O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

O'RTA MAXSUS, KASB-HUNAR TA'LIMI MARKAZI

*H.M.SAYFULLAYEVA*

# GEOMETRIYA

*Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan*

4-nashri

«O'QITUVCHI» NASHRIYOT-MATBAA IJODIY UYI
TOSHKENT – 2005

T a q r i z c h i l a r: **O.Primov** – pedagogika fanlari nomzodi, dotsent
**S.U.Uzoqov** – dotsent

M a s ' u l m u h a r r i r **Q.H.Abdullayev** – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Mazkur qo'llanma akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun matematikadan yangi dasturlar va Davlat ta'lim standartlariga muvofiq yozilgan. Unda geometriya kursining asosiy bo'limlari bayon etilgan. Nazariy materialni mustahkamlash va rivojlantirishga yordam beradigan ko'plab masala va mashqlar, shuningdek, amaliy masalalar ham keltirilgan.

**S $\frac{4306020502-193}{353(04)-2005}$ Qat. buyurtma.–2005**

ISBN 5–645–04516–5

# SO'ZBOSHI

Ushbu o'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan «Akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari» uchun tasdiqlangan o'quv dasturiga muvofiq yozildi.

«Kadrlar tayyorlash milliy dasturi»ning tarkibiy qismlaridan biri uzluksiz ta'lim bo'lib, bunda akademik litsey va kasb-hunar kollejlari muhim o'rin tutadi. Akademik litsey Davlat ta'lim standartlariga muvofiq o'quvchilarning imkoniyatlari va qiziqishlarini hisobga olgan holda ularni jadal intellektual rivojlantirish, chuqur sohalashtirish, tabaqalashtirish, kasbga yo'naltirilgan ta'lim olishlarini ta'minlaydi. O'quvchilar o'zlari tanlab olgan ta'lim yo'nalishi bo'yicha bilim-saviyalarini oshirish hamda fanni chuqur o'rganishga qaratilgan maxsus kasb-hunar ko'nikmalarini egallash imkoniyatiga ega bo'ladilar.

Kasb-hunar kollejida tegishli Davlat ta'lim standartlari doirasida o'quvchilarning kasb-hunarga moyilligini, bilim va ko'nikmalarini chuqur rivojlantirish, bir yoki bir necha zamonaviy kasb-hunarni egallash hamda tegishli o'quv fanlaridan chuqur nazariy bilim olish imkoni beriladi.

Ta'limning bu yangi zamonaviy turlarida geometriyani o'qitishdan asosiy maqsad o'quvchilarga chuqur ilmiy asoslangan nazariy bilim berish, olingan bilimlarni kasblarga tatbiq eta olish bo'yicha malaka va ko'nikmalarni hosil qilish, mustaqil fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirish, mustaqil bilim olishning yo'l-yo'riqlarini o'rgatishdan iborat bo'lmog'i lozim.

Qo'llanmani yozishda ma'lum (ko'rsatilgan) adabiyotlardan va o'zimizning ko'p yillik pedagogik tajribamizdan foydalandik.

Qo'llanmaning qo'lyozmasini e'tibor bilan o'qib chiqib, kamchiliklarini ko'rsatish bilan birga, uni tuzatish uchun maslahatlarini va xizmatlarini ayamagan O'rta maxsus kasb-hunar ta'limini rivojlantirish instituti akademik litseylarda ta'lim mazmuni va metodikasi bo'limi mudiri, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent Q.H.Abdullayevga, kitobning qo'lyozmasini ko'rib chiqib, fikr-mulohazalar bergan hamda amaliy yordam ko'rsatgan Qarshi davlat universiteti dotsenti S.U.Uzoqovga, shuningdek, kitobning qo'lyozmasini kompyuterda tayyorlashda xizmati singgan, «O'zbeko'quvavtomatika» Qashqadaryo ixtisoslashtirilgan markazi bosh muhandisi S.A.Jo'rayevga o'zimizning samimiy minnatdorchiligimizni izhor etamiz.

*Muallif*

# GEOMETRIYA FANINING TARAQQIYOTI

Geometriya geometrik shakllarning xossalari haqidagi fandir. «Geometriya» so'zi grekcha so'z bo'lib, o'zbekcha «yer o'lchash» degan ma'noni bildiradi. Bunday atalish geometriyaning paydo bo'lishi yer ustida o'lchash ishlari bilan bog'liqligidan darak beradi.

Biz geometriyani o'rganishni planimetriyadan boshlaymiz. Planimetriya bu geometriyaning bir bo'limi bo'lib, unda tekislikdagi shakllar o'rganiladi.

Qadim zamonlardan bizgacha yetib kelgan geometriya fanining taraqqiyot yo'liga nazar tashlaylik.

Ko'pgina adabiyotlarda matematika fani, jumladan geometriyaning birinchi davri qadimgi yunonlargacha bo'lgan davrni o'z ichiga oladi. Yunonlargacha bo'lgan davr geometriyani asoslashga to'liq qiziqish bo'lmaganligi bilan farqlanadi.

Misrliklar va bobilliklar, hindlar va boshqa qadimiy xalqlar bizning eramizdan bir necha ming yillar avval ham ta'rifsiz, aksiomasiz va isbotsiz qabul qilingan geometrik ma'lumotlarga ega bo'lganlar. Ularning geometriyasi tajriba va kuzatishlardan olingan qoidalar va formulalardan iborat bo'lib, yuzlarni va hajmlarni hisoblashda ishlatilgan, hisoblashlarda qo'llanilgan formulalarning ayrimlari, hatto to'g'ri ham bo'lmagan, ularning geometriyasini empirik (tajriba) geometriya deb yuritiladi.

Geometriyaning fan sifatida shakllana borishining ikkinchi davri qadimgi yunonlar davri hisoblanib, ular ilmiy ma'lumotlarni kashf etibgina qolmasdan, balki takomillashgan mantiqiy usullarni ishlab chiqib, tajriba va kuzatishlardan to'plangan geometrik materiallarni qat'iy bir sistemaga ham keltirdilar.

Geometriya fanini mantiqiy umumlashtirilgan fanga aylantirishda Fales, Pifagor, Gippokrat, Yevdoks, Evklid, Arximed kabi olimlarning xizmati benihoya kattadir.

Evklidning «Boshlang'ichlar» («Negizlar») deb nomlangan kitobining geometriyaga asos bo'lishi qadimgi yunonlarning eng buyuk yutug'i sanaladi. «Boshlang'ichlar» kitobining ahamiyati va buyukligi shundan iboratki, u qariyb 2300 yildan ortiqroq vaqt davomida butun dunyoda geometriyadan yagona darslik sifatida xizmat qilib kelgan.

«Boshlang'ichlar» 13 kitobdan iborat bo'lib, bu asarning dastlabki 6 ta kitobi planimetriyaga, VII–X kitoblari son haqidagi ta'limotga, XI–XIII kitoblari esa stereometriyaga oiddir.

Geometriya tarixiy taraqqiyotining uchinchi davri *hozirgi zamon davri* deb yuritiladi.

Hozirgi davr geometriyasining o'ziga xos xususiyati shundan iboratki, u har qanday ko'rgazmali namoyish etishga yoki geometrik tushunchalarning har xil chizma tasvirlarini ko'rsatishga asoslanmasdan, balki yetarli aniq qoidalar, aksiomalar va ta'riflar asosida tuzilgandir. Shuning uchun uni *aksiomatik geometriya* deb yuritiladi.

Uchinchi davr geometriya fanining o'zgarishlari sifatida *N.I.Lobachevskiy* (1792–1856) yaratgan yangiliklarni ko'rsatish mumkin. U Evklid geometriyasidan farqli yangi bir geometriyani yaratdiki, u *Lobachevskiy geometriyasi* nomi bilan yuritilmoqda. Bu geometriyaning yaratilishi esa fanda burilish deb alohida qayd etib kelinmoqda.

Bu ikkala geometriya orasidagi eng asosiy farq ulardagi «Parallellar nazariyasi»ning turlichaligidan iboratdir.

«Geometriya» fanining rivojlanishida vatandosh olimlarimizning ham xizmatlari buyukdir.

Masalan, tibbiyot ilmida butun dunyoga dong'i ketgan O'rta Osiyolik ulug' alloma *Abu Ali ibn Sino* (980–1037) o'zining «Bilimlar kitobi»da planimetriya asoslari va stereometriya asoslarini bir qismga birlashtirib bayon etadi (Evklid «Boshlang'ichlar» kitobida planimetriyani birinchi kitobida, stereometriyani ikkinchi kitobida bayon etadi). Masalan, 1- bo'limining «Stereometriyaning kesishuvchi chiziqlarga tegishli bo'lgan boshlang'ichlari haqida» degan qismida to'g'ri chiziqqa bo'lgan perpendikular haqida, qariyb shu yerning o'zidayoq tekislikka perpendikular haqida ham so'z yuritiladi.

Fanda yorqin iz qoldirgan ulug' vatandoshimiz Abu Rayhon Beruniyning ilmiy merosi ichida maktablarimiz uchun foydali bo'lgan ma'lumotlar juda ko'pdir. Masalan, «Ma'sud qonunlari» nomli yirik asarning geometriya va trigonometriyaga bag'ishlangan boblaridagi ko'p ma'lumotlarni akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida to'garak mashg'ulotlarida o'rganilishi ta'lim va tarbiyaviy jihatdan katta foyda keltiradi.

«Geometriya» fani o'zi nimani o'rganadi va u qanday paydo bo'lgan degan savolning tug'ilishi tabiiydir.

Biz har xil narsalar va voqealar orasida yashaymiz, bizni o'rab olgan narsalar har xil xossalarga ega. Narsalarning xususiyatlari va xossalarini turli fanlar o'rganadi. Masalan, metalldan yasalgan sharni qaraydigan bo'lsak, kimyo bu sharda qancha temir, uglerod va boshqa elementlar borligi bilan qiziqsa, fizika esa qanday temperaturada erishi, bosimga qanday kuch bilan qarshilik ko'rsatishi kabi xossalarni o'rganadi, geometriya sharning yuqoridagi xossalardan farq qiluvchi boshqa xossalarini o'rganadi. Geometriya sharning shakli, o'lchami, boshqa narsalarga nisbatan vaziyatiga qiziqib, uning og'irligi, rangi, qattiqligi, tarkibi kabi boshqa xossalarini e'tiborga olmaydi.

Kishilar mehnat faoliyatida foydalanishi qulay bo'lishi uchun narsalarning shakli va o'lchamiga juda katta e'tibor bilan qaraydilar. Masalan, yozishda noqulay bo'lganligi uchun uzunligi 2 metr bo'lgan qalam hech vaqt ishlatilmaydi. Temir yo'l relslari poyezd va vagonlar g'ildiraklari orasidagi masofadan katta kenglikda o'rnatilmaydi.

Yana shuni ham aytish kerakki, kishilar amaliy mehnat faoliyatlarida narsalar orasidagi masofani o'lchash va ularni ma'lum tartibda joylashtirishga duch keladilar. Masalan, zavod sexlarida stanoklarni to'g'ri joylashtirish mehnat unumdorligini oshirishga yordam beradi, mashina mexanizmining ayrim qismlarini maqsadga muvofiq joylashtirish ulardan foydalanishga qulaylik tug'diradi.

Demak, narsalarning shaklini, o'lchamlarini va ularning o'zaro vaziyatlarini (joylashuvini) o'rganuvchi fan *geometriya* deyiladi.

Qadim zamonlarda odamlar masofalarni o'lchash, mehnat qurollarini yasash, turli shakldagi va turli kattalikdagi yer maydonlarining yuzlarini hisoblash, rejalarini olish, rejalarga qarab ularning haqiqiy kattaliklarini aniqlash, turli inshootlarning va idishlarning sig'imlarini hisoblash ishlari bilan shug'ullanishlariga to'g'ri kelgan, turmushning o'zi odamlar oldiga har xil geometrik masalalarni yechish vazifasini qo'ygan.

Mana shunday masalalardan biri:

Nil daryosining har yili toshib turishi natijasida hosilning nobud bo'lishi, yer maydonlari chegarasining yuvib ketishi sodir bo'lar edi. Toshqindan so'ng ko'p misrliklar o'z yerlarini topishlari va ularning chegaralarini qaytadan tiklashlari lozim edi. Yer maydonlari shaklini va o'lchamlarini qayta aniq tiklash esa o'lchash, chizish va hisoblashga doir murakkab ishlar bilan bog'liq edi. Savdo, dengizda suzish va hunarmandchilikning rivojlanishi idishlarning sig'imini o'lchashni, narsalarning shakli, o'lchamlari va o'zaro joylashuvlariga doir har xil masalalarni hal qilishni talab etar edi. Kishilar bu ishlarni bajarish asosida asta-sekin hisoblash qoidalarini topa boshlaydilar.

Bu o'rinda fanda yorqin iz qoldirgan yurtdoshimiz Al-Farg'oniyning nomini tilga olish o'rinlidir. Al-Farg'oniy Bag'dod shahrida «Baytul hikma» («Hikmatlar uyi») deb atalgan ilmiy anjumanning rahbari Al-Xorazmiy huzurida faol ish olib borgan.

U yaratgan «Astrolyabiya» yoki «Usturlab» deb atalgan asbobdan amaliy hisoblash ishlarida keng foydalanganlar. U ilmning hayotiyligi, amalda qo'llanilishiga ko'p e'tibor bergan. U «qaysi bilim hayot talablariga ko'proq javob bera olsa, o'sha muqim o'rnashadi» deb ta'kidlaydi.

# I bob
# PLANIMETRIYA ASOSLARI

## 1- § . Qadimgi masalalar

Bizgacha yetib kelgan moddiy-madaniy yodgorliklar, ko'pgina qadimiy yozma hujjatlar bundan taxminan to'rt ming yillar ilgari Qadimiy Misr va Bobil xalqlari anchagina geometrik ma'lumotlarga ega ekanliklaridan dalolat beradi.

Masalan, Misr piramidalari (fir'avnlar qabrlari)ning shakllari hayratda qolarli darajada muntazamligi bilan ajralib turadi.

Bu inshootlarning qurilishiga faqat geometrik bilimlarga ega bo'lgan kishilargina rahbarlik qilganligi ravshandir.

Eramizdan avvalgi 2000—1700- yillarga taalluqli bo'lgan Qadimgi Misr papiruslarida bir qator geometrik masalalarning yechimlari bor, ulardan ba'zilari esa benuqson yechilgan.

Geometrik ma'lumotlarni bundan keyingi to'plash va sistemalashtirish ishidagi xizmatlar qadimgi yunon olimlariga mansubdir.

Geometrik dalillarning dastlabki isbotlari miletlik Fales (eramizdan avvalgi 639—548- yillar) nomi bilan bog'liq. Fales mulohazalarning qanday usullarini qo'llaganligini biz faqat fahmlashimiz mumkin.

Masalan, Falesning:

a) «Diametr doirani teng ikkiga bo'ladi».

b) «Vertikal burchaklar teng».

d) «Teng yonli uchburchak asosidagi burchaklar teng» kabi teoremalari ifodalanishini ko'zdan kechirib, bu xossalarning to'g'riligi bir shaklni ikkinchi shakl ustiga qo'yish yo'li bilan topilgan deb faraz qilish mumkin.

Ko'pgina teoremalar isbotining muallifi Pifagor (eramizdan avvalgi 564—473- yillar) deyishadi. Ammo mashhur «Pifagor teoremasi» undan ancha oldin ham ma'lum bo'lib, uni kim isbotlaganligi va Pifagorning o'zi qanday isbotni berganligi aniqlanmagan.

Geometrik jumlalar to‘g‘riligining isbotlari, fandagi muhokamalarning umumiy metodlari, qadimgi buyuk faylasuflar Demokrit, Platon, Aristotellarning diqqatini o‘ziga tortgan. Qadimgi buyuk matematik Arximed (eramizdan avvalgi 287–212- yillar) Evklidning nazariy fikrlarini chuqurlashtirdi va to‘ldirdi.

Arximedning kashfiyotlari orasida aylana uzunligini va doira yuzini o‘lchash bilan shakllarning hajmini, shu jumladan silindr va sharning hajmlarini hisoblash bilan bog‘liq bo‘lgan masalalarni atroflicha ishlab chiqqanligini qayd qilish lozim.

Masalan, Arximed ona shahri Sirakuzani Rim bosqinchilari hujumidan mudofaa qilish paytida qahramonona halok bo‘lgan. U qabr toshiga silindrga ichki chizilgan sharni tasvirlashni vasiyat qilgan. Shu sharning hajmi silindr hajmining 2/3 qismiga tengligining isboti Arximedning ilmiy yutuqlaridan biri bo‘lgan.

***Masalalar:***

a) uchburchakning yuzini uchala tomonining berilgan uzunliklari bo‘yicha topish;

b) vatarlar jadvalida 0° dan 180° gacha burchaklar uchun vatar uzunliklari 0,5° dan oralatib berilgan.

Sirkul va chizg‘ich yordamida bevosita yechib bo‘lmaydigan ***klassik masalalar:***

a) kubni shakllantirish;

b) burchakni uchta teng qismga bo‘lish;

d) doira kvadraturasi.

Bu masalalarni boshqa geometrik qurollar bilan yechish mumkin, sirkul va chizg‘ich bilan esa taqriban yechish mumkin.

Kubni ikkilantirish masalasi Qadimgi Yunonistondan ma’lum bo‘lgan yasashga doir uchta asosiy masalaning biridir.

***Masala (Delovs masalasi):***

Hajmi berilgan kub hajmidan ikki marta katta bo‘lgan kub yasang.

Berilgan kubning qirrasi $a$ bo‘lsin, yasalishi kerak bo‘lgan kubning qirrasini $x$ bilan belgilaymiz.

Masala shartiga ko'ra $x^3 = 2a^3$ bo'lib, berilgan kubning qirrasini $a = 1$ desak, $x^3 - 2 = 0$ tenglama hosil bo'ladi.

Algebradan ma'lumki, bosh hadi oldidagi koeffitsiyenti birga teng va qolgan koeffitsiyentlari butun sonlardan iborat bir noma'lumli algebraik tenglamaning ratsional ildizlari faqat butun sonlardan iborat bo'lishi uchun ular ozod hadning bo'luvchilari tarkibiga ham kirishi kerak, lekin 2 sonining bo'luvchilari faqat $\pm 1$; $\pm 2$ sonlaridan iborat bo'lib, ular tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak, $x^3 - 2a^3 = 0$ tenglama ham ratsional ildizlarga ega emas, ya'ni kubni ikkilantirish masalasi sirkul va chizg'ich yordamida hal qilinmaydi.

## 2- §. Aylana yoyining gradus o'lchovlari

Aylanada ikkita ixtiyoriy $A$ va $B$ nuqtani belgilaylik. Ular aylanani ikkita yoyga ajratadi.

Bu yoylarning har biri *aylana yoyi* deb ataladi. Aylana yoylarini bir-biridan farqlash uchun ular orasida oraliq nuqta belgilanadi yoki kichik lotin harfi qo'yiladi.

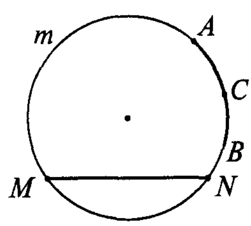
Masalan, 1-rasmda ajratib ko'rsatilgan yoy $\cup ACB$ (o'qilishi: $ACB$ yoy) yoki, shuningdek, $\overset{\cup}{ACB}$ yoki $\overset{\cup}{AmB}$ kabi belgilanadi.

1- rasmda $MN$ vatar (kesma) va $MN$ yoy ko'rsatilgan. Odatda $MN$ vatar $MN$ yoyni tortib turadi deyiladi.

Aylana butun yoyining 360 dan bir bo'lagi *bir gradus* deb ataladi va $1°$ kabi belgilanadi. Gradus aylana yoyining o'lchov birligi qilib olingan. Masalan, $AB$ yoyning gradus o'lchovi $105°$ ga teng bo'lsa, u $\overset{\cup}{AB} = 105°$ shaklida yoziladi.

Aylana diametri uning yoyini $180°$ ga teng bo'lgan ikkita yoyga ajratadi.

Aylana yoyining gradus o'lchovi uning radiusiga bog'liq emas.




**1- rasm.**

## *Mashqlar*

1. Aylananing $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$ bo'lagi necha gradusli yoylar bo'ladi?

(*Javob:* 180°; 120°; 90°; 36°; 30°.)

2. Aylanani 1, 4, 8, 11 sonlariga proporsional bo'lgan yoylarga bo'ling.

(*Javob:* 15°; 60°; 120°; 165°.)

3. Soatning soat mili 1 soatda necha gradusli va minut mili necha gradusli yoy chizadi?

(*Javob:* 30°; 360°.)

4. Soatning minut mili 15 minutda necha gradusli yoy chizadi?

(*Javob:* 90°.)

5. Soatning minut mili 1 minutda necha gradusli yoy chizadi?

(*Javob:* 6°.)

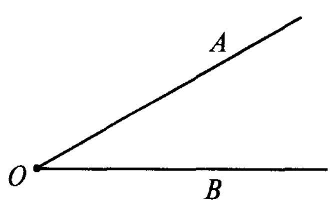
## 3- §. Burchak va uning turlari

Umumiy uchga ega bo'lgan ikki nurdan tashkil topgan geometrik shakl *burchak* deb ataladi (2- rasm).

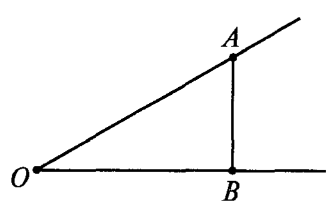
Nurlar burchakning *tomonlari*, ularning umumiy nuqtasi *burchakning uchi* deb ataladi. $O$ nuqta – burchakning uchi; $OA$ va $OB$ nurlar – burchakning tomonlari. Burchak $\angle AOB$ yoki $\angle O$ ko'rinishda belgilanadi.

3- rasmda burchakning ichki qismi (sohasi) chizib ko'rsatilgan.

Agar burchaklarning tomonlari bir to'g'ri chiziqni tashkil




**2- rasm.**




**3- rasm.**

qilsa, burchak *yoyiq burchak* deb ataladi.

Burchakning tomonlari tekislikni ikkita bo'lakka ajratadi. Burchak tomonlaridagi nurlardan ixtiyoriy birini to'g'ri chiziqqa to'ldiraylik. Bu to'g'ri chiziq tekislikning burchak hosil qilgan bo'laklaridan qaysi birini kesmasa, shu bo'lak burchakning *ichki qismi* (sohasi) deb ataladi, ikkinchisi esa *tashqi qismi* (sohasi) deb ataladi.

Agar alohida ta'kidlanmasa, burchak deganda tekislikning shu burchak tomonlari bilan chegaralangan ichki sohasi tushuniladi.

1-ta'rif. Aylana to'la yoyining $\frac{1}{4}$ (to'rtdan bir) qismi 90° ga teng. Kattaligi 90° ga teng burchak *to'g'ri burchak* deyiladi.

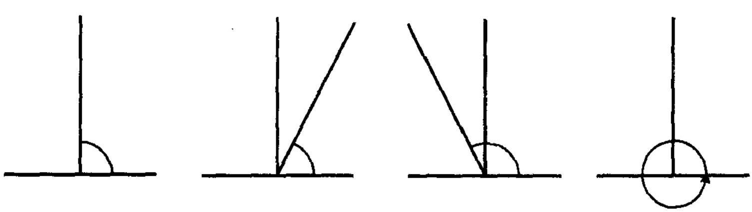
2-ta'rif. To'g'ri burchakdan kichik burchak *o'tkir burchak* deyiladi.

3-ta'rif. To'g'ri burchakdan katta, ammo yoyiq burchakdan kichik burchak *o'tmas burchak* deyiladi.

4-ta'rif. Bir nuqtadan chiqqan nur, o'sha nuqta atrofida aylanib, avvalgi holatini olishi natijasida hosil bo'lgan burchak *to'la burchak* deyiladi (4- rasm).

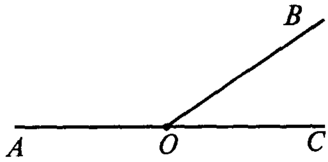
Har qanday to'g'ri burchaklar bir-biriga teng, yoyiq burchak 180° bo'lgani uchun u ikkita to'g'ri burchakka teng.

Yer ustida o'lchashlarda burchaklarni o'lchash uchun



To'g'ri burchak　　O'tkir burchak　　O'tmas burchak　　To'la burchak

**4- rasm.**




**5- rasm.**

ekker, astrolyabiya va teodolit nomli asboblardan, o'quv jarayonida esa burchaklarni o'lchashda transportirdan foydalaniladi.

To'g'ri burchakning kattaligi *d* harfi bilan belgilanadi (fransuzcha «*droit* – to'g'ri» so'zining birinchi harfi): $d = 90°$.

Bittadan tomonlari umumiy bo'lib, qolgan tomonlari to'g'ri chiziqni tashkil etgan burchaklar *qo'shni burchaklar* deyiladi (5- rasm).

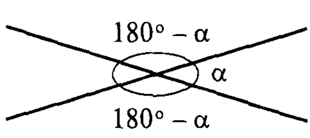
$\angle BOC$ va $\angle AOB$ – qo'shni burchaklar.

Qo'shni burchaklar birgalikda yoyiq burchakni tashkil qilgani uchun ularning kattaliklari yig'indisi 180° ga teng bo'ladi.

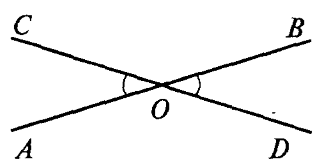
Berilgan har qanday burchak uchun uning har bir tomonini davom ettirib, ikki usul bilan qo'shni burchaklarni yasash mumkin (6- rasm).

*Vertikal burchaklar* deb, birining tomonlarini uchiga nisbatan davom ettirish natijasida hosil bo'lgan burchaklarga aytiladi (7- rasm).

*DOB* burchakning uchiga nisbatan *OB* tomonning davomi *OA* tomon, *OD* tomonning davomi *OC* tomon deb olsak, $\angle DOB$ va $\angle AOC$ vertikal burchaklar bo'ladi. Xuddi shuningdek, *AOD* burchak *AO* tomonining davomi *OB* va *OD* tomonining davomi *OC* bo'lgani sababli $\angle AOD$ va $\angle COB$ vertikal burchaklar. Vertikal burchaklar o'zaro tengdir, ya'ni $\angle DOB = \angle AOC$ va $\angle AOD = \angle COB$ (7- rasm).




**6- rasm.**




**7- rasm.**

### *Mashqlar*

1. Ikkita to'g'ri chiziq $O$ nuqtada kesishadi. Nechta burchak hosil bo'ladi?
2. $370°$ li burchakni qanday yasash mumkin?
3. Transportir yordamida $15°$ li; $30°$ li burchaklar yasang.
4. Agar $\alpha = 80°$ bo'lsa, unga qo'shni burchakning kattaligi qancha bo'ladi?
5. $\beta = 24°$ bo'lsa, unga vertikal burchakning kattaligi qancha bo'ladi? Shu burchakni yasang.

## 4- §. Burchaklarni o'lchash

Burchaklarni o'lchash uchun markazi burchak uchida bo'lgan ixtiyoriy radiusli aylana chizaylik (8- rasm).

$A$ va $B$ nuqtalar $\angle AOB$ tomonlarining aylana bilan kesishish nuqtalari bo'ladi.

T a ' r i f. Ikki radius orasidagi burchak *markaziy burchak* deyiladi.

Burchakning $OA$ va $OB$ radiuslar bilan chegaralangan bo'lagi *markaziy burchak*, aylananing $AB$ yoyi esa *markaziy burchakka tiralgan yoy* deb ataladi.

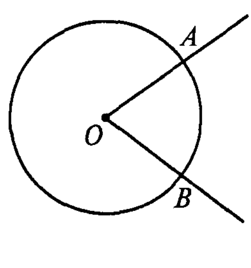
Bitta aylanada yoki bir nechta aylanalarda:

*1) markaziy burchaklar teng bo'lsa, ularga tiralgan yoylar ham teng bo'ladi;*

*2) teng yoylarga teng markaziy burchaklar mos keladi.*

Markaziy burchakning kattaligi aylananing burchak orasidagi bo'lagi yoyining gradus o'lchoviga teng. Kesmaning uzunligi chizg'ich yordamida o'lchangani singari, burchakning kattaligi transportir yordamida o'lchanadi. Masalan, $AB$ yoyning gradus o'lchovi $15°$ ga teng bo'lsa, $\angle AOB = 15°$ deb yoziladi.

Transportir markaziy burchak xossalariga asosan yasalgan.




**8- rasm.**

Aylana yoyining gradus o‘lchovi ham kesma uzunligi xossalariga o‘xshash xossalarga ega (mustaqil ta’riflang).

*1. Teng kesmalarning uzunliklari tengdir.*

*2. Kesmalar yig‘indisining uzunligi qo‘shiluvchi kesmalarning uzunliklari yig‘indisiga teng.*

*3. Kesmalar ayirmasining uzunligi shu kesmalar uzunliklarining ayirmasiga teng.*

*4. Istalgan nurga uning boshlang‘ich nuqtasidan berilgan uzunlikdagi yagona (ya’ni faqat bitta) kesmani qo‘yish mumkin.*

Gradus o‘lchovi aniqligini oshirish uchun bir gradusning $\frac{1}{60}$ qismi 1 minut $(1')$ va bir minutning $\frac{1}{60}$ qismi 1 sekund $(1'')$ deb qabul qilingan.

### *Mashqlar*

**1.** Transportirning yasalishi qanday geometrik xossalarga asoslangan?

**2.** Transportir yordamida 25° li, 15° li burchak yasang.

**3.** Transportir yordamida 120° li, 140° li burchak yasang.

**4.** 380° li burchakni qanday yasash mumkin?

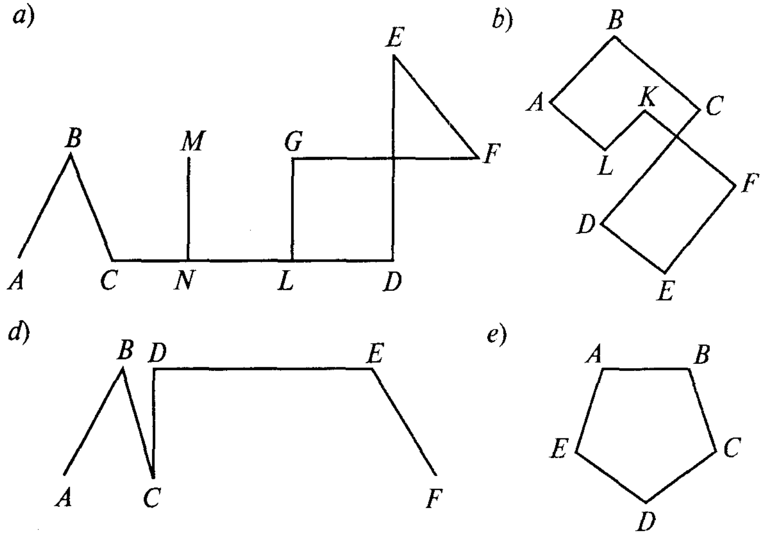
**5.** To‘g‘ri burchak (90°), 45° li o‘tkir burchak, 105° li o‘tmas burchaklarni transportir yordamida yasang.

## 5- §. Siniq chiziq uzunligini hisoblash

Bir nechta kesmalar berilgan bo‘lsin. Kesmalarning birining oxiriga ikkinchisining boshini, ikkinchisining oxiriga uchinchisining boshini ustma-ust qo‘yaylik va hokazo. Bunda kesmalardan tashkil topgan geometrik shakl hosil bo‘ladi. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan kesmalardan tashkil topgan geometrik shakl *siniq chiziq* deb ataladi (9-*a*, *b* rasmlar).

Siniq chiziqni tashkil qilgan kesmalar uning *tomonlari* (*bo‘g‘inlari*), kesmalarning uchlari siniq chiziqning *uchlari* deb ataladi.

Odatda, siniq chiziq uning uchlaridagi nuqtalarni belgilovchi harflarni ketma-ket yozish bilan belgilanadi: $ABCDEF$ siniq chiziq.




**9- rasm.**

Agar siniq chiziqning biror tomoni boshqa tomoni bilan kesishsa (9- *a, b* rasmlar) yoki boshqa tomonning qismi bo'lsa, siniq chiziq *maxsus siniq chiziq*, aks holda esa *sodda siniq chiziq* deyiladi (9- *d*, *e* rasmlar).

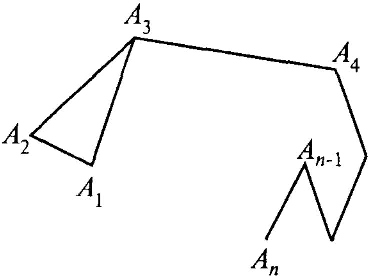
Siniq chiziqning tomonlari uzunliklari yig'indisi uning *perimetri* deb ataladi. Boshlang'ich va oxirgi nuqtalari ustma-ust tushadigan siniq chiziq *yopiq siniq chiziq* deb ataladi (9- *e* rasm).

Sodda yopiq siniq chiziqdan tashkil topgan shakl *ko'pburchak* deb ataladi (9- *e* rasm).

T e o r e m a . *Siniq chiziqning uzunligi uning oxirlarini tutashtiruvchi kesma uzunligidan kichik emas.*

I s b o t i . $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ berilgan siniq chiziq bo'lsin. Uning $A_1A_2$, $A_2A_3$ bo'g'inlarini bitta $A_1A_3$ bo'g'in bilan almashtiramiz, u holda $A_1A_3A_4 \ldots A_n$ siniq chiziq hosil bo'ladi (10- rasm).

Uchburchak tengsizligiga binoan $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$, shu sababli bu siniq chiziq $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n$ siniq chiziq uzunligidan katta bo'lmagan uzunlikka ega. Endi $A_1A_2$ va $A_3A_4$ bo'g'inlarni $A_1A_4$ kesma bilan almashtirib, $A_1A_4 \ldots A_n$ siniq chiziqni hosil




**10- rasm.**

qilamiz, uning uzunligi ham berilgan siniq chiziq uzunligidan katta bo'lmaydi. Shu usulda davom etib, pirovardida $A_1A_n$ kesmani o'tkazamiz, uning uzunligi berilgan siniq chiziq uzunligidan katta bo'lmaydi. Teorema isbot qilindi.

### *Mashqlar*

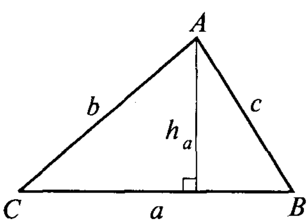
1. 3; 6; 6,5 sm li kesmalarni ketma-ket qo'ying. Qanday hollar bo'lishi mumkin? Tushuntiring.
2. $AB = 3$ sm, $BC = 4$ sm, $CD = 5$ sm li kesmalar yasab, $DA$ kesmaning uzunligi qancha bo'lishini toping.

## 6- §. Uchburchaklarning asosiy elementlari va ularni tomonlari orqali ifodalash

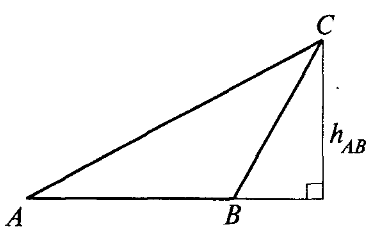
1-ta'rif. Uchta kesmadan tashkil topgan sodda yopiq siniq chiziq *uchburchak* deb ataladi.

2-ta'rif. Uchburchakning ixtiyoriy tomonini uning *asosi* deb olish mumkin. Asosga qarama-qarshi burchakning uchi esa *uchburchakning uchi* deb ataladi.

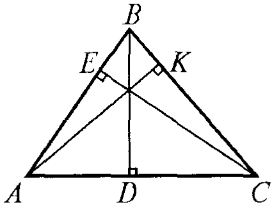
3-ta'rif. Uchburchak uchidan uning asosi yotgan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikular kesma *uchburchakning balandligi* deb ataladi (11, 12- rasmlar).



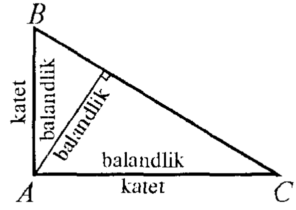

**11- rasm.**




**12- rasm.**




**13- rasm.**




**14- rasm.**

Uchburchakning balandligi uning ichida (11- rasm) yoki tashqarisida (12- rasm) bo'lishi mumkin. Asosga tushirilgan balandlik $h_a$ yoki $h_{AB}$ deb belgilanadi.

Agar uchburchak asosidagi burchaklardan biri o'tmas bo'lsa, uning balandligi uchburchak tashqarisida yotadi.

Agar uchburchak asosidagi ikkala burchak ham o'tkir bo'lsa, u holda balandlik uchburchak ichida yotadi.

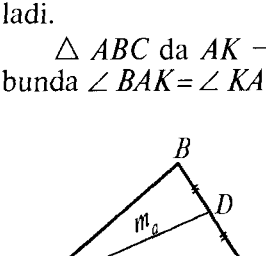
Uchburchakda uchala tomonni asos deb olish mumkinligi sababli uning uchta balandligi bo'ladi (13- rasm). $\triangle ABC$ da $BD$, $AK$, $CE$ – balandliklar.

To'g'ri burchakli uchburchakning ikkita balandligi uning katetlari bilan ustma-ust tushadi (14- rasm).

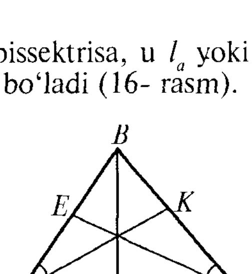
4-ta'rif. Uchburchakning uchi bilan bu uchning qarshisida yotgan tomonning o'rtasini tutashtiruvchi kesma uchburchakning *medianasi* deyiladi (15- rasm). $\triangle ABC$ da $AD$ – mediana, u $m_a$ yoki $m_{BC}$ deb yoziladi.

5-ta'rif. Uchburchakda burchak uchidan chiqib, bu burchakni teng ikkiga bo'luvchi nur uning *bissektrisasi* deyiladi.

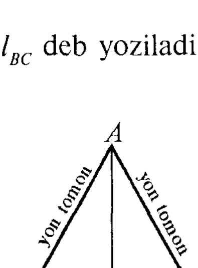
$\triangle ABC$ da $AK$ – bissektrisa, u $l_a$ yoki $l_{BC}$ deb yoziladi, bunda $\angle BAK = \angle KAC$ bo'ladi (16- rasm).




**15- rasm.**




**16- rasm.**




**17- rasm.**

Teng yonli uchburchakda teng tomonlar *yon tomonlar*, uchinchi tomon *asos*, teng tomonlar hosil qilgan burchak *uchburchakning uchi* deb ataladi (17- rasm).

### *Mashqlar*

1. Tomonlari 6 sm, 5 sm va ular orasidagi burchak 30°, 60°, 90° bo'lgan uchburchaklarni chizing.
2. Ikki tomoni va uchinchi tomoniga o'tkazilgan balandligi bo'yicha uchburchak yasang.
3. 60° li burchakning bissektrisasini yasang.
4. Tomonlari quyidagicha bo'lgan uchburchak yasash mumkinmi:

   1) 12 sm, 2 dm, 8 sm; 3) 45 sm, 45 sm, 1 m;
   2) 0,5 sm, 1 m, 0,5 m; 4) 1 dm, 5 sm, 5 sm ?

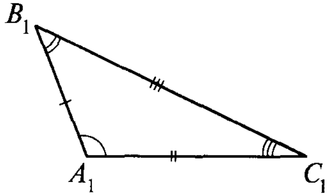
## 7- §. Uchburchaklarning tengligi

Avvalo, qanday uchburchaklarni bir-biriga teng deyish lozimligini aniqlab olaylik. Agar ikkita $A_1B_1C_1$ va $A_2B_2C_2$ uchburchaklarni mos ravishda ustma-ust tushirilganda, ularning uchala uchlari ustma-ust tushsa, bunday uchburchaklar bir-biriga teng bo'ladi.

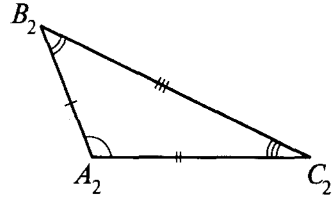
Uchburchaklarning uchlari ustma-ust tushganda, uchlarni tutashtiruvchi tomonlar ham, ular orasidagi burchaklar ham ustma-ust tushadi.

Ustma-ust tushgan tomonlar va burchaklar *mos tomonlar* va *burchaklar* deyiladi. Demak, teng uchburchaklarda ularning mos tomonlari va mos burchaklari teng bo'ladi.

T a ' r i f. Mos tomonlari va mos burchaklari teng bo'lgan uchburchaklar *teng* deyiladi.




**18- rasm.**




**19- rasm.**

Agar $\triangle A_1B_1C_1$ va $\triangle A_2B_2C_2$ teng bo'lsa (18, 19- rasmlar), u holda

$$A_1B_1 = A_2B_2,\ A_1C_1 = A_2C_2,\ B_1C_1 = B_2C_2,$$
$$\angle A_1 = \angle A_2,\ \angle B_1 = \angle B_2,\ \angle C_1 = \angle C_2$$

bo'ladi va aksincha.

Uchburchaklarning tengligini yozish uchun ham odatdagi tenglik belgisi «=» qo'llaniladi va $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$ ko'rinishda yoziladi. Bunda uchburchaklarning uchlari bir-biriga mos kelishi tartibida yoziladi. Bir-biriga mos tomonlar va burchaklar bir xil sondagi chiziqlar va yoylar bilan belgilanadi (18, 19- rasmlar).

## 8- §. Uchburchaklar tengligining birinchi alomati

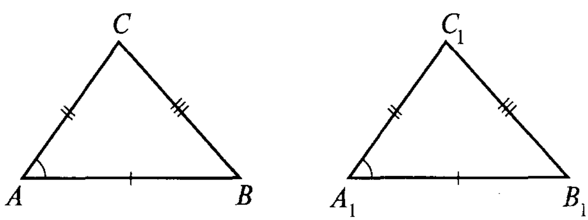
Teorema. *Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi.*

Isboti. $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ bo'lsin (20- rasm).

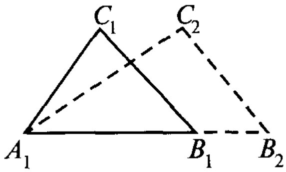
Bu uchburchaklarning tengligini isbotlaymiz. $A_1B_2C_2$ uchburchak $B_2$ uchi $A_1B_1$ nurda, $C_2$ uchi $A_1B_1$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $C_1$ uchi yotgan yarim tekislikdagi uchburchak bo'lib, u $ABC$ uchburchakka teng bo'lsin (21- rasm).

$A_1B_1 = A_1B_2$ bo'lgani uchun $B_2$ uch $B_1$ uch bilan ustma-ust tushadi (22- rasm).

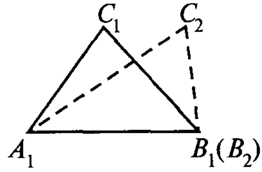
$\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$ bo'lgani uchun $A_1C_2$ nur $A_1C_1$ nur bilan ustma-ust tushadi (23- rasm).



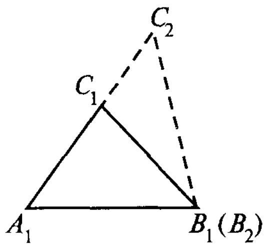

**20- rasm.**



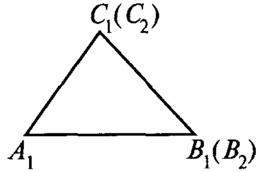

**21- rasm.**




**22- rasm.**




**23- rasm.**




**24- rasm.**

$A_1C_1 = A_1C_2$ bo‘lgani uchun $C_2$ uch $C_1$ uch bilan ustma-ust tushadi (24- rasm).

Shunday qilib, $A_1B_1C_1$ uchburchak $A_1B_2C_2$ uchburchak bilan ustma-ust tushadi, demak, u $ABC$ uchburchakka teng.

Teorema isbotlandi.

***Mashqlar***

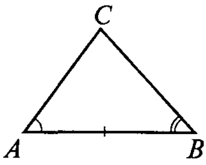
**1.** Tomonlari 5 sm, 8 sm va burchaklaridan biri 30° bo‘lgan uchburchak chizing. Buni necha usulda bajarish mumkin? Agar 30° li burchak uzunliklari 5 sm va 8 sm bo‘lgan tomonlar orasida bo‘lsa-chi?

**2.** Tomonlari $AB = 4$ sm, $AC = 3$ sm va $\angle A = 40°$ bo‘lgan teng uchburchaklarni yasang. Shu uchburchaklarning tengligi haqida qanday xulosaga kelish mumkin?

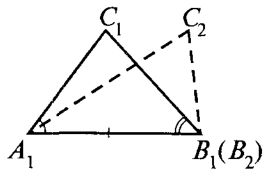
## 9- §. Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomati

Har qanday uchburchakda uchta tomon va uchta burchak mavjud ekanligi bizga ma’lum.

$ABC$ uchburchakda $AB$ tomon $A$ va $B$ burchaklarning *umumiy tomoni* deyiladi, bu burchaklar esa shu *tomonga yopishgan burchaklar* deb ataladi.




**25- rasm.**




**26- rasm.**

T e o r e m a . *Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan burchaklari boshqa uchburchakning mos tomoni va unga yopishgan burchaklariga teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng bo'ladi.*

I s b o t i . $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ va $\angle B = \angle B_1$ bo'lsin (25, 26- rasmlar).

Bu uchburchaklarning tengligini isbotlaymiz.

$A_1B_2C_2$ uchburchak $B_2$ uchi $A_1B_1$ nurda va $C_2$ uchi $A_1B_1$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $C_1$ uchi yotgan yarim tekislikdagi uchburchak bo'lib, u $ABC$ uchburchakka teng bo'lsin.

$A_1B_2 = A_1B_1$ bo'lgani uchun $B_2$ uch $B_1$ uch bilan ustma-ust tushadi. $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ va $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$ bo'lgani uchun $A_1C_1$ nur $A_1C_2$ nur bilan, $B_1C_2$ nur esa $B_1C_1$ nur bilan ustma-ust tushadi. Bundan $C_2$ uchning $C_1$ uch bilan ustma-ust tushishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $A_1B_1C_1$ uchburchak $A_1B_2C_2$ uchburchak bilan ustma-ust tushadi, demak, u $ABC$ uchburchakka teng.

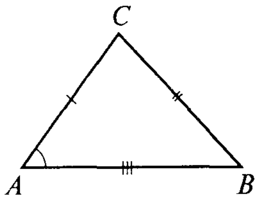
Teorema isbotlandi.

***Mashqlar***

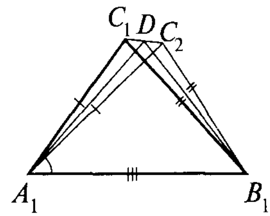
1. Uzunligi 4 sm li kesma olib, shu kesmaning uchlarida 30° va 45° li burchaklarni yasang. Qaysi holda uchburchak hosil bo'ladi?
2. $AB = 3$ sm, $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ bo'lgan uchburchak yasang.

## 10- §. Uchburchaklar tengligining uchinchi alomati

T e o r e m a . *Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng bo'ladi.*




**27- rasm.**




**28- rasm.**

I s b o t i. $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar shunday ikkita uchburchaklarki, ularda $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ bo'lsin (27, 28- rasmlar).

Bu uchburchaklarning tengligini isbotlaymiz.

Uchburchaklar teng emas deb faraz qilaylik. U holda bu uchburchaklarda $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle C \neq \angle C_1$, $B \neq \angle B_1$ bo'ladi.

$A_1B_1C_2$ uchburchak $ABC$ uchburchakka teng bo'lib, uning $C_2$ uchi $A_1B_1$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $C_1$ uch bilan bitta yarim tekislikda yotadigan uchburchak bo'lsin.

$D$ nuqta $C_1C_2$ kesmaning o'rtasi bo'lsin. $A_1C_1C_2$ va $B_1C_1C_2$ uchburchaklar $C_1C_2$ umumiy asosga ega bo'lsin. Shu sababli ulardagi $A_1D$ va $B_1D$ to'g'ri chiziqlar $C_1C_2$ to'g'ri chiziqqa perpendikulardir. $A_1D$ va $B_1D$ kesmalar ustma-ust tushmaydi, chunki $A_1$, $B_1$, $D$ nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Ammo $C_1C_2$ to'g'ri chiziqning $D$ nuqtasi orqali shu to'g'ri chiziqqa faqat bitta perpendikular o'tkazishimiz mumkin. Biz qarama-qarshilikka duch keldik.

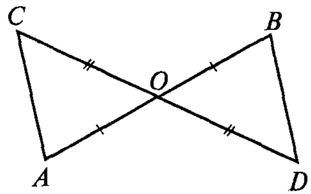
Teorema isbotlandi.

Yuqorida keltirilgan uchala alomat har qanday uchburchaklar uchun ham o'rinlidir.

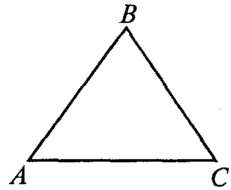
1 - m a s a l a. $AB$ va $CD$ kesmalar $O$ nuqtada kesishadi, bu nuqta har qaysi kesmaning o'rtasi, $AC = 10$ bo'lsa, $BD$ kesma nimaga teng?

Y e c h i l i s h i. Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko'ra $AOC$ va $BOD$ uchburchaklar teng (29- rasm).

Ularda $\angle AOC$ va $\angle BOD$ vertikal burchaklar bo'lgani uchun teng, $AO = OB$, $OC = OD$, chunki $O$ nuqta $AB$ va $CD$ kesmalarning o'rtasi. $AOC$ va $BOD$ uchburchaklar tengligidan ularning $AC$ va $BD$ tomonlari ham tengligi kelib chiqadi. Masala shartiga ko'ra $AC = 10$. Shuning uchun $BD = 10$.




**29- rasm.**




**30- rasm.**

2- m a s a l a . Teng tomonli uchburchaklarning barcha burchaklari tengligini isbotlang.

I s b o t i . $ABC$ berilgan teng tomonli uchburchak bo'lsin: $AB = BC = AC$ (30- rasm).

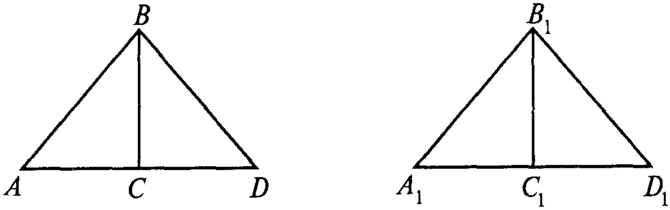
Shartga ko'ra $AB = BC$, demak, bu uchburchak $AB$ asosli teng yonli uchburchakdir. Shuning uchun ham $\angle C = \angle A$. So'ngra $BC = AC$, demak, $ABC$ uchburchak $AB$ asosli teng yonli uchburchakdir, u holda $\angle A = \angle B$. Shunday qilib, $\angle C = \angle A = \angle B$, ya'ni burchaklar teng.

3- m a s a l a . $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = 90°$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ ekanini isbotlang.

I s b o t i . $AC$ tomonning davomida $AC$ ga teng $CD$ kesmani qo'yamiz (31- rasm).

Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko'ra $ABC$ va $DBC$ uchburchaklar teng, chunki ularning $C$ uchidagi burchagi 90°, demak, ular teng, $BC$ umumiy tomon, $AC$ va $CD$ tomonlar yasalishiga ko'ra teng. Uchburchaklarning tengligiga asosan $AB$ va $DB$ tomonlar teng: $AB = DB$.

$A_1C_1$ tomonning davomida $A_1C_1$ tomonga teng $C_1D_1$ kesmani qo'yamiz. $ABC$ va $DBC$ uchburchaklar bilan ish ko'rganimiz singari $A_1B_1C_1$ va $D_1B_1C_1$ uchburchaklar tengligini isbotlaymiz. Uchburchaklarning tengligi sababli tomonlar teng: $A_1B_1 = D_1B_1$.




**31- rasm.**

Endi uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra $ABD$ va $A_1B_1D_1$ uchburchaklarning tengligi haqidagi xulosani chiqaramiz.

Bu uchburchaklarda shartga ko'ra $AB = A_1B_1$, $BD = AB$, $B_1D_1 = A_1B_1$ bo'lgani uchun $BD = B_1D_1$, nihoyat, $AC = A_1C_1$ bo'lgani uchun $AD = A_1D_1$. $ABD$ va $A_1B_1D_1$ uchburchaklarning tengligidan ularning burchaklari teng: $\angle A = \angle A_1$.

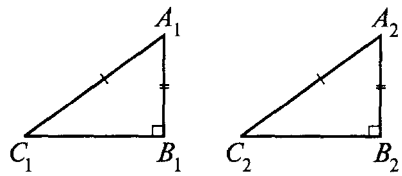
Endi uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko'ra berilgan $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning tengligi haqidagi xulosaga kelamiz, chunki ularda shartga ko'ra $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, isbotga ko'ra $\angle A = \angle A_1$.

### *Mashqlar*

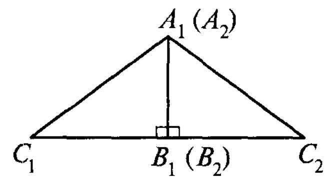
1. Asosi $AB$ bo'lgan teng yonli $ABC$ uchburchakning $C$ uchidan kesmalar: $CA$ tomonga $CA_1$ kesma, $CB$ tomonga $CB_1$ kesma qo'yilgan.
   a) $CAB_1$ va $BA_1C$ uchburchaklar tengligini;
   b) $AB_1B$ va $BAA_1$ uchburchaklarning tengligini isbotlang.
2. $AB$ va $CD$ kesmalar $O$ nuqtada kesishadi. Agar $ACO$ burchak $DBO$ burchakka teng ekani va $BO = CO$ ekani ma'lum bo'lsa, $ACO$ va $DBO$ uchburchaklarning tengligini isbotlang.
3. Teng yonli uchburchakning perimetri 7,5 sm, yon tomoni esa 2 m. Asosini toping.
4. Teng yonli uchburchakning perimetri 15,6 m ga teng. Agar: 1) asosi yon tomonidan 3 m kam bo'lsa; 2) asosi yon tomonidan 3 m katta bo'lsa, uning tomonlarini toping.
5. Asosi $AC$ bo'lgan teng yonli $ABC$ uchburchakda $BP$ mediana o'tkazilgan. Unda $D$ nuqta olingan: 1) $ABD$ va $CBD$; 2) $APD$ va $CPD$ uchburchaklarning tengligini isbotlang.

## 11- §. To'g'ri burchakli uchburchaklarning tenglik alomatlari

1 - t e o r e m a . *Agar bir to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va kateti ikkinchi to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va katetiga mos ravishda teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng bo'ladi.*




**32- rasm.**




**33- rasm.**

I s b o t i. $A_1B_1C_1$ va $A_2B_2C_2$ to'g'ri burchakli uchburchaklarda $A_1C_1 = A_2C_2$ – gipotenuzalar, $A_1B_1 = A_2B_2$ – katetlar (32- rasm).

$\triangle\ A_1B_1C_1 = \triangle\ A_2B_2C_2$ ekanini isbot qilish kerak.

To'g'ri burchakli uchburchaklarning teng katetlarini mos ravishda shunday ustma-ust tushiramizki, gipotenuzalar katetning ikki tomoniga joylashib, teng yonli uchburchak hosil qilsin (33- rasm).

Bunda ikkinchi katetlar ustma-ust tushgan katetlarga perpendikular bo'lgani uchun $C_1C_2$ kesmani hosil qiladi. $C_1A_1C_2$ uchburchak teng yonli uchburchak, $A_1B_1$ tomon esa uning ham balandligi, ham bissektrisasi bo'ladi. Demak, $\angle C_1A_1B_1 = \angle\ C_2A_2B_2$, u holda uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko'ra $\triangle\ A_1B_1C_1 = \triangle\ A_2B_2C_2$. Teorema isbotlandi.

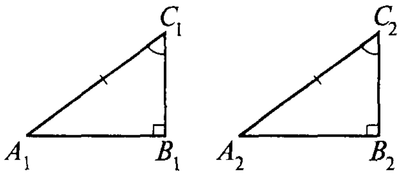
Uchburchaklar tengligining birinchi va ikkinchi alomatlari to'g'ri burchakli uchburchaklar uchun ancha soddalashadi. Birinchi alomatda katetlarning tengligini talab qilish yetarli.

Yuqorida biz har qanday uchburchaklarning tenglik alomatlari bilan tanishgan edik. To'g'ri burchakli uchburchaklar esa uchburchakning xususiy holi hisoblanadi. To'g'ri burchakli uchburchaklarda tenglik alomatlari yuqoridagilarga nisbatan soddaroqdir.

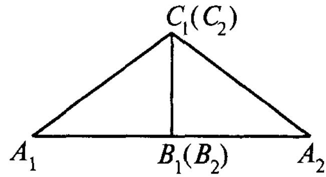
2- t e o r e m a. *Agar bir to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va o'tkir burchagi ikkinchi to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va o'tkir burchagiga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar o'zaro teng bo'ladi.*

I s b o t i. $A_1B_1C_1$ va $A_2B_2C_2$ to'g'ri burchakli uchburchaklarda $A_1C_1 = A_2C_2$ va $\angle\ C_1 = \angle\ C_2$ bo'lsin (34, 35- rasmlar).

$\triangle\ A_1B_1C_1 = \triangle\ A_2B_2C_2$ ekanini ko'rsatamiz.




34- rasm.




35- rasm.

Uchburchaklarni o'zaro teng bo'lgan o'tkir burchaklarga yopishgan katetlari bo'yicha ustma-ust tushiraylik. Bunda $C_1$ nuqta $C_2$ nuqta bilan ustma-ust tushsin, $A_1$ va $A_2$ nuqtalar esa $B_1C_1$ to'g'ri chiziqning turli tomonlarida yotsin. Agar $B_1$ nuqta $B_2$ nuqta bilan ustma-ust tushsa, bu teoremaning to'g'riligi uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko'ra kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $B_1$ nuqta $B_2$ nuqta bilan ustma-ust tushmasin. Bunda $B_1$ va $B_2$ nuqtalarni $A_1A_2$ kesma bilan tutashtirib, $A_1C_1A_2$ teng yonli uchburchaklarni hosil qilamiz. Bu uchburchaklarda $C_1D$ bissektrisa. Demak, $C_1D$ balandlik ham bo'ladi, ya'ni $\angle A_2DC_2 = 90°$.

Bu esa $A_1$ nuqtada ikkita perpendikular $A_1B_1$ va $A_1D$ o'tkazilganligini ko'rsatadi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas. Demak, $A_1$ va $D$ nuqtalar ustma-ust tushadi. Shunday usul bilan $B_2$ va $D_2$ nuqtalar ustma-ust tushishini ko'rsatamiz. Bundan $B_1$ va $B_2$ nuqtalarning ustma-ust tushishi kelib chiqadi.

## *Mashqlar*

**1.** 60° li burchak bissektrisasini yasang.

**2.** Ikkita parallel to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesishidan hosil bo'lgan burchaklardan biri 72° ga teng. Qolgan yettita burchakni toping.

**3.** Teng yonli uchburchakda: 1) asosidagi burchaklardan chiqarilgan bissektrisalar tengligini; 2) shu burchaklardan chiqarilgan medianalar ham tengligini isbotlang.

**4.** Teng yonli uchburchakning tashqi burchaklaridan biri 70° ga teng. Uchburchakning burchaklarini toping.

## 12- §. Geometrik yasashlar

Biz berilgan uzunlikdagi kesmani va markazi hamda radiusi ma'lum bo'lgan aylanani chizg'ich va sirkul yordamida yasashni bilamiz.

Endi ba'zi geometrik shakllarni yasash uchun talab qilinadigan shartlarni o'rganamiz. Geometrik shakllarni yasashda faqat chizg'ich va sirkuldan foydalanamiz.

### Aylana

Tekislikning berilgan nuqtadan bir xil uzoqlashgan hamma nuqtalaridan iborat shakl *aylana* deyiladi. Berilgan nuqta aylananing *markazi* deyiladi.

Aylana nuqtalaridan uning markazigacha bo'lgan masofa aylananing *radiusi* deyiladi (36- rasm).

Aylananing ikkita nuqtasini tutashtiruvchi kesma *vatar* deyiladi.

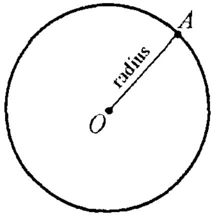
Aylana markazidan o'tuvchi vatar aylana *diametri* deyiladi (37- rasm). $BC$ va $MN$ – vatarlar, $AD$ – diametr.

Uchburchakning barcha uchlaridan o'tgan aylana shu uchburchakka *tashqi chizilgan aylana* deyiladi.

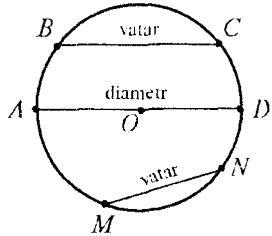
T e o r e m a. *Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchak tomonlarining o'rtasidan o'tkazilgan perpendikularning kesishish nuqtasidan iborat.*

I s b o t i. $ABC$ berilgan uchburchak, $O$ nuqta shu uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi bo'lsin (38- rasm).

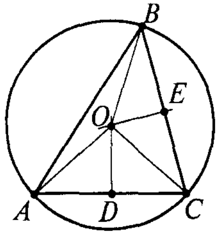
$O$ markazni uchburchakning uchlari $A$, $B$ va $C$ nuqtalari bilan tutashtiramiz. U holda $AOC$ uchburchak teng yonli, chunki uning $OA$ va $OC$ tomonlari radiuslar sifatida teng.




**36- rasm.**




**37- rasm.**




**38- rasm.**

Bu uchburchakning $OD$ medianasi bir vaqtning o'zida uning balandligi hamdir.

Shu sababli aylananing markazi joylashgan $OD$ balandlik $AC$ tomonga perpendikular bo'lib, uning o'rtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqda yotadi.

Xuddi shuningdek, $OBC$ va $OAB$ uchburchaklar teng yonli bo'lgani sababli, ularning uchidan asosiga tushirilgan $OE$ va $OF$ medianalar bir vaqtning o'zida balandlik ham bo'ladi. Shu sababli aylananing markazidan o'tgan $OE$ va $OF$ balandliklar $BC$ va $AB$ tomonlarning o'rtasiga perpendikular bo'ladi. Demak, uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchak tomonlarining o'rtasiga o'tkazilgan perpendikularlarning kesishish nuqtasida bo'lar ekan.

Teorema isbot qilindi.

Kesmaning o'rtasidan unga perpendikular holda o'tuvchi to'g'ri chiziq *o'rta perpendikular* deb ataladi.

## Yasashga doir masalaning mohiyati

Geometrik mazmunli masalalar yechilishiga ko'ra uch guruhga bo'linadi:

1 . Hisoblashga doir masalalar.

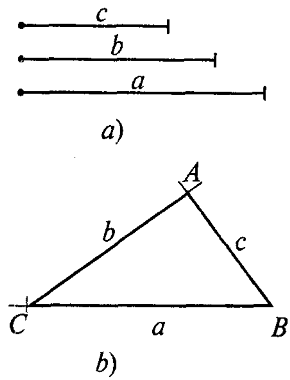
2. Isbotlashga doir masalalar.

3. Yasashga doir masalalar.

Yasashga doir masalada geometrik shakllarni berilgan chizmachilik asboblari yordamida yasash haqida so'z boradi. Bu asboblar sirkul va chizg'ichdir. Bunday masalani yechish faqat shaklni yasashdan iborat bo'lmay, balki bu ishni qanday amalga oshirish va tegishli isbotni berishdan iboratdir. *Agar shaklni yasash usuli ko'rsatilsa hamda ko'rsatilgan yasashlarni bajarish natijasida talab qilingan xossalarga ega bo'lgan shakl hosil qilinishi isbotlansa, masala yechilgan hisoblanadi.*

Chizg'ichdan geometrik yasashlar asbobi sifatida foydalanib, ixtiyoriy to'g'ri chiziqni; berilgan nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziqni; berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqni chizish mumkin. Chizg'ich bilan yasashga doir boshqa birorta ishni bajarish mumkin emas. Hatto bo'linmalari belgilab qo'yilgan chizg'ich yordamida kesmalarni qo'yib chizish ham mumkin emas.

Sirkul geometrik yasash asbobi sifatida berilgan markazdan berilgan radiusli aylana chizish imkonini beradi. Jumladan, sirkul yordamida berilgan to'g'ri chiziqqa berilgan nuqtadan kesmani qo'yib chizish, berilgan kesmani teng ikkiga bo'lish mumkin va h.k.




39- rasm.

## 13- §. Berilgan tomonlarga ko'ra uchburchak yasash

M a s a l a . Berilgan $a$, $b$, $c$ tomonlarga ko'ra uchburchak yasalsin (39- rasm).

Y e c h i l i s h i . Chizg'ich yordamida ixtiyoriy to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unda ixtiyoriy $B$ nuqtani belgilaymiz .

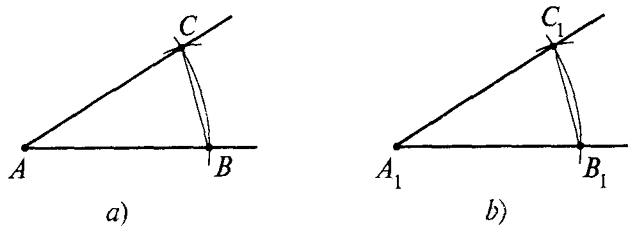
Sirkul oyoqlarini $a$ ga teng qilib ochib, markazi $B$ nuqtada va radiusi $a$ ga teng aylana chizamiz. $C$ — shu aylananing to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi bo'lsin. Endi sirkul oyoqlarini $s$ ga teng qilib ochib, markazi $B$ nuqtada bo'lgan aylana chizamiz. Shu kabi $C$ nuqtani markaz qilib, $b$ radiusli aylana chizamiz. $A$ nuqta shu aylanalarning kesishish nuqtalaridan biri bo'lsin. $AB$ va $AC$ kesmalarni o'tkazamiz. $ABC$ uchburchak tomonlari $a$, $b$, $c$ ga teng va u izlanayotgan uchburchakdir.

## 14- §. Berilgan burchakka teng burchak yasash

M a s a l a . Berilgan burchakka teng burchak yasalsin (40-$a$ rasm).

Y e c h i l i s h i . 40-$a$ rasmda $\angle CAB$ berilgan bo'lsin.

Endi $OM$ nurning $A_1$ nuqtasini markaz qilib, radiusi $AB$ bo'lgan aylana chizamiz (40-$b$ rasm). Bu aylanani berilgan $OM$ nur bilan kesishish nuqtasini $B_1$ bilan belgilaymiz. Markazi $B_1$ nuqtada va radiusi $BC$ bo'lgan aylana chizamiz. Tekislikda




**40- rasm.**

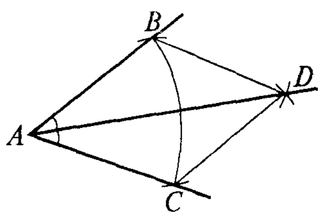
yasalgan bu aylanalarning kesishish nuqtasi $C_1$ izlanayotgan burchak tomonida yotadi. $CAB$ va $C_1A_1B_1$ burchaklarning tengligini isbotlash uchun $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning tengligini nazarga olamiz, chunki bu uchburchaklarning mos tomonlari teng. Demak, $\angle C_1A_1B_1$ – izlanayotgan burchak.

## 15- §. Burchak bissektrisasini yasash

M a s a l a . Berilgan burchakning bissektrisasi yasalsin.

Y e c h i l i s h i . Berilgan burchakning $A$ uchini markaz qilib, ixtiyoriy radiusli aylana chizamiz (41- rasm).

$B$ va $C$ nuqtalar aylananing burchak tomonlari bilan kesishish nuqtalari bo'lsin. Endi $B$ va $C$ nuqtalarni markaz qilib, $BC$ radiusli aylanalar chizamiz. $D$ nuqta ularning berilgan burchak ichidagi kesishish nuqtasi bo'lsin. $AD$ nurni o'tkazamiz. U $\angle BAC$ burchakni teng ikkiga bo'ladi, chunki $ABD$ va $ACD$ uchburchaklar teng ($AD$ tomon umumiy, $AB = AC$ va $BD = DC$ bo'lgani sababli) va ularning $DAC$, $DAB$ burchaklari mos burchaklardir. Demak, $AD$ – bissektrisa.




**41- rasm.**

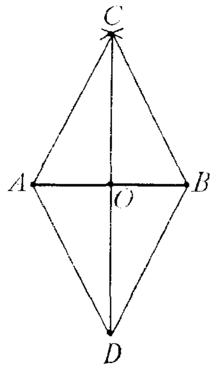
## 16- §. Kesmani teng ikkiga bo'lish

M a s a l a . Berilgan kesma teng ikkiga bo'linsin.

Y e c h i l i s h i . $AB$ berilgan kesma bo'lsin (42- rasm). $A$ va $B$ nuqtalarni markaz qilib, $AB$ radiusli aylanalar chizamiz. $C$ va $D$ nuqtalar aylanalarning kesishish nuqtalari bo'lsin.

Ular $AB$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan turli yarim tekisliklarda yotadi. $CD$ kesma $AB$ to‘g‘ri chiziqni biror $O$ nuqtada kesib o‘tadi. Ana shu $O$ nuqta $AB$ kesmaning o‘rtasidir.

Haqiqatan ham, uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko‘ra $CAD$ va $CBD$ uchburchaklarning tengligi kelib chiqadi. Bundan $\angle ACO = \angle BCO$ . Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko‘ra $ACO$ va $BCO$ uchburchaklar teng. Bu uchburchaklarning $AO$ va $BO$ tomonlari mos tomonlardir, shu sababli ular teng. Shunday qilib, $O$ nuqta $AB$ kesmaning o‘rtasidir.



**42- rasm.**

## 17- §. Perpendikular to‘g‘ri chiziq yasash

M a s a l a. Berilgan $O$ nuqta orqali berilgan $a$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsin.

Y e c h i l i s h i. Ikki hol bo‘lishi mumkin: 1) $O$ nuqta $a$ to‘g‘ri chiziqda yotadi; 2) $O$ nuqta $a$ to‘g‘ri chiziqda yotmaydi.

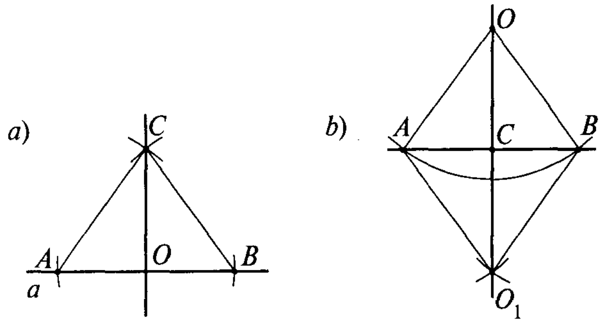
1- holni qaraymiz (43-*a* rasm).

$O$ nuqtadan ixtiyoriy radiusli aylana o‘tkazamiz. Bu aylana $a$ to‘g‘ri chiziqni ikkita $A$ va $B$ nuqtalarda kesib o‘tadi, bu $A$ va $B$ nuqtalarni markaz qilib, $AB$ radiusli aylanalar o‘tkazamiz. $C$ nuqta ularning kesishish nuqtalaridan biri bo‘lsin. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq $O$ va $C$ nuqtalardan o‘tadi. $ACO$ va $BCO$ uchburchaklarning $O$ uchidagi burchaklari tengligidan $OC$ va $AB$ to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularligi kelib chiqadi. Uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko‘ra $ACO$ va $BCO$ uchburchaklar teng.

2- holni qaraylik (43-*b* rasm).

$O$ nuqtadan $a$ to‘g‘ri chiziqni kesuvchi aylana o‘tkazamiz. $A$ va $B$ nuqtalar aylananing $a$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtalari bo‘lsin.

$A$ va $B$ nuqtalardan o‘sha radiusli aylanalar o‘tkazamiz. $O_1$ nuqta bu aylanalarning kesishish nuqtasi bo‘lib, u $O$ nuqta yotgan yarim tekislikdan boshqa yarim tekislikda yotadi.




**43- rasm.**

Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq $O$ va $O_1$ nuqtalar orqali o‘tadi. Shuni isbotlaymiz. $AB$ va $OO_1$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini $C$ bilan belgilaymiz. $\triangle AOB$ va $\triangle AO_1B$ lar uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko‘ra teng. Shu sababli $OAC$ burchak $O_1AC$ burchakka teng. U holda $\triangle OAC$ va $\triangle O_1AC$ birinchi alomatga ko‘ra teng. Demak, ularning $ACO$ va $ACO_1$ burchaklari teng. Bular qo‘shni burchaklar bo‘lgani uchun to‘g‘ri burchaklardir. Shunday qilib, $OC$ berilgan $O$ nuqtadan $a$ to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikular.

## *Mashqlar*

1. Aylana markazidan chiqadigan har qanday nur aylanani bitta nuqtada kesib o‘tishini isbotlang. (*Ko‘rsatma*: nurda radiusga teng kesma qo‘ying.)
2. Aylanani berilgan nuqtasidan diametr va radiusga teng vatar o‘tkazilgan. Diametr bilan vatar orasidagi burchakni toping.
3. Berilgan $a$, $b$, $c$ tomonlar bo‘yicha uchburchak yasang:
   1) $a = 2$ sm, $b = 3$ sm, $c = 4$ sm;
   2) $a = 3$ sm, $b = 4$ sm, $c = 5$ sm;
   3) $a = 4$ sm, $b = 5$ sm, $c = 6$ sm.
4. $ABC$ uchburchak berilgan. Unga teng boshqa $ABD$ uchburchak yasang.
5. Berilgan radiusi bo‘yicha berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi aylana yasang.

6. Quyidagi ma'lumotlarga ko'ra $ABC$ uchburchakni yasang.

1) Ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra:

a) $AB = 5$ sm, $AC = 6$ sm, $\angle A = 40°$;

b) $AB = 3$ sm, $BC = 5$ sm, $\angle B = 70°$.

2) Bir tomoni va unga yopishgan burchaklari bo'yicha:

a) $AB = 6$ sm, $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$;

b) $AB = 4$ sm, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$.

7. Burchakni to'rtta teng qismga bo'ling.

8. $60°$ li va $30°$ li burchak yasang. (*Ko'rsatma*: teng tomonli uchburchakni yasashdan boshlang.)

9. Gipotenuzasi va bir katetiga ko'ra to'g'ri burchakli uchburchak yasang.

10. $A$, $B$, $C$ nuqtalar aylanada yotadi. Agar $ABC$ burchak $30°$ ga, aylana diametri esa 10 sm ga teng bo'lsa, $AC$ vatar nimaga teng bo'ladi?

## 18- §. Uchburchak ichki burchaklari yig'indisi

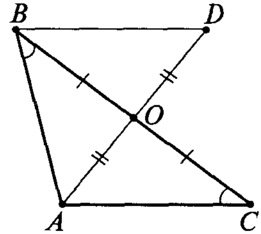
T e o r e m a. *Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180° ga teng.*

I s b o t i. $\triangle ABC$ berilgan uchburchak bo'lsin (44- rasm).

$BC$ tomonning o'rtasini $O$ bilan belgilaymiz. $AO$ kesma davomida $OA$ kesmaga teng $OD$ kesmani qo'yamiz. $BOD$ va $COA$ uchburchaklar teng, chunki ularning $O$ uchidagi burchaklari vertikal burchaklar sifatida teng, yasashga ko'ra esa $OB = OC$, $OA = OD$.

Bu uchburchaklarning tengligidan $DBO$ va $ACO$ burchaklarning tengligi kelib chiqadi.

$AC$, $BD$ to'g'ri chiziqlar va $BC$ kesuvchiga nisbatan $DBO$ va $ACO$ burchaklar ichki almashinuvchi burchaklardir.



**44- rasm.**

Haqiqatan ham, $A$ va $D$ nuqtalar $BC$ to'g'ri chiziqqa nisbatan turli yarim tekisliklarda yotadi, chunki $AD$ kesma $BC$ to'g'ri chiziqni kesib o'tadi.

Ichki almashinuvchi *DBO* va *ACO* burchaklarning tengligidan:

*agar ichki almashinuvchi burchaklar teng bo'lsa yoki ichki bir tomonli burchaklarning yig'indisi 180° ga teng bo'lsa, to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi*, degan teoremaga asosan *AC* va *BD* to'g'ri chiziqlar parallel degan natija kelib chiqadi.

*AC*, *BD* to'g'ri chiziqlar va *AB* kesuvchi uchun *DBO* va *CAB* burchaklar ichki bir tomonli burchaklardir.

Haqiqatan ham, *C* va *D* nuqtalar *AB* to'g'ri chiziqqa nisbatan bitta yarim tekislikda, ya'ni *O* nuqta yotgan yarim tekislikda yotadi. *AC* va *BD* to'g'ri chiziqlar parallel bo'lgani uchun ichki bir tomonli *CAB* va *DBA* burchaklarning yig'indisi 180° ga teng.

*DBA* burchak *DAC* va *ABC* burchaklarning yig'indisiga teng, chunki *BC* nur oxirlari *ABD* burchak tomonlarida yotgan *AD* kesmani kesib o'tadi. Isbotlanganiga ko'ra *DBC* burchak *ACB* burchakka teng. Demak, *ABC* uchburchak burchaklarining yig'indisi, ya'ni $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$ yig'indi *AC* va *BD* parallel to'g'ri chiziqlar bilan *AB* kesuvchi hosil qilgan ichki bir tomonli burchaklarning yig'indisiga, ya'ni 180° ga teng.

## 19- §. Uchburchakning tashqi burchagi

T a ' r i f . Uchburchakning berilgan uchidagi *tashqi burchagi* deb, uchburchakning shu uchidagi burchagiga qo'shni burchakka aytiladi (45- rasm).

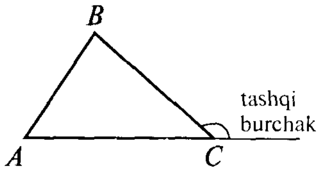
Uchburchakning berilgan uchidagi burchagini shu ichidagi tashqi burchagi bilan almashtirib yubormaslik uchun u *ichki burchak* deb ataladi. Oldingi mavzudagi teorema uchburchakning faqat ichki burchaklariga taalluqli edi.

T e o r e m a . *Uchburchakning tashqi burchagi o'ziga qo'shni bo'lmagan ikkita ichki burchak yig'indisiga teng.*

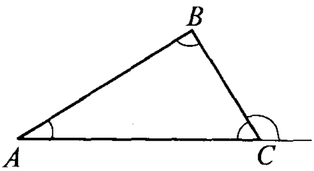
I s b o t i . *ABC* uchburchakning burchaklari yig'indisi haqidagi teoremaga ko'ra $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, bundan $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$ (46- rasm).

Bu tenglikning o'ng qismi uchburchakning *C* uchidagi tashqi burchagidir. Teorema isbotlandi.

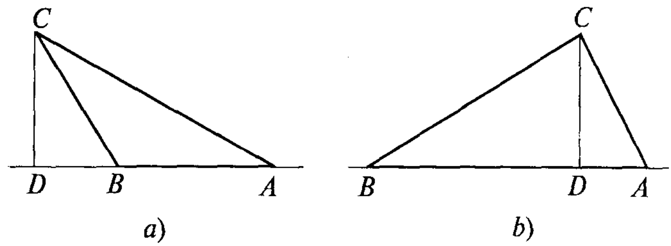
X u l o s a . *Uchburchakning tashqi burchagi o'ziga qo'shni bo'lmagan istalgan ichki burchagidan katta.*




**45- rasm.**




**46- rasm.**




**47- rasm.**

Masalalar ko'rib chiqamiz.

1 - m a s a l a . Teng tomonli uchburchakning burchaklari nimaga teng?

Y e c h i l i s h i . Teng tomonli uchburchakning burchaklari o'zaro teng bo'lishini bilamiz. Shu burchaklarning yig'indisi 180° ga teng, shuning uchun ularning har biri 60° ga teng.

2 - m a s a l a . *ABC* uchburchakning *CD* balandligi o'tkazildi. Agar uchburchakning *A* va *B* burchaklari o'tkir bo'lsa, uchta – *A*, *B* va *D* nuqtalardan qaysi biri qolgan ikkitasining orasida yotadi?

Y e c h i l i s h i . *B* nuqta *A* va *D* nuqtalar orasida yota olmaydi, chunki bu holda *B* burchak o'tkir burchak bo'la olmaydi (47-*a* rasm). Xuddi shunday, *A* nuqta ham *A* va *D* nuqtalar orasida yota olmaydi, sababi *ABC* uchburchakda *D* burchak to'g'ri burchak va *A* burchak o'tkir burchakdir.

Demak, *D* nuqta *A* va *B* nuqtalar orasida yotadi (47-*b* rasm).

## *Mashqlar*

**1.** Agar biror to'g'ri chiziq ikkita parallel to'g'ri chiziqdan birini kesib o'tsa, u ikkinchisini ham kesib o'tishini isbotlang.

2. Agar uchburchakning ikkita burchagi ma'lum bo'lsa, uning noma'lum burchagini toping:

1) 50° va 30°; 2) 40° va 75°;

3) 65° va 80°; 4) 25° va 120°.

3. Teng yonli uchburchakning tashqi burchaklaridan biri 70° ga teng. Uchburchakning burchaklarini toping.

(*Javob*: 110°, 35°, 35°).

4. Uchburchakning ikkita tashqi burchagi 100° va 150° ga teng. Uning uchinchi tashqi burchagini toping.

(*Javob*: 110°).

5. Uchburchakning ichki burchaklaridan biri 30° ga, tashqi burchaklaridan biri 40° ga teng. Uchburchakning qolgan ichki burchaklarini toping.

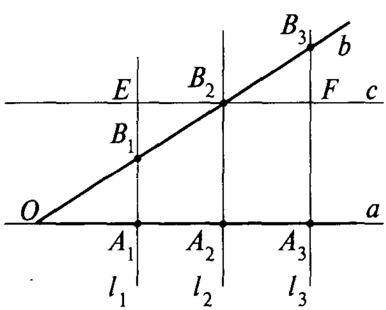
(*Javob*: 140°, 10°).

## 20- §. Fales teoremasi

Tomonlari $a$ va $b$ nurlardan iborat burchakni o'zaro parallel $l_1$, $l_2$, $l_3$ to'g'ri chiziqlar kesib o'tgan (48- rasm).

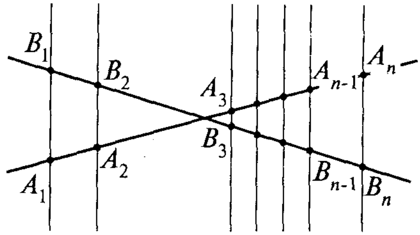
Burchak tomonlarida ularni parallel to'g'ri chiziqlar kesishidan hosil bo'lgan nuqtalarni $A_1$, $A_2$, $A_3$ va $B_1$, $B_2$, $B_3$ bilan belgilaylik. Bunda burchak tomonlarida $A_1A_2$, $A_2A_3$ va $B_1B_2$, $B_2B_3$ kesmalar hosil bo'ladi.

T e o r e m a (Fales teoremasi). *Agar parallel to'g'ri chiziqlarning burchakning bir tomonidan ajratgan kesmalari teng bo'lsa, ikkinchi tomonda ajratilgan kesmalar ham o'zaro teng bo'ladi.*




**48- rasm.**

I s b o t i. Teoremani isbotlash uchun $A_1A_2 = A_2A_3$ ekanidan foydalanib, $B_1B_2 = B_2B_3$ ekanini ko'rsatish kerak. $B_2$ nuqta orqali $a$ tomonga parallel qilib $c$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. To'g'ri chiziqning $l_1$ va $l_2$ to'g'ri chiziqlar bilan kesishishidan hosil bo'lgan nuqtalarni $E$ va $F$ harflari bilan belgilaymiz. Hosil bo'lgan $A_1A_2B_2E$; $A_2A_3FB_2$ to'rtburchaklar parallelogrammdir. Shuning uchun $A_1A_2 = EB_2$; $A_2A_3 = B_2F$ (48- rasm). Rasmda hosil bo'lgan $B_1B_2E$ va $B_2B_3F$ uchburchaklar teng (uchburchaklar tengligini ikkinchi alomatiga ko'ra), chunki ularda $EB_2 = B_2F$.




**49- rasm.**

$B_2$ uchdagi burchaklar vertikal burchaklar, $E$ va $F$ burchaklar esa $l_1$ va $l_3$ to'g'ri chiziqlarni $c$ to'g'ri chiziq kesganda hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun teng. Uchburchaklarning tengligidan ularning mos tomonlari bo'lgan $B_1B_2$ va $B_2B_3$ kesmalarning tengligi kelib chiqadi.

Fales teoremasi faqat burchak uchun emas, balki ixtiyoriy ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq uchun ham o'rinlidir. Bundan tashqari, to'g'ri chiziqlar soni ham istalgancha bo'lishi mumkin (49- rasm).

Bu holda $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, ..., $A_{n-1}A_n$ kesmalarning tengligidan ularga mos $B_1B_2$, $B_2B_3$, $B_3B_4$, ..., $B_{n-1}B_n$ kesmalarning tengligi kelib chiqadi.

## *Mashqlar*

**1.** Berilgan kesmani: 1) 4 ta teng kesmaga; 2) 6 ta teng kesmaga bo'ling.

**2.** To'g'ri to'rtburchak tomonlarining o'rtalari parallelogrammning uchlari ekanini isbotlang.

**3.** Biror $PQRC$ to'rtburchak yasang. Uning qarama-qarshi tomonlarini va burchaklarini ko'rsating.

**4.** Parallelogrammning diagonali uning ikki tomoni bilan 25° li va 35° li burchaklar hosil qiladi. Parallelogrammning burchaklarini toping.

(*Javob*: 60°, 60°, 120°).

5. Parallelogrammning burchaklaridan ikkitasining yig'indisi: 1) 80° ga; 2) 100° ga; 3) 160° ga teng bo'lsa, parallelogrammning hamma burchaklarini toping.

(*Javob*: 1) 40°, 40°, 140°, 140°;
2) 50°, 50°, 130°, 130°;
3) 80°, 80°, 100°, 100°).

6. Parallelogramm burchaklaridan ikkitasining ayirmasi: 1) 70° ga; 2) 110° ga; 3) 140° ga teng bo'lsa, parallelogrammning hamma burchaklarini toping.

(*Javob*: 1) 55°, 55°, 125°, 125°;
2) 35°, 35°, 145°, 145°;
3) 20°, 20°, 160°, 160°).

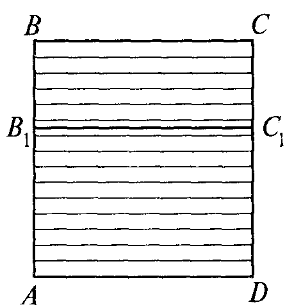
## 21- §. To'rtburchak yuzini hisoblash

Tomonlari $a$ va $b$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzini topamiz. Buning uchun oldin asoslari teng bo'lgan ikkita to'g'ri to'rtburchak yuzlarining nisbati ular balandliklarining nisbati kabi bo'lishini isbotlaymiz.

$ABCD$ va $AB_1C_1D$ to'g'ri to'rtburchaklar umumiy asoslari $AD$ bo'lgan to'rtburchaklar bo'lsin (50- rasm).

$S$ va $S_1$ – ularning yuzlari. $\frac{S_1}{S} = \frac{AB_1}{AB}$ ekanini isbotlaymiz.

To'g'ri to'rtburchakning $AB$ tomonini $n$ ta teng qismga bo'lamiz, bu qismlarning har birining balandligi $\frac{AB}{n}$ ga teng.



50- rasm.

$m$ – $AB_1$ tomonda yotgan bo'linish nuqtalari soni bo'lsin. Shuning uchun:

$$\frac{AB}{n} m \le AB_1 \le \frac{AB}{n}(m+1).$$

Bunda, $AB$ ga bo'lib, topamiz:

$$\frac{m}{n} \le \frac{AB_1}{AB} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*).$$

Bo'linish nuqtalaridan $AD$ asosga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakni $n$ ta teng to'g'ri to'rtburchakka bo'ladi. Bu to'rtburchaklardan har birining yuzi $\frac{S}{n}$ ga teng.

$AB_1C_1D$ to'g'ri to'rtburchak dastlabki $m$ ta to'g'ri to'rtburchakni, pastdan hisoblaganda, o'z ichiga oladi va o'zi $m+1$ ta to'g'ri to'rtburchak uchida yotadi. Shu sababli

$$\left(\frac{S}{n}\right)m \leq S_1 \leq \left(\frac{S}{n}\right)(m+1),$$

bundan

$$\frac{m}{n} \leq \frac{S_1}{S} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \qquad (**).$$

(*) va (**) tengliklardan $\frac{AB_1}{AB}$ va $\frac{S_1}{S}$ sonlarning ikkalasi ham $\frac{m}{n}$ va $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ sonlar orasida yotishini ko'ramiz. Bu sonlar shuning uchun bir-biridan $\frac{1}{n}$ dan katta bo'lmagan son qadar farq qiladi, $n$ ni istagancha katta qilib olish mumkinligi tufayli bu faqat $\frac{S_1}{S} = \frac{AB_1}{AB}$ bo'lgandagina bo'lishi mumkin. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

To'g'ri to'rtburchakning yuzi

$$S = a \cdot b$$

formula bilan ifodalanadi.

## *Mashqlar*

**1.** Agar teng yonli uchburchakning asosi 120 sm ga, yon tomoni 100 sm ga teng bo'lsa, uning yuzini toping.

(*Javob*: 4800 $sm^2$).

**2.** To'g'ri to'rtburchakning tomonlari nisbati 4:9 ga teng bo'lib, uning yuzi 144 $m^2$ bo'lsa, uning tomonlari nimaga teng?

(*Javob*: 8 m, 18 m).

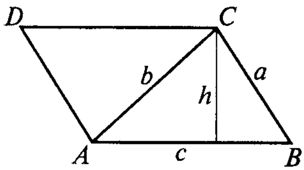
**3.** Kvadrat va rombning perimetri bir xil. Bu shakllardan qaysi birining yuzi katta?

(*Javob*: kvadrat. Javobingizni tushuntiring.).

## 22- §. Uchburchakning yuzi

$ABC$ — berilgan uchburchak bo'lsin (51- rasm).

Bu uchburchakni rasmda ko'rsatilganidek, $ABCD$ parallelogrammgacha to'ldiramiz. Parallelogrammning yuzi $ABC$ va $CDA$ uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng. Bu uchburchaklar teng bo'lgani uchun parallelogrammning yuzi $ABC$ uchburchak yuzining ikkilanganiga teng. Parallelogrammning $AB$ tomonga mos balandligi $ABC$ uchburchakning $AB$ tomoniga o'tkazilgan balandligiga teng. Bundan, *uchburchakning yuzi uning tomoni bilan shu tomonga tushirilgan balandligi ko'paytmasining yarmiga* teng, degan xulosa chiqadi:




**51- rasm.**

$$S = \frac{1}{2} ch .$$

Endi *uchburchakning yuzi uning istalgan ikkita tomoni ko'paytmasini shu tomonlar orasidagi burchak sinusiga ko'paytirilganining yarmiga teng* ekanini isbotlaymiz.

$ABC$ — berilgan uchburchak bo'lsin (52- rasm).

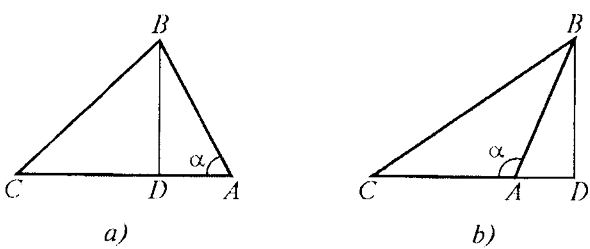
$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$$

ekanini isbotlaymiz.

$ABC$ uchburchakning $BD$ balandligini o'tkazamiz.

Ushbu $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ tenglikka ega bo'lamiz.

$ABD$ to'g'ri burchakli uchburchakdan: agar $\angle\alpha$ o'tkir burchak bo'lsa, $BD = AB \sin\alpha$ (52-*a* rasm), agar $\angle\alpha$ o'tmas burchak bo'lsa, $BD = AB \sin(180° - \alpha)$ (52-*b* rasm), so'ngra $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.




**52- rasm.**

Shu sababli har qanday holda ham $BD = AB \sin\alpha$, shunday qilib, uchburchakning yuzi

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha .$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

### *Mashqlar*

**1.** Uch tomoniga ko'ra uchburchakning yuzini toping:

1) 13; 14; 15; 2) 6; 8; 10;

3) 8; 8; 14; 4) $\frac{25}{6}$; $\frac{29}{6}$; 6.

*Ko'rsatma:*

Geron formulasidan foydalaning:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,, \quad \text{bunda} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

(*Javob*: 1) 84; 4) 10).

**2.** Uchburchakning $a$ tomoni va unga yopishgan $\alpha$ va $\beta$ burchaklariga ko'ra uchburchakning yuzini toping.

**3.** Tomonlari:

1) 13; 14; 15; 2) 5; 5; 6; 3) 17; 65; 80

ga teng uchburchakning eng kichik balandligini toping.

(*Javob*: 2) 4; 3) 7,2).

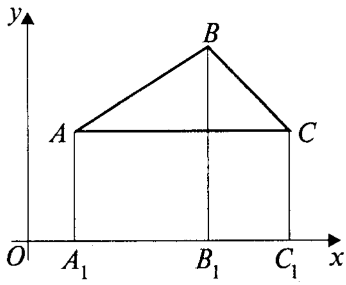
**4.** Tomonlari: 1) $\frac{25}{6}$; $\frac{29}{6}$; 6; 2) 13; $37\frac{12}{13}$; $47\frac{1}{3}$ ga teng uchburchakning eng katta balandligini toping.

(*Javob*: 1) 4,6; 2) $\frac{5040}{169}$).

## 23- §. Uchlarining koordinatalari bilan berilgan uchburchakning yuzini topish

Tekislikda uchta nuqta $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$; $C(x_3; y_3)$ koordinatalari bilan berilgan bo'lib, $ABC$ uchburchakni qaraymiz (53- rasm).

Masala berilgan nuqtalarning koordinatalariga ko'ra shu $ABC$ uchburchakning yuzini topishdan iborat.




**53- rasm.**

$A$, $B$ va $C$ nuqtalardan $Ox$ o‘qiga perpendikularlar tushirib, ularning asoslarini mos ravishda $A_1$, $B_1$, $C_1$ bilan belgilaymiz. Bunda

$$OA_1 = x_1,\ OB_1 = x_2,\ OC_1 = x_3,$$
$$AA_1 = y_1,\ BB_1 = y_2,\ CC_1 = y_3$$

bo‘lib,

$$A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1,$$
$$B_1C_1 = OC_1 - OB_1 = x_3 - x_2,$$
$$A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x_3 - x_1$$

bo‘ladi.

Maktab geometriya kursidan ma’lumki, trapetsiyaning yuzi ikkala asosi yig‘indisining yarmi bilan balandligining ko‘paytmasiga teng:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

bunda: $a$, $b$ — trapetsiyaning asoslari, $h$ — uning balandligi.

$AA_1B_1B$; $BB_1C_1C$ va $AA_1C_1C$ trapetsiyalarning yuzlari $S_{AA_1B_1B}$, $S_{BB_1C_1C}$, $S_{AA_1C_1C}$ uchun ushbu tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot A_1B_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1),$$

$$S_{BB_1CC_1} = \frac{BB_1 + CC_1}{2} \cdot B_1C_1 = \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2),$$

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{AA_1 + CC_1}{2} \cdot A_1C_1 = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1).$$

Ravshanki, berilgan uchburchakning yuzi

$$S_{\Delta ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} - S_{AA_1C_1C}.$$

Yuqoridagi tengliklardan foydalanib,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\big((y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_3 - x_2) -$$
$$- (y_3 + y_1)(x_3 - x_1)\big)$$

bo‘lishini topamiz.

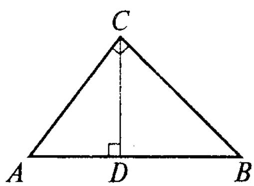
Bu berilgan *uchburchakning yuzini uchlarining koordinatalariga ko‘ra topish formulasi* deyiladi.

## 24- §. Pifagor teoremasi

Yunon olimi Pifagor to‘g‘ri burchakli uchburchak tomonlari orasidagi mavjud bo‘lgan munosabatlarni aniqlab, uni quyidagicha isbotlaydi.

T e o r e m a (Pifagor teoremasi). *To‘g‘ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati katetlari kvadratlarining yig‘indisiga teng.*

I s b o t i . $ABC$ berilgan to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lib, unda burchak $C = 90°$ — to‘g‘ri burchak bo‘lsin. To‘g‘ri burchakning $C$ uchidan $CD$ balandlikni o‘tkazamiz (54- rasm).




**54- rasm.**

Burchak kosinusining ta’rifiga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchaklar $ABC$ va $ACD$ ning o‘tkir burchagi $A$ uchun:

$$\cos\angle A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}, \text{ bundan } AB \cdot AD = AC^2,$$

shunga o‘xshash

$$\cos\angle B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}, \text{ bundan } AB \cdot BD = BC^2.$$

Hosil bo‘lgan tengliklarni hadma-had qo‘shib va $AD + DB = AB$ ekanini hisobga olib, $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$ tenglikni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Pifagor teoremasidan ushbu natija kelib chiqadi:

*to‘g‘ri burchakli uchburchakning istalgan kateti gipotenuzasidan kichik.*

Bundan o‘z navbatida quyidagi natija kelib chiqadi:

*har qanday o‘tkir burchak uchun* $\cos\alpha < 1$.

### *Mashqlar*

**1.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning $a$ va $b$ katetlari berilgan. Gipotenuzani toping:

1) $a = 3$; $b = 4$; 2) $a = 1$; $b = 1$; 3) $a = 5$; $b = 6$.

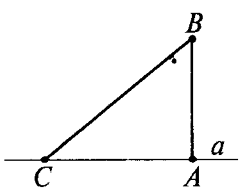
(*Javob*: 1) 5; 2) $\sqrt{2} \approx 1{,}1$; 3) $\sqrt{61} \approx 7{,}8$).

2. To'g'ri burchakli uchburchakning $c$ gipotenuzasi va $a$ kateti berilgan. Ikkinchi katetni toping:
1) $c = 5$; $a = 3$; 2) $c = 13$; $a = 5$; 3) $c = 6$; $a = 5$.
(*Javob*: 1) 4; 2) 12; 3) $\sqrt{11} \approx 3{,}3$ ).

3. To'g'ri burchakli uchburchakning ikki tomoni 3 m va 4 m ga teng. Uchinchi tomonni toping (ikkita holni ko'ring).
(*Javob*: 5 m yoki $\sqrt{7} \approx 2{,}6$ m).

## 25- §. Perpendikular va og'ma

$BA$ kesma $a$ to'g'ri chiziqqa $B$ nuqtadan tushirilgan perpendikular va $C$ nuqta $a$ to'g'ri chiziqning $A$ dan boshqa ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $BC$ kesma $B$ nuqtadan $a$ to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan *og'ma* deyiladi (55- rasm).



**55- rasm.**

$C$ nuqta og'maning *asosi* deyiladi. $AC$ kesma og'maning $a$ to'g'ri chiziqdagi *proyeksiyasi* (soyasi) deyiladi.

Pifagor teoremasidan quyidagi xulosalar kelib chiqadi.

*Agar bir nuqtadan to'g'ri chiziqqa perpendikular va og'malar o'tkazilsa, istalgan og'ma perpendikulardan katta, teng og'malar teng proyeksiyalarga ega, ikkita og'madan qaysi birining proyeksiyasi katta bo'lsa, o'sha og'ma katta bo'ladi.*

Pifagor teoremasiga ko'ra: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Bundan $BC > AB$ ekani ko'rinib turibdi. $AB$ berilgan $AC$ dan qancha katta bo'lsa, $BC$ shuncha katta bo'ladi.

### *Mashqlar*

1. Uchburchakning tomonlarida olingan ixtiyoriy ikki nuqta orasidagi masofa uning eng katta tomonidan katta emasligini isbotlang.
2. To'rtburchak diagonallarining kesishishi ma'lum. Ular uzunliklarining yig'indisi to'rtburchakning perimetridan kichik, ammo yarim perimetridan katta. Shuni isbotlang.

## 26- §. Uchburchaklardagi metrik munosabatlar

Geometrik shakllar ichida eng ko'p uchraydigan va geometrik masalalar yechishda ko'p qo'llaniladigan shakl bu uchburchakdir. Shuning uchun uchburchakka doir yoki uchburchak elementlarining kombinatsiyasi bilan yechiladigan masalalar ko'p uchraydi.

Uchburchak elementlarining kombinatsiyasi orqali beriladigan masalalar asosan quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

*1. Uchburchakning uchta tomoniga ko'ra beriladigan masalalar.*

*2. Uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra beriladigan masalalar.*

*3. Uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko'ra beriladigan masalalar.*

*4. Uchburchakning ikki tomoni va bu tomonlardan biri qarshisidagi burchakka ko'ra beriladigan masalalar.*

*5. Uchburchakning bir tomoni hamda unga qarshi yotgan va yopishgan burchagiga ko'ra beriladigan masalalar.*

Yuqoridagilarga qo'shimcha yana quyidagilarni yozish mumkin:

1. Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

2. Uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi:

$$r = \frac{2S}{p},$$

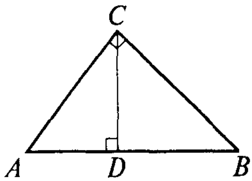
bu yerda: $p = \frac{a+b+c}{2}$.

3. Uchburchakning balandliklari mos ravishda $h_a$, $h_b$, $h_c$ va ichki chizilgan aylananing radiusi $r$ bo'lsa,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

4. To'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagi uchidan uning gipotenuzasiga tushirilgan perpendikular gipotenuza bo'laklari orasida o'rta proporsional miqdordir. Har




**56- rasm.**

bir katet butun gipotenuza bilan uning gipotenuzadagi proyeksiyasi orasida o‘rta proporsional miqdordir, ya’ni (56- rasm):

$$AC^2 = AB \cdot AD\ ,$$
$$CD^2 = AD \cdot BD\ ,$$
$$BC^2 = AB \cdot BD\ .$$

5. Bu yuqoridagi munosabatlardan bevosita to‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari bir xil o‘lchovli bo‘lganda katetlar kvadratlarining yig‘indisi gipotenuzasining kvadratiga teng degan mulohazani isbotlash osondir, ya’ni (56- rasm):

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB(AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

6. Uchburchak burchagining bissektrisasi uning shu burchak qarshisida yotgan tomonini qolgan tomonlariga proporsional burchaklarga bo‘ladi (57- rasm), ya’ni

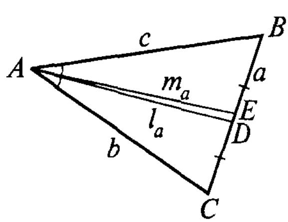
$$BD : DC = AB : AC,$$

bunda $AD = l_a$ — bissektrisa.

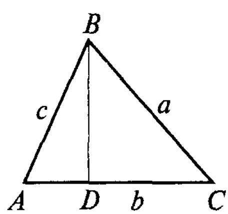
7. Uchburchak medianasi o‘zi chiqqan burchak qarshisida yotgan tomonni teng ikkiga bo‘ladi. Medianalarning uzunliklari ushbu formulalar bilan topiladi (57- rasm):

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$




**57- rasm.**




**58- rasm.**

8. Agar berilgan ixtiyoriy uchburchakning tomonlari mos ravishda $a$, $b$, $c$ bo'lsa, $c$ tomonning $b$ tomondagi proyeksiyasining uzunligi (58- rasm)

$$AD = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}$$

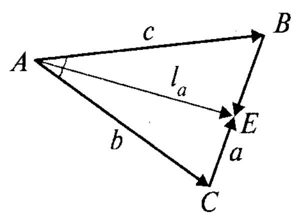
formula bilan topiladi.

Masalalar ko'rib chiqamiz.

1 - masala. $ABC$ uchburchakning tomonlari $a$, $b$, $c$ ga teng. Shu uchburchakning $a$ tomoniga o'tkazilgan $l_a$ bissektrisaning uzunligini hisoblang.

Berilgan: $\triangle ABC$; $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$ (59- rasm).

Topish kerak: $AE = l_a = ?$



**59- rasm.**

Yechilishi. Uchburchak bissektrisasining xossasiga asosan $AB : AC = BE : EC$ ni yoza olamiz. Agar uchburchak tomonlarini vektorlar orqali ifodalasak, u holda $AE$ bissektrisaning

$$\overline{AE} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{AB} + \overline{BE} \cdot \overline{AC}}{\overline{CE} + \overline{BE}}$$

vektorli ifodasini yozish mumkin. Bu ifodaning ikkala tomonini kvadratga oshirsak,

$$AE^2 = \frac{\overline{CE}^2 \cdot \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 \cdot \overline{AC}^2 + 2\overline{CE} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{AC}}{\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 + 2\overline{CE} \cdot \overline{BE}}$$

vektorli ifodani hosil qilamiz. 59- rasmda $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$ ekanini hisobga olib, bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga oshirsak,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

vektorli tenglikka ega bo'lamiz, bundan

$$2\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$$

ekanini hisobga olsak, u holda

$$\overline{AE}^2 = \frac{\overline{CE}^2 \cdot \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 \cdot \overline{AC}^2 + \overline{CE} \cdot \overline{BE} \cdot (\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2)}{\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 + 2\overline{CE} \cdot \overline{BE}}$$

tenglikni hosil qilamiz. O‘ng tomondagi kasrning surat va maxrajini $BE \cdot CE$ ga bo‘lsak,

$$\overline{AE}^2 = \frac{\frac{CE}{BE} \cdot \overline{AB}^2 + \frac{BE}{CE} \cdot \overline{AC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{\frac{CE}{BE} + \frac{BE}{CE} + 2} =$$

$$= \frac{\frac{b}{c} \cdot c^2 + \frac{c}{b} \cdot b^2 + b^2 + c^2 - a^2}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 2} = \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 4p(p-a)$$

hosil bo‘ladi, bu yerda $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Demak,

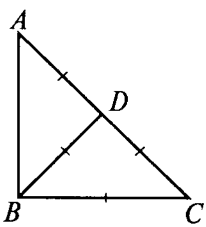
$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)},$$

shunga o‘xshash uchburchakning $b$ va $c$ tomonlariga o‘tkazilgan bissektrisalar uzunligi uchun

$$l_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)} \quad \text{va} \quad l_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$$

formulalarni hosil qilish mumkin.

2 - m a s a l a . Agar teng yonli uchburchakning asosidagi burchakning biridan chiqqan to‘g‘ri chiziq uni ikkita teng yonli uchburchakka ajratsa, berilgan teng yonli uchburchakning burchaklarini toping (60- rasm).




**60- rasm.**

Y e c h i l i s h i . $ABC$ uchburchakda $AB = AC$ va $D$ nuqta $AC$ tomonda yotib, $ABC$ uchburchakni $\triangle\ ADB$ va $\triangle\ DBC$ larga ajratadi, bunda $AD = BD = BC$.

Agar $\angle\ ABD = x$ deb olsak, $\angle\ BCD = \angle\ BDC = 2x$ bo‘ladi. $AB = AC$ bo‘lganligidan $\angle\ CBD = x$ bo‘ladi. Bundan $5x = 180°$ hosil bo‘lib, $x = 36°$ ekani kelib chiqadi.

## 27- §. Kosinuslar teoremasi

To‘g‘ri burchakli uchburchak o‘tkir burchagining *kosinusi* deb shu burchakka yopishgan katetning gipotenuzasiga nisbatiga aytiladi.

T e o r e m a (kosinuslar teoremasi). *Uchburchak istalgan tomonining kvadrati qolgan ikki tomon kvadratlari yig'indisidan shu ikki tomon bilan ular orasidagi burchak kosinusining ikkilangan ko'paytmasini ayirish natijasiga teng.*

I s b o t i . $ABC$ — berilgan uchburchak bo'lsin.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$$

ekanini isbotlaymiz.

$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$ vektor tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikni skalar kvadratga ko'tarib topamiz:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

yoki

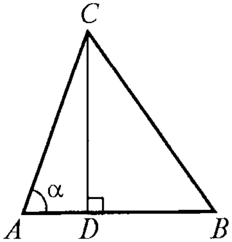
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A.$$

Teorema isbotlandi.

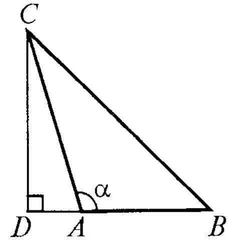
Shuni eslatib o'tamizki, $AC \cdot \cos\angle A$ ning absolut qiymati $AC$ tomonning $BA$ tomonga tushirilgan proyeksiyasi $AD$ ga (61- rasm) yoki $AB$ tomonning davomiga tushirilgan $AD$ proyeksiyasiga (62- rasm) teng.

$AC \cdot \cos\angle A$ ning ishorasi $A$ burchakka bog'liq: $A$ burchak o'tkir bo'lsa «+», $A$ burchak o'tmas bo'lsa «–» ishora olinadi. Bundan ushbu natija kelib chiqadi: *uchburchak tomonining kvadrati qolgan ikkita tomon kvadratlari yig'indisi «+», «–» ulardan birining ikkinchisiga proyeksiyasining ikkilangan ko'paytmasiga teng.*

*«+» ishorani qarshisidagi burchak o'tmas bo'lganda, «–» ishorani esa qarshisidagi burchak o'tkir bo'lganda olish kerak.*




**61- rasm.**




**62- rasm.**

### *Mashqlar*

**1.** Uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi berilgan:

1) $a = 12,\ b = 8,\ \gamma = 60°$; 2) $a = 7,\ b = 23,\ \gamma = 130°$;
3) $b = 9,\ c = 17,\ \alpha = 95°$; 4) $b = 14,\ c = 10,\ \alpha = 145°$;
5) $a = 32,\ c = 23,\ \beta = 152°$; 6) $a = 24,\ c = 18,\ \beta = 15°$.

Uning qolgan burchaklarini va uchinchi tomonini toping.

*Javob:*

1) $\alpha \approx 79°,\ \beta \approx 41°,\ c \approx 10{,}6$; 2) $\alpha \approx 11°,\ \beta \approx 39°,\ c \approx 28$;
3) $\beta \approx 22°,\ \gamma \approx 58°,\ a \approx 19{,}9$; 4) $\beta \approx 21°,\ \gamma \approx 15°,\ a \approx 22{,}9$;
5) $\alpha \approx 16°,\ \gamma \approx 17°,\ b \approx 53{,}4$; 6) $\alpha \approx 130°,\ \gamma \approx 17°,\ b \approx 8{,}09$.

**2.** Uchburchakning ikki tomoni va tomonlardan birining qarshisidagi burchak berilgan:

1) $a = 12,\ b = 5,\ \gamma = 120°$; 2) $a = 27,\ b = 9,\ \alpha = 138°$;
3) $a = 34,\ b = 12,\ \alpha = 164°$; 4) $a = 2,\ b = 4,\ \alpha = 60°$;
5) $a = 6,\ b = 8,\ \alpha = 30°$.

Uning qolgan tomoni va burchaklarini toping.

*Javob:*

1) $c \approx 8{,}69,\ \beta \approx 21°,\ \gamma \approx 30°$; 2) $c \approx 19{,}6,\ \beta \approx 13°,\ \gamma \approx 29°$;
3) $c \approx 23{,}3,\ \beta \approx 6°,\ \gamma \approx 10°$; 4) yechimlari mavjud emas;
5) $c \approx 11{,}4,\ \alpha \approx 42°,\ \gamma \approx 108°$ yoki
$c \approx 2{,}49,\ \beta \approx 138°,\ \gamma \approx 12°$.

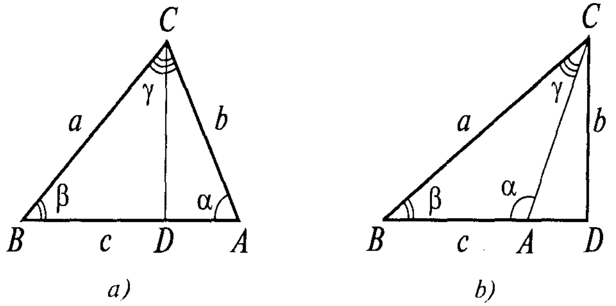
## 28- §. Sinuslar teoremasi

T e o r e m a . *Uchburchak tomonlari o'zlarining qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsional.*

I s b o t i . $a$, $b$, $c$ — tomonlari va shu tomonlar qarshisidagi burchaklar $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bo'lgan uchburchak berilgan (63- rasm).

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ ekanini isbotlaymiz.

$C$ uchidan $CD$ balandlikni tushiramiz. $ACD$ to'g'ri burchakli uchburchakdan $\alpha$ burchak o'tkir bo'lgan holda topamiz.




**63- rasm.**

$$CD = b\sin\alpha \qquad (63\text{-}a \text{ rasm}).$$

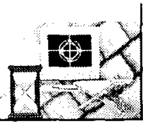
Agar $\alpha$ o'tmas burchak bo'lsa, u holda

$$CD = b\sin(180^\circ - \alpha) = b\sin\alpha \qquad (63\text{-}b \text{ rasm}).$$

Shunga o'xshash, $BCD$ burchakdan $CD = a\sin\beta$ ni topamiz. Shunday qilib, $a\sin\beta = b\sin\alpha$, bundan, $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Ushbu $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ tenglik ham shunga o'xshash isbotlanadi. Isbotlash o'quvchiga havola etiladi.

*Eslatma*. Isbotlash uchun uchburchakning $A$ uchidan uning balandligini o'tkazish kerak. Teorema isbotlandi.



# II bob

# STEREOMETRIYA ASOSLARI

Stereometriya geometriyaning bir bo'limi bo'lib, hamma nuqtalari bir tekislikda yotmagan geometrik jism (shakl)larni o'rganadi.

Geometriyaning stereometriya qismini o'rganishda yetarli sondagi bir-biriga ziddiyatli bo'lmagan va biri ikkinchisining natijasi hisoblanmagan aksiomalar bo'lishi shart.

Aksiomalar:

*1. Tekislik qanday bo'lmasin, shu tekislikka tegishli nuqtalar va unga tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud.*

*2. Agar ikkita turli tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.*

*3. Agar ikkita turli to'g'ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.*

Bu bobda stereometriyaga taalluqli bo'lgan masalalarni qarab chiqamiz. Planimetriya kursida ko'rib o'tilgan asosiy aksiomalar sistemasi hamda stereometriyaning aksiomalari birgalikda qaraladi.

Fazodagi to'g'ri chiziq va tekislikka oid masalalarni ko'rib chiqamiz.

## 1- §. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani topish

Fazoda $Ax + By + Cz + D = 0$ uch noma'lumli chiziqli tenglama bilan berilgan $T$ tekislik va bu tekislikda yotmagan $P(x_0; y_0; z_0)$ nuqtani qaraylik. $P$ nuqtadan $T$ tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligi bu nuqtadan shu tekislikkacha bo'lgan masofani bildiradi. Bu masofa quyidagi formula bilan topiladi:

$$p = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Misol. $P(0; 0; 0)$ nuqtadan $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ tekislikkacha bo‘lgan masofani hisoblang.

Y e c h i l i s h i. Berilgan tekislik tenglamasini $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ ko‘rinishda yozib, formula yordamida hisoblaymiz:

$$p = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{36+16+9}} = \frac{12}{\sqrt{61}}.$$

Demak, berilgan nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa $\frac{12}{\sqrt{61}}$ ga teng.

## 2- §. Uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

Fazoda bir to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmagan $P_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $P_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $P_3\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini determinant ko‘rinishida yozamiz.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Bu ko‘rinishdan umumiy $Ax + By + Cz + D = 0$ ko‘rinishga keltirish uchun determinantni ochishga to‘g‘ri keladi.

M i s o l. $P_1\ (0;\ 0;\ 1)$; $P_2\ (0;\ 2;\ 0)$; $P_3\ (3;\ 0;\ 0)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Y e c h i l i s h i. Formulaga ko‘ra izlanayotgan tekislik

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 1 \\ 0 - 0 & 2 - 0 & 0 - 1 \\ 3 - 0 & 0 - 0 & 0 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bu determinantni hisoblab, $2x - 3y + 6z = 0$ ni topamiz.

### Fazoda ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

Fazoda $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi biror to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $C\ (x;\ y;\ z)$ nuqta olamiz (64- rasm).

$A$, $B$, $C$ nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotganligi sababli ularning $Oxy$ tekislikdagi proyeksiyalari bo‘lgan $A'$, $B'$, $C'$

nuqtalar ham to‘g‘ri chiziqda yotadi. Bundan esa

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0 \text{ yoki } \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

tenglamalarga ega bo‘lamiz.

$A$, $B$, $C$ nuqtalarning $Oyz$, $Oxz$ koordinata tekisliklaridagi proyeksiyalari uchun ham mos ravishda

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

tengliklar o‘rinlidir. Hosil bo‘lgan tengliklarning bir vaqtda bajarilishini e’tiborga olib, topamiz:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Bu ifoda fazoda berilgan *ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasidir.*

1-masala. Berilgan $T_\alpha$ tekislikni kesib o‘tmaydigan $AB$ kesmaning oxirlaridan shu tekislikkacha bo‘lgan masofalar $a$ va $b$ bo‘lsa, u holda bu kesmani $m : n$ nisbatda bo‘luvchi $N$ nuqtadan $T_\alpha$ tekislikkacha bo‘lgan masofa topilsin (65-rasm).

Berilgan:

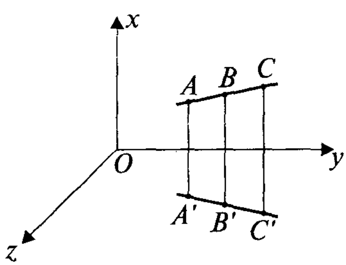
$T_\alpha$; $AB \not\in T_\alpha$

$AA_1 = a$; $BB_1 = b$;

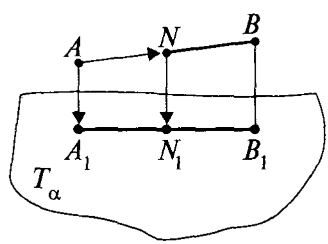
$AN : BN = m : n$.

Topish kerak: $NN_1$ – ?

Yechilishi. Masalani yechish uchun vektor tushun-




**64- rasm.**




**65- rasm.**

chasidan foydalanamiz. Shartga asosan $\overline{NA} = -\frac{m}{n}\overline{NB}$. Vektorlarni qo'shish qoidasiga asosan bir tomondan, $\overline{NN_1} = \overline{NA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1N_1}$ va ikkinchi tomondan, $\overline{NN_1} = \overline{NB} + \overline{BB_1} + \overline{B_1N_1}$ bo'ladi. Bu ikkala tenglikni hadlab qo'shsak,

$.2\overline{NN_1} = \overline{NA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1N_1} + \overline{NB} + \overline{BB_1} + \overline{B_1N_1}$ ni hosil qilamiz.

$\overline{NA} = -\frac{m}{n}\overline{NB}$ va $\overline{A_1N_1} = -\frac{m}{n}\overline{N_1B_1}$ ekanligini hisobga olib,

$$2\overline{NN_1} = -\frac{m}{n}\overline{NB} + \overline{AA_1} - \frac{m}{n}\overline{N_1B_1} + \overline{NB} + \overline{BB_1} + \overline{B_1N_1} =$$

$$= \frac{n-m}{n}\overline{NB} + \frac{n-m}{n}\overline{B_1N_1} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1}$$

ni hosil qilamiz.

Nihoyat, $\overline{NN_1} = \overline{NB} + \overline{BB_1} + \overline{B_1N_1}$ tenglikdan foydalanib, tenglikning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilarni $\overline{NN_1}$ orqali ifodalasak,

$$2\overline{NN_1} = \left(1 - \frac{m}{n}\right)\overline{NN_1} + \frac{m}{n}\overline{BB_1} + \overline{AA_1}$$

yoki

$$\frac{n+m}{n}\overline{NN_1} = \overline{AA_1} + \frac{m}{n}\overline{BB_1}.$$

Bu tenglikdan $\overline{NN_1} = +\frac{n\overline{AA_1} + m\overline{BB_1}}{n+m}$ ni hosil qilamiz. Bu yerda $\overline{AA_1} = \bar{a}$, $\overline{BB_1} = \bar{b}$ va $\overline{NN_1}$ vektorlar kollinear bo'lgani uchun

$$NN_1 = \frac{na+mb}{m+n}$$

bo'ladi.

Hosil bo'lgan natija va masalaga nisbatan quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1. $a \neq 0,\ b \neq 0$ bo'lganda $NN_1 = \frac{na+mb}{m+n}$ bo'ladi;

2. $n : m = 1$ bo'lganda $NN_1 = \frac{a+b}{2}$ bo'lib, trapetsiyaning o'rta chizig'i haqidagi masala hosil bo'ladi;

3. $a = 0,\ b \neq 0$ yoki $a \neq 0,\ b = 0$ bo'lganda $NN_1 = \frac{mb}{m+n}$

yoki $NN_1 = \frac{na}{m+n}$ bo‘ladi;

4. $a = 0$, $b = 0$ bo‘lganda $AB$ kesma $T_\alpha$ ga tegishli, ya’ni $\overline{NN_1} = 0$ bo‘ladi.

2-masala. To‘g‘ri burchakli teng yonli $ABC$ uchburchakning $AB$ gipotenuzasi orqali uchburchak tekisligi bilan $\alpha$ burchak tashkil qiluvchi $Tp$ tekislik o‘tkazilgan. Berilgan uchburchakning $Tp$ tekislikdagi proyeksiyasi hosil qilgan shaklning perimetri va yuzini hisoblang (66- rasm).

Berilgan:

$\triangle ABC$, bunda $\angle C = 90°$;

$AC = CB$; $AB = c$, $((ABC),\hat{}\ Tp) = \alpha$;

$AB \in Tp$.

Topish kerak: $P_{ADB} = ?$ $S_{ADB} = ?$

Yechilishi. Tekislikka o‘tkazilgan og‘malar sifatida shartga ko‘ra $AC = CB$ bo‘lgani uchun $AD = DB$ bo‘ladi. Bundan $AE = \frac{1}{2}AB$ va $DB \perp AB$ bo‘lib, $\angle CED = \alpha$ ikki yoqli burchakning chiziqli burchagini tashkil qiladi.

$ABC$ uchburchakda $\angle C = 90°$ va $AC = CB$ bo‘lgani uchun $CE = AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$. $CED$ uchburchakda $ED = \frac{1}{2}c\cos\alpha$ bo‘ladi. $AED$ uchburchakda

$$BD = AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4}\cos^2\alpha} = \frac{c}{2}\sqrt{1 + \cos^2\alpha}$$

ekanini hisobga olinsa, u holda

$$P_{ADB} = AB + BD + AD = c(1 + \sqrt{1 + \cos^2\alpha}),$$

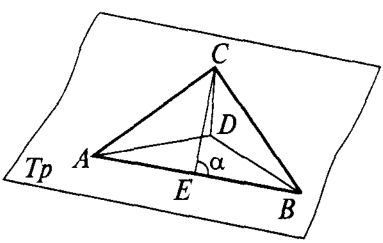
$$S_{ADB} = c^2\frac{\cos\alpha}{4}$$

bo‘ladi.

Javob.

$$P_{ADB} = c(1 + \sqrt{1 + \cos^2\alpha}),$$

$$S_{ADB} = c^2\frac{\cos\alpha}{4}.$$




**66- rasm.**

1. Ikki ayqash to‘g‘ri chiziq berilgan. Bu to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi va o‘zaro parallel bo‘lgan faqat bir juft tekislik mavjud ekanligini isbotlang.
2. Bir tekislikda yotmagan $AB$ va $CD$ kesmalar berilgan. $M$ va $N$ mos ravishda bu kesmalarning o‘rtalari bo‘lsin. $\frac{1}{2}(AC + BD) > MN$ ekanini isbotlang (masalaning isbotini o‘quvchining o‘zi mustaqil bajaradi).

## 3- §. Uch perpendikular haqidagi teorema

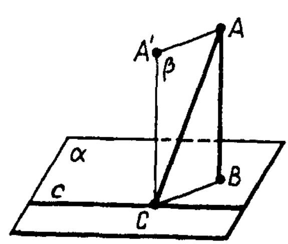
Teorema. *Tekislikda og‘maning asosidan uning proyeksiyasiga perpendikular qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq og‘maning o‘ziga ham perpendikular bo‘ladi.*

Isbot. $AB$ kesma $\alpha$ tekislikka tushirilgan perpendikular, $AC$ og‘ma va $c$ esa og‘maning $C$ asosidan tekislikda o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq bo‘lsin (67- rasm).

$AB$ to‘g‘ri chiziqqa parallel $CA'$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. U $\alpha$ tekislikka perpendikular. $AB$ va $A'C$ to‘g‘ri chiziqlar orqali $\beta$ tekislikni o‘tkazamiz. $c$ to‘g‘ri chiziq $CA$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular.

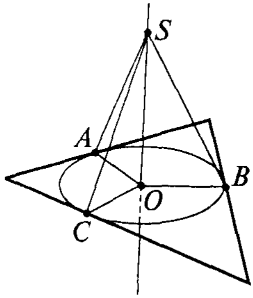
Agar u $CB$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lsa, u holda $\beta$ tekislikka perpendikular bo‘ladi, demak, $AC$ to‘g‘ri chiziqqa ham perpendikulardir.

Xuddi shunga o‘xshash, agar $c$ to‘g‘ri chiziq $CA$ og‘maga perpendikular bo‘lsa, u $CA'$ to‘g‘ri chiziqqa ham perpendikular ekanligidan $\beta$ tekislikka perpendikular bo‘ladi. Demak, $BC$ og‘maning proyeksiyasiga ham perpendikular bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

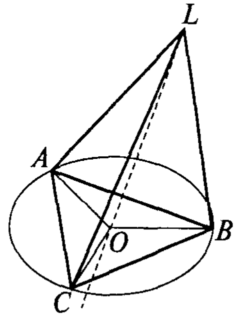



**67- rasm.**

Masala. Uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazidan uchburchak tekisligiga perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasi uchburchak tomonlaridan teng uzoqlikda yotishini isbotlang.




**68- rasm.**




**69- rasm.**

Y e c h i l i s h i . $A$, $B$, $C$ uchburchak tomonlarining aylanaga urinish nuqtalari, $O$ aylananing markazi, $S$ perpendikulardagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin (68- rasm).

$OA$ radius uchburchakning tomoniga perpendikular bo'lgani uchun uch perpendikular haqidagi teoremaga asosan $SA$ kesma shu tomonga tushirilgan perpendikulardir, uning uzunligi esa $S$ nuqtadan uchburchakning tomonigacha bo'lgan masofadir.

Pifagor teoremasiga ko'ra,

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

bunda $r$ — ichki chizilgan aylananing radiusi.

Shunga o'xshash quyidagilarni topamiz:

$$SB = \sqrt{r^2 + OS^2}; \ SC = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

ya'ni $S$ nuqtadan uchburchak tomonlarigacha bo'lgan barcha masofalar teng.

### *Mashqlar*

**1.** Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazidan uchburchak tekisligiga perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Bu to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi uchburchakning uchlaridan teng uzoqlikda yotishini isbotlang (69- rasm).

**2.** Uchburchakka radiusi 0,7 m bo'lgan ichki chizilgan aylananing markazidan uchburchak tekisligiga uzunligi 2,4 m ga teng perpendikular chiqarilgan. Bu perpendikularning uchidan uchburchakning tomonlarigacha bo'lgan masofani toping. (*Javob:* 2,5 m.)

**3.** Berilgan nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofa 1,1 m ga teng, uchburchakning har bir tomonigacha bo'lgan masofa esa 6,1 m ga teng. Bu uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusini toping. (*Javob:* 6 m.)

## 4- §. Ko'pyoqning turlari

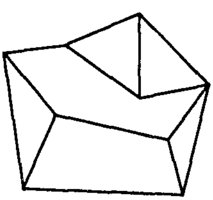
Chekli sondagi tekisliklar bilan chegaralangan jism *ko'pyoq* deyiladi. Ko'pyoqning chegarasi uning *sirti* deyiladi (70- rasm).

Sodda ko'pyoqlarga prizma va piramida kiradi. Biz prizma va piramidaning sirti haqidagi tushunchani to'ldirib, sodda ko'pyoqlarga misollar keltiramiz.

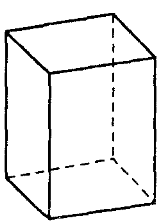
Chekli sondagi ko'pburchaklarning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi birlashmasi *sodda ko'pyoqli sirt* deyiladi.

1. Bu ko'pburchaklarning ixtiyoriy ikkita uchi uchun ularning tomonlaridan tuzilgan siniq chiziq mavjud bo'lib, olingan uchlar shu siniq chiziqning uchlari bo'ladi.

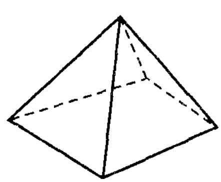
2. Ko'pburchaklar birlashmasining ixtiyoriy nuqtasi berilgan ko'pburchaklardan faqat birining nuqtasi bo'ladi yoki ikkita va faqat ikkita ko'pburchakning umumiy tomoniga tegishli bo'ladi. Ko'pyoqli burchakning tekis burchaklari vazifasini o'tovchi birgina ko'pyoqli burchakning uchi bo'ladi. Bu talablarni 71 va 72-rasmlarda tasvirlangan ko'pburchaklar birlashmasi qanoatlantiradi. Bundan keyin sodda sirtlar haqida so'z yuritganda «sodda» so'zini ishlatmasdan ko'pyoq deb gapiramiz.



**70- rasm.**



**71- rasm.**



**72- rasm.**

Ko'pyoqli sirtni tashkil qiluvchi ko'pburchaklar uning *yoqlari* deyiladi, bu ko'pburchaklarning tomonlari ko'pyoqli sirtning *qirralari*, uchlari esa ko'pyoqli shaklning *uchlari* deyiladi.

Agar ko'pyoqli sirtning har bir qirrasi uning ikkita yog'iga tegishli bo'lsa, u holda bu ko'pyoqli sirt *yopiq sirt* deyiladi. Prizmaning yon sirti (71- rasm) yopiq bo'lmagan ko'pyoqli sirtga misoldir, piramidaning sirti (72- rasm) yopiq ko'pyoqli sirtga misoldir.

Yopiq ko'pyoqli sirt fazoning shu sirtga tegishli bo'lmagan barcha nuqtalari to'plamini ikkita qism to'plamga ajratadi. Bu qism to'plamlardan biri uchun shu qism to'plamga tegishli to'g'ri chiziqlar mavjud; ikkinchisi uchun esa bunday to'g'ri chiziqlar mavjud emas. Ko'rsatilgan qism to'plamlardan birinchisi ko'pyoqli sirtning *tashqi sohasi*, ikkinchisi *ichki sohasi* deyiladi.

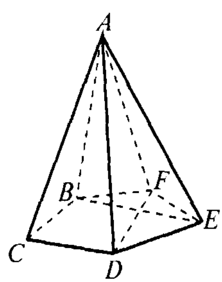
T a ' r i f. Yopiq ko'pyoqli sirt bilan uning ichki sohasining birlashmasi ko'pyoq deyiladi.

T a ' r i f. Ko'pyoqli sirt va uning ichki sohasi mos ravishda *ko'pyoqning sirti* va *ko'pyoqning ichki sohasi* deyiladi.

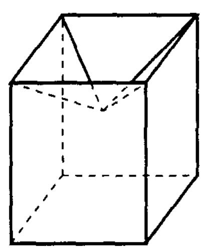
T a ' r i f. Ko'pyoqli sirtning yoqlari, qirralari, uchlari mos ravishda ko'pyoqning *yoqlari*, *qirralari* va *uchlari* deyiladi.

T a ' r i f. Ko'pyoqning bir yog'iga tegishli bo'lmagan ikki uchini birlashtiruvchi kesma ko'pyoqning diagonali deyiladi (73- rasm).

73- rasmda $ABCDEF$ oltiyoq va uning diagonali $DF$, $BE$ tasvirlangan. Ko'pyoqlar ko'pburchaklar singari qavariq (73- rasm) va noqavariq (74- rasm) bo'lishi mumkin.

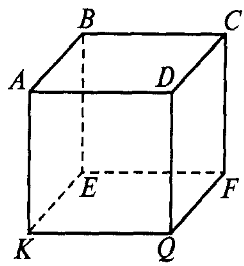



**73- rasm.**



**74- rasm.**

Biz faqat qavariq ko'pyoqlarni o'rganamiz.



**75- rasm.**

Agar ko'pyoqning o'zi uni chegaralovchi tekisliklarning har biridan bir tomonda yotsa, bunday ko'pyoq *qavariq ko'pyoq* deyiladi. Qavariq ko'pyoqning sirti bilan uni chegaralab turgan tekislikning umumiy qismi *yoq*, ko'pyoqlarning tomonlari uning *qirralari*, uchlari esa ko'pyoqning *uchlari* deyiladi. Masalan, kub – qavariq ko'pyoqdir (75- rasm).

Uning sirti 6 ta kvadratdan tashkil topgan: *ABCD*; *BEFC*; *AKQD*; *CDQF*; *KEFQ*; *ABEK*.

Bu kvadratlar kubning yoqlaridir. Kvadratlarning *AB*, *BC*, *BE*, ... tomonlari kubning qirralari bo'ladi. Kvadratlarning *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *Q*, *K* uchlari kubning uchlari bo'ladi. Kubda 6 ta yoq, 12 ta qirra va 8 ta burchak bor.

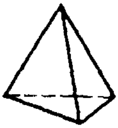
### *Mashqlar*

1. Yoqlarining soni eng kam bo'lgan ko'pyoq chizing. Unda nechta qirra, nechta uch va nechta diagonal bo'lishini ayting.
2. To'g'ri to'rtburchak, beshburchak beshyoqning yog'i bo'lishi mumkinmi?
3. Ko'pyoqning yoqlaridan biri oltiburchak. Shu ko'pyoqning qirralari soni eng kamida nechta bo'lishi mumkin?
4. 8 ta, 9 ta qirrasi bo'lgan ko'pyoq chizing.

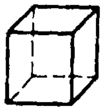
## 5- §. Muntazam ko'pyoqlar

Ta'rif. Agar ko'pyoqning barcha yoqlari o'zaro teng muntazam ko'pburchaklar va uning barcha ko'pyoqli burchaklari yoqlarining soni bir xil bo'lsa, bunday ko'pyoq *muntazam ko'pyoq* deyiladi.

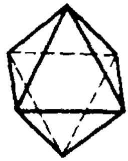
Muntazam ko'pyoqlardan kub va muntazam tetraedr sizga ma'lum (76, 77- rasmlar).



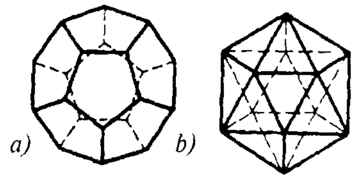
76- rasm.



77- rasm.



78- rasm.




79- rasm.

Muntazam ko'pyoqlarning yana uch turi mavjud. Bular muntazam sakkizyoq (muntazam oktaedr, 78- rasm), muntazam yigirmayoq (dodekaedr, 79-*a* rasm), muntazam o'nikkiyoq (ikosaedr, 79-*b* rasm).

Muntazam ko'pyoqlarning aytib o'tilgan beshta qavariq turidan boshqa hech qanday turi mavjud emas (buni qadimiy yunon faylasufi *Platon* kashf qilgan deb taxmin qilinadi).

### *Mashqlar*

1. Kubning bir uchidan yoqlarining uchta diagonali o'tkazilgan, ularning uchlari kesmalar bilan tutashtirilgan. Shu usulda yasalgan oltita kesma qirralari bo'lgan piramidaning muntazam tetraedr ekanligini isbotlang.
2. 1) Muntazam tetraedrning; 2) muntazam oktaedrning ikki yoqli burchagining kattaligini toping.

   (*Javob*: 1) $70°32'$; 2) $109°28'$).
3. Muntazam oktaedr qirrasining uzunligi $a$ ga teng. Shu oktaedr sirtining yuzini toping.

   (*Javob*: $2a^2\sqrt{3}$).
4. Muntazam tetraedr sirtining yuzi $Q$ ga teng. Shu tetraedr qirrasining uzunligini toping.

   (*Javob*: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}$).

## 6- §. Aylanish jismlari

Aylanish jismlariga silindr, konus, shar, sfera, doira, aylanalar kiradi. Ularga qisqacha ta'riflar berib, masalalar yechish usullarini tanishtiramiz.

## 6.1. Silindr

Ikkita parallel tekislik orasida joylashgan va tekisliklardan biridagi doirani kesib o'tadigan hamma parallel to'g'ri chiziqlar kesishmalaridan tashkil topgan jism *silindr* (ya'ni doiraviy silindr) deyiladi. Uchlari bu doiraning aylanasida yotgan kesmalar silindrning *yasovchilari* deyiladi.

Silindrning sirti silindr asoslaridan – parallel tekisliklarda yotgan ikkita teng doiradan va yon sirtidan iborat.

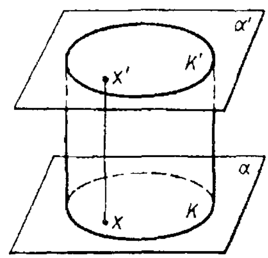
Silindrning *yasovchilari* asos tekisliklariga perpendikular bo'lsa, bunday silindr *to'g'ri silindr* deyiladi (80-rasm).

Silindr asosining radiusi silindr *radiusi* deyiladi.

Silindr asoslari tekisliklari orasidagi masofa silindrning *balandligi* deyiladi.

Asoslarining markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq silindrning o'qi deyiladi. Bu o'q yasovchilarga parallel bo'ladi.

Silindrning o'qi orqali o'tuvchi kesim *o'q kesim* deyiladi. Silindrning yasovchisi orqali o'tadigan o'q kesimga perpendikular tekislik silindrning *urinma tekisligi* deyiladi.

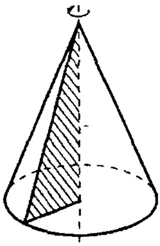



**80- rasm.**

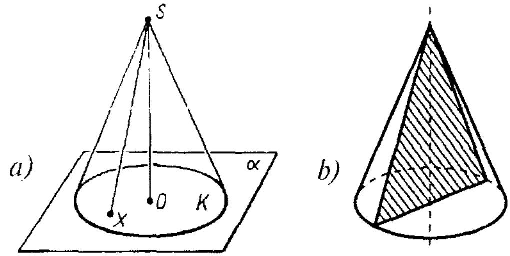
## 6.2. Konus

*Konus* (doiraviy konus) deb shunday jismga aytiladiki, u berilgan nuqtasini biror doira nuqtalari bilan tutashtiruvchi hamma kesmalardan tashkil topgan bo'lib, bu berilgan nuqta *konus uchi*, doira esa *konus asosi* deyiladi. Konus uchini asos aylanasi nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalar *konusning yasovchilari* deyiladi.

Konus sirti asosidan va yon sirtidan iborat. Konusning uchi bilan asos aylanasining markazini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq asos tekisligiga perpendikular bo'lsa, bunday konus *to'g'ri konus* deyiladi. To'g'ri konusni to'g'ri burchakli uchburchakni uning bir kateti atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism deb qarash mumkin (81- rasm).



81- rasm.




82- rasm.

82-*a* rasmda to‘g‘ri konus tasvirlangan. Uning uchi *S*, asosi tekislikdagi *K* doira bo‘ladi. Konus *S* uchini asosning *X* nuqtalari bilan tutashtiruvchi hamma *SX* kesmalardan hosil qilingan.

Konusning uchidan uning asosiga tushirilgan perpendikular konusning *balandligi* deyiladi.

To‘g‘ri konus balandligining asosi asos markazi bilan ustma-ust tushadi.

To‘g‘ri konusning balandligidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq uning *o‘qi* deyiladi.

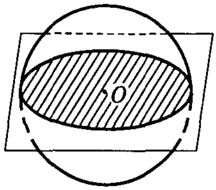
Konusning o‘qi orqali o‘tuvchi tekislik bilan kesimi *o‘q kesim* deyiladi (82-*b* rasm). Konusning yasovchisi orqali o‘tuvchi va bu yasovchi orqali o‘tkazilgan o‘q kesimiga perpendikular tekislik konusning *urinma tekisligi* deyiladi.

## 6.3. Shar

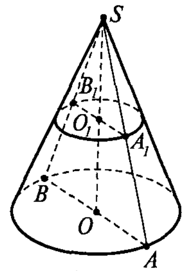
Fazoning berilgan nuqtadan berilgan masofadan katta bo‘lmagan uzoqlikda yotgan hamma nuqtalaridan iborat jism *shar* deyiladi (83- rasm).

Berilgan nuqta sharning *markazi*, berilgan masofa esa *sharning radiusi* deyiladi. Sharning chegarasi *shar sirti* yoki *sfera* deb ataladi. Sharning markazidan radiusiga teng masofaga qadar uzoqlashgan hamma nuqtalar sferaning nuqtalaridir. Shar markazini shar sirtining nuqtasi bilan tutashtiruvchi istalgan kesma ham *radius* deyiladi.

Shar sirtining ikki nuqtasini tutashtiruvchi va sharning markazidan o‘tuvchi kesma *diametr* deyiladi. Istalgan diametrning uchlari (oxirlari) sharning *diametral qarama-*




**83- rasm.**




**84- rasm.**

*qarshi nuqtalari* deyiladi. Bu jism doirani uning diametri atrofida aylantirish natijasida hosil qilinadi. Sharning markazidan o'tadigan tekislik *diametral tekislik* deyiladi. Sharning diametral tekislik bilan kesilgan kesimi *katta doira* deyiladi. Sferaning kesimi esa *katta aylana* deyiladi.

## ***Mashqlar***

**1.** Silindrning o'q kesimi yuzi $Q$ ga teng kvadrat. Silindr asosining yuzini toping.

Yechilishi. Kvadratning tomoni $\sqrt{Q}$ ga teng. U asosining diametriga teng. Shuning uchun asosining yuzi
$\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

**2.** Konus ichidan $d$ masofada turgan va asosiga parallel bo'lgan tekislik konusni kesib o'tadi. Konus asosining radiusi $R$, balandligi esa $H$ bo'lsa, kesimning yuzini toping.

Yechilishi. Konusning o'q kesimini o'tkazamiz (84- rasm). $SAB$ va $SA_1B_1$ uchburchaklarning o'xshashligidan $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SO_1}{SO}$ ni hosil qilamiz. $AB = 2R$, $A_1B_1 = 2r$ ($r$ – kesimdagi doiraning radiusi), $OS = H$; $O_1S = d$, bulardan

$$\frac{2r}{2R} = \frac{d}{H}, \quad r = \frac{Rd}{H}.$$

Kesim yuzi:

$$\pi r^2 = \pi\left(\frac{Rd}{H}\right)^2.$$

**3.** Shar radiusining o‘rtasidan unga perpendikular tekislik o‘tkazilgan. Hosil qilingan kesim yuzini katta doira yuziga nisbatini toping.

Y e c h i l i s h i . Shar radiusi $R$ bo‘lsa, kesimdagi doiraning radiusi $\sqrt{R^2-\left(\frac{R^2}{2}\right)^2} = R\sqrt{\frac{3}{4}}$ ga teng. Bu doira yuzining katta doira yuziga nisbatan $\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$ ga teng.

## *Mashqlar*

**1.** Silindrga oltiburchakli muntazam prizma ichki chizilgan. Silindr asosining radiusi balandligiga teng bo‘lsa, prizma yon yog‘i diagonali bilan silindr o‘qi orasidagi burchakni toping.

**2.** Uchburchakning tomonlari 13 sm, 14 sm, 15 sm. Uchburchak tekisligidan uchburchakning hamma tomonlariga urinadigan sharning markazigacha bo‘lgan masofani toping. Sharning radiusi 5 sm.

(*Javob*: 3 sm.)

**3.** Silindrning balandligi 2 m, asosining radiusi 7 m. Bu silindrga kvadrat og‘ma qilib shunday ichki chizilganki, kvadratning uchlari silindr asoslarining aylanalarida yotadi. Kvadratning tomonini toping.

(*Javob*: 10 m.)

**4.** Konus asosining radiusi $R$. O‘q kesim to‘g‘ri burchakli uchburchakdan iborat. O‘q kesimning yuzini toping.

(*Javob*: $R^2$.)

**5.** Sharning radiusi $R$. Radiusning uchidan unga 60° li burchak ostida tekislik o‘tkazilgan. Kesimning yuzini toping.

(*Javob*: $\frac{\pi R^2}{4}$ .)

# 7- §. Ko‘pyoqlarning yon va to‘la sirtlarini hisoblash

Ko‘pyoqning barcha yoqlari yuzlarining yig‘indisi ko‘pyoqli sirtning yuzi deyiladi.

Ko‘pyoqli prizma, piramidalarning yon va to‘la sirtlarini hisoblashni o‘rganilishidan avval ularga ta’rif beramiz.

## 7.1. Prizma

1-ta’rif. Turli tekisliklarda yotuvchi va parallel ko‘chirish bilan ustma-ust tushuvchi ikkita yassi ko‘pburchakdan hamda bu ko‘pburchaklarning mos nuqtalarini tutashtiruvchi hamma kesmalardan iborat ko‘pyoq prizma deyiladi (85- rasm).

Prizmaning asoslari parallel ko‘chirish natijasida hosil bo‘lgan ko‘pburchaklar bo‘lgani uchun ularning yuzlari teng.

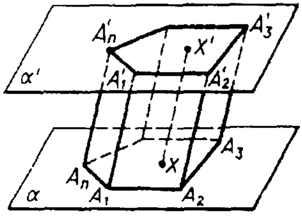
Agar prizmaning yon qirrasi asoslariga perpendikular bo‘lsa, bunday prizma to‘g‘ri prizma deyiladi, aks holda og‘ma prizma deyiladi.

2-ta’rif. To‘g‘ri prizmaning yon sirti asosining perimetri bilan yon qirrasi uzunligining ko‘paytmasiga teng: $S_{\text{yon}} = P \cdot A_1A_1'$.

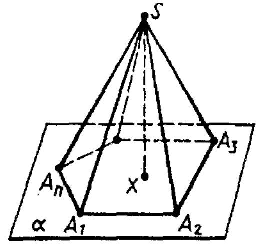
Prizmaning to‘la sirti yon sirti bilan ikkita asosi yuzining yig‘indisiga teng: $S_{\text{to‘la}} = S_{\text{yon}} + 2S_{\text{asos}}$.

## 7.2. Piramida

1-ta’rif. Yoqlaridan biri ixtiyoriy ko‘pburchak, qolgan yoqlari esa asos tekisligida yotmagan umumiy uchga ega bo‘lgan uchburchaklardan iborat bo‘lgan ko‘pyoq *piramida* deyiladi (86- rasm).




**85- rasm.**




**86- rasm.**

Piramidaning asosi muntazam ko'pburchak va balandligi ko'pburchakning markazi bilan ustma-ust tushsa, bunday piramida *muntazam piramida* deyiladi.

2 - t a ' r i f. Muntazam piramidaning yon sirti asosi perimetrining yarmi bilan apofemasi ko'paytmasiga teng:

$$S = \frac{1}{2} P \cdot l,$$

bunda: $l$ – apofema.

Umuman, piramidaning yon sirti yon yoqlari yuzlarining yig'indisiga teng.

Piramidaning to'la sirti yon sirti bilan asos yuzining yig'indisiga teng:

$$S_{\text{to'la}} = S_{\text{yon}} + 2S_{\text{asos}}.$$

## *Mashqlar*

**1.** To'g'ri burchakli prizmada asosining tomonlari 10 sm, 17 sm va 21 sm, balandligi esa 18 m. Prizmaning yon qirrasi va asosining kichik balandligi orqali o'tkazilgan kesimning yuzini toping.

(*Javob*: 144 sm$^2$.)

**2.** Og'ma prizmaning yon qirrasi 15 sm ga teng va u asos tekisligiga 30° li burchak ostida og'gan. Prizmaning balandligini toping.

(*Javob*: 7,5 sm.)

**3.** Piramidaning asosi teng yonli uchburchak bo'lib, bu uchburchakning asosi 12 sm, yon tomoni esa 10 sm. Yon yoqlar asos bilan har biri 45° dan bo'lgan ikki yoqli burchaklar tashkil qiladi. Piramidaning balandligini toping.

(*Javob*: 3 sm.)

**4.** Piramidaning asosi parallelogramm bo'lib, uning tomonlari 3 sm va 7 sm, diagonallaridan biri 6 sm. Piramidaning balandligi diagonallarining kesishish nuqtasidan o'tib, 4 sm ga teng. Piramidaning yon qirrasini toping.

(*Javob*: 5 sm, 6 sm.)

## 8- §. Aylanish jismlarining yon va to'la sirtlarini hisoblash

*Sferaning yuzi.*

Sferaning yuzini topamiz. $F$ — radiusi $R$ ga teng sfera bo'lsin. $F_h$ jism radiuslari $R+h$ va $R-h$ bo'lgan konsentrik ikkita sfera orasidagi qatlamdan iborat (87-*a* rasm). Bu jismning hajmi $R+h$ va $R-h$ radiusli sharlar hajmlarining ayirmasiga teng, ya'ni

$$V_h = \frac{4}{3}\pi\left[(R+h)^3 - (R-h)^3\right].$$

Bundan:

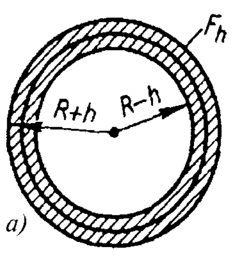
$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3 \cdot 2h}(6hR^2 + 2h^3) = 4\pi R^2\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right).$$

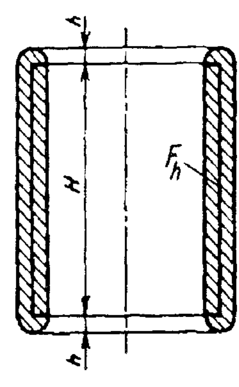
$h \to 0$ da $\frac{V_h}{2h}$ nisbat $4\pi R^2$ limitga intiladi. Shunday qilib, radiusi $R$ ga teng sferaning yuzi $4\pi R^2$ ga teng.

*Silindrning yon sirti.*

Radiusi $R$ va balandligi $H$ bo'lgan silindr yon sirtining yuzini topamiz.

Sirt yuzi ta'rifiga ko'ra $F_h$ jism mazkur holda radiuslari $R+h$ va $R-h$ bo'lgan silindrik sirtlar va silindr o'qiga perpendikular bo'lib, undan $H+2h$ masofada joylashgan ikki tekislik orasiga joylashgan (87-*b* rasm).




**87- rasm.**

Bu qatlamning bir-biridan $H$ masofada joylashgan ikkita asos tekisligi orasida olingan qismi butunligicha $F_h$ jismga tegishli bo'ladi. Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$V_h < \left[\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2\right]\cdot(H+2h),$$

$$V_h < \left[\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2\right]\cdot H$$

yoki

$$4\pi RhH \le V_h < 4\pi Rh(H+2h),$$

bundan

$$2\pi RH \le \frac{V_h}{2h} < 2\pi RH + 4\pi Rh,$$

$h \to 0$ da tengsizlikning o'ng qismi $2\pi RH$ ga intiladi.

Demak, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{V_h}{2h}\right) = 2\pi RH$.

Shunday qilib, silindr yon sirtining yuzi

$$S = 2\pi RH$$

formula bo'yicha aniqlanadi.

Konus va sferik segmentning yon sirti mos ravishda

$$S = \pi Rl \text{ va } S = 2\pi RH$$

formulalar bo'yicha hisoblanadi.

## *Mashqlar*

**1.** Yerto'ladagi yarim silindrik gumbazning uzunligi 6 m, diametri 5,8 m. Yerto'laning to'la sirtini toping.

(*Javob*: 116 m$^2$.)

**2.** Silindr asosining yuzi $Q$, o'q kesimining yuzi $M$. Silindrning to'la sirti nimaga teng?

(*Javob*: $\pi M + 2Q$. *Ko'rsatma*: asosining yuziga ko'ra uning radiusini toping.)

**3.** Konus asosining yuzi $S$, yasovchisi asosga $\alpha$ burchak ostida og'ma. Konus yon sirtining yuzini toping.

(*Javob*: $\frac{S}{\cos\alpha}$. *Ko'rsatma*: asosning yuziga ko'ra uning radiusini toping.)

## 8.1. Silindr yon sirtining yuzi

Biz yuqorida silindr va konus yon sirtlarini aniqladik. Endi bu masalaga boshqacha yondashuvni ko'rib chiqamiz.

Silindrga muntazam $n$ burchakli prizmani ichki chizamiz (88- rasm). Bu prizma yon sirtining yuzi

$$S_n = P_n \cdot H,$$

bunda $P_n$ — prizma asosining perimetri, $H$ — uning balandligi.

$n$ cheksiz ortganda $P_n$ perimetr silindr asosi aylanasining $C$ uzunligiga cheksiz yaqinlashadi. U holda prizma yon sirtining yuzi $C \cdot H$ ga cheksiz yaqinlashadi.

Shuning uchun $C \cdot H$ kattalik silindr yon sirtining yuzi uchun qabul qilinadi.

Silindr yon sirtining yuzi

$$S = C \cdot H = 2\pi RH$$

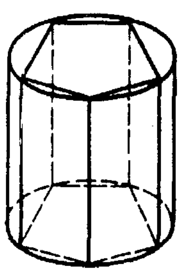
formula bilan hisoblanadi, bunda $R$ — silindrning radiusi, $H$ — balandligi.

## 8.2. Konus yon sirtining yuzi

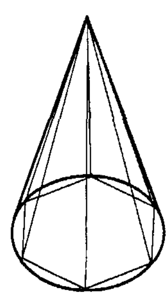
Konusga muntazam $n$ burchakli piramidani ichki chizamiz (89- rasm). Uning yon sirti yuzi

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot l_n$$

ga teng, bunda $P_n$ — piramida asosining perimetri, $l_n$ — uning apofemasi.



88- rasm.



89- rasm.

$n$ cheksiz ortganda $P_n$ perimetr konus asosidagi aylananing $C$ uzunligiga yaqinlashadi. $l_n$ apofema esa yasovchisining $l$ uzunligiga yaqinlashadi. Piramidaning yon sirti mos ravishda $C \cdot \frac{l}{2}$ ga cheksiz yaqinlashadi. Shu munosabat bilan $C \cdot \frac{l}{2}$ kattalik konus yon sirti yuzi uchun qabul qilinadi.

Konus yon sirtining yuzi

$$S = \frac{l}{2} \cdot C = \pi R l$$

formula bo'yicha hisoblanadi, bunda $R$ — konus asosining radiusi, $l$ — yasovchining uzunligi.

## 9- §. Hajm tushunchasi

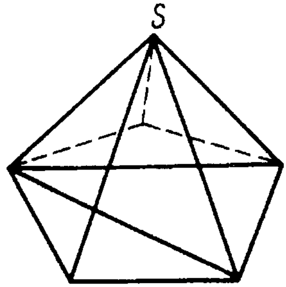
Tekislikda shakllar uchun yuz tushunchasi kiritilgani kabi fazoda jismlar uchun hajm tushunchasi kiritiladi. Avval sodda jismlar qaraladi. Jismni chekli sondagi uchburchakli piramidalarga ajratish mumkin bo'lsa, u *sodda jism* deyiladi. Sodda jismlar uchun hajm — bu son qiymati quyidagi xossalarga ega bo'lgan musbat kattalikdir:

*1. Teng jismlarning hajmlari teng.*

*2. Agar jism sodda jismlar hosil qiluvchi qismlarga bo'linsa, bu jismning hajmi uning qismlari hajmlarining yig'indisiga teng bo'ladi.*

*3. Qirrasi uzunlik birligiga teng bo'lgan kubning hajmi birga teng.*

Agar ta'rifda gap borgan kubning qirrasi 1 sm ga teng bo'lsa, u holda hajm kub santimetrlarda bo'ladi; agar kubning qirrasi 1 m ga teng bo'lsa, u holda hajm kub metrlarda bo'ladi; agar kubning qirrasi 1 km ga teng bo'lsa, u holda hajm kub kilometrlarda bo'ladi.




**90- rasm.**

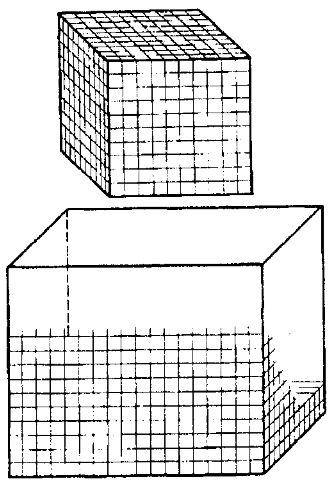
Istagan qavariq ko'pyoq sodda jismga misol bo'ladi. Uni chekli sondagi uchburchakli piramidalarga quyidagicha ajratish mumkin.

Ko'pyoqning biror $S$ uchini belgilaymiz. Ko'pyoqning $S$ uchini o‘z ichiga olgan hamma yoqlarini uchburchaklarga bo‘lamiz. U holda bu uchburchaklar asos, $S$ nuqta esa umumiy uch vazifasini o‘taydigan hamma uchburchakli piramidalar ko‘pyoqning uchburchakli piramidalarga bo‘linishini beradi. 90- rasmda ixtiyoriy piramida uchun shunday bo‘linish ko‘rsatilgan.

## 9.1. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmi

To‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmini topamiz (91- rasm). Hajm o‘lchov birligi bo‘lgan kub va hajmi o‘lchanishi lozim bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped tasvirlangan. Kubning qirrasi uzunlik birligi bo‘lib xizmat qiladi. Avval parallelepipedning $a$, $b$, $c$ qirralari uzunliklari chekli o‘nli kasrlar bilan ifodalangan hamda verguldan keyingi xonalar soni $n$ dan oshmagan holni qarab chiqamiz.

Kubning bitta uchidan chiqqan qirralarini $10^n$ ta teng bo‘laklarga ajratamiz va bo‘linish nuqtalaridan bu qirralarga perpendikular tekisliklar o‘tkazamiz. Bunda kub qirralari $\frac{1}{10^n}$ ta teng bo‘lgan, $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$ ta kichik kubga ajraladi.



91- rasm.

Kichik kubning hajmini topamiz. Hajmning xossasiga ko‘ra katta kubning hajmi kichik kublar hajmlarining yig‘indisiga teng. Katta kubning hajmi 1 ga tengligi, kichik kublar soni esa $10^{3n}$ ga tengligi uchun bitta kichik kubning hajmi $\frac{1}{10^{3n}}$ ga teng.

Endi

$$\frac{a}{\frac{1}{10^n}} = a \cdot 10^n, \quad \frac{b}{\frac{1}{10^n}} = b \cdot 10^n,$$

$$\frac{c}{\frac{1}{10^n}} = c \cdot 10^n$$

sonlari butun sonlar bo‘lgani uchun parallelepipedning qirralarini $\frac{1}{10^n}$ ga teng bo‘lgan butun sondagi qismlarga ajratish mumkin. $a$ qirrada ular $a \cdot 10^n$ ta; $b$ qirrada $b \cdot 10^n$ ta; $c$ qirrada $c \cdot 10^n$ ta bo‘ladi. Qirralarning bo‘linish nuqtalaridan qirralariga perpendikular tekisliklar o‘tkazamiz.

Bunda biz parallelepipedning tomoni $\frac{1}{10^n}$ bo‘lgan kichik kublarga ajralishini ko‘ramiz. Ularning soni

$$a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n \cdot c \cdot 10^n = abc \cdot 10^{3n}$$

ga teng.

Parallelepipedning hajmi undagi kichik kublar hajmlarining yig‘indisiga teng. Kichik kubning hajmi $\frac{1}{10^{3n}}$ ga, ularning soni $abc \cdot 10^{3n}$ ga tengligi uchun parallelepipedning hajmi

$$abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$$

ga teng.

Shunday qilib, to‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmi $V = abc$ formula bilan hisoblanadi.

## ***Mashqlar***

**1.** Agar kubning har bir qirrasi 2 sm orttirilsa, uning hajmi 98 sm$^3$ ga ortadi. Kubning qirrasini toping.

Yechilishi. Kubning qirrasini $x$ bilan belgilaymiz. U holda

$$(x+2)^3 - x^3 = 98,$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0,$$
$$x = 3,\ x = -5.$$

Faqat musbat ildiz geometrik ma’noga ega. Shunday qilib, kubning qirrasi 3 sm ga teng.

**2.** Kubning har bir qirrasi 1 m orttirilsa, uning hajmi 125 marta ortadi. Qirrasini toping.

(*Javob*: 25 sm).

**3.** To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchovlari 3 sm, 4 sm, 5 sm. Agar uning har bir qirrasini $x$ sm orttirsak, sirti 54 sm$^2$ ortadi. Uning hajmi qancha ortadi?

(*Javob*: 2 marta).

**4.** To'g'ri parallelepiped asosining $a$, $b$ tomonlari 30° li burchak tashkil qiladi. Yon sirti $C$ ga teng. Uning hajmini toping.

Yechilishi. Balandligini $x$ bilan belgilaymiz (92- rasm). U holda

$$C = x \cdot (2a + 2b), \quad x = \frac{S}{2(a+b)}.$$

Parallelepiped asosining yuzi

$$ab \cdot \sin 30^\circ = \frac{ab}{2}$$

ga teng. U holda hajmi

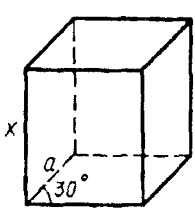
$$V = \frac{abS}{4(a+b)}$$

ga teng.

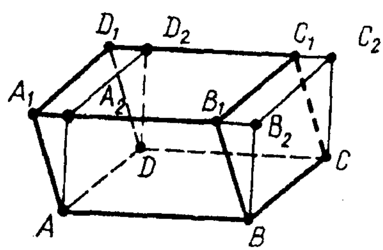
### 9.2. Og'ma parallelepipedning hajmi

Og'ma parallelepipedning hajmini topamiz (93- rasm).

$BC$ qirra orqali $ABCD$ asosga perpendikular tekislik o'tkazamiz va parallelepipedni $BB_1B_2CC_1C_2$ uchburchakli prizma bilan to'ldiramiz.




92- rasm.




93- rasm.

Hosil qilingan jismdan $AD$ qirra orqali $ABCD$ asosga perpendikular ravishda o'tkazilgan tekislik yordamida hosil qilingan uchburchakli prizmani ajratib tashlaymiz. Natijada to'g'ri burchakli parallelepiped hosil bo'ladi. Bu parallelepipedning hajmi dastlabki parallelepipedning hajmiga teng.

*Istalgan parallelepipedning hajmi asosining yuzi bilan balandligini ko'paytmasiga teng*, ya'ni

$$V = S \cdot h.$$

### *Mashqlar*

1. To'g'ri parallelepipedda asosining $2\sqrt{2}$ sm li va 5 sm li tomonlari orasidagi burchak $45°$ ga teng. Parallelepipedning kichik diagonali 7 sm ga teng. Uning hajmini toping.

(*Javob*: 60 $sm^3$.)

2. To'g'ri parallelepipedning asosi yuzi 1 $m^2$ bo'lgan rombdan iborat. Diagonal kesimlarining yuzlari 3 $m^2$ va 6 $m^2$. Parallelepipedning hajmini toping.

(*Javob*: 3 $m^3$.)

3. Og'ma parallelepipedning asosi kvadrat bo'lib, tomoni 1 m ga teng. Yon qirralaridan biri 2 m ga teng va asosning o'ziga yopishgan har bir tomoni bilan $60°$ li burchak tashkil qiladi. Parallelepipedning hajmini toping.

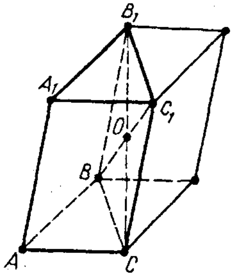
(*Javob*: $\sqrt{2}$ $m^3$.)

## 9.3. Prizmaning hajmi

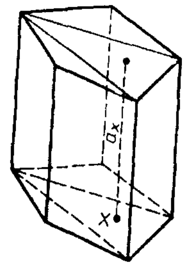
Prizmaning hajmini topamiz. Avval uchburchakli prizmani qaraymiz (94- rasm).

Uni rasmda ko'rsatilgandek, parallelepipedga to'ldiramiz. $O$ nuqta parallelepipedning *simmetriya markazi* deyiladi. Shuning uchun to'ldirilgan prizma berilgan $O$ nuqtaga nisbatan simmetrik, demak, uning hajmi berilgan prizmaning hajmiga teng.

Yasalgan parallelepipedning hajmi berilgan prizma hajmining ikkilanganiga teng.




94- rasm.




95- rasm.

Parallelepiped hajmi asosning yuzi bilan balandligining ko'paytmasiga teng, asosining yuzi $\triangle ABC$ yuzining ikkilanganiga teng, balandligi esa dastlabki prizma balandligiga teng. Demak, *dastlabki prizmaning hajmi asosining yuzi bilan balandligining ko'paytmasiga teng:*

$$V = S \cdot H.$$

Endi ixtiyoriy prizmani qaraymiz (95- rasm). Uning asosini uchburchaklarga ajratamiz. Uchburchak shu uchburchaklardan biri bo'lsin. Uchburchakning ixtiyoriy $X$ nuqtasidan yon qirralariga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. $a_x$ – shu to'g'ri chiziqning prizmaga tegishli kesmasi bo'lsin. $X$ nuqta uchburchakni aylanib chiqqanda $a_x$ kesma uchburchakli prizmani to'ldiradi. Har bir uchburchak uchun shunday prizma yasab, berilgan prizmani uchburchakli prizmalarga ajratamiz. Bu prizmalarning balandliklari teng. Dastlabki prizmaning hajmi uni tashkil qiluvchi uchburchakli prizmalar hajmlari yig'indisiga teng. Isbotlanganiga ko'ra uchburchakli prizmaning hajmi asosining yuzi bilan balandligining ko'paytmasiga teng. Bundan berilgan prizmaning hajmi topiladi:

$$V = S_1H + S_2H + S_3H + \ldots + S_nH = (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n)H.$$

Uchburchaklar yuzlarining yig'indisi berilgan prizma asosining $S$ yuziga teng. Shuning uchun

$$V = S \cdot H.$$

*Istalgan prizmaning hajmi asosining yuzi bilan balandligining ko'paytmasiga teng.*

## *Mashqlar*

**1.** Oltiburchakli muntazam prizmada eng katta diagonal kesimining yuzi 4 $m^2$ ga, ikkita qarama-qarshi yon qirralari orasidagi masofa 2 m ga teng. Prizmaning hajmini toping.

(*Javob*: 6 $m^3$.)

**2.** Uchburchakli og'ma prizmaning yon qirralari 15 m ga, ular orasidagi masofa esa 26 m, 25 m, 17 m ga teng. Prizmaning hajmini toping.

(*Javob*: 3060 $m^3$.)

**3.** Uchburchakli prizma asosining tomonlari 4 sm, 5 sm, 7 sm ga, yon qirrasi esa asosining katta balandligiga teng. Prizmaning hajmini toping.

(*Javob*: 48 $sm^3$.)

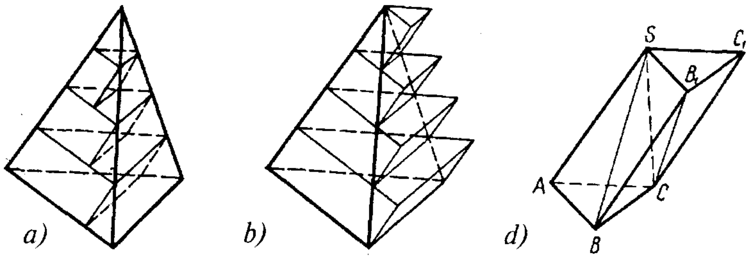
### 9.4. Piramidaning hajmi

Uchburchakli piramidaning hajmini topish uchun uni teng piramidalar bilan parallelepipedga to'ldirishga va shu parallelepipedning hajmini bilishimizdan foydalanib, piramidaning hajmini topishga harakat qilamiz.

Piramidaning balandligini $n$ ta teng bo'lakka ajratamiz va bo'linish nuqtalari orqali piramida asosiga parallel tekisliklar o'tkazamiz (96-*a* rasm).

Bunda piramida qatlamlarga ajraladi. Har bir bunday qatlam uchun ikkita prizma yasaymiz: qatlamda yotgan (96-*a* rasm) va qatlamni o'z ichiga olgan (96-*b* rasm) prizma yasaymiz. Birinchi piramidaning $k$- qatlamidagi (uchidan boshlab hisoblaganda) prizma va ikkinchi piramidaning $(k-1)$- qatlamidagi prizma asoslarining yuzlari teng, chunki bu asoslar piramidalarning asoslariga o'xshash va o'xshashlik koeffitsiyenti bir xil ($\frac{k}{n}$). Bu prizmalarning balandliklari ham teng bo'lgani uchun ($\frac{H}{n}$), ularning hajmlari ham tengdir.

Faraz qilaylik, $V_1$ va $V_2$ piramidalarning hajmlari bo'lsin, $V_1'$ va $V_2'$ esa ular uchun yasalgan prizmalar hajmlarining




**96- rasm.**

yig'indisi bo'lsin. Birinchi piramidaning $k$- qatlamidagi prizmaning hajmi ikkinchi piramidaning $(k-1)$- qatlamidagi prizmaning hajmiga teng bo'lgani uchun birinchi piramidadagi hamma prizmalar hajmlarining yig'indisi ikkinchi piramidaning oxirgi qatlamidan boshqa hamma qatlamlaridagi prizmalar hajmlarining yig'indisiga teng. Oxirgi qatlamdagi prizmaning hajmi $S \cdot \frac{H}{n}$ ga teng, bunda $S$ – piramida asosining yuzi, $H$ – balandligi. Bu yerdan $V_1' = V_2' - S\frac{H}{n}$ ekani kelib chiqadi. Bundan tashqari $V_1 > V_1'$, $V_2 > V_2'$ bo'lgani uchun $V_1 > V_2 - \frac{SH}{n}$ bo'ladi. Bu tengsizlik $n$ istagancha katta bo'lganda ham bajariladi. Bu esa faqat $V_1 \geq V_2$ bo'lgandagina mumkin. Piramidalarning o'rinlarini almashtirib, qarama-qarshi tengsizlikni hosil qilamiz: $V_2 \geq V_1$, $V_1 = V_2$ ekani kelib chiqadi. Da'vo isbotlandi.

Endi piramidaning hajmi uchun formulani topamiz. Berilgan $SABC$ piramidani 96-$d$ rasmda ko'rsatilgandek, o'shanday asosli va o'shanday balandlikdagi uchburchakli prizmaga to'ldiramiz. Bu prizma uchta piramidadan iborat: berilgan $SABC$ piramidadan va yana ikkita uchburchakli $SCC_1B_1$ va $SCBB_1$ piramidalardan iborat. Ikkinchi va uchinchi piramidalarning asoslari teng – $\triangle\ CC_1B_1$ va $\triangle\ B_1BC$ va $S$ uchdan tushirilgan umumiy balandlik. Isbotlanganga ko'ra ularning hajmlari teng. Birinchi va uchinchi piramidalarning ham asoslari teng – $\triangle\ SAB$ va $\triangle\ B_1BS$ hamda $C$ uchdan tushirilgan balandliklari bir xil. Demak, ularning ham hajmlari teng. Shunday qilib, uchala piramidaning hammasi bir xil hajmga ega. Bu hajmlarning yig'indisi prizmaning hajmiga teng bo'lgani uchun piramidalarning hajmi $\frac{SH}{3}$ ga teng.

*Istalgan uchburchakli piramidaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasining uchdan biriga teng:*

$$V = \frac{1}{3} SH .$$

*Istalgan piramidaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasining uchdan biriga teng:*

$$V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} SH .$$

### *Mashqlar*

**1.** Piramidaning asosi - tomonlari 9 m va 12 m bo'lgan to'g'ri to'rtburchak, hamma yon qirralari 21,5 m ga teng. Piramidaning hajmini toping.

(*Javob*: 360 $m^3$).

**2.** Piramidaning asosi tomonlari 6 sm, 6 sm va 8 sm bo'lgan teng yonli uchburchak. Hamma yon qirralari 9 sm ga teng. Piramidaning hajmini toping.

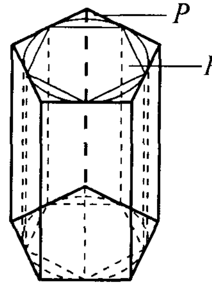
(*Javob*: 48 $sm^3$. Ko'rsatma: piramida balandligining asosi piramida asosiga tashqi chizilgan aylananing markazi bilan ustma-ust tushadi).

## 9.5. Silindrning hajmi

Agar jism sodda bo'lsa, ya'ni chekli sondagi uchburchakli piramidalarga bo'linsa, uning hajmi shu piramidalar hajmlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Istalgan jism uchun hajm quyidagi tarzda ta'riflanadi:

*agar berilgan jismni o'z ichiga oluvchi va berilgan jismning ichiga joylashgan hajmi V dan juda kam farq qiluvchi sodda jismlar mavjud bo'lsa, berilgan jism V hajmga ega bo'ladi.*

Bu ta'rifni asosning radiusi $R$ va balandligi $H$ ga teng silindrning hajmini topishga qo'llaymiz. Doira yuzining formulasini chiqarishda shunday ikkita ko'pburchak yasalgan ediki (biri doirani o'z ichiga olgan, ikkinchisi doira ichiga joylashgan), ularning yuzlari $n$ cheksiz ortganda doira yuziga cheksiz yaqinlashadi. Silindrning asoslaridagi doiralar uchun shunday ko'pburchaklar yasaymiz. $P$ – doirani o'z ichiga olgan ko'pburchak, $P'$ – doira ichiga joylashgan ko'pburchak bo'lsin (97- rasm).




**97- rasm.**

Asoslari $P$ va $P'$, balandligi silindrning $H$ balandligiga teng ikkita to'g'ri prizma yasaymiz. Birinchi prizma silindrni o'z ichiga oladi, ikkinchi prizma esa silindr ichida joylanadi. $n$ cheksiz ortganda prizma asoslarining yuzlari silindr asoslarining yuzlari $S$ ga cheksiz yaqinlashgani uchun ularning hajmlari $S \cdot H$ ga yaqinlashadi. Ta'rifga ko'ra silindrning hajmi:

$$V = SH = \pi R^2 H .$$

Silindrning hajmi asosining yuzi bilan balandligining ko'paytmasiga teng.

## *Mashqlar*

**1.** Silindrga uchburchakli muntazam prizma ichki chizilgan, prizmaga esa silindr ichki chizilgan. Silindrlar hajmlarining nisbatini toping.

(*Javob*: 4 : 1.)

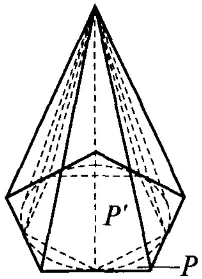
**2.** Har bir qirrasi $a$ ga teng bo'lgan oltiburchakli muntazam prizmaga ichki chizilgan silindrning hajmini toping.

(*Javob*: $\frac{3}{4}\pi a^3$.)

## 9.6. Konusning hajmi

Konusning asosi tekisligida ikkita ko'pburchak yasaymiz (98- rasm).

Konusning asosini o'z ichiga olgan $P$ ko'pburchak va konus asosida joylashgan $P'$ ko'pburchak. Asoslari $P$ va $P'$




98- rasm.

hamda uchi konusning uchida bo'lgan ikkita piramida yasaymiz. Birinchi piramida konusni o'z ichiga oladi, ikkinchi piramida esa konus ichida yotadi.

Shunday $P$ va $P'$ ko'pburchaklar borki, ularning tomonlari soni $n$ ni cheksiz orttirilganda ko'pburchaklarning yuzlari konus asosidagi doiraning yuziga cheksiz yaqinlashishini bilamiz. Bunday ko'pburchaklarda yasalgan piramidalarning hajmlari $\frac{1}{3}SH$ ga cheksiz yaqinlashadi, bunda $S$ – konusning yuzi, $H$ – balandligi.

Ta'rifga ko'ra, bu yerdan konusning hajmi

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Konusning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasining uchdan biriga teng.

## *Mashqlar*

**1.** Konusning o'q kesimi yuzi 9 m$^2$ ga teng bo'lgan teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Konusning hajmini toping.

(*Javob*: $9\pi$ m$^3$. Ko'rsatma. Konusning balandligi uning asosi radiusiga teng.)

**2.** Konus yasovchisining uzunligi $l$, asos aylanasining uzunligi $c$. Konusning hajmini toping.

(*Javob*: $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$.)

**3.** Konusning $l$ yasovchisi asos tekisligi bilan $\alpha$ burchak tashkil etadi. Konusning hajmini toping.

(*Javob*: $\frac{1}{3}\pi l^3 \sin\alpha\cos^2\alpha$.)

## 9.7. Sharning hajmi

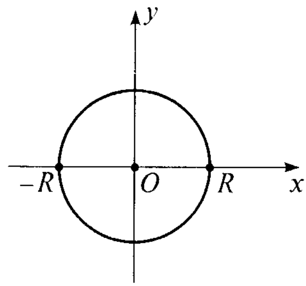
Shar markazini koordinatalar boshi uchun qabul qilib, Dekart koordinatalarini kiritamiz (99- rasm).

$xy$ tekislik $R$ radiusli sharni $x^2 + y^2 = R^2$ tenglama bilan beriladigan aylana bo'yicha kesadi.

$x$ o'qidan yuqorida joylashgan yarim aylana

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - X^2}, \quad -R \le x \le R$$

tenglama bilan ifodalanadi. Shuning uchun shar hajmi:




**99- rasm.**

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx =$$

$$= \pi\left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

### *Mashqlar*

**1.** Sharning diametriga perpendikular tekislik diametrni 3 sm va 9 sm li bo'laklarga ajratadi. Sharning hajmi qanday qismlarga ajraladi?

(*Javob*: 45π sm$^3$; 243 π sm$^3$.)

**2.** Ikkita teng shar shunday joylashadiki, ulardan birining markazi ikkinchisining sirtida yotadi. Sharlarning umumiy qismi hajmining butun sharning hajmiga nisbatini toping.

(*Javob*: 5 : 16.)

# III bob
# ALMASHTIRISHLAR

*Almashtirishlar va ularning turlari.*

Tekislikda geometrik almashtirishlarga nuqta atrofida burish, nuqtaga nisbatan simmetriya, to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriya, parallel ko‘chirish, o‘xshashlik yoki gomotetiya kabi almashtirishlarni sanab o‘tish yetarlidir.

## 1- §. Harakat

$F$ shaklni $F'$ shaklga almashtirishda nuqtalar orasidagi masofalar saqlansa, ya’ni u $F$ shaklning istalgan ikkita $X$ va $Y$ nuqtasini $F'$ shaklning $X'$ va $Y'$ nuqtalariga o‘tkazsa hamda $XY = X'Y'$ tenglik bajarilsa, bu almashtirish *harakat* deyiladi.

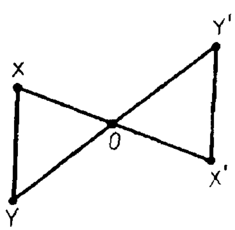
E s l a t m a . Geometriyada harakat tushunchasi siljitish haqidagi oddiy tasavvur bilan bog‘liq. Agar siljitish haqida gapirilganda uzluksiz jarayonni ko‘z oldimizga keltirsak, geometriyada shaklning boshlang‘ich va oxirgi vaziyatlari biz uchun ahamiyatga ega bo‘ladi.

1 - t e o r e m a . *Nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish harakatdir.*

I s b o t i . $X$ va $Y$ nuqtalar $F$ shaklning ixtiyoriy nuqtalari bo‘lsin (100- rasm).

Nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish bu nuqtalarni $X'$ va $Y'$ nuqtalarga o‘tkazadi. $XOY$ va $X'OY'$ uchburchaklarni qaraymiz. Ular uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko‘ra teng. Ularning $O$ uchidagi burchaklari vertikal burchaklar bo‘lgani sababli bir-biriga teng. $O$ nuqtaga nisbatan simmetriyaning ta’rifiga binoan $OX = OX'$, $OY = OY'$.

Bu uchburchaklarning tengligidan ularning uchinchi tomonlari ham teng: $XY = X'Y'$, bu esa $O$ nuqtaga nisbatan simmetriyaning harakat ekanini bildiradi. Teorema isbotlandi.




**100- rasm.**

2-teorema. *To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish harakatdir.*

Isboti. Berilgan to'g'ri chiziqni Dekart koordinatalar sistemasining $y$ o'qi uchun qabul qilamiz (101- rasm).

$F$ shaklning ixtiyoriy $A(x;\ y)$ nuqtasi $F'$ shaklning $A'(x';\ y')$ nuqtasiga o'tsin. To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriyaning ta'rifidan $A$ va $A'$ nuqtalarning ordinatalari teng, abssissalari esa ishoralari bilan farq qilishi mumkin, ya'ni $x' = -x$ ekani kelib chiqadi.

Ikkita $A(x_1;\ y_1)$ va $B(x_2;\ y_2)$ nuqtani olamiz. Ular $A'(-x_1;\ y_1)$ va $B'(-x_2;\ y_2)$ nuqtalarga o'tadi. Quyidagilarga egamiz:

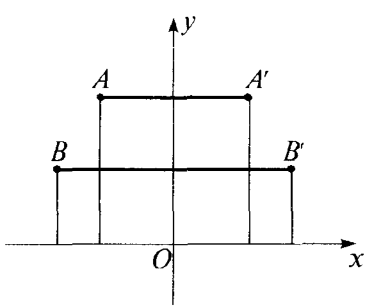
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Bundan $AB$ va $A'B'$ kesmalar teng ekani kelib chiqadi. Bu esa to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishning harakat ekanini bildiradi. Teorema isbotlandi.

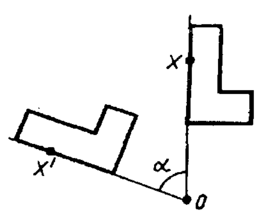
Ta'rif. Berilgan nuqta atrofida burish deb, shunday harakatga aytiladiki, unda bu nuqtadan chiquvchi har bir nur bir xil yo'nalishda (soat mili yo'nalishi bo'yicha yoki unga teskari yo'nalishda) bir xil burchakka buriladi (102- rasm).

Bu esa, agar $O$ nuqta atrofida burishda $X$ nuqta $X'$ nuqtaga o'tsa, u holda $OX$ va $OX'$ nurlar, $X$ nuqta qanday bo'lishiga bog'liqmas holda, bir xil burchak hosil qilishini bildiradi. Bu burchak *burish burchagi* deyiladi.

Tekislikni burishda shakllarni almashtirish ham *burish* deb ataladi.




**101- rasm.**




**102- rasm.**

## *Mashqlar*

1. $O$ nuqta atrofida soat mili yo'nalishi bo'yicha $60°$ li burchakka burishda $A$ nuqta o'tadigan $A_1$ nuqtani yasaymiz.

   Yechilishi. $OA$ nurni o'tkazamiz va $OP$ nurni $\angle AOP = 60°$ bo'ladigan qilib yasaymiz (103- rasm). $OP$ nurga $OA$ kesmaga teng $OA_1$ kesmani qo'yamiz. $A_1$ nuqta izlanayotgan nuqta bo'ladi.
2. $O$ nuqta atrofida soat mili yo'nalishi bo'yicha $60°$ li burchakka burishda $AB$ kesma o'tadigan shaklni yasang.
3. Harakat natijasida parallelogramm parallelogrammga o'tishini isbotlang.
4. Kvadrat harakat natijasida qanday shaklga o'tadi?

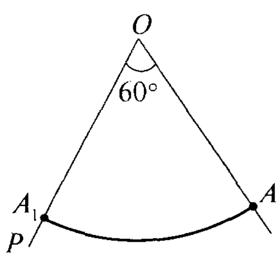
   (*Javob*: kvadratga o'tadi. Javobingizni tushuntiring.)

## 2- §. Nuqtaga, o'qqa va to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriya

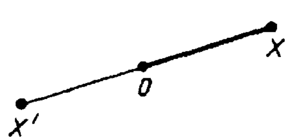
### 2.1. Nuqtaga nisbatan simmetriya

Aytaylik, $O$ nuqta $Oxy$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin (104- rasm).

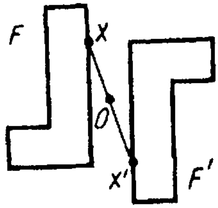
$OX$ kesmaning davomida $O$ nuqtadan nariga $OX$ kesmaga teng $OX'$ kesmani qo'yamiz. *$X'$ nuqta $O$ nuqtaga nisbatan $X$ nuqtaga simmetrik nuqta* deyiladi. $O$ nuqtaga simmetrik nuqta shu $O$ nuqtaning o'zidan iborat. Ravshanki, $X'$ nuqtaga simmetrik nuqta $X$ nuqtaning o'zidir.



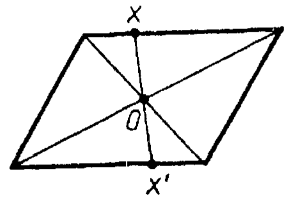

**103- rasm.**




**104- rasm.**




**105- rasm.**




**106- rasm.**

Ta'rif. $F$ shaklni $F'$ shaklga almashtirishda $F$ ning har bir $X$ nuqtasi $O$ nuqtaga nisbatan simmetrik $X'$ nuqtaga o'tsa, bu almashtirish *$O$ nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish* deyiladi.

Bunda $F$ va $F'$ shakllar $O$ nuqtaga nisbatan *simmetrik shakllar* deyiladi (105- rasm).

Agar $O$ nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish $F$ shaklni o'z-o'ziga o'tkazsa, u *markaziy simmetrik almashtirish* deyiladi.

$O$ nuqta simmetriya *markazi* deyiladi.

Masalan, parallelogramm markaziy simmetrik shakldir (106- rasm). Uning simmetriya markazi diagonallarning kesishish nuqtasidan iboratdir.

## 2.2. O'qqa nisbatan simmetriya

Ta'rif. Agar fazoni almashtirishda har bir nuqta berilgan $l$ to'g'ri chiziqqa nisbatan o'ziga simmetrik nuqtaga akslantirilsa, bunday almashtirish *o'qqa nisbatan simmetriya* deyiladi.

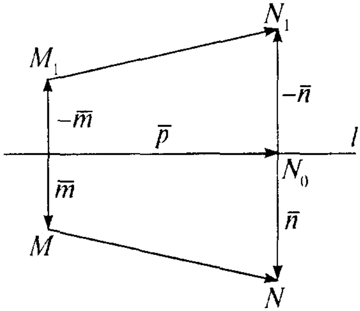
Berilgan to'g'ri chiziq *simmetriya o'qi* deyiladi.

Agar $l$ o'qqa nisbatan simmetriyada $M_1$ nuqta $M$ nuqtaning obrazi bo'lsa, bu $S_l(M) = M_1$ deb yoziladi.

$S_l(F) = F_1$ yozuvi $l$ o'qli simmetriyada $F$ shaklning $F'$ shaklga akslanishini bildiradi.

Teorema. *O'qqa nisbatan simmetriya siljishdir.*

Isboti. $S_l(M) = M_1$, $S_l(N) = N_1$. $|MN| = |M_1N_1|$ ekanini isbot qilamiz.




**107- rasm.**

$\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ vektorlarni 107-rasmda ko'rsatilganidek qilib kiritamiz. O'qqa nisbatan simmetriyaning ta'rifiga asosan:

$$\bar{m} \cdot \bar{p} = \bar{n} \cdot \bar{p} = 0 .$$

Ko'pburchak qoidasiga ko'ra:

$$\overline{MN} = -\bar{m} + \bar{p} + \bar{n} ,$$

$$\overline{M_1N_1} = \bar{m} + \bar{p} - \bar{n} .$$

U holda

$$\left|\overline{MN}\right|^2 = m^2 + p^2 + n^2 - 2mn,$$

$$\left|\overline{M_1N_1}\right|^2 = m^2 + p^2 + n^2 - 2mn .$$

Demak, $\left|\overline{MN}\right|^2 = \left|\overline{M_1N_1}\right|^2$, ya'ni $|MN| = |M_1N_1|$.

## *Mashqlar*

**1.** O'qqa nisbatan simmetriyada qanday nuqtalar o'ziga akslanadi?

(*Javob*: faqat o'qqa tegishli nuqtalar.)

**2.** O'qqa nisbatan simmetriyada qanday to'g'ri chiziqlar o'ziga akslanadi?

(*Javob*: o'qni to'g'ri burchak ostida kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqlar hamda simmetriya o'qining o'zi.)

**3.** Simmetriya o'qi $l$ va berilgan $\alpha$ tekislikning $\alpha_1$ obrazi bir-biriga nisbatan ushbu hollarda qanday joylashadi:

1) $l \subset \alpha$; 2) $l \perp \alpha$; 3) $l$ o'q $\alpha$ ga og'ma bo'lsa?

**4.** Ikkita turli $A$ va $B$ nuqtalar berilgan. $A$ ni $B$ ga akslantiruvchi simmetriya o'qlari ko'rsatilgan. Bunday o'qlarning birlashmasi qanday shakl bo'ladi?

**5.** Tekis shakl simmetriya markaziga ega bo'lsa, u simmetriya o'qiga ham ega bo'lishini isbot qiling.

### 2.3. To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriya

Aytaylik, $q$ tayinlangan to'g'ri chiziq bo'lsin (108- rasm). Ixtiyoriy $X$ nuqtani olamiz va unda $q$ to'g'ri chiziqqa $AX$ perpendikular tushiramiz. Bu perpendikularning davomiga $A$ nuqtadan $AX$ kesmaga teng $AX'$ kesmani qo'yamiz. *$X'$ shunday nuqta $q$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $X$ nuqtaga simmetrik nuqta* deyiladi. Agar $X$ nuqta $q$ to'g'ri chiziqda yotsa, unga simmetrik nuqta uning o'zidan iborat. Ravshanki, $X'$ nuqtaga simmetrik nuqta $X$ nuqtadan iboratdir.

$F$ shaklni almashtirishda $F$ ning har bir $X$ nuqtasi berilgan $q$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'lgan $X'$ nuqtaga o'tsa, bunday almashtirish *$q$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish* deyiladi.

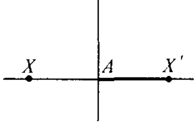
Bunda $F$ va $F'$ shakllar *$q$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik shakllar* deyiladi (109- rasm).

Agar $q$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishda $F$ shakl o'z-o'ziga o'tsa, bu shakl *$q$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik shakl* deyiladi, $q$ to'g'ri chiziq *shaklning simmetriya o'qi* deyiladi.

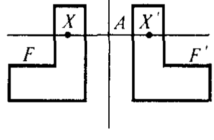
Masalan, to'g'ri to'rtburchak diagonallarining kesishish nuqtasidan uning tomonlariga parallel ravishda o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'g'ri to'rtburchakning simmetriya o'qlari bo'ladi.

## 3- §. Parallel ko'chirish va uning xossalari

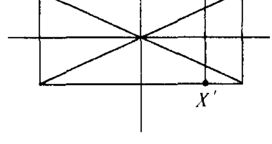
Parallel ko'chirish nuqtalar bir xil yo'nalishda bir xil masofada siljiydigan almashtirish sifatida ko'rsatmali aniqlanadi (111- rasm).



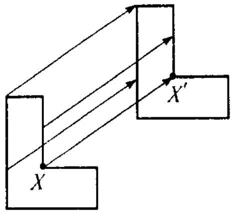

**108- rasm.**



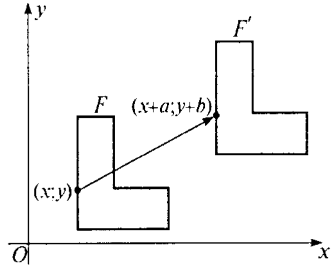

**109- rasm.**




**110- rasm.**




**111- rasm.**




**112- rasm.**

Bunday ta'rif matematik jihatdan qat'iy emas, chunki unda «bir xil yo'nalishda» jumlasi ishlatilmoqda, bu jumlaning o'zi aniq ta'riflanishga muhtoj.

Shu sababli biz parallel ko'chirishga, o'sha ko'rsatmali aniqlashga (ta'rifga) javob beradigan, ammo eng jiddiy ta'rifni beramiz.

Tekislikda Dekart koordinatalari $x$, $y$ ni kiritamiz. $F$ shakl almashtirishda uning ixtiyoriy $(x;\ y)$ nuqtasi $(x + a;\ y + b)$ nuqtaga o'tsa, bunday almashtirish *parallel ko'chirish* deyiladi, bunda $a$ va $b$ – o'zgarmas sonlar (112- rasm).

Parallel ko'chirish ushbu formulalar bilan beriladi:

$$x' = x + a; \quad y' = y + b.$$

Bu formulalar parallel ko'chirishda $(x;\ y)$ nuqta o'tadigan nuqtaning $x'$, $y'$ koordinatalarini ifodalaydi.

T e o r e m a. *Parallel ko'chirish harakatdir.*

I s b o t. Haqiqatan ham, ixtiyoriy ikkita $A\ (x_1;\ y_1)$ va $B\ (x_2;\ y_2)$ nuqta parallel ko'chirishda $A\ (x_1 + a;\ y_1 + b)$, $B\ (x_2 + a;\ y_2 + b)$ nuqtalarga o'tadi. Shu sababli

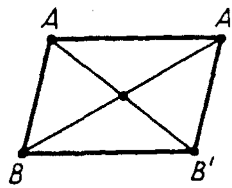
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Bundan, $AB = A'B'$. Shunday qilib, almashtirishda masofalar saqlanadi, demak, u harakatdir.

«Parallel ko'chirish» deb atalishi shu bilan asoslanadiki, parallel ko'chirishda nuqtalar parallel (yoki ustma-ust tushuvchi) to'g'ri chiziqlar bo'ylab bir xil masofaga siljiydi.

Haqiqatan ham, $A\ (x_1;\ y_1)$ va $B\ (x_2;\ y_2)$ nuqtalar parallel ko‘chirishda $A'\ (x_1 + a;\ y_1 + b)$, $B'\ (x_2 + a;\ y_2 + b)$ nuqtalarga o‘tsin (113- rasm).




**113- rasm.**

$A'B$ kesmaning o‘rtasi ushbu koordinatalarga ega:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$

$A'B$ kesmaning o‘rtasi ham shu koordinatalarga ega. Bunday $AA'B'B$ to‘rtburchakning diagonallari kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi. Bu to‘rtburchak parallelogrammdir. Parallelogrammda esa qarama-qarshi yotgan $AA'$ va $BB'$ tomonlar teng va parallel.

Shuni bilamizki, $AA'B'B$ parallelogrammning boshqa ikki tomoni $AB$ va $A'B'$ ham paralleldir. Parallel ko‘chirishda to‘g‘ri chiziqlar parallel to‘g‘ri chiziqlarga yoki o‘z-o‘ziga o‘tadi.

## *Mashqlar*

**1.** $A$, $B$, $C$ nuqtalar berilgan. $A$ nuqtani $B$ nuqtaga o‘tkazuvchi parallel ko‘chirishda $C$ nuqta o‘tadigan $C'$ nuqtani yasang.

**2.** Parallel ko‘chirish $x' = x + 1$; $y' = y - 1$ formulalar bilan beriladi. Shu parallel ko‘chirishda (0; 0), (1; 0), (0; 2) nuqtalar qanday nuqtalarga o‘tadi?

(*Javob*: (1; –1), (2; –1), (1; 1).)

**3.** Parallel ko‘chirishda:

1) (1; 2) nuqta (3; 4) nuqtaga; 2) (2; –3) nuqta (–1; 5) nuqtaga; 3) (–1; –3) nuqta (0; –2) nuqtaga o‘tishi ma’lum bo‘lsa, parallel ko‘chirishning $x' = x + a$; $y' = y + b$ formulasidagi $a$ va $b$ ning qiymatini toping.

(*Javob*: 1) $a = b = 2$; 2) $a = -3$, $b = 8$; 3) $a = b = 1$.)

**4.** Parallel ko‘chirishda (1; 1) nuqta (–1; 0) nuqtaga o‘tadi. Koordinatalar boshi qanday nuqtaga o‘tadi?

**5.** 1) (1; 2) nuqta (3; 4) nuqtaga, (0; 1) nuqta esa (–1; 0) nuqtaga o'tadigan; 2) (2; –1) nuqta (1; 0) nuqtaga, (–1; 3) nuqta esa (0; 4) nuqtaga o'tadigan parallel ko'chirish mavjudmi?

(*Javob*: 1) mavjud emas; 2) mavjud.)

## 4- §. O'xshashlik almashtirishlar

Agar shaklni shaklga almashtirishda nuqtalar orasidagi masofalar bir xil son marta o'zgarsa (ortsa yoki kamaysa), bunday almashtirish *o'xshashlik almashtirish* deyiladi. Bu agar $F$ shaklning ixtiyoriy $A$ va $B$ nuqtalari bunday almashtirishda $F_1$ shaklning $A_1$ va $B_1$ nuqtalariga o'tsa, u holda $A_1B_1 = kAB$ bo'ladi, demakdir.

*k son o'xshashlik koeffitsiyenti* deyiladi.

*$k = 1$ da o'xshashlik almashtirish harakatdan iborat bo'ladi.*

*Gomotetiya o'xshashlik almashtirishdir.*

$F$ – berilgan shakl va $O$ – tayinlangan nuqta bo'lsin. $F$ shaklning ixtiyoriy $X$ nuqtasi orqali $OX$ nurni o'tkazamiz va bu nurga $k \cdot OX$ ga teng $OX'$ kesmani qo'yamiz ($k > 0$). $F$ shaklning har bir $X$ nuqtasi $X'$ nuqtaga ko'rsatilgan usul bilan o'tadigan almashtirish $O$ markazga nisbatan *gomotetiya* deyiladi. $k$ son gomotetiya koeffitsiyenti deyiladi (114- *a* rasm).

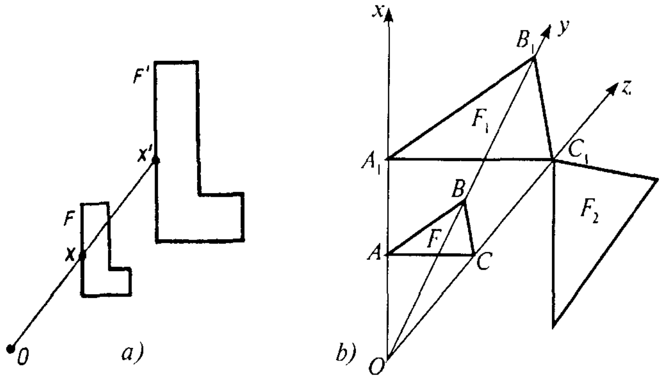
### Xossalari

*1°. O'xshashlik almashtirishda bir to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta $A$, $B$, $C$ nuqta bir to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta $A_1$, $B_1$, $C_1$ nuqtalarga o'tadi. Bunda, agar $B$ nuqta $A$ va $C$ nuqtalar orasida yotsa, u holda $B_1$ nuqta $A_1$ va $C_1$ nuqtalar orasida yotadi.*

*2°. O'xshashlik almashtirish to'g'ri chiziqlarni to'g'ri chiziqlarga, nurlarni nurlarga, kesmalarni kesmalarga o'tkazadi.*

*3°. O'xshashlik almashtirish yarim to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklarni saqlaydi.*

*4°. Har qanday o'xshashlik almashtirish ham gomotetiya bo'lavermaydi (114- b rasm).*




**114- rasm.**

Masalan, $F_1$ shaklni $F$ shakldan gomotetiya natijasida hosil qilingan. $F_2$ shakl esa $F_1$ shakldan $Oz$ o‘qqa nisbatan simmetriya natijasida hosil qilingan. $F_1$ shaklni $F_2$ shaklga almashtirish o‘xshashlik almashtirishdir, chunki bu almashtirishda mos nuqtalar orasidagi masofalar nisbati saqlandi, biroq bu almashtirish gomotetiya bo‘lmaydi.

## *Mashqlar*

**1.** Agar gomotetiya koeffitsiyenti: 1) 2; 2) 3 ga teng bo‘lsa, markazi koordinatalar boshida bo‘lgan gomotetiyada $A$ (1; 2); $B$ (2; 2); $C$ (–1; 1); $D$ (5; –1) nuqtalar o‘tadigan nuqtalarni yasang.

**2.** Gomotetiyada $X$ nuqta $X'$ nuqtaga, $Y$ nuqta esa $Y'$ nuqtaga o‘tadi. Agar $X$, $X'$, $Y$, $Y'$ nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotmasa, gomotetiya markazini toping.

**3.** Gomotetiyada $X$ nuqta $X'$ nuqtaga o‘tadi. Agar gomotetiya koeffitsiyenti: 1) 2; 2) 3; 3) 4 ga teng bo‘lsa, gomotetiya markazini yasang.

**4.** Biror nuqtaga nisbatan simmetriyada $X$ nuqta $X'$ nuqtaga o‘tadi. Shu simmetriyada $Y$ nuqta o‘tadigan nuqtani yasang.

**5.** To‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada $Y$ nuqta o‘tadigan nuqtani yasang.

# IV bob

# FAZOVIY SHAKLLARNI TEKISLIKDA TASVIRLASH

Fazoviy shakllarni tekislikda tasvirlashda odatda parallel proyeksiyalashdan foydalaniladi. Shaklni tasvirlashning bu usuli quyidagicha: chizma tekisligi $\alpha$ ni kesib o'tuvchi ixtiyoriy $h$ to'g'ri chiziqni olamiz va shaklning ixtiyoriy $A$ nuqtasidan $h$ ga parallel qilib to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqning chizma tekisligi bilan kesishgan $A_1$ nuqtasi $A$ nuqtaning tasviri bo'ladi (115- rasm).

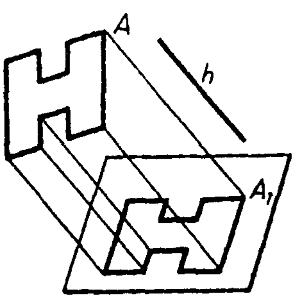
Shaklning har bir nuqtasining tasvirini shu tarzda yasab, shu shaklning tekislikdagi tasvirini hosil qilamiz.

## Xossalari

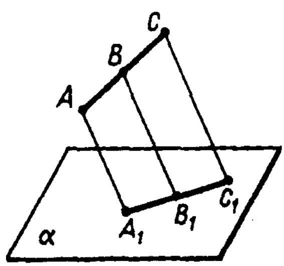
*1°. Shaklning to'g'ri chiziqli kesmalari chizma tekisligida yana kesmalar bilan tasvirlanadi (116- rasm).*

Haqiqatan ham, $AC$ kesma nuqtalarini proyeksiyalovchi hamma to'g'ri chiziqlar chizma tekisligi $\alpha$ ni $A_1C_1$ to'g'ri chiziq bo'yicha kesuvchi bitta tekislikda yotadi. $AC$ kesmaning ixtiyoriy $B$ nuqtasi $A_1C_1$ kesmaning $B_1$ nuqtasi bilan tasvirlanadi.

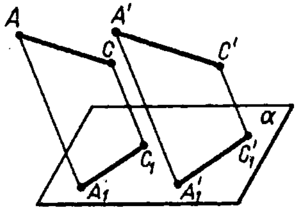
*2°. Shaklning parallel kesmalari chizma tekisligida parallel kesmalar bilan tasvirlanadi (117- rasm).*



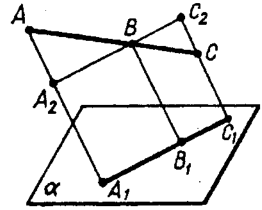

**115- rasm.**




**116- rasm.**




**117- rasm.**




**118- rasm.**

Haqiqatan ham, $AC$ va $A'C'$ – shaklning parallel kesmalari bo‘lsin. $A_1C_1$ va $A_1'C_1'$ to‘g‘ri chiziqlar parallel, chunki ular parallel tekisliklarning α tekislik bilan kesishishidan hosil qilinadi. Bu tekisliklarning birinchisi $AC$ va $AA_1$ to‘g‘ri chiziqlar orqali o‘tadi.

*3°. Bitta to‘g‘ri chiziq yoki parallel to‘g‘ri chiziqlar kesmalarining nisbati parallel proyeksiyalashda saqlanadi (118- rasm).*

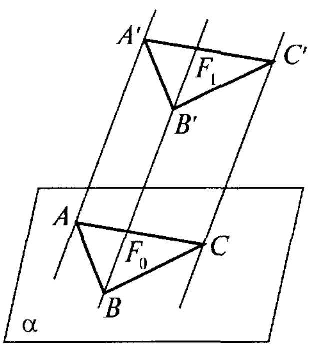
Masalan: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

$B$ nuqta orqali $A_1C_1$ ga parallel to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. $BAA_2$ va $BCC_2$ – uchburchaklar o‘xshash. Ularning tomonlari proporsional bo‘ladi: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_2B}{BC_2} = \frac{AA_2}{CC_2}$. Uchburchaklarning o‘xshashligidan hamda $A_1B_1 = A_2B$ va $B_1C_1 = BC_2$ tengliklardan $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ ekanligi kelib chiqadi.

## 1- §. Parallel proyeksiyalash va uning xossalari

Parallel proyeksiyalashni markaziy proyeksiyalashning xususiy holi deb qarash mumkin. Bunda proyeksiyalash markazi $S$ biror $M'N'$ to‘g‘ri chiziq yo‘nalishi bo‘yicha harakatlanib, proyeksiyalar tekisligida cheksiz uzoqlashgan deb faraz qilamiz (119- rasm).

Bu yerda *$M'N'$ proyeksiyalash yo‘nalishi* deyiladi. Fazoda olingan $F'$ shaklni α tekislikka proyeksiyalash uchun $F'$ shaklning har bir nuqtasi orqali $M'N'$ yo‘nalishga parallel qilib




**119- rasm.**

proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqlarning $\alpha$ tekislik bilan kesishgan $F_0$ nuqtalar to‘plami $F'$ shaklning $\alpha$ tekislikdagi *parallel proyeksiyasi* deb ataladi.

Parallel proyeksiyaning ko‘rinishi va o‘lchamlarining o‘zgarishi faqat proyeksiyalar tekisligining yo‘nalishiga nisbatan qanday joylashishiga bog‘liq. Proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalar tekisligiga nisbatan qanday yo‘nalishda bo‘lishiga qarab parallel proyeksiyalash *qiyshiq burchakli* va *to‘g‘ri burchakli* bo‘ladi.

Agar proyeksiyalash yo‘nalishi proyeksiyalar tekisligi bilan to‘g‘ri burchak tashkil qilsa, bunday parallel proyeksiyalash *to‘g‘ri burchakli* yoki *ortogonal proyeksiyalash* deyiladi.

Agar proyeksiyalash yo‘nalishi proyeksiyalar tekisligi bilan o‘tkir burchak tashkil qilsa, bunday parallel proyeksiyalash *qiyshiq proyeksiyalash* deyiladi. Shaklning parallel proyeksiyalashdagi tasviri asosan quyidagicha hosil qilinadi.

1. Berilgan fazoviy shaklning barcha nuqtalari berilgan yo‘nalishda $\alpha$ tekislikka proyeksiyalanadi.

2. Proyeksiya tekisligida hosil qilingan shakl o‘xshash almashtiriladi.

## Xossalari

*1°. To‘g‘ri chiziq proyeksiyasi to‘g‘ri chiziqdir.*

*2°. Parallel to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari o‘zaro paralleldir.*

*3°. Ikki parallel kesma proyeksiyalari uzunliklarining nisbati proyeksiyalanuvchi kesmalar uzunliklarining nisbatiga teng.*

### *Mashqlar*

1. Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Bu uchburchak medianalarining proyeksiyalarini qanday yasash kerak?

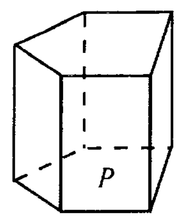
   Yechilishi: Parallel proyeksiyalashda to'g'ri chiziq kesmalarining nisbati saqlanadi. Shuning uchun uchburchak tomonining o'rtasi bu tomon proyeksiyasining o'rtasiga proyeksiyalanadi. Demak, uchburchak medianalarining proyeksiyalari uning proyeksiyasining medianalari bo'ladi.
2. Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Uchburchak o'rta chizig'ining proyeksiyasi nima bilan tasvirlanadi?
3. Parallelogrammni parallel proyeksiyalashda parallelogramm hosil qilish mumkinmi?

   (*Javob*: Yo'q. Javobingizni tushuntiring.)
4. Parallel proyeksiyalashda parallelogrammning proyeksiyasi kvadrat bo'lishi mumkinmi?

   (*Javob*: Mumkin.)

## 2- §. Prizmaning tekislikdagi tasvirini yasash

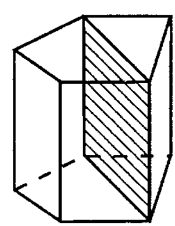
Parallel proyeksiyalash qoidalariga muvofiq prizmaning tasviri quyidagi tarzda yasaladi. Avval asoslaridan biri *P* yasaladi (120- rasm). U biror yassi ko'pburchak bo'ladi. Keyin bu ko'pburchakning uchlaridan parallel kesmalar ko'rinishida prizmaning yon qirralari o'tkaziladi. Bu kesmalarning uchlari tutashtiriladi va prizmaning ikkinchi asosi hosil bo'ladi.




**120- rasm.**

Ko'rinmaydigan qirralar shtrix chiziq bilan ko'rsatiladi. Prizmaning yon qirralariga parallel tekisliklar bilan kesimlari parallelogrammlar bo'ladi.

Xususan, diagonal kesimlar ham parallelogramm bo'ladi. Bu bitta yoqqa tegishli bo'lmagan ikkita yon qirra orqali o'tadi (121- rasm).



**121- rasm.**

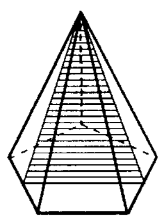
## 3- §. Piramidaning tekislikdagi tasvirini yasash

Parallel proyeksiyalash qoidalariga muvofiq piramidaning tasviri quyidagi tarzda yasaladi. Avval asosi yasaladi. Bu biror yassi ko'pburchak bo'ladi (122- rasm). Keyin piramidaning uchi belgilanadi, u yon qirralar yordamida asos uchlari bilan tutashtiriladi. Rasmda beshburchakli piramidaning tasviri ko'rsatilgan. Piramidaning uchi orqali o'tuvchi tekisliklar bilan kesimlari uchburchakdan iborat.

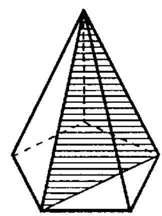
Xususan, diagonal kesimlari uchburchak bo'ladi. Bunday kesimlar piramidaning ikkita qo'shni bo'lmagan yon qirralari orqali o'tuvchi tekisliklar bilan hosil qilinadi (123- rasm). Piramidaning asos tekisligidan berilgan *q* izli tekislik bilan kesimi xuddi prizmaning kesimi kabi yasaladi. Piramidaning tekislik bilan kesimini yasash uchun uning yon yoqlarini kesuvchi tekislik bilan kesishmasini yasash yetarli.

Agar *q* izga parallel bo'lmagan yoqda kesimga tegishli bo'lgan biror *A* nuqta ma'lum bo'lsa, u holda ular kesishuvchi tekislikdagi *q* izning shu yoq tekisligi bilan kesishmasi *D* nuqta yasaladi. *D* nuqta to'g'ri chiziqdagi *A* nuqta bilan tutashtiriladi. U holda bu to'g'ri chiziqning yoqqa tegishli bo'lgan kesmasi bu yoqning kesuvchi tekislik bilan kesishmasidan iborat bo'ladi.

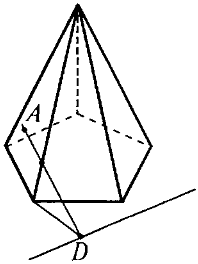
Agar *A* nuqta *q* izga parallel o'tsa, u holda kesuvchi tekislik bu yoqni *q* to'g'ri chiziqqa parallel kesma bo'yicha kesib o'tadi. Qo'shni yon yoqqa o'tib, uning kesuvchi tekislik bilan kesishmasi yasaladi. Natijada piramidaning talab etilayotgan kesimi hosil bo'ladi (125- rasm).



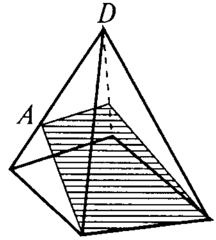
**122- rasm.**



**123- rasm.**




124- rasm.




125- rasm.

Rasmda to'rtburchakli piramidaning asos tomonidan va uning yon qirralaridan birida yotgan $A$ nuqtadan o'tuvchi tekislik bilan kesimi yasalgan.

### *Mashqlar*

**1.** Piramidaning asosi tomonlari 6 sm va 8 sm ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak. Piramidaning har bir qirrasi 13 sm ga teng. Piramidaning balandligini hisoblang.

(*Javob*: 12 sm.)

**2.** Piramidaning asosi muntazam uchburchakdan iborat; yon yoqlaridan biri asosga perpendikular, qolgan ikkitasi asosga $\alpha$ burchak ostida og'ishgan. Yon qirralar asos tekisligiga qanday og'ishgan?

(*Javob*: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$.)

**3.** Piramidaning asosi parallelogramm bo'lib, uning tomonlari 3 sm va 7 sm, diagonallaridan biri 6 sm, piramidaning balandligi diagonallarining kesishgan nuqtasidan o'tib, 4 sm ga teng. Piramidaning yon qirrasini toping.

(*Javob*: 5 sm, 6 sm.)

## 4- §. Ko'pburchak ortogonal proyeksiyasining yuzi

T a ' r i f. Shaklning berilgan tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi deb shaklning bu tekislikka perpendikular yo'nalishdagi *parallel proyeksiyasiga* aytiladi.

Avval $\beta$ tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziq va kesmalarning $\alpha$ tekislikka ortogonal proyeksiyasini ko'rib chiqamiz.

$\beta \cap \alpha = a$, $(\widehat{\beta, \alpha}) = \varphi$, $0° < \varphi < 90°$ (126- rasm).

$\beta$ tekislikda $a$ to'g'ri chiziqqa parallel $l_1$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Parallel proyeksiyalash to'g'ri chiziqlarning parallelligini saqlaydi. Shuning uchun $a$ va $l_1$ to'g'ri chiziqlar $a$ va $l$ parallel to'g'ri chiziqlarga akslanadi, bundan $l_1 \| l$ ekani kelib chiqadi.

$l_1$ to'g'ri chiziqning $A_1B_1$ kesmasi va uning $AB$ obrazi $A_1B_1AB$ parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari bo'ladi. Chunki proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar parallel. Demak, $|AB| = |A_1B_1|$ (126- rasmga qarang).

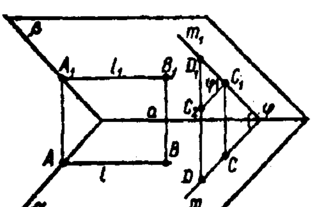
$\beta$ tekislikda $a$ to'g'ri chiziqqa perpendikular $m_1$ to'g'ri chiziqni ko'rib chiqamiz. $m_1$ to'g'ri chiziqning $m$ proyeksiyasi ham $a$ ga perpendikular (uch perpendikular haqidagi teorema). Shuning uchun $(\widehat{m_1, m}) = \varphi$.

Bundan $a$ ga perpendikular bo'lgan $C_1D_1$ kesma va uning obrazi $CD$ uchun $|CD| = |C_1D_1| = \cos\varphi$ tenglik bajarilishi kelib chiqadi.

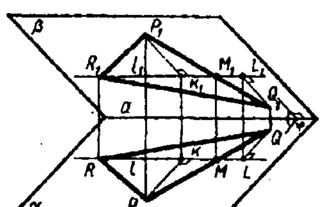
T e o r e m a. *Ko'pburchakning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasining yuzi proyeksiyalanuvchi ko'pburchak yuzini ko'pburchak tekisligi bilan uning proyeksiyasi orasidagi burchak kosinusiga ko'paytirilganiga teng.*

I s b o t i. $\beta$ tekislikda yotuvchi $P_1Q_1R_1$ uchburchak bilan uning $\alpha$ tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi $\triangle PQR$ ni ko'rib chiqamiz (127- rasm).

$\beta \cap \alpha = a$, $(\widehat{\beta, \alpha}) = \varphi$, $0° < \varphi < 90°$ bo'lsin. Agar $P_1$, $Q_1$, $R_1$ nuqtalardan $a$ ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, ulardan biri uchburchakning qarama-qarshi yotgan tomoni bilan umu-




**126- rasm.**




**127- rasm.**

miy nuqtaga ega bo‘ladi. Bunday to‘g‘ri chiziqni $R_1$ nuqtadan o‘tuvchi $l_1$ to‘g‘ri chiziq deb hisoblaymiz:

$$l_1 \cap [P_1 Q_1] = M_1.$$

$|P_1 K_1|$ va $|Q_1 L_1|$ kesmada $P_1$ va $Q_1$ nuqtalardan to‘g‘ri chiziqqacha masofalar bo‘lsin.

$M_1$, $K_1$, $L_1$ nuqtalarning $M$, $K$, $L$ proyeksiyalarini yasab, $PQR$ uchburchakning yuzini $P_1 Q_1 R_1$ uchburchak yuzi bilan ifodalaymiz.

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2}|RM||PK| + \frac{1}{2}|RM||QL|.$$

Yuqoridagi xulosalarga muvofiq

$$|RM| = |R_1 M_1|; \quad |PK| = |P_1 K_1|\cos\varphi; \quad |QL| = |Q_1 L_1|\cos\varphi;$$

u holda

$$S_{\Delta PQR} = \left(\frac{1}{2}|R_1 M_1||P_1 K_1| + \frac{1}{2}|R_1 M_1||Q_1 L_1|\right)\cos\varphi = S_{\Delta P_1 Q_1 R_1}\cos\varphi.$$

Demak, $S_{\Delta PQR} = S_{\Delta P_1 Q_1 R_1}\cos\varphi$.

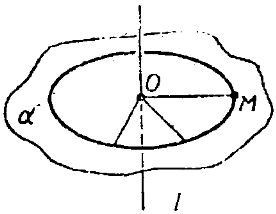
Agar tekisliklar $\beta \| \alpha$ bo‘lsa, u holda uchburchak va uning proyeksiyasi kongruent bo‘ladi.

### *Mashqlar*

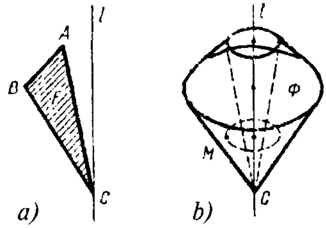
1. Og‘ma tekislik bilan 45° li burchak tashkil etadi. Og‘ma asosida tekislikka og‘maning proyeksiyasiga 45° li burchak ostida to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Shu to‘g‘ri chiziq bilan og‘ma orasidagi $\varphi$ burchakni toping.
2. To‘g‘ri parallelepiped asosining tomonlari 4 dm va 5 dm, ular orasidagi burchak 30°. Agar parallelepipedning tekislik bilan kesimi uning barcha qirralarini kesib o‘tishi va asos tekisligi bilan 45° li burchak tashkil qilishi ma’lum bo‘lsa, kesimning yuzini toping.

## 5- §. Aylanish jismlarini tekislikda tasvirlash

1. $l$ to‘g‘ri chiziq va $l$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmagan ixtiyoriy $M$ nuqta berilgan bo‘lsin. $M$ nuqtadan $l$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular $\alpha$ tekislik o‘tsin (128- rasm).




**128- rasm.**




**129- rasm.**

Shu tekislikda $O = \alpha \cap l$ markazli va $|OM|$ radiusli aylanani ko'rib chiqamiz. Bu aylana $M$ nuqtaning $l$ o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan deb aytishni kelishib olamiz.

Tekislikda $l$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi $F$ shaklni, masalan, $ABC$ uchburchakni olamiz (129- *a* rasm).

$\Phi$ shaklga uning $l$ ga tegishli barcha nuqtalarining va $l$ ga tegishli bo'lmagan barcha nuqtalarining aylanishidan hosil qilingan aylanalarning birlashmasini mos qo'yamiz (129- *b* rasm).

$\Phi$ shakl $F$ shaklning $l$ o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan deyiladi.

Agar $\Phi$ shakl biror shaklning biror o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lsa, u holda $\Phi$ *aylanish shakli* deyiladi.

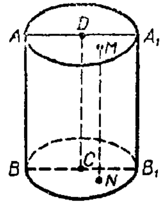
T a ' r i f. To'g'ri to'rtburchakni uning bir tomonini o'z ichiga olgan o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan shakl *silindr* deyiladi.

Bu aylanishda to'g'ri to'rtburchakning aylanish o'qida yotmagan tomonlari silindrning *sirti* deb ataluvchi shakl hosil qiladi.

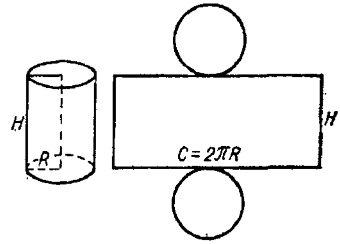
VIII sinf geometriya kursidan quyidagi atamalar sizga ma'lum: silindrning asosi, yon sirti, balandligi, yasovchisi (130- rasm).

Silindr yon sirtining va to'la sirtining yuzi uchun unga mos yoyilmasining yuzi qabul qilinishini ham eslatib o'tamiz (131- rasm). Demak, ushbu formulalarga kelamiz:

$$S_{yon} = 2\pi RH, \quad S_{t.s.} = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$




**130- rasm.**




**131- rasm.**

## *Mashqlar*

**1.** Silindrning: 1) o'qidan o'tuvchi; 2) asosiga parallel; 3) o'qiga parallel; 4) barcha yasovchilarini kesuvchi tekislik bilan kesimi qanday shakl bo'ladi?

(*Javob:* 3) to'g'ri to'rtburchak yoki kesma; 4) tekislikning ellips bilan chegaralangan qismi.)

**2.** Silindr o'q kesimining yuzi 8 $m^2$, asosining yuzi 12 $m^2$, o'qiga parallel va undan 1 m uzoqlikdagi kesimning yuzini toping.

(*Javob:* $\approx$ 6,87 $m^2$.)

**3.** Silindr shaklidagi bug' qozonning diametri 1 m, qozonning uzunligi 3,8 m, bug'ning bosimi 10 atm. Bug'ning qozon sirtiga bosim kuchini toping.

(*Javob:* $\approx 1{,}4 \cdot 10^7$ N.)

# V bob

# FAZODA VEKTORLAR

Fazoda tekislikdagi singari *vektor* deb, *yo'naltirilgan kesmaga* aytiladi. Fazoda vektorlar uchun asosiy tushunchalar: *vektorning absolut kattaligi (moduli), vektorning yo'nalishi, vektorlarning tengligi* tekislikdagi singari ta'riflanadi.

Boshi $A_1$ $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nuqtada va oxiri $A_2$ $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtada bo'lgan vektorning *koordinatalari* deb $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$ sonlarga aytiladi. Xuddi tekislikdagi singari teng vektorlarning mos koordinatalari tengligi va, aksincha, koordinatalari teng vektorlarning tengligi isbotlanadi.

Bu esa vektorni uning koordinatalari bilan ifodalashga asos bo'ladi: $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ yoki, soddaroq yozilsa, $(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

M a s a l a . To'rtta nuqta berilgan: $A$ (2; –7; 3), $B$ (1; 0; 3), $C$ (–3; –4; 5), $D$ (–2; 3; –1). $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ ва $\overline{BD}$ vektorlar orasidan teng vektorlarni ko'rsating.

Y e c h i l i s h i . Ko'rsatilgan $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... vektorlarning koordinatalarini topish va mos koordinatalarni taqqoslash kerak. Teng vektorlarning mos koordinatalari teng. Masalan: $\overline{AB}$ vektorning koordinatalari: $1 - 2 = -1$, $0 - 7 = -7$, $3 - (-3) = 6$; $\overline{DC}$ vektorning koordinatalari ham xuddi shunday: $-3 - (-2) = -1$, $-4 - 3 = -7$, $5 - (-1) = 6$. Shunday qilib, $\overline{AB}$ va $\overline{DC}$ vektorlar teng. Teng vektorlarning yana bir jufti $\overline{BC}$ va $\overline{AD}$ dan iborat.

### *Mashqlar*

**1.** Uchta nuqta berilgan: $A$ (1; 0; 1), $B$ (–1; 1; 2), $C$ (0; 2; –1). Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar teng bo'lsa, $D(x;\ y;\ z)$ nuqtani toping.

(*Javob:* $D$ (–2; 3; 0).)

**2.** Agar 1- masalada $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlarning yig'indisi nolga teng bo'lsa, $D$ nuqtani toping.

(*Javob:* $D$ (2; 1; –2).)

**3.** (2; $n$; 3) va (3; 2; $m$) vektorlar berilgan. $m$ va $n$ ning qanday qiymatlarida bu vektorlar kollinear bo'ladi?

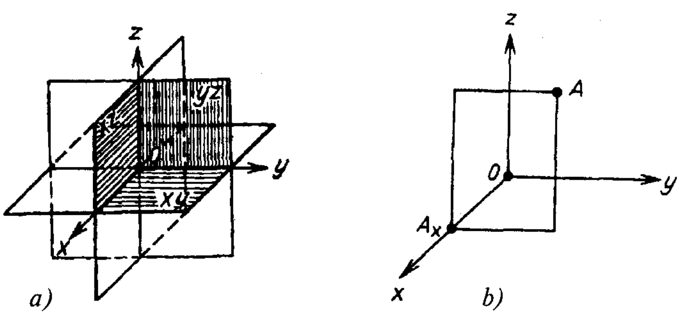
(*Javob:* $n = \frac{4}{3}$; $m = \frac{3}{2}$.)

## 1- §. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi

Bitta $O$ nuqtada kesishuvchi o'zaro perpendikular uchta $x$, $y$, $z$ to'g'ri chiziqni olamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning har bir jufti orqali tekislik o'tkazamiz. $x$ va $y$ to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi tekislik *xy tekislik* deyiladi. Boshqa ikki tekislik mos ravishda *xz* va *yz tekisliklar* deyiladi. $x$, $y$, $z$ to'g'ri chiziqlar *koordinata o'qlari* deyiladi, ularning kesishgan $O$ nuqtasi – koordinatalar boshi, *xy*, *yz* va *xz* tekisliklar esa *koordinata tekisliklari* deyiladi. $O$ nuqta koordinata o'qlarining har birini ikkita yarim to'g'ri chiziqqa – yarim o'qlarga ajratadi. Ulardan birini *musbat*, ikkinchisini *manfiy* deb aytishga shartlashib olamiz (132-*a* rasm).

Endi ixtiyoriy $A$ nuqtani olamiz va undan *yz* tekislikka parallel tekislik o'tkazamiz (132- rasm).

Bu tekislik $x$ o'qni biror $A_x$ nuqtada kesib o'tadi. $A$ nuqtaning *x koordinatasi* deb moduli $OA_x$ kesmaning uzunligiga teng songa aytamiz. Bu son, agar $A_x$ nuqta $x$ ning musbat




**132- rasm.**

yarim o'qida yotsa — musbat va manfiy, yarim o'qida yotsa — manfiy.

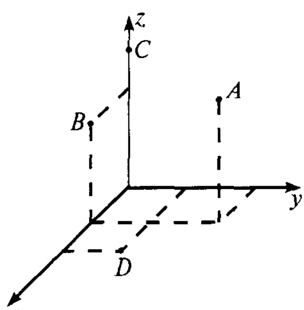
Agar $A_x$ nuqta $O$ nuqta bilan ustma-ust tushsa, $x = 0$ deb olamiz. $A$ nuqtaning $y$, $z$ koordinatalari shu kabi aniqlanadi. Nuqtaning koordinatalarini nuqtaning harfiy belgilanishi yoniga qavs ichida yozamiz: $A$ ($x$; $y$; $z$). Ba'zan oddiygina qilib uning koordinatalari bilan belgilaymiz: ($x$; $y$; $z$).

Masala. $A$ (3; 1; 3), $B$ (0; 1; 2), $C$ (0; 0; 3), $D$ (1; 2; 0) nuqtalar berilgan. Bu nuqtalardan qaysilari: 1) $xy$ tekislikda; 2) $z$ o'qda; 3) $yz$ tekislikda yotadi?

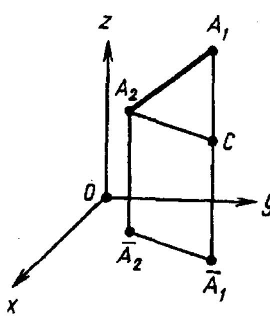
Yechilishi. $xy$ tekislikdagi nuqtalarda $z$ koordinata nolga teng. Shuning uchun faqat $D$ nuqta $xy$ tekislikda yotadi. $yz$ tekislikdagi nuqtalarda $x$ koordinata nolga teng. Demak, $B$ va $C$ nuqtalar $yz$ tekislikda yotar ekan. $z$ o'qdagi nuqtalarning ikkita koordinatasi ($x$ va $y$) nolga teng. Shuning uchun $C$ nuqta $z$ o'qda yotadi (133- rasm).

## 2- §. Ikki nuqta orasidagi masofa

Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi va $A_1$ ($x_1$; $y_1$; $z_1$), $A_2$ ($x_2$; $y_2$; $z_2$) nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofani topish masalasi bilan shug'ullanamiz. $\overline{A_1}$ va $\overline{A_2}$ nuqtalar mos ravishda $A_1$ va $A_2$ ning $Oxy$ tekislikdagi proyeksiyalari bo'lsin (134- rasm).




**133- rasm.**




**134- rasm.**

Tekislikda ikkita nuqta orasidagi masofa formulasiga ko‘ra $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ kesmaning uzunligi

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

bo‘ladi. $A$ nuqtadan $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ kesmaga parallel chiziq o‘tkazib, uning $A_1\overline{A_1}$ chiziq bilan kesishgan nuqtasini $C$ orqali belgilaylik.

U holda $\overline{A_1}C$ kesmaning uzunligi $|z_2 - z_1|$ ga teng bo‘ladi. Ravshanki, $\triangle A_2A_1C$ to‘g‘ri burchakli uchburchak. Pifagor teoremasidan foydalanib, $A_2A_1 = \sqrt{A_2C^2 + A_1C^2}$ ni topamiz. Endi $A_2C = \overline{A_2}\,\overline{A_1}$ ekanini e’tiborga olsak, u holda

$$A_2A_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

bo‘ladi.

Demak, $A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .

Bu tenglikka *fazoda ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi* deyiladi.

## *Mashqlar*

**1.** $xy$ tekislikda $A$ (0; 1; –1), $B$ (–1; 0; 1), $C$ (0; –1; 0) nuqtalardan teng uzoqlashgan $D$ ($x$; $y$; 0) nuqtani toping.

Yechilishi. Quyidagilarga egamiz:

$$AD^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 1)^2;$$
$$BD^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 1)^2;$$
$$CD^2 = (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + (0 - 0)^2.$$

Oldingi ikkita masofani uchinchisiga tenglab, $x$, $y$ ni aniqlash uchun ikkita tenglama hosil qilamiz:

$$-4y + 1 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0.$$

Bundan $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Izlanayotgan nuqta $D(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0)$.

**2.** (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0) nuqtalarning har birida bir xil masofada yotuvchi va $yz$ tekislikdan 2 birlik masofadagi nuqtalarni toping.

(*Javob*: (2; 2; 2) va (–2; –2; –2).)

**3.** $x$ o'qida $A$ (1; 2; 3), $B$ (–2; 1; 3) nuqtalardan teng uzoqlikdagi $C$ ($x$; 0; 0) nuqtani toping.

(*Javob*: $C$ (0; 0; 0).)

**4.** $A$ (1; 2; 3) nuqtadan va koordinatalar boshidan teng uzoqlashgan fazo nuqtalarining geometrik o'rni tenglamasini tuzing. (*Javob*: $x + 2y + 3z = 7$.)

## 3- §. Vektorning koordinatalari

$\bar{a} = \overline{AB}$ vektorning boshi $A$ ($x_1$; $y_1$; $z_1$), oxiri esa $B$ ($x_2$; $y_2$; $z_2$) nuqta bo'lsin (135- rasm).

$a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ sonlarni $\bar{a}$ vektorning koordinatalari deb ataymiz. Vektorning koordinatalarini uning harfiy belgisi yoniga yoziladi. $\bar{a}$ ($a_1$; $a_2$; $a_3$). Nol vektorning koordinatalari nolga teng.

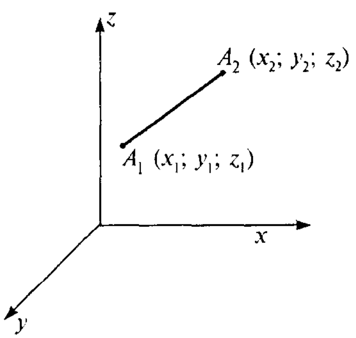
Koordinatalari $a_1$, $a_2$, $a_3$ dan iborat vektorning moduli

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ga teng.

T e o r e m a. *Teng vektorlar mos ravishda teng koordinatalarga ega, va aksincha, agar vektorlarning mos koordinatalari teng bo'lsa, vektorlar teng bo'ladi.*

I s b o t i. Haqiqatan, $A_1$ ($x_1$; $y_1$; $z_1$) va $A_2$ ($x_2$; $y_2$; $z_2$) nuqtalar $\bar{a}$ vektorning boshi va oxiri bo'lsin, $\bar{a}$ vektorga teng $\bar{a}'$ vektor $\bar{a}$ vektorni parallel ko'chirish bilan hosil qilingani uchun $\bar{a}'$ vektorning boshi va oxiri mos ravishda $A_1'$ ($x_1 + c$; $y_1 + d$; $z_1 + k$), $A_2'$ ($x_2 + c$; $y_2 + d$; $z_2 + k$) nuqtalardan iborat bo'ladi. Bundan ikkala $\bar{a}$ va $\bar{a}'$ vektorning bir xil $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$ koordinatalarga ega ekanligi ko'rinib turibdi.




**135- rasm.**

## Mashqlar

**1.** Uchta nuqta berilgan: $A$ (1; 1; 1), $B$ (–1; 0; 1), $C$ (0; 1;1) Shunday $D$ ($x$; $y$; $z$) nuqtani topingki, $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar teng bo‘lsin.

Yechilishi. $\overline{AB}$ vektorning koordinatalari (–2; –1; 0), $\overline{CD}$ vektorning koordinatalari ($x$ – 0; $y$ –1; $z$ –1) bo‘ladi. $\overline{AB} = \overline{CD}$ dan: $x - 0 = -2$; $y - 1 = -1$; $z - 1 = 0$. Bundan $D$ nuqtaning koordinatalarini topamiz: $x = -2$; $y = 0$; $z = 1$.

(*Javob*: $D$ (–2; 0; 1.)

**2.** Agar 1) $\bar{a}$ (1; $-4$), $\bar{b}$ (–4; 8); 2) $\bar{a}$ (2; 5), $\bar{b}$ (4; 3) bo‘lsa, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar yig‘indisiga teng bo‘lgan $\bar{c}$ vektorni va uning absolut qiymatini (modulini) toping.

(*Javob*: 1) $\bar{c}$ (–3; 4), $|\bar{c}| = 5$; 2) $\bar{c}$ (6; 8), $|\bar{c}| = 10$.)

**3.** Agar 1) $\bar{a}$ (1; $-4$), $\bar{b}$ (–4; 8); 2) $\bar{a}$ (–2; 7), $\bar{b}$ (4; $-1$) bo‘lsa, $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ vektorni va uning absolut qiymatini (modulini) toping.

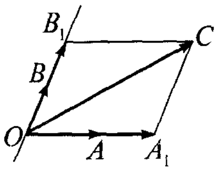
(*Javob*: 1) $\bar{c}$ (5; $-12$), $|\bar{c}| = 13$; 2) $\bar{c}$ (–6; 8), $|\bar{c}| = 10$.)

## 4- §. Kollinear va komplanar vektorlar

Ta’rif. Nolmas $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar yo‘nalishdosh yoki qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, ular *kollinear vektorlar* deb ataladi.

Nolmas $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar o‘zaro $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ ($\lambda \neq 0$) tenglik bilan bog‘langan bo‘lsa, bu ularning o‘zaro kollinear bo‘lishining zaruriy va yetarlilik sharti hisoblanadi.

Ta’rif. Nolmas $\bar{a}$, $\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar biror $O$ nuqtada qo‘yilgan vaqtda $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$ va $\bar{c} = \overline{OC}$ vektorlar bir tekislikda yotsa, u holda ular o‘zaro *komplanar vektorlar* deyiladi.




**136- rasm.**

Teorema. *Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kollinear bo'lmasa, ular bilan komplanar bo'lgan har qanday $\bar{c}$ vektor uchun shunday λ va μ (λ, μ∈ R) sonlar topiladiki, uni yagona tarzda $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ kabi yozish mumkin.*

Isboti. Bu yerda uch hol bo'lishi mumkin. $\bar{c}$ vektor yo $\bar{a}$ vektor bilan, yo $\bar{b}$ vektor bilan kollinear bo'ladi, yoki ikkalasi bilan ham kollinear bo'lmaydi. Birinchi ikki holda kollinearlikning yuqorida aytib o'tilgan shartiga ko'ra yoki $\bar{c} = \lambda\bar{a} + 0 \cdot \bar{b}$, yoki $\bar{c} = 0 \cdot \bar{a} + \mu\bar{b}$ kabi yozilib, teorema tasdig'i to'g'ri bo'ladi.

Endi uchinchi holda bu uchala vektorning boshini $O$ nuqtaga qo'yaylik va $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$, $\bar{c} = \overline{OC}$ bo'lsin. Agar $C$ nuqtadan $\bar{b}$ vektorga parallel to'g'ri chiziq o'tkazsak, u $OA$ to'g'ri chiziqni $A_1$ nuqtada, $\bar{a}$ vektorga parallel to'g'ri chiziq o'tkazsak, u $OB$ to'g'ri chiziqni $B_1$ nuqtada kesib o'tadi (136- rasm).

Natijada $\overline{OA}$ vektor $\overline{OA_1}$ vektor bilan, $\overline{OB}$ vektor $\overline{OB_1}$ vektor bilan kollinear bo'lgani uchun: $\overline{OA_1} = \lambda\bar{a}$; $\overline{OB_1} = \mu\bar{b}$. Rasmdan ko'rinib turibdiki, $\overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1}$ tenglikdan $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ kelib chiqadi.

Agar $\bar{c}$ vektor $\lambda \neq \lambda_1$, $\mu \neq \mu_1$ shart bilan yana $\bar{c} = \lambda_1\bar{a} + \mu_1\bar{b}$ kabi yoyilganda edi, $\bar{c} - \bar{c_1} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} - \lambda_1\bar{a} + \mu_1\bar{b} = (\lambda - \lambda_1)\bar{a} + {}$ ${} + (\mu - \mu_1)\bar{b}$ tenglik hosil qilish mumkin bo'lar edi. Bundan $\bar{a} = \frac{\mu - \mu_1}{\lambda - \lambda_1}\bar{b}$ kelib chiqadi. $\bar{a}$ vektor $\bar{b}$ vektorga kollinear degan xulosa yuzaga keladi. Bu teorema shartiga zid. Demak, $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ kabi yoyilma mavjud va yagona ekan.

## *Mashqlar*

Nolmas $\overline{OA}$ vektor berilgan. $O$ nuqtadan ushbu vektorlarni qo'ying:

1) $\frac{1}{2}\overline{OA}$; 2) $-2\overline{OA}$; 3) $-\frac{2}{3}\overline{OA}$; 4) $\sqrt{2}\,\overline{OA}$; 5) $-\sqrt{3}\,\overline{OA}$.

## 5- §. Vektorlarning skalar ko'paytmasi va uning xossalari

$\bar{a}=(x;\ y;\ z)$ va $\bar{b}=(x';\ y';\ z')$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ushbu $xx'+yy'+zz'$ son $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning *skalar ko'paytmasi* deyiladi va $\bar{a}\bar{b}$ yoki $(\bar{a},\bar{b})$ kabi belgilanadi. Demak, $\bar{a}\bar{b}=xx'+yy'+zz'$.

Misol. Ushbu $\bar{a}\ (0;\ 1;\ 2)$ va $\bar{b}\ (3;\ 0;\ 5)$ vektorlarning skalar ko'paytmasini toping.

Yechilishi. $\bar{a}\bar{b}=xx'+yy'+zz'$ formulaga binoan $\bar{a}\bar{b}=0\cdot 3+1\cdot 0+2\cdot 5=10$ bo'ladi. $\bar{a}\bar{b}=10$.

### Xossalari

1°. $\bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{a}$.

2°. $\bar{a}(\bar{a}\bar{b})=(\bar{a}\bar{a})\bar{b}$.

3°. $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$.

Bu xossalarning isboti ta'rifdan kelib chiqadi.

4°. $\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\,\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}$.

Isboti. $\bar{b}$ vektorni uchta vektor yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz.

$\bar{b}=(x';\ y';\ z')=(x';\ 0;\ 0)+(0;\ y';\ 0)+(0;\ 0;\ z')=\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3$.

U holda

$$\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}=\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}_1+\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}_2+\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}_3,$$

$$|\bar{a}|\,\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{a}|\,\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}_1+|\bar{a}|\,\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}_2+|\bar{a}|\,\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}_3$$

bo'lib,

$$\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}_1=x'\cos\alpha,\quad \mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}_2=y'\cos\beta,\quad \mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}_3=z'\cos\gamma$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bu yerda $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ lar $\bar{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslaridir.

Endi

$$x = |\bar{a}|\cos\alpha,\ y = |\bar{a}|\cos\beta,\ z = |\bar{a}|\cos\gamma$$

tengliklarni e'tiborga olib topamiz:

$$|\bar{a}|\,\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b} = xx' + yy' + zz' = \bar{a}\bar{b}.$$

5°. $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos \widehat{a, b}$.

Isboti. 4- xossadan foydalanamiz:

$\bar{b} = |\bar{a}|\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b}$ formulaga ko'ra $\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\bar{b} = \cos\alpha$ bo'lib, bundan esa

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos \widehat{a, b}$$

ekanligi kelib chiqadi.

6°. $\bar{a}\bar{a} = |\bar{a}|^2$.

7°. $\bar{a}$ vektorning $\bar{b}$ vektorga perpendikular bo'lishi uchun $\bar{a}\bar{b} = 0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

## 6- §. Vektorni uchta nokomplanar vektor bo'yicha yoyish

Uchta nokomplanar $\bar{a}$, $\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorning yig'indisini topish kerak bo'lsin.

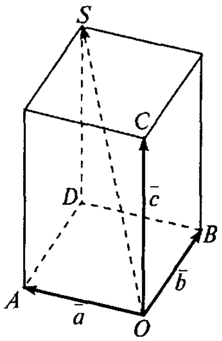
Buning uchun parallelepiped qoidasidan foydalanamiz (137- rasm). Ixtiyoriy $O$ nuqtadan $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$ vektorlarni qo'yamiz. Parallelepipedni shunday yasaymizki, $OA$, $OB$, $OC$ kesmalar uning qirralari bo'lsin. $\overline{OS}$ vektor (bunda $[OS]$ parallelepipedning diagonali) $-$ izlangan yig'indi bo'ladi.

Haqiqatan, $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AD} + \overline{DS} = \overline{OS}$.

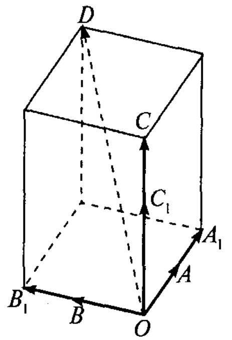
Nokomplanar $\bar{a}$, $\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $\bar{d}$ vektorni

$$\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c} \qquad (1)$$

shaklida ifodalash mumkinmi ekanini aniqlaymiz.




**137- rasm.**




**138- rasm.**

*O* nuqtadan $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$, $\overline{OD} = \bar{d}$ vektorlarni qo'yamiz (138- rasm). *AOB, BOC, COA* turli tekisliklardir. *D* nuqta bu tekisliklarning bittasiga ham tegishli bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz.

*D* nuqtadan *AOB, BOC, COA* tekisliklarga mos ravishda parallel tekisliklar o'tkazamiz. Hosil qilingan parallelepipedda *OD* kesma diagonal bo'ladi.

Parallelepipedning *O* uchidan chiqqan qirralari uchlarini $A_1$, $B_1$, $C_1$ bilan belgilaymiz.

Parallelepiped qoidasiga ko'ra $\overline{OD} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$. Ammo $\overline{OA_1}$ va $\overline{OA}$ vektorlar kollinear, shuning uchun $\overline{OA_1} = x \cdot \overline{OA}$. Shunga o'xshash, $\overline{OB_1} = y \cdot \overline{OB}$, $\overline{OC_1} = z \cdot \overline{OC}$. Demak, $\overline{OD} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$ yoki $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$.

Agar *D* nuqta *AOB* tekislikka tegishli bo'lsa, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ vektorlar komplanar, demak, $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b}$. Bu holda (1) tenglikda $z = 0$ deb faraz qilamiz.

*D* nuqta *BOC* yoki *COA* tekisliklarga tegishli bo'lgan hollar shunga o'xshash qarab chiqiladi (o'quvchining o'ziga havola etiladi).

Nokomplanar $\bar{a}$, $\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $\bar{d}$ vektorni $x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$ yig'indi shaklida tasvirlash *$\bar{d}$ vektorni $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlar bo'yicha yoyish* deyiladi. Hosil qilingan yoyilmaning yagona ekanligini, ya'ni $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$ va $\bar{d} = x_1\bar{a} + y_1\bar{b} + z_1\bar{c}$ tengliklardan $x = x_1$; $y = y_1$; $z = z_1$ degan xulosa kelib chiqishini isbot qilish mumkin. Demak, quyidagi teorema o'rinli.

T e o r e m a . *Fazoning har bir vektori uchun berilgan uchta nokomplanar vektor bo'yicha yagona yoyilma mavjuddir.*

### ***Mashqlar***

**1.** $OABC$ tetraedr $ABC$ yog'ining medianalari $M$ nuqta kesishadi. $\overline{OA}$ vektorni $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OM}$ vektorlar bo'yicha yoying.

(*Javob:* $\overline{OA} = -\overline{OB} - \overline{OC} + 3\overline{OM}$ .)

**2.** $ABCD$ parallelogramm tekisligidan tashqarida $O$ nuqta olingan. $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$, $\bar{c} = \overline{OC}$ vektorlar bo'yicha ushbu vektorlarni yoying: 1) $\overline{OM}$ , bunda $M = (AC \cap BD)$; 2) $\overline{OD}$ ; 3) $\overline{OK}$ , bunda $K$ nuqta $AD$ kesmaning o'rtasi.

(*Javob:* 1) $0{,}5\bar{a} + 0\bar{b} + 0{,}5\bar{c}$ ;

2) $\bar{a} + (-1)\bar{b} + \bar{c}$ ; 3) $\bar{a} - 0{,}5\bar{b} + 0{,}5\bar{c}$ .)

**3.** $ABCD$ tetraedrda $ABC$ yog'ining $AA_1$ medianasini $P$ nuqta $|AP| : |PA_1| = 3 : 7$ nisbatda bo'ladi. $\overline{DP}$ vektorni $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ vektorlar bo'yicha yoying.

(*Javob:* $\overline{DP} = \frac{7}{10}\overline{DA} + \frac{3}{20}\overline{DB} + \frac{3}{20}\overline{DC}$ . K o ' r s a t m a . Masala shartidan kelib chiqadigan $\overline{AP} = \frac{3}{7}\overline{PA_1}$ tenglikning ikkala qismiga vektorlarni ayirish formulasini tatbiq qiling.)

## 7- §. Vektorlar algebrasi elementlari

*Vektorlar algebrasi* elementlari vektor ustida arifmetik amallarni (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish) va ularning xossalarini o'z ichiga oladi, buning uchun vektorlar *fazosi tushunchasini* o'rganib, keyin uning xossalarini keltiramiz.

Agar $\bar{a}$ vektorning boshi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushgan bo‘lsa, uning oxiri fazoda biror $M$ nuqtani aniqlaydi. Va aksincha, fazodagi har qanday $M$ nuqtaga $\overline{OM}$ vektor mos keladi.

Demak, bunday vektorlar to‘plami bilan uch o‘lchovli fazodagi $M\ (x;\ y;\ z)$ nuqtalar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rinli bo‘lib, bu uch o‘lchovli $R^3$ fazo *vektorlar fazosi* ham deyiladi. $\bar{a}$ vektor o‘zining koordinatalari $(x;\ y;\ z)$ bilan aniqlanadi va $\bar{a}\ (x;\ y;\ z)$ kabi yoziladi.

Vektorlar fazosida $\bar{a}\ (x;\ y;\ z)$, $\bar{b}\ (x';\ y';\ z')$ vektorlar va $\alpha$ skalar son berilgan bo‘lsin.

Quyidagi $\bar{c}\ (x+x';\ y+y';\ z+z')$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning yig‘indisi deyiladi va $\bar{a}+\bar{b}$ kabi belgilanadi. Demak, $\{\bar{a}+\bar{b}\}\ (x+x';\ y+y';\ z+z')$.

$\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning *ayirmasi* deb, $(x-x';\ y-y';\ z-z')$ vektorga aytiladi va $\bar{a}-\bar{b}$ kabi belgilanadi. Demak, $\bar{a}-\bar{b}=(x-x';\ y-y';\ z-z')$.

$\bar{a}$ vektorning $\alpha$ songa ko‘paytmasi ushbu $(\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z)$ vektor bilan belgilanadi, ya’ni $\alpha\bar{a}=(\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z)$.

Vektorlar ustidagi arifmetik amallar uchun (vektorlar algebrasi elementlarida) quyidagi xossalar o‘rinli:

1°. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ (kommutativlik xossasi).

2°. $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$ (assotsiativlik xossasi).

3°. $\bar{a}+0=\bar{a}$.

4°. Har qanday $\bar{a}$ vektor uchun shunday $\bar{b}$ vektor mavjudki, $\bar{a}+\bar{b}=0$ bo‘ladi. $\bar{b}$ vektor $\bar{a}$ vektorga *teskari vektor* deyiladi.

5°. $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$. $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$ (distributivlik xossasi).

6°. $\alpha(\beta\bar{a})=\alpha\beta\bar{a}$.

# ASOSIY FORMULALAR

*Ixtiyoriy uchburchak* ($a$, $b$, $c$ — tomonlari, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — tomonlar qarshisidagi burchaklar, $p$ — yarim perimetr, $R$ — tashqi chizilgan aylana radiusi, $r$ — ichki chizilgan aylana radiusi, $S$ — yuz, $h_a$ — $a$ tomoniga tushirilgan balandlik):

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a; \quad S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\alpha; \quad p = \frac{a+b+c}{2};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

*To'g'ri burchakli uchburchak* ($a$, $b$ — katetlari; $c$ — gipotenuza; $a_c$, $b_c$ — katetlarning gipotenuzadagi proyeksiyalari):

$$S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch_c; \quad r = \frac{a+b-c}{2}; \quad R = \frac{c}{2};$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Pifagor teoremasi)};$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \quad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}.$$

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta.$$

*Teng tomonli uchburchak:*

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

*Ixtiyoriy to'rtburchak ($d_1$* va $d_2$ — diagonallari; $\varphi$ — ular orasidagi burchak; $S$ — yuz):

$$S = \frac{1}{2}d_2 d_1 \sin\varphi.$$

*Parallelogramm (a* va $b$ — tomonlari; $\varphi$ — ular orasidagi burchak; $h_a$ — $a$ tomoniga tushirilgan balandlik):

$$S = ah_a = ab\sin\varphi = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

*Kvadrat (d* — diagonal):

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

*Romb*:

$$S = ah_a = a^2 \sin\varphi = \frac{1}{2} d_1 d_2 .$$

*To'g'ri to'rtburchak*:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi .$$

*Trapetsiya (a* va $b$ — asoslari; $h$ — asoslari orasidagi masofa; $l$ — o'rta chizig'i):

$$l = \frac{a+b}{2}; \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h = l \cdot h .$$

*Ichki chizilgan ko'pburchak (p* — yarim perimetr; $r$ — tashqi chizilgan aylana radiusi):

$$S = pr .$$

*Muntazam ko'pburchak* ($a_n$ — $n$ burchakli muntazam ko'pburchakning tomoni; $R$ — tashqi chizilgan aylana radiusi; $r$ — ichki chizilgan aylana):

$$a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R;$$

$$S = \frac{na_n r}{2} .$$

*Aylana (r* — radius; $C$ — aylana uzunligi; $S$ — doira yuzi):

$$C = 2\pi r; \quad S = \pi r^2 .$$

*Sektor (l* — yoy uzunligi; $n^\circ$ — markaziy burchakning gradus o'lchovi; $\alpha$ — markaziy burchakning radian o'lchovi):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = r\alpha; \quad S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha .$$

*Ixtiyoriy prizma (l* — yon qirrasi; $p$ — asosining perimetri; $S$ — asosining yuzi; $H$ — balandlik; $p_{\text{kes}}$ — perpendikular kesimning perimetri; $S_{\text{yon}}$ — yon sirtining yuzi; $V$ — hajm):

$$S_{\text{yon}} = p_{\text{kes}} \cdot l; \quad V = S \cdot H .$$

*To'g'ri prizma:*

$$S_{yon} = p \cdot l.$$

*To'g'ri burchakli parallelepiped* ($a$, $b$ va $c$ – uning o'lchamlari; $d$ – diagonali):

$$S_{yon} = p \cdot H; \quad V = abc; \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

*Kub* ($a$ – qirrasi):

$$V = a^3; \quad d = a\sqrt{3}.$$

*Ixtiyoriy piramida* ($S$ – asosining yuzi; $H$ – balandlik; $V$ – hajm):

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

*Muntazam piramida* ($p$ – asosining perimetri; $l$ – apofemasi; $S_{yon}$ – yon sirtining yuzi):

$$S_{yon} = \frac{1}{2}pl; \quad V = \frac{1}{3}SH.$$

*Ixtiyoriy kesik piramida* ($S_1$ va $S_2$ – asoslarining yuzi; $h$ – balandlik; $V$ – hajm):

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}).$$

*Muntazam kesik piramida* ($p_1$ va $p_2$ – asoslarining perimetri; $l$ – apofemasi; $S_{yon}$ – yon sirtining yuzi):

$$S_{yon} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)l.$$

*Silindr* ($R$ – asosining radiusi; $H$ – balandlik; $S_{yon}$ – yon sirtining yuzi; $B$ – hajm):

$$S_{yon} = 2\pi RH; \quad V = \pi R^2 H.$$

*Konus* ($R$ – asosining radiusi; $H$ – balandlik; $l$ – yasovchi; $S_{yon}$ – yon sirtining yuzi; $V$ – hajm):

$$S_{yon} = \pi Rl; \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

*Shar, sfera* ($R$ — shar radiusi; $S$ — sferik sirtning yuzi; $V$ — hajm):

$$S = 4\pi R^2; \quad V = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

*Shar segmenti* ($R$ — shar radiusi; $h$ — segmentning balandligi; $S$ — segmentning sferik qismi yuzi; $V$ — hajm):

$$S = 2\pi Rh; \quad V = \pi R^2\left(R - \tfrac{1}{3}h\right).$$

*Shar sektori* ($R$ — shar radiusi; $h$ — segmentning balandligi; $V$ — hajm):

$$V = \tfrac{2}{3}\pi R^2 h.$$

*Burchaklarning radian va gradus o'lchovlari orasidagi bog'lanish:*

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}01745 \text{ rad}.$$

$$\alpha^\circ : 180^\circ = \alpha : \pi, \text{ bundan } a = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}.$$

*To'g'ri burchakli uchburchakning elementlari orasidagi bog'lanishlar:*

$$\alpha + \beta = 90^\circ; \quad a = c\sin\alpha; \quad a = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$b = c\cos\alpha; \quad b = c\sin\beta = a\,\mathrm{tg}\,\beta; \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

*To'g'ri burchakli uchburchaklarni yechish formulalari.*

Berilgan: $c$, $\alpha$. Bu holda

$$\beta = 90^\circ - \alpha; \quad a = c\sin\alpha; \quad \beta = c\cos\alpha.$$

Berilgan: $a$, $\alpha$. Bu holda

$$\beta = 90^\circ - \alpha; \quad b = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha; \quad c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Berilgan: $a$, $b$. Bu holda

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \quad \beta = 90^\circ - \alpha, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Berilgan: $a$, $c$. Bu holda

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \beta = 90^\circ - \alpha, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

*Ixtiyoriy uchburchakning elementlarini hisoblash formulalari* ($a$, $b$, $c$ – uchburchakning tomonlari, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – uchburchakning burchaklari, $p$ – yarim perimetr, $R$ – tashqi chizilgan aylana radiusi, $r$ – ichki chizilgan aylana radiusi, $S$ – yuzi, $h$ – balandlik):

*1. Proyeksiyalar teoremasi:*

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma,$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

*2. Sinuslar teoremasi:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

*3. Kosinuslar teoremasi:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

*Uchburchakning yuzi:*

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma; \quad S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha};$$

$$S = \frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma}; \quad S = p^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

*Ichki va tashqi chizilgan doiralarning radiuslari:*

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4S} = \frac{P}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}};$$

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

## Vektorlar va koordinatalar

*Nolmas vektorlarning kollinearlik alomati:*

$$\bar{b} = k\bar{a}, \quad k \neq 0.$$

*Uchta vektorning komplanarlik alomati:*

$$\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}.$$

*Vektorlarning yig'indisi va ayirmasi:*

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2).$$

*Vektorning songa ko'paytmasi:*

$$k\bar{a} = (kx;\ ky;\ kz).$$

*Vektorlarning skalar ko'paytmasi:*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

*Vektor uzunligi:*

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

*A va B nuqtalar orasidagi masofa:*

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

*Tekislik tenglamasi:*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

# FOYDALANILGAN ADABIYOT


1. A.U.Umirbekov, Sh.Sh.Shaabzalov. Matematikani takrorlang. «O‘qituvchi», T., 1989- y.
2. T.To‘laganov, A.Normatov. Matematikadan praktikum. «O‘qituvchi», T., 1989- y.
3. A.V.Pogorelov. Geometriya, 7—11. «O‘qituvchi», T., 1991- y.
4. V.M.Klopskiy, Z.A.Skopets, M.I.Yagodovskiy. Geometriya, 9—10. «O‘qituvchi», T., 1985- y.
5. N.Dadajonov, R.Yunusmetov, T.Abdullayev. Geometriya. 2- qism. «O‘qituvchi», T., 1988- y.
6. T.Jo‘rayev, A.Sa’dullayev va b. Oliy matematika asoslari. «O‘zbekiston», T., 1995- y.
7. N.G‘aybullayev, A.Ortiqboyev. Geometriya, 7. «O‘qituvchi», T., 2000- y.
8. N.G‘aybullayev, A.Ortiqboyev. Geometriya, 8. «O‘qituvchi», T., 2000- y.
9. N.G‘aybullayev, A.Ortiqboyev. Geometriya, 9. «O‘qituvchi», T., 2001- y.
10. I.S.Petrakov. Matematika to‘garaklari. 5—11- sinflar. «O‘qituvchi», T., 1997- y.

# MUNDARIJA

S 23 **Sayfullayeva H.M.**

**Geometriya**: Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma. 4- nashri. – T., „O‘qituvchi“ NMIU, 2005. – 128 b.

**Sarl. oldida:** O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi; O‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi markazi.

22.15ya722

HABIBA MURODULLAYEVNA SAYFULLAYEVA

# GEOMETRIYA

Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari
uchun o‘quv qo‘llanma

4-nashri

*«O‘qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi*
*Toshkent –2005*

| | |
|---|---|
| Tashqi muharrir | *M.Tursunova* |
| Muharrir | *O‘.Husanov* |
| Rasmlar muharriri | *M.Kudryashova* |
| Muqova rassomi | *M.Kalinin* |
| Tex. muharrir | *T.Greshnikova* |
| Musahhih | *Z.Sodiqova* |
| Kompyuterda sahifalovchilar: | *Sh.Rahimqoriyev, F.Qayumova* |

IB № 8673

Diapozitivdan bosishga ruxsat etildi 10.08.2005. Bichimi $84 \times 108^{1}/_{32}$.
Kegli 11 shponli. Tayms garn. Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli b.t. 6,72. Nashr. t. 4,89. 2000 nusxada bosildi.
Bahosi kelishilgan narxda.
Buyurtma № 212.

O‘zbekiston Matbuot va axborot agentligining «O‘qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi. Toshkent–129, Navoiy ko‘chasi, 30- uy // Toshkent, Yunusobod dahasi, Murodov ko‘chasi, 1- uy.
Shartnoma № 09–233–05.