламаларнинг қисқача баёнини берган эдик. Қуйида биз хусусий ҳосилаларни чекли айирмалар билан алмаштиришни батафсил баён қиламиз.

Агар $U(x)$ функцияга таъсир қилувчи операторни $L$ десак, у ҳолда $LU$ ифодага кирган ҳосилаларни айирмалар билан алмаштириш натижасидан ҳосил бўлган $L_h U_h$ га айирмали ёки тўр оператори деб аталади. Аргументлари узлуксиз бўлган функциялар синфида берилган $L$ дифференциал оператор тўр функцияларида аниқланган $L_h$ айирмали операторга алмаштирилади (аппроксимацияланади). Бунинг учун $LU$ операторли ифодага кирган ҳар бир ҳосила айирмали нисбатларга алмаштирилади

1-мисол. $LU = \dfrac{dU}{dx}$ дифференциал қуйидагича айирмали нисбатларга алмаштирилари:



$$\frac{dU}{dx} \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} = U_x$$ - ўнг айирмали ифода ёки

$$U \approx L_h^{+} U. \qquad (11.3)$$

$$\frac{dU}{dx} \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = U_{\bar{x}},$$ - чап айирмали ифода ёки

$$LU \approx L_h^{-} U_i. \qquad (11.4)$$

Баъзан $\dfrac{dU}{dx}$ дифференциалнинг айирмали муносабати сифатида (11.3) ва (11.4) ифодаларнинг чизиғи комбинацияси $L_h^{(\sigma)} U = \sigma U_x + (1-\sigma) U_{\bar{x}}$ ни ҳам олиш мумкин. Бу ерда $\sigma$ - ихтиёрий ҳақиқий сон. Хусусий ҳолда $\sigma = 0$ бўлса, чап айирмали ифода, $\sigma = 1$ бўлса, ўнг айирмали ифода, $\sigma = 0{,}5$ бўлса, марказий (икки томонлама) айирмали ифодалар ҳосил бўлади:

$$U_x = \frac{1}{2}\left(U_x + U_{\bar{x}}\right) = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}. \qquad (11.5)$$

Бу ерда, $LU = U'$ тенгламани $L_h U$ айирмали ифода (11.2)-(11.5) кўринишда алмаштиришда қандай хатоликка йўл қўйилди деган савол туғилади. Бунинг учун $\psi(x) = L_h U - LU$ айирмани $h \to 0$ да $x$ нуқтадаги ҳолати ўрганилади. $\psi(x)$ функцияга $LU$ операторни $x$ нуқтадаги аппроксимация (алмаштириш) хатолиги дейилади. Хатоликни $h$ қадамга нисбатан тартибини аниқлаш учун $U_{i+1} = U(x+h)$ функциянинг $x_i$ нуқта атрофидаги Тейлор формуласи бўйича ёйилмаси

$$U_{i\pm1} = U(x_i \pm h) = U_i \pm hU_i' = \frac{h^2}{2} U_i'' + 0(h^3)$$

қаралади. У ҳолда (11.3)-(11.4) ва (11.5)дан:

$$U_x = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} = \frac{U_i + hU_i' + \dfrac{h^2 U_i''}{2} + 0(h^3) - U_i}{h} = U_i' + U_i'' h/2 + 0(h^2).$$

$$U_{\bar{x}} = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = \frac{U_i - U_i + hU_i' - \frac{h^2}{2}U_i''/2 + 0(h^3)}{h} = U_i' - h^2U_i'' + 0(h^2),$$

$$U_{\overset{\circ}{x}} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = \frac{U_i + hU_i' - h^2U_i''/2 + 0(h^3) - U_i + hU_i' - \frac{h^2}{2}U_i'' + 0(h^3)}{2h} = U_i' + 0(h^2).$$

Булардан алмаштириш (аппроксимация) хатолиги $\psi$ нинг тартибини топиш мумкин.

$$\psi = U_x - U' = 0(h), \quad \psi = U_{\bar{x}} - U' = 0(h), \quad \psi = U_{\overset{\circ}{x}} - U' = 0(h^2).$$

Демак, биринчи тартибли ҳосилани айирмали кўринишга алмаштириш (аппроксимациялаш) хатолиги ўнг ва чап айирмаларда $0(h)$ га марказий айирмада $0(h^2)$ га тенг бўлар экан. Бундан ташқари, ҳосилани айирма кўриниш га келтиришда ўнг ва чап айирмалари учун иккита, кетма-кет жойлашган тугун нуқталар ишлатилса, марказий айирма учун марказий нуқта $x_i$ га симметрик жойлашган $x_{i-1}$ ва $x_{i+1}$ нуқталар ишлатилади.

**Таъриф.** $L_h$ айирмали оператор $L$ дифференциал операторни $x$ нуқтада $m(m>0)$ -тартибда алмаштиради дейилади, агарда $\psi(x) = L_hU - LU = 0(h^m)$ бўлса.

**2-мисол.** $LU = \dfrac{d^2U}{dx^2}$ дифференциал оператор қуйидагича айирмали $L_hU$ операторга алмаштирилади. Иккинчи тартибли ҳосиланинг айирмали кўринишини ёзиш учун тўрнинг учта $x_{i+1}, x_i, x_{i-1}$ нуқталаридан фойдаланилади, яъни

$$L_hU = \frac{U_x - U_{\bar{x}}}{h} = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = U_{\bar{x}x}.$$

$U(x)$ функцияни Тейлор ёйилмасидан фойдаланиладиган бўлса,

$$U_{\bar{x}x} = U'' + \frac{h^2}{2}U^{(IV)} + 0(h^4),$$

у ҳолда алмаштириш хатолиги $\psi = U_{\bar{x}x} - U' = 0(h^2)$ иккинчи тартибга тенг бўлар экан. Агар тўр нотекис бўлса, яъни $h_i = x_i - x_{i-1} \neq h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, у ҳолда бу тўрга регулярмас тўр дейилади. Бу ҳолда $LU$ оператор,

$$L_hU = \frac{U_x - U_{\bar{x}}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\left[\frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+1}} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i}\right]$$

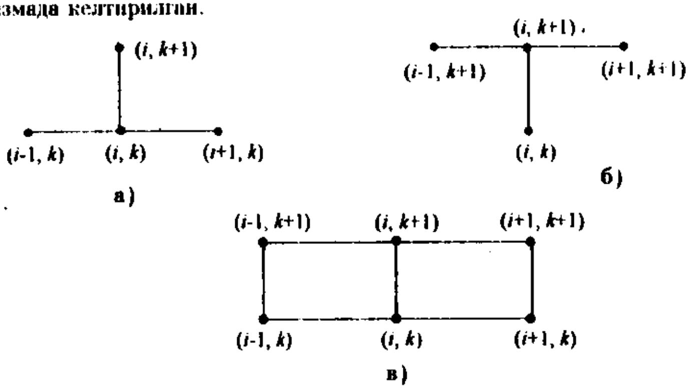
кўринишидаги айирмали операторга алмаштирилади, бу ерда қадам $\hbar = \dfrac{(h_i + h_{i+1})}{2}$ бўлиб, хатолик эса

$$U_x = U' + 0{,}5h_{i+1}U'' + \frac{h_{i+1}^2U'''}{6} + 0(h_{i+1}^3), \quad U_{\bar{x}} = U' - 0{,}5h_iU'' + \frac{h_i^2U'''}{6} + 0(h_i^3),$$

$$L_hU = \frac{(U_x - U_{\bar{x}})}{\hbar} = U'' + (h_{i+1}^2 - h_i^2)\frac{U'''}{6\hbar} + 0(h^2), \quad \psi = L_hU - LU = (h_{i+1} - h_i)\frac{U'''}{3} + 0(h^2) = 0(h)$$

га тенгдир. Яъни, регулярмас тўрда оператор алмаштириш хатолиги биринчи тартибга эга экан.

3-мисол. $LU = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ функция иккита $x$ ва $t$ аргументларга боғлиқ бўлиб, $L$ операторни айирмали кўринишини ёзиш учун тўрни икки қатламида жойлашган тўр тугун нуқталаридан фойдаланамиз. Бунинг учун тўртта нуқтадан ва 6 та нуқтадан фойдаланамиз. Қайси нуқталарни ишлатиш 22 чизмада келтирилган.




22-чизма.

Агар 22-чизмани а) шаклидаги тугун нуқталаридан фойдалансак, айирмали операторни кўриниши қуйидагича бўлади:

$$L_{h\tau}^{(0)}U = \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} - \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2}.$$

Соддалик учун $U = U_i^k$, $\hat{U} = U_i^{k+1}$, $\check{U} = U_i^{k-1}$ деб белгилаймиз, у ҳолда $t$ ўзгарувчининг айирмали ҳосиласи

$$U_t = \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \frac{\hat{U} - U}{\tau}.$$

Буни эътиборга олганда $L_{h\tau}^{(0)}U = U_t - U_{\bar{x}x}$ ҳосил бўлади. Агар 22-чизманинг б) шаклидаги тугун нуқталари ишлатиладиган бўлса, $L_{h\tau}^{(1)}U = U_t - \hat{U}_{\bar{x}x}$ айирмали тенгламани тузамиз. Бу ерда, $\hat{U}_{\bar{x}x}$ ифода $U_{\bar{x}x}$ ифодани $k+1$-қатламда олинган қийматидир. Юқоридаги $L_{h\tau}^{(0)}U$ ва $L_{h\tau}^{(1)}U$ ифодаларни чизиқли комбинациясидан

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}U = U_t - \left(\sigma \hat{U}_{\bar{x}x} + (1-\sigma)U_{\bar{x}x}\right)$$

кўринишдаги 22-чизманинг в) шаклидаги тугунларда аниқланган бир параметрлик айирмали операторлар оиласини ҳосил қиламиз.

Айирмали алмаштиришларнинг хатолик тартибини аниқлаш учун қуйидаги

$$U_t = U'_t + U''_{tt}\frac{\tau}{2} + 0(\tau^2) = \overline{U}'_t + 0(\tau^2),\ \overline{U}'_t = \left(U^{k+1/2}\right)'_t,$$

$U_{\bar{x}x} = U''_{xx} + h^2\dfrac{U^{IV}_{xxxx}}{12} + 0(h^4) = \overline{U}''_{xx} - \tau\dfrac{U'''_{xxt}}{2} + 0(h^2+\tau),\ \hat{U}_{\bar{x}x} = \overline{U}''_{xx} + \dfrac{\tau\overline{U}'''_{xxt}}{2} + 0(h^2+\tau^2)$ ёйилмаларни $L^{(0)}_{h\tau}U$, $L^{(1)}_{h\tau}U$, $L^{(\sigma)}_{h\tau}U$ айирмали операторларга қўямиз:

$$L^{(0)}_{h\tau}U = U'_t - U''_{xx} + 0(h^2+\tau) = LU + 0(h^2+\tau),\ \psi^{(0)} = L^{(0)}_{h\tau}U - LU = 0(h^2+\tau),$$

$$L^{(1)}_{h\tau}U = \hat{U}'_t - \hat{U}''_{xx} + 0(h^2+\tau) = L\hat{U} + 0(h^2+\tau),\ \psi^{(1)} = L^{(1)}_{h\tau}U - L\hat{U} = 0(h^2+\tau);$$

$$L^{(0,5)}_{h\tau}U = \overline{U}'_t - \overline{U}''_{xx} + 0(h^2+\tau^2) = L\overline{U} + 0(h^2+\tau^2),\ \psi^{(0,5)} = L^{(0,5)}_{h\tau}U - L\overline{U} = 0(h^2+\tau^2);$$

Шундай қилиб, $L^{(\sigma)}_{h\tau}$ оператор $L$ операторни $\sigma$ нинг ихтиёрий қийматида $h$ бўйича иккинчи тартиб билан, $\sigma = 0$, $\sigma = 1$ бўлганда $\tau$ бўйича биринчи тартиб, $\sigma = 0{,}5$ бўлганда, $\tau$ бўйича иккичи тартиб билан алмаштирар экан. Юқорида ҳосилаларни айирмаларга алмаштиришда биз хусусий, яъни нуқтадаги алмаштиришларни кўзда тутган эдик. Жумладан, айирмалар хатолиги ҳам шу маънода талқин қилинган эди. Умуман олганда айирмали алмаштиришларни тартибини бутун тўрда баҳолаш лозим бўлади.

Фараз қилайлик, $\omega_h$, $G$ Евклид фазосида $\{x = (x_1, \ldots, x_p)\}$ ги тўр бўлсин. $\omega_h$ тўрда аниқланган тўр функцияларининг чизиқли фазоси $H_h$ бўлсин. Узлуксиз $U(x)$ функцияларининг фазоси $H_0$ ундаги норма $\|\ \|_0$ деб қабул қиламиз. Тўр функцияларининг фазоси $H_h$ да нормани $\|\ \|_h$ деймиз. Қаралаётган фазода ихтиёрий $U \in H_0$ функция учун шундай $P_h$ оператор мавжуд бўлсинки:

1. $P_hU = U_h$.
2. Нормалар орасида ўзаро мослик ўрнатилган бўлсин.

$$\lim_{|h|\to 0}\|P_hU\|_h = \|U\|_0,$$

бу ерда, $|h|$ векторнинг нормаси. Киритилган тушунчалар ёрдамида дифференциал операторни айирмали операторга алмаштириш хатолиги тушунчасини қайтадан талқин қилиш мумкин. Яъни, $\psi_h = L_hU_h - (LU)_h$ тўр функциясига $L$ операторни $L_h$ айирмали операторга алмаштириш хатолиги дейилади. Бу ерда $U_h = P_hU$ ва $(LU)_h = P_h(LU)$ бўлиб, $U \in H_0$ га қарашли ихтиёрий функциядир. Агар $|h| \to 0$ да $\|\psi\|_h \to 0$ бўлса, $L_h$ айирмали оператор $L$ дифференциал операторни аппроксимациялайди (алмаштиради) дейилади. $L_h$ айирмали оператор $L$ дифференциал операторни $m > 0$-тартибда алмаштиради деймиз, агар

$$\|\psi_h\|_h = \|L_hU_h - (LU)_h\|_h = 0(|h|^m) \text{ ёки } \|L_hU_h - (LU)_h\| \le M|h|^m.$$

Бу ерда, $M$ доимий мусбат сон бўлиб, $|h|$ га боғлиқ эмас. Агар $\omega_h$ тўр текисмас тўр бўлса, яъни $h = (h_1, \ldots, h_N)$ ($N$-тўр тугунлар сони), у ҳолда $|h| = \max\limits_{1\le i\le N} h_i$ ёки $|h|$ сифатида ўрта квадратик қиймати олинади.

## 11.4. Айирмали масаланинг қўйилиши

Шу пайтгача биз тўрнинг кўринишлари, тўр функцияси ҳақида тушунча, дифференциал операторларни айирмали операторларга алмаштириш усулларини ўрганиб чиқдик. Математик физика масалалари дифференциал тенгламалардан ташқари бошланғич, чегаравий ва бошқа қўшимча шартлар билан биргаликда қаралиб, бу шартлар мавжуд ечимлар тўпламидан ягона ечимни ажратиб олишга ёрдам берди.

Шунинг учун айирмали масалаларни қўйишда дифференциал тенгламаларнинг айирмали оператор кўринишини ёзишдан ташқари дифференциал тенгламанинг ўнг қисмини ва қўшимча шартларни тўрда айирмали кўринишларга келтириш ва ундан кейин айирмали масалани қўйиш мумкин.

Асосий дифференциал тенгламани ва қўшимча (бошланғич ва чегаравий) шартларни аппроксимациялаш (алмаштириш) натижасида ҳосил бўлган айирмали тенгламаларга айирмали масала дейилади. Берилган тенгламаларни ва қўшимча шартларни айирмали тенглама кўринишида ёзиш қонуниятларига айирмали схемалар (разностная схема) дейилади.

Айирмали масаланинг қўйилишини қуйидаги мисолларда қараймиз.

**1-мисол.** Биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласи.

$$\frac{dU}{dx} = f(x),\ x > 0,\ U(0) = U_0. \tag{11.6}$$

Оддий текис $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1,\ 2, \ldots\}$ тўрни танлаймиз ва (11.6) Коши масаласига мос қуйидаги айирмали масалани қўямиз. $y_x = \varphi,\ y_0 = U_0$ ёки бунинг ёйилмаси қуйидагича $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \varphi_i$, $i = 0, 1 \ldots;$ $y_0 = U_0$ кўринишда бўлади. Бундан $y_{i+1} = y_i + h\varphi_i$, $i = 1, 2 \ldots$ ва $y_0 = U_0$ ни, яъни ечимни кетма-кет $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ҳисоблаб топиш мумкин бўлади. Бу ерда $\varphi_i$ ни турли хил ҳисоблаш мумкин, яъни $\varphi_i = f(x_i)$, $\varphi_i = 0{,}5(f(x_i) + f(x_{i+1}))$ ва $\varphi_i - f_i = O(h)$ шарт бажарилишини таъминлаш керак бўлади. Келгусида $y_i \approx U(x_i)$ деб қабул қиламиз.

**2-мисол.** Чегаравий масала.

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -f(x),\ 0 < x < 1,\ U(0) = \mu_1,\ U(1) = \mu_2. \tag{11.7}$$

Яна текис тўр $\bar{\omega}_h$ $\{x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h_N = 1\}$ ни танлаймиз, у ҳолда (11.7) га мос айирмали масала қуйидагича бўлади:

$$y_{\bar{x}x} = -\varphi,\ y_0 = \mu_1,\ y_N = \mu_2 \text{ ёки } y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -h^2\varphi_i,\ i = \overline{1, N-1}.$$

Натижада матрицаси уч диагонали алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системани прогонка усули билан ечиш мумкин.

3-мисол. Иссиқлик ўтказиш тенгламаси учун биринчи чегаравий масала:

$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)$, $x \in (0,1)$; $t \in (0,T]$ бошланғич шарти

$$U(x,0) = U_0(x),\ x \in [0;1] \qquad (11.8)$$

чегаравий шарт $U(0,t) = \mu_1(t),\ U(1,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T]$. Бу чегаравий масалага $\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i = ih,\ t_k = k\tau),\ i = \overline{0,N},\ k = \overline{0,N_0}\}$ текис тўрда қуйидаги айирмали чегаравий масалани мос қўямиз $\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k}{h^2} + \varphi_i^k$, $0 < i < N, k \geq 0$, ёки бундан

$$\left.\begin{aligned} & y_i^{k+1} = y_i^k + \frac{\tau}{h^2}\left(y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k\right) + \varphi_i^k \tau, \\ & y_0^k = \mu_1(t_k),\ y_N^k = \mu_2(t_k),\ y_i^0 = U_0(x_i) \end{aligned}\right\} \qquad (11.9)$$

Бу ерда $\varphi_i^k$ ни турли усулларда алмаштириш мумкин $\varphi_i^k = f(x_i, t_k)$, $\varphi_i^k = f\left(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}\right)$ ва ҳоказо.

Шундай қилиб, (11.9) айирмали чегаравий масалага (11.8) чегаравий масалани алмаштирувчи ошкор айирмали схема дейилади. Бу схемани қулайлиги, ечимни вақт бўйича юқори қатламдаги $y^{k+1}$ қиймати функцияни вақт бўйича олдинги қатламдаги $k$ қиймати орқали ошкор формула билан ҳисобланади. Агар айирмали масала ошкормас схема орқали қўйилса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}}{h^2} + \varphi^k,\ y_0^k = \mu_1(t_k),\ y_N^k = \mu_2(t_k),\ y_i^0 = U_0(x_i) \text{ ёки}$$

$$y_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \varphi,\ y(x,0) = U_0,\ y(0,t) = \mu_1(t),\ y(1,t) = \mu_2(t),\ t \in \omega_\tau,\ x \in \omega_h.$$

Ҳосил бўлган айирмали масалада $\hat{y} = y^{k+1}$ ечимни $(k+1)$ қатламдаги қийматини аниқлаш учун тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$\gamma \cdot y_{i-1}^{k+1} - (1 + 2\gamma)y_i^{k+1} + \gamma \cdot y_{i+1}^{k+1} = -F_i$, $i = \overline{1, N-1}$; бу ерда, $F_i = \tau\varphi^k + y_i^k$ ва $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$.

Натижада уч диагонали матрицага эга бўлган алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу система ҳам прогонка (хайдаш) усули билан ечилади. Фараз қилайлик, (11.8) чегаравий масалада биринчи чегаравий шарт ўрнига учинчи чегаравий шарт қўйилган бўлсин, яъни

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \sigma U|_{x=0} - \mu_1(x),\ U|_{x=1} = \mu_2(t)$$

Агар бу чегаравий масала учун ошкор схема ёзилган бўлса, $y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi$, $y(x,0) = U_0(x)$, $U(1,t) = \mu_2(t)$ бу схема $O(h^2 + \tau)$ алмаштириш хатолигига эга. Энди $x = 0$ нуктачаги чегаравий шартни ҳам ушбу хатоликда алмаштиришни қараймиз. Бунинг учун

$$U_{x,0}=\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}+\frac{h}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_{x=0}+0(h^2)$$

эканлигини эътиборга олиб, $x=0$ нуқтада, иссиқлик ўтказиш

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_{x=0}=\frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{x=0}-f\big|_{x=0}$$

тенгламасидан, $U_x\big|_{x=0}=-\frac{h}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\bigg|_{x=0}+\frac{h}{2}f\big|_{x=0}=\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}+0(h^2)$,

эканлигини, яъни $U_x\big|_{x=0}$ ифода $\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}$ ифодани $0(h^2)$ аниқликда алмаштириши топамиз. Агар, $\frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{x=0}$ ифодани $U_{t,0}=\frac{U_0^{k+1}-U_0^k}{\tau}$ айирмали ҳосила билан алмаштирсак, $x=0$ нуқтада

$$y_{x,0}=0{,}5\cdot hy_{t,0}+\sigma y_0-\bar{\mu}_1,\quad \bar{\mu}_1=\mu_2+0{,}5\cdot f(0,t)h \tag{11.10}$$

айирмали чегаравий шартни ҳосил қиламиз. Бу шарт берилган масаланинг ечимида $0(h^2+\tau^2)$ аниқликка эгадир. Агар ошкормас схема қаралса, $y_t=\hat{y}_{\bar{x}x}+\varphi$, (11.10) шарт ўрнига $y_{x,0}=0{,}5hy_{t,0}+\sigma\hat{y}_0+\hat{\bar{\mu}}_1$, $\bar{\mu}_1=\mu_1+0{,}5hf(0,t)$ шартни олиш керак.

## 11.5 Айирмали схеманинг яқинлашиши, аниқлиги ва турғунлиги

Ихтиёрий масалани тақрибий ечишда ҳамма вақт топилган ечимни ҳақиқий ечимга қандай аниқликда яқинлашиши муаммоси туради. Айтайлик, чегараси $\Gamma$ бўлган $G$ соҳада

$$LU=f(x),\ x\in G \tag{11.11}$$

чизиқли дифференциал тенгламанинг ечимини топиш керак бўлсин. Бу тенгламани ечими қўшимча

$$l\cdot U=\mu(x),\ x\in\Gamma \tag{11.12}$$

шартни қаноатлантирсин. Бунда $l$ - чизиқли дифференциал оператор. $f(x)$ ва $\mu(x)$ лар олдиндан берилган функциялар. Фараз қиламиз, (11.11)-(11.12) масаланинг ечим мавжуд ва ягонадир. Қаралаётган (11.11) (11.12) масалага мос айирмали масалани қараймиз

$$L_h y_h=\varphi_h,\quad x\in\omega_h,\quad l_h y_h=\aleph_h,\quad x\in\gamma_h, \tag{11.13}$$

бу ерда, $\omega_h$ - тўрнинг ички тугун нуқталари тўплами, $\gamma_h$ - чегаравий нуқталар тўплами, $\varphi_h,\aleph_h$ - кўринишш маълум бўлган тўр функциялари $L_h$ ва $l_h$ айирмали операторлар, $h$-тўр қадами. $y_h$-тўр функцияси бўлиб, (11.13) масаланинг ечимидир. Тўр қадами $h$ ни ўзгартириш йўли билан турли тўр $\omega_h$ ва шунга мос, $h$ параметрга боғлиқ $\{y_h\}$ ечимлар тўпламини ҳосил қиламиз.

Агар $U_h$ деб, (11.11)-(11.12) масаланинг ечими $U$ нинг $\omega_h$ тўрдаги қиймати десак $(U_h\in H_h)$, у ҳолда аниқ ечим $U_h$ билан тақрибий ечим $y_h$ ора сидаги четланишни $z_h = y_h - U_h$ деб белгилаймиз. Бу ифодадан $y_h$ ни топиб (11.13) га қўйсак, $z_h$ четланишга (хатоликка) нисбатан

$$L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega_h, \quad l_h z_h = \nu_h, \quad x \in \gamma_h, \qquad (11.14)$$

бу ерда, $\psi_h = \varphi_h - L_h U_h$, $\nu_h = \aleph_h - l_h U_h$ айирмали масалани ҳосил қиламиз. Бу ердаги $\psi_h$ ва $\nu_h$ лар (11.11)-(11.12) масалани (11.13) айирмали масалага алмаштириш хатолигидир. Умуман олганда $\psi_h$ га $L_h y_h = \varphi_h$ айирмали схемани (11.11) тенгламанинг ечими $U(x)$ даги хатолиги, $\nu_h$ га эса $l_h y_h = \aleph_h$ шарт учун (11.11)-(11.12) масаланинг ечимдаги аппроксимация хатолиги дейилади.

Айирмали схемани хатолиги $z_h$ ва $\psi_h$, $\nu_h$ аппроксимация хатоликларини баҳолаш учун тўр функциялар тўпламида $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}, \|\cdot\|_{(3)}$ нормаларни киритамиз.

Агар $|h| \to 0$ да $\|z_h\|_{(1)} = \|y_h - U_h\|_{(1)} \to 0$ бўлса, (11.13) айирмали масалани ечими (11.11)-(11.12) масаланинг ечимига яқинлашади дейилади ва бу ҳолда (11.13) яқинлашувчи схемадир. Агар ихтиёрий кичик $|h| < h_0$ учун $\|z_h\|_{(1)} = \|y_h - U_h\|_{(1)} \le M|h|^n$ ($M > 0$ - доимий сон бўлиб, $|h|$ га боғлиқ эмас) ўринли бўлса, (11.13) айирмали схема $O(|h|^n)$ тезликда яқинлашувчи ёки $n$-тартибли аниқликка эга дейилади. $f(x)$ ва $LU(x)$ ифодаларни $\omega_h$ тўрдаги қийматларини $f_h$ ва $(LU)_h$ десак ва $(f - LU)_h = 0$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\psi_h = (\varphi_h - L_h U_h) - (f_h - (LU)_h) = (\varphi_h - f_h) + ((LU)_h - L_h U_h) = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)}.$$

Демак, $\psi_h$ хатолик икки қисм: тенгламанинг ўнг томони $\psi_h^{(1)} = \varphi_h - f_h$ ва операторларни алмаштириш хатоликлардан $\psi_h^{(2)} = (LU)_h - L_h U_h$ иборат экан. Бу ерда қуйидаги савол туғилиши мумкин. Схемани аниқлик тартиби ечими аппроксимация қилиш тартибига боғлиқми? Хатолик $z_h = y_h - U_h$, ўнг томони $\psi_h$ ва $\nu_h$ лар (11.13) масаланинг ечими бўлганлиги учун аниқлик тартибини аппроксимация тартибига боғлиқлик масаласи, айирмали масаланинг ечими тенгламанинг ўнг томонига боғлиқлик даражасига келтирилади. Агар $z_h$ узлуксиз ($h$ бўйича текис) $\psi_h$ ва $\nu_h$ ларга (схема турғун) боғлиқ бўлса, у ҳолда аниқлик тартиби аппроксимация тартиби билан устма-уст тушади.

Юқорида эслатиб ўтганимиздек, айирмали схемаларни ишлатиш натижасида дифференциал тенгламаларни ечиш масаласи чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга келтирилади. Бунда тенгламанинг ўнг томони, бошланғич ва чегравий шартларда қиймати олдиндан бериладиган функциялар (бу қийматларни бошланғич қийматлар деб аташади) қандайдир хатолик билан берилади. Системани ҳисоблаш жараёнида ҳам яхлитлаш ҳисобига маълум хатоликларга йўл қўйилади.

Бу ерда айирмали масалага қўйиладиган асосий талаб, бошланғич қийматларда йўл қўйилган кичик хатолик ҳисоблаш жараёнида ошмаслиги ва ечимни бузмаслиги керак, яъни агар схема турғун бўлса, бошланғич қийматларни жуда кичик ўзгариши ечимни жуда кичик ўзгаришига олиб келади. Агар схема турғунмас бўлса, бошланғич қийматларнинг жуда кичик ўзгариши, етарли даражадаги майда тўрда, ечимни жуда катта ўзгаришига олиб келиши мумкин. Шу сабабли турғунмас схемани узоқлашувчи дейилади.

Айирмали масаланинг ечими бошланғич қийматларга ва тўр қадами $h$ параметрга боғлиқдир. Тўр қадами $h$ ни ўзгартириш орқали $\{y_h\}$ ечимлар тўпламини ҳосил қиламиз. Маълумки, математик физика масалаларида масала коррект (ихчам, аниқ) қўйилган дейилади, агарда қуйидаги иккита шарт бажарилган бўлса:

1. Қандайдир синфга тегишли бўлган ихтиёрий бошланғич қийматларда, қўйилган масала бир қийматли ечилади.

2. Масаланинг ечими бошланғич қийматларга узлуксиз боғлиқдир.

Худди шундай айирмали масалалар коррект қўйилган дейилади, агарда ихтиёрий $|h| \le h_0$ учун:

1. Қандайдир синфга тегишли бўлган ҳамма $\varphi_h$ бошланғич қийматлар учун айирмали масаланинг ечими $y_h$ мавжуд ва ягонадир.

2. $y_h$ ечим $\varphi_h$ га узлуксиз боғлиқдир ва бу боғлиқлик $h$ га нисбатан текисдир.

Айирмали масала ечимининг бошланғич қийматларга узлуксиз боғлиқлик хоссасига айирмали масаланинг (схемани) турғунлиги деб ҳам аталади. Аниқроқ қилиб айтганда, 2-шарт $h$ га боғлиқ бўлмаган шундай $M > 0$ доимий сон мавжуд бўлиб, ихтиёрий кичик $|h| \le h_0$ да

$$\|\tilde{y}_h - y_h\|_{(1)} \le M \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{(2)} \qquad (11.15)$$

тенгсизлик бажарилишини билдиради. Бу ерда, $\tilde{y}_h$ ечим бошланғич қиймати $\tilde{\varphi}_h$ бўлган айирмали масаланинг ечимидир. Агар $z_h = \tilde{y}_h - y_h$, $\psi_h = \tilde{\varphi}_h - \varphi_h$ десак,

$$\|z_h\|_{(1)} \le M \|\psi_h\|_{(2)} \text{ ёки } \|z_h\| \le M\left(\|\psi_h\|_{(2)} + \|\nu_h\|_{(2)}\right) \qquad (11.16)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан кўринадики, агар схема турғун бўлса ва берилган масалани аппроксимация қилса, у яқинлашувчидир (кўпгина ҳолларда аппроксимация ва турғунликдан яқинлашиш келиб чиқади дейилади), бундан ташқари схемани аниқлик тартиби (яқинлашиш тезлиги) унинг аппроксимация тартиби билан аниқланади. Демак, айирмали схемани яқинлашишини ва аниқлик тартибини ўрганиш, турғунлик ва аппроксимация хатолигини ўрганиш масаласига келар экан. Баҳолашнинг (11.15) кўринишига олдиндан (априор) баҳолаш дейилади.

Умуман (11.15) кўринишдаги олдиндан баҳолашни бажариш учун қўшимча математик формулалар: йиғинди формулалари, Гриннинг айирмали формулалари, жойлаштириш теоремасининг (теорема вложения) тўрдаги ўхшашлиги керак бўлади. Шулар ёрдамидагина оддий дифференциал тенгламаларининг айирмали ўхшашликларини баҳолаш мумкин.

# 12-БОБ. КОРРЕЛЯЦИЯ НАЗАРИЯСИ

## 12.1. Функционал, статистик ва корреляцион боғланишлар

Ҳаётда (турмушда) кузатилаётган ҳар бир ходисаларнинг рўй бериш ҳоллари маълум бир қонуниятларга бўйсинади. Бундай ходисаларнинг рўй бериши аниқ ҳисобга олинган факторлар билан боғлиқ бўлиб, уларнинг сонли муносабатлари, маълум бир аниқ характерга эга бўлади.

Биз иккита $X$ ва $Y$ ўзгарувчилар орасидаги функционал, статистик ва корреляцион боғланишларни қараб чиқамиз. Агар $X$ нинг бирор қийматига $Y$ нинг битта ёки бир нечта аниқланган қиймати мос келса, $X$ ва $Y$ ўзгарувчилар орасидаги боғланиш функционал боғланиш деб аталади. Мисол, ҳаво харорати билан термометрдаги симоб устуни орасидаги боғланиш функционал боғланишга мисол бўла олади. Умуман ҳақиқий функционал боғланишлар ҳаётда кам учрайди, чунки $X$ ва $Y$ ўзгарувчилар бошқа тасодифий факторларнинг таъсирига дучор бўлади. Бу факторлар ичида иккала $X$ ва $Y$ лар учун умумий бўлган факторлар учраниши мумкин. Бу ҳолда статистик боғланиш вужудга келади. Иккита миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг тақсимоти ўзгаришига олиб келса, бундай боғланиш статистик боғланиш деб аталади. Агар статистик боғланган миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг ўрта қийматининг ўзгаришига сабаб бўлса, бундай статистик боғланиш корреляцион боғланиш деб аталади. Мисол, айтайлик, $Y$ пахта ҳосили ва $X$ ўғитлар миқдори бўлсин. Биз бу ерда тушуниш осон бўлиши учун пахта ҳосилдорлигини фақат ўғитга боғланган деб оламиз ва қолган бошқа факторларни, масалан, сув, ишчи кучи, техника воситалари ва бошқаларни етарлича таъминланади деб ҳисоблаймиз. Маълумки, майдони бир хил бўлган пайкалларга бир хил ўғит солинганда ҳам, ҳар хил ҳосил олинади. Демак, $Y$ миқдор $X$ миқдорларнинг функцияси эмас экан. Албатта ҳосилдорликка бошқа факторлар ҳам таъсир қилиши мумкин, масалан, ёғингарчилик, ҳарорат ва бошқалар. Чунки бу факторларни инсон бошқара олмайди. Бунга қарамасдан тажриба шуни кўрсатадики, ўртача ҳосил, ўғитлар миқдорининг функциясидир. Демак, $Y$, $X$ миқдор билан корреляцион боғлангандир.

## 12.2. Корреляция назариясининг икки асосий масаласи

Текширилаётган $Y$ ва $X$ тасодифий миқдорлар корреляцион боғланган бўлсин. Айтайлик, $X$ нинг бирорта қийматига $Y$ нинг бир нечта қиймати мос келсин. Бу сонларнинг ўртача қийматини $\bar{y}_x$ деб белгиласак, унга шартли ўртача қиймат деб аталади.

Агар $\bar{y}_x$ шартли ўртача қиймат $x$ га функционал боғланса, у вақтда $Y$ ва $X$ ўзаро корреляцион боғланган деб аталади:

$$\bar{y}_x = f(x). \tag{12.1}$$

(12.1) тенглама $Y$ нинг $X$ га регрессия тенгламаси дейилади. $f(x)$ функция, $Y$ нинг $X$ га регрессияси, унинг графиги $Y$ нинг $X$ га регрессия чизиги дейилади.

Аксинча, $X$ нинг $Y$ га корреляцион боғланиши эса қуйидагича бўлади:

$$\bar{x}_y = \varphi(y). \tag{12.2}$$

Корреляция назариясининг иккита муҳим масаласи бўлиб, булар қуйидагидан иборат:

1. Корреляцион боғланиш формасини аниқлаш. Бу ерда регрессия функциясининг кўриниши аниқлаш керак. Булар чизиқли, квадратик, кўрсаткичли ва ҳоказо бўлиши мумкин.

Агар $f(x)$ ва $\varphi(y)$ регрессия функцияларининг иккаласи ҳам чизиқли бўлса, корреляция чизиқли боғланишга, акс ҳолда ночизиқли боғланишга эга дейилади.

2. Корреляция назариясининг иккинчи масаласи - корреляцион боғланишнинг зичлигини (кучини) аниқлашдир. $Y$ нинг $X$ га корреляцион боғлиқлигининг зичлиги, $Y$ нинг қийматлари $\bar{y}_x$ шартли ўртача қиймат атрофида тарқоқлигига қараб баҳоланади. Кўп тарқоқлик $Y$ нинг $X$ га кучсиз боғлиқлигини, кам тарқоқлик эса анча кучли боғлиқлик борлигини кўрсатади.

Корреляция назариясининг моҳияти, ўтказилган бир қатор тажрибалардан фойдаланиб тўғри чизиқли ёки эгри чизиқли тенгламаларининг параметрларини топишдан иборатдир. Бу параметрларни топиш учун кўпинча энг кичик квадратлар усули қўлланилади. Энг кичик квадратлар усули билан танишиб чиқамиз.

## 12.3. Энг кичик квадратлар усули

Кундалик ҳаётда татбиқ этилаётган ҳар қандай назарий моделларнинг барчаси физика қонунларига асосланиб яратилгандир. Биз ҳар қандай моделни тажриба ёрдамида текшириб, унинг тўғрилигини исбот қилишимиз мумкин, бунинг учун тажрибаларни шундай даврий равишда ўтказиш керакки, натижада модел физик жараёнларини яхшилашга ва унинг коэффициентларини аниқлашга ёрдам берсин. Кўпинча, турмушда кузатишлар ва тажрибалар орқали, эмпирик (тажриба) формулаларини келтириб чиқариш мумкин.

Масалан, ҳароратнинг кўтарилиши ёки аксинча пасайишини, симоб устунининг кўтарилишига ёки пасайишига қараб билиш мумкин. Демак, ҳарорат билан симоб устуни ўртасида чизиқли боғланиш борлигини тажриба орқали билиш мумкин.

Физика қонунларининг деярли ҳаммаси тажрибалар йўли билан асосланганлир. Масалан, Галилей томонидан кашф этилган жисмларнинг бўшлиқда (ҳавосиз идишда) эркин тушгандаги босиб ўтган йўлининг вақт билан боғланишидаги формуласида

$$S = \frac{1}{2} g t^2,$$

$g$ - пропорционаллик коэффициенти $g = 9{,}81$ м/с$^2$ тажрибалар йўли билан топилган.

Регрессия анализи - бу тажриба маълумотларидан энг кўп мос келадиган танланма бўйича модел тузиш усулига айтилади. Лекин, бундай яратилган модел берилган тажриба натижалари билан аниқ устма-уст тушади деган гап эмас. Моделни шундай тузиш керакки, модел билан исталган тажриба нукталари орасидаги фарқ энг кам қийматни қабул қилсин. Яъни, модел билан берилган маълумотлар орасидаги фарқ минимумга эришсин. Бундай масалаларни ечишда энг кичик квадратлар усули қўлланилади.

Энг кичик квадратлар усули биринчи марта 1974 йилда Гаусс томонидан ишлаб чиқилган бўлиб, айрим адабиётларда бу усул Гаусс усули деб аталади.

Энди энг кичик квадратлар усулининг моҳияти билан танишиб чиқамиз. Айтайлик, $X$ эркли ўзгарувчининг $n$ та қиймати берилган бўлсин: $x_1, x_2, \dots, x_n$ Бу эркли ўзгарувчиларга мос бўлган функциянинг қийматлари $y_1, y_2, \dots, y_n$ бўлсин. Биз, энди шундай $m$-тартибли $\varphi(x)$ кўпҳадни

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

аниқлайликки, бу кўпҳад $X$ нинг $x_i$ қийматларида, $Y$ нинг $y_i$ қийматларига тенг бўлсин, яъни

$$\left.\begin{aligned} a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_1 + a_m &= y_1, \\ a_0 x_2^m + a_1 x_2^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_2 + a_m &= y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 x_n^m + a_1 x_n^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_n + a_m &= y_n. \end{aligned}\right\}, \qquad (12.3)$$

бу ерда, $m+1$ номаълум коэффициентли $n$ та тенгламалар системаси ҳосил бўлди. Бу номаълум коэффициентлар қуйидагилар: $a_0, a_1, \dots, a_m$.

Умуман олганда, (12.3) тенгламалар системасини қўшимча шартларсиз ечиш мумкин эмас. Бу ерда, $\varphi_k(x)$ функция қуйидаги шартларга бўйсинсин. Яъни, $a_0, a_1, \dots, a_m$ коэффициентларни шундай танлаб олайликки, $\varphi(x_i) - y_i$ айирмаларнинг квадратлари йиғиндиси минимум қийматни қабул қилсин.

$$F = \sum_{i=1}^{n} (a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + a_2 x_i^{m-2} + \dots + a_m - y_i)^2 . \qquad (12.4)$$

Ушбу шарт бажарилиши учун, номаълум коэффициентлардан олинган хусусий ҳосилалар нолга тенг бўлиши:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial a_1}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial a_2}=0;\ldots,\quad \frac{\partial F}{\partial a_n}=0$$

зарур ва етарлидир. Бу $m+1$ номаълумли $m+1$ та тенгламалар системасини беради. Бошқача айтганда, $F(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ функция энг катта ёки энг кичик қийматга эришиши учун (бу математик анализ курсидан маълум) $a_0,a_1,\ldots,a_m$ номаълум коэффициентлар бўйича олинган хусусий ҳосилалар нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

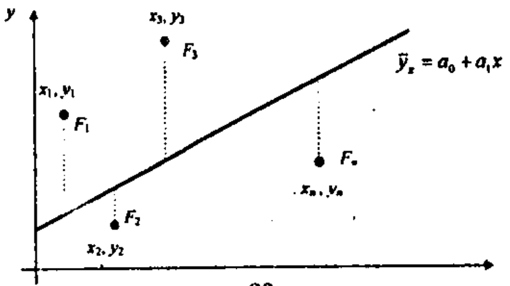
## 12.4. Чизиқли корреляция

Энди чизиқли корреляциянинг коэффициентларини энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб топамиз. $n$ та тажриба ўтказилган бўлиб, уларнинг натижалари мос равишда $(x_1;y_1),(x_2;y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ бўлсин. Шунингдек, математик модел ҳам чизиқли бўлсин:

$$\bar{y}_x=a_0+a_1x \qquad (12.5)$$

бу ерда, $\bar{y}_x$ - регрессия модели тўғри чизиқни ифодалайди. Биз (12.5) дан $a_0$ ва $a_1$ коэффициентларни аниқлашни мақсад қилиб қўямиз. 23-чизмада ясалган (12.5) тўғри чизиқ билан ҳар бир нуқта орасидаги масофалар айирмасининг квадратлар йиғиндисининг хатолари минимум бўлсин:

$$\bar{y}_1=a+a_1x_1,\quad \bar{y}_2=a_0+a_1x_2,\ \ldots,\quad \bar{y}_n=a_0+a_1x_n.$$




23-чизма.

Ҳар бир нуқтадан тўғри чизиқгача бўлган хатони (масофани) қуйидагича ифодалаймиз:

$$F_1=\bar{y}_1-y_1=a_0+a_1x_1-y_1,\quad \ldots,\quad F_n=\bar{y}_n-y_n=a_0+a_1x_n-y_n.$$

Умумий хато қуйидагича топилади $F=F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2$ ёки

$$F=(a_0+a_1x_1-y_1)^2+(a_0+a_1x_2-y_2)^2+\ldots+(a_0+a_1x_n-y_n)^2,$$

буни қисқача кўринишда ифодаласак

$$F=\sum_{i=1}^{n}(a_0+a_1x_i-y_i)^2$$

Биз $a_0$ ва $a_1$ коэффициентларнинг шундай қийматларини топайликки, натижада $F$ минимал қийматни қабул қилсин. Бунинг учун унинг хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

$$\frac{\partial F}{\partial a_0}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial a_0}=\frac{\partial}{\partial a_0}\sum_{i=1}^{n}(a_0+a_1x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_0}(a_0+a_1x_i-y_i)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2(a_0+a_1x_i-y_i)=2(na_0+a_1\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i)=0,$$

бундан

$$na_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a_1=\sum_{i=1}^{n}y_i \qquad (12.6)$$

шунингдек,

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_1}(a_0+a_1x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}2x_i(a_0+a_1x_i-y_i)=2a_0\sum_{i=1}^{n}x_i+2a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0,$$

бундан

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)a_0+(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)a_1=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \qquad (12.7)$$

Натижада икки $a_0$ ва $a_1$ номаълум коэффициентли, иккита тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$na_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a_1=\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a_1=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

Бу тенгламалар системасидан $a_0$ ва $a_1$ коэффициентларни аниқлаймиз.

$$a_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}, \qquad (12.8)$$

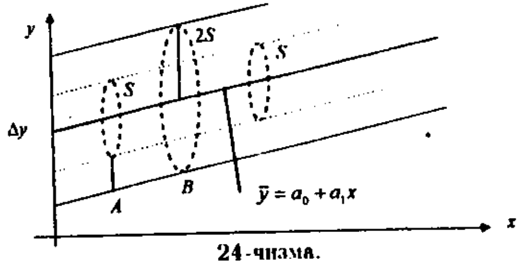
$$a_1=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}. \qquad (12.9)$$

Бу ерда $n$ - тажрибалар сони.

Одатда, амалиёт масалаларини ечишда, регрессия моделининг хатосининг ўлчови, стандарт (ўртача квадрат) четланиш $S$ орқали топилади:

$$S=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}F_i^2\right]^{\frac{1}{2}}}{n-2}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_0+a_1x_i-y_i)^2}{n-2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (12.10)$$

Агар текширилаётган жараён нормал тақсимотга эга бўлса, тажриба нуқталарнинг тақрибан 66 фоизи регрессия моделидан битта квадрат четланиш соҳасида жойлашади, нуқталарнинг 95 фоизи иккита квадратик четланиш соҳасида жойлашади. Агар бу айтганларни геометрик нуқтаи назардан тасаввур қиладиган бўлсак, нуқталарнинг 66 фоизи А қувурда (битта квадрат четланиш), шунингдек, нуқталарнинг 95 фоизи В қувурда (иккита квадрат четланиш) жойлашган бўлади (24-чизма).




24-чизма.

Стандарт четланиш - бу моделнинг ишочли эканлигини текширишда муҳим аҳамиятга эга.

Катта хатолик, регрессия модели тажрибалар жараёнининг натижаларини етарли даражада ифодаламаслигидадир. Лекин моделнинг катта хатоси бошқа сабабларга ҳам боғлиқ бўлиши мумкин. Масалан, тажрибалар сони камроқ бўлиши мумкин. Бундай ҳолларда регрессия моделининг хатосини камайтириш учун тажрибалар сонини кўпайтириш талаб қилинади.

**Мисол.** Лабораторияда ўтказилган тажрибаларнинг натижаси қуйидаги жадвалда берилган. Чизиқли регрессия моделининг коэффициентлари аниқлансин.

| $x$ | $y$ | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|
| 2,2 | 11,3 | 4,84 | 24,86 |
| 3,1 | 10,9 | 9,61 | 33,79 |
| 4,3 | 12,5 | 18,49 | 53,75 |
| 5,4 | 13,9 | 29,16 | 75,06 |
| 6,1 | 15,2 | 37,21 | 94,72 |
| 7,5 | 17,3 | 56,25 | 129,75 |
| 8,3 | 18,5 | 68,89 | 153,55 |
| 9,1 | 19,1 | 82,81 | 173,81 |
| 10,0 | 22,0 | 100,00 | 220,00 |
| 11,6 | 23,4 | 134,56 | 271,44 |
| $\sum_{1}^{n}$ 67,6 | 164,1 | 541,82 | 1230,73 |

Энди, биз жадвалдаги қийматлардан фойдаланиб (12.8) ва (12.9) формулалар ёрдамида $a_0$ ва $a_1$ коэффициентларни аниқлаймиз:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \sum_{i=1}^{10} x_i \sum_{i=1}^{10} x_i y_i}{10\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{10} x_i)^2} = \frac{164,1 \cdot 541,82 - 67,6 \cdot 1230,73}{10 \cdot 541,82 - (67,6)^2} = \frac{5715,31}{848,44} = 6,9;$$

$$a_1 = \frac{10\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \sum_{i=1}^{10} x_i \sum_{i=1}^{1} y_i}{10\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{10} x_i)^2} = \frac{10 \cdot 1230,73 - 67,6 \cdot 164,1}{10 \cdot 541,82 - (67,6)^2} = 2,71,$$

шундай қилиб, $a_0 = 6,9$; $a_1 = 2,71$. Демак, регрессия тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\bar{y}_x = 6,9 + ,271x.$$

Моделнинг ўртача квадрат четланиши $S - \pm 25,2$ га тенг. Бунинг маъноси шуки, тажриба натижаларининг 66 фоизи $\Delta y$ чегарада ётади, яъни $S = \pm 25,2$ ва 95 фоиз нуқталар эса $\Delta y = \pm 50,4$ чегарада ётади.

## 12.5 Чизиқли регрессия моделини ўртача қиймат орқали ифодалаш

Корреляция масаласини ечиш жараёнида ҳисоб ишларини енгиллаштириш учун, кўпинча координаталарнинг ўртача қийматлари ишлатилади. Яъни, янги бошланғич координаталар сифатида уларнинг ўртача тажрибавий қийматлари ишлатилади. Айтайлик, $X$, $Y$ лар илгари берилган қийматларнинг координаталари бўлсин ва $x'$, $y'$ - координаталар эса янги координаталар бўлсин. Ўртача қийматлар қуйидагича аниқланади:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

Координаталарни қуйидаги формулалар билан алмаштирамиз

$$x' = x - \bar{x}, \quad y' = y - \bar{y}. \qquad (12.11)$$

Янги координаталар бўйича регрессия модели қуйидагича аниқланади:

$$\hat{y}' = A_1 x',$$

бу ерда,

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'}{\sum_{i=1}^{n} (x_i')^2} \qquad (11.12)$$

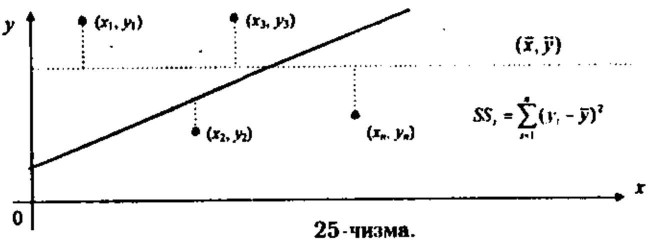
(12.11) ни (12.12) га қўйиб, регрессия тенгламаси моделини олдинги координаталар бўйича аниқлаймиз.

$$\hat{y} - \bar{y} = A_1(x - \bar{x}) \qquad (12.13)$$

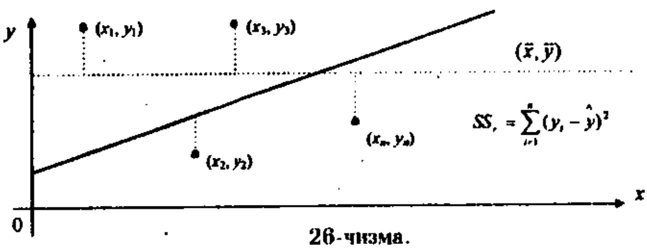
ёки $\hat{y} = \bar{y} + A_1(x - \bar{x}) = A_0 + A_1 x$, бу ерда $A_0 = \bar{y} - A_1\bar{x}$.

## 12.6. Регрессия моделининг ишончлилиги

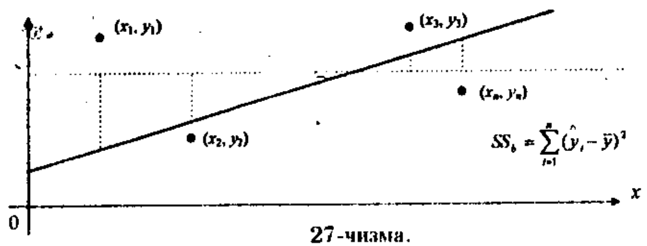
Регрессия модели тузилгандан кейин унинг ишончлилигини аниқлаш муҳим аҳамиятга эга. Бошқача айтганда, регрессия модели қандай аниқликда, етарлича тўғри эканлигини аниқлаш жуда муҳимдир. Регрессия моделининг аниқлигини ва ишончлилигини таҳлил қилиш учун қуйидаги чизмалардаги характеристикаларга эътибор қилишга тўғри келади.




25-чизма.




26-чизма.




27-чизма.

25-чизмада берилган нуқталар ўрта қиймати атрофида тарқалган

$$SS_t = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 .$$

26-чизмада берилган нуқталар регрессия чизиғи атрофида тарқалган

$$SS_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y})^2 .$$

27-чизмада регрессия тўғри чизиғи атрофида берилган қийматларнинг ўртача қийматининг тарқалиши ифодаланган.

$$SS_b = SS_r + SS_t .$$

Моделнинг ишончлик методикаси Файер томонидан ишлаб чиқилган.

**Мисол.** Қуйидаги $y = \varphi(x)$ биринчи даражали кўпҳад эркли $x$ нинг $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$ қийматларида, $y = \varphi(x)$ функция $y_1 = 0$; $y_2 = 1$; $y_3 = 3$; $y_4 = 5$ қийматларни қабул қилса, регрессия тенгламасини топинг.

**Ечиш.** Масала шарти бўйича, берилган биринчи жадвал кўпҳад $y = a_0 x + a_1$ кўринишда бўлади.

| № | $x$ | $y$ | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 9 | 9 |
| 4 | 4 | 5 | 16 | 20 |
| $\sum_{i=1}^{4}$ | 10 | 9 | 30 | 31 |

Олдинги формулалардан фойдаланиб, коэффициентларни аниқлаймиз:

$$\frac{\partial}{\partial a_0}\left(\sum_{i=1}^{4}(a_0 x_i + a_1 - y_i)^2\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\sum_{i=1}^{4}(a_0 x_i + a_1 - y_i)^2\right) = 0.$$

Дифференциаллаш амалларини бажариб, қуйидагига эга бўламиз:

$$a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i - \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 0, \qquad a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i + 4a_1 - \sum_{i=1}^{4} y_i = 0.$$

Бу тенгламалар системасига жадвалдаги йиғиндиларнинг қийматини қўйиб, содда тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$30a_0 + 10a_1 - 31 = 0,$$
$$10a_0 + 4a_1 - 9 = 0.$$

Бу системани ечиб, $a_0 = 1{,}7$ ва $a_1 = -2$ эканлигини аниқлаймиз. Демак, регрессия тенгламаси

$$y = \varphi(x) = a_0 x + a_1 = 1{,}7x - 2.$$

$\varphi(1) = -0{,}3$ да хато $-0{,}3$; $\varphi(2) = 1{,}4$ да хато $0{,}4$; $\varphi(3) = 3{,}1$ да хато $0{,}1$; $\varphi(4) = 4{,}8$ да хато $-0{,}2$ бўлади.

## 12.7. Эгри чизиқли корреляция

Биз юқорида чизиқли корреляция билан танишиб чиққан эдик. Энди $\bar{y}_x = f(x)$ корреляцион боғлиқлик учун эгри чизиқларнинг содда кўринишдаги ҳоллари билан танишамиз. Бу эгри чизиқлар $f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$ парабола ва $f(x)=a_0+a_1/x$ гиперболалардан иборат бўлсин.

1. $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат функциянинг коэффициентларини аниқлаш талаб этилган бўлсин. Бу ерда $n$ та функцияни йиғинди шаклда ифодалаймиз.

$$F=\sum_{i=1}^{n}(a_0x_i^2+a_1x_i+a_2-y_i)^2 \qquad (12.14)$$

$a_0$ ва $a_1$ коэффициентларни топиш учун ва (12.14) минимал қийматга эга бўлиш учун $a_0$, $a_1$ ва $a_2$ лар бўйича хусусий ҳосилалар олиб, нолга тенглаштириб ёзамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial a_1}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial a_2}=0$$

Демак,

$$\frac{\partial F}{\partial a_0}=2\sum_{i=1}^{n}(a_0x_i^2+a_1x_i+a_2-y_i)x_i^2=2\left[a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3\ c\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2}=2\sum_{i=1}^{n}(a_0x_i^2+a_1x_i+a_2-y_i)=2\left[a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2+a_1\sum_{i=1}^{n}x_i-a_{2n}-\sum_{i=1}^{n}y_i\right]$$

Ҳар бир хусусий ҳосилаларни нолга тенглаштириб, қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$\begin{aligned}
&a_0\sum x_i^4+a_1\sum x_i^3+a_2\sum x_i^2=\sum x_i^2y_i,\\
&a_0\sum x_i^3+a_1\sum x_i^2+a_2\sum x_i=\sum x_iy_i,\\
&a_0\sum x_i^2+a_1\sum x_i+a_{2n}=\sum y_i.
\end{aligned} \qquad (12.15)$$

Бу ерда чизиқли корреляциядагидек коэффициентларни топиш унчалик мақсадга мувофиқ эмас. Чунки бу системадан $a_0$, $a_1$ ва $a_2$ коэффициентлар топилганда жуда ноқулай формулалар ҳосил бўлади. Шу сабабли ҳисоблаш енгил бўлиши учун йиғиндиларни ҳисоблаб, системага қўйиб, кейин коэффициентлар топилса, ҳисоблаш ишлари анча осон бўлади.

**Мисол.** Қуйидаги жадвалда берилган $x$ ва $y$ нинг қийматлари учун $y=a_0x^2+a_1x+a_2$ квадрат учҳаднинг $a_0$, $a_1$ ва $a_2$ коэффициентлари топилсин.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,2 | 1,0 | 1,4 | 2,1 | 2,6 |
| $y$ | 0,6 | 2,1 | 4,6 | 7,6 | 14,0 |

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $x_i y_i$ | $x_i^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,2 | 0,6 | 0,04 | 0,008 | 0,0016 | 0,12 | 0,024 |
| 2 | 1,0 | 2,1 | 1,00 | 1,000 | 1,0000 | 2,10 | 2,100 |
| 3 | 1,4 | 4,6 | 2,96 | 2,744 | 3,8416 | 6,44 | 13,616 |
| 4 | 2,1 | 7,6 | 4,41 | 9,261 | 19,4481 | 15,96 | 33,516 |
| 5 | 2,6 | 14,0 | 6,76 | 17,576 | 45,6976 | 36,40 | 94,640 |
| $\sum_{i=1}^{5}$ | 7,3 | 28,9 | 15,17 | 30,589 | 69,9889 | 61,02 | 143,896 |

Энди бу қийматларни (12.15) системага қўйсак,

$$\left.\begin{array}{l} 2a_0 + 3{,}2a_1 + 24{,}5a_2 = 14{,}2, \\ 3a_0 + 22a_1 + 6{,}41a_2 = 10{,}4, \\ 2{,}2a_0 + 4{,}5a_1 + 5{,}2a_2 = 7{,}2 \end{array}\right\}. \qquad (12.16)$$

Бу системадан $a_2$ ни йўқотиб, икки номаълумли иккита тенгламалар системасини ҳосил қиламиз

$$\left.\begin{array}{l} 5a_0 + 2a_1 = 4, \\ 20a_0 + 5a_1 = 12. \end{array}\right\}$$

Бундан, $a_0 = 2{,}42$ ва $a_1 = -3$ топиб, бу қийматларни олдинги системага қўйиб, $a_2 = 0{,}8$ топамиз. Демак, изланаётган эгри чизиқли функция тақрибан қуйидагига тенг бўлади:

$$y = 2{,}42x^2 - 3x + 0{,}8$$

2. Энди берилган $f(x) = a_0 + a_1 / x$ гиперболанинг коэффициентларини аниқлашга киришамиз. Бу ерда ҳам энг кичик квадратлар усулини қўлласак, $F = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + \frac{a_1}{x_i} - y_i)^2$ функция иккита $a_0$ ва $a_1$ параметрга эга. $F$ функциядан $a_0$ ва $a_1$ бўйича хусусий ҳосилалар олсак,

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + \frac{a_1}{x_i} - y_i), \quad \text{ва} \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + \frac{a_1}{x_i} - y_i)\frac{1}{x_i} = 2\sum (\frac{a_0}{x_i} - \frac{a_1}{x_i^2} - \frac{y_i}{x_i}).$$

Энди $\frac{\partial F}{\partial a_0} = 0$ ва $\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0$ шартни ҳисобга олсак,

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} - \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{x_i} = 0 \text{ ёки } a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{x_i}$$

ва $\sum_{i=1}^{n} (a_0 + \frac{a_1}{x_i} - y_i) = 0; \quad na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i$ ларни ҳосил қиламиз.

$a_0$ ва $a_1$ коэффициентларни топиш учун системани қуйидагича ёзамиз.

$$na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}.$$

## АДАБИЁТЛАР


1. Абуталиев Э.Б., Алимухамедов С., Азимов А., Бекбоев К. Инженерлик иқтисодий ҳисоблашларда сонли усуллар. -Тошкент, 1982. - 248 б.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобелков Г.М. Численные методы. М., 1969. - 368 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. I, II. -М., 1962.
4. Безикович Я.С. Приближенные вычисления. -М. -Л., 1949.
5. Бабушка Н., Витабек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. -М., 1969. - 368 с.
6. Бермант А.Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. -М., 1970.
7. Волков Е.А. Численные методы. -М., 1987. - 248 с.
8. Гутер Р.С., Резиновский П.Т. Программирование и вычислительная математика. Вып. - 2. -М., 1971. - 264 с.
9. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики -М., 1970. - 664 с.
10. Зельдович Я. В., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. -М., 1972. - 592 с.
11. Искандаров Р.И. Олий алгебра. 1-қисм. -Тошкент, 1963.
12. Исроилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 1-қисм. -Тошкент, 1988. - 400 б.
13. Копченова Н.В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. -М., 1972. - 368 с.
14. Крылов В. И., Бобков В.В., Монастырний П.И. Вычислительные методы. Т. I. -М., 1976. - 304 с.; Т. II. -М., 1977. - 400 с.
15. Крылов В.И., Бобков В.В. Монастырный П.И. Начало теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. -Минск, 1983. - 287 с.
16. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М., 1980. - 536 с.
17. Мелентьев П.В. Приближенные вычисления. -М., 1962.
18. Пулькин С.П. Вычислительная маткатика. -М., 1972. - 272 с.
19. Сальвадори Д. Численные методы в технике. -М., 1955.
20. Самарский А. А. Введение в теории разностных схем. -М., 1971. - 552 с.
21. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных

уравнений. -М., 1976. - 592 с.
22. Скарборо Д. Численные методы математического анализа. ГТТП, 1934.
23. Фихтенгольц Г.М. Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси. II-қисм. -Тошкент, 1958. - 472 б.
24. Хаусхолдер А.С. Основы численного анализа. -М., 1956.
25. Хемминг Р.В. Численные методы. -М., 1972. - 400 с.
26. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. -Новосибирск, 1967. - 196 с.
27. Бадалов Ф.Б. Численные методы решения инженерных задач на ЭВМ. -Ташкент, 1987. - 109 с.
28. Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алребры. -М.: Гостех издат, 1950.
29. Бадалов Ф.Б. Шодмонов Ғ. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар орқали моделлаштирилган муҳандислик масалаларини ЭҲМда ечиш усуллари. -Тошкент, 1991. - 104 б.
30. Каюмов Ш. Приближенно-аналитические методы решения задач теории фильтрации вязкопластических флюидов. -Тошкент, 1991. - 156 с.
31. Хўжаёров Б.Х. Қурилиш масалаларини сонли ечиш усуллари. Ўқув қўлланма. -Тошкент.: Ўзбекистон, 1995. - 272 б.

## МУНДАРИЖА

Св. план, поз. 58, 2000 й.

Асрор Бойзоқов, Шукур Қаюмов

Ҳисоблаш математикаси асослари

Ўқув қўлланмаси

Муҳаррир Зяганшина М.
Мусаҳҳиҳа Вахабова М.

Босишга рухсат этилди 29.06.2000 й. Бичими 60×84 1/16
Нашриёт ҳисоб табоғи 10.1. Адади 500 дона. Буюртма № 32

ТДПУ босмахонаси, Тошкент шаҳри. Пр. Ўзбекистон кўчаси, 49.