Т. ШАРИФОВА, Э. ЙЎЛДОШЕВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги педагогика институтлари ва университетлар талабалари учун қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1996

Тақризчилар:

Физика-математика фанлари доктори, профессор *Ш. А. Аюпов*
Физика-математика фанлари номзоди, доцент *Ф. Зокиров*

Ушбу қўлланма педагогика институтлари ва университетларининг физика факультетида ўтиладиган математик анализ фани дастурига мослаб тузилган. Унда 1300 га яқин мисол ва масалалар берилган бўлиб, улардан 300 дан ортиғи ечиб кўрсатилган, қолганлари учун эса жавоблар келтирилган.

Қўлланмадан асосан педагогика институтлари ва университетларнинг физика факультетида таҳсил кўраётган талабалар, шунингдек, олий техника ўқув юртлари математик анализ фани ўрганиладиган факультетларнинг талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

ШАРИФОВА ТОЖИ,
ЙЎЛДОШЕВ ЭРКИН

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Педагогика институтлари ва университетлар талабалари учун қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1996

Муҳаррирлар *С. Бекбоева, Н. Ғоипов*
Расмлар муҳаррири *Т. Қаноатов*
Тех. муҳаррир *Ш. Бобохонова*
Мусаҳҳиҳлар: *И. Каримов, З. Содиқова*

ИБ № 6332

Теришга берилди 6.05.95. Босишга руҳсат этилди 16.02.96. Бичими $84\times108^1/_{32}$. Тип. қоғози. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л 20,16. Нашр л. 12,59. Шартли кр-отт. 24,31. 3000 нусхада босилди. Буюртма № 2761.

«Ўқитувчи» нашриёти Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09-98-93.

Ўзбекистон Давлат матбуот қўмитасининг Ташполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1996.

Ш $\dfrac{4306010500-101}{353\ (04)-96}$ 46—94

ISBN 5—645—02165—7

СЎЗ БОШИ

Ушбу қўлланма асосан педагогика институтлари ва университетларининг «физика» факультетида ўқиётган талабаларга мўлжалланган бўлиб, «Математик анализ» курсининг «физика-астрономия», «физика-информатика» ихтисосликлари дастурининг 1-қисмига мослаб ёзилган.

Кўпинча педагогика институтлари ва университетларининг «физика» факультетида ўзбек тилида таҳсил кўраётган талабалар «Математик анализ» фанидан мисол ва масалалар ечишда қийналадилар, ундан ташқари, улар учун бу фандан ўзбек тилида бир бутун машқлар тўплами ҳам йўқ.

Ушбу қўлланма А. Ғ. Ҳикматов, Ў. Т. Тошметов, Қ. Карашеваларнинг «Математик анализдан машқлар ва масалалар тўплами» деб ёзилган китобларидан кейинги ўзбек тилидаги иккинчи қўлланмадир, бу қўлланманинг юқоридагидан фарқи шундаки, бунда физиклар учун ҳар бир темага доир 4—5 типик мисол ва масалалар ечиб кўрсатилган, изоҳлар берилган. Сўнгра талабаларнинг мустақил ечишлари учун бир қатор мисол ва масалалар келтирилган.

Бу қўлланмани ёзишдан мақсад талабаларга математик анализга доир мисол ва масалаларни мустақил ечишга йўлланма бериш, назарияни амалиётга татбиқ қилишни пухта ўргатиш ва математик қобилиятни ўстиришдир.

Қўлланманинг I—IV бобларини Т. Шарифова, V—VIII бобларини Э. А. Йўлдошев ёзган. Ушбу китобнинг қўлёзмасини тайёрлашда Низомий номидаги Тошкент Давлат педагогика институти математик анализ кафедрасининг доцентлари А. Ғ. Ҳикматов, Ў. Т. Тошметов ўртоқлар ўзларининг қимматли маслаҳатлари билан яқиндан ёрдам бердилар.

Қўлёзмани тақриз қилишда математика институтининг директори, физика-математика фанлари доктори, профессор Ш. А. Аюпов ва Тошкент автомобиллар институтининг доценти, физика-математика фанлари номзоди Ф. Зокировлар қимматли маслаҳатлар билан кўмаклашдилар. Биз юқорида тилга олинган ўртоқларга самимий миннатдорчилигимизни билдирамиз.

Муаллифлар

I боб

МАТЕМАТИК АНАЛИЗГА КИРИШ

1- §. ТЎПЛАМЛАР. ҲАҚИҚИЙ СОН ВА УНИНГ МОДУЛИ

1. Тўплам тушунчаси таърифсиз қабул қилинади ёки бир хил хоссага эга бўлган маълум объектлар мажмуаси *тўплам* деб тушунилади. Тўпламни ташкил этган объектлар унинг элементлари дейилиб, улар кичик ҳарфлар билан белгиланади. Агар a элемент A тўпламга тегишли бўлса, $a \in A$, тегишли бўлмаса, $a \bar{\in} A$ деб ёзилади.

Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи бир вақтнинг ўзида B тўпламга ҳам тегишли бўлса, A тўплам B тўпламнинг *қисм тўплами* дейилади ва $A \subset B$ каби ёзилади.

Тўпламнинг ҳеч қандай элементлари бўлмаса, бундай тўплам *бўш тўплам* дейилади ва $\varnothing$ каби белгиланади.

Агар тўплам элементларининг сонини кўрсатувчи аниқ натурал сон мавжуд бўлса, бу тўплам *чекли* тўплам дейилади, акс ҳолда *чексиз* тўплам дейилади.

Барча натурал сонлар тўпламини N орқали, барча бутун сонлар тўпламини Z орқали белгилаймиз: $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Бу иккала тўплам чексиз тўпламдир. A ва B тўпламларнинг *бирлашмаси (йиғиндиси)* деб шу A ва B тўплам элементларидан тузилган C тўпламга (агар A ва B тўпламларда бир хил элемент мавжуд бўлса, C тўплам учун улардан бири олинади) айтилади ва $C = A \cup B$ каби ёзилади.

A ва B тўпламларнинг *кесишмаси (кўпайтмаси)* деб A ва B тўпламларнинг умумий элементларидан тузилган C тўпламга айтилади ва $C = A \cap B$ каби ёзилади.

2. Ҳар қандай чексиз ўнли каср ҳақиқий сон дейилади. Даврий чексиз ўнли каср рационал сон дейилади. Ҳар қандай рационал сонни $\frac{p}{q}$ (p ва q лар бутун сонлар ва $q \neq 0$) кўринишда ёзиш мумкин.

Даврий бўлмаган чексиз ўнли каср иррационал сон дейилади.

3. a ҳақиқий соннинг модули (абсолют қиймати) деб

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{агар} \quad a \geqslant 0 \quad \text{бўлса,} \\ -a, & \text{агар} \quad a < 0 \quad \text{бўлса,} \end{cases}$$

га айтилади. Ҳақиқий сонлар модулининг қуйидаги хоссалари амалда кўп ишлатилади:

1) $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$.

2) $|a| \geqslant b \Leftrightarrow a \geqslant b$ ва $a \leqslant -b$.

3) $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$.

1. Қуйидаги сонларнинг қайсилари рационал, қайсилари иррационал? Рационал сонларни оддий каср кўринишида ёзинг: 1) 1, (3); 2) 1,25 (4); 3) 2,31 (37); 4) 2,1010010001 . . . ; 5) 3,212121 . . . .

△ 1), 2), 3), 5) — сонлар рационал сонлардир, чунки улар даврий чексиз ўнли касрлардир; уларни қуйидагича оддий каср кўринишида ёзамиз:

$$1,(3) = 1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3};\quad 1{,}25(4) = 1\frac{254-25}{900} = 1\frac{229}{900};$$

$$2{,}31(37) = 2\frac{3137-31}{9900} = 2\frac{3106}{9900} = 2\frac{1553}{4950};$$

$$3{,}212121\ldots = 3,(21) = 3\frac{21}{99} = 3\frac{7}{33};$$

4) сон иррационал сондир, чунки 2,1010010001 . . . даврий бўлмаган чексиз ўнли касрдир. ▲

2. Қуйидаги тенглама ва тенгсизликларни ечинг:

1) $(y-1)^2 = 9$, 2) $|2x-3| \leqslant 5$;

3) $|t-4| > 1$; 4) $|3z+4| = z+4$.

△ 1) тенгламанинг икки томонини квадрат илдиздан чиқарсак, $|y-1| = 3$ га эга бўламиз, бу тенглама

а) $\begin{cases} y-1=3 \\ y-1 \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -(y-1)=3, \\ y-1<0 \end{cases}$

системаларга тенг кучлидир. а) системанинг ечими $y=4$ дир;

б) $\begin{cases} y-1=-3 \\ y<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3+1 \\ y<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2; \\ y<1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y=-2;$$

△ белги ечимнинг бошланишини, ▲ белги эса ечимнинг тамом бўлганини билдиради.

демак, 1) тенгламанинг ечими -2; 4.

2) тенгсизликни ечишда ҳақиқий сон абсолют қийматининг иккинчи хоссасидан фойдаланамиз, яъни $|2x-3| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant 2x-3 \leqslant 5 \Leftrightarrow 3-5 \leqslant 2x-3+3 \leqslant 5+3 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2x \leqslant 8 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 4$. Демак, 2) тенгсизликнинг ечими $-1 \leqslant x \leqslant 4$ экан.

2) тенгсизликни ҳақиқий сон абсолют қийматининг таърифидан фойдаланиб ҳам ечиш мумкин; биз бу йўлни 1) мисолда айтиб ўтдик.

3) тенгсизликни ечишда ҳақиқий сон абсолют қийматининг иккинчи хоссасидан фойдаланамиз, яъни: $|t-4| > 1 \Leftrightarrow t-4>1$ ва $t-4<-1 \Leftrightarrow t>5$ ва $t<3$. Демак, 3) тенгсизликнинг ечими $(-\infty;\ 3) \cup (5;\ \infty)$.

4) тенглама а) $\begin{cases} 3z+4=z+4, \\ 3z+4 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -(3z+4)=z+4, \\ 3z+4<0 \end{cases}$

системаларга тенг кучли.

а) системани ечамиз:

$$\begin{cases} 2z=0 \\ 3z \geqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ z \geqslant -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow z=0;$$

б) системани ечамиз:

$$\begin{cases} -4z=8 \\ 3z<-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2 \\ z<-\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow z=-2.$$

Шундай қилиб, 4) тенглама $z=-2$ ва 0 ечимларга эга экан. ▲

3. Қуйидаги сонларнинг қайсилари рационал, қайсилари иррационал сон эканлигини аниқланг ва рационал сонларни оддий каср кўринишда ёзинг:

1) 3,(32); 2) 2,2121121112 . . . ; 3) 2,2(11); 4) 3,01(611); 5) 1,1(21); 6) 1,121121112 . . . ; 7) 5,4(13); 8) 3,7(6); 9) 2,21(10).

4. Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

1) $|x-1| \leqslant 3$; 4) $|x-1| < |x+1|$;
2) $|x+3| > 2$; 5) $|x+2|+|x-2| \leqslant 10$;
3) $|2x+1| < 1$; 6) $|x| > x$.

5. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

1) $|x| = x + 1$;
2) $|x| = -x$;
3) $|2x + 3| = x^2$;
4) $|x^2 - 5x + 9| = 3$;
5) $|x + 1| = x + 1$;
6) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

2- §. ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ АНИҚЛАНИШ СОҲАСИ

1. Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган X ва Y тўпламлар берилган бўлсин. Агар ҳар бир $x \in X$ сонга бирор қоида ва қонунга биноан аниқ битта $y \in Y$ сон мос қўйилган бўлса, у ҳолда X тўпламда f функция берилган дейилади ва $y = f(x)$ кўринишда ёзилади; x эркли ўзгарувчи ёки аргумент дейилади.

X га функциянинг аниқланиш (мавжудлик) соҳаси дейилади ва у $D(f)$ кўринишда белгиланади. Функциянинг қийматлар тўплами $f(X)$ кўринишда белгиланади.

2. Функция аналитик усулда берилиб, аниқланиш соҳаси кўрсатилмаган бўлса, аргументнинг аналитик ифода маънога (ҳақиқий қийматга) эга бўладиган барча ҳақиқий қийматлари тўплами функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади.

Асосий элементар функцияларнинг аниқланиш соҳалари қуйидагичадир:

1) Даражали функция $y = x^{\mu}$ $(f(x) = x^{\mu})$.

а) $\mu = n$ натурал сон бўлганда $D(f) = (-\infty;\ \infty)$,

б) $\mu = \frac{p}{q}$ (p, q лар бутун сонлар ва $q \neq 0$) да p, q лар мусбат бўлиб, q тоқ сон бўлса ($q = 2n + 1$), у ҳолда $D(f) = (-\infty;\ \infty)$; агар q жуфт сон бўлса ($q = 2n$), у ҳолда $D(f) = [0;\ \infty)$.

2) Кўрсаткичли функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ учун $D(f) = (-\infty;\ \infty)$.

3) $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ логарифмик функция $0 < x < \infty$ интервалда аниқланган.

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$ тригонометрик функциялар $(-\infty;\ \infty)$ интервалда аниқланган;

$y = \operatorname{tg} x$, $y = \sec x$ функциялар сонлар ўқининг $x_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ нуқталаридан бошқа нуқталарда аниқланган;

$y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{cosec} x$ лар сонлар ўқининг $x_k = k\pi$ нуқталаридан бошқа нуқталарда аниқланган.

5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ тескари тригонометрик функ-

циялар $[-1;\ 1]$ да; $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ лар эса $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган.

$y=f(x)$ формула билан берилган элементар функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топишда қуйидагиларга эътибор бериш керак:

1) жуфт даражали илдиз маънога эга бўлиши учун илдиз остидаги ифода манфий бўлмаслиги керак;

2) каср ифодали функциялар каср махражи 0 дан фарқли $(\neq 0)$ x ларда аниқланган бўлади;

3) трансцендент функциялар $\log_a x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ ўзларининг аргументларининг кўрсатилган қийматларида аниқланган бўлади.

Агар $y=f(x)$ формулада юқорида санаб кўрсатилган элементлар бўлмаса, у ҳолда у функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty;\ \infty)$ бўлади (бунда масаланинг алоҳида шартларига бўйсунган функциянинг аниқланиш соҳаси кирмайди).

6. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 2) $u=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}+\sqrt[3]{2x+1}$;

3) $v=\arcsin\dfrac{1-2x}{3}$; 4) $z=\lg(x^2-9)$.

$\triangle$ 1) x аргумент жуфт даражали илдиз остида қатнашгани учун $1-x^2\geqslant 0$ тенгсизликни ечамиз:

$$x^2\leqslant 1;\ |x|\leqslant 1;\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Демак, 1) функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1;\ 1]$ экан.

2) Бунда u функция

$u_1=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$ ва $u_2=\sqrt[3]{2x+1}$ функциялар йиғиндисидан иборат бўлгани учун $D(f)=D_1(f)\cap D_2(f)$ ўринли бўлади. $D_1(f)$ u_1 функциянинг, $D_2(f)$ u_2 функциянинг аниқланиш соҳасидир. u_1 функция касрнинг махражи $x^2-5x+6\neq$ $\neq 0$ учун маънога эгадир, чунки 0 га бўлишнинг маъноси йўқ. $x^2-5x+6=0$ тенгламанинг илдизлари $x_1=2$, $x_2=$ $=3$. Демак, u_1 функция сонлар ўқида x нинг 2 ва 3 га тенг қийматларидан бошқа ҳамма қийматларида аниқланган, яъни

$$D_1(f)=(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ \infty).$$

$u_2 = \sqrt[3]{2x+1}$ функцияда x аргумент тоқ даражали илдиз остида қатнашгани учун $D_2(f) = (-\infty; \infty)$ дир. Шундай қилиб, u функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = D_1(f) \cap \cap D_2(f) = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$ дир.

3) v функция фақат $-1 \leqslant \frac{1-2x}{3} \leqslant 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда аниқланган. Бу тенгсизликни ечиб, қуйидагига эга бўламиз: $-3 \leqslant 1 - 2x \leqslant 3 \Leftrightarrow -4 \leqslant -2x \leqslant \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2$; бу кесма v функциянинг аниқланиш соҳасини билдиради.

4) Логарифмик функция z ўз аргументининг мусбат қийматлари учун аниқланган. Шунинг учун $x^2 - 9 > 0$. Бу тенгсизликни ечиб, $|x| > 3$ га эга бўламиз, бундан $-\infty < x < -3$ ва $3 < x < \infty$ келиб чиқади, яъни z функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty; -3)$ ва $(3; \infty)$ интерваллардан иборат. ▲

7. $f(x) = x^2 - x + 1$ берилган. $f(0)$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(a+1)$ ларни топинг.

8. $\varphi(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$ берилган. $\varphi(0)$, $\varphi(-1)$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$ ларни топинг.

9. $F(x) = x^2$ берилган.

1) $\frac{F(b) - F(a)}{b-a}$; 2) $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$ ларни ҳисобланг.

10. $f(x) = 2\sin 2x + \cos x$ функция берилган. $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(1)$, $f(a)$ ларни топинг.

11. $f(x) = \frac{|x-3|}{x-1}$ функция берилган. $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$ ларни топинг. $f(1)$ мавжудми?

12.
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{агар } -1 < x < 0 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } 0 \leqslant x < 1 \text{ бўлса,} \\ x-1, & \text{агар } 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$f(2)$, $f(0)$, $f(0,5)$, $f(-0,5)$, $f(3)$ ларни топинг. $f(4,5)$ мавжудми?

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

13. $y = x^2 - 7x + 12$. **14.** $y = \frac{x}{x+1}$.

15. $y=\frac{1}{x^2+1}$

16. $y=\frac{1}{x^2-1}$.

17. $y=\frac{1}{x^2-7x+12}$.

18. $y=\frac{2x-1}{x^2-7x+12}$.

19. $y=\frac{1}{x^2-4}$.

20. $y=\sqrt{4-x}$.

21. $y=\sqrt{x^2-7x+12}$.

22. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

23. $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

24. $y=\lg(2x-3)$.

25. $y=\lg(x^2-4x+3)$.

26. $y=\arcsin(2x-5)$.

27. $y=\arccos\frac{3x-2}{4}$.

28. $y=\arccos(5x-8)$.

29. $y=\sqrt{3-x}+$

$+\arccos\frac{x-2}{3}$.

30. $y=\frac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$.

31. $y=4-\log_a x$.

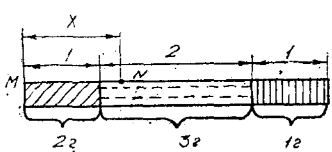
32. $y=\frac{|x|}{x}$.

33. $y=\frac{x}{\lg(1-x)}$.

34. $y=f(x)$ функция $[0;\ 1]$ да аниқланган бўлса, а) $f(x^2)$, б) $f(\sin x)$, в) $f(x+a)$, г) $f(x+a)+f(x-a)$ функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг.

35. $s=\frac{gt^2}{2}$ қонуниятга кўра h баландликдан тушаётган қаттиқ жисмнинг босиб ўтган йўлини ифодаловчи функциянинг аниқланиш соҳасини топинг. $s=\frac{gt^2}{2}$ аналитик ифоданинг аниқланиш соҳаси қандай бўлади?

36. Узунликлари мос равишда 1, 2, 1 узунлик бирлигига, массалари мос равишда 2, 3, 1 масса бирлигига тенг бўлган 3 та моддий кесмадан тўсин ясалган (1-чизма). Узунлиги x га тенг ўзгарувчи MN кесманинг массаси x нинг функциясидир. Бу функция x нинг қандай қийматлари учун аниқланган? Унинг аналитик ифодаси қандай?



1- чизма

37. $y=\frac{1}{x!}$ функциянинг $1 \leqslant x \leqslant 6$ да бутун сон қийматларида қабул қиладиган қийматлари учун жадвал тузинг.

38. R радиусли шар ичига тўғри доиравий конус чизилган. Конус ён сиртининг юзи S билан унинг ясовчиси x орасидаги функционал боғланишни ва бу функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

3-§. ФУНКЦИЯЛАРНИНГ КОМПОЗИЦИЯСИ ЖУФТ ВА ТОҚ ФУНКЦИЯЛАР

1. $y=f(u)$ функция U тўпламда, $u=\varphi(x)$ функция X тўпламда берилган бўлиб, $u=\varphi(x)$ нинг қийматлар тўплами $\varphi(X)$ U нинг қисм тўплами бўлсин. Агар $y=f(u)$ да u нинг ўрнига $\varphi(x)$ ни қўйсак, $y=f(\varphi(x))$ функцияга эга бўламиз. Бу функцияни $y=f(u)$ ва $u=\varphi(x)$ функцияларнинг *композицияси* ёки *мураккаб функция* дейилади.

2. Агар X тўпламга ҳар бир x сон билан биргаликда $-x$ ҳам тегишли бўлса, X координаталар бошига нисбатан симметрик тўплам дейилади.

$y=f(x)$ функция координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган X тўпламда берилган бўлсин.

а) агар ихтиёрий $x \in X$ учун $f(-x)=f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $y=f(x)$ *жуфт функция* дейилади.

б) агар ихтиёрий $x \in X$ учун $f(-x)=-f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $y=f(x)$ *тоқ функция* дейилади.

39. 1) $y=\sqrt{u+1}$, $u=3^x$ функциялар берилган, y ни x орқали ифодаланг.

2) $f(x)=x^3$ ва $\varphi(x)=3^x$ функциялар берилган. $f(f(x))$, $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$, $\varphi(\varphi(x))$ мураккаб функцияларни топинг.

3) $f(x)=x^3-x$ ва $\varphi(x)=\sin 2x$ функциялар берилган. $\varphi(f(1))$, $\varphi(f(2))$, $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ларни топинг.

4) Қуйидаги функцияларнинг тоқ, жуфтлигини кўрсатинг:

а) $f(x)=3-x^2$, б) $f(x)=\frac{1}{2}x^3$,

в) $f(x)=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$, г) $f(x)=\lg x$,

д) $f(x)=\lg x^2$, е) $f(x)=\sin x-\cos x$.

△ 1) $u=3^x$ функциянинг қийматлар тўплами $\varphi(X)=(0;\ \infty)$ бўлиб, $y=\sqrt{u+1}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $U=[-1;\ \infty)$ нинг қисми бўлгани учун $y=\sqrt{3^x+1}$ мураккаб функцияга эга бўламиз.

2) $f(f(x))=f(x^3)=(x^3)^3=x^9,\quad f(f(x))=x^9;$

$f(\varphi(x))=f(3^x)=(3^x)^3=3^{3x}=27^x,\quad f(\varphi(x))=27^x;$

$\varphi(f(x))=\varphi(x^3)=3^{x^3};\quad \varphi(\varphi(x))=\varphi(3^x)=3^{3^x}.$

3) $f(1)=1^3-1=1-1=0,\quad f(2)=2^3-2=8-2=6;\ \varphi(f(1))=\varphi(0)=\sin 2\cdot 0=\sin 0=0;\ \varphi(f(2))=\varphi(6)=\sin 2\cdot 6=\sin 12;\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}=\sin\pi=0;$

$f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=f(0)=0^3-0=0.$

4) а) $f(x)=3-x^2$ функция симметрик $(-\infty;\ \infty)$ тўпламда берилган бўлиб, $f(-x)=3-(-x)^2=3-x^2=f(x)$ тенглик бажарилгани учун у жуфт функциядир.

б) $f(x)=\frac{1}{2}x^3$ функция симметрик $(-\infty;\ \infty)$ тўпламда берилган бўлиб, $f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^3=\frac{1}{2}(-1)^3x^3=-\frac{1}{2}x^3=-f(x)$ тенглик бажарилгани учун у тоқ функциядир.

в) $f(x)=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$ функция $(-\infty;\ \infty)$ симметрик тўпламда берилган ва $f(-x)=(-x)\cdot\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\cdot\frac{\frac{1}{a^x}-1}{\frac{1}{a^x}+1}=$

$$=-x\cdot\frac{\frac{1-a^x}{a^x}}{\frac{1+a^x}{a^x}}=-x\cdot\frac{1-a^x}{1+a^x}=-x\cdot(-1)\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}=x\times$$

$\times\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x)$, яъни $f(-x)=f(x)$. Демак, $f(x)$ функция жуфт функциядир.

г) $f(x)=\lg x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $(0;\ \infty)$ симметрик тўплам бўлмагани учун уни тоқ-жуфтликка текшира олмаймиз.

д) $f(x)=\lg x^2$ функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$ симметрик тўплам ва

$$f(-x)=\lg(-x)^2=\lg x^2=f(x)$$

тенглик ўринли бўлгани учун $\lg x^2$ жуфт функциядир.

е) $f(x)=\sin x-\cos x$ функция симметрик $(-\infty;\ \infty)$ тўпламда берилган, лекин бу тўпламда $f(-x)=f(x)$, $f(-x)=-f(x)$ тенгликлардан бирортаси ҳам бажарилмайди. Ҳақиқатан ҳам, $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-$ $-\cos x=-(\sin x+\cos x)\neq -f(x)$. Демак, $f(x)=\sin x-$ $-\cos x$ функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. ▲

40. $y=u^2$, $u=x-1$ функциялар берилган. y ни x орқали ифодаланг.

41. $y=1-u^2$, $u=\sin x$ функциялар берилган. y ни x орқали ифодаланг.

42. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$, $x=a^t$ функциялар берилган. y ни t орқали ифодаланг.

43. $f(x)=x^2$ ва $\varphi(x)=2^x$ функциялар берилган. $f(f(x))$, $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$, $\varphi(\varphi(x))$ мураккаб функцияларни топинг.

44. $f(x)=\frac{5x^2+1}{2-x}$ функция учун $f(3x)$, $f(x^3)$, $3f(x)$, $(f(x))^2$ ларни топинг.

Қуйидаги функцияларнинг тоқ-жуфтлигини текширинг.

45. $f(x)=x^4-2x^2$. **46.** $f(x)=3\cos x$.

47. $f(x)=1-x^3$. **48.** $f(x)=2^x$.

49. $f(x)=\frac{x}{a^x-1}$. **50.** $f(x)=2^{-x^2}$.

51. $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$. **52.** $f(x)=\operatorname{tg}^3 x$.

53. $f(x)=\frac{x+\sin x}{\operatorname{tg}^3 x}$. **54.** $f(x)=\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{\sin x-\operatorname{tg} x}$.

55. $f(x)+f(-x)$ функциянинг жуфт эканлигини, $f(x)-$ $-f(-x)$ функциянинг тоқ функция эканлигини исботланг.

56. Бир вақтда ҳам тоқ, ҳам жуфт бўлган функциялар мавжудми?

57. $y=f(x)$ жуфт функция ва $f(x)\neq 0$. $y=\frac{1}{f(x)}$ функциянинг жуфт эканлигини кўрсатинг.

4- §. ДАВРИЙ ФУКЦИЯЛАР. МОНОТОН ФУНКЦИЯЛАР

1. $y = f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин. Агар $l \neq 0$ сон учун $x \pm l \in X$ бўлганда $f(x \pm l) = f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $y = f(x)$ функция *даврий функция* дейилади ва l унинг *даври* дейилади. Функциянинг энг кичик мусбат даври (агар у мавжуд бўлса) унинг асосий даври дейилади.

2. $y = f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $x_1, x_2 \in X$ лар учун $x_1 < x_2$ дан:

а) $f(x_1) < f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция ўсувчи;

б) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция камаймайдиган;

в) $f(x_1) > f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция камаювчи;

г) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция ўсмайдиган дейилади. Бу тўрт турдаги функциялар бир сўз билан *монотон* функциялар дейилади. Ўсувчи ва камаювчи функциялар *қатъий монотон* функциялар дейилади.

58. Қуйидаги функцияларнинг даврий эканлигини аниқланг ва даврий функцияларнинг асосий даврини кўрсатинг:

1) $f(x) = \sin 5x$, 2) $\varphi(x) = 3\sin \pi x$,

3) $\psi(x) = 2 + \sin x$,

4) $$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

$\triangle$ 1) Шундай $l \neq 0$ сон топилиб, барча x ларда $\sin 5(x + l) = \sin 5x$ тенглик ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бу тенгликдан, хусусий ҳолда, $x = \frac{\pi}{10}$ бўлганда, $\sin 5\left(\frac{\pi}{10} + l\right) = \sin\frac{\pi}{2}$ келиб чиқади. Бундан $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 5l\right) = \sin\frac{\pi}{2}$, $\cos 5l = 1$ га эга бўламиз; $5l = 0$; 2π, лекин $l \neq 0$, демак, $l = \frac{2\pi}{5}$; $l = \frac{2\pi}{5}$ функциянинг даври эканлигини кўрсатамиз. Демак, $\sin 5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin(5x + 2\pi) = \sin 5x = f(x)$. $kl = k \cdot \frac{2\pi}{5}$ (бунда $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$) сонлар ҳам $\sin 5x$ функция учун давр бўлиб, мусбат kl сонлар ичида энг кичиги $\frac{2\pi}{5}$ бўлгани учун $l = \frac{2\pi}{5}$ сон $\sin 5x$ функция учун асосий давр бўлади.

2) $\varphi(x) = 3\sin \pi x$ функция даврий бўлиб, унинг асосий даври 2 сонига тенгдир. Ҳақиқатан, агар l функциянинг даври бўлса, $\varphi(x+l) = 3\sin \pi(x+l) = 3\sin \pi x = \varphi(x)$ айниятдан $\sin(\pi x + \pi l) = \sin \pi x$ га эга бўламиз, бу айният x нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматида ўринли бўлгани учун (функция $(-\infty; \infty)$ тўпламда аниқланган) $x = 0$ да ҳам тўғри бўлади, яъни $\sin \pi l = \sin 0 = 0 \Rightarrow \Rightarrow \pi l = 0, \pi, 2\pi$. Лекин $l \neq 0$, $l = 1$ бўлганда $\sin(\pi x + \pi) = \sin \pi x \Rightarrow -\sin \pi x = \sin \pi x$ га эга бўламиз, бундай тенгликнинг бўлиши мумкин эмас. $l=2$ да $\sin(\pi x + 2\pi) = \sin \pi x$, демак, $\sin \pi x = \sin \pi x$ ўринлидир. Энди $l = 2$ берилган $\varphi(x) = 3\sin \pi x$ функция учун давр эканини кўрсатайлик: $\varphi(x+2) = 3\sin \pi(x+2) = 3\sin(\pi x + 2\pi) = 3\sin \pi x = \varphi(x)$. Худди шунинг каби $\varphi(x-2) = 3\sin \pi(x-2) = 3\sin(\pi x - 2\pi) = -3\sin(2\pi - \pi x) = -3\cdot(-\sin \pi x) = 3\sin \pi x = \varphi(x)$. Шундай қилиб, $2k$ $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ сонлар берилган функция учун даврдир. Мусбат даврлар ичида энг кичиги 2 дир, шунинг учун 2 асосий даврдир.

3) $\psi(x) = 2 + \sin x$ функция даврий функция бўлиб, унинг асосий даври 2π га тенгдир. Ҳақиқатан, агар l $(l \neq 0)$ сон функциянинг даври бўлса, у ҳолда барча x ларда

$$\psi(x+l) = 2 + \sin(x+l) = 2 + \sin x = \psi(x)$$

айният ўринли бўлади, бундан $\sin(x+l) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$ десак, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos l = 1 \Rightarrow l = 0;\ 2\pi;\ l \neq 0$ бўлгани учун $l = 2\pi$ дир. Худди юқоридаги мисоллардаги каби йўл билан $l = 2\pi$ соннинг $\psi(x) = 2 + \sin x$ функция учун давр эканини ва унинг мусбат даврлар ичида энг кичик эканини кўрсатиш мумкин.

4) $D(x)$ — Дирихле функцияси даврий функция бўлиб, ҳар бир рационал r сон унинг даври бўлади. Ҳақиқатан, агар x — рационал сон бўлса, у ҳолда $x + r$ ҳам рационал сон бўлади; агар x — иррационал сон бўлса, у ҳолда $x + r$ ҳам иррационал сон бўлади.

Демак,

$$D(x+r) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Бундан $D(x+r) = D(x)$ тенглик келиб чиқади. Энг кичик мусбат рационал сон йўқлигидан бу функция асосий даврга эга эмас.

59. 1) $f(x)=|x|$ функциянинг $(-\infty;\ 0)$ да қатъий камаювчи; $(0;\ \infty)$ да қатъий ўсувчи эканини кўрсатинг.

2) $\varphi(x)=|x|-x$ функциянинг монотонлик интервалларини топинг.

3) $\psi(x)=\sin x$ функциянинг $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ да монотон эканини кўрсатинг.

Δ 1) $x<0$ бўлганда $f(x)=-x$ бўлиб, бу функция $(-\infty;\ 0)$ да камаяди. Ҳақиқатан ҳам, $x_1<x_2$ $(x_1,\ x_2\in(-\infty;\ 0))$ лар учун $f(x_1)=-x_1>-x_2=f(x_2)$ тенгсизлик бажарилади, демак, $f(x)=|x|$ функция $(-\infty;\ 0)$ да камаяди.

$x>0$ бўлганда $f(x)=x$ бўлиб, бу функция $(0;\ \infty)$ да ўсади. Ҳақиқатан ҳам, $x_1<x_2$ $(x_1,\ x_2\in(0;\ \infty))$ лар учун $f(x_1)<f(x_2)$ ўринлидир, яъни аргументнинг катта қийматига функциянинг катта қиймати мос келяпти. Бу эса функциянинг $(0;\ \infty)$ да ўсувчи эканини билдиради.

2) $x<0$ бўлганда $\varphi(x)=|x|-x=-x-x=-2x$. $\varphi(x)=-2x$ функция камаяди (1-мисолга қаранг), агар $x\geqslant 0$ бўлса, $\varphi(x)=|x|-x=x-x=0$, $\varphi(x)=0$ — доимий. Демак, ихтиёрий $x\in(-\infty;\ \infty)$ да $x_1<x_2$ бўлганда $\varphi(x_1)\geqslant\varphi(x_2)$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун $\varphi(x)=|x|-x$ функция $(-\infty;\ \infty)$ да ўсмайдиган функция бўлади.

3) $x_1<x_2$ $\left(\text{бунда } x_1,\ x_2\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$ бўлганда $\psi(x_2)-\psi(x_1)$ айирмани текширамиз: $\psi(x_2)-\psi(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}$. $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$ тенгсизлик ўринли бўлгани учун $\frac{x_2+x_1}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ бўлиб, $\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0$. $x_2-x_1>0$ ўринли бўлгани учун $\frac{x_2-x_1}{2}>0$ ҳам мусбат бўлиб, $0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$ да $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$ дир. Демак, $\psi(x_2)-\psi(x_1)>0$, яъни $\psi(x_1)<\psi(x_2)$. Шундай қилиб, $\psi(x)=\sin x$ функция $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ да ўсувчи экан. ▲

Қуйидаги функцияларнинг қайсилари даврий эканлигини аниқланг ва даврий функцияларнинг асосий даврини кўрсатинг.

60. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$. **61.** $f(x)=\operatorname{tg}\pi x$.

62. $f(x) = \sin^2 x$.

63. $f(x) = x \cos x$.

64. $f(x) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} x$.

65. $f(x) = \cos (x - 2)$.

66. $f(x) = \{x\}$.

67. $f(x) = 4$.

68. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

69. $f(x) = \left\{\frac{x}{a}\right\} (a > 0)$.

Қуйидаги функцияларнинг қатъий монотонлик оралиқларини топинг:

70. $f(x) = 2x - 1$.

71. $f(x) = x^2$.

72. $f(x) = 2^x$.

73. $f(x) = x^3$.

74. $f(x) = \arcsin x$.

75. $f(x) = x^2 + 2x + 5$.

76. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

77. $f(x) = 2^{-x}$.

5-§. НУҚТАЛАРГА КЎРА ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ ЯСАШ

X тўпламда аниқланган $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Функциянинг x га мос келган $f(x)$ қийматини ҳисобласак, координаталар текислигида $M(x; f(x))$ нуқтага эга бўламиз. Текисликдаги нуқталарнинг $\{M(x; f(x)) / x \in \in X\}$ тўплами $y = f(x)$ функциянинг графиги дейилади.

Аналитик кўринишда берилган функциянинг нуқталарга кўра графигини ясаш қуйидаги тартибда бажарилади:

1) функциянинг берилган аналитик ифодасига кўра бирбирига мос ўзгарувчиларнинг қийматлари бўйича жадвал тузилади;

2) ҳар бир ўзгарувчига мос масштаб бирлигига эга бўлган координат системаси танланади.

Одатда иккала координата ўқлари учун бир хил масштаб бирлигига эга бўлган тўғри бурчакли координаталар системаси қўлланилади;

3) координаталари жадвалдаги аргумент ва функция қийматларидан иборат бўлган нуқталар топилади;

4) топилган нуқталар текис чизиқ билан туташтирилади.

Агар функция жуфт, тоқ ёки даврий бўлса, унинг графигини ясаш бирмунча соддалашади. Жуфт функциянинг графиги OY ўққа нисбатан, тоқ функциянинг графиги координата бошига нисбатан симметрикдир.

Даврий функциянинг графиги унинг узунлиги битта даврга тенг бўлган қисмидаги графигини такрорлаш натижасида ҳосил бўлади.

78. Кўрсатилган тўпламларда қуйидаги функцияларнинг графигини ясанг:

1) $y = x^2 - 2x - 1, \quad x \in [-2; \ 4]$;

2) $y = -\frac{4x}{x^2+1}, \quad x \in [-5; \ 5]$;

3) $y = \frac{16}{x^2} - 1, \quad x \in [-4; \ 4]$;

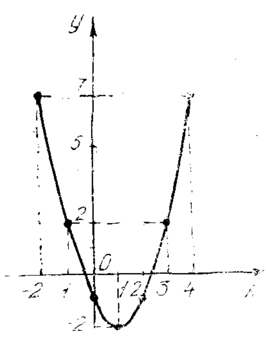
4) $y = \{x\}$, $\{x\}$ — x ҳақиқий соннинг каср қисми;

5) $y = \sin 2x$.

$\triangle$ 1) $x \in [-2; \ 4]$ ни эътиборга олиб, соддалик учун x га бутун сон қийматлар бериб ва бу қийматларга мос y нинг қийматларини ҳисоблаб жадвал тузамиз:

x	y
-2	7
-1	2
0	-1
1	-2
2	-1
3	2
4	7

Бир хил масштаб бирлигига эга бўлган тўғри бурчакли координаталар системасини киритамиз. Сўнгра жадвалдаги аргумент x нинг қийматларини абсцисса ўқи Ox га, функция y нинг қийматларини ордината ўқи Oy га жойлаб чиқиб, текисликда $(-2; \ 7)$, $(-1; \ 2)$, $(0; \ -1)$, $(1; \ -2)$ $(2; \ -1)$, $(3; \ 2)$, $(4; \ 7)$ нуқталарни топамиз, уларни кетма-кет текис силлиқ чизиқ билан туташтирамиз, натижада ҳосил бўлган чизиқ (2-чизма) берилган функциянинг графигини ифодалайди.

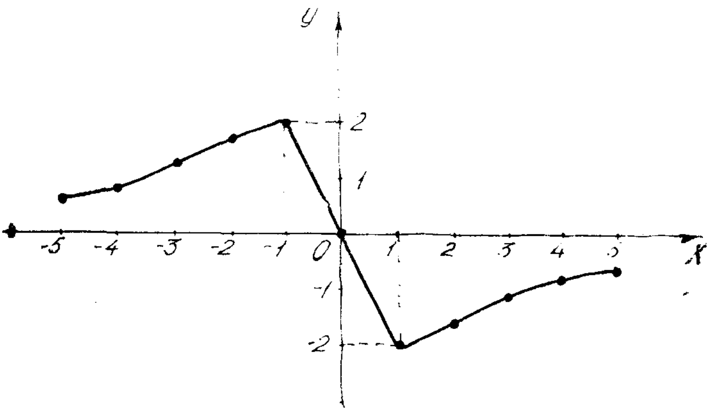


2-чизма

2) $y = -\frac{4x}{x^2+1}$ функция тоқ функциядир, чунки $y(-x) = -y(x)$. Аргументнинг ишоралари билан фарқ қилувчи қийматларида функция қийматлари ҳам ишоралари

билан фарқ қилади. Шунинг учун жадвал тузишда фақат аргументнинг мусбат қийматлари учун функция қийматларини ҳисоблаш етарли.

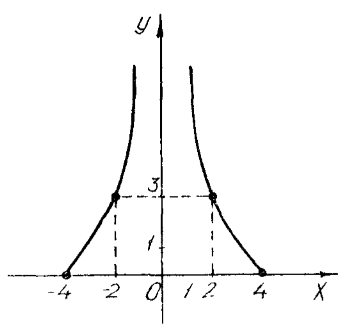
x	y
0	0
±1	∓2
±2	$\mp8/5$
±3	$\mp6/5$
±4	$\mp16/17$
±5	$\mp10/13$



3- чизма

Жадвалдаги ҳар бир жуфт x ва y ларнинг қийматларини координаталар системасига киритамиз; бу нуқталарни текис силлиқ чизиқ билан туташтириб, координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган графикка эга бўламиз (3- чизма).

3) $y = \frac{16}{x^2} - 1$ функция жуфт функциядир, чунки $y(-x) = y(x)$. $[-4;\ 0) \cup (0;\ 4]$



4- чизма

да берилган жуфт функция қийматлари учун жадвал тузиб, унинг графигини ясаймиз (4-чизма).

x	y
$\pm 0,5$	63
± 1	15
± 2	3
± 4	0

$x = 0$ да функция ҳеч қандай сон қийматга эга эмас, лекин x 0 га чап ва ўнг томондан яқинлашганда функция қийматлари чексиз катталашади, шунинг учун график 2 та алоҳида чексиз тармоқдан иборат бўлади.

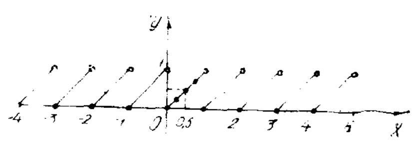
4) $y = \{x\} = x - [x]$, бу функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty;\ \infty)$ бўлиб, асосий даври 1 га тенгдир (66-мисолга қаранг), шунинг учун $y = \{x\}$ нинг графигини $[0;\ 1]$ да чизиб, бу графикни такрорлаймиз.

$[0;\ 1]$ да функция қийматлари учун жадвал тузиб, функция графигини ясаймиз (5-чизма).

x	y
0	0
0,1	0,1
0,2	0,2
0,5	0,5
0,8	0,8
1	0

Ҳақиқатан $\{0\} = 0 - [0] = 0 - 0 = 0$; $\{0,1\} = 0,1 - [0,1] = 0,1 - 0 = 0,1$; $\{0,2\} = 0,2 - [0,2] = 0,2 - 0 = 0,2$; $\{0,8\} = 0,8 - [0,8] = 0,8 - 0 = 0,8$; $\{1\} = 1 - [1] = 1 - 1 = 0$.

$y = f(x)$ функциянинг қийматлар тўплами $[0;\ 1)$ дан иборат бўлгани учун функциянинг графиги Ox ўқдан юқорида жойлашган бўлиб, текисликдаги $(k,\ 1)$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$ нуқталар графикка кирмайди.

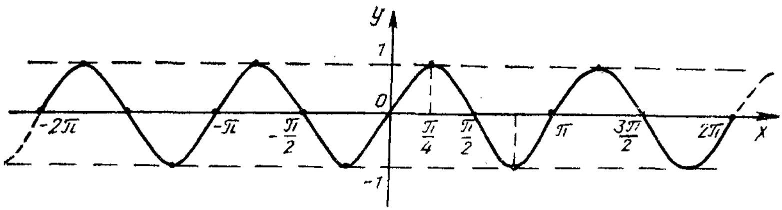


5- чизма

5) $y = \sin 2x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty;\ \infty)$ бўлиб,

асссий даври π га тенгдир, чунки $\sin 2(x \pm \pi) = \sin(2x \pm \pm 2\pi) = \sin 2x$ тенглик ўринлидир. $[0; \pi]$ да $y = \sin 2x$ функциянинг графигини ясаб, бу графикни $(-\infty; \infty)$ да такрорлаб, $y = \sin 2x$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз.

Худди аввалги мисоллардаги каби $[0; \pi]$ да функция қийматлари учун жадвал тузамиз, жадвал устунидаги ҳар бир жуфт қийматлар учун координаталар системасида нуқталарни белгилаб, уларни силлиқ чизиқ билан туташтириб чиқамиз (6- чизма).



6- чизма

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0

$y = \sin 2x$ функциянинг энг кичик қиймати -1 га, энг катта қиймати 1 га тенг бўлгани учун $y = \sin 2x$ функция графиги $y = -1$ ва $y = 1$ тўғри чизиқлар орасида жойлашган бўлади.

Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг.

79. $y = 3x - 2$. **80.** $y = 2x + 1$.

81. $y = x^2$. **82.** $y = -x^2$.

83. $y = x^2 + 1$. **84.** $y = -x^2 + 1$.

85. $y = \frac{2}{x}$. **86.** $y = \frac{1}{x^2}$.

87. $y = 1 - 2^x$. **88.** $y = |x| + x$.

89. $y = \frac{x}{x-1}$.

90. $y = \begin{cases} x^2, \text{ агар } -2 \leqslant x < 0 \text{ бўлса}, \\ 2x - 1, \text{ агар } 0 \leqslant x < 1 \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ бўлса}. \end{cases}$

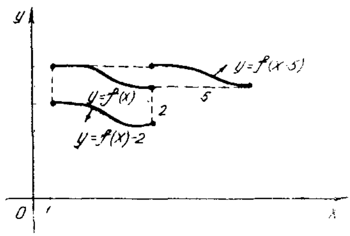
91. $y = [x]$; $[x]$ — x нинг бутун қисми. **92.** $y = |x| - x$.

6- §. БИРОР ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ СИЛЖИТИШ ВА ДЕФОРМАЦИЯЛАШ БИЛАН БОШҚА ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИ ЯСАШ

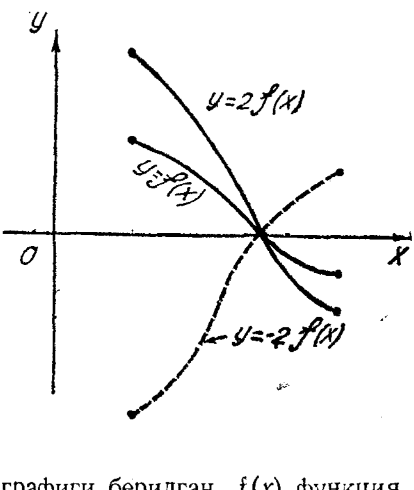
Қандайдир функциянинг графигини билган ҳолда, аргумент ва функция қийматлари учун жадвал тузмасдан, берилган функцияга нисбатан мураккаброқ бўлган функция графигини соф геометрик йўл билан ясаш мумкин. Масалан, $y=f(x)$ функциянинг графигини силжитиш ёки деформациялаш (торайтириш ёки кенгайтириш) йўли билан $y=f(x-a)b$ $y=f(x)+b$, $y=Af(x)$, $y=f(kx)$, $y=Af(k(x-a))+$, функцияларнинг графигини ясаш мумкин.

$y=f(x-a)$ функция графиги берилган $f(x)$ функция графигини абсцисса ўқи бўйлаб a масштаб бирлиги қадар, $a>0$ бўлса, ўнгга, $a<0$ бўлса, чапга силжитиш (суриш) билан ҳосил қилинади (7- чизма).

$y=f(x)+b$ функциянинг графиги эса $y=f(x)$ функция графигини ордината ўқи бўйлаб $b>0$ бўлганда юқори га, $b<0$ бўлганда пастга b масштаб бирлиги қадар суриш билан ҳосил қилинади (7- чизма).

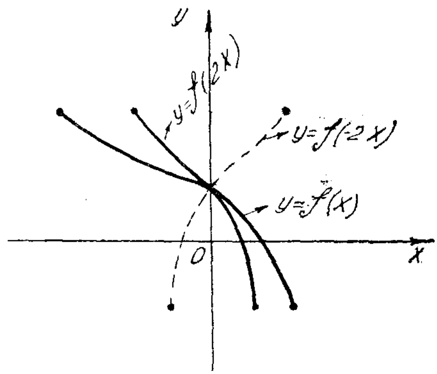


7- чизма



8- чизма

$y=Af(x)$ функциянинг графиги берилган $f(x)$ функция графиги нуқталари ординаталарини A коэффициентга кўпайтириш натижасида ҳосил қилинади. Бунда, агар $|A|>1$ бўлса, $Af(x)$ функция графиги нуқталарининг ординаталари абсолют қиймати бўйича $|A|$ марта ортади, агар $|A|<1$ бўлса, $\frac{1}{|A|}$ марта камаяди. $A<0$ бўлганда $y=Af(x)$ функция графиги абсцисса ўқига нисбатан $y=|A|\cdot f(x)$ функция графигига симметрик бўлади (8- чизма). $y=f(kx)$ функциянинг графиги $y=f(x)$ функция графигидан ундаги нуқта абсциссаларини k коэффициентга бўлиш натижасида ҳосил бўлади. Бунда, агар $|k|>1$ бўлса, изланаётган графикдаги ҳамма нуқталар абсциссалари абсолют қийматлари бўйича k марта камаяди; агар $|k|<1$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{|k|}$ марта ортади; агар $k<0$ бўлса, у ҳолда уларнинг ишоралари ҳам ўзгаради. $k<0$ бўлганда $y=f(kx)$ функция графиги ордината ўқига нисбатан $y=f(|k|x)$ функция графиги билан симметрик бўлади (9- чизма). $y=f(x)$ функция графигини кўрсатилган тартибда кетма-кет силжитиш ва деформациялаш билан мураккаброқ бўлган $y=Af(k(x-a))+b$ (1) кўринишдаги функциянинг графигини ясаш мумкин.



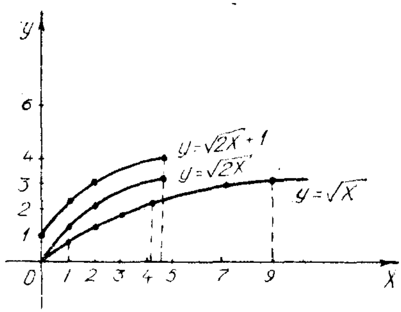
9- чизма

93. [0; 9] сегментда $y=\sqrt{x}$ функция графигидан фойдаланиб, уни деформациялаш ва силжитиш билан $y=1+\sqrt{2x}$ функция графигини ясанг.

Δ $y=\sqrt{x}$ функция учун x ва y нинг қийматларидан жадвал тузиб, функциянинг графигини чизамиз (10- чизма).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

$\sqrt{x}$ ни $f(x)$ десак, у ҳолда $y=1+\sqrt{2x}=1+f(2x)$ бўлади, бунда $k=2$, $a=0$, $b=1$ бўлиб, аввал $f(2x)=\sqrt{2x}$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз. Бунинг учун $f(x)=\sqrt{x}$ функция графигидаги нуқталар ординаталарини ўзгаришсиз қолдириб,



10-чизма

абсциссаларини эса 2 марта камайтирамиз, сўнгра $y=\sqrt{2x}$ функция графиги нуқталарини ордината ўқи бўйлаб 1 масштаб бирлиги қадар юқорига кўчириб, $y=1+\sqrt{2x}$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз. ▲

94. $y=\sin x$ функция графигини деформациялаш ва силжитиш ёрдамида $y=-3\sin(2x+8)$ (1) функция графигини ясанг.

△ (1) ифодадаги ихтиёрий функция символи f ни тригонометрик функция символи sin билан ифодалаб,

$$y=A\sin k(x-a)+b \tag{2}$$

га эга бўламиз. Берилган функцияни $y=-3\sin 2(x+4)$ кўринишда ёзиб ва уни (2) ифода билан солиштирсак, параметрларнинг қуйидаги қийматларига эга бўламиз: $A=-3$, $k=2$, $a=-4$; $b=0$. Сўнгра умумий кўрсатмаларга кўра изланаётган графикни ясаймиз.

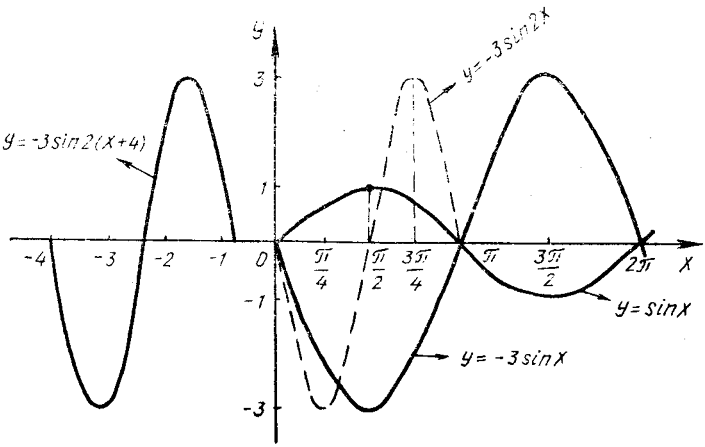
$y=\sin x$ функция графигидаги нуқталар абсциссаларини ўзгартирмай, ординаталарини эса абсолют қийматлари бўйича 3 марта кўпайтириб ва уларнинг ишораларини ўзгартириб, $y=-3\sin x$ функциянинг графигини ясаймиз; сўнгра $y=-3\sin x$ функция графигидаги нуқталар ординаталарини ўзгартирмай, абсциссаларини эса 2 марта камайтириб, $y=-3\sin 2x$ функциянинг графигини ясаймиз ва бу графикка тегишли нуқталарни абсцисса ўқи бўйлаб чапга 4 масштаб бирлигига кўчириб, изланаётган $y=-3\sin 2(x+4)$ функция графигини ҳосил қиламиз. Функциянинг даврийлигидан фойдаланиб, ҳосил қилинган графикни ҳар икки томонга давом эттириш мумкин (11-чизма). ▲

95. $[-4,4]$ да нуқталарга кўра $y=x^2$ функциянинг графигини ясанг, сўнгра уни деформациялаш ва силжитиш билан $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$ функция графигини ясанг.

△ $[-4; 4]$ да $y=x^2$ функция қийматлари учун жадвал тузиб, функция графигини ясаймиз

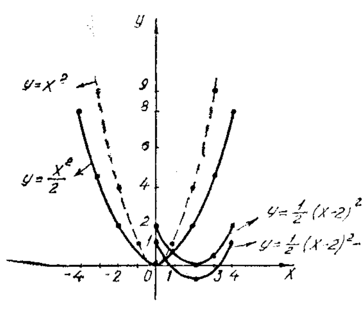
x	± 4	± 3	± 2	± 1	0	$\pm 0,5$	$\pm 1,5$	$\pm 2,2$
y	16	9	4	1	0	0,25	2,25	4,84

$y = x^2$ функция графигидаги нуқталар абсциссаларини ўзгартирмай, ординаталарини $1/2$ га кўпайтириб, $y = \frac{x^2}{2}$ функция графигини ясаймиз, сўнгра бу графикни абсцисса ўқи бўйлаб ўнг томонга 2 масштаб бирлигига тенг масофага кўчириб, $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз, бу графикни эса ордината ўқи бўйлаб 1 масштаб



11- чизма.

бирлигига тенг масофага пастга силжитсак, изланган $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$ функция графигига эга бўламиз (12- чизма). ▲



12- чизма

96. $[-4;\ 4]$ сегментда нуқталарга кўра $y = x^2$ функциянинг графигини ясанг ва уни деформациялаш ҳамда силжитиш билан қуйидаги функцияларнинг графикларини (алоҳида-алоҳида чизмаларда) ясанг:

1) $y = 2x^2 - 3$, 2) $y = 3 - \frac{x^2}{2}$,

3) $y = 2(x + 1)^2 + 1$, 4) $y = -2(x - 1)^2 - 1$.

97. $y = \sin x$ функция графигидан фойдаланиб, уни деформациялаш ва силжитиш ёрдамида (алоҳида-алоҳида чизмаларда) қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

1) $y = 2\sin(x + 1)$, 2) $y = 1 + 3\sin 2x$,

3 $y = -2\sin 3(x - 1)$, 4) $y = 2 - \sin\frac{4 - x}{2}$.

98. $y = x^2$ функция графигидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

1) $y = \frac{1}{2}x^2$; 2) $y = x^2 - 1$;

3) $y = |x^2 - 1|$: 4) $y = 1 - x^2$;

5) $y = x^2 - x + 4$; 6) $y = x - x^2$.

99. $y = \cos x$ функция графигидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

1) $y = 1 - \frac{1}{2}\cos x$; 2) $y = 2{,}3 + 4\cos(1{,}4 - x)$;

3) $y = -4\cos(2x + 3)$.

7-§. СОНЛИ КЕТМА-КЕТЛИК ЛИМИТИ

1. Барча $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ натурал сонлар тўпламида аниқланган $f(n)$ функция *сонлар кетма-кетлиги* дейилади ва $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$ (1) кўринишда ёзилади.

$f(1)$ қийматни x_1 орқали, $f(2)$ қийматни x_2 орқали ва ҳоказо $f(n)$ қийматни x_n орқали белгиласак, (1) қуйидаги кўринишга келади:

$x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n, \ldots$ (2), бу ерда $x_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(2) кетма-кетлик қисқача (x_n) деб ёзилади.

(2) кетма-кетлик берилган бўлсин. Ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $N = N(\varepsilon)$ сон топилиб, барча $n > N$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда a сон (2) кетма-кетликнинг *лимити* дейилади ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ каби ёзилади.

Лимитга эга бўлган кетма-кетлик *яқинлашувчи*, лимитга эга бўлмаган кетма-кетлик *узоқлашувчи* дейилади.

2. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ бўлса, у ҳолда x_n *чексиз кичик миқдор* (ёки қисқача чексиз кичик) дейилади.

3. Агар исталганча катта $\Delta > 0$ учун шундай $N = N(\Delta)$ сон топилиб, $n > N$ лар учун $|x_n| > \Delta$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда x_n *чексиз катта миқдор* (қисқача чексиз катта) дейилади ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ кўринишда ёзилади.

4. Агар ихтиёрий n номер учун $|x_n| \leqslant M$ тенгсизликни қаноатлантирувчи M сон мавжуд бўлса (мавжуд бўлмаса), (x_n) кетма-кетлик чегараланган (чегараланмаган) дейилади.

Теорема. *Агар x_n чексиз кичик бўлса, у ҳолда $y_n = \frac{1}{x_n}$ чексиз катта бўлади.*

Агар x_n чексиз катта бўлса, у ҳолда $y_n = \frac{1}{x_n}$ чексиз кичик бўлади.

5. **Теорема.** *Агар $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n,$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n,$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0)$

бўлади.

6. **Теорема.** *Агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ва (y_n) чегараланган бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = 0$ бўлади.*

100. $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ қийматларда

1) $x_n = 1 + 0{,}1^n$; 2) $y_n = (-0{,}1)^{-n}$;

3) $z_n = (-0{,}1)^n$; 4) $u_n = (-1)^n + 0{,}1^n$

ўзгарувчиларнинг қийматлари учун жадвал тузинг ва $n\to\infty$ да уларнинг ўзгариш характерини аниқланг.

Δ 1) n га 0, 1, 2, 3, ... қийматлар бериб, бу қийматларда берилган ўзгарувчиларнинг қийматларини ҳисоблаб, қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

n	0	1	2	3	4	5 ...	$n \to +\infty$
x_n	2	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001 ...	$x_n \to 1+0$
y_n	—1	—10	—100	—1000	—10000	—100000	$y_n \to -\infty$
z_n	1	—0,1	0,01	—0,001	0,0001	—0,00001 ...	$z_n \to 0$
u_n	2	—0,9	1,01	—0,999	1,0001	—0,99999	

Бу жадвални қараб чиқиб қуйидаги хулосага келамиз:

1) n нинг ортиши билан x_n ўзгарувчининг кетма-кет келган қийматлари 1 га шундай яқинлашадики, натижада ҳар қандай кичик мусбат сон ε берилмасин, n нинг етарли катта қийматларида $|x_n - 1| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу тасдиқни исботлайлик.

$\varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин. $|x_n - 1| = 0,1^n < \varepsilon$ деб, n ни топамиз: тенгсизликнинг иккала томонини логарифмлаб, $n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$ га эга бўламиз, яъни $n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$ бўлганда $|x_n - 1| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, таърифга кўра $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ бўлиб, бирга ўнг томондан интилади.

2) n нинг ортиши билан (y_n) кетма-кетликнинг ҳадлари шундай камаядики, натижада n нинг етарли катта қийматларида y_n нинг абсолют қиймати аввалдан берилган мусбат катта N сонидан ҳам катта бўлади, яъни $|y_n| > N$. Бу тасдиқнинг ўринли эканини исботлайлик.

$N > 0$ катта сон берилган бўлсин. $|y_n| = 0,1^{-n} > N$ деб, бу тенгсизликнинг иккала томонини логарифмлаб, $n > \lg N$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, $n > \lg N$ бўлганда $|y_n| > N$ тенгсизлик ўринли бўлади, бу эса y_n ўзгарувчининг чексиз катта миқдор эканлигини ифодалайди:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

3) n нинг ортиши билан (z_n) кетма-кетлик ҳадлари 0 га шундай яқинлашадики, натижада ҳар қандай кичик мусбат

сон ε берилмасин, n нинг етарли катта қийматларида $|z_n| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Ҳақиқатан шундай эканини исботлайлик.

$\varepsilon > 0$ берилган бўлсин. $|z_n| = 0{,}1^n < \varepsilon$ деб, $n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$ га эга бўламиз, яъни $n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$ бўлганда $|z_n| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади ва таърифга кўра $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Бунда (z_n) кетма-кетлик 0 га унинг атрофида тебраниб интилади.

4) n нинг ортиши билан (u_n) кетма-кетликнинг ҳадлари бирор аниқ сонга интилмайди, шунинг учун (u_n) кетма-кетлик лимитга эга эмас, шу билан бирга u_n чексиз катта миқдор ҳам эмас, лекин у чегараланган миқдор. ▲

Кетма-кетлик лимити таърифидан фойдаланиб, қуйидагиларни исботланг:

101. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$ **102.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n} = 0.$

103. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}.$

104. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$. Қайси n дан бошлаб $\left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < 0{,}0001$ тенгсизлик ўринли бўлади?

105. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}$. Қайси n дан бошлаб $\left|\frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5}\right| < 0{,}001$ тенгсизлик ўринли бўлади?

106. а) $x_n = 3n - 1$; б) $x_n = \sqrt{n^3+2}$ ларнинг чексиз катта эканлигини исботланг.

Қуйидаги лимитларни топинг:

107. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2}.$ **108.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{2n^3+3n^2+1}.$

109. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}.$ **110.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n-1)}{n^4+2n+3}.$

111. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}.$ **112.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}.$

113. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1}\right).$ **114.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n} \cdot \sin n^2.$

115. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}$.

116. $x_n = \begin{cases} 1, & \text{агар } n \text{ — жуфт бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ — тоқ бўлса.} \end{cases}$

(x_n) кетма-кетликнинг лимити бор-йўқлигини аниқланг.

117. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$. **118.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$.

119. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. **120.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n}\cos n^3 - \frac{3n}{6n+1}\right)$.

121. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\sin n! + \frac{2n^2}{1-9n^2}\right)$.

8- §. ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ

1. $y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$ топилиб, тўпламнинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x нуқталарида $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда A $f(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтадаги *лимити* дейилади ва $\lim\limits_{x\to n} f(x) = A$ кўринишда ёзилади.

2. Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\Delta > 0$ топилиб, $|x| > \Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда $|f(x) - B| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, B $f(x)$ функциянинг $x\to\infty$ даги лимити дейилади ва $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B$ кўринишда ёзилади.

Агар $x > 0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$, $x < 0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$ кўринишда ёзилади.

3. Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$ топилиб, $a - \delta < x < a$ $(a < x < a + \delta)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда A $f(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтадаги *чап (ўнг) лимити* дейилади. Чап лимит $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, ўнг лимит $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ кўринишда белгиланади.

4. $x = a$ нуқтада функция лимитга эга бўлиши учун $f(a-0) = f(a+0)$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Теорема. *Агар $x = a$ нуқтада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, у ҳолда;*

а) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$,

б) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$,

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$ $(\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \neq 0)$

тенгликлар ўринли булади.

Функция лимитини топаётганда $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0 кўринишдаги ҳоллар юз берса, улар *аниқмасликлар* дейилади.

122. $\lim\limits_{x\to 3} (2x+1) = 7$ тенгликни исботланг, δ нинг қандай қийматларида $0<|x-3|<\delta$ тенгсизликдан $|(2x+1)-7|<0{,}001$ тенгсизлик келиб чиқишини кўрсатинг.

Δ Ҳар бир $\varepsilon>0$ га мос равишда шундай $\delta>0$ топилиб, $0<|x-3|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда $|(2x+1)-7|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатишимиз керак. $\varepsilon>0$ ни олайлик. $|(2x+1)-7| = |2x-6| = 2|x-3|$. Бундан $2|x-3|<\varepsilon$, $|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$. Агар $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ деб олсак, $0<|x-3|<\delta$ тенгсизликдан $|(2x+1)-7|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади ва шу билан $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7$ экани исботланди. Энди $\varepsilon=0{,}01$ десак, $\delta=\frac{0{,}01}{2}=0{,}005$ бўлади. Демак, $0<|x-3|<0{,}005$ бўлганда $|(2x+1)-7|<0{,}01$ бўлар экан. ▲

123. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ эканини исботланг ва $\varepsilon=0{,}01$ учун Δ ни топинг.

Δ Ҳар бир $\varepsilon>0$ га мос равишда шундай $\Delta>0$ топилиб, $x>\Delta$ бўлганда $\left|\dfrac{x}{x+1}-1\right|<\varepsilon$ тенгсизликнинг ўринли бўлишини кўрсатишимиз керак, сўнгра $\varepsilon=0{,}01$ учун Δ ни топишимиз керак.

$\varepsilon>0$ берилган бўлсин. $\left|\dfrac{1}{x+1}-1\right|<\varepsilon$, $\left|\dfrac{x-x-1}{x+1}\right|<\varepsilon$, $\dfrac{1}{x+1}<\varepsilon$, $1<\varepsilon x+\varepsilon$, $x>\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, демак, $\Delta=\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ десак, у ҳолда $x>\Delta$ бўлганда $\left|\dfrac{x}{x+1}-1\right|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ экани исботланган бўлади. Энди $\varepsilon = 0{,}01$ учун $\Delta \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1-0{,}01}{0{,}01} = \frac{0{,}99}{0{,}01} = 99$. Шундай қилиб, $x > 99$ бўлганда $\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < 0{,}01$ тенгсизлик ўринли бўлар экан. ▲

124. $f(x) = \frac{5}{2-x}$ функциянинг: 1) $x \to 2-0$; 2) $x \to 2+$ $+0$ даги лимитларини топинг ва ечимини жадвал орқали тушунтиринг.

Δ 1) агар x иккига иккидан кичик бўлиб интилса, у ҳолда $2-x$ мусбат чексиз кичик миқдор бўлиб, $\frac{5}{2-x}$ эса мусбат чексиз катта, яъни $(2-x) \to +0$, $\frac{5}{2-x} \to +\infty$, ёки $\lim\limits_{x\to2-0} \frac{5}{2-x} = +\infty$ бўлади. x, $2-x$, $\frac{5}{2-x}$ ўзгарувчиларнинг юқоридаги характерини қуйидаги жадвалда равшан кўриш мумкин:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999	1,999999	...
$2-x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	....
$\frac{5}{2-x}$	5	50	500	5000	50000	500000	5000000	...

2) Агар $x \to 2+0$ бўлса, у ҳолда $(2-x) \to -0$,

$$\frac{5}{2-x} \to -\infty, \text{ ёки } \lim_{x\to2+0} \frac{5}{2-x} = -\infty.$$

Буларни қуйидаги жадвалда яққол кўриш мумкин:

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,000001	2,000001	...
$2-x$	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	-0,001	$-0{,}0001$	$-0{,}00001$	- 0,000001	,...
$\frac{5}{2-x}$	-5	-50	-500	-5000	-50000	-500000	-5000000	...

$y=\dfrac{5}{2-x}$ функциянинг графиги 13-чизмада кўрсатилган. ▲

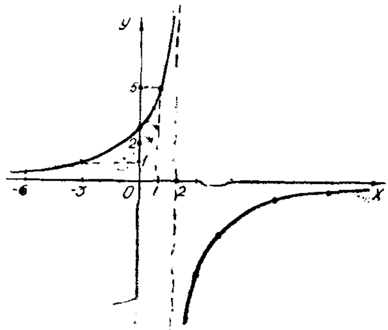
125. 1) $x\to-0$; 2) $x\to+0$; 3) $x\to 0$ да $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ функциянинг лимитини топинг.

△ 1) Агар $x\to-0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{1}{x}\to-\infty$, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\to-\dfrac{\pi}{2}$, яъни

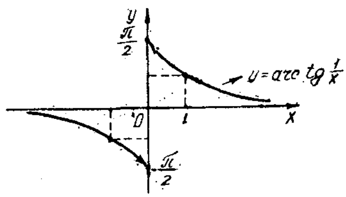
$$\lim_{x\to-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}.$$

2) Агар $x\to+0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{1}{x}\to+\infty$, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\to\dfrac{\pi}{2}$, яъни

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2}.$$



13- чизма



14- чизма

3) Агар $x\to 0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{1}{x}\to\infty$, функция ҳеч қандай қийматга интилмайди, яъни $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ — мавжуд эмас.

$f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ функциянинг графиги 14-чизмада берилган. ▲

126. Қуйидаги лимитларни топинг:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x-3-\dfrac{1}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x^2+2x-5}{x^2+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$; 4) а) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$.

△ Юқорида кўрсатилган теоремалардан кетма-кет фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\left(2x-3-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 1}2\cdot\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}3-\frac{\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x}=2\cdot 1-$$

$$-3-\frac{1}{1}=-2;$$

$$2)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x^2+2x-5}{x^2+2}=\frac{(\lim x)^3-3(\lim x)^2+2\lim x-5}{(\lim x)^2+2}=$$

$$=\frac{(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)-5}{(-1)^2+2}=\frac{-1-3-2-5}{3}=-\frac{11}{3};$$

3) $x\to 0$ да аргумент $\frac{1}{x}\to\infty$, $\sin\frac{1}{x}$ функция -1 билан $+1$ орасида тебраниб, ҳеч қандай аниқ сонга интилмайди, лекин у чегараланган функция, яъни $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$. Чексиз кичик x билан чегараланган миқдор $\sin\frac{1}{x}$ нинг кўпайтмаси чексиз кичикни бергани учун бу кўпайтманинг лимити 0 га тенг бўлади:

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

4) *а*) $\lim\limits_{x\to -0}2^{\frac{1}{x}}=2^{-\infty}=0$ бўлгани учун

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\frac{1}{1+\lim 2^{1/x}}=\frac{1}{1+0}=1 \text{ бўлади.}$$

б) $\lim\limits_{x\to +0}2^{1/x}=2^{+\infty}=+\infty$ бўлгани учун

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\frac{1}{1+\lim 2^{1/x}}=0 \text{ бўлади.}$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}2^{1/x}$ мавжуд бўлмагани учун $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{1/x}}$ ҳам мавжуд бўлмайди. ▲

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

127. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+5x+6)$.

128. $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^3+3^z}{\sqrt{z+3}}$.

129. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{(2a-y)^3-\sin y}{a^2+y^2+\operatorname{tg}2y}$.

130. $\lim\limits_{x\to\pi}7\cdot\sin\frac{3x}{x-\pi}$.

131. 1) $\lim\limits_{x\to -0}\frac{8}{1-2^{\operatorname{ctg}x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{8}{1-2^{\operatorname{ctg} x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8}{1-2^{\operatorname{ctg} x}}$.

9-§. ЧЕКСИЗ КАМАЮВЧИ ФУНКЦИЯЛАР ВА ЛИМИТЛАР ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМАЛАР

1. Агар $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)=0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ $x\to a$ да чексиз камаювчи функция дейилади (қисқача — «чексиз кичик»), $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар чексиз кичиклар.

2. Агар $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ни $\beta(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик дейилади ва $\alpha(x)=$ $=0(\beta(x))$ кўринишда ёзилади.

3. Агар $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ $(c\neq 0,\ c\neq\infty)$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар бир хил тартибли чексиз кичиклар дейилади.

Агар $c=1$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар эквивалент чексиз кичиклар дейилади ва $\alpha(x)\sim\beta(x)$ кўринишда ёзилади.

Энди лимитлар ҳақидаги **теорема**ларни келтирайлик:

4. *Агар $x=a$ нуқта атрофида $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ лар чексиз кичик ва $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ бўлади.*

5. *Чекли сондаги чексиз кичикларнинг йиғиндиси чексиз кичикдир.*

6. *Чексиз кичик билан чегараланган катталик (миқдор) кўпайтмаси чексиз кичикдир.*

7. *Ўзгармас соннинг лимити ўзига тенг.*

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$ га 1- ажойиб лимит дейилади, бунда x — бурчакнинг радиан ўлчови.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}=1,\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x}=1,\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}=1$$

лар 1- ажойиб лимитдан келиб чиқади.

132. $x \to 0$ да қуйидаги функцияларнинг қайсилари эквивалент чексиз кичикдир:

1) $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1$ ва $\beta(x) = \frac{1}{2}x$;

2) $\alpha(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1$ ва $\beta(x) = \frac{1}{n}x$;

3) $\alpha(x) = \sin ax$ ва $\beta(x) = ax$;

4) $\alpha(x) = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$ ва $\beta(x) = \sin x$?

Δ $x \to a$ да $\alpha(x)$ чексиз камаювчи функциянинг $\beta(x)$ чексиз камаювчи функцияга нисбатининг лимитини топамиз; агар бу лимит 1 га тенг бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз камаювчи функциялар эквивалент бўлади, акс ҳолда эквивалент бўлмайди.

1) $$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}\cdot x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{\frac{x}{2}\cdot(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Демак, $x \to 0$ ва $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$.

2) $$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}\cdot x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \sqrt[n]{1+x} = t, \ 1+x = t^n, \ x = t^n - 1 \\ x \to 0 \text{ да } t \to 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{\frac{1}{n}\cdot(t^n - 1)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t-1)\cdot n}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+t+1)} = \frac{n}{n} = 1,$$

демак, $x \to 0$ да $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}\cdot x$.

3) $$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

(бунда 1- ажойиб лимитдан фойдаланилди: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$), демак, $x\to 0$ да $\sin ax\sim ax$.

$$4)\ \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin x\cdot\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{\sin x\cdot\sin 2x\sqrt{1+x+x^2}+1}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sin 2x}=$$

$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\infty=\infty$, демак, 4) даги $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар ўзаро эквивалент эмас. ▲

Эквивалент чексиз кичиклардан фойдаланиб, қуйидаги лимитларни топинг:

133. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$.

134. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x+x^2}$.

135. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\frac{x}{3}}$.

136. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

137. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x}-x}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

138. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$.

10- §. ЛИМИТЛАРНИ ҲИСОБЛАШ ЙЎЛЛАРИ

Функциянинг лимити унинг аргументининг интилган сонида аниқланган бўлишига боғлиқ эмас. Амалда эса функция лимитини топишда бу муносабат катта аҳамиятга эга.

а) Агар берилган $f(x)$ функция элементар бўлиб, x интилган сон унинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлса, у ҳолда функциянинг лимити $f(x)$ нинг x интилган сон қийматидаги хусусий қийматига тенг бўлади, яъни

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

139. Функциялар лимитларини топинг:

1) $f(x)=x^3-3x^2+2x+4,\ x\to -2$;

2) $\varphi(t)=t\cdot\sqrt{t^2-20}-\lg(t+\sqrt{t^2-20}),\ t\to 6$.

△ Ҳар иккала функция ҳам элементар функциялар бўлиб, аргумент интилган сонлар уларнинг аниқланиш соҳасига кирганлиги учун уларнинг лимити функцияларнинг аргументлари интилган сон қийматидаги хусусий қийматларига тенг:

1) $\lim\limits_{x\to-2}(x^3-3x^2+2x+4)=(-2)^3-3(-2)^2+2(-2)+$
$+4=-20;$

2) $\lim\limits_{t\to6}(t\sqrt{t^2-20}-\lg(t+\sqrt{t^2-20}))=6\cdot4-$
$-\lg(6+4)=23.$ ▲

Қуйидаги лимитларни топинг:

140. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x+1}.$

141. $\lim\limits_{x\to2}\lg(2+2x+x^2-x^3).$

142. $\lim\limits_{x\to-1}(x^5-5^{x+1}+3).$

143. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x.$

б) Агар функцияда аргумент ∞ ка ёки унинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлмаган сонга интилса, бу ҳолда функция лимитини топишда алоҳида текшириш олиб бориш керак бўлади. 8, 9- § лардаги баён қилинган лимитлар хоссаларига суяниб, қуйидаги кўп учрайдиган лимитлар топилган:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}ax=\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{a}=\infty.$

3. $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{a}{x}=-\infty.$

4. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{a}{x}=+\infty.$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a}{x}=\infty.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}=0.$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}0, \text{ агар } |a|<1;\\ +\infty, \text{ агар } a>1;\\ \infty, \text{ агар } a<-1.\end{cases}$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0, \text{ агар } |a|>1;\\ +\infty, \text{ агар } 0<a<1;\\ \infty, \text{ агар } -1<a<0^*.\end{cases}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\begin{cases}+\infty, \text{ агар } a>1;\\ -\infty, \text{ агар } 0<a<1.\end{cases}$

* $a<0$ бўлганда x фақат бутун сон қийматларини қабул қилиши мумкин, x нинг ҳамма қийматлари учун $a<0$ бўлганда a^x аниқланмаган.

10. $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{агар } a>1; \\ +\infty, & \text{агар } 0<a<1. \end{cases}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (x — бурчакнинг радиан ўлчови).

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2{,}71828.$

Бу оддий лимитлардан формула тариқасида фойдаланиш мумкин, уларда қатнашган $a>0$ ўзгармас сондир.

Функция лимитини топишда $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞} кўринишдаги аниқмасликлар рўй берган бўлсин.

Бунда мисолларга қараб, маълум алгебраик ва тригонометрик алмаштиришлар бажариб, сўнгра лимитларни ҳисоблаймиз.

I. $x\to a$ ёки $x\to\infty$ да $f(x)$ функция икки чексиз кичик миқдорнинг нисбатидан $\left(\frac{0}{0}\right)$ иборат бўлган ҳол.

Қуйидаги лимитларни топинг:

144. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$ 2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

Δ 1) x^2-9 ни кўпайтувчиларга ажратиб, касрни $(x-3)$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim\frac{1}{x+3} = \frac{1}{6};$$

бунда 0 га қисқартириш бўлгани йўқ, чунки аргумент x 3 га ҳеч қачон тенг бўлмасдан интилади, шунинг учун $x-3\neq 0$.

$$2)\ \lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{2x-1}{3x+1} = \frac{9}{16}.$$

Бунда $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ дан фойдаланилди, x_1, x_2 лар $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенгламанинг илдизларидир.

3) Қасрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратиб, касрни $1+\cos x$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=\frac{2}{3}. \ \blacktriangle$$

145. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

$\triangle$ 1) Қасрнинг сурат ва махражини $(1+\sqrt{x+1})$ га кўпайтириб, суратдаги иррационалликни йўқотамиз, сўнгра касрни x га қисқартирамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}.$$

2) Қасрнинг сурат ва махражини $1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$ га кўпайтириб, сўнгра касрни $\operatorname{tg} x$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x\cdot(1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})}{1-1-\operatorname{tg} x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})=-2.$$

3) Қасрнинг сурат ва махражини $(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$ кўпайтмага кўпайтириб, сўнгра касрни $(1-x)$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}.$$

Бу мисолни ўзгарувчини алмаштириш усули билан ҳам ечиш мумкин. Бунинг учун $\sqrt{x}$ ва $\sqrt[3]{x}$ илдизларни бир хил кўрсаткичли илдизга, яъни $\sqrt[6]{x^3}$ ва $\sqrt[6]{x^2}$ га келтирамиз ва $\sqrt[6]{x}=t$ белгилаш киритамиз, у ҳолда $x\to 1$ да $t\to\to 1$ га эга бўламиз ва

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{1-t^2}=\lim_{t\to 1}\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1+t+t^2}{1+t}=\frac{3}{2}. \ \blacktriangle$$

146. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$ 4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arc\,tg}(x+2)}$.

Δ Бу тўртала лимит $\frac{0}{0}$ туридаги аниқмасликни ифодалайди. Бундай лимитларни топишда 1- ажойиб лимит $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ дан фойдаланамиз:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}=5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$

2) $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ дан иборат тригонометрик формуладан фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot 1=2.$$

3) Аввал $1-x=t$ алмаштириш киритамиз, у ҳолда $x\to 1$ да $t\to 0$, сўнгра 1- ажойиб лимитдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}\cdot t}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

4) $\operatorname{arc\,tg}(x+2)=v$ деб белгилаш киритсак, $x+2=\operatorname{tg} v$ га эга бўламиз, бунда $x\to -2$ да $v\to 0$ ва

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arc\,tg}(x+2)}=\lim_{v\to 0}\frac{(\operatorname{tg} v-2)^2-4}{v}=\lim_{v\to 0}\frac{(\operatorname{tg} v-4)\operatorname{tg} v}{v}=$$

$$=\lim_{v\to 0}\frac{\operatorname{tg} v-4}{\cos v}\cdot\lim_{v\to 0}\frac{\sin v}{v}=-4\cdot 1=-4. \ \blacktriangle$$

147. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$.

148. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$.

149. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$.

150. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

151. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2-x-14}$.

152. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$.

153. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

154. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

155. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{2x^2}$.

156. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

157. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+3x}-3}{\sqrt{25+2x}-5}$.

158. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$.

159. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

160. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

161. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

162. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

163. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

164. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ дан фойдаланиб, қуйидаги лимитларни топинг:

165. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

166. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$.

167. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{3}}{x}$.

168. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{5x}$.

169. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$.

170. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

171. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

172. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

173. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$.

174. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 3x}$.

175. $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

176. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin x}{\sec x-1}$.

177. 1) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{h}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

178. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

179. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$.

180. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

181. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}$.

182. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

183*. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$.

184.* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}$.

II. $x\to a$ ёки $x\to\infty$ да $f(x)$ функция икки чексиз катта миқдорнинг нисбатидан $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ иборат бўлган ҳол.

Лимитларни топинг:

185. 1) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3-1}{5x^3+2x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

△ Бу иккала лимит $\frac{\infty}{\infty}$ типидаги аниқмасликни ифодалайди.

1) Касрнинг сурат ва махражини x нинг энг юқори даражаси x^3 га бўламиз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-1}{5x^3+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{4-0}{5+0}=\frac{4}{5}.$$

$x\to\infty$ да $\frac{1}{x^3}$ ва $\frac{1}{x^2}$ лар чексиз кичик миқдорлардир.

Бу мисолни ўзгарувчини алмаштириш йўли билан, яъни $x=\frac{1}{\alpha}$ деб, бунда $x\to\infty$ да $\alpha\to 0$, ечиш мумкин:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-1}{5x^3+2x^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{4}{\alpha^3}-1}{\frac{5}{\alpha^3}+\frac{2}{\alpha^2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{4-\alpha^3}{5+2\alpha}=\frac{4}{5}.$$

2) Касрни 0 га интилувчи кўпайтувчига қисқартириш мумкин бўладиган қилиб айний алмаштирамиз:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}=$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{1}{2}.$$ ▲

III. $x \to a$ ёки $x \to \infty$ да $f(x)$ функция чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар кўпайтмаси $(0 \cdot \infty)$ дан иборат бўлган ҳол. Бу ҳол маълум алмаштиришлар ёрдамида I ёки II ҳолга келади.

IV. $x \to a$ ёки $x \to \infty$ да $f(x)$ функция икки чексиз катта миқдорлар айирмаси $(\infty - \infty)$ дан иборат бўлган ҳол. Бу ҳолда функцияни каср билан алмаштирилса, I ёки II ҳоллардан бирига келади.

Лимитларни топинг:

186. 1) $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \operatorname{arcctg} x$;

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \operatorname{cosec}\left(\dfrac{3\pi}{4} + x\right)$;

4) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$; 5) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2+5x})$;

6) $\lim\limits_{x \to 0} (2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} x)$.

△ 1) $$\lim_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = 1 \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

Бу лимитни ўзгарувчини алмаштириш йўли билан ҳам ечиш мумкин эди. $1 - x = u$ десак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{x \to 0} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{u \to 0} u \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi u}{2}\right) = \lim_{u \to 0} u \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2} =$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{u \cos\frac{\pi u}{2}}{\sin\frac{\pi u}{2}} = \lim_{u \to 0} \cos\frac{\pi u}{2} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{u}{\sin\frac{\pi u}{2}} =$$

$$= 1 \cdot \frac{2}{\pi} \lim_{u \to 0} \frac{\frac{\pi u}{2}}{\sin\frac{\pi u}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

2) $\operatorname{arcctg} x = \alpha$ деб белгиласак, $x = \operatorname{ctg} \alpha$ га эга бўламиз, бунда $x \to +\infty$ да $\alpha \to +0$ ва

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \operatorname{arcctg} x = (\infty \cdot 0) = \lim_{\alpha \to +0} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \cos \alpha \cdot \lim_{\alpha \to +0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1 \cdot 1 = 1.$$

3) $\frac{\pi}{4} - x = t$ деб белгилаш билан қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = (0 \cdot \infty) = \lim_{t \to 0} t \cdot \operatorname{cosec}(\pi - t) =$$

$$= \lim_{t \to 0} t \cdot \frac{1}{\sin(\pi - t)} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

4) Касрларнинг айирмасидан ҳосил бўлган касрни $(x-2)$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

5) Берилган функцияни махражи 1 га тенг бўлган каср сифатида қараб, унинг суратидаги иррационалликни йўқотамиз, сўнгра касрнинг сурат ва махражини x га қисқартирамиз:

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2+5x})(x + \sqrt{x^2+5x})}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x}{x + \sqrt{x^2+5x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} = \frac{-5}{1+1} = -\frac{5}{2}.$$

6) Берилган функцияни каср шаклига келтириб, сўнгра касрни $\sin x$ га қисқартирамиз:

$$\lim_{x \to 0} (2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\sin 2x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги лимитларни топинг:

187. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 5x + 4}{5x^2 - 2x + 3}$.

188. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$.

189. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^4 + 3x^3 + 1}{0,1\, x^4 + 1}$.

190. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + x - 3\,x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$.

191. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x$.

192. $\lim\limits_{x \to \pi} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x$.

193. $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot \sin \frac{x}{n}$.

194. $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n \operatorname{tg} 2^{-n}$.

195. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} + \frac{1}{x - 1}\right)$.

196. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \sec x)$.

197. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}\right)$.

198. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x + 1}}{1 - x^2}$.

199. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$.

200. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$.

V. $x \to a$ ёки $x \to \infty$ да $f(x)$ функция асоси 1 га, кўрсаткичи ∞ га интиладиган даража (1^∞) бўлган ҳол.

Бундай функцияларнинг лимитини топишда 2- ажойиб лимитдан фойдаланилади: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, бунда e — иррационал сон бўлиб, $e = 2,7182818\ \ldots$

Лимитларни топинг:

201. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

Δ 1) $n=ax$ деб белгилаш киритсак, $n\to\infty$ да $x\to\infty$ ва

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a=e^a.$$

Бу мисолни бошқача йўл билан ҳам ечиш мумкин:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a=e^a.$$

2) $-2x=\alpha$ десак, $x\to 0$ да $\alpha\to 0$ ва $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}}=(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}})^{-2}=e^{-2}.$$

3) Қасрнинг бутун қисмини ажратиб, $-\dfrac{5}{t+2}=x$ деб олсак, бу ҳолда $t\to\infty$ да $x\to 0$ ва $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}=$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{5}{t+2}\right)^{2t+1}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{10}{x}-3}=(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})^{-10}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}(1+x)^{-3}=e^{-10}\cdot 1=e^{-10}.$$

4) $\operatorname{tg}x=1+\alpha$ деб белгилаб, $x\to\dfrac{\pi}{4}$ да $\alpha\to 0$ га эга бўламиз ва

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=-\frac{2(1+\alpha)}{\alpha(\alpha+2)};$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=\lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\frac{2(1+\alpha)}{\alpha+2}}=e^{-1}=\frac{1}{e},$$

чунки $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{2(1+\alpha)}{\alpha+2} = 1.$ ▲

Қуйидаги лимитларни топинг:

202. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x.$

203. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x.$

204. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}.$

205. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x.$

206. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}.$

207. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{-x}.$

208. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$

209. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$

Баъзи бир ажойиб лимитлар:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu.$

Шулардан фойдаланиб, қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

210. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}.$

211. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}.$

212. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}.$

213. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right).$

214. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+kx)}{x}$.

215. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

216. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

217. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

218. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

11- §. УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР. ФУНКЦИЯЛАРНИНГ УЗИЛИШ НУҚТАЛАРИ

1. Агар $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ тенглик ўринли бўлса, функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

2. Аргументнинг x ва x_0 қийматлари орасидаги $x-x_0$ айирма аргументнинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади ва $\Delta x=x-x_0$ орқали белгиланади. Функциянинг $x=x_0+\Delta x$ ва x_0 нуқталардаги қийматларининг $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ айирмаси эса функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади ва $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ орқали белгиланади.

Узлуксизликнинг таърифини яна қуйидагича ифодалаш мумкин:

Агар $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$

тенглик ўринли бўлса, функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Теорема. *$f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши учун*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$$

қўш тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар қўш тенглик бирор жойидан бузилса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг узилиш нуқтаси дейилади.

$x=x_0$ функциянинг узилиш нуқтаси бўлсин. Агар $f(x_0-0)$ ва $f(x_0+0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ ни $f(x_0-0)$ билан, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ ни $f(x_0+0)$ билан белгилаш мумкин) бир томонли чекли лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $x=x_0$ функциянинг 1- тур узилиш нуқтаси дейилади. Узилиш нуқтасининг бундан бошқа барча ҳоллари 2- тур узилиш нуқталари дейилади.

1- тур узилиш нуқталари икки хил бўлади:

а) агар $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $x=x_0$ да функциянинг узлуксизлигини тиклаш мумкин.

Бунинг учун $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$ деб олиш керак.

б) Агар $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x=x_0$ да сакрашга эга дейилади. Сакраш катталиги $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ га тенг бўлади.

Агар $f(x)$ функция $(a;\ b)$ интервалнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция (a, b) интервалда узлуксиз дейилади.

Агар $f(x)$ функция $(a;\ b)$ интервалда узлуксиз бўлиб, a нуқтанинг ўнг томонидан, b нуқтанинг чап томонидан узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a;\ b]$ сегментда узлуксиз дейилади.

Барча элементар функциялар ўзларининг аниқланиш соҳаларида узлуксиздир.

219. Элементар функциялар

1) $y=1-3x^2$, 2) $v=\operatorname{cosec} x$

нинг ўзларининг аниқланиш соҳаларида узлуксиз эканини кўрсатинг.

Δ Аввал функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топамиз, сўнгра узлуксизликнинг таърифидан фойдаланиб, ўша соҳада функциянинг узлуксизлигини кўрсатамиз.

1) Функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y)=(-\infty;\ \infty)$; $\forall x\in(-\infty;\ \infty)$ ни оламиз ва унга $\Delta x\ (\Delta x\gtrless 0)$ орттирма бериб, функциянинг x нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=1-3(x+\Delta x)^2-(1-3x^2)=$$
$$=1-3x^2-6x\Delta x-3(\Delta x)^2-1+3x^2=-6x\Delta x-3(\Delta x)^2.$$

Энди $\Delta x\to 0$ бўлсин, у ҳолда x нинг ҳар қандай қийматида $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ бўлади.

Демак, узлуксизликнинг таърифига кўра берилган функция $(-\infty;\ \infty)$ да узлуксиз бўлади.

2) $v=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$ функция сонлар ўқининг $x=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ лардан бошқа ҳамма нуқталарида аниқланган. Худди юқоридагидек муҳокама юритиб, функция орттирмаси Δv ни, сўнгра $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v$ ни топамиз:

$$\Delta v=\operatorname{cosec}(x+\Delta x)-\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin(x+\Delta x)}-\frac{1}{\sin x}=$$

$$= \frac{\sin x - \sin(x + \Delta x)}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\cos x}{\sin^2 x} \cdot 0 = 0, \text{ бунда } x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Демак, $v = \operatorname{cosec} x$ элементар функциянинг узлуксизлик соҳаси билан аниқланиш соҳаси бир хил экан. ▲

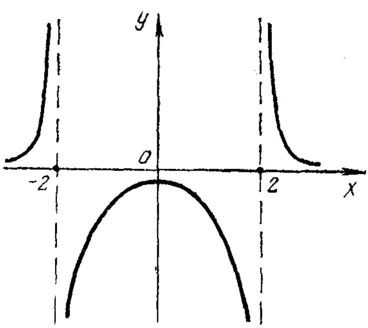
Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг, узилиш нуқталари ва уларнинг турларини аниқланг. Графикларини ясанг.

220. 1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$; 2) $\varphi(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$;

3) $\psi(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$; 4) $F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & \text{агар } x \leqslant 2, \\ x, & \text{агар } x > 2; \end{cases}$

5) $\Phi(x) = \begin{cases} 2x + 5, & \text{агар } -\infty < x < -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{агар } -1 \leqslant x < \infty. \end{cases}$

△ 1) $f(x)$ функция сонлар ўқининг $x = \pm 2$ дан бошқа ҳамма нуқталарида аниқланган. Бу функция элементар функция бўлгани учун у ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиздир. $f(x)$ функция $x_{1,2} = \pm 2$ нуқталарда аниқланмаган, шунинг учун $x_{1,2}$ ни узилишга текширамиз.



15- чизма

а) $x_1 = -2$. $f(-2 - 0) = \lim_{x \to -2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty$, демак, $x_1 = -2$ нуқтада функция 2- тур узилишга эга. б) $x_2 = 2$. $f(2 - 0) = \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$, бу ҳолда ҳам 2- тур узилиш мавжуд.

Эслатма. Функцияни узилишга текширганда $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ лардан бири $+\infty$ ёки $-\infty$ чиқса, иккинчисини текширмаса ҳам бўлади, лекин функция графигини чизишда ҳар иккаласини ҳисоблаш фойдадан ҳоли бўлмайди.

$f(x)$ функциянинг графиги 15- чизмада тасвирланган.

2) $\varphi(x)$ функция элементар бўлиб, у сонлар ўқининг $x=2$ дан бошқа ҳамма нуқталарида аниқланган. Демак, $x=2$ нуқтада функция узилишга эга. Узилиш характерини текширамиз:

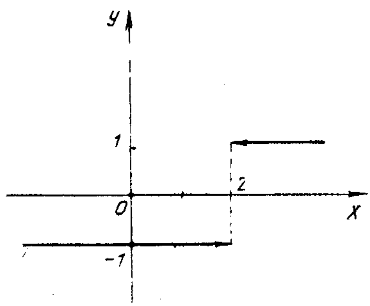
$$\varphi(2-0)=\lim_{x\to 2-0}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1,$$

$$\varphi=(2+0)=\lim_{x\to 2+0}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}=1.$$

Демак, $\varphi(x)$ функция $x=2$ нуқтада 1- тур узилишнинг сакрашга эга бўлган ҳоли юз беради. Сакраш катталиги

$w=|\varphi(2+0)-\varphi(2-$
$-0)|=|1-(-1)|=2;$

юқоридаги функциянинг графиги 16- чизмада тасвирланган.



16- чизма

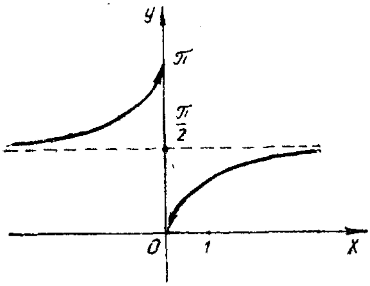
3) $\psi(x)$ функция сонлар ўқининг $x=0$ нуқтасидан бошқа ҳамма нуқталарида аниқланган элементар функция. Шунинг учун сонлар ўқининг O нуқтасидан бошқа ҳамма нуқталарида узлуксиз ва $x=O$ нуқтада функция узилишга эга. Узилиш характерини текширамиз:

$$\psi(0-0)=\lim_{x\to -0}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,ctg}(-\infty)=\pi,$$

$$\psi(0+0)=\lim_{x\to +0}\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,ctg}(+\infty)=0.$$

Демак, $x=0$ да 1- тур узилишнинг сакрашга эга бўлган ҳоли. Сакраш катталиги $w=|\psi(0+0)-\psi(0-0)|=\pi$. $\psi(x)$ функциянинг графиги 17- чизмада тасвирланган.

4) $F(x)$ функция сонлар ўқининг ҳамма нуқталарида аниқланган, лекин бундан у узлуксиз ҳам деган маъно келиб чиқмайди, чунки $F(x)$ функция 2 та ҳар хил формулалар ёрдамида берилган ноэлементар функциядир. Бу функция унинг аналитик ифодасининг ўзгарган нуқтаси



17- чизма

$x = 2$ да узилишга эга бўлиши мумкин. $x = 2$ нуқтада $F(x)$ функцияни текширамиз.

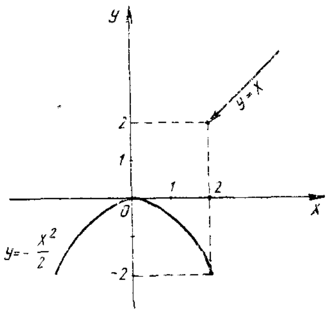
$F(2-0) = \lim\limits_{x\to 2}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -2$, $F(2+0) = \lim\limits_{x\to 2} x = 2$, чунки икки нуқтанинг чап томонида $F(x) = -\frac{1}{2}x^2$, ўнг томонида $F(x) = x$.

Демак, $x = 2$ нуқтада 1-тур узилишнинг сакрашга эга бўлган ҳоли юз беради ва

$$\omega = |F(2+0) - F(2-0)| = |2-(-2)| = 4.$$

$F(x)$ функция $x = 2$ нуқтадан бошқа ҳамма нуқталарда узлуксиздир, чунки уни ташкил этган иккита функция элементар узлуксиз функциялардир.

$F(x)$ функциянинг графиги 18-чизмада тасвирланган.



18- чизма

5) Элементар бўлмаган $\Phi(x)$ функция сонлар ўқининг $x=0$ нуқтасидан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. Демак, $\Phi(x)$ функция $x = 0$ нуқтада узилишга эга.

$x = 0$ нуқтада узилиш характерини текширамиз:

$$\Phi(0-0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \Phi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = -\infty.$$

Демак, $\Phi(x)$ функция $x = 0$ нуқтада 2-тур узилишга эга. $\Phi(x)$ функция аналитик ифодасининг ўзгарган нуқтаси $x = -1$ нуқтани текширамиз. Бу нуқтада функция узилишга эга бўлиши мумкин.

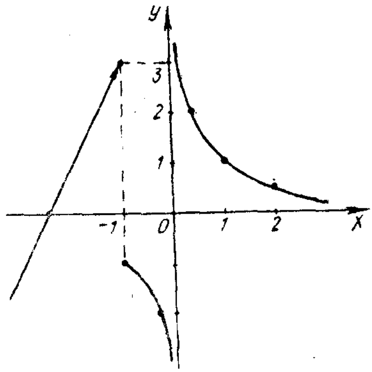
$$\Phi(-1-0) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \Phi(x) = \lim_{x\to -1}(2x+5) = 3,$$

$$\Phi(-1+0)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\Phi(x)=$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x}=-1.$$

Шундай қилиб, $\Phi(x)$ функция $x=-1$ нуқтада 1-тур узилишнинг сакрашга эга бўлган ҳолига эга ва сакраш катталиги

$$w=|\Phi(-1+0)-$$
$$-\Phi(-1-0)|=4.$$

Сон ўқининг бошқа нуқталарида берилган функция узлуксиз. Унинг графиги 19-чизмада кўрсатилган. ▲



19- чизма

Таърифга биноан қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини исботланг:

221. $f(x)=x^2-x+2,$ барча $x\in(-\infty;\ \infty)$ ларда.

222. $f(x)=\sin 2x,$ барча $x\in(-\infty;\ \infty)$ ларда.

223. $f(x)=\dfrac{1}{x-2},$ барча $x\in(2;\ \infty)$ ларда.

224. $f(x)=\sqrt{x},$ барча $x\in[0;\ \infty)$ ларда.

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталари ва уларнинг турларини аниқланг. Графикларини ясанг.

225.
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 2, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

226.
$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{агар } -1\leqslant x\leqslant 1 \text{ бўлса,}\\ 1-x, & \text{агар } 1<x<2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

227.
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{агар } x\neq 1 \text{ бўлса,}\\ 3, & \text{агар } x=1 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

228.
$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{агар } x<1 \text{ бўлса,}\\ x, & \text{агар } 1\leqslant x<2 \text{ бўлса,}\\ 3, & \text{агар } 2\leqslant x<4 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

229. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}.$ **230.** $f(x)=\dfrac{|x|}{x}.$

231. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+1}.$ **232.** $f(x)=\dfrac{4}{4-x^2}.$

II боб. КОМПЛЕКС СОНЛАР

I-§. КОМПЛЕКС СОНЛАР ВА УЛАР УСТИДА АРИФМЕТИК ТЎРТ АМАЛ

Комплекс сон деб $a+bi$ ифодага айтилади, бу ерда a ва b ҳақиқий сонлар, i — мавҳум бирлик бўлиб, у

$$i=\sqrt{-1} \quad \text{ёки} \quad i^2=-1$$

тенгликлар билан аниқланади; a — комплекс сонниг ҳақиқий қисми, bi — мавҳум қисми дейилади. Фақат мавҳум қисмининг ишораси билан фарқ қиладиган икки комплекс сон: $a+bi$ ва $a-bi$ ўзаро *қўшма* дейилади. Кўпинча $a+bi$ комплекс сон битта α ҳарфи билан белгиланади.

$$\alpha=a+bi.$$

$a+bi$ комплекс сонниг ҳақиқий қисмини $a=\mathrm{Re}\,\alpha$ билан, мавҳум қисмининг коэффициентини $b=\mathrm{Lm}\,\alpha$ билан белгилайдилар. α комплекс сонниг $a+bi$ кўринишидаги ёзувига унинг алгебраик шакли дейилади.

1. Агар иккита $\alpha_1=a_1+b_1i$ ва $\alpha_2=a_2+b_2i$ комплекс сонда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ бўлса, бу икки комплекс сон тенг дейилади ($\alpha_1=\alpha_2$). Агар $\alpha=a+bi$ комплекс сонда $a=0$, $b=0$ бўлса, бу комплекс сон 0 га ($\alpha=0$) тенг бўлади. Агар $\alpha=a+bi$ комплекс сонда $b=0$ бўлса, ҳақиқий сон ҳосил бўлади: $a+0\cdot i=a$; агар $a=0$ бўлса, $0+bi=bi$ соф мавҳум сон дейилади.

2. $\alpha_1=a_1+b_1i$ ва $\alpha_2=a_2+b_2i$ комплекс сонларнинг йиғиндиси деб ҳақиқий қисми қўшилувчи комплекс сонлар ҳақиқий қисмларининг йиғиндисига, мавҳум қисми уларнинг мавҳум қисмларининг йиғиндисига тенг бўлган α комплекс сонга айтилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\alpha=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i. \tag{1}$$

Комплекс сонларни қўшиш қуйидаги хоссаларга эга:
1) ассоциативлик: $(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)$;
2) коммутативлик: $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1$.
$-a-bi$ комплекс сон $a+bi$ комплекс сонга қарама-қарши сон дейилади. α комплекс сонга қарама-қарши комплекс сон $-\alpha$ деб ёзилади.

3. $\alpha_1=a_1+b_1i$ комплекс сондан $\alpha_2=a_2+b_2i$ комплекс сонниг айирмаси деб α_1 билан α_2 га қарама-қарши бўлган $-\alpha_2$ сонларнинг йиғиндисидан иборат бўлган комплекс сонга айтилади:

$$\alpha = \alpha_1 + (-\alpha_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i. \qquad (2)$$

4. $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ ва $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ комплекс сонларнинг кўпайтмаси деб

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i \qquad (3)$$

комплекс сонга айтилади.

Комплекс сонларни кўпайтирганда $i^2 = -1$, $i^3 = (-1) \times \times i = -i$, $i^4 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = 1 \cdot i$ ва ҳоказо, умуман k бутун бўлганда $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ эканлигини эътиборга олиш керак.

Комплекс сонларни кўпайтириш қуйидаги хоссаларга эга:

1) ассоциативлик: $(\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot \alpha_3 = \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot \alpha_3)$,

2) коммутативлик: $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \alpha_1$.

5. α_1 комплекс соннинг $\alpha_2\, (\alpha_2 \neq 0)$ комплекс сонга бўлинмаси деб $\alpha_1 = \alpha \cdot \alpha_2$ тенгликни қаноатлантирадиган α комплекс сонга айтилади ва у қуйидаги формула билан топилади:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i. \qquad (4)$$

Комплекс сонлар учун қўшиш ва кўпайтиришга кўра дистрибутивлик хоссаси ўринлидир: $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \alpha_3 = \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3$.

6. Қўшма комплекс сонлар қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\alpha = a + bi$ ва $\bar{\alpha} = a - bi$ комплекс сонларнинг кўпайтмаси ҳақиқий сонни беради:

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2) Агар $\bar{\alpha}$ сон α комплекс сонга қўшма бўлса, у ҳолда $\bar{\alpha}$ комплекс сонга қўшма комплекс сон α сонни беради:

$$\overline{(\bar{\alpha})} = \alpha.$$

3) Агар $\bar{\alpha}_1$ сон α_1 комплекс сонга, $\bar{\alpha}_2$ сон α_2 комплекс сонга қўшма бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \overline{(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 = \overline{(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 = \overline{(\alpha_1 \cdot \alpha_2)}, \quad \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} = \overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}, \quad \alpha_2 \neq 0.$$

4) $\alpha = a + bi$, $\bar{\alpha} = a - bi$ қўшма комплекс сонлар учун

$$a = \mathrm{Re}\,\alpha = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}, \quad b = \mathrm{Lm}\,\alpha = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$$

ўринли бўлади.

233. $\alpha_1 = -3 + 2i$ ва $\alpha_2 = 13 - i$ комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг.

$\triangle$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = (-3 + 2i) + (13 - i) = 10 + i,$$
$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (-3 + 2i)(13 - i) = -39 + 3i + $$
$$+ 26i + 2 = -37 + 29i. \ \blacktriangle$$

234. $\alpha_1 = a + bi$ ва $\alpha_2 = -a - bi$ комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг.

$\triangle$ $\alpha_1 + \alpha_2 = (a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)\,i = 0,$
$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a + bi)(-a - bi) = -a^2 - abi - abi - b^2 i^2 =$
$= -a^2 + b^2 - 2abi = b^2 - a^2 - 2abi.$ $\blacktriangle$

235. $\alpha_1 = -3 + 2i$ ва $\alpha_2 = 13 - i$ комплекс сонлар берилган. $\alpha_2 - \alpha_1$ айирма ва $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ бўлинмани топинг.

$\triangle$
$$\alpha_2 - \alpha_1 = (13 - i) - (-3 + 2i) = 16 - 3i,$$
$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{13 - i}{-3 + 2i} = \frac{(13 - i)(-3 - 2i)}{(-3 + 2i)(-3 - 2i)} =$$
$$= \frac{-39 - 26i + 3i - 2}{9 + 4} = \frac{-41}{13} - \frac{23}{13}\,i,$$

бунда касрнинг сурат ва махражини қўшма комплекс сонига кўпайтирилди, чунки (4) формулани эсда сақлаш қийин. $\blacktriangle$

236. $\alpha = \dfrac{3 + i}{(1 + i)(1 - 2i)}$ комплекс сонни алгебраик кўринишда ёзинг.

$\triangle$
$$\alpha = \frac{3 + i}{(1 + i)(1 - 2i)} = \frac{3 + i}{1 - 2i + i + 2} = \frac{3 + i}{3 - i} =$$
$$= \frac{(3 + i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{9 + 6i - 1}{9 + 1} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\,i. \ \blacktriangle$$

Қуйидаги амалларни бажаринг:

237. 1) $(5 + 4i) + (3 - 7i)$;
2) $(2 - 8i) + (5 - i)$;
3) $(2 + 5i) + (-2 - 2i)$;
4) $(4 + 3i) + (-4 + 3i)$;

5) $(2-4i)+(-2+4i)$;
6) $(1+i)+(2+i)+(3+i)$;
7) $(0{,}5-3{,}2i)+(1{,}5-0{,}8i)+(-4-i)$;
8) $(3x-4yi)+(-x+2yi)$.

238. 1) $(5+4i)-(2-3i)$;
2) $(2+i)+(3-6i)-(1-i)$;
3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}i\right)$;
4) $(0{,}8-0{,}2i)+(0{,}1-1{,}3i)-(1{,}5+0{,}7i)-$
$-(2{,}3-0{,}6i)$;
5) $(2a-3bi)+(-a-bi)+(4a+2bi)-$
$-(2a-5bi)$;
6) $(m-ni)+(3m-2ni)-\Big((-m-ni)-$
$-(5m+10ni)\Big)$.

239. 1) $2i\cdot 3i$;
2) $5i\cdot(-4i)$;
3) $(1-i)\cdot(-4)$;
4) $(-3+4i)\cdot 2i$;
5) $(2-3i)(4-i)$;
6) $(1-2i)(5-i)$;
7) $(5+i)(5-i)$;
8) $(3+2i)(3-2i)$;
9) $(0{,}5-i)(0{,}5+i)$.

240. 1) $8i:4$; 5) $\dfrac{5+2i}{1-2i}$;

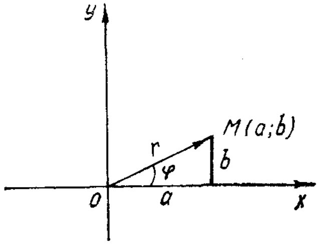
2) $10i:5i$; 6) $\dfrac{7-3i}{1+3i}$;

3) $2i:(-3i)$; 7) $\dfrac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$;

4) $\dfrac{2i}{1-i}$; 8) $\dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}-2i}$.

2-§. КОМПЛЕКС СОННИНГ ГЕОМЕТРИК ТАСВИРИ ВА УНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ШАКЛИ. МУАВР ФОРМУЛАСИ

Ҳар қандай комплекс сон $a+bi$ ни Oxy текисликда координаталари a ва b бўлган $A(a;\ b)$ нуқта шаклида тасвирлаш мумкин (20-чизма) ва аксинча, Oxy текисликдаги ҳар қандай $A(a;\ b)$ нуқтани $a+bi$ комплекс соннинг гео-



20- чизма

метрик образи деб қараш мумкин. Комплекс сонларни текисликда тасвирлаганда Oy ўқ мавҳум, Ox ўқ эса ҳақиқий ўқ деб олинади. Координаталар бошини қутб, Ox ўқнинг мусбат йўналишини қутб ўқи деб олиб, $A(a;\ b)$ нуқтанинг қутб координаталарини φ ва $r\,(r \geqslant 0)$ билан белгилаймиз, у ҳолда

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (5)$$

формулага эга бўламиз, бунда $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \mathrm{Arctg}\,\frac{b}{a}$ бўлиб, r га $a + bi$ комплекс соннинг модули, φ га эса комплекс соннинг аргументи дейилади, $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ га $a + bi$ комплекс соннинг тригонометрик шакли дейилади.

Бурчак φ $\left\{\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$ шартлардан топилади. $a + bi$ комплекс соннинг модулини $|a + bi|$ деб ҳам белгилаш мумкин, у ҳолда $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Одатда бурчак φ нинг $[-2\pi;\ 0]$ ёки $[0;\ 2\pi]$ даги қиймати олинади.

241. 1) $\alpha = -1 - i$; 2) $\beta = -2$;
3) $\gamma = i$; 4) $\lambda = 1 + i$;
5) $\nu = \sqrt{3} - i$

комплекс сонларни тригонометрик кўринишда ёзинг.

Δ 1) $r = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,
$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлгани учун $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ бўлиб, $\alpha = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2) $r = |-2| = 2$, $\sin\varphi = \frac{0}{2} = 0$, $\cos\varphi = \frac{-2}{2} = -1$, демак, $\varphi = \pi$ ва $\beta = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

3) $r = |i| = \sqrt{1^2} = 1$, $\sin\varphi = \frac{1}{1} = 1$, $\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0$, демак, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ва $\gamma = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

4) $r = |1 + i| = \sqrt{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, демак, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

5) $r=|\sqrt{3}-i|=\sqrt{3+1}=2, \ \sin\varphi=-\frac{1}{2},$

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},$

демак, $\varphi=\frac{11\pi}{6}$ ва $v=\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. ▲

242. 1) $\alpha_1=2\cos\frac{7\pi}{4}-2i\sin\frac{\pi}{4}$;

2) $\alpha_2=-\cos\frac{\pi}{17}+i\sin\frac{\pi}{17}$

сонларни тригонометрик кўринишда ифодаланг.

△ 1) α_1 ва 2) α_2 комплекс сонларни тригонометрик кўринишда ёзиш учун уларнинг модуль ва аргументларини топиш шарт эмас.

$$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$-\cos\frac{\pi}{17}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{17}\right)=\cos\frac{16\pi}{17}; \quad \sin\frac{\pi}{17}=$$

$$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{17}\right)=\sin\frac{16\pi}{17}$$

формулалардан фойдалансак, α_1 ва α_2 сонларнинг тригонометрик кўринишига эга бўламиз:

$$\alpha_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$\alpha_2=\cos\frac{16\pi}{17}+i\sin\frac{16\pi}{17}. \ ▲$$

Қуйидаги комплекс сонларни тригонометрик кўринишда ёзинг:

243. 1) 1; 2) $-i$;
3) -2; 4) $2+2\sqrt{3}\,i$;
5) $\sqrt{3}+i$; 6) $12i-5$;
7) $3i$; 8) $-2i$;
9) $3i-4$; 10) $1-i$.

Тригонометрик кўринишда берилган икки комплекс сон кўпайтмаси шундай комплекс сонки, унинг модули кўпайтувчилар модулларининг кўпайтмасига, аргументи эса кўпайтувчилар аргументларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (6)$$

Агар n натурал сон бўлиб, $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ тригонометрик кўринишдаги комплекс сон бўлса, у ҳолда

$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (7)$$

ўринли бўлади. Бунга *Муавр формуласи* дейилади.

Тригонометрик кўринишда берилган икки комплекс сон бўлинмасининг модули бўлинувчи ва бўлувчи модулларининг бўлинмасига тенг бўлиб, бўлинманинг аргументи бўлинувчи ва бўлувчи аргументларининг айирмасига тенгдир, яъни

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \qquad (8)$$

ўринлидир.

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ илдиз қуйидаги формула билан топилади:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \right.$$
$$\left. + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (9)$$

бунда n — натурал сон, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ n-1$.

Икки ҳадли тенгламаларни ечишда (9) формула жуда кўп қўлланилади.

244. $x^4 + 1 = 0$ тенгламанинг барча илдизларини топинг.

Δ Бу тенгламани ечишда (9) формуладан фойдаланамиз.

$$x^4 = -1,\ x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} =$$
$$= \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}.$$

$k = 0$: $x_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$;

$k = 1$: $x_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times$
$\times(-1+i)$;

$k = 2$: $x_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\times$
$\times(1+i)$;

$$k=3: x_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Топилган x_1, x_2, x_3, x_4 ларнинг исталган бирини 4-даражага кўтарсак, -1 ҳосил бўлади.

245. $x^6+64=0$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ $x^6=-64,\quad x=\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64(\cos\pi+i\sin\pi)}=$

$=\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

$x_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i;$

$x_2=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i;\quad x_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=$

$=-\sqrt{3}+i;$

$x_4=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-i;$

$x_5=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2i;$

$x_6=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-i.$ ▲

246. Кўрсатилган амалларни бажаринг:

1) $5(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)\cdot 3(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ);$

2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{100};$

3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8};$

4) $\frac{\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ}{\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ};$

5) $\frac{-\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ}{\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ}.$

$\triangle$ 1) мисолни ечишда (6) формуладан фойдаланамиз:

$5(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)\cdot 3(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ)=$
$=5\cdot 3(\cos(40^\circ+50^\circ)+i\sin(40^\circ+50^\circ))=15(\cos 90^\circ+$
$+i\sin 90^\circ)=15i.$

2) мисолни ечишда аввал $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ни тригонометрик формада ёзиб, сўнгра (7) Муавр формуласидан фойдаланамиз:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos 30^\circ-i\sin 30^\circ=\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ);$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{100}=(\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ))^{100}=\cos(-3000^\circ)+$$
$$+i\sin(-3000^\circ)=\cos 3000^\circ-i\sin 3000^\circ=\cos 120^\circ-$$
$$-i\sin 120^\circ=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) мисолни ҳам худди 2) мисол каби ечамиз:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8=(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)^8=\cos 360^\circ+$$
$$+i\sin 360^\circ=\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ=1+i\cdot 0=1.$$

4) мисолни ечишда (8) формуладан фойдаланамиз:

$$\frac{\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ}{\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ}=\cos(240^\circ-300^\circ)+i\sin(240^\circ-300^\circ)=$$
$$=\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)=\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ=$$
$$=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5) касрнинг сурат ва махражидаги сонни тригонометрик кўринишдаги комплекс сон сифатида ёзиб оламиз:

$$\frac{-\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ}{\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ}=\frac{-\cos(180^\circ-80^\circ)+i\sin(180^\circ-80^\circ)}{\cos(-40^\circ)+i\sin(-40^\circ)}=$$
$$=\frac{\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ}{\cos(-40^\circ)+i\sin(-40^\circ)}=\cos(80^\circ-(-40^\circ))+$$
$$+i\sin(80^\circ-(-40^\circ))=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ=$$
$$=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Қуйидаги амалларни бажаринг:

247. 1) $2(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)\cdot 7(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ)$;

2) $3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\cdot 2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$;

3) $4\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$;

4) $7\left(\cos\frac{8\pi}{15}+i\sin\frac{8\pi}{15}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\times$
$\times 2\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$;

5) $\dfrac{\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ}$;

6) $\dfrac{2(\cos 107^\circ+i\sin 107^\circ)}{5(\cos 47^\circ+i\sin 47^\circ)}$;

7) $\dfrac{\cos 130^\circ - i\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ}$;

8) $\dfrac{\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ}{\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ}$;

9) i^{15};

10) i^{36};

11) $(-i)^{10}$;

12) $(-i)^{21}$.

248. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

1) $x^3 + 1 = 0$;

2) $x^3 + 27 = 0$;

3) $x^3 - 1 = 0$;

4) $8x^3 + 1 = 0$;

5) $x^4 - 16 = 0$;

6) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;

7) $x^5 = i$.

249. Агар x_1, x_2, x_3 сонлар $x^3 - 1 = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликларнинг тўғри эканлигини кўрсатинг:

а) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; б) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1$.

3- §. ЭЙЛЕР ФОРМУЛАСИ. КОМПЛЕКС СОННИНГ КЎРСАТКИЧЛИ ШАКЛИ

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad (1)$$

Эйлер формуласи дейилади, бунда $e = 2{,}71828\ldots$, — ҳақиқий, i — мавҳум сонлар. (1) да y ни $-y$ билан алмаштирсак,

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y \qquad (2)$$

га эга бўламиз.

(1) ва (2) дан:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \qquad (3)$$

ҳосил бўлади.

Комплекс сонни кўрсаткичли шаклда ёзиш учун уни аввал тригонометрик шаклда ёзиб оламиз, сўнгра Эйлер формуласидан фойдаланамиз:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi = re^{i\varphi}. \qquad (4)$$

250. 1, i, -2, $1 + i$, $\sqrt{3} - i$ сонларни кўрсаткичли шаклда ифодаланг.

$\triangle$ $1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=e^{2k\pi i}$; $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=$

$$=e^{\frac{\pi}{2}i};\quad -2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{\pi i};$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i};$$

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)=2e^{\frac{11\pi}{6}i}. \blacktriangle$$

251. Қуйидаги сонларни кўрсаткичли шаклда ифодаланг:

1) $-i$; 2) $\sqrt{3}+i$;
3) $2+2\sqrt{3}\,i$; 4) $-2i$;
5) $3i$; 6) 2.

III боб. БИР АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1- §. ҲОСИЛА ТУШУНЧАСИ

1. $y=f(x)$ функция X тўпламда берилган ва $x\in X$ бўлсин. x аргументга Δx ($\Delta x>0$ ёки $\Delta x<0$) орттирма берамиз ҳамда $y=f(x)$ функциянинг x нуқтадаги орттирмаси $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ ни топамиз.

$y=f(x)$ функция орттирмаси Δy нинг мос аргумент орттирмаси Δx га бўлган нисбатининг $\Delta x\to 0$ даги лимитига унинг x нуқтадаги ҳосиласи дейилади ва y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ лардан бири билан белгиланади.

2. Функция ҳосиласини топиш қоидаси.

$y=f(x)$ функция ҳосиласини топиш учун қуйидаги ишларни бажариш керак: 1) $f(x)$ функциянинг $(x+\Delta x)$ даги қиймати $f(x+\Delta x)$ ни топамиз;

2) функциянинг кейинги қиймати $f(x+\Delta x)$ дан унинг олдинги қиймати $f(x)$ ни айириб, функция орттирмаси Δy ни топамиз:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

3) функция орттирмаси Δy ни аргумент орттирмаси Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

4) $\Delta x\to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимитини излаймиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

3. Бир томонли ҳосилалар.

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

лар мос равишда $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилалари дейилади.

$f(x)$ функция x нуқтада ҳосилага эга бўлиши учун $f'_+(x)=f'_-(x)$ нинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Функция ҳосиласини топиш амалига функцияни дифференциаллаш дейилади.

4. Дифференциаллашнинг асосий қоидалари.

Агар C — ўзгармас ва $u(x)$, $v(x)$ дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда

1) $(C)' = 0.$
2) $(x)' = 1.$
3) $(C \cdot u)' = C \cdot u'.$
4) $(u \pm v)' = u' \pm v'.$
5) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$
6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' u}{v^2}.$
7) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}.$

5. Мураккаб функция ҳосиласи: $y'_x = y'_u \cdot u'_x.$

6. Тескари функция ҳосиласи: $y'_x = \frac{1}{x'_y}.$

7. Дифференциаллашнинг асосий формулалари:

1) $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'.$
2) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; $\quad (e^u)' = e^u \cdot u'.$
3) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$; $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$
4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$
5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$
6) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$
7) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$
8) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
9) $(\arccos u)' = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$
10) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$
11) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$
12) $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$
13) $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'.$
14) $(\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}.$
15) $(\operatorname{cth} u)' = \frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}.$

16) $(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$.

252. 1) $y = \sqrt[3]{x}$ функция, $x = 0$ ва $\Delta x = 0{,}001$ берилган. Δy ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни топинг.

2) $y = \sqrt{x}$ функция, $x = 0$ ва $\Delta x = 0{,}0001$ берилган. Δy ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни топинг.

3) $y = \lg x$ функция, $x = 100000$ ва $\Delta x = -90000$ берилган. Δy ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни топинг.

$\triangle$ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ дан фойдаланамиз:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}$;

$x = 0$ ва $\Delta x = 0{,}001$ учун $\Delta y = \sqrt[3]{0 + 0{,}001} - \sqrt[3]{0} = 0{,}1$;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}1}{0{,}001} = \frac{1}{0{,}01} = 100$ бўлади.

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$; $x = 0$, $\Delta x = 0{,}0001$ учун $\Delta y = \sqrt{0 + 0{,}0001} - 0 = 0{,}01$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}01}{0{,}0001} = 100$ бўлади.

3) $f(x) = \lg x$; $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \lg(x + \Delta x) - \lg x$; $x = 100000$ ва $\Delta x = -90000$ учун

$\Delta y = \lg(100000 - 90000) - \lg 100000 = \lg 10000 - \lg 100000 = 4 - 5 = -1$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{-90000} = \frac{1}{90000}$ бўлади. $\blacktriangle$

253. Таърифдан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

1) $y = 5x^2 - 3x$; 2) $y = -\frac{1}{x}$;

3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sin 3x$.

$\triangle$ 1) $y = f(x) = 5x^2 - 3x$; а) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 5(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (5x^2 - 3x) = 5x^2 + 10x \cdot \Delta x + 5 \cdot (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 5x^2 + 3x = 10x \cdot \Delta x + 5(\Delta x)^2 - 3\Delta x$;

б) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10x \cdot \Delta x + 5(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = 10x + 5\Delta x - 3$;

в) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (10x + 5 \cdot \Delta x - 3) = 10x - 3$.

Демак, $\frac{dy}{dx}=10x-3$.

2) $y=f(x)=-\frac{1}{x}$; а) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=$

$$=\frac{1}{x+\Delta x}-\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x+\Delta x}+\frac{1}{x}=\frac{-x+x+\Delta x}{x(x+\Delta x)}=$$

$$=\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)};\quad \text{б)}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}:\Delta x=\frac{1}{x(x+\Delta x)};$$

в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x(x+\Delta x)}=\frac{1}{x^2}$,

демак, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}$.

3) $y=f(x)=\sqrt{x}$; а) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=$

$$=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x},\quad \text{б)}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x};\quad \text{в)}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad \text{демак,}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4) $y=f(x)=\sin 3x$; а) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=$

$$=\sin 3(x+\Delta x)-\sin 3x=2\cos\frac{3x+3\Delta x+3x}{2}\times$$

$$\times\sin\frac{3x+3\Delta x-3x}{2}=2\cos\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\cdot\sin\frac{3\Delta x}{2};$$

$$\text{б)}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x};$$

$$\text{в)}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}2\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\frac{3\Delta x}{2}}\cdot\frac{3}{2}=3\cos 3x,$$

демак, $\frac{dy}{dx}=3\cos 3x$. ▲

Бевосита таърифдан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

254. 1) $y=x^2+3x-2$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$;

3) $y=\sqrt{4x+1}$; 4) $y=\cos 2x$;

5) $y=\operatorname{tg} 2x$; 6) $y=\frac{1}{x}$;

7) $y=x^3$; 8) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

255. $y=|x|$ функциянинг $x=0$ да бир томонли ҳосилаларини топинг. Бу функция $x=0$ да ҳосилага эгами?

△ $f(x)=|x|$; $f'_+(x)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, $f'_-(x)=$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

$$f'_+(0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Демак, $y=|x|$ функция $x=0$ нуқтада бир томонли ҳосилаларга эга, лекин $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ бўлгани учун бу функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас.

256. $y=|2x-1|$ функция $x=\frac{1}{2}$ нуқтада ҳосилага эгами? Текширинг.

257. $y=|\ln x|$ функциянинг $x=1$ да бир томонли ҳосилаларини топинг.

258. $y=\frac{x^3}{3}-1$ функциянинг $x=2$ нуқтада бир томонли ҳосилаларини топинг.

259. Дифференциаллашнинг қоида ва формулаларидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

1) $y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}$;

2) $z=x^5\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)$;

3) $\varphi(t)=\frac{10}{a\sin t-b\cos t}$;

4) $y=(1+5x)^3$;

5) $y=\cos^2 x$;

6) $y=\sin x^2$;

7) $y=\sqrt[3]{2+x^4}$;

8) $y=\arcsin\frac{2x}{x+1}$.

△ 1) Қаср ва манфий кўрсаткични киритиб, берилган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз: $y=x^{\frac{1}{2}}+5\cdot x^{-\frac{1}{3}}-x^{-2}+$ $+\frac{1}{3}\cdot x^{-3}$. Дифференциаллашнинг асосий формулаларини қўллаб, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}-(-2)\,x^{-3}+\frac{1}{3}(-3)x^{-4}=$ $=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}$ га эга бўламиз.

2) 1-усул. Дифференциаллаш формуласидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$z'=(x^5)'\cdot\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)'\cdot x^5=$$
$$=5x^4\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+x^5\left(-\frac{1}{3}+6x\right)=$$
$$=10x^4-2x^5+21x^6.$$

2-усул. Аввал қавсларни очиб, сўнгра йиғиндидан ҳосила оламиз: $z=2x^5-\frac{x^6}{3}+3x^7$; $z'=10x^4-2x^5+21x^6$.

Кўриниб турибдики, 2-усул натижага тезроқ олиб келди. Шунинг учун функциялардан ҳосила олганда натижага тезроқ эриштирадиган йўлларни излаш керак.

3) $\varphi'(t)=\left(\frac{10}{a\sin t-b\cos t}\right)'=-\frac{10\,(a\sin t-b\cos t)'}{(a\sin t-b\cos t)^2}=$
$=-\frac{10\,(a\cos t+b\sin t)}{(a\sin t-b\cos t)^2}$.

Бундан кейинги (4 — 8) мисолларни ечишда мураккаб функция ҳосиласининг формуласидан фойдаланамиз.

4) $y=u^3$, $u=1+5x$ десак, у ҳолда $\frac{dy}{du}=3u^2$, $\frac{du}{dx}=5$;
$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot 5=15\,(1+5x)^2$.

5) $\cos x=u$ деб, дифференциаллаш формулаларини қўлласак, қуйидагига эга бўламиз:

$y' = (\cos^2 x)' = (u^2)' = 2u\cdot u' = 2\cos x\cdot(-\sin x) = -\sin 2x.$

6) $x^2 = u$ деб, дифференциаллаш формулаларига кўра $(\sin x^2)' = (\sin u)' = \cos u\cdot u' = \cos x^2\cdot 2x = 2x\cdot\cos x^2$ га эга бўламиз.

7) $2 + x^4 = u$ деб, дифференциаллаш формуласига кўра

$$(\sqrt[3]{2+x^4})' = (\sqrt[3]{u})' = \left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot u' = \frac{1}{3}(2+x^4)^{-\frac{2}{3}}\times$$

$$\times 4x^3 = \frac{4x^3}{3\cdot\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}$$ га эга бўламиз.

8) $\frac{2x}{x+1} = u$ деб, дифференциаллаш формуласига кўра

$$\left(\arcsin\frac{2x}{x+1}\right)' = (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2}}\times$$

$$\times\frac{2((x+1)-x)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(1+x)\sqrt{1+2x-3x^2}}$$ ҳосил бўлади. ▲

260. $f(t) = \frac{t^2-5t-1}{t^3}$ берилган. $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)$ ларни топинг.

$$\triangle\ f(-1) = \frac{(-1)^2-5(-1)-1}{(-1)^3} = \frac{1+5-1}{-1} = -5;\ f'(t) =$$

$$= \left(\frac{t^2-5t-1}{t^3}\right)' = (t^{-1} - 5t^{-2} - t^{-3})' = -\frac{1}{t^2} + \frac{10}{t^3} + \frac{3}{t^4} =$$

$$= \frac{3+10t-t^2}{t^4};\ f'(-1) = \frac{3+10(-1)-(-1)^2}{(-1)^4} = \frac{-8}{1} = -8;$$

$$f'(2) = \frac{3+10\cdot 2-2^2}{2^4} = \frac{3+20-4}{16} = \frac{19}{16} = 1\frac{3}{16};$$

$$f'\left(\frac{1}{a}\right) = -a^2 + 10\cdot a^3 + 3a^4 = a^2(3a^2+10a-1).\ ▲$$

Дифференциаллашнинг асосий қоида ва формулаларидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

261. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3.$

262. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{-3}.$

263. $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+x^2-0{,}5x^4$.

264. $y=\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$.

265. $y=\frac{2x+3}{x^2-5x+5}$.

266. $y=\frac{a+bx}{c+dx}$.

267. $y=5\sin x-\cos x$.

268. $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

269. $y=x\cdot\operatorname{ctg}x$.

270. $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

271. $y=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x$.

272. $y=\frac{(1+x^2)\operatorname{arctg}x-x}{2}$.

273. $y=x^7\cdot e^x$.

274. $y=e^x\cdot\cos x$.

275. $y=\frac{x^2}{\ln x}$.

276. $y=\frac{1}{x}+2\ln x-\frac{\ln x}{x}$.

277. $y=\ln x\cdot\lg x-\ln a\cdot\log_a x$.

278. $y=x\cdot\operatorname{sh}x$.

279. $y=\frac{x^2}{\operatorname{ch}x}$.

280. $y=\operatorname{th}x-x$.

281. $y=\frac{3\operatorname{cth}x}{\ln x}$.

282. $y=(x^2+1)^{10}$.

283. $y=\sqrt[3]{ax^2+bx+c}$.

284. $y=e^{-x}$.

285. $y=\sin 3x$.

286. $y=\operatorname{tg}5x$.

287. а) $y = \ln \operatorname{tg} x$;

б)* $y = 4^{\cos x}$.

288. $y = \sin(x^2 + 5x + 1)$.

289. $y = \cos^4 x$.

290. $y = \ln(x^2 + 3x + 4)$.

291. $y = \operatorname{tg}(x^2 + 1)$.

292. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

293. $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x}$.

294. $y = \ln(1 + \sqrt{x})$.

295. $y = \cos(\ln x)$.

296. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x}$. y' ни топинг.

△ $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ ни u деб қараб, $y' = \frac{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})'}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$ га эга бўламиз, $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})'$ да эса $\sqrt{x}$ ни v деб қараб, ҳосила оламиз: $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{1+x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

Топилган бу қийматни y' га қўйиб, пировард натижада

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$$

ни ҳосил қиламиз. ▲

297. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

298. $y = 4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}$.

299. $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$.

300. $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \cos^2 2x$.

301. $y = \frac{x^3 (x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$ берилган. y' ни топинг.

△ Берилган тенгликнинг икки томонини логарифмлаймиз, сўнгра ҳосил бўлган ифодани дифференциаллаймиз, натижада куйидагига эга бўламиз (бундай услуб логарифмик ҳосила олиш услуби дейилади):

$$\ln y = 3\ln x + 4\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1) =$$

$$= \frac{5}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1) + 4\ln(x^2+1);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \Leftrightarrow y' =$$

$$= y\left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1}\right) = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \times$$

$$\times\left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1}\right). \blacktriangle$$

302. $y = (\operatorname{ctg} x)^{x^3}$ берилган. y' ни топинг.

Δ Логарифмик ҳосила олиш услубидан фойдаланамиз:

$$\ln y = x^3\cdot\ln\operatorname{ctg} x;\ \frac{y'}{y} = -x^3\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg} x\cdot\sin^2 x} + 3x^2\ln\operatorname{ctg} x =$$

$$= 3x^2\ln\operatorname{ctg} x - \frac{x^3}{\sin x\cdot\cos x};\ y' = (\operatorname{ctg} x)^{x^3}\times$$

$$\times\left(3x^2\ln\operatorname{ctg} x - \frac{x^3}{\sin x\cdot\cos x}\right). \blacktriangle$$

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

303. $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}}$.

304. $y = x^6(x^2+1)^{10}\cdot(x^3+1)^5$.

305. $y = x^x$.

306. $y = x^{\sin x}$.

307. $y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$.

308. $y = (\ln x)^x + x^{\ln x}$.

309. а) $y = x|x|$; б) $y = \ln|x|$.

310. $y = \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

2- §. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАЛАР

1. $y=f(x)$ функция ҳосиласи y' нинг ҳосиласи берилган $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи дейилади ва y'' ёки $\frac{d^2y}{dx^2}$ каби белгиланади. Умуман, $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=$ $=(f^{(n-1)}(x))'$ $(n=2, 3, 4, \ldots)$.

2. Агар $u(x)$ ва $v(x)$ n марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда $(c_1u+c_2v)^{(n)}=c_1u^{(n)}+c_2\cdot v^{(n)}$ бўлиб, $(u\cdot v)^{(n)}=v\cdot u^{(n)}+nu^{(n-1)}\cdot v'+\frac{n(n-1)}{2}\cdot u^{(n-2)}v'+\ldots+$

$$+u\cdot v^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}$$

(Лейбниц формуласи) орқали ифодаланади. Бунда $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$,

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Асосий формулалар:

1) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a,\ a>0;\ (e^x)^{(n)}=e^x.$

2) $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)\ x^{m-n}.$

3) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}.$

4) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ n\in N.$

5) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ n\in N.$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибли ҳосилаларини топинг:

311. $y=x^5+2x^4+6x^3+5x^2+1,\quad y^{(5)}=?$

312. $y=\sqrt{x},\quad y^{(4)}=?$

313. $y=x^2\cdot\sin 2x,\quad y^{(3)}=?$

314. $y=\arcsin x,\quad y^{(2)}=?$

315. $y=\frac{x^2+1}{x-1},\quad y^{(2)}=?$

316. $y = 2x^3 + x + 6, \quad y^{(4)} = ?$

317. $y = \ln(ax + b), \quad y^{(n)} = ?$

318. $y = \operatorname{sh} x, \quad y^{(n)} = ?$

319. $y = \sin^2 x, \; y^{(n)} = ?$

320. $y = \frac{1+x}{1-x}, \; y^{(n)} = ?$

321. $f(x) = (2x - 3)^5$ берилган, $f'''(3) = ?$

322. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$ функциянинг $1 + y'^2 = 2yy''$ дифференциал тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

323. $y = \frac{1}{2} x^2 e^x$ функциянинг $y'' - 2y' + y = e^x$ дифференциал тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

324. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ функция ўзгармас c_1 ва c_2 ларнинг ихтиёрий қийматларида $y'' + 3y' + 2y = 0$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

325. Лейбниц формуласидан фойдаланиб, $y^{(n)}$ ни топинг

1) $y = x^2 \cdot e^{-2x}$;

2) $y = (1 - x^2) \cos x$.

3-§. ОШКОРМАС ВА ПАРАМЕТРИК ҲОЛДА БЕРИЛГАН ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ

1. Иккита x ва y ўзгарувчиларнинг қийматлари ўзаро бирор $F(x, y) = 0$ (1) тенглама билан боғланган бўлсин. Агар $y = f(x)$ функция бирор $(a; b)$ да аниқланган бўлиб, (1) тенгламада y ўрнига $f(x)$ ифода қўйилганда тенглама x га нисбатан айниятга айланса, у ҳолда $y = f(x)$ функция (1) тенглама билан аниқланган *ошкормас функция* дейилади.

Ошкормас функциянинг ҳосиласини қуйидагича топиш мумкин:

1) (1) тенгликнинг чап томонидан y ни x нинг функцияси сифатида қараб ҳосила оламиз ва уни 0 га тенглаймиз.

2) Ҳосил бўлган тенгламадан y' ни

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

кўринишда топамиз.

Ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топиш учун (2) тенгликни дифференциаллаймиз (бунда яна y ни x нинг функцияси сифатида қараймиз), сўнгра ўнг томонидаги y' ўрнига (2) ни қўямиз.

2. Агар $y=f(x)$ функция параметрик кўринишда берилган бўлса, яъни

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

бўлса, у ҳолда

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{3}$$

ва

$$f''(x)=\frac{\psi''(t)\,\varphi'(t)-\varphi''(t)\,\psi'(t)}{\varphi'^3(t)} \tag{4}$$

бўлади.

326. $x^3y^2+5xy+4=0$ берилган. y' ни топинг.

△ Берилган муносабатни y ни x нинг функцияси деб қараб дифференциаллаймиз:

$$3x^2y^2+2x^3y\cdot y'+5y+5xy'=0.$$

Ҳосил бўлган тенгламадан y' ни топамиз:

$$y'=-\frac{3x^2y^2+5y}{2x^3y+5x}. \blacktriangle$$

327. $\operatorname{arctg} y-y+x=0$ берилган. y'' ни топинг.

△ Берилган муносабатни дифференциаллаймиз ва ундан y' ни топамиз:

$$\frac{y'}{1+y^2}-y'+1=0 \text{ ёки } y'-y'-y^2y'+1+y^2=0,$$

$$y'=\frac{1+y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2}+1. \tag{5}$$

Энди (5) ни дифференциаллаймиз:

$$y''=-2y^{-3}y'=-\frac{2}{y^3}\cdot y'. \tag{6}$$

(6) даги y' ўрнига (5) ни қўйиб, қуйидаги натижани ҳосил қиламиз: $y''=-\frac{2}{y^3}\cdot\frac{1+y^2}{y^2}=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. ▲

328. $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$ берилган, $\frac{dy}{dx} = ?$ $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

△ (3) ва (4) формулалардан фойдаланамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{3a\cos^2 t\cdot\sin t} = -\operatorname{tg} t;\ \varphi''(t) = (\varphi'(t))' =$$

$$= (-3a\cos^2 t\sin t)' = 3a\cos t\ (2\sin^2 t - \cos^2 t),\ \psi''(t) =$$

$$= (\psi'(t))' = (3a\sin^2 t\cos t)' = 3a\sin t\ (2\cos^2 t - \sin^2 t);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{\varphi'^3(t)} = \frac{3a\sin t\,(2\cos^2 t - \sin^2 t)\,(-3a\cos^2 t\sin t)}{(-3a\cos^2 t\ \sin t)^3} -$$

$$- \frac{3a\cos t\ (2\sin^2 t - \cos^2 t)\ (3a\sin^2 t\ \cos t)}{(-3a\cos^2 t\ \sin t)^3} =$$

$$= \frac{9a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(-2\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin^2 t + \cos^2 t)}{-27a^3\cos^6 t\sin^3 t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

ёки

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} t) = -\frac{d(\operatorname{tg} t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{-\dfrac{d(\operatorname{tg} t)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{1}{3a\sin t\cdot\cos^4 t}.\ ▲$$

329. $\left.\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right\}$ берилган. $\frac{dy}{dx} = ?$ $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

$$△\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Худди юқоридагига ўхшаш

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right) = \frac{\dfrac{d\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{2a\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.\ ▲$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибли ҳосилаларини топинг.

330. $x^3y - 3x^2y^2 + 5y^3 - 3x + 4 = 0,\ y' = ?$

331. $x^2y + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0,\ y' = ?$

332. $xy^3 + 2y - 1 = 0,\ y'' = ?$

333. $x^3 + 2xy - 3y^2 = 0, \quad y''(1;\ 1) = ?$

334. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2),\ y' = ?$

335. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c,\ y' = ?$

336. $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ y' = ?$

337. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3, \end{cases} \quad y' = \frac{dy}{dx} =$

338. $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\sin^2 t, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = ?$

339. $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1 + t^2}, \\ y = \dfrac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = ?$

340. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^2}. \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = ?$

341. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = ?$

342. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = ?$

343. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx}$ нинг $t = \frac{\pi}{4}$ даги қийматини топинг.

344. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

345. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

346. $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t), \\ y = a(\cos t + t\sin t). \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

347. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

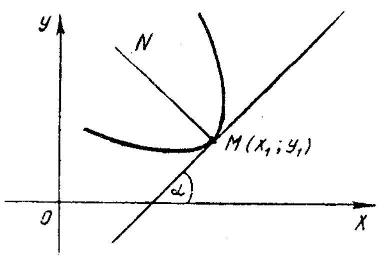
348. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{1}{2} t^2. \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

349. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ нинг $t = 0$ даги қийматини топинг.

350. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

4-§. ҲОСИЛАНИНГ ТАТБИҚИ

1. Ҳосиланинг геометрик маъноси



21- чизма

$y = f(x)$ бирор эгри чизиқ тенгламаси бўлиб, $M(x_1; y_1)$ нуқта шу эгри чизиқда ётган бўлсин, яъни $y_1 = f(x_1)$. 1) $y = f(x)$ функциянинг $x = x_1$ даги ҳосиласининг қиймати $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $M(x_1; y_1)$ нуқтасидан ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентига тенг, яъни $f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha$, бу ерда α уринма тўғри чизиқнинг абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги (21- чизма).

$y = f(x)$ эгри чизиқнинг $M(x_1; y_1)$ нуқтасидан ўтказилган уринма тўғри чизиқ тенгламаси:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1). \quad (1)$$

MN нормал тўғри чизиқ тенгламаси эса:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1). \quad (2)$$

2) $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ функциялар графикларининг $M(x_1; y_1)$ кесишиш нуқтасида ўтказилган уринмалар орасидаги φ бурчак берилган икки эгри чизиқ орасидаги бурчакни ифодалайди ва

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_1) - f_1'(x_1)}{1 + f_1'(x_1)\, f_2'(x_1)} \tag{3}$$

формула билан топилади.

Ҳосиланинг геометрик маъносидан фойдаланиб, аналитик геометриядаги кўпгина масалаларни ечиш мумкин.

2. Ҳосиланинг механик маъноси

$y = f(x)$ ҳаракат қонунияти берилган бўлса, $f'(x_1)$ механик томондан унинг x_1 моментдаги (пайтдаги) ўзгариш тезлигини ($v(x_1) = f'(x_1)$), $f''(x_1)$ эса ҳаракатнинг тезланишини ($a(x_1) = f''(x_1)$) ифодалайди.

351. $y = x^3 + 2x$ эгри чизиқнинг $M(1;\ 3)$ нуқтасидан ўтказилган уринма ва нормал тўғри чизиқлар тенгламаларини топинг.

△ Уринма тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топиш учун аввал берилган функциядан ҳосила оламиз:

$$y' = 3x^2 + 2.$$

Бу ҳосиланинг $x = 1$ нуқтадаги қиймати уринма тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ифодалайди, яъни $k = 3 \cdot 1 + 2 = 5$. Шундай қилиб, уринма тенгламаси $y - 3 = 5(x - 1)$ ёки $5x - y - 2 = 0$ бўлиб, нормал тўғри чизиқ тенгламаси эса $y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1)$ ёки $x + 5y - 16 = 0$. ▲

352. Қуйидаги эгри чизиқларнинг кесишиш бурчагини топинг:

1) $x + y - 4 = 0$ тўғри чизиқ билан $2y = 8 - x^2$ парабола;

2) $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипс билан $4y = 4 - 5x^2$ парабола.

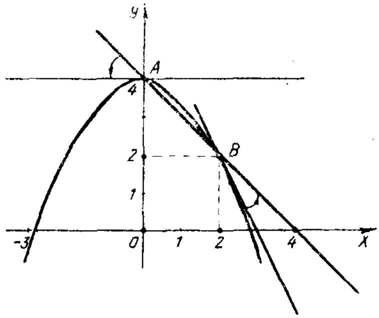
△ 1) Тўғри чизиқ билан парабола тенгламаларини система қилиб ечиб, уларнинг кесишган нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0, \\ 2y = 8 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x, \\ 2(4 - x) = 8 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 0,$$

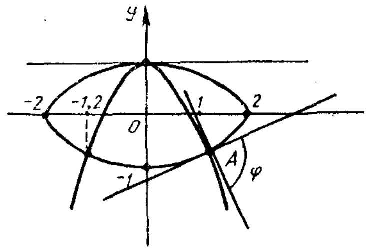
$$x_1 = 0,\ x_2 = 2;\ y_1 = 4,\ y_2 = 2.$$

Демак, $A(0;\ 4)$, $B(2;\ 2)$ (22-чизма). Сўнгра парабола тенгламасидан y' ни топамиз: $y' = -x$. Параболанинг A ва B нуқталаридан ўтган уринма тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k_A = y_A' = 0,\ k_B = y_B' = -2.$$



22- чизма



23- чизма

$x+y-4=0$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти унинг ҳамма нуқталарида -1 га тенг.

(3) формулага кўра $\operatorname{tg} A=\frac{0-(-1)}{1+(-1)\cdot 0}=1,\ A=45^{\circ};$

$$\operatorname{tg} B=\frac{-1+2}{1+2}=\frac{1}{3},\quad B \approx 18{,}5^{\circ}.$$

2) Эгри чизиқларнинг тенгламаларини система қилиб ечиб, уларнинг умумий нуқталарини топамиз: A (1,2; $-0{,}8$), B (0; 1), C ($-1{,}2$; $-0{,}8$) (23- чизма).

Энди эллипс ва параболаларнинг исталган нуқтасидан ўтказилган уринмаларнинг бурчак коэффициентларини уларнинг тенгламаларидан y ни x нинг функцияси сифатида қараб ҳосила олиш билан топамиз:

$$y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2};\quad k_1=y'=-\frac{x}{4y};$$

$$y=1-\frac{5}{4}x^2;\quad k_2=y'=-\frac{5}{2}x.$$

Буларга A нуқтанинг координаталарини қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$k_1=\frac{3}{8},\quad k_2=-3;\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{3}{8}+3}{1-\frac{9}{8}}=-27,\quad \varphi\approx 92^{\circ}.$$

Берилган эгри чизиқлар Oy ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун C нуқтада ҳам улар 92° бурчак остида кесишади.

B нуқтада $k_1 = -\frac{0}{4} = 0$, $k_2 = -\frac{5}{2}\cdot 0 = 0$ бўлгани учун $\operatorname{tg}\varphi = 0$ бўлиб, эгри чизиқлар умумий уринма тўғри чизиққа эга бўлади, бу ҳолда улар кесишмайди, балки бир-бирига уринади. ▲

353. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $s = t^2 + 2t + 3$ қонуниятга кўра ҳаракат қилса, унинг $t = 5$ секунддаги ҳаракат тезлигини топинг (йўл s метр билан ўлчанади).

△ Ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги v йўл s дан вақт t бўйича олинган ҳосила билан ифодаланади. Берилган масала шартига кўра $v = 2t + 2$ умумий тезликни ифодалайди. Бу ҳолда $t = 5$ секунддаги ҳаракат тезлиги

$$v_5 = (2t + 2)_{t=5} = 12 \text{ м/сек бўлади.} \ ▲$$

354. $y = x^2 - 2x + 5$ эгри чизиқда ординатаси абсциссасига нисбатан 4 марта тезроқ ўсадиган нуқтани топинг.

△ Берилган функциядан ҳосила оламиз:

$$y' = 2x - 2.$$

Ҳосила абсцисса (аргумент) нинг ўсишига нисбатан ордината (функция)нинг ўсиш тезлигини билдиргани учун $2x - 2 = 4$ шарт изланаётган нуқтанинг абсциссасини ифодалайди, ординатаси эса эгри чизиқ тенгламаси $y = x^2 - 2x + 5$ да x ўрнига 3 ни қўйиш билан топилади. Шундай қилиб, изланаётган нуқта (3; 8) экан. ▲

355. Моддий нуқта $s = 2t^2 + 3t + 5$ қонуниятга кўра ҳаракат қилади, бунда масофа s сантиметр, вақт t секундлар билан ўлчанади. Моддий нуқтанинг $t = 1$ дан $t = 5$ гача бўлган вақт оралиғидаги ўртача тезлигини топинг.

△ Моддий нуқтанинг ўртача тезлиги $v_{ўр} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ формула билан топилади, бунда $\Delta s = s\ (t_0 + \Delta t) - s\ (t_0)$ моддий нуқтанинг Δt вақт ичида босиб ўтган йўли. Масала шартидан $t_0 = 1$ сек, $t_0 + \Delta t = 5$ сек бўлгани учун $v_{ўр} = \frac{\Delta s}{\Delta t} =$

$$= \frac{S(5) - S(1)}{4} = \frac{2\cdot 5^2 + 3\cdot 5 + 5 - (2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 5)}{4} = \frac{60}{4} =$$

$= 15$ см/сек. ▲

356. Иситилган жисм пастроқ температурали ҳолатга киритилса, совий бошлайди. а) Совишнинг ўртача тезлиги; б) берилган пайтдаги совиш тезлиги деганда нималар тушунилади? Изоҳланг.

△ Жисмнинг t пайтдаги температураси T бўлсин. Маълум Δt вақт ўтиши билан иситилган жисм температураси ўзгаради, уни ΔT деб белгилаймиз. У ҳолда совишнинг ўртача тезлиги $v_{ўр} = \frac{\Delta T}{\Delta t}$ дан иборат бўлади. t пайтдаги совиш тезлиги эса

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ўр} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}$$

дан иборат бўлади. ▲

357. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $x = A \sin \omega t$ қонуният бўйича тебранма ҳаракат қилади. Нуқтанинг $t = \frac{2\pi}{\omega}$ пайтдаги тезлиги ва тезланишини топинг. Ҳаракат тезланишининг x нинг четланишига пропорционал эканини кўрсатинг.

△ Ҳаракатнинг ихтиёрий t пайтдаги тезлиги v ва тезланиши w ларни топамиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t; \quad w = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega} \text{ да } v = A\omega; \quad w = 0.$$

Тезланиш w нинг ифодаси билан x нинг ифодасини солиштириб, бири иккинчисидан ўзгармас кўпайтувчи билан фарқ қилишини кўрсатамиз: $w = -\omega^2 x$. ▲

358. Тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги унинг босиб ўтган йўлининг квадрат илдизига пропорционал. Бўлаётган ҳаракатнинг ўзгармас куч таъсирида бажарилаётганини исботланг.

△ Ньютон қонуни бўйича ҳаракатни чақирувчи F куч тезланишга пропорционал:

$$F = k \cdot \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Масала шартига кўра $\frac{dS}{dt} = \lambda \sqrt{S}$. Бундан ҳосила олиб топамиз:

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \lambda \cdot \frac{1}{2\sqrt{S}} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{\lambda}{2\sqrt{S}} \cdot \lambda \sqrt{S} = \frac{\lambda^2}{2}.$$

Демак, таъсир этувчи куч $F = \frac{k\lambda^2}{2}$ (const). ▲

359. $y = x^2 + 5x - 1$ эгри чизиқнинг $M(1;\ 5)$ нуқтасидан ўтказилган уринма тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

360. $y=\frac{\ln x}{x}$ эгри чизиқнинг M (1; 0) нуқтасидан ўтган нормал тенгламасини топинг.

361. $y=\frac{3x-4}{2x-3}$ чизиқнинг M (2; 2) нуқтасидан ўтган уринма ва нормал тўғри чизиқ тенгламаларини топинг.

362. $y=\frac{x-1}{1+x^2}$ эгри чизиқ абсцисса ўқи билан қандай бурчак остида кесишади?

363. $y=\sin x$ синусоида абсцисса ўқи билан координаталар бошида қандай бурчак остида кесишади?

364. $y=x^2+3x-5$ параболанинг қайси нуқтасидан ўтказилган уринма тўғри чизиқ $7x-y+3=0$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

365. $y=2x^3-6x^2+5$ эгри чизиқнинг $x=1$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг ва уринма тенгламасини тузинг.

366. $y=x^2$ параболада $x_1=1$ ва $x_2=3$ нуқталар орқали кесувчи ўтказилган. Параболанинг қандай нуқтасидан ўтказилган уринма кесувчига параллел бўлади?

367. $y=\sin x$ синусоида ва $x=\cos x$ косинусоидалар қандай бурчак остида кесишади?

368. $x=t-1$, $y=t^3-12t+1$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасидан ўтказилган уринма: а) Ox ўққа параллел; б) $9x+$ $+y+3=0$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

△ Бу масалани ечишда тўғри чизиқларнинг параллеллик шартидан фойдаланамиз. Агар тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлса, у ҳолда уларнинг бурчак коэффициентлари тенг бўлади. Эгри чизиқ параметрик кўринишда берилгани учун ҳосила олишда 3-§ даги (3) формуладан фойдаланамиз:

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-12}{1}=3t^2-12.$$

Бу ҳосила берилган эгри чизиқнинг исталган нуқтасидан ўтказилган уринма тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ифодалайди.

а) y' ни Ox ўқнинг бурчак коэффициентига тенглаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$3t^2-12=0;\ t^2=4,\ t=\pm 2.$$

t параметрнинг топилган қийматларини берилган эгри чизиқ тенгламасига қўйиб, Ox ўққа параллел бўлган уринма тўғри чизиққа тегишли нуқта координаталарига эга бўламиз: (1; — 15); (— 3; 17).

б) Худди а) даги каби йўл тутиб, $y' = 3t^2 - 12 = -9$; $t^2 = 1$, $t = \pm 1$ га эга бўламиз ва (0; — 10); (— 2; 12) нуқталарни ҳосил қиламиз. ▲

369. Ҳаракат қонуни $s = t \ln(1 + t)$ кўринишда берилган. $t = 2$ пайтдаги ҳаракат тезлигини аниқланг.

370. 8 г массали жисм $s = -1 + \ln(1 + t) + (1 + t)^3$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Ҳаракат бошланишидан бир секунд кейин жисмнинг кинетик энергияси $\frac{mv^2}{2}$ ни топинг.

371. Химик реакция жараёнида t вақтга боғлиқ равишда ҳосил бўладиган Q миқдор $Q = a(1 + be^{-mt})$ формула билан берилган. Реакция тезлигини топинг.

372. Ғилдирак шундай айланадики, унинг айланиш бурчаги вақтнинг квадратига пропорционал. Ғилдирак биринчи айланишни 8 секундда бажаради. Ҳаракат бошлангандан 32 сек ўтгандан кейинги айланиш тезлиги ω ни топинг.

373. Симдан ўтувчи электр токининг миқдори $t = 0$ пайтдан бошлаб $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (кл) формула билан берилган. 5 секунддан кейинги ток кучини топинг.

374. Массаси m га тенг бўлган нуқта Ox ўқ бўйлаб тебранади. Унинг t пайтдаги турғунлик ҳолатидан x четланиши $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$ формула билан берилган. Нуқтанинг ҳаракат тезлигини ва унга таъсир этувчи кучни топинг.

375. Моддий нуқтага таъсир этувчи куч унинг ҳаракат тезлигига тескари пропорционал. Бу ҳолда нуқтанинг кинетик энергияси вақтнинг чизиқли функцияси бўлишини исботланг.

5-§. ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1. Агар $y = f(x)$ функциянинг Δy орттирмасини $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ кўринишда ёзиш мумкин бўлса, орттирманинг Δx га нисбатан чизиқли қисми $A \Delta x$ га функциянинг дифференциали дейилади ва dy ёки $df(x)$ орқали белгиланади:

$$dy = A \cdot \Delta x.$$

Бунда A бирор сон бўлиб, Δx га боғлиқ эмас (фақат x га боғлиқ бўлиши мумкин), $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Дифференциал мавжуд бўлиши учун чекли ҳосила $f'(x)$

нинг мавжудлиги зарур ва етарлидир, у ҳолда $dy = f'(x)\,dx$ бўлади.

2. Агар $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ мураккаб функция берилган бўлса, у ҳолда $dy = f'(u)\,du$ (дифференциал формасининг инвариантлиги) бўлади.

3. Агар Δx етарлича кичик бўлса, у ҳолда $\Delta y \approx dy$ тақрибий формула ўринли бўлиб, $|\Delta y - dy|$ абсолют хатони, $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$ нисбий хатони ифодалайди.

4. Юқори тартибли дифференциаллар d^2y, d^3y, ..., d^ny бўлиб, x эркли ўзгарувчи бўлганда $d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n$ бўлади. Агар $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ бўлса, $d^2y = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u$ бўлиб, бунда дифференциал формасининг инвариантлиги бузилади.

376. Қуйидаги функцияларнинг дифференциалларини топинг:

1) $y = x^2 - 3^x$,

2) $F(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}$,

3) $z = \ln(1 + e^{10x})$, $dz|_{x=0;\ \Delta x=0,1} = ?$

$\triangle$ Берилган функциянинг ҳосиласини топиб ва уни эркин ўзгарувчининг дифференциалига кўпайтириб, берилган функциянинг дифференциалини топамиз:

1) $dy = y'dx = (x^2 - 3^x)'\,dx = (2x - 3^x\ln 3)\,dx;$

2) $$dF(\varphi) = d\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right)' d\varphi =$$
$$= \left(-\sin\frac{\varphi}{3}\left(\frac{\varphi}{3}\right)' + \cos\frac{3}{\varphi}\cdot\left(\frac{3}{\varphi}\right)'\right) d\varphi = -\left(\frac{1}{3}\sin\frac{\varphi}{3} + \frac{3}{\varphi^2}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\frac{3}{\varphi}\right) d\varphi;$$

3) $$dz = \frac{(1 + e^{10x})'}{1 + e^{10x}}\,dx = \frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}}\cdot dx.$$

$$dz\Big|_{x=0,\ dx=0,1} = \left(\frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}}\,dx\right)\Big|_{x=0;\ dx=0,1} = \frac{10\cdot 1\cdot 0,1}{2} = 0,5. \ \blacktriangle$$

377. Қуйидагиларни тақрибий ҳисобланг:

1) $\sqrt[4]{17}$; 2) $\operatorname{arctg} 0,98$; 3) $\sin 29^\circ$.

$\triangle$ Агар $f(x_1)$ ни ҳисоблаётганда $f(x_0)$, $f'(x_0)$ ларни ҳисоблаш соддароқ бўлса, у ҳолда $x_1 - x_0 = dx$ айирманинг абсолют қиймати бўйича етарли кичик қийматида функциянинг орттирмасини унинг дифференциали билан алмаштириш мумкин: $f(x_1)-f(x_0)\approx f'(x_0)\,dx$. Бунда топилиши керак бўлган миқдорнинг тақрибий қиймати

$$f(x_1)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,dx \tag{a}$$

формула билан топилади.

1) $\sqrt[4]{17}$ ни $f(x)=\sqrt[4]{x}$ функциянинг $x_1=17$ даги хусусий қиймати деб қараймиз.

$x_0=16$ бўлсин, у ҳолда $f(x_0)=\sqrt[4]{16}=2$, $f'(x_0)=$
$=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Big|_{x=16}=\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{2^{12}}}=\frac{1}{32}$; $dx=x_1-x_0=1$.

Буларни (а) формулага қўямиз:

$\sqrt[4]{17}\approx(f(x_0)+f'(x_0)\,dx)\big|_{x_0=16;\ dx=1}=2+\frac{1}{32}\cdot 1=\frac{65}{32}\approx 2{,}031.$

2) arctg0,98 ни $y=\operatorname{arctg}x$ функциянинг $x_1=0{,}98$ даги хусусий қиймати деб қараймиз. $x_0=1$ бўлсин, у ҳолда $y(x_0)=\frac{\pi}{4}$; $y'(x_0)=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}$; $dx=x_1-x_0=0{,}98-1=$ $=-0{,}02$.

(а) формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\operatorname{arctg}0{,}8\approx y(x_0)+y'(x_0)\cdot dx=\operatorname{arctg}1+\frac{1\cdot(-0{,}02)}{1+1^2}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(-0{,}02)\approx 0{,}7754.$$

3) $y=\sin x$ функциянинг $x=\operatorname{arc}29^\circ=\frac{\pi}{180}\cdot 29=x_1$ даги хусусий қийматини $\sin 29^\circ$ ва $x_0=\frac{\pi}{6}$ деб қараб, қуйидагига эга бўламиз:

$y(x_0)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$; $y'(x_0)=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $dx=x_1-$
$-x_0=\frac{29\pi}{180}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{180}$; $\sin 29^\circ\approx y(x_0)+y'(x_0)\,dx=$
$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right)\approx 0{,}4848.$ ▲

378. $y=\ln\operatorname{arctg}(\sin x)$ функциянинг дифференциалини топинг.

△ Бу функциянинг дифференциалини бевосита топишни кўрсатайлик:

$$dy=\frac{d\,(\mathrm{arctg}\,(\sin x))}{\mathrm{arctg}\,(\sin x)}=\frac{\frac{1}{1+\sin^2 x}\cdot d\,(\sin x)}{\mathrm{arctg}\,(\sin x)}=\frac{\cos x\cdot dx}{(1+\sin^2 x)\,\mathrm{arctg}\,(\sin x)}.\ ▲$$

379. $f(x)=2x^3+2x-1$ берилган. Агар $\Delta x=0{,}1$ бўлса, $\Delta f(1)$, $df(1)$ ларни топинг.

380. $y=x^3-7x^2+8$ функция берилган. $x=5$ ва $\Delta x=0{,}01$ бўлганда функция орттирмаси Δy ни ҳисобланг.

381. $f(x)=\frac{1}{x}$ функция берилган. $x=1$ ва $\Delta x=0{,}01$ бўлганда $\Delta f(1)$ ва $df(1)$ ни топинг. Абсолют хато $|\Delta y-dy|$ ва нисбий хато $\left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|$ ларни ҳисобланг.

382. Шар радиуси $R=15$ см ни 2 мм га узайтирилса, унинг ҳажми тахминан қанчага кўпаяди?

383. Ом қонуни $I=\frac{E}{R}$ га кўра қаршиликнинг етарли кичик миқдорда ўзгариши билан ток кучи ҳам ўзгаради. Бу ҳолда ток кучининг ўзгариши тақрибан $\Delta I=-\frac{I}{R}\cdot\Delta R$ формула билан топилишини кўрсатинг.

384. $y=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{x}$, $dy=?$

385. $y=(\mathrm{arc\,sin}\,x)^5$, $dy=?$

386. $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$, $dy=?$

387. $y=\sqrt{1-x^2}$, $d^2y=?$

388. $y=\mathrm{arc\,cos}\,x$, $d^2y=?$

389. $y=\sin x\cdot\ln x$, $d^2y=?$

390. $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $d^2y=?$

391. x га нисбатан $|\Delta x|$ нинг етарли кичик қийматлари учун $\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ тақрибий формулани келтириб чиқаринг.

392. α нинг етарли кичик қийматларида $\sqrt[n]{1+\alpha}\approx1+\frac{\alpha}{n}$ эканини кўрсатинг.

393. $\sqrt[4]{16{,}64}$ ни тақрибан ҳисобланг.

394. $\ln 0{,}9$ ни тақрибан ҳисобланг.

395. $\cos 31^\circ$ ни тақрибан ҳисобланг.

6- §. ЛОПИТАЛЬ ҚОИДАСИ ВА УНИНГ ФУНКЦИЯ ЛИМИТИНИ ТОПИШГА ТАТБИҚИ

1. Лопиталь қоидаси. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар a нуқтанинг бирор $u(a;\ \delta)$ атрофида (a дан бошқа) дифференциалланувчи (бунда a — сон ёки ∞ бўлиши мумкин) ва $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ ёки $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ бўлади (ўнг томондаги лимит мавжуд деб қаралади).

Агар $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ ёки $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ҳолига келса ва бу ҳолда натижага эришишда Лопиталь қоидаси аҳамиятлироқ бўлса, ундан қайта-қайта фойдаланиш мумкин.

2. $(0\cdot\infty)$ ва $(\infty - \infty)$ кўринишдаги аниқмасликлар алгебраик шакл ўзгартириш билан 1-қоидага, яъни $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ аниқмасликларга келтирилади.

3. (0^0), (∞^0), (1^∞) кўринишдаги аниқмасликлар логарифмлаш ёки $(f(x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$ шакл ўзгартириш билан $(0\cdot\infty)$ кўринишга келтирилади.

Қуйидаги функцияларнинг лимитларини ҳисобланг:

396. 1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n}$, бунда $k>0$, n — натурал сон;

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$.

Δ 1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^4-16)'}{(x^3+5x^2-6x-16)'} =$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{3x^2+10x-6}=\frac{32}{26}=\frac{16}{13};$$

$$2)\ \lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{(x^m-a^m)'}{(x^n-a^n)'}=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=$$

$$=\frac{m}{n}a^{m-n};$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos ax)'}{(1-\cos bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{b\sin bx}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(a\sin ax)'}{(b\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos ax}{b^2\cos bx}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Бу мисолда Лопиталь қоидаси 2 марта қўлланилди.

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{kx}}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{kx})'}{(x^n)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ke^{kx}}{nx^{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(ke^{kx})'}{(nx^{n-1})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k^2e^{kx}}{n(n-1)x^{n-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{k^n e^{kx}}{n!}=+\infty.$$

Бу мисолда Лопиталь қоидасидан n марта фойдаланилди.

$$5)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{tg} x)'}{(\sec x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec x\cdot\operatorname{tg} x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\operatorname{tg} x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sec x)'}{(\operatorname{tg} x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x\cdot\operatorname{tg} x}{\sec^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}=\ldots$$

Бу ерда Лопиталь қоидасидан фойдаланиш аҳамиятсиздир. Бундай ҳолда лимитларни ҳисоблаш учун Лопиталь қоидасидан фойдаланмасдан оддий элементар алмаштиришлардан фойдаланамиз:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1.\ \blacktriangle$$

397. 1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} 2x;$

2) $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$;

3) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} \varphi - \sec \varphi)$;

4) $\lim\limits_{t\to0} \left(\frac{t}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)$.

$\triangle$ Бу лимитлар $0 \cdot \infty$ ёки $\infty - \infty$ каби ҳоллар бўлгани учун уларни $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ ларнинг бирига келтириб, сўнгра Лопиталь қоидасидан фойдаланамиз:

1) $\lim\limits_{x\to0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{(x)'}{(\operatorname{tg} 2x)'} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{2\sec^2 2x} = \frac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+0} \frac{(\ln x)'}{(1/\sqrt[3]{x})'} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{1/x}{-1/3 \cdot \sqrt[3]{x^4}} = -3 \lim\limits_{x\to+0} \sqrt[3]{x} = 0$;

3) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} \varphi - \sec \varphi) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi - 1}{\cos \varphi} =$

$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin \varphi - 1)'}{(\cos \varphi)'} = \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{-\sin \varphi} = 0$;

4) $\lim\limits_{t\to0} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{t\to0} \frac{t - \sin t}{t \sin t} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{t\to0} \frac{(t - \sin t)'}{(t \sin t)'} = \lim\limits_{t\to0} \frac{1 - \cos t}{\sin t + t \cos t} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{t\to0} \frac{(1 - \cos t)'}{(\sin t + t\cos t)'} = \lim\limits_{t\to0} \frac{\sin t}{2\cos t - t \sin t} = 0.$

Бу мисолда Лопиталь қоидаси 2 марта ишлатилди. ▲

398. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

Δ Бу лимитлар 1^{∞}, ∞^0, 0^0 кўринишдаги ҳоллар бўлгани учун уларни $0\cdot\infty$ кўринишга келтирамиз, сўнгра уни $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишга келтириб, Лопиталь қоидасидан фойдаланамиз. Бунинг учун берилган функцияни логарифмлаймиз ва функция логарифмининг лимитини топамиз:

1) $a = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = (1^{\infty})$; $\ln a = \ln \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} =$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{ctg} 2x)'} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot \sec^2 x}{-2\operatorname{cosec}^2 2x} = -1.$$

демак, $\ln a = -1$; $a = e^{-1}$, яъни $a = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1} =$

$= \frac{1}{e}$ экан;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = (\infty^0)$. Бунда ҳам $a = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ деб логарифмлаймиз:

$$\ln a = \ln \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \frac{1}{x} = (0\cdot\infty) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot \sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin^2 x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cdot\cos x}{1} =$$

$= 0,$

демак, $\ln a = 0 \Rightarrow a = e^0 = 1$, яъни $a = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$

экан;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\sin x}=(0^0)$; $a=\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$ деб логарифмлаймиз: $\ln a=\ln\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x=(0\cdot(-\infty))=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=-1\cdot 0=0;\quad \ln a=0,\quad a=e^0=1,$$

яъни $a=\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=1$ экан. ▲

399. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

400. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$.

401. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

402. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

403. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

404. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^n\cdot e^{-x})$.

405. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\dfrac{a}{x}\right)$.

406. $\lim\limits_{\varphi\to a}\left((a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\varphi}{2a}\right)$.

407. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

408. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

409. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot e^{1/x^2})$.

410. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$.

411. $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x+x)^{1/x}$.

412. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

413. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$ тенгликни исботланг ва бунда Лопиталь қоидасини ишлатиб бўлмаслигини текширинг.

414. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\sin x}$.

7-§. ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ ВА УНИНГ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШЛАРГА ТАТБИҚИ

$x=a$ нуқтани ўз ичига олган бирор интервалда $f(x)$ функция $(n+1)$-тартибгача барча ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функцияни n-даражали кўпҳад ва R_n қолдиқ ҳад йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n\quad (T);\quad R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(қолдиқ ҳаднинг Лагранж кўриниши), бунда c сон a билан x орасида ётувчи сон, $c=a+\theta(x-a)$, $0<\theta<1$. (T) формулага Тейлор формуласи дейилиб, ундан ихтиёрий $f(x)$ функцияни тақрибан кўпҳад кўринишда ифодалашда фойдаланилади:

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (*)$$

(*) га Тейлор кўпҳадлиги дейилади.

Агар Тейлор формуласида $a=0$ бўлса, у ҳолда Маклорен формуласи ҳосил бўлади:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

лекин кўпчилик функциялар учун Маклорен формуласини ишлатиб бўлмайди, чунки $x=0$ да бу функциялар ёки уларнинг ҳосилалари мавжуд бўлмайди $\left(\text{масалан: } \ln x;\right.$ $\left.\operatorname{ctg} x;\ \frac{1}{x}\right)$.

415. Қуйидаги функцияларнинг ҳар бирини тақрибан x га нисбатан n-даражали кўпҳад кўринишида ифодаланг, қолдиқ ҳадни баҳоланг ва унинг x нинг қандай қийматида чексиз кичрайишини кўрсатинг:

1) e^x; 2) $\sin x$, 3) $\cos x$.

Δ Берилган $f(x)$ функцияни x га нисбатан n-даражали кўпҳад кўринишида тақрибан ифодалаш учун $f(x)$ функциянинг Маклорен кўпҳадини ёзиб олиш керак. Сўнгра $f(x)$ функция учун Маклорен формуласидан қолдиқ ҳад R_n ни топиш керак ва $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ ўринли бўладиган x нинг қийматларини аниқлаш керак.

1) $f(x) = e^x$ функция ва унинг ҳосилаларининг $x = 0$ даги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(x) = e^x,\quad f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(k)}(x) = e^x;$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(k)}(0) = 1.$$

Энди Маклорен кўпҳадлигидан фойдаланиб, трансцендент функция e^x нинг тақрибан n-даражали кўпҳад кўринишдаги ифодасини ҳосил қиламиз:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

Бу тақрибий тенгликда қилинган хато Маклорен формуласидаги қолдиқ ҳад билан аниқланади. e^x функция учун қолдиқ ҳад

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},\quad 0 < \theta < 1,$$

R_n нинг қиймати n га ва x га боғлиқдир. Масалан, $n = 3$ ва $x = 1$ да $R_3 = \frac{1}{4!} e^{\theta} < \frac{1}{4!} e < \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$, чунки $0 < \theta < 1$, $e < 3$.

$n = 5$ ва $x = 1$ да $R_5 = \frac{1}{6!} e^{\theta} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240}$ ва ҳоказо.

x қандай бўлмасин $n \to \infty$ да қолдиқ ҳад

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \to 0$$

кўрсатайлик, бунинг учун $n \to \infty$ да $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ ни исбот этиш етарли, чунки $0 < \theta < 1$ бўлгани учун $e^{\theta x}$ чекланган миқдор.

Агар x тайин сон бўлса, у ҳолда шундай бутун мусбат N сон топиладики, $|x| < N$ бўлади. $\frac{|x|}{N} = q$ белгилашни киритамиз, у ҳолда $0 < q < 1$ ни эътиборга олиб, $n = N + 1$, $N + 2$, $N + 3$ ва ҳоказо қийматларда қуйидагини ёза оламиз:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1}\right| =$$

$$= \left|\frac{x}{1}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\frac{x}{3}\right|\cdots\left|\frac{x}{N-1}\right|\cdot\left|\frac{x}{N}\right|\cdots\left|\frac{x}{n}\right|\cdot\left|\frac{x}{n+1}\right| <$$

$$< \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{N-1}\cdot q\cdot q\cdots q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}\cdot q^{n-N+2}, \text{ чунки}$$

$$\left|\frac{x}{N}\right| = q, \quad \left|\frac{x}{N+1}\right| < q, \quad \ldots, \quad \left|\frac{x}{n+1}\right| < q.$$

Аммо, $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ миқдор ўзгармас, яъни n га боғлиқ эмас, q^{n-N+2} эса $n \to \infty$ да 0 га интилади. Шунинг учун $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, демак,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} = 0.$$

Шундай қилиб, x ҳар қандай бўлганда ҳам етарли сондаги ҳадларни олиб, e^x ни исталган аниқлик билан ҳисоблай оламиз;

2) $\sin x$ функция ва унинг ҳосилаларининг $x = 0$ даги қийматларини топамиз:

$f(x) = \sin x, \qquad f(0) = 0,$

$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 1,$

$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0,$

$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1,$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{IV}(0) = 0,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Бу ҳолда

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \qquad (2)$$

ва қолдиқ ҳад

$$R_{2m} = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cdot\sin\left(\theta x + (2m+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad 0 < \theta < 1,$$

ларга эга бўламиз.

$\left|\sin\left(\theta x + (2m+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$ бўлгани учун $|R_{2m}| \leqslant \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$ бўлиб, $m\to\infty$ да $R_{2m}\to 0$, чунки x нинг ҳар қандай қийматида ва $n\to\infty$ да $\frac{x^n}{n!}\to 0$ (бунда x бурчакнинг радиан ўлчовини билдиради). Шундай қилиб, $\sin x$ функцияни ҳам x нинг ҳар қандай қийматида ихтиёрий кичик хатолик билан Маклорен кўпҳадлиги кўринишида ифодалаш мумкин экан;

3) $f(x) = \cos x$ функциянинг $x = 0$ даги кетма-кет ҳосилаларини топиш ва Маклорен формуласига қўйиш билан ушбу ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cdot\cos\Big(\theta x +$$
$$+ (2m+2)\cdot\frac{\pi}{2}\Big),$$

бунда $0 < \theta < 1$, қолдиқ ҳад

$$R_{2m+1}(x) = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cdot\cos\left(\theta x + (2m+2)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

бўлади.

$\left|\cos\left(\theta x + (2m+2)\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$ бўлгани учун $|R_{2m+1}(x)| \leqslant \leqslant \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ ва $m\to\infty$ да $R_{2m+1}(x)\to 0$.

Шундай қилиб, x нинг ихтиёрий қиймати учун (бунда x бурчакнинг радиан ўлчовини билдиради)

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \tag{3}$$

ўринлидир ($m = 0, 1, 2, 3, \ldots, m$). ▲

416. $f(x) = x^m$ (m — ихтиёрий ҳақиқий сон) функцияни $(x-1)$ икки ҳадга нисбатан n-даражали кўпҳад кўринишида тақрибан ифодаланг ва йўл қўйилган хатоликни баҳоланг. Сўнгра $x - 1 = t$ деб берилган функцияни t нинг даражасига нисбатан ёйинг.

△ $f(x)$ функцияни $(x-1)$ икки ҳадга нисбатан n-даражали кўпҳад кўринишида ифодалаш учун $a = 1$ деб бу функция учун Тейлор кўпҳадини ёзиш керак. Функцияни кўпҳад билан алмаштиришда ҳосил бўладиган хатолик берилган функциянинг Тейлор формуласидаги қолдиқ ҳад R_n нинг катталиги билан аниқланади.

$f(x) = x^m$ функция учун қуйидагиларга эгамиз:

$$f'(x) = mx^{m-1}, \qquad f(1) = 1, \quad f'(1) = m,$$

$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \qquad f''(1) = m(m-1),$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, \qquad f'''(1) = m(m-1)(m-2),$$

. . . .

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)x^{m-k},$$

$$f^{(k)}(1) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1).$$

(*) Тейлор кўпҳадлигидан фойдаланиб,

$$x^m \approx 1 + \frac{m}{1!}(x-1) + \frac{m(m-1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}(x-1)^n$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тақрибий тенгликда йўл қўйилган хатони $f(x) = x^m$ функциянинг Тейлор формуласидаги қолдиқ ҳад R_n орқали топамиз:

$$R_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \times (1 + \theta(x-1))^{m-n-1},$$

бунда $a = 1$, $0 < \theta < 1$.

$x - 1 = t$ белгилаш киритиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(1+t)^m \approx 1+\frac{m}{1!}t+\frac{m(m-1)}{2!}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3+$$
$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n,$$
$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}\cdot t^{n+1}\cdot(1+\theta t)^{m-n-1}. \qquad (4)$$

(4) формула Нъютон биномининг ихтиёрий m кўрсаткич (m- ҳақиқий сон) учун умумлашмасини беради. Хусусий ҳолда, кўрсаткич m бутун мусбат сон бўлганда, $R_m=0$ бўлиб, (4) тенглик Нъютон биномининг элементар формуласига айланади. Агар m бутун мусбат сон бўлмаса, у ҳолда (4) тенглик Нъютон биномининг тақрибий ифодасини беради.

$n\to\infty$ да $-1<t<1$ қийматларда (4) даги $R_n\to 0$ (қаторлар назариясида исбот қилинади). $n=1,\ 2,\ 3$ деб энг содда тақрибий биномиал формулаларга эга бўламиз:

$$(1+t)^m\approx 1+mt,$$
$$(1+t)^m\approx 1+mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2,$$
$$(1+t)^m\approx 1+mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}t^3.$$

Бу формулалардан иккинчиси биринчисига, учинчиси иккинчисига нисбатан аниқроқдир. ▲

417. 1) $\cos 5°$; 2) $\sqrt[3]{121}$ ларнинг тақрибий қийматларини 10^{-6} гача аниқликда ҳисобланг.

△ 1) $\cos x$ функция учун 415-мисолда чиқарилган тақрибий формула (3) дан фойдаланамиз. Бу формулага 5° нинг радиан ўлчови $x=\text{arc}\ 5°=\frac{2\pi}{360}\cdot 5=\frac{\pi}{36}$ ни қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\cos 5°=\cos\frac{\pi}{36}\approx 1-\frac{\pi^2}{2!\,36^2}+\frac{\pi^4}{4!\,36^4}-\ldots\pm\frac{\pi^{2n}}{(2n)!\,36^{2n}}.$$

Бу тақрибий формула билан $\cos 5°$ ни 10^{-6} гача аниқликда ҳисоблаш учун биринчи ҳаддан бошлаб нечта ҳадни олиш кераклигини билиш мақсадида қолдиқ ҳад R_{2m+1} нинг катталигини кетма-кет баҳолаймиз:

$$|R_1|\leqslant\frac{x^2}{2!}=\frac{\pi^2}{2!\,36^2}<0{,}004;$$

$$|R_3| \leqslant \frac{x^4}{4!} = \frac{\pi^4}{4!\,36^4} < 0{,}000003;$$

$$|R_5| \leqslant \frac{x^6}{6!} = \frac{\pi^6}{6!\,36^6} < 0{,}00000003.$$

Бунда $|R_5| < 10^{-6}$. Шунинг учун $\cos 5°$ ни 10^{-6} гача аниқликда тақрибий ҳисоблаш учун формуладаги биринчи 3 та ҳадни олиш етарли:

$$\cos 5° \approx 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{24 \cdot 36^4} \approx 1 - 0{,}0038077 + 0{,}0000024 \approx$$

$$\approx 0{,}996195.$$

Бу ерда ҳисоблашни 10^{-6} гача аниқликда таъминлаш учун π нинг қиймати ($\pi \approx 3{,}1415917$) ва барча оралиқ натижалар 10^{-7} гача аниқликда олинди;

2) $\sqrt[3]{121}$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sqrt[3]{121} = \sqrt[3]{125 - 4} = 5\left(1 - \frac{4}{125}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

(4) биномиал формулада $t = -\frac{4}{125} = -0{,}032$ ва $m = \frac{1}{3}$ деб топамиз:

$$\sqrt[3]{121} = 5\left(1 - \frac{0{,}032}{3} - \frac{0{,}032^2}{9} - \frac{5 \cdot 0{,}032^3}{81} - \right.$$

$$\left. - \frac{10 \cdot 0{,}032^4}{243} - \ldots + R_n\right).$$

Қолдиқ ҳадни кетма-кет баҳолаш йўли билан қуйидагини топамиз:

$$5\,|R_3| = \frac{5\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)\left(\frac{1}{3} - 3\right)\right|}{4!} \cdot 0{,}032^4\,(1 -$$

$$- 0{,}032\theta)^{\frac{1}{3} - 3 - 1} < 10^{-6}.$$

Шундай қилиб, биномиал формулада R_3 дан олдинги биринчи 4 та ҳадни олиш ҳисоблашни 10^{-6} гача аниқликда таъминлайди:

$$\sqrt[3]{121} \approx 5\,(1 - 0{,}0106667 - 0{,}0001138 - 0{,}0000020) \approx$$

$$\approx 4{,}946088. \quad \blacktriangle$$

Худди шунга ўхшаш Тейлор формуласи ёрдамида трансцендент функциялар ва мураккаб алгебраик функцияларнинг сон қийматини топиш мумкин. Кўрсаткичли, логарифмик, тригонометрик функцияларнинг сон қийматлари, квадрат ва куб илдизларнинг сон қийматларининг жадвали мана шундай йўл билан тузилган.

418. 1) 3^x; 2) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 3) xe^x функцияларни x га нисбатан n-даражали кўпҳад кўринишда тақрибий топинг, хатоликларни аниқланг ва уларни x нинг қандай қийматларида етарлича кичик қилиш мумкинлигини кўрсатинг.

419. 1) $e^{\frac{x}{a}}$; 2) $\cos x$ функцияларни $(x-a)$ икки ҳадга нисбатан n-даражали кўпҳад кўринишида тақрибий ифодаланг ва бунда ҳосил бўладиган хатоликни баҳоланг.

420. Қуйидагиларни 0,0001 аниқлик билан ҳисобланг:

1) $\cos 10°$, 2) $\sqrt[3]{e}$, 3) $\sqrt[7]{129}$, 4) $\sin 36°$.

8-§. ФУНКЦИЯЛАРНИНГ МОНОТОНЛИК ШАРТИ. ЭКСТРЕМУМЛАР

1. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ да узлуксиз, $(a; b)$ да дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда а) $\forall\ x\in(a;\ b)$ учун $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ бўлганда $f(x)$ $[a; b]$ да ўсувчи (камаювчи) бўлади; б) $\forall\ x\in(a;\ b)$ учун $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$ бўлганда $f(x)$ функция $[a; b]$ да камаймайдиган (ўсмайдиган) бўлади. $f'(x)=0$ тенгламани қаноатлантирадиган нуқталарга стационар нуқталар дейилади.

Қоида. $f(x)$ функциянинг монотонлик интервалларини топиш учун унинг аниқланиш соҳасини стационар нуқталар билан маълум интервалларга бўлиб, ҳар бир интервалда $f'(x)$ нинг ишораси текширилади. Агар стационар нуқталар мавжуд бўлмаса; $f'(x)$ нинг ишораси $f(x)$ нинг аниқланиш соҳасида текширилади.

2. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ да аниқланган бўлиб, $(x_0 - \delta;\ x_0+\delta)\subset(a;\ b)$ атрофдаги барча x нуқталар учун $f(x)\leqslant f(x_0)$ $(f(x)\geqslant f(x_0))$ ўринли бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг *максимум (минимум)* нуқтаси дейилади.

Максимум ва минимум нуқталар *экстремум* нуқталари дейилади. Функциянинг максимум қиймати y_{max} билан, минимум қиймати y_{min} билан белгилаб ёзилади.

3. Экстремумнинг зарурий шарти.

Агар x_0 $f(x)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлса, у ҳолда $f'(x_0)=0$ ёки $f'(x_0)$ мавжуд бўлмайди. $f'(x_0)=0$ ва чекли ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталар *критик* нуқталар дейилади.

4. Экстремумнинг етарли шарти.

1-қоида. Агар x_0 критик нуқта ва етарли кичик $\delta>0$ учун $f'(x_0-\delta)>0$, $f'(x_0+\delta)<0$ $(f'(x_0-\delta)<0$, $f'(x_0+\delta)>0)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимум (минимум) га эришади. Агар $f'(x_0-\delta)\cdot f'(x_0+\delta)>0$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди.

$f'(x_0)$	$f'(x_0-\delta)$	$f'(x_0+\delta)$	$f(x)$
0 ёки мавжуд эмас	$+$ $-$	$-$ $+$	максимум минимум
0 ёки мавжуд эмас	$+$ $-$	$+$ $-$	экстремум мавжуд бўлмайди

$f(x)$ функциянинг экстремум қийматларини топиш учун қуйидаги ишлар бажарилади:

1) $f(x)$ нинг аниқланиш соҳаси топилади;

2) $f'(x)$ топилади ва $f(x)$ функция аниқланиш соҳасининг ички қисмида ётувчи барча критик нуқталар аниқланади;

3) функция аниқланиш соҳасининг чегаравий нуқталари ва топилган критик нуқталарни ўсиш тартибига қараб ёзиб олинади, сўнгра бу нуқталар билан функция аниқланиш соҳасини маълум интервалларга бўлиб, ҳар бир интервалда $f'(x)$ нинг ишораси текширилади ва юқоридаги қоидага амал қилиб экстремум нуқталар топилади. Бундай йўл билан экстремум қийматларини топиш функция графигини чизишда катта аҳамиятга эга.

2-қоида. Агар $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$ бўлганда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимум (минимум) га эришади.

3-қоида. Агар $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, ..., $f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ бўлса, у ҳолда n жуфт сон бўлганда $f(x)$ x_0 да экстремумга эришади. Бунда $f^{(n)}(x_0)<0$ $(f^{(n)}(x_0)>0)$ бўлганда максимум (минимум) бўлади. n—тоқ сон бўлганда, экстремум мавжуд бўлмайди.

5. $[a; b]$ да узлуксиз бўлган $f(x)$ функциянинг энг катта (кичик) қийматларини топиш учун $f(x)$ функциянинг $x=a$, $x=b$ нуқталардаги қийматлари ва $(a; b)$ га тегишли критик нуқталардаги қийматларини таққослаб, уларнинг энг каттаси (кичиги) ни аниқлаш керак.

Агар $f(x)$ функция бирор интервалда узлуксиз ва бу интервалда фақат битта экстремумга эга бўлиб, экстремум қиймати максимум (минимум) бўлса, у ҳолда максимум (минимум) қиймат $f(x)$ функциянинг берилган интервалдаги энг катта (энг кичик) қиймати бўлади.

421. Қуйидаги функцияларнинг ўсиш ва камайиш интервалларини топинг:

1) $x = \ln(1-x^2)$;

2) $z = x\cdot(1+2\sqrt{x})$;

3) $u = 1-24x+15x^2-2x^3$;

4) $v = \ln|x|$.

△ 1) а) $D(y): 1-x^2>0 \Leftrightarrow |x|<1$; $D(y)=(-1;\ 1)$;

б) $y' = \dfrac{-2x}{1-x^2}$, $y'=0 \Rightarrow x=0$;

в)

	$-1<x<0$	$0<x<1$
$y'(x)$	$+$	$-$
$y(x)$	$\nearrow$	$\swarrow$

Демак, $-1<x<0$ да $y=\ln(1-x^2)$ функция ўсади, $0<x<1$ да камаяди.

2) а) $D(z)=[0;\ \infty)$; б) $z'=1+3\sqrt{x}$, бунда стационар нуқта йўқ (чунки $1+3\sqrt{x}\neq 0$), $[0;\ \infty)$ да z' нинг ишорасини қараш билан чекланамиз, бу оралиқда $z'>0$, демак, z функция $[0;\ \infty)$ да ўсади.

3) а) $D(u)=(-\infty;\ \infty)$ б) $u'=-24+30x-6x^2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=1$, $x_2=4$; $u'=-6(x-1)(x-4)$;

x	$(-\infty;\ 1)$	$(1;\ 4)$	$(4;\ \infty)$
u'	$-$	$+$	$-$
u	$\swarrow$ функция камаяди	$\nearrow$ функция ўсади	$\swarrow$ функция камаяди

4) а) $D(v) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$;

б) $v' = (\ln|x|)' = \frac{|x|'}{|x|} = \pm\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x},\quad \frac{1}{x} \neq 0$

(яъни ҳақиқий илдизларга эга эмас), шунинг учун v' нинг ишорасини $D(v)$ да қараш билан чекланамиз.

в) $x > 0$ да $v' > 0$; $x<0$ да $v' < 0$. Демак, $(-\infty;\ 0)$ да $v(x)$ функция камаяди; $(0;\ \infty)$ да эса ўсади. ▲

422. Қуйидаги функцияларни ўсиш ва камайишга текширинг:

1) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$; 4) $y = \sqrt{(x^2-9)^3}$;

2) $y = x^3 - 3x + 5$; 5) $y = \cos x - x$;

3) $y = e^{kx}$; 6) $y = x|x|$.

423. Қуйидаги функцияларнинг экстремум нуқталарини топинг:

1) $y = x^3 - 12x$; 4) $v = x^2 + \sqrt{x^5}$;

2) $z = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 2)$; 5) $w = \sin^2 x$;

3) $u = x\sqrt{1-x^2}$; 6) $\lambda = x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{x+2}$.

△ 1) $y = x^3 - 12x$ функциянинг экстремум нуқталарини 1-қоидага кўра топайлик. y' ни ва критик нуқталарни топамиз:

$$y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4),\quad y' = 0 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 2.$$

$y = x^3 - 12$ функция $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган ва узлуксиз бўлгани, $x_{1,2} = \pm 2$ бу соҳанинг ички нуқталари бўлгани ҳамда $y' = 3(x^2 - 4)$ $(-\infty;\ \infty)$ да мавжуд бўлгани учун берилган функциянинг $x_{1,2} = \pm 2$ дан бошқа критик нуқталари йўқ.

Энди критик нуқталарнинг ҳар бирининг чап ва ўнг томонида (а) критик нуқтанинг етарли кичик атрофида ёки б) функциянинг аниқланиш соҳасини критик нуқталар билан бўлган интервалларда) y' нинг ишорасини текширамиз. Ҳисоблашни қисқартириш мақсадида текшириш ишларини қуйидаги жадваллар орқали бериш қулайдир:

а)

x	-3	-2	1	2	3
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	ўсади	$y_{max}(-2) = 16$	камаяди	$y_{min}(0) = -16$	ўсади

Бунда -2 ва 2 ларнинг $\delta = 1$ атрофи олинди.

б)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$ ўсади	$y_{max}=16$	камаяди $\swarrow$	$y_{min}=-16$	$\nearrow$ ўсади

Энди $y = x^3 - 12x$ функциянинг экстремум қийматларини 2-қоидага кўра топайлик. Бунинг учун берилган функциянинг стационар нуқталарини топамиз ва ҳар бир стационар нуқтада функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг ишорасини текширамиз: $y' = 3(x^2 - 4)$; $y'' = 6x$; $y''(-2) = -12 < 0$, демак, $x = -2$ да функция максимумга эришади ва $y_{max} = y(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$; $y''(2) = 12 > 0$, демак, $x = 2$ да функция минимумга эришади ва $y_{min} = y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$.

2) $z(x)$ функция $(-\infty; \infty)$ да аниқланган ва узлуксиз. Бу функция $(-\infty; \infty)$ да ҳосилага эга, шунинг учун критик нуқталарни $z'(x) = 0$ шартдан аниқлаймиз:

$$z'(x) = (2x + 1)(x^2 + x - 2) + (2x + 1)(x^2 + x + 2) =$$

$$= (2x + 1)(x^2 + x - 2 + x^2 + x + 2) = (2x + 1) \cdot 2x \cdot (x + 1);$$

$$z' = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \ x_2 = -\frac{1}{2}, \ x_3 = 0.$$

Бу нуқталар функция аниқланиш соҳасига тегишли ички нуқталардир. Функциянинг экстремумга эга бўлишининг етарли шартидаги 1-қоидадан фойдаланамиз. Биринчи тартибли ҳосила ишорасининг ўзгаришини қуйидаги жадвал орқали ифодалаймиз:

	$\infty<x<<-1$	$x_1==-1$	$1<x<-\frac{1}{2}$	$x_2=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<<x<0$	$x_3=0$	$0<x<<\infty$
$z'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$z(x)$	$\swarrow$	$z_{\min}==-4$	$\nearrow$	$z_{\max}==-{}^{63}/_{16}$	$\swarrow$	$z_{\min}==-4$	$\nearrow$

$z'(x)$ нинг $(-\infty; -1)$ даги ишорасини билиш учун бу оралиққа тегишли бирор, масалан, $x=-2$ сонда $z'(x)$ нинг ишорасини билиш етарли: $z'(-2)=(2x(2x+1)(x+1))_{x=-2}=$ $=-4(-3)(-1)<0$, демак, $(-\infty; -1)$ да $z'(x)<0$. Бошқа интервалларда ҳам $z'(x)$ нинг ишораси худди шунинг каби аниқланади.

$x_1=-1$ ва $x_3=0$ нуқталарнинг чап томонидан ўнг томонига ўтганда $z'(x)$ ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиргани учун бу нуқталарда функция минимумга эга бўлади; $x_2=-\frac{1}{2}$ нуқтанинг чап томонидан ўнг томонига ўтганда $z'(x)$ ишорасини «+» дан «—» га ўзгартиргани учун бу нуқтада функция максимумга эга бўлади:

$$z_{\min}(-1)=-4;\ z_{\max}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{63}{16};\ z_{\min}(0)=-4.$$

Агар функциянинг экстремумга эга бўлишининг етарли шартининг 2-қоидасидан фойдалансак, иш анча осон кўчади. Бунинг учун $z''(x)$ ни топамиз:

$$z''(x)=(2x(2x+1)(x+1))'=2(2x^3+3x^2+x)'=$$
$$=2(6x^2+6x+1).$$

Энди $z''(x)$ нинг ишорасини $x_1=-1;\ x_2=-\frac{1}{2};\ x_3=0$ стационар нуқталарда текширамиз (бунда стационар нуқталар критик нуқталар бўлади):

$$z''(-1)=(2(6x^2+6x+1))_{x=-1}=2(6-6+1)=2>0,$$
$$z''\left(-\frac{1}{2}\right)=-1<0,\ z''(0)=2>0.$$

Шундай қилиб, қоидага кўра $x_1=-1;\ x_3=0$ нуқталарда функция минимумга, $x_2=-\frac{1}{2}$ да максимумга эга.

3) Функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз. $D(u): 1-x^2 \geqslant 0 \Rightarrow |x| \leqslant 1$, демак, $D(u) = [-1; 1]$.

Критик нуқталарни излаймиз: $u' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $u' = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_{3,4} = \pm 1$ да u' мавжуд бўлмайди. Булардан $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1; 1]$ нинг ички нуқталари бўлгани ва бу нуқталарда функция узлуксиз бўлгани учун критик нуқталар бўлади. $x_{3,4} = \pm 1$ нуқталар $D(u)$ нинг ички нуқтаси бўлмай, чегара нуқтаси бўлгани учун критик нуқталар бўлмайди.

Энди критик нуқталарга қўшни нуқталарда u' нинг ишорасини текширамиз. Бунинг учун қуйидаги жадвални тузамиз:

	$-0,9$	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	$0,9$
u'	$-$	0	$+$	0	$-$
u	$\swarrow$	$u_{\min} = -\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$u_{\max} = \frac{1}{2}$	$\swarrow$

$$u_{\min} = u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}; \quad u_{\max} = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

4) $v(x)$ функция $[0; \infty)$ да аниқланган.

$v(x)$ функциянинг ҳосиласи ва критик нуқталарини топамиз:

$$v'(x) = 2x + \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}, \quad v' = 0 \Rightarrow x = 0,$$

лекин $x = 0$ нуқта $v(x)$ функция аниқланиш соҳаси $[0; \infty)$ нинг ички нуқтаси эмас, аммо $v(x)$ функция $x = 0$ да узлуксиз. Шунинг учун $x = 0$ критик нуқтаси эмас. $[0; \infty)$ да v' мавжуд ва бу оралиқда $v(x)$ функция битта ҳам критик нуқтага эга бўлмагани учун экстремумга эга эмас. $v(x)$ функция ўзининг аниқланиш соҳасида монотон ўсади.

Агар $x = 0$ нуқта $[0; \infty)$ нинг ички нуқтаси эмаслигини эътиборга олмасдан, функциянинг экстремумга эга бўлиши етарли шартининг 2-қоидасидан фойдалансак, $v'' = \frac{15}{4} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2$,

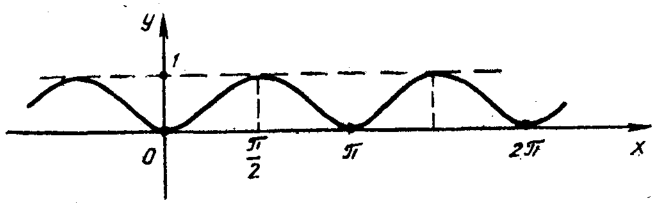
$v''(0) = 2 > 0$, демак, $x = 0$ да $v(x)$ функция минимумга эга деган нотўғри хулосага келамиз.

5) Критик нуқталарини топамиз:

$$w' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x; \quad w' = 0 \Rightarrow x_k = \frac{k\pi}{2},$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ҳамма x_k нуқталар критик нуқталардир, чунки функция сонлар ўқининг ҳамма нуқталарида аниқланган ва узлуксиз, w' ҳам $(-\infty; \infty)$ да мавжуд.

Критик нуқталарда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг ишорасини текширамиз: $w'' = 2\cos 2x$; $w''(x_k) = 2\cos k\pi$.



24- чизма

k — жуфт сон бўлганда $w''(x_k) = 2 > 0$ бўлиб, x_k нуқталар минимум нуқталари ва $w_{min} = 0$; k — тоқ сон бўлганда $w''(x_k) = -2 < 0$ бўлиб, x_k нуқталари максимум нуқталари бўлиб, $w_{max} = 1$ (24-чизма) ўринлидир.
Бу ерда w функциянинг максимум ва минимумлари қатъий алмашиб боради.

6) $\lambda(x)$ функция $(-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$ да аниқланган. Унинг критик нуқталарини топамиз:

$$\lambda'(x) = \frac{\frac{2}{3}\cdot x^{-1/3}(x+2) - x^{2/3}}{(x+2)^2} = \frac{2x + 4 - 3x}{3x^{1/3}\cdot(x+2)^2} = \frac{4 - x}{3x^{1/3}(x+2)^2};$$

$$\lambda'(x) = 0 \Rightarrow x = 4; \quad x = 0 \text{ ва } x = -2 \text{ да } \lambda'(x) = \infty.$$

Шундай қилиб, $x = 4$, $x = 0$ лар берилган функциянинг критик нуқталаридир ($x = -2$ функциянинг аниқланиш соҳасига кирмагани учун критик нуқта бўла олмайди).

$\lambda'(x)$ нинг ишорасининг ўзгаришини билиш учун қуйидаги жадвални тузамиз:

	$-\infty<x<$ <-2	$x=-2$	$-2<x<$ <0	$x=0$	$0<x<4$	$x=4$	$4<x<$ $<\infty$
$\lambda'(x)$	$-$	∞	$-$	∞	$+$	0	$-$
$\lambda(x)$	↙	мавж. эмас	↙	$\lambda_{\min}=$ $=0$	↗	$\lambda_{\max}=$ $=\sqrt[3]{2}/3$	↙

$x=-3$ да $\lambda'(-3)<0$, шунинг учун $(-\infty;\ -2)$ да $\lambda'(x)<0$ ва ҳоказо бошқа интервалларда ҳам $\lambda'(x)$ нинг ишораси худди шунинг каби аниқланади.

Жадвалдан $\lambda_{\min}=\lambda(0)=0$, $\lambda_{\max}=\lambda(4)=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$ эканлиги кўринади. $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ ларни топайлик:

$$\lambda_{\min}=\lambda(0)=\left(x^{2/3}\cdot\frac{1}{x+2}\right)_{x=0}=0\cdot\frac{1}{2}=0;\quad \lambda_{\max}=\lambda(4)=$$
$$=\left(x^{2/3}\cdot\frac{1}{x+2}\right)_{x=4}=4^{2/3}\cdot\frac{1}{6}=2^{4/3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{6}=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}.$$

Бу мисолда $x=0$ критик нуқтанинг характерини аниқлашда экстремум етарли шартининг 2-қоидасидан фойдаланиб бўлмайди, чунки $x=0$ нуқтада функция дифференциалланувчи эмас. ▲

424. $f(x)=x^3e^{-x}$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг.

△ Критик нуқталарни топамиз:

$f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2e^{-x}(3-x)$; $f'(x)=0\Rightarrow x_1=$ $=0$, $x_2=3$. Бу нуқталар критик нуқталардир.

$f'(x)$ $(-\infty;\ \infty)$ да мавжуд бўлгани учун экстремумнинг етарли шартининг 2-қоидасидан фойдаланиш қулайдир. Бунинг учун $f''(x)$ ни топамиз:

$$f''(x)=2xe^{-x}(3-x)-x^2e^{-x}(3-x)-x^2e^{-x}=$$
$$=xe^{-x}(x^2-6x+6).$$

Критик нуқталарни $f''(x)$ га қўйсак, $f''(0)=0$; $f''(3)=$ $=3e^{-3}(9-18+6)<0$ га эга бўламиз. Экстремум етарли шартининг 2-қоидасига кўра $f''(3)<0$ бўлгани учун $x=3$ нуқтада функция максимумга эга бўлади ва у $f(3)=27e^{-3}$ га тенг. $x_1=0$ критик нуқтанинг характери ҳозирча аниқ эмас, чунки

$$f''(0)=0.$$

$x_1 = 0$ критик нуқтанинг характерини аниқлаш учун экстремумнинг етарли шартининг 3-қоидасидан фойдаланамиз. Бунинг учун $f'''(0)$ ни топамиз:

$$f'''(x) = -e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x) + e^{-x}(3x^2 - 12x + 6) =$$
$$= e^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6), \quad f'''(0) = 6 \neq 0.$$

$x = 0$ нуқтада биринчи 0 дан фарқли ҳосила 3-тартибли (тоқ тартибли). Демак, $x = 0$ критик нуқта экстремум нуқтаси эмас. ▲

425. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ функциянинг $[-1;\ 4]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

△ 1) $f(x)$ функциянинг сегментнинг чегараларидаги қийматларини топамиз:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -3;$$
$$f(4) = 4^3 - 3\cdot 4^2 + 1 = 17.$$

2) $f(x)$ функциянинг $(-1;\ 4)$ интервалдаги критик нуқталари ва бу нуқталардаги функциянинг қийматларини топамиз:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2); \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \ x_1 = 2.$$

Бу нуқталар критик нуқталардир.

$$f(0) = (x^3 - 3x^2 + 1)_{x=0} = 1; \quad f(2) = (x^3 - 3x^2 +$$
$$+ 1)_{x=2} = -3.$$

3) Функциянинг топилган қийматларини ўзаро солиштирамиз:

$$f(-1) = -3, \ f(4) = 17, \ f(0) = 1, \ f(2) = -3.$$

Демак, $\max\limits_{[-1;\ 4]} f(x) = 17; \ \min\limits_{[-1;\ 4]} f(x) = -3.$ ▲

426. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ функциянинг $(0;\ \infty)$ даги энг катта қийматини аниқланг.

△ $(0;\ \infty)$ да функция дифференциалланувчи, критик нуқталарни топамиз:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x =$$
$$= 0 \Rightarrow x = e$$

критик нуқтадир.

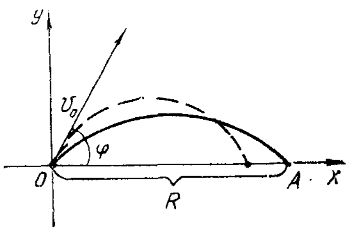
$x = 0$ да $f'(x) = \infty$, лекин $x = 0$ нуқтада $f(x)$ функция аниқланмагани учун $x = 0$ критик нуқта бўла олмайди.

Демак, $(0;\ \infty)$ интервалда битта $x=e$ критик нуқта бор экан. Энди бу нуқтада экстремумнинг қайси бир қиймати мавжуд бўлишини кўрайлик. Бунинг учун экстремумнинг етарли шартининг 2-қоидасидан фойдаланамиз:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x(3-\ln x)}{x^4}=-\frac{3-\ln x}{x^3};$$

$$f''(e)=-\frac{3-\ln e}{e^3}=-\frac{3-1}{e^3}=-\frac{2}{e^2}<0.$$

Демак, $x=e$ да функция максимумга эга экан ва $f_{\max}=$ $=f(e)=\frac{1}{e}$. Шундай қилиб, $f(x)$ функция $(0;\ \infty)$ да фақат битта максимум нуқтасига эга бўлди, шунинг учун $\max\limits_{(0;\ \infty)} f(x)=\frac{1}{e}$ ўринлидир. ▲



25- чизма

427. Горизонтга φ бурчак билан қиялатиб қўйилган тўпдан v_0 бошланғич тезлик билан отилган ўқнинг бўшлиқда учиш узоқлиги $R=OA$ (25- чизма)

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\varphi}{g}$$

формула билан аниқланади (g—оғирлик кучининг тезланиши). Берилган v_0 бошланғич тезликда ўқнинг учиш узоқлиги R энг катта бўлиши учун φ бурчак қандай бўлиши аниқлансин.

△ R миқдор ўзгарувчи φ бурчакнинг функцияси. Шу функцияни $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ кесмада максимумга текширамиз.

$R(\varphi)$ функция $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ да узлуксиз бўлгани учун $R(\varphi)$ нинг $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ даги энг катта қийматини қуйидагича топамиз:

1) $R(0)=0;\quad R\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

2) $R(\varphi)$ нинг $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ даги критик нуқталарини топамиз:

$$R'(\varphi)=\frac{2v_0}{g}\cos 2\varphi;\quad R'(\varphi)=0\Rightarrow\cos 2\varphi=0\Rightarrow 2\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4};\quad R\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{v_0^2\sin 2\varphi}{g}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=\frac{v_0^2}{g};$$

3) Топилган $R(0)=0$, $R\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $R\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{v_0^2}{g}$ қийматларни солиштирамиз.

Шундай қилиб, $\max\limits_{\left[0;\ -\frac{\pi}{2}\right]} R(\varphi)=\frac{v_0^2}{g}$ экан. ▲

428. Пароходга ёқиш учун сарфланган ёнилғининг харажати унинг тезлигининг кубига пропорционал. 10 км/соат тезликда сарфланаётган ёнилғи харажати соатига 30 сўм, қолган харажатлар (тезликка боғлиқ бўлмаган) соатига 480 сўмни ташкил қилади. Қандай тезликда 1 км масофага сарфланган харажатлар энг кичик бўлади? Шунда умумий харажатлар йиғиндиси соатига қанча бўлади?

Δ Пароходнинг тезлигини x км/соат деб белгилайлик; шу тезликка мос келган харажат y сўм бўлсин дейлик. Бу ҳолда $\frac{y}{x^3}=\frac{30}{10^3}=\frac{3}{100}=0{,}03$; $y=0{,}03x^3$ соатига сарф қилинган харажатни билдиради.

Пароход 1 км масофани x км/соат тезлик билан $\frac{1}{x}$ соатда босиб ўтади; 1 соатда қилинган умумий харажат $(0{,}03x^3+ + 480)$ сўмни ташкил этади. $\frac{1}{x}$ соатда қилинган умумий харажат $y=\frac{1}{x}(0{,}03x^3+480)=\frac{3x^2}{100}+\frac{480}{x}$ бўлади.

Энди $y=\frac{3x^2}{100}+\frac{480}{x}$ функциянинг x нинг қандай қийматида энг кичик бўлишини текширамиз. $D(y)=(0;\ \infty)$ ва бунда $y(x)$ функция узлуксиз. $y(x)$ функциянинг критик нуқталарини топамиз:

$$y'(x)=\frac{6x}{100}-\frac{480}{x^2}=\frac{3x}{50}-\frac{480}{x^2}=\frac{3x^3-24000}{50x^2};$$

$y'=0\Rightarrow x^3=8000$, $x=20$ (км/с) критик нуқта бўлади, $x=0$ да y' мавжуд бўлмаса-да, бу нуқтада $y(x)$ функция аниқланмагани учун критик нуқта бўла олмайди.

Энди критик нуқта $x=20$ да экстремумнинг қайси бир қиймати мавжуд бўлишини кўрайлик, бунинг учун экстремумнинг етарли шартининг 1-қоидасидан фойдаланайлик ва уни қуйидаги жадвалда ифодалайлик:

	$0<x<20$	$x=20$	$20<x<\infty$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\swarrow$	$y_{\min}=36$	$\nearrow$

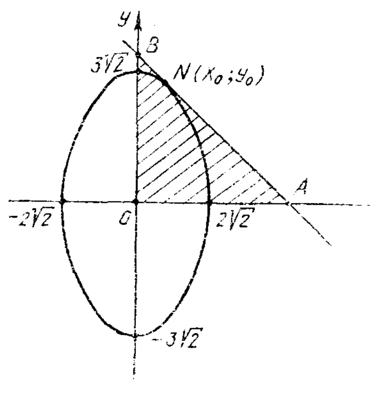
$y'(1)=\frac{3-24000}{50}<0$, демак, $0<x<20$ да $y'(x)<0$; $20<$ $<x<\infty$ да эса $y'(x)>0$.

Демак, пароход 20 км/соат тезлик билан юрганда сарфланган харажат энг кичик бўлар экан, 1 соатлик харажат эса

$$y=0{,}03\cdot 20^3+480=0{,}03\cdot 8000+480=240+480=720$$

сўмни ташкил этади. ▲

429. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$ эллипснинг қайси нуқтасидан ўтказилган уринма билан координата ўқлари ташкил қилган учбурчакнинг юзи энг кичик бўлади (26-чизма)?



26-чизма

△ Эллипсда ётувчи изланаётган нуқтани $N(x_0;\ y_0)$ деб белгилаймиз, у ҳолда бу нуқтадан эллипсга ўтказилган уринма тўғри чизиқ тенгламаси $\frac{xx_0}{8}+\frac{yy_0}{18}=1$ бўлади. Уринма тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасини $A(x_1;\ 0)$, Oy ўқ билан кесишган нуқтасини $B(0;\ y_1)$ десак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{x_1x_0}{8}+\frac{0\cdot y_0}{18}=1 \Rightarrow x_1=\frac{8}{x_0};$$

$$\frac{0\cdot x_0}{8}+\frac{y_1y_0}{18}=1 \Rightarrow y_1=\frac{18}{y_0};$$

$N(x_0;\ y_0)$ нуқта эллипсда ётганлиги учун $\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{18}=$ $=1 \Rightarrow 4y_0^2=72-9x_0^2 \Rightarrow y_0=\sqrt{\frac{y}{4}(8-x_0^2)}=\frac{3}{2}\sqrt{8-x_0^2}$.

Масала шартига кўра:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}x_1\cdot y_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x_0}\cdot\frac{18}{y_0}=\frac{72}{x_0\cdot\frac{3}{2}\sqrt{8-x_0^2}}=$$

$$=\frac{48}{x_0\cdot\sqrt{8-x_0^2}},$$

бунда $0<x_0<2\sqrt{2}$ дир.

Энди критик нуқталарни топамиз:

$$S'_\Delta=-\frac{48\left(\sqrt{8-x_0^2}-\frac{x_0^2}{\sqrt{8-x_0^2}}\right)}{x_0^2\cdot(8-x_0^2)}=-\frac{48\,((8-x_0^2)-8_0^2)}{x_0^2\cdot\sqrt{(8-x_0^2)^3}}=$$

$$=-\frac{48\,(8-2x_0^2)}{x_0^2\cdot\sqrt{(8-x_0^2)^3}};$$

$$S'_\Delta=0\Rightarrow 8-2x_0^2=0\Rightarrow x_0^2=4\Rightarrow(x_0)_{1,2}=\pm\,2.$$

S'_Δ мавжуд бўлмайдиган нуқталар 0; $\pm\,2\sqrt{2}$. Бу нуқталар ичида фақат $x_0=2$ гина критик нуқта бўла олади, қолган 0, -2, $\pm\,2\sqrt{2}$ лар S_Δ функциянинг аниқланиш соҳасига кирмаганлиги учун критик нуқта бўла олмайди.

$x_0=2$ критик нуқта характерини қуйидаги жадвалда кўрсатамиз:

	$0<x_0<2$	$x_0=2$	$2<x_0<2\sqrt{2}$
S'_Δ	$-$	0	$+$
S_Δ	$\swarrow$	$(S_\Delta)_{\min}=12$	$\nearrow$

$S'_\Delta(1)=-\frac{48\,(8-2)}{1^2\cdot\sqrt{(8-1)^3}}<0$, демак, $0<x_0<2$ да $S'_\Delta<0$.

$S'_\Delta(2{,}5)=-\frac{48\,(8-12{,}5)}{6{,}25\cdot\sqrt{(8-6{,}25)^3}}>0$, демак, $2<x_0<2\sqrt{2}$ да

$$S'_\Delta > 0.$$

Шундай қилиб,

$$\min\ S_\Delta = \left(\frac{48}{x_0 \cdot \sqrt{8 - x_0^2}}\right)_{x_0=2} = \frac{48}{2 \cdot 2} = 12 \text{ кв. бирл.}$$

бўлиб, $N(x_0;\ y_0) = N(2;\ 3)$ экан. ▲

Қуйидаги функцияларнинг экстремум қийматларини топинг:

430. $y = x^2(x - 6)$.

431. $y = 3 - 2x^2 - x^4$.

432. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

433. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$.

434. $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

435. $y = e^{-x} + e^{2x}$.

436. $y = \sin x + \cos x$.

437. $y = \frac{x}{\ln x}$.

438. $y = \sqrt{4x - x^2}$.

Қуйидаги функцияларнинг берилган кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини аниқланг:

439. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$, $[0;\ 3]$.

440. $y = x^4 - 2x^2 + 3$, $[-2;\ 1]$.

441. $y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$, $[-1;\ 3]$.

442. $y = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$, $[-2;\ 1]$.

443. $y = \ln x$, $(0;\ 1]$.

444. $y = e^{-x^2}$, $(-\infty;\ \infty)$.

445. $y = 2x + \cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

446. $y = \sin x \cdot \sin 2x$, $(-\infty;\ \infty)$.

447. Цилиндр шаклидаги очиқ бакка v л маҳсулот сиғади. Унинг баландлиги ва асосининг радиуси қандай бўлганда бакка энг кам маҳсулот кетади?

448. Узунлиги l га тенг бўлган сим бўлагини букиб шундай тўғри тўртбурчак ясангки, унинг юзи энг кичик бўлсин.

449. Тўғри тўртбурчак шаклидаги ҳовлининг бир томони канал четига туташган, уч томони эса девор билан ўралган. Ҳовлининг ўлчамлари қандай бўлганда унинг юзи 800 $м^2$ га тенг бўлиб, девор узунлиги энг кичик бўлади?

450. Узунлиги 48 см, эни 30 см бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги қалин қоғоз (картон) нинг тўрт учидан бир хил квадратчалар қирқиб олиниб, қоғознинг қолган қисмидан тўғри тўртбурчак шаклида очиқ қутича тайёрланган. Қутичанинг ҳажми энг катта бўлиши учун қирқиб олинган квадратчанинг томони қандай бўлиши керак?

451. Ричаг A да таянч нуқтасига эга бўлиб, B $(AB = a)$ нуқтага P юк осилган. Ричаг узунлиги бирлигининг оғирлиги k га тенг. Энг кичик куч билан P юк текислашиши учун ричаг узунлиги қандай бўлиши керак? (Текислашиш кучининг моменти юк ва ричаг моментларининг йиғиндисига тенг бўлиши керак.)

452. Бошланғич массаси m_0 га тенг бўлган ёмғир томчиси оғирлик кучининг таъсирида текис буғланиб тушади, бунда унинг массасининг камайиши вақтга пропорционал (пропорционаллик коэффициенти k га тенг). Томчи туша бошлагандан қанча вақтдан кейин унинг кинетик энергияси энг катта бўлади ва у қандай бўлади? (Бунда ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмайди.)

453. Ҳарбий кема лангарда турибди, ундан қирғоқнинг энг яқин нуқтасигача 9 км; кемадан лагерга чопар юбориш керак (лагерь қирғоқда жойлашган); кемага қирғоқдаги энг яқин нуқтадан лагергача бўлган масофа қирғоқ бўйлаб 15 км. Агар чопар пиёда 5 км/соат, эшкакли қайиқда 4 км/соат тезлик билан юрса, у лагерга энг кам вақтда бориши учун эшкакли қайиқ билан лагерга неча км қолгунга қадар сузиб бориши керак?

454. 1,4 м баландликка эга бўлган расм деворга шундай осилганки, унинг пастки чети кузатувчининг кўзидан 1,8 м баландликда. Расмни яхши кўриш учун кузатувчи девордан қандай масофада туриши керак (яъни кўриш бурчаги энг катта бўлиши учун)?

455. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс ичига чизилган энг катта юзли тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

456. Қандай мусбат сонни ўзига тескари сонга қўшганда йиғинди энг кичик бўлади?

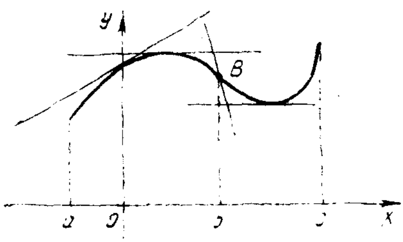
457. R радиусли шарга энг катта ҳажмли цилиндрни ички чизинг.

458. R радиусли шарга энг катта ҳажмли конусни ички чизинг.

459. Узунликлари бир хил бўлган 3 та тахтадан кўндаланг кесими трапеция бўлган тарнов ясаш керак. Тарнов ён ёқларининг қиялиги қанча бўлганда унинг кўндаланг кесим юзи энг катта бўлади?

460. Берилган ҳажмдаги цилиндрнинг тўла сирти энг кичик бўлиши учун унинг радиуси R билан баландлиги H ўртасидаги боғланишни топинг.

9- §. ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ҚАВАРИҚЛИГИ ВА БОТИҚЛИГИ. БУРИЛИШ НУҚТАСИ. АСИМПТОТАЛАР



27- чизма

1. Таъриф. Агар $(a; b)$ да $y = f(x)$ эгри чизиқнинг барча нуқталари унинг ҳар қандай уринмасидан юқорида (пастда) бўлса, шу оралиқда эгри чизиқ ботиқлиги билан юқорига (пастга) қараган дейилади (27-чизма).

27-чизмада $(a; b)$ да эгри чизиқ ботиқлиги билан пастга (қавариқ), $(b; c)$ да юқорига (ботиқ) қараган.

Эгри чизиқнинг қавариқ қисмини ботиқ қисмидан ажратган нуқта унинг *бурилиш* нуқтаси дейилади.

2. Ҳосила ёрдамида ботиқлик (қавариқлик)ни текшириш.

Агар $a < x < b$ да	у ҳолда $(a; b)$ да
$f''(x) > 0$ бўлса,	$y = f(x)$ ботиқлиги билан юқорига (қавариқлиги пастга) қараган бўлади.
$f''(x) < 0$ бўлса,	$y = f(x)$ ботиқлиги билан пастга (қавариқлиги юқорига) қараган бўлади

Ботиқлиги билан юқорига (пастга) қараган деган сўзлар ўрнида $\frown$ ($\smile$) белгиларни ишлатамиз, яъни

Агар $a > x < b$ да	у ҳолда $y = f(x)$
$f''(x) > 0$ бўлса, $f''(x) < 0$ бўлса,	$\cup$ $\cap$

$y = f(x)$ функция иккинчи тартибли ҳосиласини 0 га айлантирадиган ва мавжуд этмайдиган, лекин $f(x)$ эгри чизиқ узлуксиз бўладиган ва аниқланиш соҳасининг ички нуқтаси бўладиган нуқталарни бурилишга *гумон* нуқталар дейилади (бундай нуқталарни критик нуқталар билан алмаштириб юборманг).

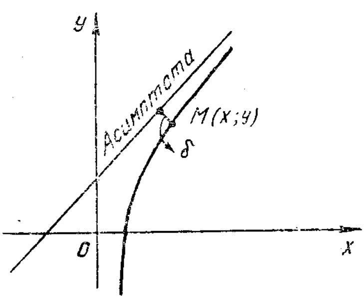
Бурилишнинг мавжудлиги учун (агар иккинчи тартибли ҳосила мавжуд деб фараз этилса) $y'' = 0$ шарт зарурийдир, лекин етарли эмас.

3. Етарли шарт. Эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан аниқланган бўлсин. Агар $f''(a) = 0$ бўлса ёки $f''(a)$ мавжуд бўлмаса ($x = a$ нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз бўлса) ва $x = a$ нуқтадан ўтишда $f''(x)$ нинг ишораси ўзгарса, эгри чизиқнинг абсциссаси $x = a$ бўлган нуқтаси *бурилиш* нуқтаси бўлади.

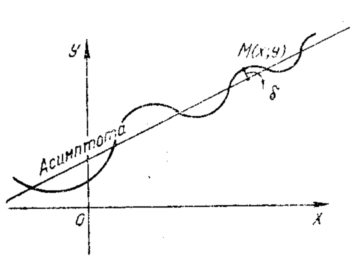
4. Эгри чизиқнинг асимптоталарини топиш.

Таъриф. Агар эгри чизиқнинг ўзгарувчи нуқтаси M чексиз узоқлашганда унинг бирорта a тўғри чизиқдан масофаси нолга интилса, a тўғри чизиқ эгри чизиқнинг асимптотаси деб аталади (28- 29- чизмалар).

а) Агар $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ ёки $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$ бўлса, $x = a$ *вертикал асимптота* бўлади.



28- чизма



29- чизма

б) Агар $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$ лар мавжуд бўлса (бу иккала формулада $x \to +\infty$ ёки $x \to -\infty$), у ҳолда $y = kx + b$ *оғма асимптота* бўлади.

Агар k ва b лардан бирортаси ∞ (ёки $-\infty$) га тенг бўлса, оғма асимптота мавжуд бўлмайди.

Берилган эгри чизиқ ўзининг асимптотасига худди ўзгарувчининг ўзининг лимитига яқинлашгани каби яқинлашиши мумкин.

461. Қуйидаги эгри чизиқларнинг ботиқлик, қавариқлик интерваллари ва бурилиш нуқталарини топинг:

1) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; 2) $z = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$;

3) $u = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$; 4) $v = \frac{1}{(x+1)^3}$.

Берилган функцияларнинг ботиқлик, қавариқлик интервалларини топиш учун уларнинг аниқланиш соҳаларини ва бурилишга гумон нуқталарини топамиз. Сўнгра бурилишга гумон нуқталар билан функция аниқланиш соҳасини маълум интервалларга бўлиб, ҳар бир интервалда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг ишорасини текширамиз. Агар бир интервалдан иккинчи интервалга ўтишда $f''(x)$ ўз ишорасини ўзгартса, у ҳолда бу икки интервални ажратиб турувчи бурилишга гумон нуқтада бурилиш мавжуд бўлади, акс ҳолда бурилиш мавжуд бўлмайди.

△ 1) а) Функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) = (-\infty; \infty)$;

б) бурилишга гумон нуқталарни топамиз: $y' = 15x^4 - 20x^3$; $y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$; $y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$; y'' $(-\infty; \infty)$ да мавжуд бўлгани учун $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$ функциянинг $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ дан бошқа бурилишга гумон нуқтаси йўқ;

в) бурилиш учун гумон нуқталарнинг характерини (ҳолатини) қуйидаги жадвалда кўрсатамиз:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
y''	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$\frown$	бур. йўқ	$\frown$	$y_{бур} = y(1) = 2$	$\smile$

Бўлинган интервалларда y'' нинг ишорасини текшириш учун бу интервалларнинг бирор нуқтасида y'' нинг ишорасини билиш етарли, масалан, $y''(-1) = -120 < 0$, демак, $(-\infty; 0)$ да $y'' < 0$.

$y_{бур} = y(1) = (3x^5 - 5x^4 + 4)_{x=1} = 2.$

2) а) $D(z) = (-\infty; \infty)$,

б) $z' = -\frac{7}{5}(x+2)^{\frac{2}{5}}$; $z'' = -\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{5}(x+2)^{-\frac{3}{5}} =$
$= -\frac{14}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^3}}$.

z'' бирор нуқтада ҳам 0 га айланмайди, лекин $x = -2$ да мавжуд эмас ва бу нуқта функция аниқланиш соҳасининг ички нуқтаси бўлиб, бу нуқтада функция узлуксиз бўлгани учун $x = -2$ да $z = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$ эгри чизиқ бурилишга эга бўлиши мумкин. Буни қуйидаги жадвалда кўрсатамиз:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; \infty)$
z''	$+$	мав. эмас	$-$
z	$\cup$	бур. бор $z_{бур} = z(-2) = 3$	$\cap$

$z_{бур} = z(-2) = (3 - \sqrt[5]{(x+2)^7})_{x=-2} = 3.$

3) а) $D(u) = [1; \infty)$,

б) $u'' = 15(x-1)^{\frac{1}{2}} + 15(x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{15x}{\sqrt{x-1}}$; $u''(x)$

$x = 0$ да 0 га тенг бўлиб, $x = 1$ да мавжуд бўлмайди. Лекин $x = 0$, $x = 1$ ларнинг бирортаси ҳам бурилишга гумон нуқтанинг абсциссаси бўла олмайди, чунки улар $[1; \infty)$ нинг ички нуқталари эмас. Шундай қилиб, $u(x)$ эгри чизиқ бирорта ҳам бурилиш нуқтасига эга бўлмай, ўзининг аниқланиш соҳасида ботиқлиги билан юқорига қарагандир, чунки $[1; \infty)$ да $u''(x) > 0$.

4) а) $D(v) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$;

б) $v' = -\frac{3}{(x+1)^4}$; $v'' = \frac{12}{(x+1)^5}$, бу ерда $v''(x)$ ни 0 га айлантирадиган нуқта йўқ, $x=-1$ да $v''(x)$ мавжуд эмас. Лекин $x=-1$ да $v(x)$ функция узилишга эга бўлгани учун у бурилишга гумон нуқтанинг абсциссаси бўла олмайди. Шундай қилиб, $x \in (-\infty; -1)$ да $v''(x)<0$; $x\in(-1; \infty)$ да эса $v''(x)>0$, яъни $(-\infty; -1)$ да $v(x)$ эгри чизиқ ботиқлиги билан пастга, $(-1; \infty)$ да эса ботиқлиги билан юқорига қараган. ▲

462. Қуйидаги эгри чизиқларнинг асимптоталарини топинг:

1) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$;

2) $y=xe^x$;

3) $y=x+\dfrac{\sin x}{x}$;

4) $y=x\cdot\operatorname{arc\,ctg} x$

5) $y=\ln(4-x^2)$.

△ 1) а) Эгри чизиқнинг вертикал асимптоталарини унинг узилиш нуқталаридан излаймиз: $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$ функция $x=3$ да аниқланмаган, яъни узилган. $\lim\limits_{x\to3+0}\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}=$ $=-\infty$, $\lim\limits_{x\to3-0}\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}=\infty$, яъни $x=3$ вертикал асимптота экан;

б) оғма асимптотани топамиз:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+3}{x^2-3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-3x}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}-3}{1-\frac{3}{x}}=-3.$$

k ва b ларнинг топилган қийматларини $y=kx+b$ тенгламага қўйиб, $y=x-3$ оғма асимптота тенгламасига эга бўламиз. $x\to-\infty$ да k ва b ларнинг қийматлари аввалги топилган қийматларга тенг бўлгани учун берилган эгри чизиқ бошқа асимптоталарга эга эмас.

2) а) $y=xe^x$ эгри чизиқ $(-\infty; \infty)$ да узлуксиз бўлгани учун вертикал асимптотага эга эмас.

б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$,

бу ҳолда оғма асимптотанинг бурчак коэффициенти мавжуд бўлмайди, демак, оғма асимптота мавжуд эмас. Энди $x\to-\infty$ да k ва b ларни топайлик.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=0;\ b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}xe^x=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

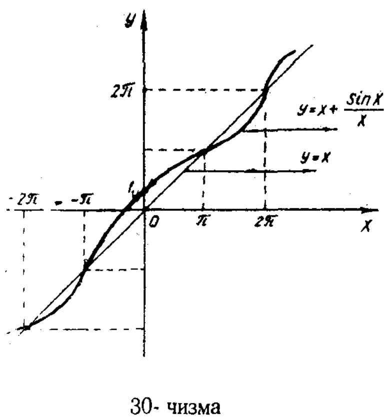
(бу ерда Лопиталь қоидасидан фойдаланилди).

Демак, $x\to-\infty$ да эгри чизиқ $y=0$ оғма (бу ерда горизонтал) асимптотага эга экан.

3) а) $y=x+\frac{\sin x}{x}$ эгри чизиқ $x=0$ да аниқланмаган, лекин $x\to0+0$ $(x\to0-0)$ да $y\not\to\pm\infty$ учун $x=0$ вертикал асимптота бўла олмайди;

б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x^2}\right)=1$, чунки $|\sin x|\leqslant1$;

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. $x\to-\infty$ да ҳам асимптотанинг параметрларининг қийматлари юқоридагидек бўлади. Шундай қилиб, $x\to\infty$ ва $x\to-\infty$ да эгри чизиқ $y=x$ оғма асимптотага эга. Бу ҳолда эгри чизиқ ўз асимптотасини чексиз кўп нуқталарда кесади (30- чизмага қаранг).



30- чизма

4) а) $y=x\,\mathrm{arcctg}x$ функция $(-\infty;\infty)$ да узлуксиз бўлгани учун $y=x\,\mathrm{arcctg}x$ эгри чизиқ вертикал асимптотага эга эмас;

б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{arcctg}x=\mathrm{arcctg}(+\infty)=0$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}x\,\mathrm{arcctg}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{arcctg}x}{\frac{1}{x}}.$$

2 марта Лопиталь қоидасини қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arc\,ctg} x}{1/x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1.$$

Демак, $x\to+\infty$ да берилган эгри чизиқ $y=1$ оғма (горизонтал) асимптотага эга.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,ctg} x=\operatorname{arc\,ctg} x\ (-\infty)=\pi,\ b=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}(x\operatorname{arc\,ctg} x-\pi x)=\lim_{x\to-\infty}x\,(\operatorname{arc\,ctg} x-$$

$$-\pi)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arc\,ctg} x-\pi}{1/x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

Демак, $x\to-\infty$ да эгри чизиқ $y=\pi x+1$ асимптотага эга.

5) а) $y=\ln(4-x^2)$ эгри чизиқ $x=\pm 2$ да чексиз узилишга ($x\to 2+0$ да $y\to-\infty$, $x\to 2-0$ да $y\to\infty$) эга бўлгани учун $x=\pm 2$ тўғри чизиқлар билан берилган эгри чизиқ учун вертикал асимптота бўлади;

б) $y=\ln(4-x^2)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $-2<x<2$ бўлгани учун x ∞ га интила олмайди, демак, берилган эгри чизиқ оғма асимптотага эга бўла олмайди. ▲

Қуйидаги эгри чизиқларнинг ботиқлик, қавариқлик интерваллари ва бурилиш нуқталарини топинг.

463. $y=x^3-5x^2+3x-5.$

464. $y=x^4-12x^3+48x^2-50.$

465. $y=(x+2)^6+2x+2.$

466. $y=a-\sqrt[3]{x-b}.$

467. $y=\ln(1+x^2).$

468. $y=\frac{1}{x^2-4}.$

469. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

470. $y = xe^{-x}$.

471. $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ эгри чизиқнинг бир тўғри чизиқда ётувчи 3 та бурилиш нуқтасига эга эканини кўрсатинг.

472. $y = x \cdot \sin x$ эгри чизиқнинг бурилиш нуқталари $y^2 (4 + x^2) = 4x^2$ чизиқда ётишини кўрсатинг.

473. $x = 1$ да $y = x^3 + ax^2 + 1$ эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси бўлиши учун a қандай бўлиши керак?

474. Коэффициентлари мусбат, номаълум эса фақат жуфт даражаларда қатнашган ҳар қандай кўпҳад графиги қавариқлиги билан пастга қараган бўлади. Исботланг.

Қуйидаги чизиқларнинг асимптоталарини топинг.

475. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

476. $xy = a$.

477. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$.

478. $2y (x + 1)^2 = x^3$.

479. $y^3 = 6x^2 + x^3$.

480. $y = xe^{-x}$.

481. $y = \frac{\ln x}{x}$.

482. $y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}$.

10-§. ФУНКЦИЯНИ УМУМИЙ УСУЛДА ТЕКШИРИШ ВА УНИНГ ГРАФИГИНИ ЯСАШ

$y = f(x)$ функцияни умумий усулда текшириш ва унинг графигини ясаш учун қуйидаги ишларни бажариш керак:

I. функциянинг аниқланиш соҳасини топиш;

II. функциянинг узилиш нуқталарини ва бу нуқталардаги бир томонли лимитларни топиш;

III. функциянинг тоқ, жуфтлиги, даврийлигини аниқлаш;

IV. функция графигининг координата ўқлари билан кесишган нуқтасини топиш, бунинг учун

а) $\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0 \ (Ox); \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = f(x), \\ x = 0 \ (Oy) \end{cases}$

системаларни ечиш ва аниқланиш соҳасининг чегараларида функция ҳолатини аниқлаш;

V. $y=f(x)$ эгри чизиқнинг: а) вертикал, б) оғма асимптоталарини топиш;

VI. функциянинг ўсиш ва камайиш интерваллари ҳамда экстремум нуқталарини топиш;

VII. $y=f(x)$ эгри чизиқнинг ботиқлик, қавариқлик интерваллари ҳамда бурилиш нуқталарини топиш;

VIII. олинган натижаларга қараб функция графигини ясаш.

483. Қуйидаги функцияларни тўла текширинг ва уларнинг графигини ясанг:

1) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$;

2) $y=xe^x$;

3) $y=x\cdot\operatorname{arc\,ctg}x$;

4) $y=\ln(4-x^2)$;

5) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

$\triangle$ Ҳар бир функцияни тўла текшириб, унинг графигини ясашда юқоридаги кўрсатмаларга кетма-кет амал қиламиз.

1) I. $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$ функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(y)=(-\infty;\ 3)\cup(3;\ \infty).$$

II. Функция $x=3$ да узилишга эга.

$$\lim_{x\to3-0}\frac{x^2-6x+3}{x-3}=+\infty,\quad \lim_{x\to3+0}\frac{x^2-6x+3}{x-3}=-\infty.$$

$$\text{III. } y(-x)=\frac{(-x)^2-6(-x)+3}{-x-3}=-\frac{x^2+6x+3}{x+3}\neq y(x);$$
$$-y(x).$$

Демак, берилган функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. Бундан ташқари даврий ҳам эмас.

$$\text{IV. а) }\begin{cases} y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3} \\ y=0\ (Ox)\end{cases}\Rightarrow x^2-6x+3=0,$$

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{6}\approx3\pm2{,}4;\ A_1\ (0{,}6;\ 0),\ A_2\ (5{,}4;\ 0).$$

б) $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} \\ x = 0 \ (Oy) \end{cases} \Rightarrow y = -1; \ B \ (0; \ -1).$

Демак, функциянинг графиги A_1, A_2, B нуқталардан ўтади.

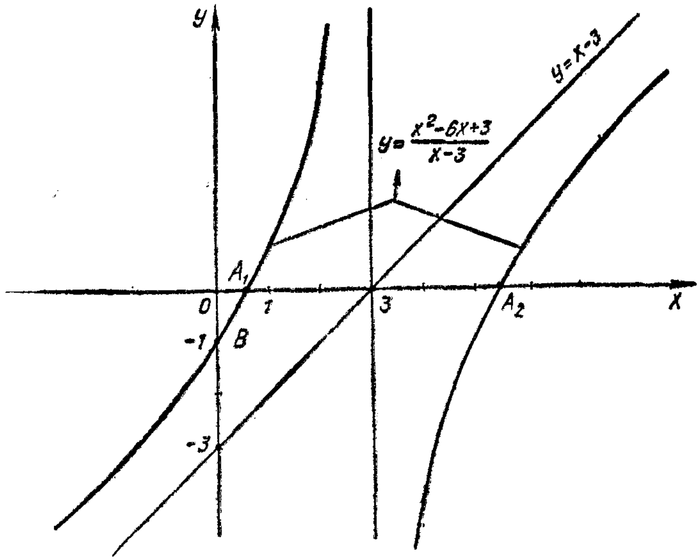
V. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$ эгри чизиқнинг: а) вертикал асимптотаси $x = 3$, б) оғма асимптотаси $y = x - 3$ (булар **462**, 1)-мисолда топилган).

VI. $y' = \dfrac{x^2 - 6x + 15}{(x-3)^2}$; $y' = 0$. Бу тенгламанинг ҳақиқий илдизлари йўқ. $x = 3$ да y' мавжуд эмас, лекин $x = 3$ да функция аниқланмаганлиги учун у критик нуқта бўла олмайди. Шундай қилиб, критик нуқталар йўқ, шунинг учун y' нинг ишорасини функциянинг аниқланиш соҳасининг ўзида текширамиз:

x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$y'(x)$	$+$	$+$
$y(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

VII. $y'' = -\dfrac{12}{(x-3)^3}$; $y''\ (x)$ ни 0 га айлантирадиган нуқта йўқ, лекин $y''\ (x)$ ни мавжуд этмайдиган $x = 3$ нуқта бор, бу нуқтада берилган функция узлуксиз бўлмаганлиги ва аниқланиш соҳага тегишли ички нуқта бўлмагани учун у бурилишга гумон нуқта бўла олмайди. Шундай қилиб, берилган эгри чизиқ бурилишга гумон нуқталарга эга эмас, шунинг учун $y''\ (x)$ нинг ишорасини функциянинг аниқланиш соҳасида текшириб қўя қоламиз:

x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ \infty)$
$y''(x)$	$+$	$-$
$y(x)$	$\cup$	$\cap$



31- чизма

VIII. Олинган барча натижаларга қараб функция графигини ясаймиз (31- чизма).

2) I. $D(y) = (-\infty;\ \infty)$.

II. Функция узилиш нуқталарига эга эмас, чунки y $(-\infty;\ \infty)$ да узлуксиз.

III. Функциянинг тоқ, жуфт ва даврийлигини текширамиз:

$$y(-x) = -xe^{-x} = -\frac{x}{e^x} \neq y(x);\ -y(x).$$

Демак, функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас, шу билан биргаликда даврий ҳам эмас, чунки $y(x \pm l) \neq y(x)$, $l \neq 0$.

IV. а) $\begin{cases} y = xe^x, \\ y = 0\ (Ox) \end{cases} \Rightarrow x = 0$; демак, $O\ (0;\ 0)$

б) $\begin{cases} y = xe^x, \\ x = 0\ (Oy) \end{cases} \Rightarrow y = 0$; $O\ (0;\ 0)$.

$x \to -\infty$ да $y \to 0$; $x \to \infty$ да $y \to \infty$.

V. $y = xe^x$ эгри чизиқнинг вертикал ва оғма асимптоталари **462**, 2) - мисолда топилган: $y = 0$ (горизонтал) асимптота.

VI. $y' = e^x (1+x)$; $y' = 0 \Rightarrow x = -1$ критик нуқтадир, бундан бошқа критик нуқта йўқ, чунки $(-\infty; \infty)$ да $y'(x)$ мавжуддир.

Критик нуқтанинг ҳолатини қуйидаги жадвалда кўрсатамиз:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; \infty)$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\swarrow$	$y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{e} \approx -0{,}4$	$\nearrow$

VII. $y'' = e^x (2+x)$; $y'' = 0 \Rightarrow x = -2$ нуқта берилган эгри чизиқнинг бурилишга гумон нуқтаси бўлади, чунки бу нуқтада $y = xe^x$ эгри чизиқ аниқланган ва $x = -2$ $D(y) = (-\infty; \infty)$ нинг ички нуқтаси. Бурилишга бошқа гумон нуқталар йўқ, чунки $y''(x)$ $x \in (-\infty; \infty)$ да мавжуд.

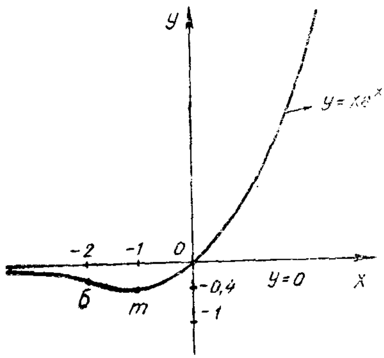
Бурилишга гумон нуқта $x = -2$ нинг ҳолатини қуйидаги жадвалда ифодалаймиз:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; \infty)$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\frown$	$y_{\text{бур.}} = y(-2) = -2/e^2$	$\smile$

$$y_{\text{бур.}} = y(-2) = (xe^x)_{x=-2} = -\frac{2}{e^2} \approx -0{,}3;$$

$$\text{Б}\left(-2;\ -\frac{2}{e^2}\right).$$

VIII. Олинган натижаларга қараб функция графигини ясаймиз (32- чизма).



32- чизма

3) I. $D(y)=(-\infty;\ \infty)$ ва бунда берилган функция узлуксиз.

II. $y = x$ arc ctg$x$ функция узилишга эга эмас.

III. Функциянинг тоқ, жуфтлиги ва даврийлигини текширамиз:

$y(-x) = -x\cdot \text{arc ctg}\,(-x) = -x(\pi - \text{arc ctg}x) \neq y(x);\ -y(x),$

демак, берилган функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас;

$y(x\pm l) = (x\pm l)\,\text{arc ctg}\,(x\pm l) \neq x\ \text{arcctg}x\ (l\neq 0),$

яъни функция даврий ҳам эмас.

IV. а) $\begin{cases} y = x\ \text{arcctg}x, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0;$ б) $\begin{cases} y = x\ \text{arcctg}x, \\ x = 0\ (Oy) \end{cases} \Rightarrow y = 0;$

$x\to -\infty$ да $y\to -\infty$ ва $x\to\infty$ да $y\to 1$.

Ҳақиқатан, $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\text{arcctg}x = (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\text{arcctg}x}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x} = 1.$$

V. $y = x$ arc ctg$x$ эгри чизиқнинг оғма асимптоталари $x = 1$, $y = \pi x + 1$ бўлиб, вертикал асимптотаси йўқ (462, 4)-мисолда кўрсатилган).

VI. $y' = \text{arc ctg}x - \frac{x}{1+x^2}$; $x\in(-\infty;\ \infty)$ да $y' > 0$, демак, $(-\infty;\ \infty)$ да $y = x\,\text{arc ctg}x$ функция ўсувчидир. y' ни 0 га айлантирадиган ёки уни мавжуд этмайдиган нуқталар йўқ, шунинг учун критик нуқталар ҳам йўқ.

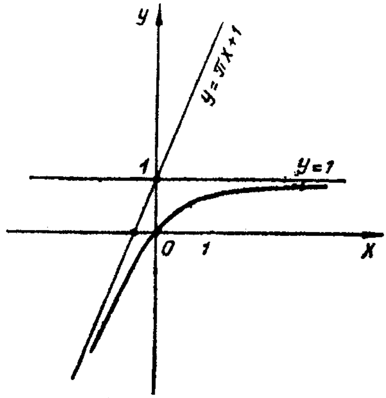
$$\text{VII. } y'' = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-1-x^2-1+x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2}{(1+x^2)^2},$$

y'' ни 0 га айлантирадиган ёки уни мавжуд этмайдиган нуқталар йўқ, шунинг учун бурилишга гумон нуқталар ҳам йўқ.

$x\in(-\infty;\ \infty)$ да $y'' < 0$, бу ҳолда $y = x\text{arc ctg}x$

эгри чизиқ ботиқлиги билан пастга қараган бўлади.

VIII. Юқорида олинган натижаларга қараб функция графигини чизамиз (33- чизма).



33 - чизма

4) I. $D(y) = (-2;\ 2)$ ва бунда берилган функция узлуксиз.

II. $y = \ln(4 - x^2)$ функция $x = \pm 2$ да узилишга эга.

$$\lim_{x\to -2+0} \ln(4 - x^2) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 2-0} \ln(4 - x^2) = -\infty.$$

III. Функциянинг тоқ, жуфтлиги ва даврийлигини текширамиз:

$$y(-x) = \ln(4 - (-x)^2) = \ln(4 - x^2) = y(x),$$

демак, $y = \ln(4 - x^2)$ функция жуфт экан. Бу ҳолда унинг графиги ордината ўқига нисбатан симметрик бўлади. Берилган функция даврий эмас.

IV. а) $\begin{cases} y = \ln(4 - x^2), \\ y = 0\ (Ox) \end{cases} \Rightarrow \ln(4 - x^2) = 0 = \ln 1 \Rightarrow 4 - x^2 = 1,$

$x^2 = 3;\ x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}7.\ A_1(-1{,}7;\ 0),\ A_2(1{,}7;\ 0).$

б) $\begin{cases} y = \ln(4 - x^2), \\ x = 0\ (Oy) \end{cases} \Rightarrow y = \ln 4;\ B(0;\ \ln 4).$

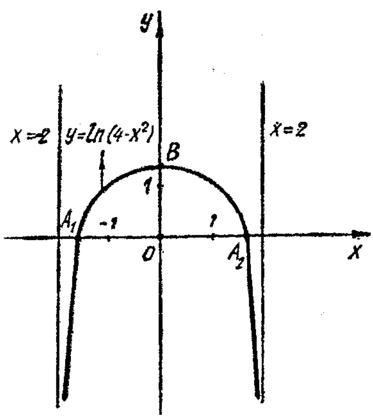
V. $y = \ln(4 - x^2)$ эгри чизиқ $x = \pm 2$ вертикал асимптоталарга эга бўлиб, оғма асимптотага эга эмас (**462**, 5- мисолга қаранг).

VI. $y' = \frac{-2x}{4 - x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 0$, бу нуқта критик нуқтадир, чунки бу нуқта $D(y) = (-2;\ 2)$ нинг ички нуқтаси бўлиб, берилган функция шу нуқтада узлуксиз. y' ни мавжуд этмайдиган нуқта $x = \pm 2$ мавжуд, лекин булар берилган функциянинг критик нуқталари бўла олмайди, чунки бу нуқталарда функция аниқланмаган. $x = 0$ критик нуқтанинг ҳолатини қуйидаги жадвалда ифодалаймиз.

x	$(-2;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$y_{\max} = = y(0) = \ln 4$	$\swarrow$

$$y_{\max} = y\ (0) = (\ln\ (4 - x^2))_{x=0} = \ln 4.$$

VII. $y'' = -\dfrac{2\ (4 + x^2)}{(4 - x^2)^2}$; y'' ни 0 га айлантирадиган x нинг ҳақиқий қиймати йўқ, лекин y'' ни мавжуд этмайдиган қийматлар мавжуд бўлса-да, улар функциянинг аниқланиш соҳасига кирмаганлиги учун бурилишга гумон нуқталар бўла олмайди. Шундай қилиб, $y = \ln\ (4 - x^2)$ эгри чизиқнинг бурилишга гумон нуқтаси йўқ. $x \in (-2;\ 2)$ да $y'' < 0$ бўлгани учун бу интервалда эгри чизиқ ботиқлиги билан пастга қараган бўлади.



34- чизма

VIII. Юқоридаги натижаларга қараб функция графигини ясаймиз (34- чизма).

5) I, II. $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ функция $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган ва узлуксиз.

III. $y(-x) = \sqrt[3]{(-x + 1)^2} - \sqrt[3]{(-x - 1)^2} = \sqrt[3]{(x - 1)^2} - \sqrt[3]{(x + 1)^2} = -(\sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}) = -y\,(x),$

демак, берилган функция тоқ экан, унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади.

IV. а) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2} \\ y = 0\,(Ox) \end{cases} \Rightarrow O\,(0;\ 0);$

б) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}, \\ x = 0\,(Oy) \end{cases} \Rightarrow O\,(0;\ 0).$

$x < 0$ бўлса, $y < 0$ ва $x > 0$ бўлса, $y > 0$ бўлади.

V. а) Берилган эгри чизиқ вертикал асимптотага эга эмас;

$$б)\ k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \right) = 0;\ b =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right) =$$

$$= (\infty - \infty) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} =$$

(касрнинг сурат ва махражини $x^{4/3}$ га бўламиз)

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4/\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}} = 0.$$

Топилган $k = 0$, $b = 0$ қийматларни $y = kx + b$ га қўйиб, $y = 0$ оғма асимптотага эга бўламиз. $x \to -\infty$ да худди шундай натижага эга бўламиз.

$$\text{VI. } y' = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}};$$

y' x нинг бирорта қийматида ҳам 0 га айланмайди, лекин $x = \pm 1$ да мавжуд бўлмайди. Берилган функция $(-\infty; \infty)$ да узлуксиз бўлиб, $x = \pm 1$ бу интервалнинг ички нуқталари бўлгани учун функциянинг критик нуқталари бўлади. Критик нуқталарнинг ҳолатини қуйидаги жадвалда ифодалаймиз.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$y'(x)$	$-$	мав. эмас.	$+$	мав. эмас.	$-$
$y(x)$	$\swarrow$	$y_{min} = -\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	$y_{max} = \sqrt[3]{4}$	$\swarrow$

$$y_{\min} = y(-1) = (\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2})_{x=-1} =$$
$$= -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}6;$$
$$y_{\max} = y(1) = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6.$$

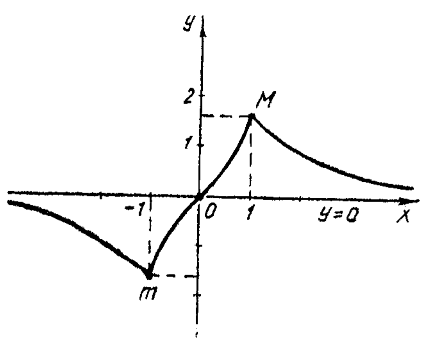
Эслатма. ↙ белги функциянинг камайишини, ↗ белги функциянинг ўсишини билдиради.

VII. $y'' = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{4}{3}} =$

$= \frac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$; $x = 0$ да $y'' = 0$ ва $x =$ $= \pm 1$ да y'' мавжуд эмас. Берилган функция $(-\infty;\ \infty)$ да узлуксиз бўлиб, $x = 0$ ва $x = \pm 1$ лар $(-\infty;\ \infty)$ нинг ички нуқталари бўлгани учун бу нуқталар эгри чизиқнинг бурилишга гумон нуқталаридир, уларнинг ҳолатини қуйидаги жадвал орқали ифодалаймиз:

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ 1)$	2	$(1;\ \infty)$
$y''(x)$	$-$	мав. эмас	$-$	0	$+$	мав. эмас	$+$
$y(x)$	$\frown$	бур. йўқ.	$\frown$	$y_{бур} = y(0) = 0$	$\smile$	бур. йўқ.	$\smile$

VIII. Юқорида олинган натижаларга қараб функция графигини ясаймиз (35- чизма).



35- чизма

Қуйидаги функцияларни тўла текшириб, графигини ясанг.

484. $y = x^5 - x^3 - 2x$.

485. $y = 2x^4 - x^2 + 1$.

486. $y = \frac{1}{x(x-1)}$.

487. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

488. $y = x + \frac{x}{3x - 1}$.

489. $y^2 = x^3 + 1$.

490. $y^2 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3x}$.

491. $y = xe^{-\frac{1}{4}\cdot x^2}$.

492. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

493. $y = \sin x + \cos x$.

494. $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

495. $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$.

496. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

497. $y = \frac{\sin x}{x}$.

498. $y = x - 2\,\mathrm{arc\,tg}\, x$.

499. $y = x^3 e^{-4x}$.

500. $y = 2|x| - x^2$.

IV боб. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1- §. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл.

АСОСИЙ ИНТЕГРАЛЛАР ЖАДВАЛИ

1. Агар $F(x)$ функция бирор E оралиқда узлуксиз бўлиб, шу оралиқда $F'(x)=f(x)$ ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг *бошланғич функцияси* дейилади.

Берилган $f(x)$ функциянинг бирор E оралиқдаги барча бошланғич функциялари тўплами $F(x)+C$ берилган функциянинг E оралиқдаги аниқмас интеграли дейилади ва $\int f(x)dx$ орқали белгиланади, яъни

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

(C — ўзгармас сон).

Берилган функциянинг аниқмас интегралини топиш амали интеграллаш дейилади.

2. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари:

а) $d(\int f(x)\,dx)=f(x)\,dx$;

б) $\int F'(x)\,dx=F(x)+C$ ёки $\int dF(x)=F(x)+C$;

в) $\int k\cdot f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$,

яъни ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси олдига чиқариш мумкин;

г) $\int (f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx-$
$-\int f_3(x)\,dx$,

яъни йиғиндининг интеграли қўшилувчилар интегралларининг йиғиндисига тенгдир.

3. Асосий интеграллар жадвали:

I. $\displaystyle\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\in R,\ \alpha\neq-1)$.

II. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

III. $\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$. III'. $\displaystyle\int e^x dx=e^x+C$.

IV. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

V. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.

VI $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 x\,dx=\operatorname{tg}x+C$.

VII. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

VIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

IX. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

X. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$

XII. $\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a}{4} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

XIII. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

XIV. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

XVI. $\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

4. Интеграллашнинг асосий усуллари.

а) **Бевосита интеграллаш.** Берилган интеграл асосий интеграллар жадвалида бўлмаслиги мумкин, лекин уни баъзи айнан шакл ўзгартиришлар натижасида жадвалдаги интегралларга келтириш мумкин.

501. Бевосита интеграллаш йўли билан қуйидаги интегралларни топинг:

$$I_1 = \int \sqrt{t}\, dt; \qquad I_2 = \int 3^t dt;$$

$$I_3 = \int \frac{dt}{t^2+3}; \qquad I_4 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}};$$

$$I_5 = \int \frac{2t}{t^2+7} dt; \qquad I_6 = \int 5 \sin 5t\, dt;$$

$$I_7 = \int e^{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi\, d\varphi; \qquad I_8 = \int \frac{e^t\, dt}{e^{2t}-1}.$$

△ I_1 интегрални I формула ёрдамида ҳисоблаймиз, бунда

$$x = t, \ \alpha = \frac{1}{2}; \ I_1 = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C.$$

I_2 интегралда $t = x$, $3 = a$ деб қаралса, у III формулага келади:

$$I_2 = \int 3^t\, dt = \frac{3^t}{\ln 3} + C.$$

$I_3 = \int \frac{dt}{t^2 + 3}$ интегралда $t = x, \sqrt{3} = a$ деб қарасак, у IX формулага келади:

$$I_3 = \int \frac{dt}{t^2 + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C.$$

$I_4 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 5}}$ интеграл XI формула ёрдами билан топилади:

$$I_4 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 5}} = \ln|t + \sqrt{t^2 - 5}| + C,$$

бунда XI формуладаги x ўрнида t, a ўрнида 5 сони турибди деб қарадик.

$$I_5 = \int \frac{2tdt}{t^2 + 7} \quad \text{интегралда} \quad 2tdt = d(t^2 + 7)$$

бўлгани учун $(d(t^2+7) = (t^2+7)'dt = 2tdt)$ II формулага кўра

$$I_5 = \int \frac{2tdt}{t^2 + 7} = \int \frac{d(t^2 + 7)}{t^2 + 7} = \ln(t^2 + 7) + C,$$

бунда $t^2 + 7 > 0$ бўлгани учун ln дан кейин абсолют қиймат ишораси тушириб қолинди.

$$I_6 = \int 5 \sin 5\, tdt = \int \sin 5t \cdot d(5t)$$

интегралда $x = 5t$ деб қаралса, у V формулага келади; шунинг учун $I_6 = -\cos 5t + C$. $\cos\varphi d\varphi = d \sin\varphi$ бўлгани учун I_7 интегрални қуйидагича ёзиш мумкин: $I_7 = \int e^{\sin\varphi} \cdot \cos\varphi\, d\varphi = \int e^{\sin\varphi} d \sin\varphi$, бунда $\sin\varphi = x$ десак, III' формулага кўра $I_7 = e^{\sin\varphi} + C$ га эга бўламиз.

$$I_8 = \int \frac{e^t\, dt}{-1} = \int \frac{d(e^t)}{(e^t)^2 - 1}, \text{ чунки } e^t dt = de^t.$$

Энди X формулада $x = e^t$, $a = 1$ десак, у ҳолда қуйидаги натижага эга бўламиз: $I_8 = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{e^t - 1}{e^t + 1}\right| + C$. ▲

Ҳар бир интеграл натижаси уни дифференциаллаш билан текширилади. Агар интеграл натижасининг ҳосиласи интеграл остидаги функцияни берса, у ҳолда интеграл тўғри топилган бўлади, акс ҳолда нотўғри бўлади.

502. Қуйидаги интегралларни топинг ва натижаларининг тўғри ёки нотўғри эканлигини текширинг:

$$1)\ \int \frac{dt}{t^3}; \qquad 2)\ \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}};$$

$$3)\ \int \sqrt{t+1}\,dt; \qquad 4)\ \frac{dt}{2t^2-6}.$$

△ 1) $\int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt =$ (I формулага кўра) $= \frac{t^{-2}}{-2} + C = C - \frac{1}{2t^2}$.

Текшириш:

$$\left(C - \frac{1}{2t^2}\right)' = 0 - \frac{1}{2}(t^{-2})' = -\frac{1}{2}(-2)\,t^{-3} = \frac{1}{t^3},$$

демак, интеграл тўғри топилган.

2) интегрални топиш учун VIII формуладан фойдаланамиз:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C,$$

бунда VIII формуладаги x ўрнида t, a ўрнида $\sqrt{2}$ олинди.

Текшириш:

$$d\left(\arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C\right) = \left(\arcsin \frac{t}{\sqrt{2}}\right)' dt =$$

$$= \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}\,dt.$$

$$3)\ \int \sqrt{t+1}\,dt = \int (t+1)^{\frac{1}{2}}\,d(t+1) = \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} + C,$$

бунда I формуладан фойдаландик ($x = t + 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ деб қаралди).

Текшириш: $d\left(\frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3}+C\right)=\left(\frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3}+\right.$ $\left.+C\right)'dt=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(t+1)^{1/2}dt=\sqrt{t+1}\,dt.$

4) $\int\frac{dt}{2t^2+6}$ ни аниқмас интегралнинг 2—в) хоссасидан ва X формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int\frac{dt}{2t^2-6}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C.$$

Текшириш:

$$d\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C\right)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right)'dt=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\ln|t-\sqrt{3}|-\ln|t+\sqrt{3}|)'\,dt=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)dt=\frac{dt}{2(t^2-3)};$$

бунда $(\ln|t-\sqrt{3}|)'$ ва $(\ln|t+\sqrt{3}|)'$ ни топишда $(\ln|u|)'=$ $=\frac{u'}{u}$ формуладан фойдаланилди. ▲

503. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int\frac{dt}{\sqrt[3]{5t}}$; 2) $\int\frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}}$;

3) $\int e^{-\frac{t}{2}}dt$; 4) $\int\sin(at+b)\,dt$;

5) $\int\frac{1}{5t+4}dt$.

△ 1) 2—в) хоссага кўра ва I формулада $x=t$, $\alpha=-\frac{1}{3}$ деб, қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\int\frac{dt}{\sqrt[3]{5t}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\int t^{-\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt[3]{5}}\cdot\sqrt[3]{t^2}+C.$$

2) 2—в) хосса ва $x=t$, $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлганда VIII формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{4}-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Берилган интегрални $-\frac{1}{2}$ га ҳам кўпайтириб, ҳам бўламиз, сўнгра $-\frac{1}{2}$ кўпайтувчини дифференциал ишораси остига киритиб ва $x = -\frac{t}{2}$ деб III формуладан фойдаланамиз:

$$\int e^{-\frac{t}{2}}\,dt = -2\int e^{-\frac{t}{2}}d\left(-\frac{t}{2}\right) = -2e^{-\frac{t}{2}} + C.$$

4) Берилган интегрални a га кўпайтириб ва бўлиб ҳамда $adt = d(at+b)$ эканини эътиборга олиб, V формулада $x = at + b$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \sin(at+b)dt = \frac{1}{a}\int \sin(at+b)\,d(at+b) =$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(at+b) + C.$$

5) Интегрални 5 га кўпайтириб ва бўлиб ҳамда II формулада $x = 5t + 4$; $x' = 5$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dt}{5t+4} = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5t+4}dt = \frac{1}{5}\int \frac{d(5t+4)}{5t+4} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|5t+4| + C.$$

$\int \frac{dt}{5t+4}$ ни қуйидагича ҳам топиш мумкин:

$$\int \frac{dt}{5t+4} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t+\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{d\left(t+\frac{4}{5}\right)}{t+\frac{4}{5}} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|t+\frac{4}{5}\right| + C.$$

Топилган иккала натижа ҳам тўғридир, бунга натижаларни дифференциаллаш билан тўла ишонч ҳосил қилиш мумкин. ▲

504. 1) $\int (3-2x)^7 dx$;

2) $\int \sec^2(m-nx)\,dx$;

3) $\int \mathrm{ctg}\,\varphi\, d\varphi$

интегралларни топинг.

△ 1) Берилган интегрални -2 га кўпайтириб ва бўлиб, сўнгра -2 кўпайтувчини интеграл ишораси остига киритиб, $-2dx = d(3-2x)$ эканини эътиборга олиб, I формулада x ўрнига $(3-2x)$ ни қўйиб ва $\alpha = 7$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\int (3-2x)^7\,dx = -\frac{1}{2}\int (3-2x)^7\cdot(-2dx) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (3-2x)^7\,d(3-2x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^8}{8} + C.$$

2) Интегрални $-n$ га ҳам кўпайтириб, ҳам бўлиб ва $-ndx = d(m-nx)$ тенгликдан, сўнгра VI формуладан (бунда x ўрнига $m-nx$ қўйилади) фойдаланиб, ушбу натижага эга бўламиз:

$$\int \sec^2(m-nx)\,dx = -\frac{1}{n}\int \sec^2(m-nx)\cdot(-ndx) =$$

$$= -\frac{1}{n}\int \sec^2(m-nx)\,d(m-nx) = -\frac{1}{n}\,\mathrm{tg}(m-nx) + C.$$

3) $\mathrm{ctg}\,\varphi$ ни $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ орқали ифодалаб ва II формуладан фойдаланиб (бунда $x = \sin\varphi$, $dx = \cos\varphi d\varphi$ деб қаралади), қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \mathrm{ctg}\,\varphi d\varphi = \int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \int \frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi} = \ln|\sin\varphi| + C. \quad ▲$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

505. $\int x^4\,dx$.

506. $\int \sqrt[5]{t^2}\,dt$.

507. $\int \frac{dy}{3y^2}$.

508. $\int \frac{dx}{x+3}$.

509. $\int (a-5)^8\, da.$

510. $\int \frac{dx}{x^2+9}.$

511. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+7}}.$

512. $\int \frac{dz}{2z^2-4}.$

513. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

514. $\int \sin \frac{x}{3}\, dx.$

515. $\int \operatorname{cosec}^2 2\varphi\, d\varphi.$

516. $\int e^{4x} dx.$

517. $\int \frac{3\,dt}{5^{2t}}.$

518. $\int \frac{dx}{2x+5}.$

519. $\int \frac{dx}{(3x+2)^3}.$

520. $\int \operatorname{tg} x\, dx.$

Агар интеграл остидаги функция бир қанча қўшилувчи функцияларнинг алгебраик йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда 2- г) хоссага кўра ҳар бир қўшилувчи функцияни алоҳида интеграллаш мумкин.

521. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int (3x^2-2x+5)\, dx;$ 2) $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}\, dx;$

3) $\int (1+e^x)^2\, dx;$ 4) $\int \frac{2x+3}{x^2-5}\, dx;$

5) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx;$ 6) $\int \operatorname{tg}^2 \varphi\, d\varphi.$

△ 1) Ҳар бир қўшилувчини алоҳида I формула бўйича интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int (3x^2-2x+5)\, dx = \int 3x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int 5\, dx =$$

$$= 3\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} +$$
$$+ 5x + C = x^3 - x^2 + 5x + C.$$

2) Интеграл остидаги каср функциянинг суратини махражига бўлиб, қўшилувчи функцияларга ажратамиз. Сўнгра интеграллашнинг II, I формулаларидан фойдаланиб, ҳар бир қўшилувчини интеграллаймиз:

$$\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3}\,dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}dx - \int x^{-3}dx =$$
$$= 2\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

3) $(1 + e^x)$ ни квадратга кўтариб, сўнгра ҳар бир қўшилувчини алоҳида интеграллаб топамиз:

$$\int (1 + e^x)^2\,dx = \int (1 + 2e^x + e^{2x})\,dx =$$
$$= \int dx + 2\int e^x\,dx + \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) =$$
$$= x + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

4) Интеграл остидаги каср функцияни 2 та каср функцияга ажратиб, сўнгра II, X формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-5}\,dx = \int \frac{2x}{x^2-5}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2-5} =$$
$$= \ln|x^2 - 5| + \frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.$$

5) Интеграл остидаги функциянинг суратини махражига бўлиб, бутун қисмини ажратиб, сўнгра интеграллаймиз:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

6) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ тригонометрик формуладан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi = \int (\sec^2\varphi - 1)\,d\varphi = \int \sec^2\varphi\,d\varphi -$$
$$- \int d\varphi = \operatorname{tg}\varphi - \varphi + C. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

522. $\int\left(2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{2x}+5\right)dx.$

523. $\int(\sin\varphi-\cos\varphi)^2\,d\varphi.$

524.* $\int\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx.$

525. $\int\frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

526.* $\int\frac{x^3}{x^2+6}\,dx.$

527. $\int(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2dx.$

528. $\int(e^x-e^{-x})^2\,dx.$

529.* $\int\frac{x^2-2}{x+2}\,dx.$

б) Ўзгарувчини алмаштириш билан интеграллаш

Аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласи:

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=\int F(t)\,dt,$$

бунда $\varphi'(t)$ узлуксиз функция.

Агар янги t ўзгарувчига боғлиқ бўлган интеграл $\int F(t)\,dt$ топилса, у ҳолда $x=\varphi(t)$ формуладан фойдаланиб, натижани x орқали ифодалаб, берилган интегралнинг изланаётган ифодасини ҳосил қиламиз. Масалан, $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ интегрални топишда $x=t^2$ деб олайлик, у ҳолда $dx=2t\,dt$ ва

$$I=\int\frac{2\,t\,dt}{1+t}=2\int\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=2\int dt-2\int\frac{dt}{t+1}=2\,t-2\ln|t+1|+C=$$

$$=2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C.$$

---

* Агар алгебраик каср-рационал функцияда суратдаги кўпҳаднинг даражаси махражидаги кўпҳаднинг даражасига тенг ёки ундан катта бўлса, бундай каср-рационал функция нотўғри каср-рационал функция дейилади.

Берилган $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ интегрални ўзгарувчини бошқача белгилаш, яъни $t=1+\sqrt{x}$ билан ҳам топиш мумкин:

$$x=(t-1)^2,\ dx=2(t-1)\,dt \text{ ва } I=\int\frac{2(t-1)}{t}\,dt=$$
$$=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t}=2t-2\ln t+$$
$$+C=2(1+\sqrt{x})-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

I интегралнинг топилган натижалари бир-биридан иккинчи ўзгармас сонга тенг қўшилувчиси билан фарқ қилади; иккала натижанинг тўғрилигига уларни дифференциаллаш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Юқоридаги мисолда кўрсатилганидек, ўзгарувчини алмаштиришда x ни t орқали ифодаловчи $x=\varphi(t)$ ёки t ни x орқали ифодаловчи $t=\psi(x)$ формулалардан фойдаланиш мумкин.

Ўзгарувчини алмаштиришда қулай формулани (белгилашни) танлаш катта аҳамиятга эга, шу билан бирга яхши белгилаш учун битта умумий қоидани бериш мумкин эмас. Баъзи бир хусусий қоидаларни қуйидаги интеграл турлари учун кўрсатамиз.

530. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int\frac{2x\,dx}{x^4+3}$; 2) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$;

3) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+a}}$; 4) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$;

5) $\int\frac{dy}{\sqrt{e^y+1}}$.

Δ 1) $x^2=t$ белгилаш киритиб, уни дифференциаллаймиз; $2x\,dx=dt$, сўнгра буларни интеграл остидаги ифодага қўйиб, янги интегрални топамиз ва берилган x ўзгарувчига қайтамиз:

$$\int\frac{2x\,dx}{x^4+3}=\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C.$$

2) $1+2\cos x=t$ белгилаш киритамиз, бунда $-2\sin x\,dx=$ $=dt$ ва

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ C = C - \sqrt{t} = C - \sqrt{1+2\cos x}\ .$$

3) $x^2 + a = z$ десак, $2x\,dx = dz$ ва

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+a}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{3}}\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,z^{\frac{2}{3}} +$$

$$+ C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+a)^2} + C$$ га эга бўламиз.

4) $1 + \ln x = v$ белгилаш қуйидагиларни беради:

$$\frac{dx}{x} = dv;\quad \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt{v}\,dv = \frac{2}{3}\,v^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C.$$

5) $e^y + 1 = t^2$ белгилаш киритиб ва унинг дифференциали $e^y dy = 2t\,dt$ дан dy ни топамиз: $dy = \frac{2t\,dt}{e^y} = \frac{2t\,dt}{t^2-1}$. Буларни интеграл остидаги ифодага қўйиб, ҳосил бўлган интегрални топиб, сўнгра эски y ўзгарувчига қайтамиз:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{e^y+1}} = \int \frac{2t\,dt}{t(t^2-1)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} +$$

$$+ C = \ln\frac{\sqrt{e^y+1}-1}{\sqrt{e^y+1}+1} + C.\ \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

531. $\int \frac{x^2\,dx}{5-x^6}$, $t = x^3$ белгилаш билан.

532. $\int \frac{e^x\,dx}{3+4e^x}$, $z = 3 + 4e^x$ белгилаш билан.

533. $\int \mathrm{tg}^3\varphi\,d\varphi$, $\varphi = \mathrm{arctg}\,t$ белгилиш билан.

534. $\int x^3\cdot\sqrt{a-x^2}\,dx$, $\sqrt{a-x^2} = z$ белгилаш билан.

535. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}\,dx$, $x - 2 = t$ белгилаш билан.

536. $\int x\cdot\sqrt{a-x}\,dx$, $a - x = t^2$ белгилаш билан.

537*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x = \frac{1}{t}$ белгилаш билан.

538*. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$, $\operatorname{tg} x = z$ белгилаш билан.

539. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$.

540. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

541. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$.

542. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

543. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+2\sin^2 x}}$.

544. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}\,dx$.

545*. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$.

546. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$.

в) Бўлаклаб интеграллаш. Кўпайтманинг дифференциалини билдирувчи $d(u\cdot v) = u\,dv + v\cdot du$ тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаш билан бўлаклаб интеграллаш формуласи

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du \qquad (*)$$

ни ҳосил қилиш мумкин. Бу формула билан $\int udv$ интегрални топиш бошқа $\int vdu$ интегрални топишга келтирилади. Агар $\int v\,du$ интеграл $\int u\,dv$ интегралга нисбатан соддароқ ёки унга ўхшаш бўлса, бу ҳолда берилган интегрални топишда бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Бирор $\int f(x)\,dx$ интегралга нисбатан бўлаклаб интеграллаш формуласини татбиқ этиш учун интеграл остидаги ифода $f(x)\,dx$ ни u ва dv кўпайтувчиларнинг кўпайтмаси шаклида ифодалаш керак; бунда dv учун dx ни ўз ичига олган шундай ифода танланадики, бу ифодадан интеграллаш йўли билан v ни топиш мумкин бўлади; u учун кўп ҳолларда дифференциаллаш натижасида соддалашадиган (масалан: $\arcsin x$; $\ln x$; $\operatorname{arctg} 3x$; x^3) функциялар олинади.

547. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int x\cos x\,dx$; 2) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$;

3) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$; 4) $\int \arcsin x dx$;

5) $\int x^2 e^{3x}\,dx$; 6) $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx$.

Δ Берилган интегралларнинг ҳаммасини (*) формуладан фойдаланиб ечамиз:

1) $\int x\cos x\,dx = \begin{Vmatrix} u = x, & dv = \cos x\,dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{Vmatrix} = x\sin x -$
$- \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$.

$$2)\ \int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \begin{Vmatrix} u = \ln x, & dv = \frac{dx}{x^3} \\ du = \frac{dx}{x}, & v = -\frac{1}{2x^2} \end{Vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cdot \ln x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2x^2}\ln x -$$

$$-\frac{1}{4x^2} + C = C - \frac{1+2\ln x}{4x^2}.$$

$$3)\ I = \int x\operatorname{arctg} x\,dx = \begin{Vmatrix} u = \operatorname{arctg} x, & dv = x\,dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, & v = \frac{x^2}{2} \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}\ (1).$$

Энди $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ ни алоҳида топамиз. Сўнгра топилган ифодани (1) га қўйиб, I ни топамиз:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= x - \operatorname{arctg} x \text{ ва}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = C -$$

$$-\frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

$$4)\ \int \arcsin x\, dx = \left\| \begin{matrix} u = \arcsin x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x \arcsin x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2)$$

(2) даги $\int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегрални I формулага келтириб топамиз ва топилган ифодани (2) га қўйиб, I ни топамиз:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$I = x \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$5)\ I = \int x^2 e^{3x}\, dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2, & dv = e^{3x}\, dx \\ du = 2\, xdx, & v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} \cdot x\, dx. \qquad (3)$$

(3) даги $\int e^{3x} \cdot x\, dx$ га яна бўлаклаб интеграллаш формуласи (*) ни татбиқ этамиз:

$$\int xe^{3x}\, dx = \left\| \begin{matrix} u = x, & dv = e^{3x}\, dx \\ du = dx, & v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{matrix} \right\| = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx =$$

$$= \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9}\int e^{3x}\, d(3x) = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}.$$

Топилган ифодани (3) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \int x^2 e^{3x}\, dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}\right) + C =$$

$$= \frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2 - 6x + 2\right) + C.$$

5) интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласи (*) 2 марта ишлатилди. Агар интеграл остидаги x^2 ўрнида x^3 бўлганда (*) формулани 3 марта ишлатишга тўғри келар эди. Умуман

$$\int x^n\, e^x\, dx \quad \text{ва} \quad \int x^n\, \sin x\, dx, \quad \int x^n \cos x\, dx$$

(n — бутун мусбат сон) интегралларни топишда (*) формулани n марта қўллаш керак бўлади.

$$6)\ I=\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx=\left\|\begin{matrix} u=e^{-x}, & dv=\cos\frac{x}{2}\,dx \\ du=-e^{-x}dx, & v=2\sin\frac{x}{2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2I_1. \quad (4)$$

I_1 интегралга нисбатан ҳам бўлаклаб интеграллаш формуласини татбиқ этамиз. $u=e^{-x}$, $dv=\sin\frac{x}{2}\,dx$ деб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$du=-e^{-x}dx;\ v=\int\sin\frac{x}{2}\,dx=2\int\sin\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right)=$$

$$=-2\cos\frac{x}{2};$$

$$I_1=\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx=-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2\int e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx=$$

$$=-2e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{2}-2I.$$

I_1 нинг топилган ифодасини (4) га қўйиб, I номаълум интегралга нисбатан тенглама ҳосил қиламиз:

$$I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\left(-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2I\right);$$

$$5I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2};$$

$$I=\frac{2}{5}e^{-x}\left(\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\right)+C.$$

Агар I_1 ни топишда $u=\sin\frac{x}{2}$, $dv=e^{-x}dx$ деб олинса, у ҳолда $du=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$, $v=-e^{-x}$, $I_1=-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+$ $+\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx=-e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot I$ ларга эга бўламиз. Бунда I_1 нинг топилган ифодасини (4) га қўйсак, бефойда айниятга эга бўламиз:

$$I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\left(-e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}I\right),\quad 0=0. \ ▲$$

Шундай қилиб, такрорий бўлаклаб интеграллаш дастлабки I интегралга олиб келиши мумкин экан. Бу ҳолда ё I интегрални осон топиш мумкин бўлган тенглама, ёки такрорий бўлаклаб интеграллашда u, dv ларни ўринсиз танлаш натижасида бефойда айният ҳосил бўлади.

Баъзан бўлаклаб интеграллаш бирор даражали функциянинг аниқмас интеграли билан кўрсаткичи берилган функциянинг даража кўрсаткичидан кам бўлган ўша функциядан олинган аниқмас интеграл орасидаги муносабатни ҳосил қилади. Бундай муносабатга рекуррент (қайталама) формула дейилади.

548. 1) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ учун рекуррент формула келтириб чиқаринг ва унинг ёрдамида $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ ни топинг.

$$\Delta \quad I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} -$$

$$- \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Охирги интегралда $u = x$, $dv = \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx$ десак, у ҳолда $du = dx$, $v = \int \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} =$
$= \frac{1}{2}\int t^{-n}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} +$
$+ C = -\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C$ га эга бўламиз. Шунинг учун

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + I_{n-1} - \frac{1}{2n-2}\,I_{n-1} = \frac{1}{2n-1}\times$$

$$\times \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}.$$

Шундай қилиб, биз қуйидаги рекуррент формулани ҳосил қилдик:

$$I_n = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}.$$

Бунда рекуррент формулани такрорий қўллаш натижасида жадвалдаги $\int \frac{dx}{x^2+1}$ интеграл ҳосил бўлади. $n=2$ да рекуррент формулани қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

$$n=3 \text{ да: } I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{4} I_2 =$$

$$= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x + C. \quad \blacktriangle$$

2) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ интеграл учун рекуррент формула

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\cdot I_n$$

эканлигига ишонч ҳосил қилинг.

Қуйидаги интегралларни бўлаклаб интегралланг:

549. $\int x \sin x\, dx.$

550. $\int x^2 \ln x\, dx.$

551. $\int (x^2+1)\, e^{-2x}\, dx.$

552. $\int x \cdot \sec^2 x\, dx.$

553. $\int x \cdot \ln(x-1)\, dx.$

554. $\int \operatorname{arc\,ctg} t\, dt.$

555. $\int e^x \sin x\, dx.$

556. $\int x^n \ln x\, dx \;\; (n \neq -1).$

557. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\, dx.$

558. $\int x^3 e^x\, dx.$

559. $\int e^{ax} \cdot \cos nx\, dx.$

560*. $\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2x-1}\, dx.$

561. $I_n = \int x^k \ln^n x\, dx$ ($n>0$, бутун) интеграл учун рекуррент формула келтириб чиқаринг.

Кўрсатма: $u=\ln^n x$ деб белгиланг.

562. $I_n=\int \sin^n x\,dx$ $(n>0$, бутун) интеграл учун рекуррент формула келтириб чиқаринг ва унинг ёрдамида $\int \sin^4 x dx$ ни топинг.

Кўрсатма: $\sin^n x$ ни $\sin^n x=\sin^{n-2} x\cdot(1-\cos^2 x)$ орқали ифодалаб, $u=\cos x$, $dv=\sin^{n-2} x\cdot\cos x\,dx$ деб белгиланг.

2-§. КВАДРАТ УЧҲАДНИ ЎЗ ИЧИГА ОЛГАН ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ИНТЕГРАЛЛАРИ

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx;\quad \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;\quad \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

квадрат учҳадни ўз ичига олган функцияларни интеграллаш жадвалидаги формулаларга келтириб интеграллаш учун аввало квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратиб олиш керак. Бу ҳолда ax^2+bx+c квадрат учҳад қуйидаги кўринишга келади:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right).$$

Сўнгра алмаштиришлар йўли билан юқоридаги интегралларни интеграллаш жадвалидаги формулаларга келтириш мумкин.

563. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$; 2) $\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$;

3) $\int\frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx$; 4) $\int\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx$.

△ 1) Квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратиб оламиз:

$$x^2+4x+8=(x+2)^2+4$$

ва dx ўрнига $d(x+2)$ ни ёзиб, x формула бўйича интеграллаб топамиз:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{2}+C.$$

2) $2x^2-3x+1$ квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратиб оламиз:

$$2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)$$

ва $x-\frac{3}{4}=t$ алмаштириш бажариб, $dx=dt$ ҳамда

$$I=\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1-8t}{t^2-\frac{1}{16}}dt$$

га эга бўламиз. Бу интегрални касрнинг суратидаги икки-ҳадга кўра 2 та қўшилувчи интегралга ажратамиз:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{16}}-2\int\frac{2t\,dt}{t^2-\frac{1}{16}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right|-2\ln\left|t^2-\frac{1}{16}\right|+C,$$

бунда қўшилувчи интеграллардан биринчиси IX, иккинчиси II формулага кўра интегралланди. Энди x ўзгарувчига қайтиб, пировард натижага эга бўламиз:

$$I=\ln\left|\frac{x-1}{x-0{,}5}\right|-2\ln|x^2-1{,}5x+0{,}5|+C.$$

3) Тўлиқ квадратни ажратиб, яъни $x^2+6x+9=(x+3)^2$ ва $t=x+3$ деб, қуйидагиларга эга бўламиз: $dx=dt$,

$$\int\frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx=\int\frac{3t-11}{t^2}dt=\int\left(\frac{3}{t}-\frac{11}{t^2}\right)dt=$$

$$=3\int\frac{dt}{t}-11\int t^{-2}dt=3\ln|t|+11t^{-1}+$$

$$+C=3\ln|x+3|+\frac{11}{x+3}+C.$$

4) Аввал интеграл остидаги нотўғри каср рационал функциянинг суратини махражига бўлиб, бутун қисмини ажратамиз:

$$\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}=-2x+1+\frac{x-1}{2x-3x^2},$$

сўнгра ҳар бир қўшилувчини алоҳида интеграллаймиз:

$$I = \int \frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2} dx = -2\int x\,dx + \int dx + $$

$$+ \int \frac{(x-1)\,dx}{2x - 3x^2} = -x^2 + x + I_1$$

I_1 интегрални интеграллаш жадвалидаги II, IX формулалар кўринишига келтириб топамиз:

$$I_1 = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2 - \frac{2}{3}x} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x - \frac{2}{3}} +$$

$$+ \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}\ln\left|x - \frac{2}{3}\right| +$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{x - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}\right| = -\frac{1}{3}\ln\left|x - \frac{2}{3}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - \frac{2}{3}}{x}\right|,$$

у ҳолда

$$I = -x^2 + x + I_1 = -x^2 + x + \frac{1}{6}\ln\left|x - \frac{2}{3}\right| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|x| + C$$

бўлади. ▲

564. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}}$; 2) $\int \frac{(3x-5)}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}} dx$

интегралларни топинг.

△ 1) $x^2 - 4x - 3$ квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратиб, яъни $x^2 - 4x - 3 = (x-2)^2 - 7$, $dx = d\,(x-2)$ деб, интеграллаб топамиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} = \int \frac{d\,(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2 - 7}} = \ln|x - 2 +$$

$$+ \sqrt{(x-2)^2 - 7}| + C$$

(бунда XI формуладан фойдаландик).

2) $9 + 6x - 3x^2$ квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратамиз: $9 + 6x - 3x^2 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3((x-1)^2 -$

$-4) = 3(4-(x-1)^2)$ ва $z = x-1$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда

$$dx = dz,\ I = \int \frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{3z-2}{\sqrt{4-z^2}}\,dz$$

бўлади. Ҳосил бўлган интегрални 2 та интегралга ажратамиз ва уларнинг ҳар қайсисини алоҳида топамиз:

$$I = \frac{3}{\sqrt{3}} \int \frac{z\,dz}{\sqrt{4-z^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dz}{\sqrt{4-z^2}} = \sqrt{3}\, I_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} I_2,$$

$$I_1 = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{4-z^2}} = -\frac{1}{2} \int (4-z^2)^{-\frac{1}{2}} (-2z\,dz) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (4-z^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(4-z^2) = -(4-z^2)^{\frac{1}{2}}$$

(бунда I формуладан фойдаланилди). VIII формулада $x = z$, $a = 2$ деб олсак, у ҳолда

$$I_2 = \int \frac{dz}{\sqrt{4-z^2}} = \arcsin \frac{z}{2}$$

бўлади. Топилган I_1 ва I_2 ларни I га қўйиб ва аввалги ўзгарувчи x га ўтиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \sqrt{3}\, I_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} I_2 = C - \sqrt{3(4-z^2)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{z}{2} =$$

$$= C - \sqrt{9+6x-3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-1}{2}. \quad \blacktriangle$$

565. Бўлаклаб интеграллаш формуласи

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

(1-§, 4-в банди) га кўра

А) $\int \sqrt{t^2+b}\,dt$ ва Б) $\int \sqrt{a^2-t^2}\,dt$ ларни топинг. Сўнгра топилган натижаларни формулалар деб қараб, қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int \sqrt{x^2-3}\,dx$; 2) $\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx$;

3) $\int \sqrt{3+4x-x^2}\,dx$.

$\triangle$ А) $u = \sqrt{t^2+b}$, $dv = dt$ деб қуйидагиларга эга бўламиз: $du = \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+b}}$, $v = t$ ва

$$I=\int\sqrt{t^2+b}\,dt=t+\sqrt{t^2+b}-\int\frac{t^2}{\sqrt{t^2+b}}\,dt.$$

Охирги интеграл $\int\frac{t^2}{\sqrt{t^2+b}}\,dt$ да интеграл остидаги каср функциянинг суратига ўзгармас b ни ҳам қўшиб, ҳам айириб, интегрални 2 та интегралга ажратамиз:

$$\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^2+b}}=\int\frac{t^2+b-b}{\sqrt{t^2+b}}\,dt=\int\sqrt{t^2+b}\,dt-b\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+b}}=$$

$$=I-b\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+b}}\,.$$

У ҳолда $I=t\sqrt{t^2+b}-\int\frac{t_2}{\sqrt{t^2+b}}\,dt=t\sqrt{t^2+b}-$

$$-I+b\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+b}}\,;\;2I=t\sqrt{t^2+b}+b\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+b}}\Rightarrow I=$$

$$=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+b}+\frac{b}{2}\ln|t+\sqrt{t^2+b}|+C\quad\text{(A)}$$

(бунда XI формуладан фойдаланилди).

$$\text{Б) } I=\int\sqrt{a^2-t^2}\,dt=\left\|\begin{matrix}u=\sqrt{a^2-t^2}\,, & dv=dt\\ du=-\frac{t\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}\,, & v=t\end{matrix}\right\|=$$

$$=t\sqrt{a^2-t^2}-\int\frac{-t^2\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=t\sqrt{a^2-t^2}-$$

$$-\int\frac{a^2-t^2-a^2}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt=t\sqrt{a^2-t^2}-\int\sqrt{a^2-t^2}\,dt+$$

$$+a^2\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=t\sqrt{a^2-t^2}-I+a^2\arcsin\frac{t}{a}\,.$$

Шундай қилиб, $I=t\sqrt{a^2-t^2}-I+a^2\arcsin\frac{t}{a}$ ва бундан

$$I=\int\sqrt{a^2-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}+C.\quad\text{(Б)}$$

1) (А) тенгликни формула сифатида қараб, $t=x,\ b=3$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\sqrt{x^2-3}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-3}-\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C.$$

2) Квадрат илдиз остидаги ифодадан тўлиқ квадратни ажратиб оламиз:

$$x^2+2x+6=(x+1)^2+5,$$

сўнгра $t = x + 1$, $b = 5$ деб (A) формулани татбиқ этамиз:

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 6}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 5}\; d(x+1) =$$

$$= \frac{x+1}{2} \cdot \sqrt{(x+1)^2 + 5} + \frac{5}{2} \ln |x + 1 +$$

$$+ \sqrt{(x+1)^2 + 5}\,| + C.$$

3) $3 + 4x - x^2$ квадрат учҳаддан тўлиқ квадратни ажратамиз:

$3 + 4x - x^2 = -(x^2 - 4x - 3) = -((x-2)^2 - 7) =$ $= 7 - (x-2)^2$ ва $t = x - 2$, $a^2 = 7$ деб (Б) формулани татбиқ этамиз:

$$\int \sqrt{3 + 4x - x^2}\, dx = \int \sqrt{7 - (x-2)^2}\, dx =$$

$$= \frac{x-2}{2} \sqrt{7 - (x-2)^2} + \frac{7}{2} \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{7}} + C. \ \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

566. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$.

567. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29}$.

568. $\int \frac{dx}{4x - 1 - 4x^2}$.

569. $\int \frac{(4x-3)\, dx}{x^2 + 3x + 4}$.

570. $\int \frac{3x + 4}{x^2 + 5x}\, dx$.

571. $\int \frac{18x^2 + 13x}{1 + 6x + 9x^2}\, dx$.

572*. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 + 2x - 3}\, dx$.

573. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$.

574. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

575. $\int \frac{(x+3)\, dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

576. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2+6x}}$.

577*. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$.

578. $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

3-§. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

1. Номаълум коэффициентлар усули. Бутун рационал функция (кўпҳад) бевосита интегралланади:

$$\int P_n(x)\,dx = \int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)\,dx =$$

$$= a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots + a_1 \cdot \frac{x^2}{2} + a_0 x + C.$$

Қаср-рационал функция $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (бунда $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ лар кўпҳадлар) $n \geqslant m$ бўлганда, суратини махражга бўлиш билан, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = r(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ га келтирилади, бунда $k < m$, n, m, k — мусбат бутун сонлар, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — нотўғри қаср-рационал функция, $r(x)$ — бутун рационал функция).

Тўғри қаср-рационал функция $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ ни

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\gamma}$$

ёйилмасидан фойдаланиб, элементар касрлар (содда касрлар) йиғиндиси шаклида қуйидагича ёзилади:

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{x-a} +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{x-b} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{x^2+px+q}, \quad (*)$$

бунда $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha}, B_1, B_2, \ldots, B_{\beta}, \ldots, M_1, M_2, \ldots, M_{\lambda}, N_1, N_2, \ldots, N_{\lambda}$ $(\alpha+\beta+\ldots+\lambda = m)$ номаълум коэффициентлар бўлиб, улар коэффициентларни солиштириш усули билан аниқланади. Бунинг учун (*) тенгликнинг ҳар икки томонини $Q_m(x)$ га кўпайтириб, икки томондаги суратларда айний кўпҳадлар ҳосил қилинади. Бир хил даражадаги x ларнинг коэффициентларини тенглаштириб, номаълум коэффициентларни аниқлаш учун тенгламалар системаси ҳосил қилинади ва бу системани ечиб, номаълум коэффициентларни топиб, уларни (*) га қўйилади. Шундай қилиб, ҳар қандай тўғри каср-рационал функциянинг интеграли, интеграл остидаги функцияни элементар касрларга ажратгандан кейин, қуйидаги кўринишдаги интегралларни топишга келтирилади:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^m}; \quad I_2 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

(бунда $p^2 - 4q < 0$), бу ерда m, n — мусбат бутун сонлар.

Агар $m \neq 1$ бўлса, I_1 интеграл интеграллаш жадвалидаги I формулага, $m = 1$ бўлганда эса II формулага келади:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

I_2 интеграл 2-§ да кўрсатилган қоидага кўра топилади. $n = 1$ бўлганда

$$I_2 = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \quad (4q-p^2<0);$$

$n = k$ бўлганда

$$I_2 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{M}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$$

бўлиб, бунда $u = x + \frac{p}{2}$; $a = \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$ ва рекуррент формула

$$I_k = \int \frac{du}{(a^2+u^2)^k} = \frac{u}{a^2(2k-2)(u^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot I_{k-1}$$

$(k = 2, 3, \ldots)$ дан фойдаланилади.

$$\frac{1}{(x-a)^m}, \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

касрларга элементар (ёки содда) касрлар дейилади (бунда m, n — мусбат бутун сонлар, $p^2 - 4q < 0$).

2. Остроградский усули.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$$

формула Остроградский формуласи бўлиб, бунда $Q(x)$ функция каррали илдизларга эга бўлиб, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — тўғри каср-рационал функция, $Q_1(x)$ эса $Q(x)$ ва $Q'(x)$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси, $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$, $P_1(x)$ ва $P_2(x)$ коэффициентлар номаълум, даражалари эса мос ҳолда $Q_1(x)$ ва $Q_2(x)$ даражаларидан битта кам. Номаълум коэффициентлар $\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ айниятдан номаълум коэффициентлар усули ёрдамида топилади.

Ҳар қандай рационал функциянинг интеграли элементар функция бўлади.

579. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}\,dx$;

2) $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}\,dx$;

3) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}\,dx$;

4) $\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}\,dx$.

△ 1) Интеграл остидаги тўғри каср-рационал функцияни элементар касрларга ажратамиз. Бунинг учун:

а) берилган касрнинг махражини ҳақиқий кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2;$$

б) интеграл остидаги каср-рационал функцияни элементар касрларга ёйиш схемасини ёзамиз:

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2};$$

в) тенгликнинг иккала томонидаги махраждан қутуламиз, бунинг учун тенгликнинг иккала томонини $x(x+2)^2$ га кўпайтирамиз:

$$3x^2 + 8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx =$$
$$= (A+B)x^2 + (4A + 2B + C)x + 4A;$$

г) ҳосил бўлган айниятнинг иккала томонидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни солиштириб, номаълум коэффициентларга нисбатан тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ 4A + 2B + C = 0, \\ 4A = 8; \end{cases}$$

д) бу системани ечамиз: $A = 2$, $B = 1$, $C = -10$ ва топилган қийматларни б) банддаги схемага қўямиз ва бу ҳолда тенгликнинг икки томонидан интеграл олиб, топамиз:

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2};$$

$$\int \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}\right)dx =$$

$$= 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x+2} - 10\int x+2)^{-2}d(x+2) = 2\ln|x| +$$

$$+ \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$$

2) Интеграл остидаги нотўғри каср-рационал функциядан унинг суратини махражига бўлиб бутун қисмини ажратамиз:

$$\frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2}.$$

Ҳосил бўлган натижадаги тўғри каср-рационал функцияни элементар касрларга ажратамиз:

а) $x^4 + 3x^2 = x^2(x^2+3)$;

б) $\dfrac{1}{x^2(x^2+3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+3}$;

в) $1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2 =$
$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 3Ax + 3B$;

г) $A + C = 0,\ B + D = 0,\ 3A = 0,\ 3B = 1;$

д) $A = 0,\ B = \frac{1}{3},\ C = 0,\ D = -\frac{1}{3};\ \frac{1}{x^2(x^2+3)} =$
$= \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}.$

Демак, $\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{3x^2} -$
$- \frac{1}{3(x^2+3)}$. Бу тенгликнинг икки томонидан интеграл олиб топамиз:

$$\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx = \int\left(2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}\right)dx =$$
$$= 2\int x\,dx + \frac{1}{3}\int x^{-2}dx - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3} =$$
$$= x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Интеграл остидаги тўғри каср-рационал функцияни элементар касрларга ажратамиз:

а) $x^4 + x = x(x^3+1) = x(x+1)(x^2-x+1);$

б) $\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1};$

в) $x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = A(x^3+1) + Bx(x^2-x+1) +$
$+ (Cx+D)(x^2+x) = (A+B+C)x^3 + (C+D-B)x^2 +$
$+ (B+D)x + A;$

г) $A + B + C = 1,\ C + D - B = 4,\ B + D = -2,\ A = 1;$

д) $A = 1,\ B = -2,\ C = 2,\ D = 0;$

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2-x+1}.$$

Буларни интеграллаб топамиз:

$$I = \int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx = \int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x+1} +$$
$$+ 2\int\frac{x\,dx}{x^2-x+1} = \ln|x| - 2\ln|x+1| + 2I_1.\ (*)$$

I_1 интегрални 2-§ даги қоидага кўра топамиз. Махраждан тўлиқ квадратни ажратамиз:

$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ ва $x - \frac{1}{2} = t$ деб топамиз:

$$dx = dt,\ I_1 = \int \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{2\,t\,dt}{t^2 + \frac{3}{4}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\,t}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\,x - 1}{\sqrt{3}}\,.$$

Буларни (*) тенгликка қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \ln \frac{|x|\,(x^2 - x + 1)}{(x + 1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\,x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

4) Интеграл остидаги каср-рационал функцияни элементар касрларга ажратамиз:

а) $x^4 + 10\,x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2$;

б) $\dfrac{x^3 - 3}{(x^2 + 5)^2} = \dfrac{Ax + B}{x^2 + 5} + \dfrac{Cx + D}{(x^2 + 5)^2}$;

в) $x^3 - 3 = (Ax + B)(x^2 + 5) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 +$
$+ (5\,A + C)\,x + (5\,B + D)$;

г) $\begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ 5\,A + C = 0, \\ 5\,B + D = -3; \end{cases}$

д) $A = 1,\ B = 0,\ C = -5,\ D = -3.$

$$\frac{x^3 - 3}{(x^2 + 5)^2} = \frac{x}{x^2 + 5} - \frac{5\,x + 3}{(x^2 + 5)^2}\,. \quad (**)$$

(**) тенгликни интеграллаймиз:

$$I = \int \frac{x^3 - 3}{(x^2 + 5)^2}\, dx = \int \frac{x\,dx}{x^2 + 5} - 5 \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 5)^2} -$$

$$- 3 \int \frac{dx}{(x^2 + 5)^2} \quad (***)$$

(***) даги $I_1 = \int \frac{x\,dx}{x^2 + 5}$ интегрални интеграллаш жадвалидаги II формулага келтирамиз:

$$I_1=\int\frac{x\,dx}{x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+5)}{x^2+5}=\frac{1}{2}\ln(x^2+5).$$

$I_2=\int\frac{x\,dx}{(x^2+5)^2}$ интегрални эса интеграллаш жадвалидаги I формулага келтирамиз:

$$I_2=\int\frac{x\,dx}{(x^2+5)^2}=\frac{1}{2}\int(x^2+5)^{-2}\,d(x^2+5)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+5)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2(x^2+5)}.$$

(***) тенгликдаги учинчи интегрални топишда рекуррент формуладан (548,2) мисолга қаранг) фойдаланамиз; яъни учинчи интегрални K_2 деб белгилаймиз, у ҳолда

$$K_2=\int\frac{dx}{(x^2+5)^2}=\frac{1}{2\cdot5}\cdot\frac{x}{x^2+5}+\frac{1}{2\cdot5}\cdot K_1=$$
$$=\frac{x}{10(x^2+5)}+\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2+5}=\frac{1}{10}\left(\frac{x}{x^2+5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)=$$
$$=\frac{1}{10\cdot\sqrt{5}}\left(\frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$$

га эга бўламиз. Топилган I_1, I_2, K_2 ларнинг ифодаларини (***) тенгликка қўйсак, қуйидаги натижа ҳосил бўлади:

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+\frac{5}{2(x^2+5)}-\frac{3}{10\sqrt{5}}\left(\frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}+\right.$$
$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+\frac{25-3x}{10(x^2+5)}-$$
$$-\frac{3}{10\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Эслатма: K_2 интегрални топишда ўзгарувчини алмаштириш усулидан ҳам фойдаланиш мумкин, бунинг учун $x=\sqrt{5}\operatorname{arc\,tg} z$ деб белгилаш мақсадга мувофиқдир. ▲

Қуйидаги интегралларни топинг:

580. $\int\frac{dx}{x^3-x^2}$.

581. $\int\frac{dx}{x^3+x}$.

582. $\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$.

583. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^3-3x^2+3x-1}$.

584. $\int \frac{(7x-15)}{x^3-2x^2+5x}\,dx$.

585. $\int \frac{x^4\,dx}{x^4-2x^2+1}$.

586. $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$.

587. $\int \frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$.

588. $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$.

589. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$.

590. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$.

Эслатма: Каср-рационал функцияларни интеграллашда, соддароқ йўл турганда, у функцияларни содда касрларга ажратишга шошилмаслик керак. Масалан, $\int \frac{x^3}{x^4-1}\,dx$ интегрални топишда $x^4-1=t$ алмаштиришни бажариш керак, чунки $x^3\,dx=\frac{1}{4}\,d(x^4-1)$. Худди шунга ўхшаш $\int \frac{x\,dx}{x^4+x^2+1}$ интегрални топишда $x^2=t$ алмаштиришни бажариш мақсадга мувофиқдир ва ҳоказо.

591. Остроградский усули билан $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$ интегрални топинг.

Δ $$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}\,dx.$$

Бу айниятни дифференциаллаб топамиз:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2}+$$
$$+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

ёки

$$1\equiv(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+$$
$$+F)(x^3-1)\Rightarrow D=0,\ E-A=0,\ F-2B=0,\ D+3C=0,$$

$$E+2A=0,\ B+F=-1\Rightarrow A=0,\ B=-\frac{1}{3},$$

$$C=0,\ D=0,\ E=0,\ F=-\frac{2}{3}.$$

Демак, $\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x^3-1}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3-1}.$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални топиш учун $\frac{1}{x^3-1}$ каср-рационал функцияни содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{L}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1};\quad 1=L(x^2+x+1)+$$
$$+Mx(x-1)+N(x-1)=(L+M)x^2+(L-M+N)x+$$
$$+(L-N)\Rightarrow L+M=0,\ L-M+N=0,\ L-N=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow L=\frac{1}{3},\ M=-\frac{1}{3},\ N=-\frac{2}{3};$$

демак,

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Шундай қилиб,

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

ва

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{x}{3(x^3-1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+$$
$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\ \blacktriangle$$

Ушбу интегралларни Остроградский усули билан ечинг:

592. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

593. $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

594. $\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

595. $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx.$

4- §. БАЪЗИ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

1. Рационаллаштириш усули. Баъзи иррационал функцияларни интеграллашда ўзгарувчини тегишлича алмаштириб, рационал функциянинг интегралига келтириш, одатда, рационаллаштириш усули дейилади.

$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$ интеграл $x=t^{\mu}$ алмаштириш билан t га нисбатан рационаллашади, бунда $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ лар рационал сонлар, μ эса ана шу каср сонларнинг умумий махражи, интеграл остидаги R эса ўз аргументларининг рационал функциясини билдиради.

Умумийроқ кўринишдаги

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

ёки

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

интегралларни мос равишда $ax+b=t^{\mu}$ ёки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\mu}$ алмаштириш билан рационаллаштириш мумкин.

2. Тригонометрик функцияларга рационал боғлиқ бўлган функциялар интегралларига келтириладиган интеграллар:

$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ да $x=a\sin t$ белгилаш,

$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ да $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ белгилаш,

$\int R(x), \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ да $x=a\sec t$ белгилаш

берилган интегралларни t га нисбатан рационаллаштиради.

3. Биномиал дифференциални интеграллаш. $x^m(a+bx^n)^p$ ни интеграллаш (бунда $m, n, p\in Q$) Чебишев теоремасига кўра фақат қуйидаги 3 та ҳолда бажарилади:

1) $p\in Z$ бўлса, $p>0$ да $(a+bx^n)^p$ Ньютон биноми

формуласи бўйича ёйилади, $p<0$ да $x=t^{\mu}$ деб олинади, бунда μ берилган m ва n нинг умумий махражи;

2) $p=\frac{l}{s}$ — каср сон, лекин $\frac{m+1}{n}$ — бутун сон бўлса, $a+bx^n=t^s$ алмаштириш қўлланилади;

3) $p=\frac{l}{s}$, $\frac{m+1}{n}$ — каср сонлар бўлиб, $p+\frac{m+1}{n}$ — бутун сон бўлса, $a+bx^n=t^s x^n$ алмаштириш қўлланилади.

4. $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}}\,dx$ (бунда $P_n(x)$ n-даражали кўпҳад, $v=ax^2+bx+c$) кўринишдаги интеграл ушбу формула билан топилади:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}}dx=(A\cdot x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n)\sqrt{v}+B\int\frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

Бунда A_1 A_2, ..., A_n, B лар ўзгармаслар бўлиб, улар юқоридаги тенгликни дифференциаллаб $\sqrt{v}$ га кўпайтириш ва x нинг бир хил даражаларининг коэффициентларини солиштириш натижасида топилади.

$\int P_n(x)\sqrt{v}\,dx$ кўринишдаги интеграл ҳам худди юқоридагига ўхшаш йўл билан топилади:

$$\int P_n(x)\sqrt{v}\,dx=\int\frac{v\,P_n(x)\,dx}{\sqrt{v}}=(A_2x^{n+1}+A_2x^n+$$
$$+\ldots+A_{n+2})\cdot\sqrt{v}+B\int\frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

5. $\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ни $x-a=\frac{1}{t}$ алмаштириш билан топиш мумкин.

6. Эйлер алмаштиришлари.

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,dx$$

кўринишдаги интеграллар Эйлер алмаштиришлари ёрдамида рационаллаштириш усули билан топилади:

1) агар $a>0$ бўлса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$;

2) агар $c>0$ бўлса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$;

3) агар α $ax^2+bx+c=0$ нинг ҳақиқий илдизларидан бири бўлса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,t$ алмаштириш бажарилади.

596. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$;

3) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$;

5) $\int \frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}dx$; 6) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$.

Δ 1) I қоидага кўра $x=t^4$ белгилаш киритиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$dx=4t^3dt,\quad I=\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx=\int \frac{1+t}{t^4+t^2}\cdot 4t^3dt=$$

$$=4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt=4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=4\left(\int dt+\int \frac{tdt}{t^2+1}-\int \frac{dt}{t^2+1}\right)=4t+2\ln(t^2+1)-$$

$$-4\operatorname{arctg}t+C.$$

x ўзгарувчига қайтсак, $I=4\cdot\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-$ $-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$ ҳосил бўлади.

2) I қоидани қўллаб, $\frac{1+x}{x}=t^2$ алмаштириш киритамиз, у ҳолда

$$x=\frac{1}{t^2-1},\quad dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2},\quad \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=$$

$$=\int (t^2-1)^2\cdot t\cdot\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}=-2\int t^2dt=$$

$$=-\frac{2}{3}t^3+C=C-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}.$$

3) II қоидани қўллаб, $x=2\sin t$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$dx=2\cos tdt \text{ ва } \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx=\int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}\times$$

$$\times 2\cos tdt=\frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=\frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{ctg}^4 t}{\sin^2 t}\cdot dt=-\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^4 t d(\operatorname{ctg}t)=$$

$$= -\frac{1}{20}\operatorname{ctg}^5 t + C = C - \frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5} \left(t = \arcsin\frac{x}{2},\right.$$

$$\operatorname{ctg} t = \operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)} =$$

$$\left. = \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right).$$

4) Бундаги интеграл биномиал дифференциалнинг интеграли:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^5}} = \int x^{-2} \cdot (1+x^3)^{-\frac{5}{3}} dx;$$

бунда $m = -2$, $n = 3$, $p = -\frac{5}{3}$, $\frac{m+1}{n} + p = -2$ бутун сон. Шунинг учун III қоидага кўра $1 + x^3 = x^3 z^3$ белгилаш киритамиз, у ҳолда

$$x^3 = \frac{1}{z^3-1};\ 1 + x^3 = \frac{z^3}{z^3-1},\ x = \frac{1}{(z^3-1)^{1/3}};$$

$$dx = -\frac{z^2 dz}{(z^3-1)^{4/3}},\ I = \int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}} dx =$$

$$= -\int (z^3-1)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{z^3}{z^3-1}\right)^{-\frac{5}{3}} \cdot \frac{z^2 dz}{(z^3-1)^{4/3}} = -\int \frac{z^3-1}{z^3} dz =$$

$$= \int z^{-3} dz - \int dz = -\frac{z^2}{2} - z + C = C - \frac{1+2z^3}{2z^2} =$$

$$= C - \frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$$

$\left(\text{чунки } z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\right)$.

5) IV қоидани қўллаймиз, у ҳолда

$$I = \int \frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2-2x}} dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-2x} +$$

$$+D\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}. \qquad (*)$$

A, B, D ўзгармас коэффициентларни топиш учун тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаймиз, сўнгра уни $\sqrt{x^2-2x}$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}=A\sqrt{x^2-2x}+(Ax+B)\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}+\frac{D}{\sqrt{x^2-2x}};$$

$$2x^2-x-5=A(x^2-2x)+(Ax+B)(x-1)+D=$$
$$=2Ax^2+(B-3A)x+(D-B).$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даражаларининг олдидаги коэффициентларини солиштириб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$2A=2,\quad B-3A=-1,\quad D-B=-5.$$

Бу системани ечиб (*) га қўямиз:

$$A=1,\ B=2,\ D=-3;$$

$$I=(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Охирги интегрални интеграллаш жадвалидаги XI формулага келтирамиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}=\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-1}}=\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-1}\right|.$$

Шундай қилиб,

$$I=(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-1}\right|+C$$

га эга бўламиз.

6) V қоидага кўра $x-1=\frac{1}{t}$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}}=$$

$$=-\int\frac{|t|\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}},$$

чунки $\sqrt{t^2} = |t|$ бўлиб, $-1 < x < 1$ ўринли бўлгани учун $x-1 < 0$ да $t < 0$ ва шунинг учун $|t| = -t$. Энди $I = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}$ интегрални интеграллаш жадвалидаги I формулага келтирамиз:

$$I = \int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2}\int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}} d(-1-2t) =$$

$$= -(-1-2t)^{\frac{1}{2}} + C = C - \sqrt{-1-\frac{2}{x-1}} =$$

$$= C - \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}.$$

7) VI қоиданинг 2-бандига кўра қуйидагини ёза оламиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}} = \left\| c = 4 > 0, \text{ демак, } \sqrt{4+2x-x^2} = \right.$$

$$= tx - 2,\ x = \frac{4t+2}{1+t^2};\quad dx = \frac{-4(t^2+t-1)}{(1+t^2)^2}\,dt;$$

$$\left.\sqrt{4+2x-x^2} = t\cdot\frac{4t+2}{1+t^2} - 2 = \frac{2(t^2+t-1)}{1+t^2}\right\| =$$

$$= \int \frac{\frac{-4(t^2+t-1)}{(1+t^2)^2}}{\frac{2(t^2+t-1)}{1+t^2}}\,dt = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = C - 2\operatorname{arctg} t =$$

$$= C - 2\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{4+2x-x^2}}{x}. \blacktriangle$$

Рационаллаштириш усулидан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг:

597. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

598. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

599. $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$

600. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

601. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\, dx$.

602. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\, dx$.

603. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}$.

604. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\, dx$.

Биномиал дифференциалларни интегралланг:

605. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\, dx$.

606. $\int x^3 (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx$.

607. $\int x\sqrt{1+x^4}\, dx$.

608. $\int x^5 (1+x^2)^{\frac{2}{3}}\, dx$.

609. $\int \frac{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

610. $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1+3\cdot\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

611. $\int \sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3}\, dx$.

612. $\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

IV қоидага ёки Эйлер алмаштиришларидан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг:

613. $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$.

614. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

615. $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

616*. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

617*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

618. $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.

619. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

620. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

621. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

622. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

5-§. ТРИГОНОМЕТРИК ВА ГИПЕРБОЛИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

I. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ (бунда $R(\sin x, \cos x)$ $\sin x$ ва $\cos x$ ларга нисбатан рационал функция) ни интеграллашда умумий усул (универсал тригонометрик алмаштириш усули деб ҳам айтилади) $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ алмаштиришдан фойдаланилади, бунда $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ бўлиб $\int R(\sin x, \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$ бўлади, яъни t га нисбатан рационал ифодани интеграллашга келади.

Тригонометрик функцияларни интеграллаганда қуйидаги кўринишдаги интеграллар кўп учрайди:

II. $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$.

III. $\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$.

IV. $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$,

буларда m, n лар мусбат бутун сонлар.

V. $\int \sin ax\cdot\cos bx dx$, $\int \sin ax\cdot\sin bx dx$, $\int \cos ax\cdot\cos bx dx$.

Бундай интегралларни қуйидаги қоидаларга амал қилиб топамиз:

1. Жуфт даражали синус ёки косинус функцияларнинг интегралини топишда даражаларни пасайтириш формулаларидан фойдаланилади:

$$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u), \quad \cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u),$$

$$\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2}\sin 2u.$$

2. Тоқ даражали синус ёки косинус функцияларнинг интегралини топишда ундан битта кўпайтувчини ажратиб, сўнгра кофункция* янги ўзгарувчи билан алмаштирилади.

3. Агар m ва n ларнинг ҳар иккаласи жуфт сон бўлса, у ҳолда III кўринишдаги интегрални 1-қоидага кўра ва агар m ва n лардан бири ёки ҳар иккаласи тоқ сон бўлса, 2-қоидага кўра топиш мумкин.

4. IV турдаги интегралларни $\operatorname{tg} x = t$ ёки мос равишда $\operatorname{ctg} x = t$ алмаштириш билан топиш мумкин.

5. V турдаги интегралларни топишда кўпайтмани йиғиндига келтириш формулаларидан фойдаланилади:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x),$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x).$$

6. Агар $\int \sin^m x \cos^n x dx$ да m ва n жуфт сонлар бўлиб, камида биттаси манфий бўлса, $\operatorname{tg} x = t$ $(\operatorname{ctg} x = t)$ алмаштиришни қўллаш лозим, бунда $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ бўлади.

VI. **Гиперболик функцияларни интеграллаш.** Бунда қуйидаги формулалардан фойдаланиш лозим:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \left(\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right),$$

---

* $\sin x$ функциянинг кофункцияси $\cos x$, $\cos x$ функциянинг кофункцияси $\sin x$ дир.

$$\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}\operatorname{sh}2x,\quad \operatorname{sh}^2x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x-1),$$

$$\operatorname{ch}^2x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x+1).$$

Универсал алмаштириш $\operatorname{th}\frac{x}{2}=z$ бўлса, $\operatorname{sh}x=\frac{2z}{1-z^2}$, $\operatorname{ch}x=\frac{1+z^2}{1-z^2}$, $dx=\frac{2dz}{1-z^2}$ бўлади, бунда $x=2\operatorname{Arth}z=$ $=\ln\frac{1+z}{1-z}\ (-1<z<1)$.

623. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}$; 2) $\int\sin^2 3xdx$;

3) $\int\cos^4 xdx$; 4) $\int\sin^5 xdx$;

5) $\int\sin^4 x\cos^2 xdx$; 6) $\int\sin^3 x\cdot\cos^5 xdx$;

7) $\int\operatorname{tg}^4 xdx$; 8) $\int\sin 3x\cdot\cos 5xdx$.

Δ 1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ алмаштириш бажариб, $\sin x$, $\cos x$ ва dx ларни t орқали ифодалаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}=\int\frac{2dt}{t^2+4t-1}=2\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2-5}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2-\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2+\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

2) 1-қоидани қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\sin^2 3xdx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)\,dx=\frac{1}{2}\int dx-$$

$$-\frac{1}{12}\int\cos 6x\,d(6x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\sin 6x+C.$$

3) 1-қоидага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I=\int\cos^4 xdx=\int(\cos^2 x)^2\,dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x)^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int dx+\int\cos 2xd(2x)+\int\cos^2 2xdx\right).$$

Бунда биринчи иккита интеграл интеграллаш жадвалидаги формулага келади, учинчи интегрални эса 1-қоидани қўллаб топамиз:

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int \cos 4x d\,(4x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x.$$

Шундай қилиб, $I = \int \cos^4 x dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} +$ $+ C = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

4) 2-қоидага кўра тоқ даражали $\sin^5 x$ функциядан битта кўпайтувчини ажратиб оламиз: $\sin^5 x = \sin^4 x \cdot \sin x$ ва кофункцияни янги ўзгарувчи билан белгилаймиз, яъни $\cos x = t$, у ҳолда

$$-\sin x dx = dt;\ \int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx =$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x dx = \int (1-t^2)^2\ (-dt) =$$

$$= -\int (1-2t^2+t^4)\ dt = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= C - \cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cdot\cos^5 x.$$

5) 3 (1)-қоидани қўллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x\ (\sin x \cdot \cos x)^2\ dx =$$

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{\sin^2 2x}{4}\ dx = \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x dx -\right.$$

$$\left.-\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx\right) = \frac{1}{8}\ (I_1 - I_2).$$

I_1 интегрални 1-қоидага кўра топамиз:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\ \ dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x d\,(4x) =$$

$$= \frac{1}{2}\ x - \frac{1}{8}\sin 4x.$$

I_2 интегрални $\sin 2x = t$ деб 3 (2)-қоидага кўра топамиз:

$$2\cos 2x dx = dt, \quad I_2 = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{t^3}{6} = \frac{1}{6}\sin^3 2x.$$

I_1 ва I_2 ларнинг топилган ифодаларини I га қўйиб, қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\ x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\ \sin^3 2x\right) + C.$$

6) 3 (2)- қоидани қўллаб, энг кичик тоқ даражали функциядан битта кўпайтувчини ажратамиз, $\sin^3 x = \sin^2 x\cdot\sin x$ ва $\cos x = t$ деб қуйидагиларга эга бўламиз: $-\sin x dx = dt$ ва

$$\int \sin^3 x\cdot\cos^5 x dx = \int (1-\cos^2 x)\ \cos^5 x\cdot\sin x dx =$$

$$= -\int (1-t^2)\ t^5 dt = -\int t^5 dt + \int t^7 dt =$$

$$= -\frac{1}{6}\ t^6 + \frac{1}{8}\ t^8 + C = \frac{1}{8}\ \cos^8 x - \frac{1}{6}\ \cos^6 x + C.$$

7) 4- қоидани қўллаб, $\operatorname{tg} x = t$ десак, у ҳолда

$$x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2};\ \int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \frac{t^4}{1+t^2}\ dt =$$

$$= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

8) 5- қоидадан фойдаланамиз:

$$\int \sin 3x\cdot\cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin\ (-2x))\ dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \sin 8x d\ (8x) - \frac{1}{4}\int \sin 2x d\ (2x) =$$

$$= \frac{1}{4}\ \cos 2x - \frac{1}{16}\ \cos 8x + C.\ \blacktriangle$$

624. Қуйидаги интегралларни топинг:

1) $\int \operatorname{ch}^2 x dx$; 2) $\int \operatorname{ch}^4 x dx$;

3) $\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}$; 4) $\int \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} 2x\cdot\operatorname{sh} 3x dx$.

$\triangle$ Бу интегралларни топишда VI даги формулалардан фойдаланамиз.

1) $$\int \operatorname{ch}^2 x dx = \left\|\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}\ (\operatorname{ch} 2x + 1)\right\| = \int \frac{1}{2}\ (\operatorname{ch} 2x + 1)\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{ch} 2x d\ (2x) + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4}\ \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2}\ x + C.$$

$$2)\ \int \operatorname{ch}^4 x dx = \int (\operatorname{ch}^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x + 1)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\operatorname{ch}^2 2x + 2\operatorname{ch}2x + 1)\, dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{ch}^2 2x dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \operatorname{ch}2x dx + \frac{x}{4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(\operatorname{ch}4x + 1)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x + \frac{x}{4} = \frac{1}{32}\operatorname{sh}4x + \frac{x}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x +$$

$$+ \frac{x}{4} + C = \frac{3x}{8} + \frac{1}{32}\operatorname{sh}4x + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x + C.$$

3) Бу интегрални топишда универсал алмаштиришдан фойдаланамиз:

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = t,\ \text{у ҳолда}\ \operatorname{sh}x = \frac{2t}{1-t^2},\ \operatorname{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$dx = \frac{2dt}{1-t^2}\ \text{ва}\ \int \frac{dx}{2\operatorname{sh}x + 3\operatorname{ch}x} = \int \frac{2dt/(1-t^2)}{2\cdot\frac{2t}{1-t^2} + 3\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{3t^2 + 4t + 3} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2 + 2\cdot\frac{2}{3}t + 1} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{d\left(t + \frac{2}{3}\right)}{\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \|\ \text{интеграллаш жадвалидаги VIII}$$

$$\text{формулага кўра}\| = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{t + \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t + 2}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2} + 2}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

$$4)\ \int \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}2x \cdot \operatorname{sh}3x dx = \left\| \begin{array}{l} \operatorname{sh}x\operatorname{sh}2x = -\frac{1}{2}(\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}3x); \\ \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}2x\operatorname{sh}3x = -\frac{1}{4}(\operatorname{sh}2x + \operatorname{sh}4x - \operatorname{sh}6x) \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{4}\int (\mathrm{sh}2x + \mathrm{sh}4x - \mathrm{sh}6x)\, dx = -\frac{\mathrm{ch}2x}{8} -$$

$$-\frac{\mathrm{ch}4x}{16} + \frac{\mathrm{ch}6x}{24} + C. \ \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

625. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx.$

626. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

627. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}.$

628. $\int \mathrm{tg}^5 3x dx.$

629*. $\int \frac{1+\mathrm{tg}x}{\sin 2x}\, dx.$

630. $\int \cos^2 5x dx.$

631. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx.$

632. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx.$

633. $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx.$

634. $\int \sin^4 x dx.$

635. $\int \mathrm{ctg}^4 x dx.$

636. $\int \cos \frac{4}{3} x \cdot \cos 3x dx.$

637. $\int \sin 5x \cdot \sin 6x dx.$

638*. $\int \sin 3x \cdot \sin 4x \cdot \sin 5x dx.$

639*. $\int (\mathrm{tg}z + \mathrm{ctg}z)^3\, dz.$

640. $\int \mathrm{sh}^3 x dx.$

641. $\int \mathrm{sh}^3 x \cdot \mathrm{ch} x dx.$

642. $\int \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x dx.$

643. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}^2 x}.$

644. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x}.$

645. $\int \mathrm{th}^3 x dx.$

646. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x}.$

647*. $\int \frac{dx}{\mathrm{th}x - 1}.$

648. $\int \frac{\mathrm{sh}x dx}{\sqrt{\mathrm{ch}2x}}.$

V боб. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

1. Аниқ интеграл тушунчасига олиб келадиган масалалар

Фан ва техникада жуда кўп масалалар чегараланмаган сондаги чексиз кичик қўшилувчилар йиғиндисини ҳисоблаш масаласига келтирилади. Бу масала эса, ўз навбатида, математиканинг асосий тушунчаларидан бири бўлган аниқ интеграл тушунчасига олиб келади.

Аниқ интеграл тушунчасига олиб келадиган баъзи масалаларни кўриб ўтайлик.

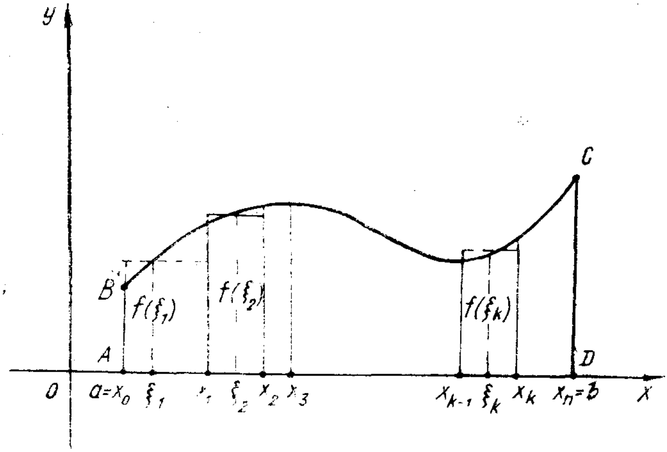
I. Эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш масаласи. $[a, b]$ кесмада узлуксиз $y = f(x) > 0$ функция берилган бўлсин. $y = f(x)$ эгри чизиқ, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқ билан чегараланган текис фигура $ABCD$ *эгри чизиқли трапеция* дейилади. Шу трапециянинг юзини топиш керак бўлсин.

Бунинг учун $[a, b]$ кесмани $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нуқталар ёрдамида n та (ихтиёрий) бўлакка бўламиз ва бўлиниш нуқталаридан Oy ўққа параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, $ABCD$ эгри чизиқли трапецияни n та кичик эгри чизиқли трапецияларга ажратамиз. Ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ кесмачада ихтиёрий ξ_k нуқта олиб, $f(\xi_k)$ ординатани ўтказамиз. $[x_{k-1}, x_k]$ кесмачанинг узунлигини $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ каби белгилаймиз ва $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k = \lambda$ деб оламиз. Ҳар бир эгри чизиқли трапецияда асоси Δx_k, баландлиги $f(\xi_k)$ бўлган тўғри тўртбурчак чизамиз (36-*а* чизма). Бу тўғри тўртбурчак юзларининг йиғиндиси қуйидагига тенг:

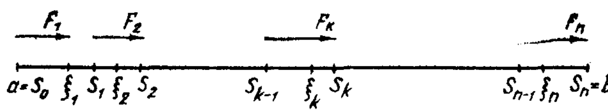
$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

$\lambda \to 0$ да (n бўлиниш сони чексиз ўсганда) S_n ифода эгри чизиқли трапеция юзига тобора яқинлаша боради. Шу сабабли эгри чизиқли трапециянинг юзи учун

$$S = \lim_{\lambda \to} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (1)$$



36- *а* чизма



36- *б* чизма

ни қабул қиламиз.

II. Куч таъсирида бажариладиган ишни ҳисоблаш масаласи. Бирор F куч таъсири остида M моддий нуқта Os тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилсин, бунда кучнинг йўналиши ҳаракат йўналиши билан бир хил бўлсин. M нуқта $s = a$ вазиятдан $s = b$ вазиятга кўчганда кучнинг бажарган ишини топиш керак. Агар F куч ўзгармас бўлса, у ҳолда кучнинг бажарган A иши $Fs = F(b-a)$ $(A = F\cdot s)$ кўпайтма билан ифодаланиши ўқувчига механикадан маълум. Фараз қилайлик, F куч ўзгарувчи, яъни s оралиқнинг функцияси $(F = F(s))$ бўлсин. Бундай ҳолда $A = F\cdot s$ формуладан фойдалана олмаймиз. Бу ҳолда ҳам худди 1- масаладагидек $[a; b]$ кесмани ихтиёрий равишда

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = b$$

нуқталар орқали n та $[s_0; s_1]$, $[s_1; s_2]$, . . ., $[s_{n-1}; s_n]$ кесмачаларга бўламиз ва ҳар бир $[s_{k-1}; s_k]$ кесмачадан ихтиёрий равишда ξ_k $(k = \overline{1,n})$ нуқта танлаймиз (36- б чизма).

Агар ҳар бир $[s_{k-1}; s_k]$ кесмачада F кучни ўзгармас ва

$F(\xi_k)$ га тенг деб фараз қилсак, бу кесмачада бажарилган иш $F(\xi)\Delta s_k$ га тенг бўлади, бунда

$$\Delta s_k = s_k - s_{k-1}.$$

Бу ҳолда $[a; b]$ кесмада $F(s)$ куч бажарган иш тақрибан

$$F(\xi_1)\Delta s_1 + F(\xi_2)\Delta s_2 + \ldots + F(\xi_n)\Delta s_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta s_k$$

га тенг бўлади. Энди $[s_{k-1}; s_k]$ кесмачаларнинг энг узунини кичрайтира бориб, нолга интилтирсак, яъни $\Delta s = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta s_k \to 0$ бўлса, F куч таъсирида бажариладиган иш учун

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta s_k \qquad (2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

III. Босиб ўтилган йўлни тезлик бўйича топиш масаласи. Нотекис ҳаракатдаги моддий нуқтанинг моментдаги тезлиги $v = v(t)$ берилган бўлсин. Вақт $t = T_1$ дан $t = T_2$ гача ўзгарганда босиб ўтилган йўлни топиш керак. Маълумки, моддий нуқта нотекис ҳаракатланаётганлиги учун $s = vt$ деб ололмаймиз (текис ҳаракатда $s = vt$ эди). Бу ҳолда босиб ўтилган йўлни худди юқоридагидек аниқлаймиз. Вақт оралиғи $[T_1; T_2]$ ни ихтиёрий равишда

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T_2$$

нуқталар орқали n та $[t_0; t_1]$, $[t_1; t_2]$, ..., $[t_{k-1}; t_k]$, ..., $[t_{n-1}; t_n]$ кесмачаларга бўламиз ва ҳар бир $[t_{k-1}; t_k]$ кесмачадан ихтиёрий равишда ξ_k нуқта танлаймиз. Агар бу кесмачалар етарли даражада кичик бўлса, бу кесмачаларда тезлик $v = v(\xi_k)$ бўлиб, моддий нуқта текис ҳаракат қилади дейиш мумкин.

$[t_{k-1}; t_k]$ кесмачада босиб ўтилган йўл тақрибан

$$s_k = v(\xi_k)\Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_k - t_{k-1} \quad (k = \overline{1,n}).$$

Бутун вақт оралиғи $[T_1; T_2]$ да эса босиб ўтилган йўл тақрибан

$$s_n = v(\xi_1)\Delta t_1 + v(\xi_2)\Delta t_2 + \ldots + v(\xi_n)\Delta t_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k) \Delta t_k$$

га тенг бўлади. Вақт оралиқлари $[t_{k-1}; t_k]$ нинг энг каттасини нолга интилтирсак, яъни $\Delta t = \max\limits_{1 \leqslant k = n} \Delta t_k \to 0$ бўлса, босиб ўтилган йўл учун

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k) \Delta t_k \tag{3}$$

ни ҳосил қиламиз.

IV. Моддий чизиқ массасини зичлик бўйича топиш масаласи. Бирор моддий чизиқ кесмасини олиб, бу чизиқнинг ҳар бир s нуқтасида зичлик маълум бўлсин дейлик, яъни $\delta = f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$. Худди юқоридагидек $[0; S]$ кесмада моддий чизиқ массаси қуйидагича аниқланади:

$$m = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(s_k - s_{k-1}), \tag{4}$$

бунда $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = S$ $[0; S]$ кесмани бўлиш нуқталари, $s_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant s_k$, $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$,

$$\Delta s = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta s_k \quad (k = \overline{1, n}).$$

Агар $[s_{k-1}; s_k]$ кесмачани етарли даражада кичик деб қарасак, бу кесмачада зичликни ўзгармас ва $f(\xi_k)$ $(s_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant s_k)$ га тенг деб олишимиз мумкин. Бу ҳолда йиғиндидаги ҳар бир $f(\xi_k)(s_k - s_{k-1})$ қўшилувчи $[s_{k-1}; s_k]$ оралиқдаги чизиқнинг массасини ифодалайди. Шундай қилиб, юқоридаги масалаларни ечиш умуман олганда қуйидаги

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

кўринишдаги йиғиндиларнинг лимитини ҳисоблаш масаласига олиб келади. Шунга ўхшаш кўпгина физик, геометрик ва ҳоказо масалалар шу кўринишдаги йиғиндининг лимитини излашга келтирилади.

Энди масалани умумий ҳолда ечайлик. $y = f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада аниқланган бўлсин. $[a; b]$ кесмани ихтиёрий равишда

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

нуқталар билан n та $[x_{k-1};\ x_k]$ $(k = \overline{1,n})$ кесмачаларга бўламиз. Ҳар бир $[x_{k-1};\ x_k]$ кесмачадан ихтиёрий равишда ξ_k нуқта олиб, $f(\xi_k)$ ни ҳисоблаймиз ва қуйидаги

$$f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{5}$$

йиғиндини тузамиз, бунда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

(5) йиғинди $f(x)$ функциянинг $[a;\ b]$ кесмадаги *интеграл йиғиндиси* дейилади. (5) интеграл йиғиндининг қиймати $[a;\ b]$ кесманинг бўлиниш усулига ва ξ_k нуқталарнинг танланишига боғлиқ, яъни $[a;\ b]$ кесмада берилган $f(x)$ функция учун $[a;\ b]$ кесмани ихтиёрий равишда n та бўлакка бўлиб, ҳар бир бўлакчадан ихтиёрий ξ_k нуқталарни танлаш билан чексиз кўп интеграл йиғиндилар тўпламини тузиш мумкин.

Агар (5) интеграл йиғиндининг чекли I лимити $\Delta x = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$ $(n \to \infty)$ да $[a;\ b]$ кесманинг бўлиниш усулига ва ξ_k нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаган ҳолда мавжуд бўлса, у ҳолда бу I лимит $f(x)$ функциянинг $[a;\ b]$ даги аниқ интеграли дейилади ва

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

каби белгиланади.

Таърифга кўра

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

бу ерда a ва b лар мос равишда аниқ интегралнинг қуйи ва юқори чегаралари дейилади.

Бундай ҳолда $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада интегралланувчи дейилади.

Аниқ интеграл таърифидан фойдаланиб, юқорида кўрилган геометрик, физик масалаларни қуйидагича ифодалаш мумкин:

1′) Эгри чизиқли трапеция юзи:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1')$$

2') F куч таъсирида бажарилган иш:

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta s_k = \int_a^b F(s)\,ds. \qquad (2')$$

3') Тезлик бўйича босиб ўтилган йўл:

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\,\Delta t_k = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\,dt. \qquad (3')$$

4') Зичлик бўйича масса:

$$m = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta s_k = \int_0^S f(s)\,ds.$$

2. Аниқ интегралнинг хоссалари ва уни ҳисоблаш

1) Ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин: агар $k = \text{const}$ бўлса, у ҳолд

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx.$$

2) Интеграллаш чегараларининг ўринлари алмаштирилса, интегралнинг ишораси ўзгаради:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

3) Интеграллаш чегаралари бир хил $(a = b)$ бўлганда интегралнинг қиймати нолга тенг бўлади:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

4) Бир неча функция алгебраик йиғиндисининг аниқ интеграли қўшилувчи функциялар аниқ интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx.$$

5) Агар $[a; b]$ $(a < b)$ кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $f(x) \leqslant \varphi(x)$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

6) Агар $f(x)$ функция учун $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ мавжуд бўлса, у ҳолда ҳар қандай учта a, b, c сон учун

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

тенглик ўринли бўлади.

7) Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. Агар $[a: b]$ кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар узлуксиз бўлиб, $\varphi(x)$ функция ўз ишорасини ўзгартмаса, у ҳолда $(a; b)$ оралиқда камида битта шундай c нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(s)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad a < c < b$$

тенглик ўринли бўлади.

$\varphi(x) = 1$ бўлганда 7-хоссадан қуйидаги муҳим хосса келиб чиқади:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad (a < c < b).$$

$f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги ўрта қиймати дейилади.

Маълумки, $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлса, унинг бошланғич функцияси мавжуд бўлади. $F(x)$ унинг бошланғич функцияларидан бири бўлсин, яъни $F'(x) = f(x)$. У ҳолда қуйидаги

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (7)$$

формула ўринлидир. Бу формула аник интегралларни ҳисоблашнинг асосий формуласи бўлиб, *Ньютон — Лейбниц формуласи* дейилади.

649. Аниқ интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_0^1 x\frac{dx}{(2x+1)^3}$; б) $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^4\,dx$;

в) $\int\limits_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; г) $\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$.

Δ Ньютон—Лейбниц формуласини ва аниқ интеграл хоссаларини қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\text{а)}\ \int\limits_0^1\frac{dx}{(2x+1)^3}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(2x+1)^{-3}d(2x+1)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^{-2}}{-2}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{4(2x+1)^2}\Bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-1\right)=\frac{2}{9};$$

$$\text{б)}\int\limits_0^1(x(2-x^2)^4\,dx=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(2-x^2)^4\,d(2-x^2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{(2-x^2)^5}{5}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{10}(1-2^5)=\frac{31}{10}=3\frac{1}{10};$$

$$\text{в)}\ \int\limits_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int\limits_1^{e^3}(1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(1+\ln x)=$$

$$=\frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{e^3}=2\sqrt{1+\ln x}\Bigg|_1^{e^3}=2(2-1)=2;$$

г) $\int\limits_0^2|1-x|\,dx$ ни ҳисоблашда интеграл остидаги функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$|1-x|=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

Аниқ интегралнинг аддитивлик хоссасига асосан

$$\int_0^2|1-x|\,dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)\,dx=$$

$$=-\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1+\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1. \quad \blacktriangle$$

650. $\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

$\triangle$ Маълумки

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}}=|\cos x|=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\\ -\cos x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx=$$

$$=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2.$$

Изоҳ. Агар $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ кесмада $\cos x<0$ эканлигини эътиборга олмасак, $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\cos x$ бўлиб, $\int_0^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=$ $=0$ нотўғри натижага эга бўламиз. $\blacktriangle$

651. $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ функциянинг $[1;\ 4]$ даги ўртача қийматини аниқланг.

$\triangle$ Маълумки, $f(x)$ функциянинг $[a;\ b]$ кесмадаги ўртача қиймати $f(c)=\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ эди ($a<c<b$). Ўртача қиймат формуласига асосан

$$f(c)=\frac{\int\limits_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx}{3}=\frac{\int\limits_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx+\int\limits_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}(8-1)+2\right)=\frac{20}{9}. \ \blacktriangle$$

652. Агар электр юритувчи куч E қуйидаги

$$E=E_0\sin\frac{2\pi t}{T}$$

формула билан ифодаланган бўлса, вақт $t=0$ дан $t=\frac{T}{2}$ гача ўзгарганда электр юритувчи кучнинг ўртача қийматини топинг, бунда T — давр, E_0 — амплитуда $\left(t=\frac{T}{4}\right.$ қийматда энг катта қийматга эга бўлади), $\frac{2\pi t}{T}$ — фаза.

$\triangle$ $E=E_0\sin\frac{2\pi t}{T}$ нинг $\left[0;\ \frac{T}{2}\right]$ кесмадаги ўртача қийматини топамиз:

$$E_{ўр}=\frac{E_0}{\frac{T}{2}}\int\limits_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi t}{T}\,dt=\frac{2E_0}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi t}{T}\,d\left(\frac{2\pi t}{T}\right)=$$

$$=\frac{E_0}{\pi}\left(-\cos\frac{2\pi t}{T}\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{2}{\pi}E_0. \ \blacktriangle$$

653. $\int\limits_0^1\sqrt{x}\,dx$, $\int\limits_0^1 x^3dx$ аниқ интегралларни ҳисобламасдан, қайси бири катта эканлигини кўрсатинг.

$\triangle$ Маълумки, (0; 1) оралиқда $\sqrt{x}>x^3$ бўлгани учун ан' интегралнинг 5- хоссасига асосан $\int\limits_0^1\sqrt{x}\,dx>\int\limits_0^1 x^3dx$ бўлади. $\blacktriangle$

Қуйидаги аниқ интегралларни ҳисобланг:

654. $\int\limits_{0}^{2}(3x+1)\,dx.$ 655. $\int\limits_{1}^{4}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

656. $\int\limits_{-a}^{0}\frac{(a+x)^2}{a}\,dx.$ 657. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x+3}{x^2+4}\,dx.$

658. $\int\limits_{-5}^{-1}\frac{dx}{x}.$ 659. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}\,dx.$

660. $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}.$ 661. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x e^{\sin x}dx.$

662. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt.$ 663. $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx.$

664. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ агар } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \sqrt{x}, \text{ агар } 1\leqslant x\leqslant 2, \end{cases}$ бўлса $\int\limits_{0}^{2}f(x)\,dx$

ни ҳисобланг.

665. $\int\limits_{a}^{b}\frac{|x|}{x}\,dx.$ 666. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx.$

Қуйидаги аниқ интегралларни ҳисоблашда Ньютон — Лейбниц формуласини қўллаш мумкинми:

667. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{2\sqrt{x}}.$ 668. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx.$

669. $\int\limits_{2}^{4}\frac{dz}{(x-3)^2}.$ 670. $\int\limits_{0}^{\pi}\operatorname{tg}^2 x\,dx?$

Аниқ интегралларни ҳисобламасдан қайси бири катта эканлигини кўрсатинг:

671. $\int\limits_{0}^{1}x\,dx,\ \int\limits_{0}^{1}x^2\,dx.$ 672. $\int\limits_{0}^{1}e^x\,dx,\ \int\limits_{0}^{1}e^{x^2}\,dx.$

673. $\int\limits_0^1 e^{-x}\,dx,\ \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx.$ **674.** $\int\limits_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^x dx, \int\limits_{-2}^{-1} 3^x dx.$

675. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx,\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$

Берилган кесмада берилган функциянинг ўрта қийматини топинг:

676. $f(x)=x^2$, $[0;\ 1]$. **677.** $f(x)=2x$, $[-1,\ 1]$.

678. $f(x)=\sqrt{x}$, $[0;\ 10]$. **679.** $f(x)=\frac{1}{x}$, $[1;\ 2]$.

680. $f(x)=\sin x+2\cos x+3$, $[0;\ 2]$.

681. $f(x)=x^2+x-1$, $[1;\ 4]$.

682. Агар p босим билан V ҳажм орасидаги боғланиш қуйидаги

$$pV^{\frac{3}{2}}=160$$

кўринишда берилса, босим $p=2$ дан $p=10$ атм. гача ўзгарганда босимнинг ($p_{\text{ўр}}$.) ўртача қийматини топинг.

683. Ўзгарувчан ток кучи $I=I_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$ қонуният билан ўзгаради, бунда I_0 — амплитуда, t — вақт, T — давр, φ — бошланғич фаза. Ток кучи квадратининг $[0;\ T]$ оралиқдаги ўртача қийматини топинг.

2- §. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИ БЎЛАКЛАБ ИНТЕГРАЛЛАШ

$[a;\ b]$ кесмада $u=u(x)$, $v=v(x)$ функциялар узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, қуйидаги бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли бўлади:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du \qquad (1)$$

684. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx;$ б) $\int^2 x\ln x\,dx;$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx$.

$\triangle$ а) $u = x$, $dv = e^{-x}dx$ деб оламиз. У ҳолда $du = dx$, $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$ бўлади. (1) формулага асосан:

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (-e^{-x})\, dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{e} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}; \quad \blacktriangle$$

$\triangle$ б) $u = \ln x$, $dv = xdx$ деб оламиз. У ҳолда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. (1) формулага асосан:

$$\int\limits_1^2 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\, dx = 2\ln 2 -$$

$$-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}; \quad \blacktriangle$$

$\triangle$ в) $u = x^2$, $dv = \sin x dx$ десак, $du = 2xdx$, $v = -\cos x$. (1) формулага асосан:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x\, dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 2 I_1,$$

бунда $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$. I_1 ни яна бўлаклаб интеграллаймиз. Бунинг учун $u = x$, $dv = \cos x\, dx$ десак, $du = dx$, $v = \sin x$. У ҳолда

$$I_1 = x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$=\frac{\pi}{2}-1, \quad I_1=\frac{\pi}{2}-1.$$

Шундай қилиб,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2. \quad \blacktriangle$$

$\triangle$ г) $u=\sin bx$, $dv=e^{ax}\,dx$ деб оламиз, у ҳолда $du=$ $=b\cos bx\,dx$, $v=\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}$. (1) га асосан: $I=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\Big|_0^{\frac{\pi}{b}}-\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx=$$

$$=-\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx=-\frac{b}{a}I_1,\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx,$$

$$I=-\frac{b}{a}I_1. \tag{2}$$

I_1 ни яна бўлаклаб интеграллаймиз:

$$u=\cos bx,\ dv=e^{ax}\,dx,$$

$$du=-b\sin bx,\ v=\frac{1}{a}e^{ax},$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\frac{\pi}{b}}+\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{a}e^{\frac{a\pi}{b}}-\frac{1}{a}+\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{a}\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)+\frac{b}{a}I.$$

(2) га асосан:

$$I=-\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{a}\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)+\frac{b}{a}I\right)=\frac{b}{a^2}\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)-\frac{b^2}{a^2}I,$$

бундан

$$I + \frac{b^2}{a^2} I = \frac{b}{a^2}\left(e^{\frac{a\pi}{b}} + 1\right), \quad I = \frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}} + 1\right)}{a^2 + b^2}.$$

Демак,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}} + 1\right)}{a^2 + b^2}.$$

Хусусий ҳолда $a = b = 1$ бўлса, $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$ бўлади. ▲

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

685. $\int_0^1 \ln(1 + x)\, dx$. **686.** $\int_0^1 2x \operatorname{arc\,tg} x dx$.

687. $\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x + 3) \sin(ax)\, dx$. **688.** $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$.

689. $\int_0^1 (x - 1) e^{-x} dx$. **690.** $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx$.

3- §. АНИҚ ИНТЕГРАЛДА ЎЗГАРУВЧИНИ АЛМАШТИРИШ

$\int_a^b f(x)\, dx$ интегрални ҳисоблаш керак бўлсин. $x = \varphi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ алмаштиришни қўллаймиз. Агар $[\alpha; \beta]$ кесмада $x = \varphi(t), \varphi'(t)$, $f(\varphi(t))$ функциялар узлуксиз ва $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ бўлса, қуйидаги

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

формула ўринли.

Баъзи ҳолларда $x = \varphi(t)$ алмаштириш ўрнига $t = \varphi(x)$ кўринишдаги алмаштиришдан фойдаланилади. Бу ҳолда $t = \varphi(x)$ функцияга тескари функция мавжуд бўлиб, бу функция юқоридаги шартларни қаноатлантириши керак.

691. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_0^5 \frac{3\,dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$; б) $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

в) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

$(a>0,\ b>0)$.

Δ а) $3x+1=t^4$ алмаштиришни қўллаймиз. Бундан

$$3x=t^4-1, \quad 3\,dx=4t^3\,dt.$$

Янги ўзгарувчининг чегараларини аниқлаймиз:

$x=0$ бўлганда $t=1$, $x=5$ бўлганда $t=2$.

У ҳолда

$$\int\limits_0^5 \frac{3\,dx}{\sqrt[4]{3x+1}} = \int\limits_1^2 \frac{4\,t^3\,dt}{t} = 4\int\limits_1^2 t^2\,dt = 4\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{4}{3}(8-1) = \frac{28}{3}. \quad \blacktriangle$$

б) Δ $1+\ln x=t^2$ алмаштиришдан фойдаланиб $\frac{dx}{x}=$ $=2tdt$ ни топамиз. Интеграллашнинг янги чегаралари

x	1	e^2
t	1	$\sqrt{3}$

бўлиб,

$$\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{2t\,dt}{t} = 2t\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3}-1). \quad \blacktriangle$$

в) Δ $x=a\sin t$ алмаштиришни қўллаб, $dx=a\cos t\,dt$, $t=0, t=\frac{\pi}{2}$ ларни топамиз. У ҳолда $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$= \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t\cos t)^2\,dt = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t\,dt\right) = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi a^4}{16}. \quad \blacktriangle$$

г) $\triangle$ $\operatorname{tg} x = t$ алмаштиришни қўллаб, $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$ ва $t = 0$, $t = 1$ ларни топамиз. У ҳолда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x\,(a^2 + b^2\operatorname{tg}^2 x)} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} =$$

$$= \frac{1}{b^2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\frac{a^2}{b^2} + t^2} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}t\,\Big|_0^1 = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

Хусусий ҳолда $a = b = 1$ бўлса,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

692. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx.$ **693.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4}.$

694. $\displaystyle\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$ **695.** $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}.$

696. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$ **697.** $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$

698. $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx.$ **699.** $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}.$

700. Агар $f(x)$ функция $[-a;\ a]$ кесмада жуфт бўлса, $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$ бўлади. Исботланг.

701. Агар $f(x)$ функция $[-a;\ a]$ кесмада тоқ бўлса, $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ бўлади. Исботланг.

702. Қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $\int\limits_{-a}^{a} \cos x\, f(x^2)dx = 2\int\limits_{0}^{a} \cos x\, f(x^2)dx;$

б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^8 \sin^9 x\, dx = 0;$

в) $\int\limits_{-a}^{a} \sin x\, f(\cos x)\, dx = 0.$

VI боб. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1- §. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ЁРДАМИДА ЙИҒИНДИНИНГ ЛИМИТИНИ ТОПИШ

Биз юқорида кўрдикки, чегараланмаган сондаги чексиз кичик қўшилувчиларнинг йиғиндисини ҳисоблаш масаласи, яъни йиғиндининг лимитини излаш масаласи аниқ интеграл тушунчасига олиб келди. Кўп ҳолларда қўшилувчилар сони чексиз ортганда йиғиндининг лимитини излаш керак бўлади. Агар берилган йиғиндини бирор функция учун интеграл йиғинди бўладиган кўринишга келтириш мумкин бўлса, бу йиғиндининг лимитини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш мумкин. Масалан, [0; 1] кесмани $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, ..., $x_n = \frac{n}{n}$ нуқталар ёрдамида узунлиги $\Delta x = \frac{1}{n}$ бўлган n та тенг бўлакка бўлайлик. Бу ҳолда ихтиёрий узлуксиз функция учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

$$\left(\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x\to 0)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx;\ \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = \Delta x;\ \xi_k = \frac{k}{n}\right).$$

703. Аниқ интеграл ёрдамида қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right);$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right);$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right).$

Δ а) Ўрта қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчи $f(x)=\sin x$ функциянинг $[0;\ \pi]$ кесмани узунлиги $\Delta x=\frac{\pi}{n}$ бўлган n та тенг бўлакка бўлувчи $x_1=\frac{\pi}{n}$, $x_2=\frac{2\pi}{n}$, $\ldots$, $x_{n-1}=$ $=\frac{(n-1)\pi}{n}$ нуқталардаги қийматларидир. Агар $\sin\frac{n\pi}{n}=0$ эканини ҳисобга олсак, S_n йиғинди $[0;\ \pi]$ кесмада $f(x)=$ $=\sin x$ функция учун интеграл йиғинди бўлади. Таърифга кўра $n\to\infty$ да бу интеграл йиғиндининг лимити $f(x)=$ $=\sin x$ функциядан 0 дан π гача олинган аниқ интегралдир, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=$$

$$=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=2;$$

$$\left(\Delta x_1=\Delta x_2=\ldots=\Delta x_n=\Delta x=\frac{\pi}{n};\quad \xi_k=\frac{k}{n}\right).\ \blacktriangle$$

б) Δ S_n — йиғиндини қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчи $f(x)=\frac{1}{1+x}$ функциянинг $[0;\ 1]$ кесмани узунлиги $\Delta x=\frac{1}{n}$ бўлган n та тенг бўлакка бўлувчи $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n}$, $\ldots$, $x_n=\frac{n}{n}$ нуқталардаги қийматларидир. Бу ҳолда S_n йиғинди $f(x)=\frac{1}{1+x}$ функция учун $[0;\ 1]$ кесмада интеграл йиғинди бўлади ($\Delta x_k=\Delta x=$ $=\frac{1}{n}$, $\xi_k=\frac{k}{n}$, $k=\overline{1,n}$). Аниқ интегралнинг таърифига асосан $n\to\infty$ да S_n интеграл йиғиндининг лимити $f(x)=\frac{1}{1+x}$ функциядан 0 дан 1 гача олинган аниқ интегрални ифодалайди, яъни

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2. \quad \blacktriangle$$

в) $\triangle$ S_n йиғиндини қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{n\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}}\right).$$

Қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчи $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ функциянинг $[0;\ 1]$ кесмани n та тенг бўлакка бўлувчи $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n}$, $\ldots$, $x_n=\frac{n}{n}$ нуқталардаги қийматларидир. Худди юқоридагидек S_n йиғинди $[0;\ 1]$ кесмада $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ функция учун интеграл йиғиндидир. Таърифга асосан

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=$$

$$=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

704. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \right.$
$\left. + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$

705. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim \frac{\pi}{2n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \right.$
$\left. + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right).$

706. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}.$

707. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p > 0).$

2- §. ЯССИ ФИГУРАЛАР ЮЗЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

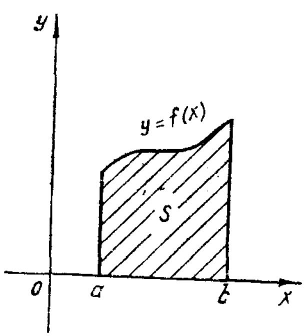
1. Фигура юзини декарт координаталар системасида ҳисоблаш

а) Узлуксиз $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$ эгри чизиқ, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқнинг $[a; b]$ кесмаси билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

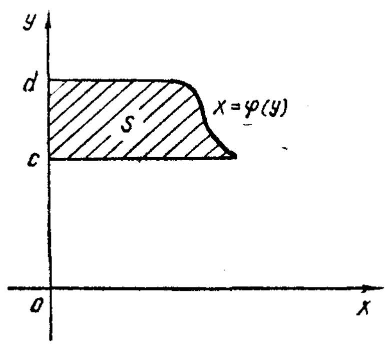
$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

формула билан ҳисобланади (37- чизма).

б) Узлуксиз $x = \varphi(y)(\varphi(y) \geqslant 0)$ эгри чизиқ $y = c$, $y = d$



37- чизма



38- чизма

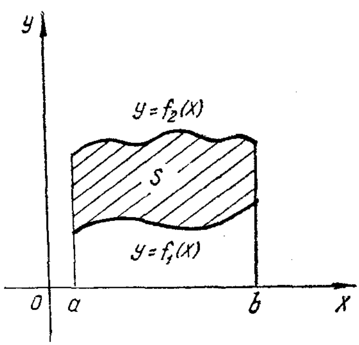
тўғри чизиқлар ҳамда Oy ўқнинг $[c; d]$ кесмаси билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = \int_c^d \varphi(y)\,dy \qquad (2)$$

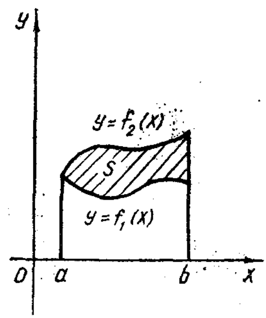
формула билан ҳисобланади (38- чизма).

в) Узлуксиз $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \leqslant f_2(x))$ эгри чизиқлар ҳамда $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (3)$$



39- чизма



40- чизма

формула билан ҳисобланади (39, 40- чизмалар).

г) Узлуксиз $x = \varphi_1(y)$ ва $x = \varphi_2(y)$ $(\varphi_1(y) \leqslant \varphi_2(y))$ эгри чизиқлар ҳамда $y = c$, $y = d$ $(c < d)$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

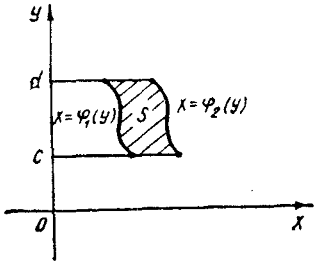
$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))\,dy \qquad (4)$$

формула билан ҳисобланади (41, 42- чизмалар).

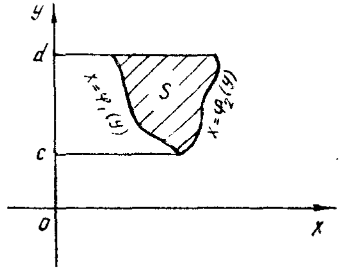
708. а) $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ бўлганда $y = \cos x$ ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

б) $y = x^2 + 1$ парабола $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

в) $x^2 + y^2 \leqslant 3$ доиранинг биринчи чоракда жойлашган ички қисми ва $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$ параболалар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.



41- чизма



42- чизма

г) $y=x^{\alpha}$, $x=y^{\alpha}$ $(\alpha>1)$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

д) $y=2x+1$, $y=\cos x$ чизиқлар ҳамда Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

Δ а) $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ бўлганда $\cos x\geqslant 0$;

$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ бўлганда $\cos x\leqslant 0$;

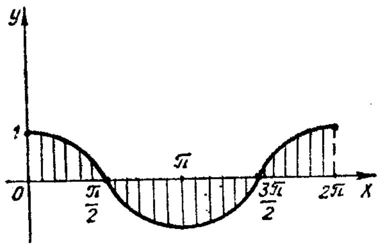
$\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi$ бўлганда $\cos x\geqslant 0$ бўлгани учун (43- чизма),

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx\right|+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x dx.$$

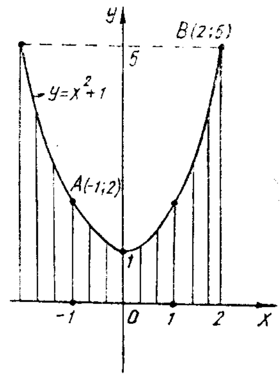
Бундаги аниқ интегралларни алоҳида-алоҳида ҳисобласак:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1;$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=-1-1=-2;$$



43- чизма



44- чизма

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} = 1.$$

У ҳолда изланган юз

$$S = 1 + |-2| + 1 = 4 \text{ кв. б. } \blacktriangle$$

б) Δ $y = x^2 + 1$ параболанинг $x = -1$, $x = 2$ тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталарини топамиз (44- чизма): $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 5)$. Юқоридаги (1) формулага кўра:

$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx = \int_{1}^{2} x^2\, dx + \int_{-1}^{2} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + x\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 2 + 1 = 6 \text{ кв. б. } \blacktriangle$$

в) Δ $x^2 + y^2 = 3$ айлананинг $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$ параболалар билан кесишиш нуқталарини топамиз:

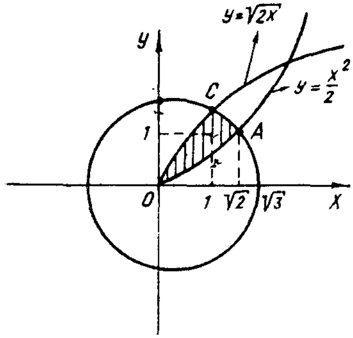
$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0, \quad y_1 = 1,\ y_2 = -3;\ x^2 =$$

$$= 2,\ x_{1,2} = \pm\sqrt{2};$$

$$A(\sqrt{2};\ 1)\, B(-\sqrt{2};\ 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -3;$$

$$y^2 = 2,\ y_{1,2} = \pm\sqrt{2};$$



45- чизма

$C(1;\ \sqrt{2})$, $D(1;-\sqrt{2})$ (45- чизма).
Юз 1- чоракда қаралаётганлиги учун B, D нуқталарни эътиборга олмаймиз. У ҳолда изланаётган юз қуйидагига тенг:

$$S=\int_0^{\sqrt{2}}(f_2(x)-f_1(x))dx,$$

бунда

$$f_2(x)=\begin{cases}\sqrt{2x},\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \sqrt{3-x^2},\ 1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

$f_1(x)=\frac{x^2}{2}$ узлуксиз функциялардир. Аниқ интегралнинг аддитивлик хоссасига асосан:

$$S=\int_0^{\sqrt{2}}(f_2(x)-f_1(x))dx=\int_0^1\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)dx+$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(\sqrt{2}\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1+$$

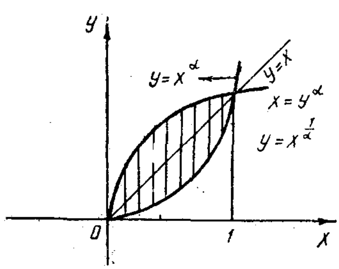
$$+\left(\frac{x}{2}\sqrt{3-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}+$$

$$+\frac{3}{2}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\right.$$

$$\left.-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right).\ \blacktriangle$$



46 -чизма

г) Δ $y=x^{\alpha}$, $x=y^{\alpha}$ чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топамиз (46- чизма):

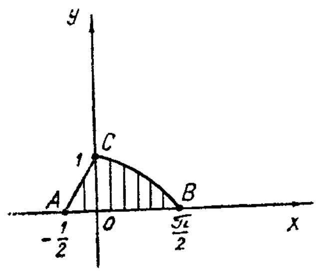
$$\left.\begin{array}{l} y = x^{\alpha} \\ x = y^{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{\alpha^2} = x, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1. \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 1. \quad O(0;\,0),\ A(1;1).$$

(3) формулага асосан:

$$S = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{\alpha}} - x^{\alpha}\right) dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}. \quad \blacktriangle$$

д) Δ $y = 2x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$ чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топамиз (47- чизма):



47- чизма

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

$$A\left(-\frac{1}{2};\ 0\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \cos x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \quad B\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right), \quad C(0;\ 1).$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0 \\ \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ функция $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада узлуксиз.

Аниқ интегралнинг аддитивлик хоссасига ва (1) формулага асосан изланаётган юз қуйидагига тенг:

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (2x + 1)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$

$$= (x^2 + x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \text{ кв. б.} \ \blacktriangle$$

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

709. Ушбу $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

710. $y = x^2 + 1$ парабола ва $y = 3 - x$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

711. $x = 0$, $x = 2$ тўғри чизиқлар ва $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

712. $y = \frac{1}{x}$ гипербола $x = 1$, $x = 3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

713. $y = x^3$ кубик парабола ва $y = 2x$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

714. $y = x^2 - x$ ва $y^2 = 2x$ параболалар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

715. $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$ параболалар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

716. $y = \ln x$ эгри чизиқ, Ox ўқи ва $x = e$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

717. $y = -x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

718. $y = |x - 1|$, $y = 3 - |x|$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

719. $y = \sin x$, $y = \cos x$ эгри чизиқлар ва абсцисса ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисоблаш

Агар фигура

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right\} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

параметрик кўринишда берилган ёпиқ эгри чизиқ билан чегараланган бўлса, унинг юзи

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y'(t)\, dt, \tag{5}$$

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt, \tag{6}$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t))\,dt \qquad (7)$$

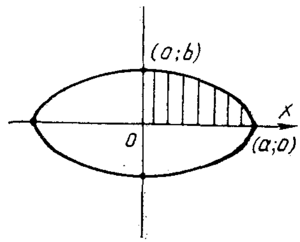
формулаларнинг бири билан ҳисобланади.

720. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

а) $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ эллипс билан чегараланган юзни ҳисобланг.

б) $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

астроида юзини ҳисобланг.



48- чизма

△ а) Координата ўқлари эллипснинг симметрия ўқлари билан устма-уст тушганлиги учун (48-чизма) улар эллипсни тўртта тенг бўлакка бўлади. Эллипснинг I квадрантда ётувчи чорагининг юзи (6) формулага асосан қуйидагига тенг:

$$\frac{S}{4} = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt =$$

$$= ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{ab}{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt =\right.$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Бундан $S = \pi ab$.

Агар $a = b$ бўлса, доиранинг юзи $S = \pi a^2$ келиб чиқади. Эллипснинг юзини (7) формуладан фойдаланиб, осонгина топиш ҳам мумкин:

$$xy' - yx' = a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t\,(-a\sin t) =$$

$$= ab\cos^2 t + ab\sin^2 t = ab.$$

У ҳолда $S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} ab\,dt = \frac{1}{2}\,abt\,\Big|_{0}^{2\pi} = \pi ab.$ ▲

△ б) (7) формулага асосан:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'-yx')\,dt=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=$$

$$=\frac{3}{8}a^2\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}a^2\pi.\ \blacktriangle$$

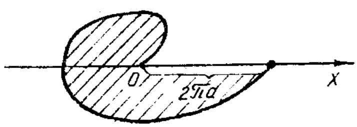
3. Фигура юзини қутб координаталар системасида ҳисоблаш

Қутб координаталар системасида берилган узлуксиз $\rho=\rho(\varphi)$ эгри чизиқ ва $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta\,(\alpha<\beta)$ нурлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\varphi \tag{8}$$

формула билан ҳисобланади.

721. а) $\rho=a\varphi$ Архимед спиралининг бир ўрами ва қутб ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.



49- чизма

б) $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ Бернулли лемнискатасининг юзини ҳисобланг.

в) $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$ айлана билан $\rho=1+\cos\varphi$ кардиоданинг кесишишидан ҳосил бўлган фигуранинг юзини ҳисобланг.

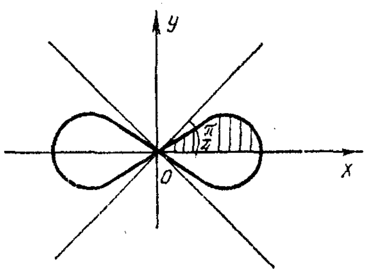
△ а) $\alpha=0$, $\beta=2\pi$. (8) формулага асосан (49- чизма):

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\varphi^2\,d\varphi=$$

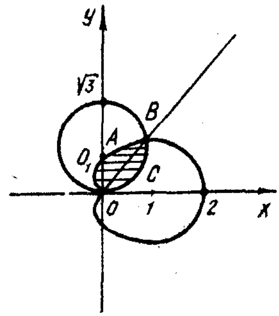
$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{4a^2\pi^3}{3}.\ \blacktriangle$$

△ б) $\sqrt{\cos 2\varphi}$ функция $-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{4}$ оралиқларда аниқланган. Бернулли лемнискатаси координата ўқларига симметрик бўлгани учун изланаётган юзнинг $\frac{1}{4}$ бўлагини топамиз (50- чизма). (8) формулага асосан:

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi=\frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}.$$



50- чизма



51- чизма

бундан $S=a^2$. ▲

в) △ $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$ айлана билан $\rho=1+\cos\ \varphi$ кардиоиданинг кесишиш нуқталарини топиш учун

$$\left.\begin{array}{l}\rho=\sqrt{3}\sin\varphi\\ \rho=1+\cos\varphi\end{array}\right\},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$$

системани ечамиз. Натижада $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2=\pi$ га эга бўламиз (51- чизма).

Изланаётган юз OCB доиравий сегмент $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$ билан OAB кардиоида сегменти $\left(\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\pi\right)$ юзларининг йиғиндисига тенг. (8) формулага асосан:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin^2\varphi d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\, d\varphi=$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}(\varphi + 2\sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{7\pi}{12} - \frac{11\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3}{4}(\pi - \sqrt{3}). \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

722. $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ доира чорагининг юзини ҳисобланг.

723. $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

724. $x = \sin t$, $y = \sin 2t$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

725. $x = a\cos t(1 + \cos t)$, $y = a\sin t(1 + \cos t)$ кардиоида билан чегараланган юзни ҳисобланг.

726. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ кардиоида билан чегараланган юзни ҳисобланг.

727. $\rho = a\cos\varphi$ эгри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

728. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ кардиоида ва $\rho = a$ айлана билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

3- §. ЁЙ УЗУНЛИГИНИ ҲИСОБЛАШ

1. Тўғри бурчакли декарт координаталари системасида берилган эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$[a; b]$ да $y=f(x)$ тенглама билан берилган эгри чизиқ учун $f'(x)$ узлуксиз бўлса, эгри чизиқ $[a; b]$ да. *силлиқ эгри чизиқ* дейилади.

Агар $y=f(x)$ $[a; b]$ да силлиқ эгри чизиқ (яъни $f'(x)$ узлуксиз) бўлса, у ҳолда унинг ёйи узунлиги

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{1}$$

формула билан ҳисобланади. Бунда a ва b ёй учларининг абсциссаларидир $(a<b)$.

Агар эгри чизиқ $x=\varphi(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$ кўринишда берилса, ёй узунлиги

$$l=\int_c^d \sqrt{1+x'^2}\,dy \tag{2}$$

формула билан ҳисобланади.

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқ ёйининг узунлиги

Агар эгри чизиқ

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{array}\right\},\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

кўринишда берилган бўлиб, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ узлуксиз функциялар бўлса, у ҳолда эгри чизиқ ёйининг узунлиги

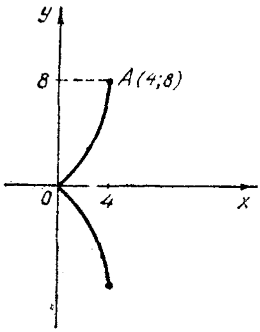
$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt \tag{3}$$

формула билан ҳисобланади. Бунда α ва β лар t параметрнинг ёй учларига мос қийматларидир $(\alpha<\beta)$.

3. Қутб координаталар системасида берилган силлиқ эгри чизиқ ёйининг узунлиги

Қутб координаталар системасида берилган силлиқ эгри чизиқ $\rho=f(\varphi)$, $\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1$ ёйининг узунлиги

$$l=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi \tag{4}$$



52- чизма

орқали ҳисобланади. Бунда φ_0 ва φ_1 — қутб бурчаги φ нинг ёй учларидаги қийматлари ($\varphi_0 < \varphi_1$).

729. $y^2 = x^3$ параболанинг $O(0;\ 0)$ дан $A\ (4;\ 8)$ нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

Δ $y = \pm\sqrt{x^3}$ функция $(0;\ \infty)$ оралиқда аниқланган. Қаралаётган $O\ (0;\ 0)$, $A\ (4;\ 8)$ нуқталар биринчи чоракда ётганлиги учун $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ деб оламиз (52- чизма).

Бу ерда $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x} = \frac{\sqrt{4+9x}}{2}$.

(1) га асосан:

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^4 \frac{\sqrt{4+9x}}{2}\,dx = \frac{1}{18}\int_0^4 (4+9x)^{\frac{1}{2}} d(4+9x) = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\,(4+9x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{1}{27}\left(\sqrt{64000}-\sqrt{64}\right) =$$

$$= \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10}-8\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right). \ \blacktriangle$$

730. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ эгри чизиқнинг ординаталари $y = 1$, $y = 2$ бўлган нуқталари орасидаги ёйи узунлигини топинг.

Δ Бу масалада x ни y нинг функцияси деб қараб, қуйидагиларни топамиз:

$$x' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y},\ \sqrt{1+(x')^2} = \sqrt{1+\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)^2} = \frac{y}{2}+\frac{1}{2y}.$$

(2) формулага асосан:

$$l = \int_1^2 \sqrt{1+x'^2}\,dy = \int_1^2 \left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)dy = \left(\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2}\ln|y|\right)\Big|_1^2 =$$

$$= 1+\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2. \ \blacktriangle$$

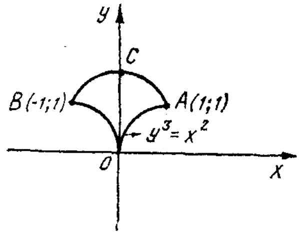
731. $y^3 = x^2$, $y=\sqrt{2-x^2}$ $(x^2+y^2=2)$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг периметрини топинг.

$\triangle$ Бу тенгламаларни система қилиб ечиб, эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} y^3 &= x^2 \\ y &= \sqrt{2-x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y^3 &= x^2 \\ y^2 &= 2-x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y^3+y^2-2=0,$$

$$(y-1)(y^2+2y+2)=0.$$

$y=1$, $x=\pm 1$; $A\ (1;\ 1)$, $B\,(-1;\ 1)$ (53-чизма).



53- чизма

Бу фигура Oy ўқига нисбатан симметрик. Шунинг учун бу фигуранинг периметри қуйидагига тенг:

$$l = 2\ (l_{\smile OA}\ l+l_{\smile AC}).$$

(2) формулага асосан:

$$l_{\smile OA} = \int_{y_O}^{y_A} \sqrt{1+x'^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy = \frac{4}{9}\int_0^1\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+\frac{9}{4}y\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}\,y\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{8}{27}\,\frac{\sqrt{(4+9y)^3}}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{27}\,(13\sqrt{13}-8).$$

(1) формулага асосан:

$$l_{\smile AC} = \int_{x_C}^{x_A}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\,dx =$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2}\ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1 = \sqrt{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = $$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Изланаётган фигуранинг периметри қуйидагига тенг:

$$l = 2\ (l_{\smile OA}+l_{\smile AC}) = 2\left(\frac{13\sqrt{13}-8}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right). \ \blacktriangle$$

732. $\left.\begin{aligned} x &= a\,(t - \sin t) \\ y &= a\,(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}$ циклоиданинг $t = 0$ дан $t = 2\pi$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

$\triangle$ Циклоиданинг параметрик тенгламасини t параметр бўйича дифференциаллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t,$$

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2 \sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos t} = a\sqrt{2\,(1 - \cos t)} = a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= 2a \sin\frac{t}{2}.$$

(3) формулага асосан:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\, dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, d\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a\,(-1 - 1) = 8a. \ \blacktriangle$$

733. $\left.\begin{aligned} x &= a\,(\cos t + t\sin t) \\ y &= a\,(\sin t - t\cos t) \end{aligned}\right\}$ доира эволвентасининг $t = 0$ дан $t = \pi$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

$\triangle$ Эгри чизиқ параметрик тенгламасини t бўйича дифференциаллаймиз:

$$x'_t = a\,(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at \cos t,$$

$$y'_t = a\,(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t.$$

У ҳолда

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = at.$$

(3) формулага асосан:

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt = \int_0^{\pi} at\, dt = \frac{at^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi^2}{2}. \ \blacktriangle$$

734. $\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{3}\,t^2 \\ y &= t - t^3 \end{aligned}\right\}$ эгри чизиқ (сиртмоқ) ёйининг узунлигини топинг.

$\triangle$ Интеграллаш чегараларини топамиз: $x = \sqrt{3}\,t^2 \geqslant 0$, яъни эгри чизиқ ўнг ярим текисликда ётади ҳамда у Ox

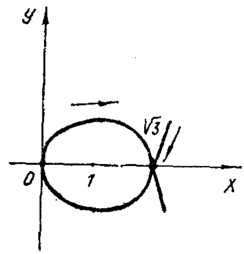
ўқга нисбатан симметрик ($x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$) (54-чизма). $y = 0$ бўлганда $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm 1$;

$$x(t_2) = x(t_3) = \sqrt{3},$$
$$x(-1) = x(1) = \sqrt{3}.$$

Демак, интеграллаш чегараси -1 дан 1 гача бўлади.

Эгри чизиқнинг параметрик тенгламасини дифференциаллаймиз:

$$x'_t = 2\sqrt{3}\,t, \quad y'_t = 1 - 3t^2.$$



54-чизма

У ҳолда

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{12t^2 + 1 - 6t^2 + 9t^4} = \sqrt{(3t^2 + 1)^2} =$$
$$= 3t^2 + 1.$$

(3) формулага асосан:

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = \int_{-1}^{1} (3t^2 + 1)\, dt = (t^3 + t)\Big|_{-1}^{1} = 4. \ \blacktriangle$$

735. $\rho = ae^{m\varphi}$ логарифмик спиралнинг (ρ_0; φ_0) дан (ρ_1; φ_1) гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

$\triangle$ Қуйидагиларни топамиз:

$$\rho' = ame^{m\varphi}, \ \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2 e^{2m\varphi} + a^2 m^2 e^{2m\varphi}} =$$
$$= a\sqrt{1 + m^2}\, e^{m\varphi}.$$

(4) формулага асосан ($\rho_1 > \rho_0$):

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} a\sqrt{1 + m^2}\, e^{m\varphi}\, d\varphi =$$
$$= \frac{a\sqrt{1 + m^2}}{m} e^{m\varphi}\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_1} = \frac{a\sqrt{1 + m^2}}{m}\left(e^{m\varphi_1} - e^{m\varphi_0}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}(\rho_1 - \rho_0). \ \blacktriangle$$

736. $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi)$ эгри чизиқ ёйининг узунлигини топинг.

$\triangle$ Берилган функция ҳосиласини топамиз:

$$\rho' = -a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}.$$

У ҳолда

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\sqrt{a^2\cos^6\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos^4\frac{\varphi}{3}}=a\cos^2\frac{\varphi}{3}.$$

(4) формулага асосан:

$$l=\int_0^{3\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=\int_0^{3\pi}a\cos^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=a\int_0^{3\pi}\frac{1+\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{a}{2}\left(\int_0^{3\pi}d\varphi+\frac{3}{2}\int_0^{3\pi}\cos\frac{2\varphi}{3}\,d\left(\frac{2\varphi}{3}\right)\right)=\frac{a}{2}\left(\varphi+\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{3\pi}=$$

$$=\frac{3\pi}{2}a. \qquad ▲$$

737. $\varphi=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$ эгри чизиқ ёйининг узунлигини топинг ($1\leqslant\rho\leqslant3$).

△ Маълумки, $l=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$. Тескари функция ҳосиласига асосан $\left(\rho'(\varphi)=\frac{1}{\varphi'(\rho)}\right)$: $l=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{1}{\varphi'(\rho)}\right)^2}\varphi'(\rho)d\rho=$

$$=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\sqrt{(\rho\varphi'(\rho))^2+1}\,d\rho=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\right)^2+1}\,d\rho=$$

$$=\int_1^3\left(\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2\rho}\right)d\rho=\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{1}{2}\ln\rho\right)\Big|_1^3=$$

$$=2+\frac{1}{2}\ln 3. \qquad ▲$$

Қуйидаги эгри чизиқ ёйларининг узунликларини аниқланг:

738. $y^2=4x$ параболанинг O (0; 0) нуқтадан A (1; 1) нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

739. $y^2=x^3$ эгри чизиқнинг $x=\frac{4}{3}$ тўғри чизиқ билан кесилган қисмининг узунлигини топинг.

740. $y=\frac{x^2}{2}-1$ параболанинг Ox ўқ билан кесилган ёйининг узунлигини топинг.

741. $y=\ln x$ эгри чизиқнинг $(\sqrt{3};\ \ln\sqrt{3})$ нуқтадан $(\sqrt{8};\ \ln\sqrt{8})$ нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

742. $y=\ln(1-x^2)$ эгри чизиқнинг $x=0$ дан $x=\frac{1}{2}$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

743. $x^2+y^2=r^2$ айлана узунлигини топинг.

744. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ занжир чизиқнинг $x=-a$ дан $x=0$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

745. $y=\ln\cos x$ эгри чизиқнинг $x=0$ дан $x=a\left(a<\frac{\pi}{2}\right)$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

746. $x^2=(y+1)^3$ ва $y=4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг периметрини топинг.

747. $\left.\begin{aligned}x&=r\cos t\\ y&=r\sin t\end{aligned}\right\}$ айлана узунлигини топинг.

748. $\left.\begin{aligned}x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}\right\}$ астроида узунлигини топинг.

749. $\begin{aligned}x&=a\ (2\cos t-\cos 2t)\\ y&=a\ (2\sin t-\sin 2t)\end{aligned}$ кардиоида узунлигини топинг.

750. $\left.\begin{aligned}x&=(t^2-2)\ \sin t+2t\cos t\\ y&=(2-t^2)\ \cos t+2t\sin t\end{aligned}\right\}$ эгри чизиқнинг $t=0$ дан $t=\pi$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

751. $\left.\begin{aligned}x&=f''(t)\cos t+f'(t)\sin t\\ y&=-f''(t)\sin t+f'(t)\cos t\end{aligned}\right\}$ эгри чизиқнинг $t=t_1$ дан $t=t_2$ гача бўлган ёйи узунлиги $(f(t)+f''(t))\Big|_{t_1}^{t_2}$ га тенг эканини исботланг.

752. Юқоридаги 751-масала натижасини қўллаб,

$$\left.\begin{aligned}x&=e^t\ (\cos t+\sin t)\\ y&=e^t\ (\cos t-\sin t)\end{aligned}\right\}$$

эгри чизиқнинг $t=0$ дан t гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

753. $\left.\begin{aligned}x&=t^2\\ y&=\frac{t}{3}\ (t^2-3)\end{aligned}\right\}$ эгри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишган нуқталари орасидаги ёйи узунлигини топинг.

754. $\rho=r$ айлана узунлигини топинг.

755. $\rho=a\varphi$ Архимед спирали бир ўрамининг узунлигини топинг.

756. $\rho=a\ (1+\cos\varphi)\ (a>0)$ кардиоиданинг $\varphi=0$ дан $\varphi=2\pi$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

757. $\rho\varphi = 1$ гиперболик спиралнинг $\varphi = \frac{3}{4}$ дан $\varphi = \frac{4}{3}$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

758. $\varphi = \sqrt{\rho}$ эгри чизиқнинг $\rho = 0$ дан $\rho = 5$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

4-§. ҲАЖМЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

1. Жисм ҳажмини унинг кўндаланг кесимлари бўйича ҳисоблаш

Агар жисмни Ox ўқнинг x нуқтасига ўтказилган перпендикуляр текисликлар билан кесишдан ҳосил бўлган кесим юзи $S(x)$ берилган бўлса, жисм ҳажми

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \tag{1}$$

формула билан ҳисобланади, бунда a ва b лар x нинг ўзгариш чегаралари бўлиб, $S(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз деб қаралади.

2. Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида айланма жисм ҳажми

а) $y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқ ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx = \pi \int_a^b y^2 dx \tag{2}$$

формула билан ҳисобланади:

б) $x = \varphi(y)$ эгри чизиқ, Oy ўқ ва $y = c$, $y = d$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2\,dy = \pi \int_c^d x^2 dy \tag{3}$$

формула билан ҳисобланади.

в) $y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқ ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми

$$V = 2\pi \int_a^b xy\,dx \tag{4}$$

формула билан ҳисобланади.

г) Умумий ҳолда, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x))$ эгри чизиқлар ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Ox ва Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми мос равишда қуйидаги

$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))\,dx, \tag{5}$$

$$V_y = \pi \int_a^b x\,(f_2(x) - f_1(x))\,dx \tag{6}$$

формулалар билан ҳисобланади.

3. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқнинг айланишидан ҳосил бўлган айланма жисм ҳажми

Агар $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ эгри чизиқ параметрик усулда қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

кўринишда берилган бўлса, эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V = \pi \int_\alpha^\beta (y(t))^2\, x'(t)\, dt \tag{7}$$

формула билан ҳисобланади.

4. Қутб координаталари системасида айланма жисм ҳажми

Қутб координаталар системасида берилган $\rho = f(\varphi)$ эгри чизиқ ва $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ радиус векторлар билан чегараланган ясси фигуранинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin^3\varphi\, d\varphi \tag{8}$$

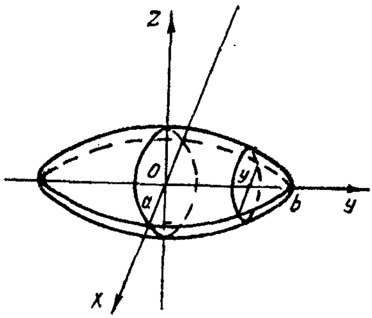
формула билан ҳисобланади. $0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi$ бўлганда

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi\, d\varphi. \tag{9}$$

759. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг ҳажмини ҳисобланг.

△ Эллипсоидни Oxz текисликка параллел бўлиб, ундан y масофа узоқликдан ўтган текислик билан кесганда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$



55- чизма

ёки ярим ўқлари $A=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$, $B=\sqrt{b^2-y^2}$ бўлган

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{c}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)^2}=1$$

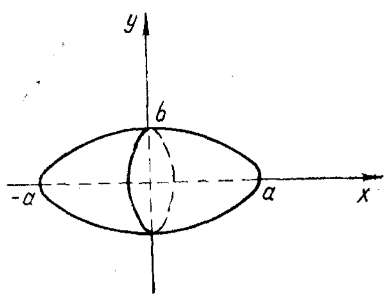
эллипс ҳосил бўлади (55-чизма).

Бизга маълумки, бундай эллипснинг юзи πAB га тенг, демак эллипсоид кўндаланг кесимининг юзи қуйидагига тенг:

$$S(y)=\frac{\pi ac}{b^2}(b^2-y^2).$$

(1) формулага асосан эллипсоиднинг ҳажми қуйидагига тенг:

$$V=\int_{-b}^{b}S(y)\,dy=\frac{2\pi ac}{b^2}\int_0^b(b^2-y^2)\,dy=\frac{2\pi ac}{b^2}\left(b^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^b=\frac{4\pi}{3}abc.$$



56- чизма

Агар $a=b=c$ бўлса, эллипсоид шарга айланади ва шарнинг ҳажми $V=\frac{4}{3}\pi a^3$ га тенг бўлади. ▲

760. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ эллипсни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган айланма эллипсоиднинг ҳажмини ҳисобланг.

△ Эллипс тенгламасидан:

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2},\ y^2=\frac{b^2}{a^2}\ (a^2-x^2).$$

(2) формулага асосан (56- чизма):

$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\ (a^2-x^2)\ dx=\frac{2\pi\ b^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx=$$

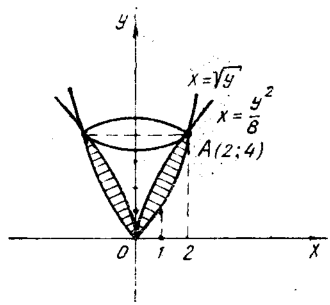
$$=\frac{2\pi\ b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2\pi\ b^2}{a^2}\cdot\frac{2a^3}{3}=\frac{4\pi\ ab^2}{3}.\ ▲$$

761. $y=x^2$ ва $8x=y^2$ параболалар билан чегараланган фигуранинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

△ Параболаларнинг кесишиш нуқталарини топамиз:

$$\left.\begin{matrix}y=x^2\\ y^2=8x\end{matrix}\right\}\Rightarrow 8x=x^4\Rightarrow x\ (x^3-$$
$$-8)=0$$

$$x_1=0,\ x_2=2;$$
$$y_1=0,\ y_2=4.$$



57- чизма

Демак, O (0; 0), A (2; 4) [0; 2] кесмада $x_2\ (y)=\sqrt{y}\geqslant$ $\geqslant x_1\ (y)=\frac{y^2}{8}$ бўлганлиги учун (57- чизма):

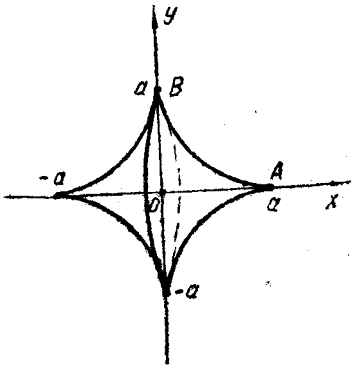
$$V=\pi\int_0^4 (x_2^2\ (y)-x_1^2\ (y))\ dy=\pi\int_0^4\left(y-\frac{y^4}{64}\right)dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{y^5}{320}\right)\Bigg|_0^4=\frac{24\ \pi}{5}.\ ▲$$

762. $\left.\begin{matrix}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{matrix}\right\}$ астроиданинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

△ Изланаётган ҳажм AOB фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмининг иккиланганига тенг. Шунинг учун

$$V=2\pi\int_0^a y^2dx$$



58- чизма

бўлади (58- чизма).

t параметрнинг ўзгариш чегараларини топамиз:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ dx = -3a\cos^2 t \sin t dt \end{array}\right\} \text{дан}$$

$x = 0$ да $t = \frac{\pi}{2}$,

$x = a$ да $t = 0$ бўлади.

У ҳолда (7) формулага асосан:

$$V = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^6 t\,(-3a\cos^2 t \sin t\, dt) =$$

$$= -6a^3\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^6 t \cos^2 t \sin t dt = -6a^3\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t) =$$

$$= 6a^3\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t)\, d\,(\cos t) =$$

$$= 6a^3\pi \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3\cos^5 t}{5} - \frac{3\cos^7 t}{7}\ \frac{\cos^9 t}{9}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{32}{105}\, a^3\pi. \ \blacktriangle$$

763. $y = \frac{x^2}{3} + 1$ парабола, координата ўқлари ва $x = 3$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

764. $y = x^2$ парабола, Oy ўқ ва $y = 0$, $y = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

765. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ эллипсни Oy ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

766. $y = x^2 - 4$ гараболанинг Ox ўқ билан кесишишидан ҳосил бўлган ёйни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

767. $y = \sin x$ синусоиданинг битта ярим тўлқини ва Ox

ўқнинг $0 \leqslant x \leqslant \pi$ кесмаси билан чегараланган фигуранинг
а) Ox ўқ атрофида,
б) Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

768. $y = 2x - x^2$ парабола ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг
а) Ox ўқ атрофида,
б) Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

769. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

770. $y = 4 - x^2$ парабола ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг $x = 3$ тўғри чизиқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

771. $y = \frac{R}{H} x$ тўғри чизиқни $[O; H]$ кесмада Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган конус ҳажмини ҳисобланг.

772. $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ $(b > r)$ доиранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган тор ҳажмини ҳисобланг.

773. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ парабола ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

774. $\left.\begin{array}{l} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{array}\right\}$ циклоида бир аркаси ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг
а) Ox ўқ атрофида,
б) Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

775. $\rho = a\varphi$ $(a > 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ Архимед спиралининг ярим айланасини қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

776. $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$ астроиданинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

777. $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$ кардиоиданинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

778. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола, $2ay - bx = 0$ тўғри чизиқ ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

5- §. АЙЛАНМА ЖИСМ СИРТИНИНГ ЮЗИ

1. $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ силлиқ эгри чизиқ ёйининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзи

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{1}$$

формула билан ҳисобланади.

2. Агар силлиқ эгри чизиқ

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{array}\right\}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

параметрик кўринишда берилган бўлса, сирт юзи

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt \tag{2}$$

формула билан ҳисобланади.

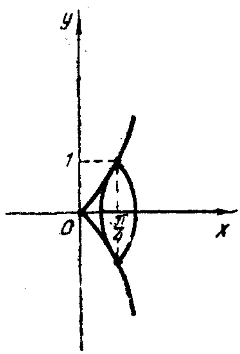
3. Агар силлиқ эгри чизиқ қутб координаталар системасида

$$\rho = f(\varphi), \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$$

кўринишда берилган бўлса, унинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзи

$$S = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi \tag{3}$$

формула билан ҳисобланади.



59- чизма

779. $y=\operatorname{tg}x\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ нинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзини ҳисобланг:

△ Маълумки, $y' = (\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ (59- чизма).

(1) формулага асосан:

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \sqrt{\cos^4 x + 1}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2 + 1}}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} 1+\operatorname{tg}^2 x = t,\ \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = dt; \\ x = 0,\ t = 1; \\ x = \frac{\pi}{4};\ t = 2; \end{array} \right| =$$

$$= \pi \int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\, dt = \pi \int_1^2 \frac{1+t^2}{t\sqrt{1+t^2}}\, dt = \pi \int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} +$$

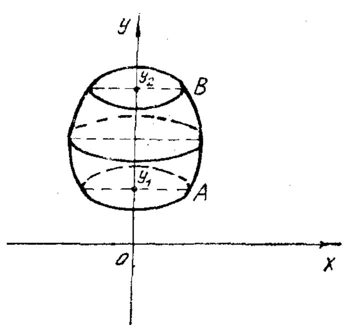
$$+ \pi \int_1^2 \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\pi \int_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \int_1^2 (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1+t^2) = -\pi\left(\ln \frac{1}{t} + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)\Bigg|_1^2 +$$

$$+ \pi\sqrt{1+t^2}\,\Big|_1^2 = \pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2}\right). \ \blacktriangle$$

780. $x^2 + (y - b)^2 = R^2$ $(y_1 \leqslant y \leqslant y_2)$ айлана ёйининг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

$\triangle$ Айлана ёйи Oy ўқни кесмаса, бу ёйнинг Oy ўқ атрофида айланишидан сферик камар ҳосил бўлади (60- чизма).



60- чизма

Сферик камар сиртининг юзини топишда

$$S = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+x'^2}\, dy \quad (4)$$

формуладан фойдаланамиз. Айлана тенгламасини y бўйича дифференциалласак, $2xx' + 2(y - b) = 0$ ёки $xx' = -(y - b)$ ҳосил бўлади.

(4) га асосан:

$$S=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{x^2+(xx')^2}\,dy=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{R^2-(y-b)^2+(y-b)^2}\,dy=$$

$$=2\pi\int_{y_1}^{y_2}R\,dy=2\pi R\,(y_2-y_1);$$

$$S=2\pi R\cdot H,\quad H=y_2-y_1.$$

Агар $H=2R$ бўлса, сфера юзи $S=4\pi R^2$ бўлади. ▲

781. $\left.\begin{array}{l}x=a\,(t-\sin t)\\ y=a\,(1-\cos t)\end{array}\right\}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ циклоида ёйининг абсцисса ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

△ Циклоида тенгламасини t бўйича дифференциаллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x'=a\,(1-\cos t),\quad y'=a\,\sin t;$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2\,(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}=\sqrt{2}\,a\,\sqrt{1-\cos t}=$$

$$=2a\sin\frac{t}{2}.$$

У ҳолда (2) формулага асосан:

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=2\pi\int_0^{2\pi}a\,(1-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{64}{3}\pi a^2.\ ▲$$

782. $y=\frac{x^2}{2}$ параболанинг $y=\frac{3}{2}$ тўғри чизиқ билан кесишган қисмининг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

783. $x=y^2-4$ параболанинг $x=2$ тўғри чизиқ билан кесишган қисмининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

784. $x^2+y^2=4$ $(y>0)$ айлананинг $x=-1$ дан $x=1$ гача ёйини Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт (шар камари) юзини ҳисобланг.

785. $y=\frac{x^3}{3}$ параболанинг $x=-2$ дан $x=2$ гача бўлган ёйини Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

786. $y = \sin x$ синусоиданинг $x = 0$ дан $x = \pi$ гача бўлган ёйини Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

787. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ занжир чизиқнинг $x = 0$ дан $x = a$ гача бўлган ёйининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзи билан айланма жисм ҳажми орасидаги боғланиш $S = \frac{2}{a} V$ кўринишда бўлишини кўрсатинг.

788. $9y^2 = x\ (3 - x)^2$ эгри чизиқ сиртмоғининг (илмоғининг) Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

789. Радиуси R, баландлиги H бўлган конус сиртининг юзини ҳисобланг.

790. $\left.\begin{aligned} x &= e^t \sin t \\ y &= e^t \cos t \end{aligned}\right\}$ эгри чизиқнинг $t = 0$ дан $t = \frac{\pi}{2}$ гача бўлган ёйининг абсцисса ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

791. $\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}$ айланани ўз диаметри атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сферик сирт юзини ҳисобланг.

792. $\left.\begin{aligned} x &= a\ (t - \sin t) \\ y &= a\,(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ циклоида бир аркасининг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

793. $\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}\right\}$ астроиданинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

794. $\rho = 2r\sin\varphi$ айлананинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

795. $\rho = a\ (1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ кардиоиданинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

796. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ Бернулли лемнискатасининг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

6-§. МОМЕНТЛАРНИ ҲИСОБЛАШ. ОҒИРЛИК МАРКАЗИНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ. ГУЛЬДЕН ТЕОРЕМАЛАРИ

Бу параграфда зичликни ўзгармас ва $\mu = 1$ деб ҳисоблаймиз. $y = f\ (x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ силлиқ эгри чизиқ ёйининг Ox, Oy ўқларга нисбатан статик моментлари мос равишда қуйидаги

$$M_x = \int\limits_a^b y dl = \int\limits_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \tag{1}$$

$$M_y = \int\limits_a^b x dl = \int\limits_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{2}$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади, бунда $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$.

Агар эгри чизиқ тенгламаси

$$\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\},\quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

параметрик кўринишда берилган бўлса, эгри чизиқнинг Ox, Oy ўқларга нисбатан статик моментлари мос равишда қуйидаги

$$M_x = \int\limits_\alpha^\beta y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int\limits_\alpha^\beta y(t)\, dl, \tag{3}$$

$$M_y = \int\limits_\alpha^\beta x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int\limits_\alpha^\beta x(t)\, dl \tag{4}$$

формулалар билан ҳисобланади, бунда $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$.
Эгри чизиқ AB ёйи оғирлик марказининг координаталари

$$x_0 = \frac{M_y}{l} = \frac{\int\limits_a^b x \sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx}, \tag{5}$$

$$y_0 = \frac{M_x}{l} = \frac{\int\limits_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx} \tag{6}$$

ёки

$$x_0 = \frac{M_y}{l} = \frac{\int\limits_\alpha^\beta x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}{l}, \tag{7}$$

$$y_0 = \frac{M_x}{l} = \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} y\ (t) \sqrt{(x'\ \ (t))^2 + (y'\ (t))^2}\ dt}{l} \qquad (8)$$

формулалар билан ҳисобланади, бунда l — AB ёй узунлиги. Эгри чизиқ AB ёйининг координата ўқларига нисбатан инерция моменти эса қуйидаги

$$I_x = \int\limits_a^b y^2 \sqrt{1+y'^2}\, dx, \qquad (9)$$

$$I_y = \int\limits_a^b x^2 \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (10)$$

ёки

$$I_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y^2 (t) \sqrt{(x'\ (t))^2 + (y'\ (t))^2}\, dt, \qquad (11)$$

$$I_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2 (t) \sqrt{(x'\ (t))^2 + (y'\ (t))^2}\, dt \qquad (12)$$

формулалар билан ҳисобланади.

(6) дан $y_0 \cdot l = \int\limits_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx$ тенгликни ёзиб, бу тенгликнинг иккала томонини 2π га кўпайтириб, қуйидаги

$$2\pi\, y_0 \cdot l = 2\pi \int\limits_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (13)$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва Гульденнинг 1-теоремасига келамиз.

$y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ силлиқ эгри чизиқ AB ёйининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзи шу ёй узунлиги билан унинг оғирлик маркази чизган айлана узунлигининг кўпайтмасига тенг.

$$y = f_1 (x),\ y = f_2 (x)\ (a \leqslant x \leqslant b,\ f_1 (x) \leqslant f_2 (x))$$

узлуксиз эгри чизиқлар ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган G фигуранинг Ox, Oy координата ўқларига нисбатан статик моментлари мос равишда қуйидаги

$$M_x = \frac{1}{2} \int^{b} (f_2^2 (x) - f_1^2 (x))\, dx, \qquad (14)$$

$$M_y = \int_a^b x\,(f_2(x) - f_1(x))\,dx \qquad (15)$$

формулалар билан ҳисобланади.

Хусусий ҳолда $f_1(x) = 0$ бўлса, эгри чизиқли трапециянинг координата ўқларига нисбатан статик моментлари қуйидаги

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \qquad (16)$$

$$M_y = \int_a^b xy\,dx \qquad (17)$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

G фигура оғирлик марказининг координаталари

$$x_0 = \frac{M_y}{S}, \qquad (18)$$

$$y_0 = \frac{M_x}{S} \qquad (19)$$

формулалар ёрдамида топилади, бунда S — G фигуранинг юзи.

G фигуранинг координата ўқларига нисбатан инерция моментлари қуйидаги

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b (f_2^3(x) - f_1^3(x))\,dx, \qquad (20)$$

$$I_y = \int_a^b x^2\,(f_2(x) - f_1(x))\,dx \qquad (21)$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

(19) дан $y_0 \cdot S = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг иккала томонини 2π га кўпайтириб, Гульденнинг 2-теоремасига келамиз, яъни

$$2\pi y_0 \cdot S = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

$y=f(x)$ эгри чизиқ, $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқ билан чегараланган текис фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган фигуранинг ҳажми берилган фигура юзи билан унинг оғирлик маркази чизган айлана узунлигининг кўпайтмасига тенг.

Эслатма. Агар G фигура бирор ўққа нисбатан симметрик бўлса, фигура оғирлик марказининг координаталари шу ўқда ётади. Бу эслатма эгри чизиқ учун ҳам ўринли.

797. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг Ox ўқ юқорисидаги ёйининг Ox ўққа нисбатан статик моментини топинг.

$$\triangle\ M_x=\int_a^b y\,dl=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

формуладан фойдаланамиз ва

$$y\,dl=y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx$$

Эллипс тенгламасидан қуйидагиларни топамиз:

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\quad yy'=-\frac{b^2}{a^2}x.$$

У ҳолда

$$y\,dl=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)+\frac{b^4}{a^4}x^2}\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2+\frac{b^2}{a^2}x^2\right)}\,dx=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\,dx=$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx.$$

Бунда ε — эллипс эксцентриситети, $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a}$.

Юқоридаги формулага асосан:

$$M_x=\int_{-a}^{a} y\,dl=\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=$$

$$=\frac{2b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\varepsilon x=a\sin t,\ \varepsilon\,dx=a\cos t\,dt,\\ x=0\ \text{да}\ t=0;\\ x=a\ \text{да}\ t=\arcsin\varepsilon\end{array}\right|=$$

$$= \frac{2b}{a}\int\limits_0^{\arcsin\varepsilon} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot\frac{a}{\varepsilon}\cos t dt =$$

$$= \frac{2ab}{\varepsilon}\int\limits_0^{\arcsin\varepsilon} \cos^2 t dt = \frac{2ab}{\varepsilon}\int\limits_0^{\arcsin\varepsilon} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{ab}{\varepsilon}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\arcsin\varepsilon} = \frac{ab}{\varepsilon}\left(\arcsin\varepsilon + \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\right) =$$

$$= \frac{ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon + b^2 = b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right), \quad \left(\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{b}{a}\right). \blacktriangle$$

798. I квадрантда ётувчи

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

астроида ёйининг оғирлик маркази координаталарини топинг.

$\triangle$ Ёй оғирлик марказининг координаталари (5), (6) формулалар бўйича ҳисобланади. Астроида ёйи симметрия ўқига ($y = x$) эга бўлгани учун M_x, M_y статик моментлар тенг бўлади, яъни $M_x = M_y$. Бу ҳолда оғирлик марказининг координаталари ҳам бир-бирига тенг, яъни $x_0 = y_0$. Демак,

$$x_0 = y_0 = \frac{\int\limits_0^a x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int\limits_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

Астроида тенгламасини y га нисбатан ечиб, y' ни топамиз:

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},\quad y' = \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= -\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)x^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Бу ҳолда

$$\int_0^a x\sqrt{1+y'^2}\,dx = a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x\cdot x^{-\frac{1}{3}}\,dx = a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3}{5}\,a^2,$$

$$\int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx = a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}\,dx = a^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a = \frac{3}{2}\,a.$$

Юқоридаги формулага асосан ёй оғирлик марказининг координаталари қуйидагига тенг:

$$x_0 = y_0 = \frac{\frac{3}{5}\,a^2}{\frac{3}{2}\,a} = \frac{2}{5}\,a.$$

Демак, $C\left(\frac{2}{5}\,a;\ \frac{2}{5}\,a\right)$. ▲

799. Агар айлананинг ҳар бир нуқтасидаги чизиқли зичлик шу нуқта координаталарининг кўпайтмасига пропорционал бўлса, I квадрантда ётувчи $x^2+y^2=a^2$ айлана чораги ёйининг оғирлик маркази координаталарини топинг.

△ Масаланинг шартига асосан, зичлик қуйидагига тенг:

$$\mu\,(x;\ y) = kxy.$$

Зичлик ўзгарувчи бўлган ҳолда $y=f\,(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ эгри чизиқ ёйи оғирлик марказининг координаталари қуйидаги

$$x_0 = \frac{\int_a^b \mu\,x\,dl}{\int_a^b \mu\,dl} = \frac{\int_b^a \mu\,(x;\ y)\,x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \mu\,(x;\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx},$$

$$y_0 = \frac{\int_a^b \mu\,y\,dl}{\int_a^b \mu\,dl} = \frac{\int_a^b \mu\,(x;\ y)\,y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \mu\,(x;\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

формулалар орқали топилади. Айлана тенгламасидан y', dl ларни топамиз:

$$2x+2yy'=0,\ \ y'=-\frac{x}{y},$$

$$dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx = $$
$$= \frac{a}{y}\,dx.$$

У ҳолда

$$\int_a^b \mu\, x dl = \int_0^a kxyx\frac{a}{y}\,dx = ak\int_0^a x^2 dx =$$

$$= ak\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{ka^4}{3},\quad \int_a^b \mu\, y dl = \int_0^a kxy^2\,\frac{a}{y}\,dx =$$

$$= ak\int_0^a xydx = ak\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{ak}{2}\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(a^2-x^2) =$$

$$= -\frac{ak}{3}\,(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{ka^4}{3},$$

$$\int_a^b \mu\, dl = ak\int_0^a xy\,\frac{dx}{y} = ak\int_0^a xdx = \frac{ka^3}{2}.$$

Топилганларни юқоридаги формулага қўйсак,

$$x_0 = y_0 = \frac{\frac{ka^4}{3}}{\frac{ka^3}{2}} = \frac{2}{3}\,a.$$

Демак, $C\left(\frac{2}{3}\,a;\ \frac{2}{3}\,a\right)$. ▲

800. I квадрантда ётувчи $x^2+y^2=R^2$ айлана ёйининг Oy ўққа нисбатан инерция моментини ҳисобланг.

△ Айлана тенгламасидан

$$y = \sqrt{R^2-x^2},\quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

ларни топамиз ва топилганларни (10) формулага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I_y=\int_a^b x^2\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^R x^2\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\int_0^R x\frac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x,\ du=dx\\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}\\ V=-\sqrt{R^2-x^2}\end{matrix}\right|=R\left(-x\sqrt{R^2-x^2}\right)\Big|_0^R+$$

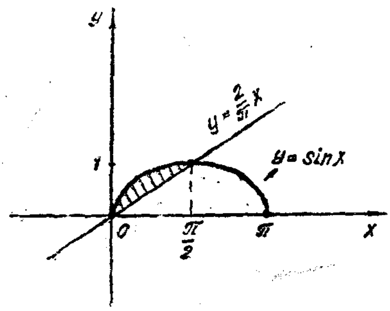
$$+R\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=R\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} x=R\sin t,\ dx=R\cos t dt,\\ x=0 \text{ да } t=0\\ x=R \text{ да } t=\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=R\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{R^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{R^3}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi R^3}{4}.\ \blacktriangle$$

801. $y=\dfrac{2}{\pi}x$ тўғри чизиқ ва $y=\sin x$ $(x\geqslant 0)$ синусоида билан чегараланган фигура оғирлик марказининг координаталарини топинг.

Δ $y=\dfrac{2}{\pi}x$ тўғри чизиқ билан $y=\sin x$ синусоиданинг кесишган нуқталари $O(0;0)$, $B\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$ бўлади (61- чизма).



61- чизма

Фигура оғирлик марказининг координаталарини (18), (19) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f_2(x)-f_1(x))\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=$$

$$= \left(-\cos x - \frac{x^2}{\pi}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}.$$

$$M_y = \int_a^b x\,(f_2(x) - f_1(x))\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left|\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{matrix}\right| =$$

$$= -x\cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{24} =$$

$$= \frac{12-\pi^2}{12};$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi}x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\,dx - \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi^2}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^3}{24} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}.$$

Топилганларни (18), (19) формулаларга қўйсак,

$$x_0 = \frac{M_y}{S} = \frac{\frac{12-\pi^2}{12}}{\frac{4-\pi}{4}} = \frac{12-\pi^2}{3\,(4-\pi)},$$

$$y_0 = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{\pi}{24}}{\frac{4-\pi}{4}} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}.$$

Демак, $C\left(\frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)};\ \frac{\pi}{6(4-\pi)}\right)$. ▲

802. Ярим ўқлари a ва b бўлган эллиптик пластинканинг координата ўқларига нисбатан инерция моментини топинг.

△ Маълумки, эллипснинг параметрик тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin t \\ y &= b\cos t \end{aligned}\right\},\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Эллиптик пластинка координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани учун фигура чорагининг инерция моментини топиб, натижани 4 га кўпайтириш кифоя.

Фигура инерция моментларини (20), (21) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{I_x}{4} = \frac{1}{3}\int_a^b (f_2^3(x) - f_1^3(x))\,dx = \frac{1}{3}\int_0^a f_2^3(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} b^3\cos^3 t a\cos t dt = \frac{ab^3}{3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt =$$

$$= \frac{ab^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{ab^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t)\,dt =$$

$$= \frac{ab^3}{12}(t + \sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{ab^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{ab^3\pi}{24} + \frac{ab^3}{24}\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{ab^3}{96}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab^3\pi}{16},\ I_x = \frac{\pi ab^3}{4};$$

$$\frac{I_y}{4} = \int_a^b x^2(f_2(x) - f_1(x))\,dx = \int_a^b x^2 f_2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 tb\cos ta\cos tdt = a^3b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 tdt =$$

$$= \frac{a^3b}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt = \frac{a^3b}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^3b}{4}\left(\frac{1}{2}t - \frac{\sin 4t}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3b}{16},\quad I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}. \ \blacktriangle$$

803. Гульденнинг 2-теоремасидан фойдаланиб,

$$\left.\begin{array}{l} x = a\ (t - \sin t), \\ y = a\ (1 - \cos t) \end{array}\right\},\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

циклоида бир аркаси ва Ox ўқ билан чегараланган G фигуранинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

$\triangle$ G фигура $x = \pi a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлгани учун юқоридаги эслатмага асосан оғирлик марказининг абсциссаси $x_0 = \pi a$ га тенг бўлади.

Гульденнинг 2-теоремасига асосан:

$$2\pi y_0 \cdot S = \pi\int_a^b y^2dx = V,$$

бунда V — G фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми, S G фигуранинг юзи. S, V ларни топамиз:

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2dx = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\ a\ (1-\cos t)\ dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\ dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t -$$

$$- \cos^3 t)\ dt = \pi a^3\ (t - 3\sin t)\Big|_0^{2\pi} + 3\pi a^3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt -$$

$$- \pi a^3\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cdot\cos tdt = 2\pi^2a^3 + 3\pi a^3\left(\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} -$$

$$-\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t = 2\pi^2a^3+3\pi^2a^3-\pi a^3\left(\sin t-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2a^3;\quad V=5\pi^2a^3.$$

$$S=\int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a\,(1-\cos t)\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt = a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2\pi a^2+a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2;\ S=3\pi a^2.$$

Гульденнинг 2-теоремасига асосан:

$$V=2\pi y_0\cdot S,\ y_0=\frac{V}{2\pi S}=\frac{5\pi^2a^3}{2\pi\cdot 3\pi a^2}=\frac{5a}{6};\ y_0=\frac{5a}{6}.$$

Демак, $C\left(\pi a;\ \frac{5a}{6}\right)$. ▲

804. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ тўғри чизиқ координата ўқлари орасидаги кесмасининг координата ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

805. $y^2=2x$ парабола ёйининг $(0\leqslant x\leqslant 2)$ координата ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

806. $y=\cos x$ эгри чизиқ ёйининг $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ Ox ўққа нисбатан статик моментини топинг.

807. $y=a-x$ тўғри чизиқ ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчак оғирлик марказининг координаталарини топинг.

808. $x^2+y^2=R^2\,(y\geqslant 0)$ айлана ёйининг оғирлик маркази координаталарини топинг.

809. $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ синусоида ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг координата ўқларига нисбатан статик моментларини ва оғирлик маркази координаталарини топинг.

810. $y=x^2,\ x=y^2$ параболалар билан чегараланган фигуранинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

811. $y^2 = 2px$ парабола ва $y = 0$, $x = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг статик моментларини ва оғирлик маркази координаталарини топинг.

812. $x^2 + y^2 = R^2$ айлананинг Ox ўқ билан кесишишдан ҳосил бўлган ярим доира оғирлик марказининг кооринаталарини топинг.

813. Биринчи квадрантда жойлашган

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right\}$$

эллипс ёйи ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

814. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ парабола ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

815. Биринчи квадрантда ётувчи

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

эллипс ва $x^2 + y^2 = 9$ айлана билан чегараланган фигура оғирлик марказининг координаталарини топинг.

816. Агар ҳар бир нуқтадаги чизиқли зичлик шу нуқтанинг абсциссасига пропорционал бўлса, биринчи квадрантда жойлашган

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\}$$

астроида оғирлик марказининг координаталарини топинг.

817. $y = e^x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ эгри чизиқ ёйининг Ox ўққа нисбатан инерция моментини топинг.

818. $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ циклоида бир аркасининг координата ўқларига нисбатан инерция моментларини топинг.

819. $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакнинг координата ўқларига нисбатан инерция моментларини топинг.

820. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ тўғри чизиқ ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчакнинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан инерция моментларини топинг.

821. $y^2 = 4ax$ парабола ва $x = a$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг Oy ўққа нисбатан инерция моментини топинг.

822. R радиусли ярим доиранинг ($y \geqslant 0$) диаметрга нисбатан инерция мементини топинг.

823. Гульден теоремасидан фойдаланиб, R радиусли ярим айлана оғирлик марказининг координаталарини топинг.

824. Гульден теоремасидан фойдаланиб, шар сиртининг юзини ҳисобланг.

7-§. ФИЗИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШДА АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИҚИ

1. Эгри чизиқ массасини ҳисоблаш

Декарт координаталар системасида L ясси эгри чизиқ $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ тенглама билан берилган бўлиб, $(x; y) \in L$ нуқтадаги чизиқли зичлик $\mu(x; y)$ бўлсин. Бу ҳолда эгри чизиқ массаси қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$m = \int_a^b \mu(x; y)\, dl = \int_a^b \mu(x; f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \quad (1)$$

Агар эгри чизиқ $\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}, (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$

параметрик кўринишда берилган бўлса, эгри чизиқ массаси қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$m = \int_\alpha^\beta \mu(\varphi(t);\ \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt. \quad (2)$$

Хусусий ҳолда зичлик $\mu(x; y) = 1$ бўлса, эгри чизиқ массаси эгри чизиқ узунлигига тенг бўлади.

2. Тезлик бўйича босиб ўтилган йўлни ҳисоблаш

Агар моддий нуқта бирор эгри чизиқ бўйича ҳаракатланаётган бўлса ва унинг t моментдаги тезлиги $v = f(t)$ маълум бўлса, у ҳолда бу моддий нуқтанинг $[t_1; t_2]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўли қуйидаги формула ёрдамида топилади.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt \quad (3)$$

3. Ўзгарувчи кучнинг бажарган ишини ҳисоблаш

M моддий нуқтага нуқтанинг ҳолатига қараб Ox ўқ йўналишидаги ўзгарувчан $F=f(x)$ куч таъсир қилсин. Узлуксиз ўзгарувчи $F=f(x)$ кучнинг M нуқтани $x=a$ вазиятдан $x=b$ вазиятга кўчиришда бажарган иши қуйидаги

$$A=\int_a^b f(x)\,dx \tag{4}$$

формула орқали топилади.

4. Суюқликнинг босим кучини аниқлаш

Суюқликнинг пластинкага бўлган босим кучи, Паскаль қонунига асосан, қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$p=\gamma\int_a^b xy\,dx, \tag{5}$$

бунда a — пластинканинг энг юқори нуқтаси турган чуқурлик:
b — унинг энг пастки нуқтаси турган чуқурлик;
γ — суюқликнинг солиштирма оғирлиги;
x — пластинка нуқталаридан суюқлик сатҳигача бўлган масофа:
y — пластинка горизонтал кесимининг узунлиги;
$y=f(x)$ — пластинканинг шаклига боғлиқ бўлган маълум функция.

825. $y=\ln x$ эгри чизиқ AB ($x_A=1$, $x_B=3$) ёйининг массасини топинг, бунда эгри чизиқ ҳар бир нуқтасидаги зичлик нуқта абсциссасининг квадратига пропорционал.

Δ Масаланинг шартига кўра, зичлик $\mu=kx^2$ га тенг бўлади, бунда k — пропорционаллик коэффициенти.

(1) формулага асосан:

$$m=\int_a^b \mu(x;y)\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_1^3 kx^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=$$

$$=k\int_1^3 x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx=\frac{k}{2}\int_1^3 (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+x^2)=$$

$$= \frac{k}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^3 = \frac{k}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} \Bigg|_1^3 = \frac{k}{3} (10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}). \ \blacktriangle$$

826. Нуқтанинг ҳаракат тезлиги $V = \sqrt{1+t}$ м/с формула билан берилган. Нуқтанинг бошланғич $t = 10$ с вақт мобайнида босиб ўтган йўлини топинг. Бу вақт оралиғидаги ўртача тезликни топинг.

Δ (2) формулага асосан:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt = \int_0^{10} \sqrt{1+t}\,dt = \frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{10} =$$

$$= \frac{2}{3} (11\sqrt{11} - 1) \approx 23{,}7 \text{ м}.$$

$$V_{\text{ўр}} = \frac{S}{10} = \frac{11\sqrt{11}-1}{15} \approx 2{,}4 \text{ м/с}. \ \blacktriangle$$

827. 6 кг куч пружинани 8 см га чўзади. Шу куч қандай иш бажаради?

Δ Гук қонунига кўра куч чўзилишга ва қисилишга пропорционалдир, яъни $F = kx$, бунда k — пропорционаллик коэффициенти, x — чўзилиш ёки қисилиш катталиги. Масаланинг шартига кўра,

$$F = 6 \text{ кг}, \ x = 8 \text{ см} = 0{,}08 \text{ м}, \ a = 0, \ b = 0{,}08 \text{ м}.$$

Берилганларни куч тенгламасига қўйсак,

$$6 = k \cdot 0{,}08, \ k = \frac{6}{0{,}08}.$$

Демак, $F = f(x) = \frac{6}{0{,}08} x$. (4) формулага асосан бажарилган иш қуйидагига тенг:

$$A = \int_0^{0{,}08} \frac{6}{0{,}08} x dx = \frac{6}{0{,}08} \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^{0{,}08} = \frac{6}{0{,}08} \cdot \frac{(0{,}08)^2}{2} =$$

$$= 3 \cdot 0{,}08 = 0{,}24 \text{ кГм}. \ \blacktriangle$$

828. Пружинани 5 см га чўзишда 3 кгм иш бажарилган. Агар 1 кгм иш бажарилса, пружина қанча чўзилади?

Δ $A = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b kx dx$ формуладан фойдаланамиз. Масала шартида берилган барча катталикларни СИ бирликларида ифодалаймиз:

$$x_0 = a = 0, \ x_1 = b = 5 \text{ см} = 0{,}05 \text{ м}, \ x_2 = ?$$

$$A_1 = 3 \text{ кГм} = 3 \cdot 9{,}81 = 29{,}43 \text{ (ж)}, \ A_2 = 1 \text{ кГм} = 9{,}81 \text{ (ж)}.$$

Берилганларни формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$29{,}43 = k \int\limits_0^{0{,}05} x dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0{,}05} = \frac{k \cdot 0{,}0025}{2},$$

бундан

$$k = \frac{29{,}43 \cdot 2}{0{,}0025} = 23544. \ A_2 = k \int\limits_{x_0}^{x_2} x dx,$$

$$9{,}81 = 23544 \int\limits_0^{x_2} x dx = 23544 \frac{x_2^2}{2}, \quad x_2^2 = \frac{2 \cdot 9{,}81}{23544} = 0{,}00083,$$

$$x_2 = \sqrt{0{,}00083} \approx 0{,}029 \text{ м}. \ \blacktriangle$$

829. Оғирлиги $P = 1{,}5$ т бўлган ракетани ердан $H = 2000$ км баландликка кўтариш учун сарф этиш керак бўлган ишни аниқланг.

Δ Қуйидаги белгилашларни киритайлик: m—ракета массаси, M — ер массаси, ернинг ракетани тортиш кучи бўлсин. У ҳолда Ньютон қонунига кўра

$$F = k \ \frac{m \cdot M}{x^2}$$

бўлади, бунда x — ракетадан ернинг марказигача бўлган масофа, k — пропорционаллик коэффициенти. $kmM = \lambda$ деб белгилаш киритсак, $F = \frac{\lambda}{x^2}$ ҳосил бўлади, бунда $R \leqslant x \leqslant R + H$, R — ер радиуси, $x = R$ бўлганда $F(R)$ куч ракета оғирлигига тенг бўлади, яъни $F(R) = P = \frac{\lambda}{R^2}$, бундан $\lambda = PR^2$ ва тортиш кучи қуйидагига тенг:

$$F(x) = \frac{PR^2}{x^2}.$$

Ракетани H баландликка кўтариш учун бажарилиши керак бўлган иш (4) формулага асосан топилади:

$$A = \int\limits_{R}^{R+H} \frac{PR^2}{x^2}\,dx = pR^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{R}^{R+H} = \frac{PRH}{R+H},\ A = \frac{PRH}{R+H}.$$

Масала шартида берилган қийматларни қўйсак, яъни

$p = 1{,}5$ т, $H = 2000$ км, $R = 6400$ км деб олсак,

$A \approx 2285714000$ кГм ≈ 22422854340 (Ж). ▲

830. Сув тўлдирилаётган идишнинг бир томони узунлиги 60 см, баландлиги 20 см. Сувнинг шу деворга берган босим кучини топинг.

Δ Суюқликнинг босим кучини

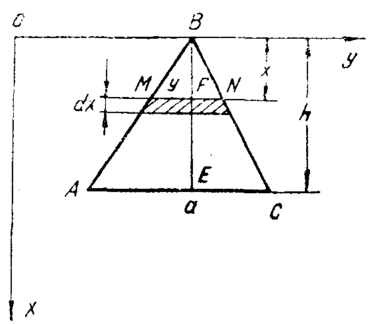
$$p = \gamma \int\limits_{a}^{b} xy\,dx$$

формуладан фойдаланиб топамиз. Масаланинг шартига кўра $a = 0$, идиш сув билан тўлдирилганлиги учун $b = 20$ см, $y = 60$ см, сувнинг солиштирма оғирлиги $\gamma = 1$ г/см³. Бу ҳолда

$$p = \int\limits_{0}^{20} 60x\,dx = 60\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{20} = 12000 \text{ г} = 12 \text{ кг},\ p = 12 \text{ кг}. \ ▲$$

831. Асоси a, баландлиги h бўлган учбурчак шаклидаги пластинка тик ҳолатда сувга ботирилган. Агар пластинканинг учи сув сатҳида ётган бўлса, сувнинг шу пластинкага берган босимини топинг.

Δ Координата системасини чизмада кўрсатилгандай қилиб жойлаштирамиз ва (5) формуладаги $y = f(x)$ нинг қийматини топамиз (62-чизма).



62-чизма

ABC ва MBN учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BF}{BE},\ \frac{MN}{a} = \frac{x}{h},\ MN = \frac{ax}{h},\ y = \frac{ax}{h}.$$

Сувнинг солиштирма оғирлиги $\lambda = 1$ деб оламиз.

(5) формулага асосан:

$$p=\int_0^h xy\,dx=\frac{a}{h}\int_0^h x^2dx=\frac{ax^3}{3h}\Big|_0^h=\frac{ah^2}{3}. \ \blacktriangle$$

832. Агар стерженнинг чизиқли зичлиги $\mu=6+0{,}3x$ қонуният билан ўзгарса, узунлиги $l=10$ см бўлган стержень массасини топинг.

833. Агар r радиусли шарнинг ҳар бир нуқтасидаги зичлик шар марказидан шу нуқтагача бўлган масофага пропорционал бўлса, шар массасини топинг.

834. Абсцисса ўқи бўйича координата боши атрофида гармоник тебранма ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг ҳаракат тезлиги

$$V=\frac{a\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$$

формула билан берилган (t — вақт, T — тебраниш даври, φ_0 — бошланғич фаза). Агар $t=t_1$ вақтда моддий нуқта $x=x_1$ нуқтада бўлса, $t=t_2$ вақтда нуқтанинг ҳолатини аниқланг.

835. Бошланғич тезлиги v_0 бўлган, юқорига тик отилган жисм тезлиги (ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмайди) $v=v_0-gt$ формула билан берилган. Юқорига отилган вақтдан бошлаб t_c вақт мобайнида моддий нуқта бошланғич ҳолатдан қандай масофада бўлади.

836. Нуқтанинг ҳаракат тезлиги

$$v=te^{-0{,}01t}\ \text{м/с}$$

формула билан берилган. Нуқтанинг ҳаракат бошлагандан тўхтагунга қадар босиб ўтган йўлини топинг.

837. Ракетали снаряд тик юқорига кўтарилмоқда. Ракета тезланиши, тортиш кучи доимий бўлганда, ракета вазнининг камайиши ҳисобига

$$W=\frac{A}{a-bt}\quad(a-bt>0)$$

қонуният бўйича ортиб боради. Агар ракетанинг бошланғич тезлиги нолга тенг бўлса, унинг ҳар бир t вақтдаги тезлигини топинг. $t=t_1$ вақтда ракета эришган баландликни ҳисобланг.

838. Агар 1 Н куч пружинани 1 см га чўзса, пружинани 6 см га чўзиш учун сарф этиш керак бўлган ишни аниқланг.

839. Узунлиги 1 м, кўндаланг кесими радиуси 2 мм бўл-

ган мис симни 0,001 м чўзиш учун сарф этилган ишни ҳисобланг.

840. Асосининг радиуси R, баландлиги H бўлган цилиндрик идишдаги сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган ишни ҳисобланг,

841. Координата бошида жойлашган E электр заряди $(a; 0)$ нуқтадаги e зарядни $(b; 0)$ нуқтага кўчиради. Кўчириш кучи F нинг бажарган иши A ни аниқланг.

842. Асосининг радиуси R, баландлиги H бўлган айланма параболоид шаклидаги қозон суюқлик билан тўлдирилган бўлса, қозондаги сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган ишни ҳисобланг.

843. Қаршилиги R бўлган ўтказгичдан ўтаётган

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}\, t - \varphi_0\right)$$

синусоидал ўзгарувчи токнинг T давр оралиғида ажратиб чиқарадиган иссиқлик миқдорини топинг.

844. Радиуси R га тенг бўлган ярим доира тик ҳолатда сувга ботирилган. Агар ярим доира диаметри сув сатҳида ётган бўлса, шу юзга бўлган сув босимини аниқланг.

845. Асоси a, баландлиги h бўлган тўғри тўртбурчакли тик шлюзга бўлган сув босимини аниқланг.

846. Асослари a ва b, баландлиги h бўлган трапеция шаклидаги тик дамбага бўлган сув босимини аниқланг.

8-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Берилган $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган $f(x)$ функция учун $F(x)$ бошланғич функцияни топиш мумкин бўлса, Ньютон — Лейбниц формуласи бўйича $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ аниқ интегрални ҳисоблаймиз. Лекин ҳар қандай узлуксиз функция учун унинг бошланғич функциясини ҳамма вақт топиш қийин, баъзи ҳолларда эса бошланғич функцияни элементар функциялар орқали ифодалаб бўлмайди. Бундай ҳолларда Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдалана олмаймиз. Шунинг учун аниқ интегралларни ҳисоблашда турли тақрибий усуллардан фойдаланамиз. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада аналитик ёки жадвал усулда берилган бўлса, $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ аниқ интегралнинг тақрибий қийматини қуйидагича аниқлаймиз:

1) $[a;\ b]$ кесмани $x_k = a + kh$ нуқталар орқали $h = \frac{b-a}{n}$ узунликдаги тенг n та бўлакка бўламиз ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

2) Интеграл остидаги $y = f(x)$ функциянинг

$$y_0 = f(a = x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

қийматларини ҳисоблаймиз.

3) Тақрибий формулаларнинг бирортасидан фойдаланамиз:

1. Тўғри тўртбурчаклар формуласи:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\,(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (1)$$

ёки

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = h\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad (2)$$

бунда $f(x)$ ҳосиласи узлуксиз бўлган функция. (1) ёки (2) формуланинг хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$\delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^2 \cdot M_1}{2n}, \qquad (A)$$

бунда M_1 — $|y'|$ нинг $[a;\ b]$ кесмадаги энг катта қиймати.

II. Трапециялар формуласи:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right), \qquad (3)$$

бунда $f(x)$ иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлган функция. (3) формуланинг хатоси қуйидагича баҳоланади,

$$\delta(n) \leqslant \frac{M_2\,(b-a)^3}{12\,n^2}, \qquad (B)$$

бунда M_2 — $|y''|$ нинг $[a;\ b]$ кесмадаги энг катта қиймати.

III. Параболалар (Симпсон) формуласи:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(y_0 + y_n + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) +$$

$$+ 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})), \qquad (4)$$

бунда $f(x)$ тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлган функция, n — жуфт сон.

(4) формуланинг хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$\delta(n) \leqslant \frac{M_3 (b-a)^5}{180 n^4}, \qquad (C)$$

бунда M_3 — $|y^{IV}|$ нинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта қиймати.

847. Қуйидаги $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $\left(\frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ \ldots\right)$ интегрални тақрибан ҳисобланг.

Δ $[0;\ 1]$ кесмани тенг 10 та бўлакка бўламиз. У ҳолда $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ бўлади. Интеграл остидаги функция қийматлари жадвалини тузамиз:

x	$y = \frac{1}{1+x^2}$	x	$y = \frac{1}{1+x^2}$	
$x_0 = 0$ $x_1 = 0{,}1$ $x_2 = 0{,}2$ $x_3 = 0{,}3$ $x_4 = 0{,}4$	$y_0 = 1{,}0000$ $y_1 = 0{,}9901$ $y_2 = 0{,}9615$ $y_3 = 0{,}9174$ $y_4 = 0{,}8621$	$x_5 = 0{,}5$ $x_6 = 0{,}6$ $x_7 = 0{,}7$ $x_8 = 0{,}8$ $x_9 = 0{,}9$ $x_{10} = 1$	$y_5 = 0{,}8000$ $y_6 = 0{,}7353$ $y_7 = 0{,}6711$ $y_8 = 0{,}6098$ $y_9 = 0{,}5525$ $y_{10} = 0{,}5000$	$y_1 + y_2 + \ldots +$ $+ y_9 = 7{,}0998$

I. Тўғри тўртбурчакларнинг (1) формуласига асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}1\ (y_0 + y_1 + \ldots + y_9) = 0{,}1 \cdot 8{,}0998 =$$

$$= 0{,}8099 \approx 0{,}81.$$

(2) формулага асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}1\ (y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}) = 0{,}1 \cdot 7{,}5998 =$$

$$= 0{,}7599 = 0{,}76.$$

Қилинган хатоликни (А) формулага асосан баҳолаймиз. Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ функция ҳосиласини топамиз:

$$y' = f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

бундан

$$|y'| = |f'(x)| = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad M_1 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |y'| = 1.$$

Бу ҳолда хатолик қуйидагича баҳоланади:

$$\delta(n) \leqslant \frac{M_1 (b-a)^2}{2n} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Ҳақиқий хато ҳақиқатан ҳам бу чегарадан кичик.

II. (3) трапециялар формуласига асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx h\left(\frac{y_0+y_{10}}{2} + y_1 + \ldots + y_9\right) = 0{,}1 \cdot 7{,}8498 =$$

$$= 0{,}78498 \approx 0{,}785.$$

Тақрибий ҳисоблашда қилинган хатони баҳолаймиз. Интеграл остидаги $y = \frac{1}{1+x^2}$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $y'' = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$, бунда $M_2 = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |y''| = 2$. $\left(y = \frac{1}{1+x^2}\right.$ нинг ўзи $\operatorname{arctg} x$ нинг ҳосиласи эканлигини ҳисобга олганда

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (*)$$

формула ўринли.)

(В) га асосан:

$$\delta(n) \leqslant \frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{1200} < 0{,}0017.$$

III. (4) Симпсон формуласига асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + \right.$$

$$\left. + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right).$$

Ҳисоблашлар осон бўлиши учун $[0;\ 1]$ кесмани $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$ нуқталар орқали тенг тўртта бўлакка бўламиз ($2n = 4$). Бу ҳолда интеграл остидаги функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$y_0 = 1;\ 4y_1 = 3{,}76471;\ 2y_2 = 1{,}6;\ 4y_3 = 2{,}56;\ y_4 = 0{,}5.$$

Юқоридаги формулага асосан:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{h}{3}\ (y_0 + y_4 + 4\ (y_1 + y_3) + 2y_2) =$$

$$= \frac{1}{12}\ (1 + 0{,}5 + 3{,}76471\ + 2{,}56 + 1{,}6) = 0{,}78539\ \ldots .$$

Симпсон формуласини қўллашда қилинган хатони (В) формулага асосан баҳолаймиз. Осон бўлиши учун $f^{(4)}(x)$ ҳосилани баҳолашда (*) формуладан фойдаланамиз. У ҳолда $y^{(5)} = f^{(4)}(x) = 24\cos^5 y \sin 5\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$, бундан

$$\max |y^{(4)}| = 24,\ M_3 = 24.$$

(В) га асосан:

$$\delta\ (n) \leqslant \frac{M_3\ (b-a)^5}{180 \cdot n^4} = \frac{24}{180 \cdot 256} = \frac{1}{1920} < 0{,}0006.$$

Бу ҳолда ҳам ҳақиқий хатолик бу чегарадан анча кичиклигини кўриш мумкин. Ҳақиқатдан

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ \ldots .$$

Шундай қилиб, [0; 1] кесмани тўртта бўлакка бўлганда Симпсон формуласи бўйича вергулдан кейин бешта ишончли рақам ҳосил қиламиз. [0; 1] кесмани 10 та бўлакка бўлганда трапециялар формуласи бўйича вергулдан кейин 3 та ишончли рақам, тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича эса вергулдан кейин битта ишончли рақам ҳосил қиламиз. ▲

848. Симпсон формуласи бўйича

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

интегралнинг тақрибий қийматини 0,00001 аниқликда ҳисобланг.

△ Масалани ечишдан олдин, берилган интегрални кўрсатилган аниқликда ҳисоблаш учун интеграллаш оралиғи $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ ни неча бўлакка бўлиш кераклигини аниқлаймиз. Юқоридаги (С) формулага асосан

$$\frac{(b-a)^5 M_3}{180 n^4} < 10^{-5},$$

бунда $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $M_3 = 1$ $(|y^{(4)}| = |\cos x| \leqslant 1)$. У ҳолда

$$\frac{\pi^5}{2^5 \cdot 180 n^4} < 10^{-5}, \quad n > 5\pi \sqrt[4]{\frac{\pi}{36}} = 8{,}5.$$

Бундан $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмани $n = 10$ та (8,5 га яқин бўлган жуфт сон 10) тенг бўлакка бўлиш кераклиги келиб чиқади. Интеграл остидаги функциянинг бўлиниш нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

x	$y=\cos x$	x	$y=\cos x$
$x_0=0{,}000000$	$y_0=1{,}000000$	$x_6=0{,}942478$	$y_6=0{,}587785$
$x_1=0{,}157080$	$y_1=0{,}987668$	$x_7=1{,}099557$	$y_7=0{,}453991$
$x_2=0{,}314159$	$y_2=0{,}951057$	$x_8=1{,}256637$	$y_8=0{,}309017$
$x_3=0{,}471239$	$y_3=0{,}891007$	$x_9=1{,}413716$	$y_9=0{,}156435$
$x_4=0{,}628318$	$y_4=0{,}809017$	$x_{10}=1{,}570796$	$y_{10}=0{,}000000$
$x_5=0{,}942478$	$y_5=0{,}707107$		

Симпсон формуласига асосан: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{10} +$

$$+4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)) =$$
$$= 0{,}0523599\ (1 + 4 \cdot 3{,}196228 + 2 \cdot 2{,}656876) \approx 1{,}000000.\ \blacktriangle$$

849. $\int\limits_0^1 x^2 dx$ $(n = 10)$ интегрални тўғри тўртбурчаклар, трапециялар, Симпсон формулалари ёрдамида ҳисобланг ва натижаларни интегралнинг аниқ қиймати билан таққосланг.

850. $\int\limits_0^2 x^4 dx$ $(n = 2)$ интегрални Симпсон формуласи ёрдамида ҳисобланг ва хатосини баҳоланг.

851. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n = 10)$ интегрални трапециялар формуласи ёрдамида ҳисобланг ва хатосини баҳоланг.

852. $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ интегрални трапециялар, Симпсон формулалари бўйича ҳисобланг ва хатоларини баҳоланг.

853. $\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)\,dx$ интегрални трапециялар, Симпсон формулалари ёрдамида ҳисобланг.

854. $\pi = 6 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ нинг тақрибий қийматини Симпсон формуласи ёрдамида ҳисобланг.

855. Агар $f(x)$ функция қуйидаги жадвал усулда берилган бўлса, $\int_{1,05}^{1,35} f(x)\,dx$ интегрални Симпсон формуласи ёрдамида ҳисобланг.

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

856. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ интегрални 1) тўғри тўртбурчаклар, 2) трапециялар, 3) Симпсон формулалари ёрдамида 0,1 гача аниқликда ҳисоблаш учун интеграллаш оралиғини неча бўлакка бўлиш керак?

857. $\int_0^{\pi} \sin x dx$ $(n = 6)$ интегрални трапециялар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

858. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ интегрални Симпсон формуласи ёрдамида 0,0001 аниқликда ҳисобланг.

9- §. ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1. Чегаралари чексиз интеграллар

Агар $f(x)$ функция x нинг $a \leqslant x < \infty$ оралиқдаги барча қийматларида аниқланган ва узлуксиз бўлса,

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

лимит $f(x)$ функциянинг a дан $+\infty$ гача олинган *хосмас интеграли* дейилади ва $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ каби белгиланади. Таърифга кўра

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Бошқа чексиз интерваллар учун ҳам хосмас интеграллар шунга ўхшаш аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Агар кўрсатилган лимитлар мавжуд ва чекли бўлса, хосмас интеграллар *яқинлашувчи*, акс ҳолда *узоқлашувчи* дейилади.

Кўп ҳолларда берилган хосмас интегралнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини билиш ва унинг қийматини баҳолаш етарли бўлади.

Солиштириш аломати:

1-теорема. *Агар барча x ($x \geqslant a$) лар учун $0 \leqslant f(x) \leqslant \leqslant \varphi(x)$ тенгсизлик бажарилса ва $\int_a^{\infty} \varphi(x)\, dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади ҳамда*

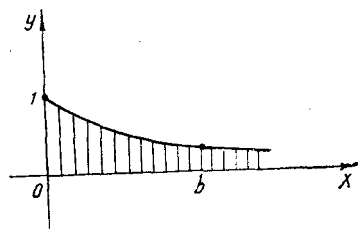
$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \leqslant \int_a^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

ўринли бўлади.

2-теорема. *Агар барча* x $(x \geqslant a)$ *лар учун* $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant$ $\leqslant f(x)$ *тенгсизликлар бажарилса ҳамда* $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ *интеграл узоқлашувчи бўлса,* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ *ҳам узоқлашувчи бўлади.*

3-теорема. *Агар* $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ *интеграл яқинлашувчи бўлса,* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ *интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Бу ҳолда $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ интеграл *абсолют яқинлашувчи* дейилади.



63- чизма

859. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ интегрални ҳисобланг (63- чизма).

△ Таъриф бўйича

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^{b} e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} (-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

Геометрик нуқтаи назардан, қаралаётган хосмас интеграл (63- чизма) штрихланган чексиз эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодалайди. ▲

860. α нинг қандай қийматларида

$$\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

хосмас интеграл яқинлашувчи ва қандай қийматларида узоқлашувчи бўлишини текширинг.

△ Қуйидаги уч ҳолни алоҳида-алоҳида қараймиз:

1) $\alpha > 1$ бўлсин, у ҳолда

$$\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^{b} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\Bigg|_a^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)\Bigg|_a^b =$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)=\frac{1}{(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}}\,.$$

Бу ҳолда хосмас интеграл яқинлашувчи экан.

2) $\alpha=1$ бўлганда, $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}(\ln b-\ln a)=$ $=\infty$ бўлади ва бу ҳолда хосмас интеграл узоқлашувчи.

3) $\alpha<1$ бўлганда, $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)=$ $=\infty$. Бу ҳолда ҳам хосмас интеграл узоқлашувчи.

Юқорида қаралган ҳоллардаги каби хосмас интеграллар механика ва электростатика масалаларида кўп учрайди.

Координата бошида жойлашган, массаси m бўлган M нуқтанинг Ox ўқда M нуқтадан x масофада жойлашган массаси 1 га тенг бўлган ихтиёрий M_1 нуқтани тортиш кучи F Ньютон қонунига асосан қуйидагига тенг:

$$F=k\,\frac{m}{x^2}\quad (k\text{ — ўзгармас}).$$

M_1 нуқтани $x=r$ нуқтадан $x=b$ $(b>r>0)$ нуқтага кўчиришда бажарилган иш қуйидагича аниқланади:

$$A=-\int\limits_r^{b}k\,\frac{m}{x^2}\,dx=km\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{r}\right)$$

(бу ерда айирув ишораси куч йўналиши M нуқтанинг ҳаракат йўналишига тескари бўлгани учун олинди). Агар нуқта чексиз узоқлашса (яъни $b=\infty$ да)

$$A=-\int\limits_r^{\infty}k\,\frac{m}{x^2}\,dx=-\frac{km}{r}\,.$$

Агар M_1 нуқта чексизликдан $x=r$ нуқтага кўчирилса, бажарилган иш мусбат бўлади, яъни $A=\frac{km}{r}$. ▲

861. Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг:

а) $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; б) $\int\limits_0^{\infty}x\sin x\,dx$;

в) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^3}$; г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

△ а) Таърифга кўра

$$\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_e^{b} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_e^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_e^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln^2 b}\right) = \frac{1}{2}.$$

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи. ▲

△ б) Таърифга асосан

$$\int\limits_0^{\infty} x\sin x\, dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^{b} x\sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x\, dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-x\cos\Big|_0^b + \int\limits_0^b \cos x\, dx\right) = \lim_{b\to\infty}(-b\cos b + \sin b)$$ — мавжуд эмас.

Шунинг учун берилган интеграл узоқлашувчи. ▲

△ в) Таърифга асосан

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{\ln x}{x^3}dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^{-3}dx, & v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{2x^2}\Bigg|_1^b + \frac{1}{2}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^3}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{2b^2} - \frac{1}{4x^2}\Bigg|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{2b^2} - \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

(Лопиталь қоидасига асосан $\lim\limits_{b\to\infty}\frac{\ln b}{2b^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{4b} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{4b^2} =$ $= 0$ эканидан фойдаландик.) ▲

△ г) Таърифга асосан

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{(x+1)^2+4} + \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a+1}{2}\right)+$$

$$+\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b+1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашувчи. ▲

862. Солиштириш аломатидан фойдаланиб, қуйидаги хосмас интегралларниг яқинлашишини текширинг:

а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}$;   б) $\int\limits_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$;

в) $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^3}dx.$

△ а) $x\geqslant 1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}<\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}.$$

$\alpha=\frac{7}{6}>1$ бўлганлиги учун $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^{\frac{7}{6}}}=\frac{1}{6}$ интеграл яқинлашувчи. Демак, 1-теоремага асосан берилган интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг қиймати $\frac{1}{6}$ дан кичик. ▲

△ б) $x\geqslant e$ бўлганда $\ln x\geqslant 1$ бўлгани учун

$$\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\geqslant\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

$\alpha=\frac{1}{3}$ бўлганлиги учун $\int\limits_e^\infty\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$ интеграл узоқлашувчи ва

2-теоремага асосан берилган интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади. ▲

△ в) Интеграл остидаги функция ишораси ўзгарувчи функция бўлгани учун ($x \geqslant 1$)

$$\left|\frac{\cos x}{x^3}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{x^3}.$$

Лекин $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ интеграл яқинлашувчи ($\alpha = 3$). У ҳолда $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^3}\right| dx$ интеграл яқинлашувчи ва бундан эса берилган хосмас интегралнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. ▲

Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг:

863. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$.

864. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

865. $\int\limits_2^\infty \frac{x\,dx}{x^2-1}$.

866. $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x \ln x}$.

867. $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx$.

868. $\int\limits_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^2}}$.

869. $\int\limits_6^\infty e^{-x} \sin x\, dx$.

870. $\int\limits_{-\infty}^1 e^x\, dx$.

871. $\int\limits_{-\infty}^0 xe^x\, dx$.

872. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

873. $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{(x+1)^3}$.

874. $\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$.

Қуйидаги интегралларнинг яқинлашишини текширинг:

875. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$.

876. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

877. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$ **878.** $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

879. $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx.$ **880.** $\int\limits_2^\infty \frac{2+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx.$

881. $\int\limits_1^\infty \frac{x+1}{x\sqrt{x}}\,dx.$

882. $\int\limits_a^\infty e^{-px}\,dx,\quad \int\limits_{-\infty}^b e^{px}\,dx$ хосмас интеграллар $p>0$ бўлганда яқинлашувчи, $p<0$ бўлганда узоқлашувчи бўлишини исботланг (p — ихтиёрий ўзгармас сон).

883. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$

884. k нинг қандай қийматларида $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ интеграл яқинлашувчи бўлади?

2. Чегараланмаган функциянинг интеграли

$f(x)$ функция $[a;\ b-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0,\ \varepsilon<b-a)$ кесмада аниқланган ва интегралланувчи бўлиб, b нуқта атрофида чегараланмаган бўлсин ($x=b$ нуқта $f(x)$ функциянинг *махсус нуқтаси* дейилади). Агар $\varepsilon\to 0$ да $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ интегралнинг чекли лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг a дан b гача *хосмас интеграли* дейилади ва

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad (1)$$

каби белгиланади. Бу ҳолда (1) хосмас интеграл *яқинлашувчи*, акс ҳолда *узоқлашувчи* дейилади.

Худди шунингдек, $x=a$ нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлса,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Агар $x=c$, $c\in(a;\ b)$ нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлиб, $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ ва $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ хосмас интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_1}^{b} f(x)\,dx$$

бўлиб, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a;\ c]$ кесманинг c нуқтасида узилишга эга ва $\varphi(x)\geqslant f(x)\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^c \varphi(x)\,dx$ нинг яқинлашувчи бўлишидан $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ нинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади ва $\int\limits_a^c f(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^c \varphi(x)\,dx$ бўлади; $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишидан $\int\limits_a^c \varphi(x)\,dx$ нинг узоқлашувчи эканлиги келиб чиқади. Агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесманинг $x=b$ нуқтасида узилишга эга бўлиб, $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Ушбу

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^k},\qquad \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-b)^k}\quad (k>0)$$

хосмас интеграллар $k<1$ бўлганда яқинлашувчи, $k\geqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

885. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегрални ҳисобланг.

Δ Интеграл остидаги $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функция $[0;\ 1-\varepsilon]$ да интегралланувчи бўлиб, $x=1$ да узилишга эга. Таърифга асосан

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи. ▲

886. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ интегрални ҳисобланг.

△ Таърифга асосан

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^e (\ln x)^{-\frac{1}{3}} d(\ln x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{\frac{2}{3}} \right|_{1+\varepsilon}^e = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sqrt[3]{\ln^2 e} - \sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)} \right) = \frac{3}{2}.$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашувчи. ▲

887. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ интегрални ҳисобланг.

△ Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ функция $x = 1$, $x = 3$ нуқталарда узилишга эга. Бу ҳолда берилган интегрални қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$$

(бунда $x = 2$ нуқта ўрнига $[1; 3]$ кесманинг исталган ички нуқтасини олиш мумкин). Бу интегралларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \arcsin(x-2) \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\arcsin 0 -$$

$$- \arcsin(\varepsilon - 1)) = \frac{\pi}{2};$$

$$\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_2^{3-\varepsilon} \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (\arcsin (x-2)) \Big|_2^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} (\arcsin (1-\varepsilon) -$$

$$- \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$$

У ҳолда берилган интеграл

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

га тенг бўлади ва бундан хосмас интегралнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. ▲

888. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$ интегрални ҳисобланг.

△ Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ функция $x = 1$ да узилишга эга. Берилган интегрални

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

кўринишда ёзамиз ва ҳар бир қўшилувчини алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз: $0 \leqslant x < 1$ бўлганда

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (\arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon\to 0} (\arcsin (1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2};$$

$1 < x \leqslant 2$ бўлганда $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln (x + \sqrt{x^2-1}) \Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln (2+\sqrt{3}) - \ln (1+\varepsilon + \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 1})) =$$

$$= \ln (2+\sqrt{3}).$$

У ҳолда

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}). \ \blacktriangle$$

889. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$ интегрални ҳисобланг.

$\triangle$ Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{x}$ функция $x = 0$ нуқтада узилишга эга бўлиб, $[-1; 0)$, $(0; 2]$ оралиқларда узлуксиздир. Таърифга асосан

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln|x| \Big|_{-1}^{\varepsilon}) + \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln|x| \Big|_{\varepsilon}^{2}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon + \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln 2 - \ln\varepsilon) -$$

мавжуд эмас, шунинг учун берилган хосмас интеграл узоқлашувчи. $\blacktriangle$

890. Қуйидаги интегралларнинг яқинлашишини текширинг:

а) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$; б) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

$\triangle$ а) Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ функция $x = 3$ нуқтада узилишга эга. $2 \leqslant x \leqslant 3$ оралиқда $1 \leqslant x - 1 \leqslant 2$, у ҳолда $\left|\frac{1}{(x-1)(x-3)}\right| > \frac{1}{2(3-x)}$ тенгсизлик ўринли.

$k = 1$ бўлгани учун солиштириш аломатига асосан $\int_2^3 \frac{dx}{2(3-x)}$ хосмас интегралнинг узоқлашувчи бўлишидан берилган интегралнинг узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади. $\blacktriangle$

$\triangle$ б) Интеграл остидаги $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{4/3}}$ функция $x = 0$ нуқтада узилишга эга. Берилган интегрални қуйидагича ёзамиз:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^{4/3}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{4/3}}.$$

Ўнг томондаги ҳар бир хосмас интеграл солиштириш аломатига кўра $k=\frac{4}{3}>1$ бўлгани учун узоқлашувчи. Демак, берилган хосмас интеграл ҳам узоқлашувчидир. Агар юқоридагиларни ҳисобга олмасдан формал равишда берилган интегрални Ньютон — Лейбниц формуласи бўйича ҳисобласак,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int_{-1}^{1}x^{-\frac{4}{3}}dx=\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-6$$

нотўғри натижага келамиз. ▲

Қуйидаги хосмас интегралларнинг яқинлашишини текширинг:

891. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1-x}$.

892. $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

893. $\int_{0}^{3}\frac{2+\sin x}{(x-1)^2}dx$.

894. $\int_{0}^{3a}\frac{2\,xdx}{\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}}$.

895. $\int_{0}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

896. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

897. $\int_{2}^{3}\frac{\cos x}{x-2}dx$.

898. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^3-5x^2}$.

899. $\int_{0}^{1}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$.

900. $\int_{0}^{2}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

901. $\int_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

VII боб ҚАТОРЛАР

1- §. СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1. Асосий тушунчалар

Сонларнинг бирор чексиз кетма-кетлиги берилган бўлсин:

$$a_1,\ a_2,\ ,\ \ldots\ ,\ a_n,\ \ldots \tag{1}$$

Бу сонлардан тузилган қуйидаги

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2}$$

ифода *сонли қатор* дейилади, бунда a_1, a_2, ... сонлар — *қатор ҳадлари*, a_n — қаторнинг *умумий ҳади* дейилади. Қаторнинг дастлабки n та ҳади йиғиндиси

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

қаторнинг *n-хусусий йиғиндиси* дейилади.

Агар $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ чекли лимит мавжуд бўлса, (2) қатор *яқинлашувчи* дейилади ва S (2) қаторнинг *йиғиндиси* дейилади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ ёки мавжуд бўлмаса, қатор *узоқлашувчи* дейилади.

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{3}$$

қатор (2) қаторнинг n ҳадидан кейинги *қолдиғи* дейилади.

Энг содда теоремалар:

1°. *Агар* (2) *қатор яқинлашувчи бўлса,* (3) *қатор яқинлашувчи бўлади ва аксинча.*

2°. *Агар* (2) *қатор яқинлашувчи бўлса ва йиғиндиси* S *га тенг бўлса,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ *қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва йиғиндиси* cS *га тенг бўлади.*

3°. *Агар* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *қатор яқинлашувчи ва уларнинг йиғиндилари мос равишда* a *ва* b *га тенг бўлса, у ҳолда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

қаторлар ҳам яқинлашувчи бўлади ва уларнинг йиғиндилари мос равишда $a + b$ *ва* $a - b$ *га тенг бўлади.*

4^0. *Агар* (2) *қатор яқинлашувчи бўлса, унинг умумий ҳади* $n \to \infty$ *да нолга интилади, яъни*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (4)$$

(4) шарт қатор яқинлашиши учун зарурий шарт бўлиб, етарли шарт эмас. Бошқача айтганда (4) шарт бажарилганда ҳам қатор узоқлашувчи бўлиши мумкин.

Агар (4) шарт бузилса, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

Коши критерияси:

(2) қатор яқинлашиши учун $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N$, барча $n > N$ ва $p > 0$ (p — натурал сон) сонлар учун

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Қуйидаги

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \qquad (5)$$

кўринишдаги қатор *умумлашган гармоник қатор* дейилади. Хусусий ҳолда, $k = 1$ бўлганда (5) дан

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad (6)$$

қатор ҳосил бўлади ва бу қатор *гармоник қатор* дейилади.

$k > 1$ бўлганда (5) қатор яқинлашувчи, $k \leqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади. Гармоник қаторнинг $a_n = \dfrac{1}{n}$ умумий ҳади $n \to \infty$ да нолга интилади, лекин гармоник қатор узоқлашувчи. Қуйидаги

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \qquad (7)$$

кўринишдаги қатор *геометрик қатор* дейилади.

(7) қатор $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлиб, $|q| \geqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

902. Умумий ҳади $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ бўлган қатор йиғиндисини топинг.

Δ n га кетма-кет 1, 2, 3, ... , қийматлар бериб, қуйидаги

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} +$$

$$+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

қаторни ҳосил қиламиз. Қаторнинг n-хусусий йиғиндиси

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

га тенг. S_n хусусий йиғиндини соддароқ кўринишга келтириш учун қатор умумий ҳади $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ни аниқмас коэффициентлар усули бўйича содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}.$$

Бунда

$$1=2An+A+2Bn-B$$

ёки

$$1=(2A+2B)n+A-B.$$

Бир хил даражадаги n ларнинг коэффициентларини тенглаш натижасида қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned}2A+2B&=0,\\ A-B&=1.\end{aligned}\right\}$$

Бундан $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$. У ҳолда $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$ $=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}$. Қаторнинг ҳар бир ҳадини икки қўшилувчи йиғиндиси кўринишида ифодаласак, S_n хусусий йиғинди қуйидаги кўринишга келади:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 5}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2(2n-3)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(2n-1)}\right)+\left(\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

Қатор йиғиндиси S ни қуйидагича топамиз:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи бўлиб, қаторнинг йиғиндиси $\frac{1}{2}$ га тенг бўлади. ▲

903. $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ геометрик қаторнинг яқинлашишини текширинг.

Δ Қаторнинг хусусий йиғиндиси

$$S_n=a+aq+\ldots+aq^n$$

га тенг. Маълумки, $q\neq 1$ бўлганда

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Бу ерда бир неча ҳол бор:

1) $|q|<1$ бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$. Демак,

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q}.$$

Бу ҳолда қатор яқинлашувчи бўлиб, қаторнинг йиғиндиси $S=\frac{a}{1-q}$ бўлади.

2) $|q|>1$ бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty}|q^n|=\infty$. Бу ҳолда

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\infty$$

бўлиб, қатор узоқлашувчи бўлади.

3) $q=1$ бўлса, $S_n=a+a+\ldots+a=na$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} na=\infty.$$

Бу ҳолда ҳам қатор узоқлашувчи.

4) $q=-1$ бўлса, $S_n=a-a+a-a+\ldots+$ $+(-1)^{n-1}a$;

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\begin{cases}0, & \text{агар } n \text{ — жуфт бўлса,}\\ a, & \text{агар } n \text{ — тоқ бўлса.}\end{cases}$$

Бу ҳолда хусусий йиғинди S_n нинг лимити мавжуд эмас. Демак, қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, $a+aq+\ldots+aq^n+\ldots$ геометрик қатор $|q|<1$ бўлгандагина яқинлашувчи бўлади ва қаторнинг йиғиндиси $S=\frac{a}{1-q}$ га тенг бўлади. $\blacktriangle$.

904. Коши критериясидан фойдаланиб,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

гармоник қаторнинг узоқлашувчи эканини кўрсатинг.

△ Коши критериясига асосан $\forall \varepsilon = \frac{1}{4}$, $\exists N$, $n > N$ ва $p = n$ лар учун $|S_{2n} - S_n| < \frac{1}{4} = \varepsilon$ бўлиши керак. Лекин

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Бундан эса гармоник қаторнинг узоқлашувчи экани келиб чиқади. ▲

905. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \ldots$ қатор учун яқинлашишнинг зарурий шарти бажариладими?

△ Берилган қаторнинг умумий ҳади $\frac{2n}{2n+1}$ кўринишда бўлади. У ҳолда

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} \ldots + \frac{2n}{2n+1} + \ldots, \quad a_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

(4) га асосан:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{n}} = 1.$$

Қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилмади, шунинг учун берилган қатор узоқлашувчи. ▲

906. $a_n = \frac{n}{2^n (n+1)}$ бўлса, a_1, a_2, a_3, a_4 ларни топинг.

907. $a_n = \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$ бўлса, a_1, a_2, a_3 ларни топинг.

908. $a_n = \frac{1}{3^n + 1}$ бўлса, a_{n+1}, a_{2n}, a_{n^2}, $a_{n!}$ ларни топинг.

909. $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}$ бўлса, a_{n+1}, a_{2n}, a_{n^2}, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ларни топинг.

910. $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ бўлса, a_1, a_2, a_3 ларни топинг.

Қаторларнинг йиғиндиларини топинг.

911. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \ldots$.

912. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$.

913. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots.$

914. $\frac{3}{1^2\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots.$

915. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots.$

916. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots.$

Қуйидаги қаторлар учун яқинлашишнинг зарурий шарти бажариладими:

917. $\frac{2}{1}+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots.$

918. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2n-1}{2n}+\ldots.$

919. $\cos 1+\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{3}+\ldots+\cos\frac{1}{n}+\ldots.$

920. $\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots.$

921. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots.$

922. $(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^3+\ldots.$

2. Мусбат ҳадли қаторлар

Мусбат ҳадли қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{1}$$

ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots \tag{2}$$

қаторлар берилган бўлсин ($\forall\, n\in N$ учун $a_n\geqslant 0$, $b_n\geqslant 0$).

1°. 1-солиштириш аломати. Агар $\forall\, n\in N$ учун $a_n\leqslant b_n$ ўринли бўлса, у ҳолда

а) (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади;

б) (1) қатор узоқлашувчи бўлса, (2) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

2°. 2-солиштириш аломати. Агар чекли

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда (1) ва (2) қаторлар бир вақтда яқинлашувчи ёки бир вақтда узоқлашувчи бўлади.

3° Даламбер аломати. Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

мавжуд бўлиб,

а) $l < 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи,

б) $l > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи,

в) $l = 1$ бўлса, шубҳали ҳол бўлади.

Изоҳ: Агар $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ бўлиб, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

4°. Кошининг радикал аломати. Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

мавжуд бўлиб,

а) $l < 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи,

б) $l > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи,

в) $l = 1$ бўлса, шубҳали ҳол бўлади.

5°. Кошининг интеграл аломати. Агар $a_n = f(n)$ бўлиб, бунда $f(x)$ функция $x \geqslant a \geqslant 1$ соҳада мусбат, монотон камаювчи ва узлуксиз бўлса, у ҳолда (1) қатор ва $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл бир вақтда ё яқинлашувчи, ё узоқлашувчи бўлади.

923. Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини текширинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ (Дирихле қатори).

Δ а) Берилган қаторнинг $a_n = \frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$ умумий ҳади яқинлашувчи бўлган қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$$

геометрик $\left(q = \frac{1}{3} < 1\right)$ қаторнинг умумий ҳадидан кичик, яъни

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 3^{n-1}} \leqslant \frac{1}{3^{n-1}} = b_n.$$

1-солиштириш аломатига асосан, берилган қатор яқинлашувчи бўлади. ▲

Δ б) Умумий ҳади $a_n = \frac{1}{2n-1}$ бўлган берилган қаторни умумий ҳади $b_n = \frac{1}{n}$ бўлган узоқлашувчи $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоник қатор билан солиштирамиз.

2-солиштириш аломатига асосан,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

бўлганлиги учун берилган қатор узоқлашувчи бўлади. ▲

Δ в) $a_n = \frac{n}{3^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$.

Даламбер аломатига асосан:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,3^n}{n\cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{1}{3} < 1$$

бўлгани учун берилган қатор яқинлашувчи бўлади. ▲

Δ г) $a_n = \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Даламбер аломатига асосан,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

бўлганлиги учун берилган қатор узоқлашувчи. ▲

Δ д) Кошининг радикал аломатига асосан,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

бўлгани учун берилган қатор яқинлашувчи. ▲

Δ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^k}$ қаторни яқинлашишга текширишда Кошининг интеграл аломатидан фойдаланамиз.

$f(x) = \dfrac{1}{x^k}$ деб олиб, ушбу $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^k}$ хосмас интегрални текширамиз:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-k}\,dx = \lim_{b\to\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{1-k}(b^{1-k}-1), & k \neq 1; \\ \ln b, & k = 1; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{k-1}, & \text{агар } k > 1 \text{ бўлса}, \\ \infty, & \text{агар } k < 1 \text{ бўлса}, \\ \infty, & \text{агар } k = 1 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Демак, хосмас интеграл $k > 1$ да яқинлашувчи, $k \leqslant 1$ да узоқлашувчи. Кошининг интеграл аломатига асосан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

қатор $k > 1$ да яқинлашувчи, $k \leqslant 1$ да узоқлашувчи бўлади. $k = 1$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоник қатор ҳосил бўлади. Бу ерда гармоник қаторнинг узоқлашувчи бўлишининг яна бир исботи берилди. ▲

Солиштириш аломатидан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг яқинлашишини ёки узоқлашишини кўрсатинг:

924. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. **925.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

926. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2(1+2^2)}} + \frac{1}{\sqrt{3(1+3^2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} + \ldots$.

927. $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{9} + \ldots + \sin \frac{\pi}{3^n} + \ldots$.

928. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$.

929. $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \ldots + \frac{1+n}{1+n^2} + \ldots$.

930. $\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{3} + \ldots + \sin \frac{1}{n} + \ldots$.

931. $\ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2^2+2}{2^2+1} + \ln \frac{3^2+2}{3^2+1} + \ldots + \ln \frac{n^2+2}{n^2+1} + \ldots$.

932. $2 \sin \frac{\pi}{3} + 2^2 \sin \frac{\pi}{3^2} + \ldots + 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} + \ldots$.

Даламбер ва Коши аломатларидан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини текширинг:

933. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$.

934. $\frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \ldots + \frac{5^n}{n!} + \ldots$.

935. $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}+\ldots$.

936. $2+\left(\frac{2+1}{2\cdot 2-1}\right)^n+\left(\frac{3+1}{2\cdot 3-1}\right)^n+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$.

937. $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots$.

938. $2+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}+\ldots$.

939. $1+\frac{1\cdot 4}{3!!}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{5!!}+\ldots+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(2n-1)!!}+\ldots$.

940. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\cdots\sin^n\frac{\pi}{2n}+\ldots$.

941. $\frac{3}{2^{-1}}+\frac{3^3}{2^2}+\frac{3^5}{2^5}+\ldots+\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}+\ldots$.

942. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{2\cdot 3^2}}+\frac{9}{\sqrt{3\cdot 3^3}}+\ldots+$

$+\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}+\ldots$.

Кошининг интеграл аломатидан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг яқинлашишини текширинг:

943. $\frac{1}{2(\ln 2)^2}+\frac{1}{3(\ln 3)^2}+\ldots+\frac{1}{n(\ln n)^2}+\ldots$.

944. $1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n+1}}+\ldots$.

945. $\frac{2}{3+1^2}+\frac{2}{3+2^2}+\frac{2}{3+3^2}+\ldots+\frac{2}{3+n^2}+\ldots$.

946. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$.

947. $\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\ldots+\frac{\ln n}{n^2}+\ldots$.

948. $\frac{e^{-\sqrt{1}}}{\sqrt{1}}+\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}+\ldots+$

$+\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+\ldots$.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини текширинг:

949. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$

950. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$

951. $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^3}+\ldots.$

952. $\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{4\cdot 3}}+\ldots+$

$+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}+\ldots.$

953. $1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots.$

954. $1+\frac{1\cdot 2}{3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^2}+\ldots+\frac{n!}{3^{n-1}}+\ldots.$

955. $\frac{1}{2!!}+\frac{2}{4!!}+\frac{3}{6!!}+\ldots+\frac{n}{(2n)!!}+\ldots.$

956. $\frac{1}{2}+\frac{3}{9}+\frac{5}{19}+\ldots+\frac{2n-1}{2n^2+1}+\ldots.$

957. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{3}+\frac{5}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}+\ldots.$

958. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\ldots+\frac{n^2}{2n^2+1}+\ldots.$

959. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots$

960. $2+\frac{2}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^4+\frac{2}{2^3}\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+$

$+\frac{2}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots.$

961. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots.$

962. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots+$

$+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\ldots.$

963. $1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n+1}}+\ldots.$

964. $\frac{3}{3^4-9}+\frac{4}{4^4-9}+\frac{5}{5^4-9}+\ldots+\frac{n}{n^4-9}+\ldots.$

965. $1+\frac{1\cdot 4}{3\,!!}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{5\,!!}+\ldots+$

$+\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(2n-1)\,!!}+\ldots.$

966. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+$

$+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}+\ldots.$

3. Ишоралари ўзгарувчи қаторлар

Агар қаторнинг ҳадлари орасида мусбатлари ҳам, манфийлари ҳам бўлса, бундай қатор *ишоралари ўзгарувчи қатор* дейилади. Ишоралари ўзгарувчи

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{1}$$

қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан ушбу

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \tag{2}$$

қаторни тузамиз.

Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва (1) қатор *абсолют яқинлашувчи* дейилади. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, (2) қатор узоқлашувчи бўлса, (1) қатор *шартли яқинлашувчи* дейилади. Ҳар қандай яқинлашувчи қатор гуруҳлаш хоссасига эга. Абсолют яқинлашувчи қаторлар ўрин алмаштириш хоссасига эга. Лекин шартли яқинлашувчи қаторлар ўрин алмаштириш хоссасига эга эмас.

Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2 \tag{4}$$

қаторлар учун

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 b_n+\ldots+a_n b_1) \tag{5}$$

қатор (3) ва (4) қаторларнинг *кўпайтмаси* дейилади.

Агар (3), (4) қаторлар абсолют яқинлашувчи бўлса, (5) қатор ҳам абсолют яқинлашувчи бўлади ва (5) қатор йиғиндиси $S = S_1 \cdot S_2$ бўлади. Агар қатор ҳадларининг ишоралари навбатма-навбат алмашиб келса, яъни

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \tag{6}$$

бўлса, бундай қатор *ишоралари алмашинувчи* қатор дейилади, бунда $a_k > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. (6) катор (1) қаторнинг муҳим хусусий ҳолидир.

Лейбниц теоремаси. *Агар ишоралари алмашинувчи (6) қаторнинг ҳадлари абсолют қийматлари бўйича монотон камайса, яъни*

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots \tag{7}$$

ва

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{8}$$

бўлса, у ҳолда (6) *қатор яқинлашувчи бўлиб,* $|S| < a_1$, $|r_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$ бўлади.

967. Қуйидаги ишоралари ўзгарувчи қаторларнинг абсолют, шартли яқинлашишини ёки узоқлашишини текширинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{3^n}$, ($\alpha$ — ихтиёрий сон);

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Δ а) Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан янги қатор тузамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{3^n} \tag{9}$$

ва бу қаторни

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \tag{10}$$

қатор билан таққослаймиз. Маълумки,

$$\frac{|\sin n\alpha|}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}.$$

(10) геометрик қатор $\left(q = \frac{1}{3} < 1\right)$ яқинлашувчи бўлганлиги учун, мусбат ҳадли қаторларни солиштириш аломатига кўра, (9) қатор яқинлашувчи бўлади. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи. ▲

△ б) Берилган ишоралари ўзгарувчи қатор учун қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилмайди.

Ҳақиқатан,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{n\pi}{4}$$

мавжуд эмас. Демак, берилган қатор узоқлашувчи. ▲

△ в) Ишоралари алмашинувчи берилган қаторнинг ҳадлари абсолют қийматлари бўйича монотон камаяди, яъни

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2\cdot 2^2} > \frac{1}{3\cdot 2^3} > \ldots$$

ва

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} = 0.$$

Лейбниц теоремасига асосан берилган қатор яқинлашувчи. Қаторнинг абсолют ёки шартли яқинлашишини текшириш учун берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} \tag{11}$$

қатор тузамиз. Бу қаторнинг яқинлашишини Даламбер аломати бўйича текширамиз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\, 2^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Демак, (11) қатор яқинлашувчи бўлгани учун берилган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади. ▲

Δ г) Ишоралари алмашинувчи берилган қаторнинг ҳадлари Лейбниц теоремасининг шартларини қаноатлантиради, яъни

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \dots,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи. Берилган қаторнинг абсолют ёки шартли яқинлашишини текшириш учун қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \qquad (12)$$

қатор тузамиз. Кошининг интеграл аломатига асосан

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln|2x-1| \Big|_1^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln(2b-1) = +\infty$$

бўлганлиги учун (12) қатор узоқлашувчи. Бу ҳолда берилган қатор шартли яқинлашувчи. ▲

Қуйидаги ишоралари ўзгарувчи қаторларнинг абсолют, шартли яқинлашишини ва узоқлашишини текширинг:

968. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

969. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \dots$.

970. $\frac{\sin\alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots$.

971. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$.

972. $-\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^3 + \dots + (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n + \dots$

973. $\frac{\cos\alpha}{\ln 10} + \frac{\cos 2\alpha}{(\ln 10)^2} + \dots + \frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n} + \dots$.

974. $\frac{3}{1\cdot 2} - \frac{5}{2\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 4} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)} + \dots$

975. $\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{9} - \ldots +$

$$+ (-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3n} + \ldots$$

976. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \ldots$.

977. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \ldots$

978. $\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{3a^4} + \frac{1}{4a^6} - \ldots +$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)\,a^{2n}} + \ldots .$$

979. $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$ тенгликни исботланг.

980. Шартли яқинлашувчи

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

қатор ҳадларининг ўринларини шундай алмаштирингки, ҳосил бўлган қатор узоқлашувчи бўлсин.

981. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ қатор йиғиндисини 0,01 гача аниқликда топинг.

982. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ қатор йиғиндисини 0,01 гача аниқликда топиш учун қаторнинг неча ҳадини олиш керак?

2- §. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАР

1. Асосий тушунчалар. Аниқланиш соҳаси

Ҳадлари ўзгарувчи x нинг бирор D соҳада аниқланган функцияларидан иборат бўлган

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

қатор *функционал қатор* дейилади.

$x \in D$ га ҳар хил сон қийматлар бериб, турли сонли қаторларни ҳосил қиламиз. Бу қаторлар яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши мумкин.

x нинг (1) функционал қатор яқинлашадиган қийматлари тўплами шу қаторнинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади.

$S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функция (1) қаторнинг *йиғиндиси*, $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ қатор *қолдиғи* дейилади, бунда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x).$$

Функционал қаторларнинг муҳим хусусий ҳоли даражали қаторлардир. Қуйидаги

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (2)$$

ёки

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (3)$$

кўринишдаги функционал қатор *даражали қатор* дейилади, бу ерда a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ўзгармас сонлар қаторнинг *коэффициентлари* дейилади.

Абел теоремаси.

1) *Агар* (3) *даражали қатор нолдан фарқли бирор x_0 қийматда яқинлашувчи бўлса, x нинг $|x| < |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай қийматларида* (3) *қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.*

2) *Агар* (3) *қатор x_0' қийматда узоқлашувчи бўлса, x нинг $|x| > |x_0'|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай қийматларида* (3) *қатор узоқлашувчи бўлади.*

(3) даражали қаторнинг *яқинлашиш радиуси* деб шундай R сонга айтиладики, $|x| < R$ да (3) қатор яқинлашувчи ва $|x| > R$ да узоқлашувчи бўлади. $(-R; R)$ оралиқ эса (3) қаторнинг *яқинлашиш интервали* дейилади. (2) қаторнинг яқинлашиш интервали $(x_0 - R; x_0 + R)$ дан иборат. (2), (3) қаторларнинг яқинлашиш радиуси қуйидаги

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (4) \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (5)$$

формулалар орқали топилади.

2. Текис яқинлашиш

Агар ҳар қанча кичик $\varepsilon > 0$ сон учун x га боғлиқ бўлмаган шундай $N(\varepsilon)$ мавжуд бўлсаки, $n > N$ бўлганда $[a; b]$ кесмадан олинган ихтиёрий x учун $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ ёки $|R_n(x)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, (1) функционал қатор $[a; b]$ кесмада *текис яқинлашувчи* дейилади.

Текис яқинлашиш критерияси.

Агар $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N(\varepsilon)$, $n > N$ ва $\forall\ x \in [a;\ b] \Rightarrow |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$ бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор $[a; b]$ кесмада текис яқинлашувчи бўлади ва аксинча.

Вейерштрасс аломати.

Агар (1) функционал қаторнинг ҳадлари $[a; b]$ кесмада $|u_n(x)| \leqslant c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ тенгсизликни қаноатлантириб, c_n лар бирор яқинлашувчи мусбат ҳадли сонли

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$$

қаторнинг ҳадлари бўлса, у ҳолда (1) қатор $[a; b]$ кесмада текис яқинлашувчи бўлади.

Текис яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари.

1) Ҳадлари $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган (1) функционал қатор текис яқинлашувчи бўлса, қаторнинг йиғиндиси шу кесмада узлуксиз бўлади.

2) Узлуксиз функциялардан тузилган текис яқинлашувчи қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин, яъни

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx.$$

3) Агар $[a; b]$ кесмада (1) қаторнинг ҳар бир ҳади узлуксиз дифференциалланувчи, (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ қатор $[a; b]$ кесмада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (1) қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин, яъни

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Хусусий ҳолда (3) даражали қаторни ўзининг яқинлашиш оралиғи ичида ҳадлаб интеграллаш ва дифференциаллаш мумкин.

983. Функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+3)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (8-x^2)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n$, $x \neq 0$.

Δ а) Даламбер аломатидан фойдаланамиз:

$$u_n(x) = \frac{1}{n(x+3)^n}; \quad u_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)(x+3)^{n+1}};$$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x+3)^n}{(n+1)(x+3)^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)(x+3)}\right| = \frac{1}{|x+3|}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{|x+3|}.$$

Даламбер аломатига кўра, қатор яқинлашувчи бўлиши учун $l < 1$ бўлиши керак. Бу ҳолда

$$\frac{1}{|x+3|} < 1; \quad |x+3| > 1 \Rightarrow x+3 > 1 \text{ ва } x+3 < -1 \Rightarrow x >$$

$$> -2 \text{ ва } x < -4.$$

Демак, қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-\infty; -4)$; $(-2; \infty)$ дан иборат. Топилган интервалнинг чегараларида қаторни алоҳида текширамиз:

$x = -4$ бўлганда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(-1)^n}$ ишоралари алмашинувчи қатор ҳосил бўлиб, бу қатор Лейбниц аломатига кўра яқинлашувчи бўлади.

$x = -2$ бўлганда, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ узоқлашувчи бўлган гармоник қатор ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-\infty; -4]$ ва $(-2; \infty)$ дан иборат. ▲

Δ б) Берилган функционал қаторни махражи $q = 8 - x^2$ бўлган геометрик қатор деб қарашимиз мумкин. Маълумки, $|q| = |8 - x^2| < 1$ бўлганда қатор яқинлашувчи бўлади. $|8-x^2|<1$ тенгсизликни ечсак: $-1<8-x^2<$ <1 ёки $7<x^2<9$, бундан $\sqrt{7}<|x|<3$.

Қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-3;\ -\sqrt{7})$ ва $(\sqrt{7},\ 3)$ дан иборат. Энди қаторнинг яқинлашишини интервал чегараларида текшириб кўрамиз: $x=3$, $x=-3$; $x=\sqrt{7}$; $x=-\sqrt{7}$, бўлганда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n$ узоқлашувчи қаторлар ҳосил бўлади.

Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-3;\ -\sqrt{7})$, $(\sqrt{7};\ 3)$ дан иборат. ▲

△ в) Функционал қаторнинг ҳадлари сонлар ўқининг $x=0$ дан бошқа барча нуқталарида аниқланган. Агар $x<$ <0 бўлса, $\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$ бўлади. Бу ҳолда ишоралари алмашинуви $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ қатор Лейбниц аломатига кўра, яқинлашувчи бўлади.

Агар $x>0$ бўлса, $\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$ бўлади. Бу ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ узоқлашувчи гармоник қатор ҳосил бўлади. Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-\infty;\ 0)$ дан иборат бўлади. ▲

984. Даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусларини ва яқинлашиш интервалларини топинг. Яқинлашиш интервалининг чегараларида қаторнинг яқинлашишини текширинг:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{3^n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2n-2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ (x-2)^n}{n^n}$.

△ а) n- ҳаднинг коэффициенти $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$. Қаторнинг яқинлашиш радиусини (4) формулага асосан топамиз:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}=2,$$

$$R=2.$$

Яқинлашиш интервали $(-2,\ 2)$ бўлади. Энди қаторнинг яқинлашишини интервалнинг чегараларида текшириб кўрамиз: $x=$

$= -2$ бўлса, ишоралари алмашинувчи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ қатор ҳосил бўлади. Бу қатор Лейбниц теоремасининг шартларини қаноатлантиргани учун яқинлашувчи бўлади. $x = 2$ бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ узоқлашувчи гармоник қатор ҳосил бўлади. Шундай қилиб, берилган даражали қатор $[-2; 2)$ ярим сегментда яқинлашувчи бўлади. ▲

△ б) Бу ерда $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{3^n}}$. (5) формулага асосан, қаторнинг яқинлашиш радиусини топамиз:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}}} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Яқинлашиш интервали $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ бўлади. Интервалнинг чегараларида қаторнинг яқинлашишини текширамиз:

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$ узоқлашувчи қатор ҳосил бўлади.

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлса, $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ узоқлашувчи қатор ҳосил бўлади. Демак, берилган қаторнинг яқинлашиш интервали $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ дан иборат. ▲

△ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2n-2}$ қаторда x нинг барча натурал (x нинг тоқ даражалари қатнашмайди) даражалари қатнашмаганлиги учун қаторнинг яқинлашиш радиусини топишда (4) формуладан фойдалана олмаймиз. Қаторнинг яқинлашиш интервалини топишда Даламбер аломатидан фойдаланамиз:

$$u_n(x) = 2^{n-1} x^{2n-2}, \quad u_{n+1}(x) = 2^n x^{2n}.$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n x^{2n}}{2^{n-1} x^{2n-2}}\right| = \lim_{n\to\infty} |2x^2| = 2x^2 < 1,$$

бундан $x^2 < \frac{1}{2}$ ёки $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлади. Қаторнинг яқинлашиш интервали $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ бўлади.

Энди қаторнинг яқинлашишини интервалнинг чегараларида текширамиз:

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлганда $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ узоқлашувчи қатор ҳосил бўлади. Шундай қилиб, берилган даражали қатор $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ интервалда яқинлашувчи бўлади. ▲

△ г) $u_n(x) = \frac{n!\,(x-2)^n}{n^n}$, $u_{n+1}(x) = \frac{(n+1)!\,(x-2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$.

Даламбер аломатига асосан:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x-2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!(x-2)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)\ n^n}{(n+1)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x-2|}{e} < 1$$

бўлиб, бундан $|x-2| < e$, $-e < x-2 < e$, $2-e < x < 2+e$ келиб чиқади. Демак, $R = e$ бўлиб, қаторнинг яқинлашиш интервали $(2-e;\ 2+e)$ бўлади.

Энди қаторнинг яқинлашишини интервалнинг чегараларида текшириб кўрамиз:

$x = 2 + e$ бўлса,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n} \qquad (6)$$

сонли қатор ҳосил бўлади. $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ нисбатни текширамиз

$\left(a_n = \dfrac{n!\, e^n}{n^n}\right).$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\, e^n} = \frac{e \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} > 1$$

бўлгани учун (Даламбер аломатидаги изоҳга асосан) (6) қатор узоқлашувчи.

$x = 2 - e$ бўлганда, ишоралари алмашинувчи $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \times \times \dfrac{n!\,e^n}{n^n}$ қатор ҳосил бўлиб, бу қатор ҳам узоқлашувчи бўлади (нима учун?) Шундай қилиб, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(2-e;\ 2+e)$ дан иборат. ▲

Изоҳ: Берилган қаторни, $x - 2 = y$ белгилаш ёрдамида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\, y^n}{n^n}$ кўринишда ёзиш мумкин ва бу қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали топилади.

985. Функционал қаторларнинг текис яқинлашишини кўрсатинг.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4 + x^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 3^n \pi x}{3^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n \sqrt{1+(2n+1)x}}$ $(0 \leqslant x < \infty)$, $|\varphi_n(x)| < 0{,}01$

бўлиши учун n қандай бўлиши керак.

△ а) x нинг барча қийматлари учун

$$\frac{1}{n^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{n^4} \qquad (7)$$

тенгсизлик ўринли. Маълумки, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$ қатор $(\alpha = 4 > 1$ бўлганлиги учун, умумлашган гармоник қаторни эсланг) яқинлашувчи. (7) тенгсизлик ўринли бўлгани учун, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган қатор x нинг барча қийматларида текис яқинлашувчи бўлади. ▲

△ б) $|\sin kx| \leqslant 1$ бўлгани учун

$$\left|\frac{\sin 3^n \pi x}{3^n}\right| \leqslant \frac{1}{3^n} \tag{8}$$

тенгсизлик ўринли. n- ҳади $\frac{1}{3^n}$ бўлган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ қатор геометрик қатор бўлиб, $q = \frac{1}{3} < 1$ бўлганлиги учун яқинлашувчи. (8) тенгсизлик ўринли бўлганлиги учун, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган қатор x нинг барча қийматларида текис яқинлашувчи бўлади. ▲

△ в) Қаралаётган оралиқда қуйидаги

$$\frac{1}{2^n \sqrt{1 + (2n+1)x}} \leqslant \frac{1}{2^n} \tag{9}$$

тенгсизлик ўринли. Махражи $q = \frac{1}{2} < 1$ бўлган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tag{10}$$

геометрик қатор яқинлашувчи бўлганлиги учун, (9) га асосан, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган қатор қаралаётган оралиқда текис яқинлашувчи бўлади. Функционал қаторнинг қолдиғи $\varphi_n(x) = S(x) - S_n(x)$ ни баҳолаш учун (10) сонли қаторнинг қолдиғи $R_n = S - S_n$ ни баҳолаймиз. Маълумки,

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}, \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 1$$

ва

$$R_n = S - S_n = \frac{1}{2^n}.$$

Берилган функционал қатор қолдиғи $\varphi_n(x)$ (10) сонли қаторнинг R_n қолдиғидан катта бўла олмайди. Шунинг учун $\varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$ бўлади. $\varphi_n(x) < 0{,}01$ тенгсизлик ўринли бўлиши учун $\frac{1}{2^n} < 0{,}01$ тенгсизликни ечамиз. Бу ҳолда $2^n > 100$ бўлиб, $n \geqslant 7$ бўлади. ▲

Қуйидаги функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

986. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$

987. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

988. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

989. $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x^2)^n$.

990. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n}$.

991. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

992. $\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt[3]{\sin^n x}$

993. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

994. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Қуйидаги даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусларини ва яқинлашиш интервалларини топинг. Яқинлашиш интервалининг чегараларида қатор яқинлашишини текширинг:

995. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

996. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n}$.

997. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

998. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$.

999. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

1000. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)}{3^{n+1}}$.

1001. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$,

1002. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

1003. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

1004. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

1005. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}$.

1006. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$.

1007. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} x^{2n}$.

1008. $\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{n^2}$.

1009. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

1010. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^n}$.

1011. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n x}{n^2}$.

1012. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos^2 x}$.

1013. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n}+n}$.

1014. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{5n}$ функция x нинг ҳар қандай қийматларида узлуксиз эканини кўрсатинг.

1015. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ функция сонлар ўқида узлуксиз ва узлуксиз ҳосилага эга эканлигини кўрсатинг.

1016. $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^3 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^3 x}{n^2} + \ldots$ функционал қаторни $(-\infty;\ \infty)$ да ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкинми?

1017. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n!}$ функционал қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкинми?

1018. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ функциянинг $(-\infty;\ \infty)$ оралиқдаги ҳар қандай x нуқтада дифференциалланувчи ва $f(x) = f'(x) = e^x$ эканини кўрсатинг.

3. Тейлор ва Маклорен қаторлари

Маълумки, $x = x_0$ нуқта атрофида $(n+1)$-тартибгача барча ҳосилаларга эга бўлган $f(x)$ функция учун Тейлор формуласи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x), \qquad (1)$$

бунда $R_n(x)$ — қолдиқ ҳад бўлиб,

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)),\ 0 < \theta < 1. \qquad (2)$$

Агар $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқта атрофида исталган тартибдаги ҳосилаларга эга бўлса, (1) да n чексизликка интилганда $(n \to \infty)$ $R_n(x)$ нолга интилса $(R_n(x) \to 0)$, у ҳолда (1) дан x нинг $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ бўлгандаги қийматлари учун $f(x)$ функцияга яқинлашувчи қуйидаги

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots \quad (3)$$

қатор ҳосил бўлади. (3) қатор *Тейлор қатори* дейилади.

$x_0 = 0$ бўлганда (3) дан қуйидаги

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots \quad (4)$$

қатор ҳосил бўлади ва бу қатор *Маклорен қатори* дейилади. Агар $f(x)$, $\varphi(x)$ функцияларнинг $x = 0$ нуқта атрофида x нинг даражалари бўйича Маклорен қаторига ёйилмаси

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots$$

кўринишда бўлса, у ҳолда $f(x)\varphi(x)$ кўпайтманинг $x = 0$ нуқта атрофида x нинг даражалари бўйича ёйилмаси

$$f(x)\,\varphi(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\,x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\,x^2 + \\ + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)\,x^n + \ldots \quad (5)$$

кўринишда бўлади. $f(x) = \varphi(x)$ бўлган ҳолда

$$(f(x))^2 = a_0^2 + 2\,a_0 a_1 x + (2\,a_0 a_2\, a_1^2)\,x^2 + \\ + (2\,a_0 a_3 + 2\,a_1 a_2)x^3 + \ldots . \quad (6)$$

Кўп учрайдиган баъзи элементар функцияларнинг даражали қаторларга ёйилмаларини келтирамиз.

1°. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$
$(-\infty < x < \infty)$,

2°. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$
$(-\infty < x < \infty)$,

3°. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$
$(-\infty < x < \infty)$,

4°. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$
$(-1 < x \leqslant 1)$,

5°. $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$
$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

$$6^\circ\ \arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots +$$

$$+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots (-1 < x < 1),$$

$$7^\circ.\ (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots (-1 < x < 1)$$

бўлиб, бу қатор *биномиал қатор* дейилади.

1019. $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$ функцияни $x = 2$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

Δ Берилган функция ҳосилаларини ва $x = 2$ нуқтадага қийматларини топамиз:

$$f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}, \qquad f(2) = \sin\frac{2\pi}{4} = 1,$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'(2) = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4^2}\sin\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi^2}{4^2}\sin\left(\frac{\pi x}{4} + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(2) = \frac{\pi^2}{4^2}\sin\left(\frac{2\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{\pi^2}{4^2},$$

$$f'''(x) = -\frac{\pi^3}{4^3}\cos\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi^3}{4^3}\sin\left(\frac{\pi x}{4} + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(2) = \frac{\pi^3}{4^3}\sin\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{\pi^4}{4^4}\sin\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi^4}{4^4}\sin\left(\frac{\pi x}{4} + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{\mathrm{IV}}(2) = \frac{\pi^4}{4^4}\sin\left(\frac{2\pi}{4} + 2\pi\right) = \frac{\pi^4}{4^4},$$

. . . .

$$f^{(2k)}(x) = \frac{\pi^{2k}}{4^{2k}}\sin\left(\frac{\pi x}{4} + 2k\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(2k)}_{(2)} = \frac{\pi^{2k}}{4^{2k}}\sin\left(\frac{2\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}},$$

$$f^{(2k+1)}(x)=\frac{\pi^{2k+1}}{4^{2k+1}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(2k+1)}(2)=\frac{\pi^{2k+1}}{4^{2k+1}}\sin\left(\frac{2\pi}{4}+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)=0.$$

Топилганларни (1) формулага қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1-\frac{\pi^2}{4^2}\frac{(x-2)^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4^4\cdot 4!}(x-2)^4-$$

$$-\ldots+(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}\cdot(2k)!}(x-2)^{2k}+R_{2k+1}^{(x)}.$$

Ушбу

$$1-\frac{\pi^2}{4^2\cdot 2!}(x-2)^2+\frac{\pi^4}{4^4\cdot 4!}(x-2)^4-\ldots+$$

$$+(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}(2k)!}(x-2)^{2k}+\ldots$$

қаторни қараймиз. Бу даражали қаторнинг яқинлашиш интервалини Даламбер аломати ёрдамида топамиз:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{2k+2}}{u_{2k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\pi^{2k+2}(x-2)^{2k+2}}{4^{2k+2}(2k+2)!}\cdot\frac{4^{2k}(2k)!}{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}\right|=$$

$$=\frac{\pi^2}{4^2}(x-2)^2\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=0<1$$

бўлгани учун x нинг барча қийматларида юқоридаги қатор яқинлашувчи, яъни қаторнинг яқинлашиш интервали $(-\infty;\ \infty)$ дан иборат. Энди Тейлор формуласидаги

$$R_{2k+1}\ \frac{\pi^{2k+1}(x-2)^{2k+1}}{4^{2k+1}(2k+1)!}\sin\left(\frac{\pi\xi}{4}+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

қолдиқ ҳадни текширамиз.

Ҳар қандай k ва ξ учун $\left|\sin\left(\frac{\pi\xi}{4}+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1,$

$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}=0$ ўринли. Ҳар қандай чекли x учун

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(x-2)^{2k+1}}{(2x+1)!}=0.$$

Бу ҳолда.

$$\lim_{k\to\infty} R_{2k+1}(x)=0.$$

Демак, берилган $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ функция исталган тартибдаги ҳосилага эга ва $\lim\limits_{k\to\infty} R_{2k+1}(x)=0$ бўлгани учун бу функция $(x-2)$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйилади:

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1-\frac{\pi^2}{4^2\cdot 2!}(x-2)^2+\frac{\pi^4}{4^4\cdot 4!}(x-2)^4-\ldots+$$
$$+(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}\cdot(2k)!}(x-2)^{2k}+\ldots . \ \blacktriangle$$

1020. $f(x)=\frac{1}{x}$ функцияни $x=-3$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

$\triangle$ Берилган $f(x)=\frac{1}{x}$ функциянинг ҳосилаларини ва ҳосилаларнинг $x=-3$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}, \qquad f(-3)=-\frac{1}{3},$$
$$f'(x)=-1\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}, \qquad f'(-3)=-\frac{1}{3^2},$$
$$f''(x)=1\cdot 2x^{-3}=\frac{2!}{x^3}, \qquad f''(-3)=-\frac{2!}{3^3}.$$
$$f'''(x)=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}=-\frac{3!}{x^4}, \qquad f'''(-3)=-\frac{3!}{3^4}.$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad f^{(n)}(-3)=-\frac{n!}{3^{n+1}},$$

. . . .

Топилганларни (3) га қўйсак, $f(x)=\frac{1}{x}$ функция учун Тейлор қатори

$$-\frac{1}{3}-\frac{1!}{3^2}\cdot\frac{x+3}{1!}-\frac{2!}{3^3}\cdot\frac{(x+3)^2}{2!}-\ldots-$$
$$-\frac{n!}{3^{n+1}}\cdot\frac{(x+3)^n}{n!}-\ldots=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{x+3}{3}+\right.$$
$$\left.+\frac{(x+3)^2}{3^2}+\ldots+\frac{(x+3)^n}{3^n}+\ldots\right)$$

кўринишда бўлади. Бу қаторнинг яқинлашиш интервалини Даламбер аломати бўйича топамиз:

$$u_n(x) = \frac{(x+3)^n}{3^n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(x+3)^{n+1}}{3^{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(x+3)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|}{3} = \frac{|x+3|}{3} < 1.$$

Бундан $|x+3| < 3 \Longleftrightarrow -3 < x+3 < 3$; $-6 < x < 0$. Интервалнинг чегараларида, яъни $x = -6$, $x = 0$ да мос равишда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

$$1 + 1 + 1 + \ldots$$

узоқлашувчи қаторлар ҳосил бўлади.

Демак, қаторнинг яқинлашиш интервали $(-6;\ 0)$ бўлади. Топилган қаторда

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

эканини осонгина исбот қилиш мумкин. Шундай қилиб,

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{x+3}{3} + \frac{(x+3)^2}{3^2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(x+3)^n}{3^n} + \ldots\right). \quad \blacktriangle$$

1021. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ функцияни x нинг даражалари бўйича Маклорен қаторига ёйинг.

$\triangle$ $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ касрни содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

У ҳолда 7° га асосан:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{x^n}{2^n} + \ldots\right) = -\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3} - \ldots - \frac{x^n}{2^{n+1}} - \ldots,$$

$$(-2 < x < 2)$$

$$\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{1-x}=-(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)=$$
$$=-1-x-x^2-\ldots-x^n-\ldots,\ (-1<x<1).$$

Қаторларни ҳадма-ҳад айириш натижасида қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\ldots+$$
$$+\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n+\ldots,\ -1<x<1.\ \blacktriangle$$

1022. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+3x}{1-x}}$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг.

$\triangle$ Маълумки,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ -1<x<1.$$

У ҳолда

$$\ln(1+3x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^n}{n}\quad\left(-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}\right).$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x<1),$$

$$\ln\sqrt{\frac{1+3x}{1-x}}=\frac{1}{2}(\ln(1+3x)-\ln(1-x))=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1}3^n+1)\frac{x^n}{n}\left(-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}\right).\quad\blacktriangle$$

1023. $f(x)=e^{-x}\sin x$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг.

$\triangle$ Маълумки,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ (-\infty<x<\infty),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$
$$(-\infty<x<\infty).$$

У ҳолда

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

(5) формулага асосан:

$$e^{-x}\sin x=\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\right.$$

$$\left.+\ldots\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)=$$

$$=x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{40}x^5+\ldots\ (-\infty<x<\infty).\ \blacktriangle$$

Қуйидаги функцияларни $x-x_0$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйинг:

1024. $f(x)=\frac{1}{x};\ x_0=3.$

1025. $f(x)=x^3-3x;\ x_0=1.$

1026. $f(x)=\ln(x+2);\ x_0=1.$

1027. $f(x)=x^4-4x^2;\ x_0=-2.$

1028. $f(x)=\cos x;\ x_0=\frac{\pi}{4}.$

1029. $f(x)=e^x;\ x_0=-2.$

Қуйидаги функцияларни x нинг даражалари бўйича Маклорен қаторига ёйинг:

1030. $f(x)=5^x.$

1031. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}.$

1032. $f(x)=\sin^2 x.$

1033. $f(x)=\ln(10+x).$

1034. $f(x)=\frac{3}{(1-x)(1+2x)}.$

1035. $f(x)=\sin^2 x\cos^2 x.$

1036. $f(x)=(1+x)e^{-x}.$

1037. $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}.$

1038. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$

1039. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}.$

1040. $f(x)=\ln(1+3x+2x^2).$

1041. Биномиал қатор ёрдами билан $|x|<1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots+$$

$$+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}x^{2n}+\ldots$$

эканини кўрсатинг ва қаторни ҳадма-ҳад интеграллаб, $\arcsin x$ учун қатор ёзинг.

1042. Биномиал қатор ёрдами билан $|x| < 1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \ldots$$

эканлигини кўрсатинг ва қаторни ҳадма-ҳад интеграллаб $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ функция учун қатор ёзинг

4. Қаторнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи

Функцияни қаторга ёйиш ёрдамида функциянинг тақрибий қийматини исталганча аниқликда ҳисоблаш мумкин. Агар $f(x)$ функция x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилган бўлса, функциянинг бирор $x = x_0$ нуқтадаги тақрибий қийматини топиш учун

1) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_0^k$ топилади;

2) $R_n = s - s_n$ қолдиқ баҳоланади.

Агар абсолют хато $\delta = |A - a| \leqslant \frac{1}{10^n}$ бўлса, a сони A нинг $\frac{1}{10^n}$ гача аниқликдаги тақрибий қиймати бўлади.

1043. $\ln 2$ ни 10^{-5} гача аниқликда ҳисобланг.

Δ Логарифмларни тақрибий ҳисоблашда қуйидаги формулалардан фойдаланиш қулай:

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right),$$

$$\log(N+1) = \log N + \frac{2}{\ln 10}\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \ldots\right),$$

N — натурал сон.

$N = 1$ бўлганда,

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}} + \ldots\right).$$

R_{n+1} қолдиқ ҳадни баҳолаймиз:

$$R_{n+1} = 2\left(\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{3^{2n+5}} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{2}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2\cdot 9}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}\cdot 8} = \frac{1}{4\,(2n+3)\cdot 3^{2n+1}} < 10^{-5}.$$

Бундан $4\,(2n+3)\cdot 3^{2n+1} > 10^5$ ва бу тенгсизлик $n = 4$ бўлганда ўринли бўлади. Шундай қилиб,

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}\right) \approx 0{,}69314;$$

$$\ln 2 \approx 0{,}69314. \quad \blacktriangle$$

1044. $\ln 1{,}1$ ни 10^{-4} гача аниқликда ҳисобланг.

$\triangle$ Маълумки,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots;$$

$$-1 < x \leqslant 1.$$

$x = 0{,}1$ деб олсак,

$$\ln 1{,}1 = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4} + \ldots .$$

Бу қатор ишоралари алмашинувчи Лейбниц қатори. Қатор 4- ҳадининг абсолют қиймати 10^{-4} дан кичик бўлгани сабабли $\ln 1{,}1$ ни 10^{-4} гача аниқликда ҳисоблаш учун қаторнинг учта ($n = 3$) ҳадини олиш етарлидир. Демак,

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{3} \approx 0{,}0953; \quad \ln 1{,}1 \approx 0{,}0953. \quad \blacktriangle$$

1045. $e^{0,1}$ ни 10^{-3} гача аниқликда ҳисобланг.

$\triangle$ Маълумки,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!}\,e^{\xi}, \quad 0 < \xi < x.$$

$x = 0{,}1$ деб олсак, $e^{\xi} < e^{0,1} < \mathrm{e} < 3$ бўлади. У ҳолда $R_n < \frac{3}{10^n\cdot n!} < 0{,}001$ тенгсизлик $n = 3$ бўлганда ўринли.

Шундай қилиб, $e^{0,1}$ ни 10^{-3} гача аниқликда ҳисоблаш учун қаторнинг учта ҳадини олиш кифоя, яъни

$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} \approx 1,105, \quad e^{0,1} \approx 1,105. \quad \blacktriangle$$

1046. $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ нтегрални 0,0001 гача аниқликда тақрибий ҳисобланг.

$\triangle$ Маълумки,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Бу тенгликда x ни $\sqrt{x}$ билан алмаштирсак,

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \\ + \ldots \ (x \geqslant 0)$$

ҳосил бўлади. Бу тенгликнинг иккала томонини 0 дан 1 гача чегараларда интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2!\cdot 2} + \frac{x^3}{4!\cdot 3} - \frac{x^4}{6!\cdot 4} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!\cdot 2} + \frac{1}{4!\cdot 3} - \frac{1}{6!\cdot 4} + \ldots .$$

Ҳосил бўлган ишоралари алмашинувчи қатор 5- ҳадининг абсолют қиймати 0,0001 дан кичик бўлганлиги сабабли қаторнинг биринчи 4 та ҳадини олиш кифоя. Демак,

$$\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} \approx 0,7635,$$

$$\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx \approx 0,7635. \quad \blacktriangle$$

1047. $\sqrt[3]{130}$ ни 0,0001 гача аниқликда тақрибий ҳисобланг.

$\triangle$ Бизга маълум бўлган

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots ; \ -1 < x < 1,$$

биноминал қатордан фойдаланамиз:

$\sqrt[3]{130}$ ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{125+5}=\sqrt[3]{125\left(1+\frac{1}{25}\right)}=5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$n=\frac{1}{3}$ бўлса, биноминал қатор қуйидаги

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4+\ldots$$

кўринишда бўлади. Ҳосил бўлган қаторда x нинг ўрнига $\frac{1}{25}$ ни қўйсак, ишоралари алмашинувчи қуйидаги

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3\cdot 5^2}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}-\ldots$$

сонли қатор ҳосил бўлади. Илдизнинг қийматини 0,0001 гача аниқликда тақрибий ҳисоблаш учун қаторнинг 3 та ҳадини олиш кифоя. Ҳақиқатан, қаторнинг 5 та кўпайтирилган тўртинчи ҳади учун

$$\frac{5\cdot 1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}=\frac{1\cdot 2}{3^3\cdot 6\cdot 5^4}=\frac{1}{81\cdot 625}<0{,}0001$$

тенгсизлик ўринли. Демак,

$$\sqrt[3]{130}\approx 5\left(1+\frac{1}{3\cdot 5^2}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4}\right)\approx 5{,}0000+0{,}0667-$$

$$-0{,}0009=5{,}0658;\quad \sqrt[3]{130}\approx 5{,}0658.\ \blacktriangle$$

1048. $\sin 5^\circ$ ни 10^{-6} гача аниқликда тақрибий ҳисобланг.

$\triangle$ Маълумки,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots.$$

5° радиан ҳисобида $\frac{\pi}{36}\left(\frac{2\pi}{360}\cdot 5=\frac{\pi}{36}\right)$ бўлганлиги учун

$$\sin\frac{\pi}{36}=\frac{\pi}{36}-\frac{\pi^3}{3!\cdot 36^3}+\frac{\pi^5}{5!\cdot 36^5}-\ldots \text{ бўлади.}$$

Қаторнинг учинчи ҳадини баҳолаймиз:

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5 < \frac{1}{5!}(0,1)^5 = \frac{1}{120}\cdot 10^{-5} = \frac{5}{6}\,10^{-7}.$$

Бу ҳолда, $\sin 5^\circ$ ни тақрибий ҳисоблашда қаторнинг иккита ҳади билан чегаралансак, қилинган хато $\frac{5}{6}10^{-7}$ дан кичик бўлади. Шунинг учун

$$\sin\frac{\pi}{36} \approx \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\pi^3}{36^3} \approx 0,0872665 - 0,0001107 =$$
$$= 0,0871558; \quad \sin\frac{\pi}{36} \approx 0,0871558. \ ▲$$

Қуйидаги ифодаларни берилган аниқликкача тақрибий ҳисобланг:

1049. $\ln 5$ (0,001). **1050.** $\ln 17$ (0,001).
1051. $\log 101$ (0,0001). **1052.** $\sqrt[3]{30}$ (0,001).
1053. $\sqrt[3]{10}$ (0,001). **1054.** $\sqrt[5]{250}$ (0,001).
1055. $\cos 10^\circ$ (0,0001). **1056.** $\sin 0,4$ (0,001).
1057. $\sin 18^\circ$ (0,001). **1058.** $\operatorname{arctg} 0,2$ (0,0001).
1059. $\sqrt{e}$ (0,001). **1060.** $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ (0,001).

Қуйидаги интегралларни 0,001 гача аниқликда тақрибий ҳисобланг:

1061. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$. **1062.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1063. $\int_0^1 \sin x^2 dx$. **1064.** $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

1065. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$. **1066.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{x^2}{4}\,dx$.

1067. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3}\,dx$. **1068.** $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$.

5. Комплекс ҳадли қаторлар

1. Комплекс ҳадли сонли қаторлар. Ҳадлари комплекс сонлардан иборат бўлган

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \qquad (1)$$

қатор *комплекс ҳадли сонли қатор* дейилади. Бунда $c_n = a_n + ib_n$ бўлиб, a_n, b_n ҳақиқий сонлар. $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ ифода (1) қаторнинг *хусусий йиғиндиси* дейилади.

Агар $n \to \infty$ да S_n хусусий йиғинди биргина чекли S сонга интилса ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$), (1) қатор *яқинлашувчи*, акс ҳолда *узоқлашувчи* дейилади.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$$

комплекс ҳадли қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сонли қаторларнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир. (1) қатор ҳадларининг модулларидан қуйидаги қаторни тузамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = |c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| + \ldots . \qquad (2)$$

Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор *абсолют яқинлашувчи қатор* дейилади. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, (2) қатор узоқлашувчи бўлса, (1) қатор *шартли яқинлашувчи қатор* дейилади. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \qquad (3)$$

Таъкидлаб ўтамизки, (3) шарт қатор яқинлашиши учун фақат зарурий шарт бўлиб, етарли шарт эмас.

Даламбер аломати. Агар

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l$$

бўлиб,

а) $l < 1$ бўлса, (1) қатор яқинлашувчи,
б) $l > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи,
в) $l = 1$ бўлса, шубҳали хол бўлади.

Коши аломати. Агар

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$$

бўлиб,

а) $l < 1$ бўлса, (1) қатор яқинлашувчи,

б) $l > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи,

в) $l = 1$ бўлса, шубҳали хол бўлади.

II. Комплекс ҳадли даражали қаторлар. Қуйидаги кўринишдаги

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \tag{4}$$

қатор *комплекс ҳадли даражали қатор* дейилади, бунда $c_n = a_n + ib_n$ комплекс сонлар, $z = x + iy$ — комплекс ўзгарувчи ($n = 0, 1, 2, \dots$). (4) қатор учун маркази координата бошида бўлган R радиусли доира мавжудки, бу доирада ($|z| < R$). (4) қатор яқинлашувчи, доира ташқарисида ($|z| > R$) эса қатор узоқлашувчи бўлади. Бу доира *яқинлашиш доираси*, R эса яқинлашиш *радиуси* дейилади.

Баъзи функцияларнинг даражали қаторга ёйилмаларини келтирамиз:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots.$$

Бу ёйилмалардан фойдаланиб, Эйлер формулаларини келтириб чиқариш мумкин:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Қуйидаги комплекс ҳадли сонли қаторларнинг яқинлашишини текширинг:

1069. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i \frac{1}{n^2} \right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+i)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3i-1)^n}{5^n}$.

△ а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i\,\frac{1}{n^2}\right)$ қаторда $a_n=\frac{1}{n},\ b_n=\frac{1}{n^2}$.

Маълумки, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоник қатор узоқлашувчи бўлгани учун берилган қатор узоқлашувчи бўлади. ▲

△ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,(n+i)}$ қаторни қуйидагича текширамиз:

$$|c_n|=\frac{1}{\sqrt{n}\,|n+i|}=\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n^2}}=$$

$$=\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Маълумки, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ $(p>1)$ қатор яқинлашувчи, демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи. ▲

△ в) Даламбер аломатга асосан:

$$c_n=\frac{n(3i-1)^n}{5^n},\quad c_{n+1}=\frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}}{5^{n+1}},$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n(3i-1)^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3i-1)}{5n}\right|=\frac{|3i-1|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{|3i-1|}{5}=$$

$$=\frac{\sqrt{9+1}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}<1.$$

Демак, Даламбер аломатига асосан, берилган қатор абсолют яқинлашувчи. ▲

Қуйидаги даражали қаторнинг яқинлашишини текширинг:

1070. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n(\sqrt{n-1}-i)\,z^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+i)^n}(z-i)^n$.

△ а) Даламбер аломатига асосан:

$$u_n=2^n(\sqrt{n-1}-i)\,z^n,\quad u_{n+1}=2^{n+1}(\sqrt{n}-i)\,z^{n+1},$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(\sqrt{n}-i)z^{n+1}}{2^n(\sqrt{n-1}-i)z^n}\right|=$$

$$=2|z|\lim\left|\frac{\sqrt{n}-i}{\sqrt{n-1}-i}\right|=2|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\sqrt{n}-i)(\sqrt{n-1}+i)}{(\sqrt{n-1}-i)(\sqrt{n-1}+i)}\right|=$$

$$=2|z|\lim_{n\to\infty}\frac{|(1+\sqrt{n(n-1)})+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})i|}{n}=$$

$$=2|z|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=2|z|<1;\ |z|<\frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб, $|z|<\frac{1}{2}$ доирада қатор абсолют яқинлашувчи. Қаторнинг яқинлашишини доиранинг чегарасида текшириб кўрамиз.

$z=\frac{1}{2}$ бўлганда, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n-1}-i)$ қатор узоқлашувчи бўлади, чунки

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-i)\not\to 0.\ \blacktriangle$$

△ б) Коши аломатига асосан:

$$u_n=\frac{1}{(in)^n},$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|in|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Демак, берилган қатор бутун комплекс текисликда яқинлашувчи. ▲

△ в) Даламбер аломатига асосан:

$$u_n=\frac{1}{n^2(1+i)^n}(z-i)^n,\ u_{n+1}=\frac{(z-i)^{n+1}}{(n+1)^2(1+i)^{n+1}},$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-i)^{n+1}}{(n+1)^2(1+i)^{n+1}}\cdot\frac{n^2(1+i)^n}{(z-i)^n}\right|=$$

$$=\left|\frac{z-i}{1+i}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{|z-i|}{\sqrt{2}}<1,\ |z-i|<\sqrt{2}.$$

Демак, берилган қатор маркази $z=i$ нуқтада, радиуси $R=\sqrt{2}$ бўлган доира ичида абсолют яқинлашувчи бўлади. ▲

Қуйидаги комплекс ҳадли сонли қаторларнинг яқинлашишини текширинг.

1071. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}$. **1072.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$.

1073. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-2i}{1+\sqrt{n}}$. **1074.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}$.

1075. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$. **1076.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-i}{n+1}$.

1077. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-i)^n}{n \cdot 10^n}$. **1078.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$.

1079. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$. **1080.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(e-i)^n}$.

Қуйидаги комплекс ҳадли даражали қаторларнинг яқинлашишини текширинг:

1081. $\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^n$. **1082.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$.

1083. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\ z^n$. **1084.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^2}{n^2}$.

1085. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. **1086.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^{2n}} z^n$.

1087. $\sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n$. **1088.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

VIII боб

ҚЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ (АРГУМЕНТЛИ) ФУНКЦИЯЛАР

1- §. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

1. Кўп ўзгарувчили функция таърифи. Юксаклик чизиғи ва юксаклик сирти

Агар D соҳадаги x ва y эркли ўзгарувчиларнинг ҳар бир $(x;\ y)$ жуфтига бирор усул ёки қонун бўйича ўзгарувчининг Z соҳадаги маълум бир қиймати мос келтирилса, у ҳолда z ўзгарувчи D соҳадаги x, y *эркли ўзгарувчиларнинг функцияси* дейилади ва қуйидаги белгилардан бири орқали белгиланади:

$z = f(x;\ y)$, $z = z(x;\ y)$, $z = \varphi(x;\ y)$ ва ҳ. к. бунда x, y лар эркли ўзгарувчилар ёки аргументлар, D — функциянинг *аниқланиш соҳаси*, Z эса функциянинг *қийматлар тўплами* дейилади.

Маълумки, сонларнинг ҳар бир $(x;\ y)$ жуфтига Oxy текисликнинг ягона $P(x;\ y)$ нуқтаси мос келади ва аксинча, шу сабабли икки ўзгарувчили функцияни $P(x;\ y)$ нуқтанинг функцияси сифатида қараш мумкин, яъни $f(P)$.

Икки ўзгарувчили функция таърифини $n = 3$ бўлган ҳол учун ҳам осонгина умумлаштириш мумкин.

Агар E соҳадаги x, y, z эркли ўзгарувчиларнинг ҳар бир $(x,\ y,\ z)$ учлигига бирор қонун ёки қоидага кўра u ўзгарувчининг W соҳадаги маълум бир қиймати мос келтирилса, у ҳолда u ўзгарувчи E соҳадаги x, y, z эркли ўзгарувчиларнинг *уч аргументли функцияси* дейилади ва $u = f(x,\ y,\ z)$ деб ёзилади.

Oxy текисликдаги $f(x;\ y) = c$ тенгликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами $z = f(x;\ y)$ функциянинг *юксаклик (сатҳ) чизиғи* дейилади.

Фазодаги $f(x;\ y;\ z) = c$ тенгликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами $u = f(x;\ y;\ z)$ функциянинг *юксаклик сирти (эквипотенциал сирти)* дейилади, бу ерда c — берилган ўзгармас сон.

2. Кўп ўзгарувчили функциянинг лимити ва узлуксизлиги

$z = f(x;\ y)$ функция бирор D соҳада аниқланган бўлсин. Текисликдаги

$$\overline{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $M(x;\ y)$ нуқталар тўплами $M_0(x_0;\ y_0)\in D$ *нуқтанинг* δ *атрофи* дейилади.

Агар исталган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилиб, $\overline{MM_0}<\delta$ тенгсизлик қаноатланадиган барча $P(x;\ y)$ нуқталар учун

$$|f(x;\ y)-A|<\varepsilon\quad (|f(P)-A|<\varepsilon)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, ўзгарувчи $P(x;\ y)$ нуқта $P_0(x_0;\ y_0)$ нуқтага интилганда ($x\to x_0$, $y\to y_0$ да) $f(x;\ y)$ ($f(P)$) функция A лимитга интилади дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\ y)=A$$

ёки

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

Агар $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\ y)=f(x_0;\ y_0)$ ёки $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$ тенглик ўринли бўлса, $f(x;\ y)$ функция $P_0(x_0;\ y_0)$ *нуқтада узлуксиз* дейилади.

Агар $z=f(x;\ y)=f(P)$ функция

1) $f(P)$ функция P_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган;

2) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ лимит мавжуд;

3) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$ бўлса, бу функция P_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

D соҳанинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлган функция шу *соҳада узлуксиз* дейилади.

Агар юқоридаги учта шартдан бирортаси ўринли бўлмаса, P_0 нуқта $f(P)$ функциянинг *узилиш нуқтаси* дейилади.

1089. Учбурчакнинг периметри $2P$ берилган. Учбурчакнинг икки томонини x ва y деб, унинг юзи S ни шу томонларнинг функцияси сифатида аниқланг.

△ Масаланинг шартига асосан:

$$a=x,\ y=b,\ c=2p-a-b=2p-x-y;$$

$$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(a, b, c — учбурчак томонлари, p — ярим периметр).

Герон формуласига кўра

$$S_\Delta=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)},$$

яъни учбурчакнинг S юзи $x;\ y$ нинг функциясидир. ▲

1090. $f(x;\ y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ бўлса, $f(1;\ 2)$, $f(-3;\ 5)$, $f(a;\ b)$, $f\left(a;\ \dfrac{1}{a}\right)$, $f(y,\ x)$ ларни топинг.

$\triangle$ $f(1;\ 2)=\dfrac{1+2}{1-2}=-3, \quad f(-3;\ 5)=\dfrac{-3+5}{-3-5}=$ $=\dfrac{2}{-8}=-\dfrac{1}{4}$, $f(a;\ b)=\dfrac{a+b}{a-b}$,

$$f\left(a;\ \frac{1}{a}\right)=\frac{a+\frac{1}{a}}{a-\frac{1}{a}}=\frac{a^2+1}{a^2-1}, \quad f(y;\ x)=\frac{y+x}{y-x}. \ \blacktriangle$$

1091. $f(x;\ y;\ z)=\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ бўлса, $f(0;\ 2;\ -3)$, $f\left(x;\ \dfrac{1}{x};\ \dfrac{1}{x^2}\right)$ ларни топинг.

$\triangle$ $f(0;\ 2;\ -3)=\dfrac{0+2-3}{0^2+2^2+(-3)^2}=-\dfrac{1}{13}$. $y=\dfrac{1}{x}$, $z=\dfrac{1}{x^2}$ деб олсак, у ҳолда

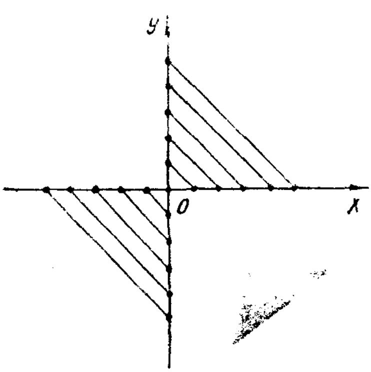
$$f(x;\ y;\ z)=f\left(x;\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2}\right)=\frac{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{x^2\,(x^3+x+1)}{x^6+x^2+1}. \ \blacktriangle$$

1092. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг.

а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$; б) $z=\sqrt{(1+x)(y-4)}$;

в) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+$ $+\ln(4-x^2-y^2)$;

г) $z=\arcsin(x+y)$.



64-чизма

$\triangle$ а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $xy>0$ шартдан келиб чиқади, бу тенгсизлик эса

$$\left.\begin{matrix}x>0\\ y>0\end{matrix}\right\} \text{ ёки } \left.\begin{matrix}x<0\\ y<0\end{matrix}\right\}$$

бўлганда ўринли (64-чизма). Координата ўқлари соҳага кирмайди. $\blacktriangle$

Δ б) Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $(1+x)(y-4) \geqslant$ $\geqslant 0$ шартдан топилади. Бу тенгсизлик эса қуйидаги шартлар бажарилганда тўғри бўлади:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} 1+x \geqslant 0, \\ y-4 \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geqslant -1, \\ y \geqslant 4 \end{array}\right\}$$

ёки

$$2)\ \left.\begin{array}{l} 1+x \leqslant 0 \\ y-4 \leqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \leqslant -1 \\ y \leqslant 4 \end{array}\right\}$$

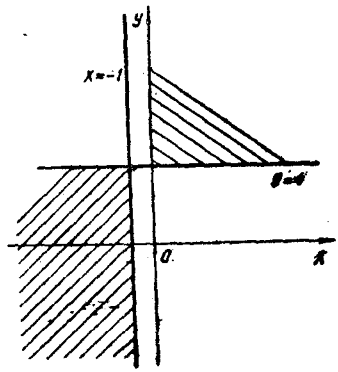
(65- чизма). ▲

Δ в) Биринчи қўшилувчининг аниқланиш соҳаси x^2+y^2- $-1 \geqslant 0$ шартдан, иккинчи қўшилувчининг аниқланиш соҳаси $4-x^2-y^2>0$ шартдан келиб чиқади.

Бу ҳолда функциянинг аниқланиш соҳаси

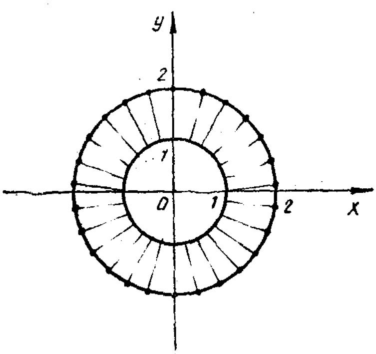
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 \geqslant 1, \\ x^2+y^2 < 4 \end{array}\right\}$$

ҳалқадан иборат (66- чизма), бунда ҳалқага $x^2+y^2=1$ айланадаги нуқталар кирмайди. ▲

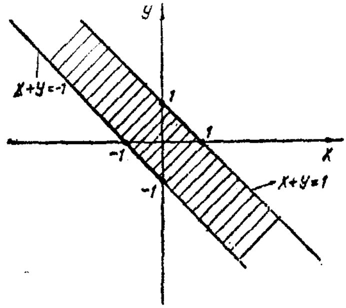


65- чизма

Δ г) $z=\arcsin(x+y)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $-1 \leqslant x+y \leqslant 1$ шартдан келиб чиқади, яъни берилган z функциянинг аниқланиш соҳаси Oxy координата текислиги-



66- чизма



67- чизма

нинг $x+y-1=0$, $x+y+1=0$ параллел тўғри чизиқлар орасидаги қисмидан иборат (67-чизма). ▲

1093. Лимитни топинг:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}.$$

△ $x=0$, $y=0$ бўлганда $\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ касрнинг сурат ва махражи нолга тенг бўлиб, $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлади. $P(x;\ y)$ нуқта $P_0(0;\ 0)$ нуқтага интилганда ($x\to 0$, $y\to 0$) $\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ функциянинг лимитини топиш талаб қилинади. Бу нуқталар орасидаги масофа

$$PP_0=\rho=\sqrt{x^2+y^2}\quad \begin{pmatrix} x\to 0 & \\ y\to 0 & \text{да}\ \rho\to 0\end{pmatrix}.$$

У ҳолда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{\rho^2+1}-1}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{(\sqrt{\rho^2+1}-1)(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2+1-1}{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}+1}=\frac{1}{2}.\ ▲$$

1094. $z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ функция $O(0;\ 0)$ нуқтада лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

△ Фараз қилайлик, ўзгарувчи $P(x;\ y)$ нуқта $y=kx$ тўғри чизиқ бўйича $O(0;\ 0)$ нуқтага яқинлашсин. Бу тўғри чизиқ бўйича $z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ функциянинг қиймати ўзгармас бўлади. Ҳақиқатан $y=kx$ бўлганда, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

Шунинг учун

$$\lim_{\substack{P\to 0\\ y=kx\\ \text{бўйича}}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

Лекин P нуқта O нуқтага Ox ($k = 0$) бўйлаб яқинлашадиган бўлса,

$$\lim_{\substack{P\to 0\\ y=0\\ \text{бўйича}}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2k}{1+k^2} = 0.$$

P нуқта O нуқтага $y = x$ ($k = 1$) тўғри чизиқ бўйлаб яқинлашадиган бўлса,

$$\lim_{\substack{P\to 0\\ y=x\\ \text{бўйича}}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2k}{1+k^2} = 1.$$

Демак, $P(x;\ y)$ нуқта O нуқтага турли йўналишлар бўйича яқинлашганда функция турли лимит қийматларга эга бўлади. Шунинг учун берилган функция $O(0;\ 0)$ нуқтада лимитга эга эмас. ▲

1095.

$$f(x;\ y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}, & \text{агар } x \neq 0,\ y \neq 0, \\ 2, & \text{агар } x = 0,\ y = 0 \end{cases}$$

бўлса, функциянинг узлуксизлигини текширинг.

△ Функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги таърифига кўра

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy+1-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{xy+1}+1) = 2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\ y) = f(0;\ 0) = 2$$

бўлгани учун берилган функция $(0,\ 0)$ нуқтада узлуксиз. ▲

1096. Доиравий конуснинг V ҳажмини унинг x ясовчиси, асоси y радиусининг функцияси сифатида аниқланг.

1097. Учбурчакнинг S юзини унинг учта x, y, z томонининг функцияси сифатида аниқланг.

1098. $f(x;\ y) = \dfrac{x-2y}{2x-y}$ бўлса, $f(1;\ 3)$, $f(1;\ 2)$, $f(2;\ 1)$, $f(a;\ a)$, $f(a;\ -a)$ ларни топинг.

1099. $f(x;\ y) = e^{\cos(x-y)}$ бўлса, $f\left(\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi;\ -\pi)$, $f(-y;\ x)$ ларни топинг.

1100. $f(x;\ y) = x + \frac{1}{x}$ бўлса, $f(x;\ y) = f\left(\frac{1}{y};\ \frac{1}{x}\right)$ тенгликни исботланг.

1101. $f(x;\ y) = \sqrt{x^2+y^2} + 2x + 3y$ бўлса, $f(kx,\ ky) = kf(x;\ y)$ тенгликни исботланг.

1102. $f(x;\ y;\ z) = \frac{x-y}{y-z}$ бўлса, $f(-x;\ -y;\ -z) = f\left(1;\ \frac{y}{x};\ \frac{z}{x}\right) = f(x;\ y;\ z)$ тенгликни исботланг.

1103. $f(x;\ y) = \ln x \ln y$ функциянинг $f(xy;\ uv) = f(x;\ u) + f(x;\ v) + f(y;\ u) + f(y;\ v)$ функционал тенгламани қаноатлантиришни текширинг.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

1104. $z = \frac{3}{x^2+y^2}$.

1105. $z = \sqrt{x+4y-5}$.

1106. $z = \sqrt{3x} - \sqrt{2y} - \sqrt{1-x-y}$

1107. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

1108. $z = \sqrt{2x} - \frac{4}{\sqrt{y}}$.

1109. $z = \frac{1}{x^2-y^2}$.

1110. $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$.

1111. $z = \arcsin\frac{y}{x}$.

1112. $z = \ln\left(1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\right)$.

1113. $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.

1114. $z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$.

1115. $z = \frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$.

1116. $z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2)$.

1117. $z = \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.

1118. $z = \arccos 2xy$.

1119. $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$.

1120. $u = \arcsin\frac{x}{2} + \arcsin\frac{y}{2} + \arcsin\frac{z}{2}$.

Қуйидаги функцияларнинг юксаклик (сатҳ) чизиқларини топинг:

1121. $z = x + y$. **1122.** $z = \frac{y}{x^2}$.

1123. $z = y - x$. **1124.** $z = x^2 - y$.

1125. $z = x^2 + y^2$. **1126.** $z = \ln(x^2 + y)$.

1127. $z = \arccos(xy)$. **1128.** $u = x + y + z$ функциянинг юксаклик сиртларини топинг.

1129. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциянинг юксаклик сиртларини топинг.

Қуйидаги лимитларни топинг:

1130. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy^2)}{xy}$. **1131.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$.

1132. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{xy}$. **1133.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$.

1134. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}$. **1135.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

1136. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ мавжудми?

Қуйидаги функцияларнинг узлуксиз ёки узлуксиз эмаслигини текширинг, агар узилиш нуқталари бўлса, улар қаерга жойлашганлигини кўрсатинг:

1137. $f(x; y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x}; & x \neq 0,\ y \neq 0, \\ 0; & x = 0,\ y = 0. \end{cases}$

1138. $f(x; y) = \begin{cases} \frac{x + y}{x - y}; & x \neq 0,\ y \neq 0; \\ 0; & x = 0,\ y = 0. \end{cases}$

1139. $f(x; y) = \frac{x + y + 1}{x^2 + y^2}$. **1140.** $f(x; y) = \frac{x^2 + 2y + 4}{y^2 - 2x}$.

1141. $f(x; y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$. **1142.** $f(x; y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$.

2-§. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАР ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР. МУРАККАБ ВА ОШКОРМАС ФУНКЦИЯ ҲОСИЛАЛАРИ

1. Хусусий ҳосилалар ва дифференциаллар

$z = f(x; y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласи деб,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x;\ y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

лимитга айтилади ва қуйидаги белгиларнинг бири билан белгиланади:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f(x;\ y)}{\partial x},\ z'_x,\ f'_x(x;\ y).$$

Худди шунингдек, $z = f(x; y)$ функциянинг y бўйича хусусий ҳосиласи деб,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;\ y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

лимитга айтилади ва қуйидаги белгиларнинг бири билан белгиланади:

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f(x;\ y)}{\partial y},\ z'_y,\ f'_y(x,\ y).$$

Хусусий ҳосилаларга қуйидагича таъриф бериш ҳам мумкин.

$z = f(x; y)$ функциянинг x бўйича хусусий ҳосиласи деб, y ни ўзгармас деб фараз қилиб, x бўйича олинган ҳосилага айтилади.

$z = f(x; y)$ функциянинг y бўйича хусусий ҳосиласи деб, x ни ўзгармас деб фараз қилиб, y бўйича олинган ҳосилага айтилади.

$z = f(x; y)$ функциянинг тўла орттирмаси

$$\Delta z = f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y) \tag{1}$$

кўринишда ёзилади. $z = f(x; y)$ функция $(x;y) \in D$ нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин, деб фараз қиламиз. Агар (1) тўла орттирмани

$$\Delta z = \frac{\partial f(x;\ y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x;\ y)}{\partial y} \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \tag{2}$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, $z = f(x; y)$ функция $(x;\ y)$ нуқтада *дифференциалланувчи* дейилади. Тўла орттирманинг Δx ва Δy га нисбатан чизиқли қисми функциянинг *дифференциали* дейилади ва dz (df) каби белгиланади, бунда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ бўлади.

Таъриф бўйича

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \ (\Delta x = dx, \ \Delta y = dy). \tag{3}$$

(2) тенгликни қуйидаги

$$\Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

кўринишда ёзамиз. У ҳолда

$$\Delta z \approx dz \tag{4}$$

ёки

$$f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) \approx f(x;\ y) + \frac{\partial f(x;\ y)}{\partial x}\, \Delta x + \frac{\partial f(x;\ y)}{\partial y}\, \Delta y \tag{5}$$

тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз, (4) ёки (5) формуладан тақрибий ҳисоблашларда фойдаланилади.

2. Мураккаб ва ошкормас функция ҳосилалари

Агар дифференциалланувчи $z = f(u, v)$ функция берилган бўлиб, ўз навбатида u, v лар бирор x ўзгарувчининг дифференциалланувчи функцияси, яъни $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ бўлса, у ҳолда x нинг мураккаб функцияси

$$z = f(\varphi(x),\ \psi(x))$$

дифференциалланувчи бўлади ва унинг ҳосиласи

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \tag{6}$$

формула орқали топилади.

Агар u, v лар x, y ларнинг функциялари, яъни

$$u = \varphi(x;\ y), \ v = \psi(x;\ y)$$

бўлса, у ҳолда

$$z = f(\varphi(x;\ y);\ \psi(x;\ y))$$

мураккаб функциянинг хусусий ҳосилалари

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

формулалар орқали топилади.

x нинг узлуксиз y функцияси

$$F(x;\ y)=0$$

тенглама билан ошкормас шаклда берилган бўлсин.

Агар $F(x;\ y)$, $F'_x(x;\ y)$, $F'_y(x;\ y)$ функциялар узлуксиз бўлиб, $F'_y(x;\ y)\neq 0$ бўлса, у ҳолда ошкормас шаклда берилган функция ҳосиласи

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y} \tag{8}$$

формула орқали топилади. Худди шунингдек, $F(x;\ y;\ z)=0$ тенглама билан берилган z ошкормас функциянинг хусусий ҳосилалари

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}\ (F'_z\neq 0) \tag{9}$$

формулалар орқали топилади.

1143. Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

а) $z=x^y+x^2y-xy^2$;

б) $f(x;\ y)=e^{-xy}$; $f'_x(1;\ 0)=?$ $f'_y(1;\ 0)=?$

в) $u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-\dfrac{z}{x}$.

$\triangle$ а) Хусусий ҳосилалар бир аргументли функцияларни дифференциаллаш учун ишлатиладиган одатдаги қоида ва формулалар ёрдамида топилади. Масалан, x бўйича хусусий ҳосилани қидиришда бошқа аргументлар ўзгармас деб қаралади.

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=(x^y+x^2y-xy^2)'_x=$$

$$=(x^y)'_x+(x^2y)'_x-(xy^2)'_x=yx^{y-1}+2xy-y^2;$$

$$z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=(x^y+x^2y-xy^2)'_y=(x^y)'_y+(x^2y)'_y-$$

$$-(xy^2)'_y=x^y\ln x+x^2-2xy. \quad \blacktriangle$$

$\triangle$ б) $z'_x=f'_x(x;\ y)=(e^{-xy})'_x=e^{-xy}(-xy)'_x=-ye^{-xy}$;

$$z'_y=f'_y(x;\ y)=(e^{-xy})'_y=e^{-xy}(-xy)'_y=-xe^{-xy};$$

$$f'_x(1;\ 0)=0,\ f'_y(1;\ 0)=-1. \quad \blacktriangle$$

Δ в) $u'_x = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{z}{x}\right)'_x = \left(\frac{x}{y}\right)'_x + \left(\frac{y}{x}\right)'_x - \left(\frac{z}{x}\right)'_x = \frac{1}{y} -$
$- \frac{y}{x^2} + \frac{z}{x^2}$; $u'_y = \left(\frac{x}{y}\right)'_y + \left(\frac{y}{x}\right)'_y - \left(\frac{z}{x}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$;
$u'_z = \left(\frac{x}{y}\right)'_z + \left(\frac{y}{x}\right)'_z - \left(\frac{z}{x}\right)'_z = -\frac{1}{x}$. ▲

1144. $z = \frac{x+y^3}{x-y}$ функциянинг дифференциалини топинг.
Δ Икки аргументли функция дифференциалини топишда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

формуладан фойдаланамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y^3)'_x \cdot (x-y) - (x-y)'_x \cdot (x+y^3)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{x - y - (x+y^3)}{(x-y)^2} = -\frac{y(1+y^2)}{(x-y)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x+y^3)'_y \cdot (x-y) - (x-y)'_y \cdot (x+y^3)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{3y^2(x-y) + x + y^3}{(x-y)^2} = \frac{3xy^2 + x - 2y^3}{(x-y)^2};$$

$$dz = -\frac{y(1+y^2)}{(x-y)^2}\,dx + \frac{3xy^2 + x - 2y^3}{(x-y)^2}\,dy. \quad ▲$$

1145. $A = (0{,}99)^{3{,}01}$ даражани тақрибан ҳисобланг.
Δ $x = 1$, $y = 3$ қийматда $f(x;\ y) = x^y$ функцияни олиб, берилган A сонни

$$(0{,}99)^{3{,}01} = (x + \Delta x)^{y+\Delta y}$$

кўринишда ёзамиз, бунда $\Delta x = -0{,}01$; $\Delta y = 0{,}01$.

$$f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) \approx f(x;\ y) + f'_x(x;\ y)\,\Delta x + f'_y(x;\ y)\,\Delta y$$

формулага асосан:

$$(x + \Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + (x^y)'_x \cdot \Delta x + (x^y)'_y \cdot \Delta y =$$

$$= x^y + yx^{y-1} \cdot \Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y;$$

$x = 1$; $y = 3$; $\Delta x = -0{,}01$; $\Delta y = 0{,}01$ қийматларда

$$(0{,}99)^{3{,}01} \approx 1 + 3(-0{,}01) + \ln 1 \cdot 0{,}01 = 1 - 0{,}03 = 0{,}97.$$

Демак, $(0{,}99)^{3{,}01} \approx 0{,}97$. ▲

1146. Қуйидаги мураккаб функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

а) $z = u^3 \sin v;\ u = \sin x,\ v = \dfrac{1}{x}$;

б) $z = u^2 \ln v;\ u = \dfrac{x}{y},\ v = xy.$

△ а) (6) формулага асосан:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} = 3u^2 \sin v \cdot \cos x +$$

$$+ u^3 \cos v\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3u^2 \sin v \cdot \cos x - \frac{u^3}{x^2}\cos v. \quad ▲$$

△ б) (7) формулага асосан:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v}\,y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v}\,x =$$

$$= -\frac{2ux}{y^2} + \frac{u^2 x}{v}. \quad ▲$$

1147. Ушбу $xe^{2y} = y \ln x + 8$ $(x > 0)$ тенглама билан берилган $y(x)$ ошкормас функция ҳосиласини топинг.

△ Берилган тенгламани

$$xe^{2y} - y \ln x - 8 = 0$$

кўринишда ёзиб, чап томонини $F(x;\ y)$ деб белгилаймиз, яъни

$$F(x;\ y) = xe^{2y} - y \ln x - 8.$$

Бу функциянинг x, y бўйича хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x = e^{2y} - \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F'_y = 2xe^{2y} - \ln x.$$

У ҳслда (8) формулага асосан

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^{2y} - \dfrac{y}{x}}{2xe^{2y} - \ln x} = \frac{xe^{2y} - y}{x(\ln x - 2xe^{2y})}. \quad ▲$$

1148. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1$ тенглама билан берилган

$z(x;\ y)$ ошкормас функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Δ Бу ҳолда

$$F(x;\ y;\ z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 1;$$

$$F'_x = 2x - 2z, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z - 2x.$$

(9) формулага кўра,

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x-2z}{2z-2x} = 1; \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} =$$

$$= -\frac{2y}{2z-2x} = \frac{y}{x-z}. \quad \blacktriangle$$

1149. $z = ye^{\frac{x}{z}}$ бўлса, dz ни топинг.

Δ $F(x;\ y;\ z) = z - ye^{\frac{x}{z}};\ F'_x = -\frac{y}{z}e^{\frac{x}{z}},\ F'_y = -e^{\frac{x}{z}},$

$$F'_z = 1 + \frac{xy}{z^2}e^{\frac{x}{z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} =$$

$$= -\frac{-\frac{y}{z}e^{\frac{x}{z}}}{1+\frac{xy}{z^2}e^{\frac{x}{z}}} = \frac{yze^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-e^{\frac{x}{z}}}{1+\frac{xy}{z^2}e^{\frac{x}{z}}} = \frac{z^2e^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}};$$

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ формулага асосан:

$$dz = \frac{yze^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}}dx + \frac{z^2e^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}}dy. \quad \blacktriangle$$

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг.

1150. $z = 2axy - x^2 - y^2$. **1151.** $z = x^3t - t^3x$.

1152. $z = \frac{x}{y}$. **1153.** $u = \frac{y}{x} + \frac{x}{z} - \frac{z}{y}$.

1154. $s = axe^{-t} + bt$ (a, b ўзгармас сонлар).

1155. $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$.

1156. $z = (3xy^3 - x^2 + 5)^4$.

1157. $z = \sqrt[x]{e^y}$.

1158. $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.

1159. $u = x^{yz}$.

1160. $u = x^{y^z}$.

1161. $u = \sin(xy + yz)$.

1162. $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$.

1163. $f(x;\ y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$. $f'_x(4;\ 3)$ ва $f'_y(4;\ 3)$ ларни топинг.

1164. $f(x;\ y;\ z) = \sin^2(3x + 2y - z)$. $f'_x(1;\ -1;\ 1)$, $f'_y(1;\ 1;\ 4)$, $f'_z\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ -1\right)$ ларни топинг.

1165. $f(x;\ y;\ z) = \ln(1 + x + y^2 + z^2)$.

$$f'_x(1;\ 1;\ 1) + f'_y(1;\ 1;\ 1) + f'_z(1;\ 1;\ 1).$$

1166. $f(x;\ y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}\cdot f'_x(2;\ 1)$, $f'_y(2;\ 1)$ ларни топинг.

1167. $f(x;\ y;\ z) = \ln(xy + z)$. $f'_x(1;\ 2;\ 0)$, $f'_y(1;\ 2;\ 0)$, $f'(1;\ 2;\ 0)$ ларни топинг.

1168. $z = \ln(e^x + e^y)$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ тенгликнинг ўринли эканини кўрсатинг.

1169. $z = x^y$ бўлса, $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ тенгликнинг ўринли эканини кўрсатинг.

1170. $z = x\ln\frac{y}{x}$ бўлса, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ тенгликнинг ўринли эканини кўрсатинг.

1171. $s = e^{\frac{x}{t^2}}$ бўлса, $2x\frac{\partial s}{\partial x} + t\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ тенгликнинг ўринли эканини кўрсатинг.

1172. $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ бўлса, $l\frac{\partial T}{\partial l} + g\frac{\partial T}{\partial g} = 0$ тенгликнинг ўринли эканини кўрсатинг.

1173. $z = f(x;\ y)$ функция $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$ ($M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтадаги) хусусий ҳосилаларининг физик маънолари нимадан иборат?

1174. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ узлуксиз функция $O(0,\ 0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

1175. $z=\sqrt{x^4+y^4}$ функция $O(0,\ 0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

Қуйидаги функцияларнинг тўла дифференциалини топинг:

1176. $z=5x^3y^2$. **1177.** $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$.

1178. $u=(xy)^z$. **1179.** $z=e^{x^2+y^2}$.

1180. $z=(\sin x)^{\cos y}$. **1181.** $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

1182. $f(x;\ y)=\frac{y}{x^2}$ бўлса, $df(1;\ 1)$ ни топинг.

1183. $f(x;\ y;\ z)=e^{x^2+y^2+z^2}$ бўлса, $df(0;\ 1;\ 2)$ ни топинг.

1184. $z=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$, $x=1$, $y=3$, $dx=0{,}01$, $dy=-0{,}05$ бўлганда dz ни топинг.

1185. x 2 дан 2,1 гача, y эса 3 дан 2,5 гача ўзгарганда $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ функциянинг ўзгаришини тақрибан ҳисобланг.

1186. Конусни деформация қилиш натижасида унинг асосининг радиуси R 5 см дан 4,8 см гача камайиб, баландлиги Н 10 см дан 10,2 см гача ортса, конус ҳажми V нинг ўзгаришини тақрибан ҳисобланг.

1187. Цилиндрни деформация қилиш натижасида унинг радиуси R 2 дм дан 2,05 дм гача ортиб, баландлиги H 10 дм дан 9,8 дм гача камайганда, цилиндр ҳажми V нинг ўзгаришини тақрибан ҳисобланг.

1188. $A=(1{,}04)^{2{,}03}$ ни тақрибан ҳисобланг.

1189. $A=(0{,}97)^{2{,}02}$ ни тақрибан ҳисобланг.

1190. $A=(1{,}94)^2\cdot e^{0{,}12}$ ни тақрибан ҳисобланг.

1191. $A=\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1\right)$ ни тақрибан ҳисобланг.

Қуйидаги мураккаб функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

1192. $z=x^2+xy^2$; $x=e^{2t}$, $y=\sin t$ бўлса, $\frac{dz}{dt}$ ни топинг.

1193. $z=\ln(e^x+e^t)$, $x=t^3$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{dz}{dt}$ ларни топинг.

1194. $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $y = \sqrt{1+x^2}$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$ ларни топинг.

1195. $z = u^2v - uv^2$, $u = x\cos y$, $v = x\sin y$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топинг.

1196. $z = x^2 + \sqrt{xy}$, $x = s + t$, $y = s - t$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ ларни топинг.

1197. $u = xyz$, $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \mathrm{tg}\, t$ бўлса, $\frac{du}{dt}$ ни топинг.

1198. $z = x^y$, $y = \varphi(x)$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$ ларни топинг.

1199. $z = f(u)$, $u = xy + \frac{y}{x}$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топинг.

1200. Агар $z = f(x + ay)$ диффиренциалланувчи функция бўлса, $\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x}$ тенгликнинг тўғрилигини кўрсатинг.

1201. Дифференциалланувчи $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ функциянинг $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ тенгликни қаноатлантиришини кўрсатинг.

1202. $z = f(x^2 + y^2)$ функциянинг $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг, бунда $z = f(x^2 + y^2)$ ихтиёрий дифференциалланувчи функция.

1203. $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x + xy$ тенгламанинг $u(0;\ y) = y^2$ шартни қаноатлантирувчи $u = u(x;\ y)$ ечимини топинг.

1204. $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$ тенгламанинг $u(x;\ x) = 0$ шартни қаноатлантирувчи $u = u(x;\ y)$ ечимини топинг.

Қуйидаги ошкормас шаклда берилган функцияларнинг $\frac{dy}{dx}$ ҳосилаларини топинг:

1205. $x^3 + y^3 = 3xy$.

1206. $xy + \ln y + \ln x = 0$.

1207. $x^y = y^x$, $y'(1) = ?$

1208. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

1209. $y = 1 + y^x$.

1210. $x \sin y + \cos 2y = \cos y$, $\quad y'\big|_{y=\frac{\pi}{2}} = ?$

Қуйидаги ошкормас шаклда берилган функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг.

1211. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1$. $\qquad$ 1212. $e^z = xyz$.

1213. $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ бўлишини кўрсатинг.

1214. $xyz = x + y + z$ бўлса, dz ни топинг.

1215. $e^z = \cos x \cdot \cos y$ бўлса, dz ни топинг.

1216. $z = ye^{\frac{x}{z}}$ бўлса, dz ни топинг.

3- §. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАР ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР. ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ. СИРТГА ЎТКАЗИЛГАН УРИНМА ТЕКИСЛИК ВА НОРМАЛ ТЕНГЛАМАСИ

1. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва дифференциаллар

$z = f(x;\ y)$ функция $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x;\ y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_x(x;\ y)$ хусусий ҳосилаларнинг хусусий ҳосилалари $z = f(x;\ y)$ функциянинг 2-*тартибли хусусий ҳосилалари* дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x;\ y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x;\ y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x;\ y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x;\ y).$$

$z = f(x,\ y)$ функциянинг учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалари шунга ўхшаш таърифланади ва белгиланади. Ҳосила олиш тартиби билангина фарқланувчи аралаш ҳосилалар узлуксиз бўлса, улар ўзаро тенг бўлади:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}$$

ва ҳоказо.

Маълумки, $z=f(x;\ y)$ функция дифференциали

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

формула бўйича аниқланади.

Функция дифференциалининг дифференциали $z=f(x;\ y)$ функциянинг *2-тартибли дифференциали* дейилади ва d^2z каби белгиланади. Таъриф бўйича

$$d^2z=d(dz)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \qquad (1)$$

Соддалик учун (1) ни шартли равишда

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx+\frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z$$

кўринишда ёзиш мумкин. Худди шунингдек,

$$d^3 z=d(d^2z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx+\frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^3 z \text{ ва ҳоказо.}$$

2. Тейлор формуласи

Икки ўзгарувчили $z=f(x;\ y)$ функция учун Тейлор формуласи қуйидагича:

$$\Delta f(x;\ y)=df(x;\ y)+\frac{1}{2!}\,d^2 f(x;\ y)+\ldots+\frac{1}{n!}\,d^n f(x;\ y)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\,d^{n+1} f(x+\theta\,\Delta x,\ y+\theta\,\Delta y),\ 0<\theta<1 \qquad (2)$$

ёки

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=f(x;\ y)+\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\Delta x^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\Delta y^2\right)+\ldots+R_n, \quad (3)$$

бунда R_n — қолдиқ ҳад.

3. Сиртга ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаси

Агар $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта тенгламаси $F(x;\ y;\ z)=0$ бўлган сиртда ётса, у ҳолда сиртнинг M_0 нуқтасидаги уринма текислик тенгламаси

$$F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)(y-y_0)+$$
$$+F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)(z-z_0)=0, \qquad (4)$$

нормал тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)} \qquad (5)$$

кўринишда бўлади.

Агар сирт тенгламаси $z=f(x;\ y)$ кўринишда берилса, уринма тенгламаси

$$z-z_0=f'_x(x_0;\ y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;\ y_0)(y-y_0), \qquad (6)$$

нормал тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;\ y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,\ y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \qquad (7)$$

кўринишда бўлади.

Агар сиртдаги бирор M_0 нуқтада

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)=0$$

бўлса, M_0 нуқта сиртнинг *махсус нуқтаси* дейилади. Махсус нуқтада сиртнинг нормали ҳам, уринма текислик ҳам бўлмайди.

1217. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг:

а) $z=e^{xy}$; б) $z=\sin^2(ax+by)$.

Δ а) Берилган функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=(e^{xy})'_x=e^{xy}(xy)'_x=ye^{xy};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=(e^{xy})'_y=e^{xy}(xy)'_y=xe^{xy}.$$

Топилган ҳосилалардан яна x, y бўйича ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=(z'_x)'_x=(ye^{xy})'_x=y^2e^{xy},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=z''_{xy}=(z'_x)'_y=(ye^{xy})'_y=e^{xy}+xye^{xy}=e^{xy}(1+xy),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=(z'_y)'_y=(xe^{xy})'_y=x^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = z''_{yx} = (z'_y)'_x = (xe^{xy})'_x = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy).$$

Бу мисолдан кўринадики, $z''_{xy} = z''_{yx}$. ▲

△ б) $z'_x = 2\sin(ax + by)(\sin(ax + by))'_x = 2\sin(ax +$

$$+ by)\cos(ax + by)(ax + by)'_x = 2a\sin(ax + by)\cos(ax +$$
$$+ by) = a\sin 2(ax + by);$$

$$z'_y = 2\sin(ax + by)(\sin(ax + by))'_y = 2b\sin(ax +$$
$$+ by)\cos(ax + by) = b\sin 2(ax + by);$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (a\sin 2(ax + by))'_x = 2a^2\cos 2(ax + by);$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (a\sin 2(ax + by))'_y = 2ab\cos 2(ax + by);$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (b\sin 2(ax + by))'_x = 2ab\cos 2(ax + by);$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (b\sin 2(ax + by))'_y = 2b^2\cos 2(ax + by).$$

Бу мисолдан ҳам кўринадики, $z''_{xy} = z''_{yx}$. ▲

1218. $z = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ функциянинг қуйидаги

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

тор тебраниш тенгламасини қаноатлантиришини кўрсатинг, бунда $\varphi(x - at)$, $\psi(x + at)$ — икки марта дифференциалланувчи ихтиёрий функциялар.

△ Берилган функция хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (\varphi(x - at) + \psi(x + at))'_t = -a\varphi'(x - at) +$$
$$+ a\psi'(x + at),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = (-a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at))'_t =$$
$$= a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at) = a^2(\varphi''(x - at) + \psi''(x + at));$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)' = \varphi'(x - at) + \psi'(x - at))'_x =$$
$$= \varphi''(x - at) + \psi''(x + at).$$

Топилганларни тор тебраниш тенгламасига қўйсак, $0 = 0$ айният ҳосил бўлади. Демак, $z = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ функция тор тебраниши тенгламасини қаноатлантиради. ▲

1219. $z = x^y$ функциянинг $M_0(1;\ 0)$ нуқтадаги иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

△ Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = (z'_x)'_y = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = (x^y)'_y = x^y \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z'_y)'_y = (x^y \ln x)'_y = x^y \ln^2 x.$$

Хусусий ҳосилаларнинг $M_0(1;\ 0)$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\ y=0}} = \left(y(y-1)x^{y-2}\right)\Big|_{\substack{x=1\\ y=0}} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=0}} = \left(x^{y-1}(1 + y\ln x)\right)\Big|_{\substack{x=1\\ y=0}} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=1\\ y=0}} = \left(x^y \ln^2 x\right)\Big|_{\substack{x=1\\ y=0}} = 0.$$

Топилган қийматларни (1) формулага қўйсак, $d^2 z = 2\,dx\,dy$ бўлади. ▲

1220. $z = \sin(xy)$ бўлса, z'''_{xyy} ни топинг.

△ $$z'_x = (\sin(xy))'_x = \cos(xy)(xy)'_x = y\cos(xy),$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (y\cos(xy))'_y = \cos(xy) - y\sin(xy)(xy)'_y =$$
$$= \cos(xy) - xy\sin(xy),$$

$$z'''_{xyy} = (z''_{xy})'_y = (\cos(xy) - xy\sin(xy))'_y = -x\sin(xy) -$$
$$-(x\sin(xy) + xy\cos(xy)(xy)'_y) = -x\sin(xy) - x\sin(xy) -$$
$$-x^2 y\cos(xy) = -2x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy). \ ▲$$

1221. $z = f(x;\ y) = e^{\frac{x}{y}}$ функцияни $M_0(0;\ 1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг ($n = 2$).

△ Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$f'_x(x;\ y) = (e^{\frac{x}{y}})'_x = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}\ e^{\frac{x}{y}},$$

$$f'_y(x;\ y) = (e^{\frac{x}{y}})'_y = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}\,e^{\frac{x}{y}},$$

$$f''_{xx}(x;\ y) = (f'_x)'_x = \left(\frac{1}{y}\ e^{\frac{x}{y}}\right)'_x = \frac{1}{y^2}\,e^{\frac{x}{y}},$$

$$f''_{xy}(x;\ y) = (f'_x)'_y = \left(\frac{1}{y}\,e^{\frac{x}{y}}\right)'_y = -\frac{1}{y^2}\ e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y}\,e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= -\frac{1}{y^2}\ e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^3}\,e^{\frac{x}{y}} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}\,(y + x),$$

$$f''_{yy}(x;\ y) = (f'_y)'_y = \left(-\frac{x}{y^2}\,e^{\frac{x}{y}}\right)'_y = \frac{2\,x}{y^3}\,e^{\frac{x}{y}} + \left(-\frac{x}{y^2}\right)e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{2\,x}{y^3}\,e^{\frac{x}{y}} + \frac{x^2}{y^4}\,e^{\frac{x}{y}} = \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^4}\,(2\,y + x).$$

Хусусий ҳосилаларнинг $M_0(0;\ 1)$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$f(0;\ 1) = e^{\frac{x}{y}}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 1,\quad f'_x(0;\ 1) = \frac{1}{y}\ e^{\frac{x}{y}}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 1,$$

$$f'_y(0;\ 1) = -\frac{x}{y^2}\,e^{\frac{x}{y}}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 0,\quad f''_{xx}(0;\ 1) = \frac{1}{y^2}\,e^{\frac{x}{y}}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 1,$$

$$f''_{xy}(0;\ 1) = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}\,(y + x)\ \Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -1,$$

$$f''_{yy}(0;\ 1) = \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^4}\ \ (2y + x)\ \Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 0.$$

Топилган қийматларни (3) формулага қўйсак, қуйидагига эга бўламиз ($\Delta x = x,\ \Delta y = y - 1$):

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x(y-1) + R_3 = 1 + 2x +$$

$$+ \frac{1}{2}x^2 - xy + R_3. \qquad \blacktriangle$$

1222. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ сферанинг $M_0(1;\ 2;\ 3)$ нуқтасидаги уринма текислик ва нормал тенгламаларини ёзинг.

$\triangle$ Сфера тенгламасини

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

кўринишда ёзиб, тенгликнинг чап томонини $F(x;\ y;\ z)$ билан белгилаймиз, яъни $F(x;\ y;\ z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$.

Бундан

$$F'_x = 2x,\ F'_y = 2y,\ F'_z = 2z$$

хусусий ҳосилаларнинг берилган $M_0(1;\ 2;\ 3)$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$F'_x(M_0) = 2,\ F'_y(M_0) = 4,\ F'_z(M_0) = 6$$

ва топилганларни (4), (5) га қўйиб, $2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$ ёки $x + 2y + 3z - 14 = 0$ уринма текислик тенгламасини,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6} \text{ ёки } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

нормал тенгламасини ҳосил қиламиз. $\blacktriangle$

1223. $z = 2x^2 + y^2$ эллиптик параболоиднинг $M_0(1;-1;\ 3)$ нуқтасидаги уринма текислик ва нормал тенгламаларини ёзинг.

$\triangle$ Берилган функция $z'_x = 4x$, $z'_y = 2y$ хусусий ҳосилаларининг M_0 нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$z'_x(M_0) = 4,\ Z'_y(M_0) = -2.$$

Топилган қийматларни (6), (7) формулаларга қўйиб, $z - 3 = 4(x-1) - 2(y+1)$ ёки $4x - 2y - z - 3 = 0$ уринма текислик тенгламасини, $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ нормал тенгламасини ҳосил қиламиз. $\blacktriangle$

Қуйидаги функцияларнинг барча иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг:

1224. $z = x^3 - 2x^2 y + 3y^2$. **1225.** $z = xe^y$.

1226. $z = \ln(x^2 + y)$. **1227.** $u = e^{xyz}$.

1228. $z = e^x \ln y + \sin y \cdot \ln x$. **1229.** $z = \cos(xy)$.

1230. $u = xy + yz + zx$.

1231. $z = \dfrac{x}{y}$ функция учун $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ тенглик ўринли бўлишини текширинг.

1232. $z = x + y + xy$; d^3z ни топинг.

1233. $z = y \ln x$; d^2z, d^3z ларни топинг.

1234. $z = e^{x+y^2}$; d^2z ни топинг.

1235. $z = x \sin^2 y$; d^2z ни топинг.

1236. $f(x; y) = x^3 + 3x^2 y + 12xy^3$ бўлса, $f''_{xx}(0;\ 1)$, $f''_{xy}(-1; 1)$, $f''_{yy}(2;\ 0)$ ларни топинг.

1237. $f(x; y) = (1 + x)^m (1 + y)^n$ бўлса, $f''_{xx}(0;\ 0)$, $f''_{xy}(0;\ 0)$, $f''_{yy}(0;\ 0)$ ларни топинг.

1238. $z = f(x; y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$ бўлса, $dz = df(1; 2)$, $d^2z = d^2 f(1;\ 2)$ ларни топинг.

1239. $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$ функциянинг $\dfrac{\partial^2 z}{dx^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасини қаноатлантиришини кўрсатинг.

1240. Ўзгармас a нинг қандай қийматларида $z = x^3 + axy^2$ функция $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ тенгламани қаноатлантиради?

1241. $z = e^{\frac{x}{y}}$ функциянинг $y \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

1242. $z = 2\cos^2\left(y - \dfrac{x}{2}\right)$ функциянинг $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

1243. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0$ тенгламани қаноатлантирадиган $u(x; y)$ ни топинг.

1244. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ тенгламани қаноатлантирадиган $u(x; y)$ ни топинг.

1245. $f(x;\ y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ функцияни $(-2, 1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг ($n = 2$).

1246. $f(x; y) = e^x \sin y$ функцияни $M_0(0; 0)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг ($n = 3$).

1247. $f(x; y) = e^{x+y}$ функцияни $M_0(1; -1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг ($n = 3$).

1248. Тейлор формуласи ёрдамида $\sqrt{1,03}\cdot\sqrt[3]{0,98}$ ифодани тақрибан ҳисобланг.

1249. Тейлор формуласи ёрдамида $(0,95)^{2,01}$ ифодани тақрибан ҳисобланг ($n=2$).

Қуйидаги сиртларга берилган нуқталарда ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини ёзинг:

1250. $z = xy$, $(2;\ 1;\ 2)$. **1251.** $z = 2x^2 - 4y^2$, $(2, 1, 4)$.

1252. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, $(1, -1, 1)$. **1253.** $e^z - z + xy = 3$, $(2, 1, 0)$,

1254. $z = \sin\dfrac{x}{y}$, $(\pi;\ 1;\ 0)$.

1255. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ сферада шундай нуқта топингки, бу нуқтада сферага ўтказилган уринма текислик $3x - 12y - 4z = 0$ текисликка параллел бўлсин.

1256. $z = 4 - x^2 - y^2$ сиртнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма текислик $2x + 2y + z = 0$ текисликка параллел бўлади. Уринма текислик тенгламасини ёзинг.

1257. $z^2 = x^2 + y^2$ конус сиртнинг $(3, 4, 5)$ нуқтасида ўтказилган нормал тенгламасини ёзинг. Конуснинг қандай нуқтасида нормал аниқмас?

4- §. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

1. Экстремум мавжудлигининг зарурий ва етарли шарти

$z = f(x;\ y)$ функция бирор D соҳада аниқланган ва $P_0(x_0;\ y_0)$ нуқта D соҳанинг ички нуқтаси бўлсин.

Агар $P_0(x_0;\ y_0)$ нуқтанинг δ атрофида олинган барча $P(x;\ y)$ нуқталар учун $f(x_0;\ y_0) > f(x;\ y)$ $(f(x_0;\ y_0) < f(x;\ y))$ бўлса, $f(x;\ y)$ функция $P_0(x_0;\ y_0)$ нуқтада *максимумга* (*минимумга*) эга дейилади.

Бу таърифларни ҳар қандай сондаги аргументларнинг функцияси учун ўзгаришсиз такрорлаш мумкин.

Функциянинг максимуми ва минимуми функциянинг *экстремумлари* дейилади.

Экстремум мавжудлигининг зарурий шарти қуйидагича ифодаланади. Агар $z = f(x;\ y)$ функция $P_0(x_0;\ y_0)$ нуқтада экстремумга эга бўлса, у ҳолда функциянинг биринчи тартибли барча хусусий ҳосилалари аргументларнинг шу қийматларида ё нолга тенг бўлади, ё мавжуд бўлмайди, яъни

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x_0;\ y_0) = 0 \text{ ёки } f'_x(x_0;\ y_0) \text{ мавжуд эмас,} \\ f'_y(x_0;\ y_0) = 0 \text{ ёки } f'_y(x_0;\ y_0) \text{ мавжуд эмас.} \end{array}\right\}$$

$z = f(x;\ y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини нолга айлантирадиган ёки узилишга олиб келадиган нуқталар *критик нуқталар* дейилади.

Агар функция бирор нуқтада экстремумга эга бўлса, бу нуқта албатта критик нуқта бўлади.

Лекин ҳар қандай критик нуқтада функция экстремумга эга бўлавермаслиги мумкин.

Демак, юқоридаги шарт фақат зарурий шарт бўлиб, етарли шарт эмас. Энди критик нуқтада $z = f(x;\ y)$ функциянинг экстремумга эга бўлишининг етарли шартини келтирамиз.

$P_0(x_0;\ y_0)$ нуқта критик нуқта бўлсин. Қуйидаги $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$, $\Delta = AC - B^2$ белгилашларни киритамиз.

Агар $z = f(x;\ y)$ функция $P_0(x_0;\ y_0)$ критик нуқтани ўз ичига олган бирор соҳада учинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда:

1) $\Delta > 0$, $A < 0$ бўлса, $f(x;\ y)$ функция $P_0(x_0;\ y_0)$ нуқтада максимумга эга бўлади;

2) $\Delta > 0$, $A > 0$ бўлса, $f(x;\ y)$ функция $P_0(x_0;\ y_0)$ нуқтада минимумга эга бўлади;

3) $\Delta < 0$ бўлса, $f(x; y)$ функция $P_0(x_0;\ y_0)$ нуқтада максимумга ҳам, минимумга ҳам эга бўлмайди;

4) $\Delta = 0$ бўлса, $f(x;\ y)$ функция $P_0(x_0;\ y_0)$ нуқтада экстремумга эга бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин (бу ҳолда текширишни давом эттириш керак).

2. Шартли экстремумлар

$z = f(x;\ y)$ функциянинг x ва y аргументлар ўзаро $\varphi(x;\ y) = 0$ тенглама билан боғланган ҳолдаги экстремуми *шартли экстремум* дейилади.

Функция шартли экстремумини топиш учун *Лагранж функцияси* деб аталувчи қуйидаги

$$F(x;\ y;\ \lambda) = f(x;\ y) + \lambda\varphi(x;\ y) \tag{1}$$

ёрдамчи функцияни тузамиз, бунда λ — номаълум ўзгармас кўпайтувчи.

(1) дан x, y ва λ бўйича хусусий ҳосилалар олиб, нолга тенглаштирсак, қуйидаги уч (x, y, λ) номаълумли учта тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial\lambda} &= \varphi(x;\ y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, x, y, λ ларни топамиз. (2) тенгламалар шартли экстремумнинг зарурий шартларидир. Критик нуқталарда функция шартли экстремумга эга бўлиш, бўлмаслик масаласи Лагранж функциясининг

$$d^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2$$

иккинчи тартибли дифференциали ишорасини текшириш ёрдамида ечилади, бунда dx ва dy лар

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0)$$

тенглама билан боғланган.

Агар $d^2F < 0$ бўлса, $z = f(x; y)$ функция шартли максимумга, $d^2 F > 0$ бўлса, шартли минимумга эга бўлади.

Хусусий ҳолда, агар критик нуқтада $F(x; y)$ функция учун $\Delta > 0$ бўлиб, $A < 0$ $(C<0)$ бўлса, $f(x; y)$ функция шу нуқтада шартли максимумга, $A > 0$ $(C > 0)$ бўлса, шартли минимумга эга бўлади. Икки ўзгарувчили функцияни шартли экстремумга текширишнинг юқоридаги усули уч ва ундан ортиқ ўзгарувчили функциялар учун ҳам ўринли.

3. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари

$z = f(x; y)$ функция чегараланган ёпиқ D соҳада аниқланган, узлуксиз ва соҳанинг ичида дифференциалланувчи бўлсин. $z = f(x; y)$ функциянинг D соҳадаги энг катта (энг кичик) қийматини топиш учун:

1) барча критик нуқталарни топамиз;

2) функциянинг топилган критик нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз;

3) функциянинг соҳа чегарасидаги энг катта ва энг кичик қийматини топамиз.

Топилган функция қийматлари орасида энг каттаси (энг кичиги) функциянинг D соҳадаги энг катта (энг кичик) қиймати бўлади.

1258. Қуйидаги функцияларнинг экстремумларини топинг:

а) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$; б) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^3$;

в) $z = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$.

Δ а) Критик нуқталарни топамиз:

$$z'_x = 6 - 2x - y, \quad z'_y = -x - 2y.$$

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 6-2x-y&=0\\ -x-2y&=0 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини ечиб, $x=4$, $y=-2$ ларни топамиз. $M_0(4;-2)$ критик нуқта бўлади, чунки берилган функция Oxy текисликда аниқланган.

$M_0(4;-2)$ критик нуқтада иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг қийматларини топамиз ва критик нуқтанинг характерини аниқлаймиз:

$$z''_{xx}(M_0)=-2,\ z''_{xy}(M_0)=-1,\ z''_{yy}(M_0)=-2.$$

$$A=-2,\ B=-1,\ C=-2,\ \Delta=AC-B^2=3>0.$$

$\Delta>0$, $A<0$ бўлгани учун функция $M_0(4,-2)$ нуқтада максимумга эга ва $z_{\max}(M_0)=13$ бўлади. ▲

△ б) Критик нуқталарни топамиз:

$$z'_x=6x^2+y^2+10x,$$

$$z'_y=2xy+2y.$$

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 6x^2+y^2+10x&=0,\\ 2xy+2y&=0 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини ечиб,

$$M_0(0;0),\ M_1\left(-\frac{5}{3};\ 0\right),\ M_2(-1;2),\ M_3(-1;-2)$$

нуқталарни топамиз. Бу нуқталар критик нуқталар бўлади.

M_0 нуқта учун

$$A=z''_{xx}(M_0)=12x+10\,\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=10,$$

$$B=z''_{xy}(M_0)=2y\,\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0,$$

$$C=z''_{yy}(M_0)=2x+2\,\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=2.$$

$\Delta=AC-B^2=20>0$, $A>0$ бўлгани учун функция $M_0(0,0)$ нуқтада минимумга эга ва $z_{\min}(M_0)=0$ бўлади.

M_1 нуқта учун

$$A=z''_{xx}(M_1)=12x+10\,\Big|_{\substack{x=-\frac{5}{3}\\y=0}}=-10,$$

$$B = z''_{xy}(M_1) = 2y \Big|_{\substack{x=-\frac{5}{3}\\ y=0}} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(M_1) = 2x + 2\Big|_{\substack{x=-\frac{5}{3}\\ y=0}} = -\frac{4}{3}.$$

$\Delta = AC - B^2 = \frac{40}{3} > 0$, $A < 0$ бўлгани учун функция $M_1\left(-\frac{5}{3};\ 0\right)$ нуқтада максимумга эга ва $z_{\max}(M_1) = -\frac{875}{27}$ бўлади.

$M_2(-1;\ 2)$ нуқта учун

$$A = f''_{xx}(M_2) = 12x + 10\Big|_{\substack{x=-1\\ y=2}} = -2,$$

$$B = z''_{xy}(M_2) = 2y\Big|_{\substack{x=-1\\ y=2}} = 4,$$

$$C = z''_{yy}(M_2) = 2x + 2\Big|_{\substack{x=-1\\ y=2}} = 0.$$

$\Delta = AC - B^2 = -16 < 0$ бўлгани учун функция M_2 нуқтада экстремумга эга эмас.

$M_3(-1;\ -2)$ нуқта учун

$$A = z''_{xx}(M_3) = 12x + 10\Big|_{\substack{x=-1\\ y=-2}} = -2,$$

$$B = z''_{xy}(M_3) = 2y\Big|_{\substack{x=-1\\ y=-2}} = -4,$$

$$C = z''_{yy}(M_3) = 2x + 2\Big|_{\substack{x=-1\\ y=-2}} = 0.$$

$\Delta = AC - B^2 = -16 < 0$ бўлгани учун функция $M_3(-1, -2)$ нуқтада экстремумга эга эмас. ▲

△ в) Критик нуқталарни топамиз:

$$z'_x = 3x^2 - 3,$$

$$z'_y = 2y + 2\sqrt{y^3}.$$

Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0, \\ 2y + 2\sqrt{y^3} = 0 \end{array}\right\}$$

тенгламалар системасини ечиб, $M_0(1, 0)$, $M_1(-1, 0)$ нуқталарни топамиз. Топилган нуқталар текширилаётган функция аниқланиш соҳаси $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$ нинг чегарасига тегишли бўлгани учун бу нуқталар критик нуқта бўлмайда (критик нуқта бўлиши учун функция аниқланиш соҳасининг ички нуқтаси бўлиши керак).

Шундай қилиб, берилган функция критик нуқтага эга бўлмаганлиги учун функция экстремумга эга эмас. ▲

1259. $x^2 + y^2 = 1$ шартда $z = 6 - 4x - 3y$ функцияни экстремумга текширинг.

△ Ёрдамчи Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(x;\ y;\ \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1);$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x = -4 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F'_y = -3 + 2\lambda y;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1$$

ларни топамиз. Бу ҳолда функция шартли экстремумга эга бўлишлигининг зарурий шарти

$$\left.\begin{array}{l} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\}$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламалар системасини ечиб, $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{3}{5}$ ва $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{4}{5}$, $y_2 = -\frac{3}{5}$ ларни топамиз.

$F''_{xx} = 2\lambda$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = 2\lambda$ бўлгани учун $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$ бўлади. Шундай қилиб, $\lambda = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ бўлганда $d^2F > 0$ бўлгани учун функция $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ нуқтада шартли минимумга эга бўлади ва $z_{\min}\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = 1$. $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ бўлганда, $d^2F < 0$ бўлгани учун функция бу нуқтада шартли максимумга эга бўлади ва

$$z_{max}\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) = 11. \quad \blacktriangle$$

1260. Юзи S га тенг бўлган тунукадан энг катта ҳажмли тўғри бурчакли параллелепипед ясанг.

$\triangle$ Параллелепипед томонларини x, y, z деб белгилайлик. Бу ҳолда қўйилган масала

$$xy + yz + xz = \frac{S}{2}$$

шарт бажарилганда

$$V = xyz$$

функциянинг максимумини топишга келтирилади.

Ёрдамчи Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(x; y; z) = xyz + \lambda\left(xy + yz + xz - \frac{S}{2}\right)$$

ва функция хусусий ҳосилаларини топиб, уларни нолга тенглаймиз:

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= yz + \lambda(y + z) = 0, \\ F'_y &= xz + \lambda(x + z) = 0, \\ F'_z &= xy + \lambda(x + y) = 0, \\ F'_\lambda &= xy + yz + xz - \frac{S}{2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Бу тенгламалар системасидаги биринчи учта тенгламани биридан иккинчисини айирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} (z + \lambda)(y - x) &= 0, \\ (x + \lambda)(z - y) &= 0, \\ (y + \lambda)(x - z) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасидан $x = y = z$ экани келиб чиқади. (*) даги охирги $xy + yz + xz = \frac{S}{2}$ тенгламага асосан $x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$ бўлади. Демак, юзи S га тенг бўлган тунукадан ясалган энг катта ҳажмли параллелепипед қирралари $\sqrt{\frac{S}{6}}$ га тенг бўлган куб бўлар экан. $\blacktriangle$

1261. $z = x^2 - y^2 + 8$ функциянинг $x^2 + y^2 \leqslant 4$ доирадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Δ Функциянинг соҳа ичидаги критик нуқталарини ва бу нуқталардаги функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$z'_x = 2x, \quad z'_y = -2y.$$

$\left.\begin{array}{r} 2x = 0, \\ -2y = 0 \end{array}\right\}$ тенгламалар системасини ечиб, $M_0(0; 0)$ критик нуқтани ва функциянинг бу нуқтадаги $z(0;\ 0) = 8$ қийматини топамиз.

Энди функциянинг чегарадаги, яъни $x^2 + y^2 = 4$ айланадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз.

Берилган $z = x^2 - y^2 + 8$ функцияни айлана нуқталарида битта x нинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин:

$$z = x^2 - (4 - x^2) + 8$$

ёки

$$z = 2x^2 + 4, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

Шундай қилиб, икки ўзгарувчили функциянинг $x^2 + y^2 = 4$ айланадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш масаласини бир ўзгарувчили $z = 2x^2 + 4$ функциянинг $[-2;\ 2]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш масаласига келтирдик. $z(x) = 2x^2 + 4$ функциянинг $(-2; 2)$ интервалдаги критик нуқталарини ва функциянинг бу нуқтадаги ҳамда интервал чегаралари $(x = -2,\ x = 2)$ даги қийматларини топамиз:

$z' = 4x,\ 4x = 0,\ x = 0$ критик нуқта.

$$z(x)\Big|_{x=0} = 4, \quad z(x)\Big|_{x=-2} = 12, \quad z(x)\Big|_{x=2} = 12.$$

Функциянинг топилган қийматларини ўзаро таққосласак, функциянинг энг катта қиймати 12 га, энг кичик қиймати 4 га тенг бўлади.

Шундай қилиб, $z = x^2 - y^2 + 8$ функция $x^2 + y^2 \leqslant 4$ доирада ўзининг энг катта қийматига $x^2 + y^2 = 4$ айлананинг $M_1(-2, 0)$, $M_2(2, 0)$ нуқталарида, энг кичик қийматига эса айлананинг $M_3(0;\ 2)$, $M_4(0;\ -2)$ нуқталарида эришади. ▲

1262. $z = x^2y(2 - x - y)$ функциянинг координата ўқлари ва $x + y = 6$ тўғри чизиқ билан чегараланган учбурчакдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Δ Критик нуқталарни топамиз:

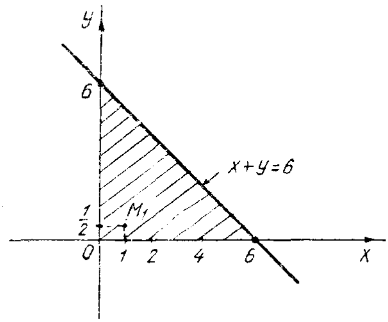
$$z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y),$$

$$z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(2 - x - 2y).$$

Учбурчак ичида $x > 0$, $y > 0$ эканини ҳисобга олсак (68- чизма),

$$\left.\begin{array}{l} xy(4 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(2 - x - 2y) = 0 \end{array}\right\}$$

тенгламалар системаси $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$ ечимга эга бўлади. $M_1\left(1; \frac{1}{2}\right)$ нуқта учбурчак ичида ётганлиги учун $M_1\left(1; \frac{1}{2}\right)$



68- чизма

критик нуқтада функциянинг қийматини ҳисоблаймиз:

$$z(M_1) = x^2 y(2 - x - y)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}.$$

Энди функцияни соҳанинг чегарасида текширамиз. Учбурчакнинг $x = 0$ ва $y = 0$ бўлган томонларида функциянинг қиймати нолга тенг бўлади ($z\big|_{x=0} = 0, z\big|_{y=0} = 0$). Учбурчакнинг $x + y = 6$ бўлган томонида функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз: $y = 6 - x$, $0 \leqslant \leqslant x \leqslant 6$. У ҳолда $z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - - x)$ бўлиб, интервал чегараларида $z(0) = 0$, $z(6) = 0$ бўлади. Худди юқоридагидек, $z = -4x^2(6 - x)$ функциянинг $[0; 6]$ кесмада энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз: $z' = -48x + 12x^2 = 12x(x - 4)$.

$12x(x - 4) = 0$ тенгламани ечиб, $x = 4$ ($x = 0$ чегаравий нуқта бўлганлиги учун критик нуқта бўлмайди) критик нуқтани топамиз ва функциянинг $M_2(4; 2)$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз:

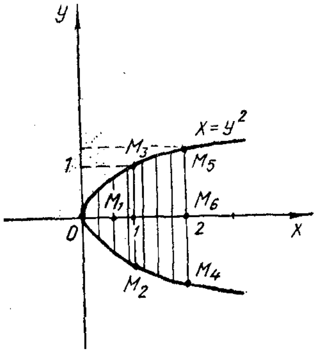
$$z(M_2) = x^2 y(2 - x - y)\Big|_{\substack{x=4 \\ y=2}} = -128.$$

Демак, берилган функциянинг учбурчакдаги энг катта қиймати $\frac{1}{4}$ бўлиб, функция бу қийматга учбурчак ичидаги $M_1\left(1; \frac{1}{2}\right)$ нуқтада эришади. Функциянинг учбурчакдаги энг кичик қиймати -128 бўлиб, функция бу қийматга учбурчак чегарасидаги $M_2(4; 2)$ нуқтада эришади. ▲

1163. $Z=(x-y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ функциянинг $y^2 \leqslant x \leqslant 2$ тенгсизликлар билан берилган соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Δ Критик нуқталарни топамиз:

$$z'_x=\frac{5x-2y^2-3}{3\sqrt[3]{x-1}}, \quad z'_y=-2y\sqrt[3]{(x-1)^2}.$$



69- чизма

$$\left.\begin{array}{l}5x-2y^2-3=0,\\ 2y\sqrt[3]{(x-1)^2}=0\end{array}\right\}$$

тенгламалар системасини ечиб, $M_1\left(\frac{3}{5};\ 0\right)$ критик нуқтани ва функциянинг бу нуқтадаги $z(M_1)=\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$ қийматини топамиз (69- чизма).

Осонгина кўриш мумкинки, тенгламалар системасини $x=1$ ва $y=\pm 1$ қийматлар ҳам қаноатлантиради. Лекин, бу қийматлар соҳанинг чегараларида жойлашган $M_2(1, -1)$, $M_3(1;\ 1)$ нуқталарни беради. M_2 ва M_3 нуқталардан ташқари M_2M_3 ватарнинг қолган барча нуқталари критик нуқталардир, чунки бу нуқталарда $z'_x=\infty$, $z'_y=0$.

M_2M_3 ватарнинг барча нуқталарида $z=0$.

Энди берилган функцияни соҳанинг чегараларида текширамиз. Соҳа чегараси параболанинг $M_4M_2OM_3M_5$ қисмидан ва M_4M_5 ватардан иборат.

1) $M_4M_2OM_3M_5$ эгри чизиқ тенгламаси $x=y^2$ бўлиб, парабола чегарасида берилган функция нолга тенг, яъни $z=0$.

2) M_4M_5 ватар тенгламаси $x=2$ бўлиб, берилган функция $z=2-y^2$ кўринишга келади.

$z'=-2y=0$ дан $y=0$. Бу ҳолда $M_6(2;\ 0)$ нуқта $z=2-y^2$ функция учун критик нуқта бўлиб, $z(M_6)=2$. Шундай қилиб, функциянинг ҳамма топилган қийматларини таққослаб кўрсак, функция ўзининг энг катта қиймати $z=2$ га M_6 нуқтада, энг кичик қиймати $z=0$ га M_2M_3 ватарда ва чегаранинг $M_4M_2OM_3M_5$ қисмида эришади. ▲

Қуйидаги функцияларнинг экстремумларини топинг:

1264. $z=(x-1)^2+2y^2$. **1265.** $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

1266. $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$.

1267. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

1268. $z = 2xy - 4x - 2y.$ **1269.** $z = x^3 + xy^2 + 6xy.$

1270. $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2.$

1271. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy.$

1272. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$ **1273.** $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$

1274. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

Қуйидаги функцияларнинг шартли экстремумларини топинг:

1275. $z = xy,\ x + y = 1.$

1276. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\quad x + y = 2.$

1277. $z = x + 2y,\ x^2 + y^2 = 5.$

1278. $z = x^2 + y^2,\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$

1279. Ҳажми V га тенг ва сирт юзи энг кичик бўлган цилиндрнинг ўлчамларини аниқланг.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган соҳалардаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1280. $z = x + y;\ x^2 + y^2 \leqslant 1$ доирада.

1281. $z = 1 + x + 2y;\quad x = 0,\quad y = 0,\quad x + y = 1\ (x > 0,\ y > 0)$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчакда.

1282. $z = x^2 + 3y^2 - x - 18y;\quad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 4$ соҳада.

1283. $z = 2xy;\ x^2 + y^2 \leqslant 1$ доирада.

1284. $z = xy - x^2y - \frac{xy^2}{2};\ x = 0,\ x = 1;\ y = 0,\ y = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда.

1285. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27;\ x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 4$ тўғри чизиқлар билан чегараланган квадратда.

1286. Берилган мусбат a сонни манфий бўлмаган шундай уч бўлакка ажратингки ($a = x + y + z$), уларнинг кўпайтмаси энг катта бўлсин.

1287. Периметри $2\,p$ га тенг бўлган учбурчаклардан юзи энг катта бўлганини топинг.

1288. $x^2 - y^2 = 4$ гиперболада (0; 2) нуқтадан энг кичик масофада бўлган нуқтани топинг.

1289. $A\,(-1;\ 5)$ нуқтадан $y^2 = x$ параболагача бўлган энг қисқа масофани топинг.

ЖАВОБЛАР

I боб

3. 1) рационал сон, $3\frac{32}{99}$; 2) иррационал сон; 3) рационал сон, $2\frac{19}{90}$; 4) рационал сон, $3\frac{161}{9990}$; 5) рационал сон, $1\frac{4}{33}$; 6) иррационал сон; 7) рационал сон, $5\frac{409}{990}$; 8) рационал сон, $3\frac{23}{30}$; 9) рационал сон, $2\frac{2089}{9900}$. **4.** 1) $[-2; 4]$; 2) $(-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$; 3) $(-1; 0)$; 4) $(0; \infty)$; 5) $[-5; 5]$; 6) $(-\infty; 0)$. **5.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $(-\infty; 0]$; 3) $\{-1; 3\}$; 4) $\{2; 3\}$, $|x^2-5x+9|=3$ тенглама а) $\begin{cases} x^2-5x+9=3, \\ x^2-5x+9 \geqslant 3, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -(x^2-5x+9)=3, \\ x^2-5x+9<0 \end{cases}$ системаларга тенг кучли; 5) $[-1; \infty)$; 6) $(-\infty; -1) \cup [1; \infty)$: агар $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$ бўлса, $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$ бўлиб, $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$ тенгликка эга бўламиз. Демак, берилган тенглама $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$ тенгсизликка тенг кучлидир. Бу тенгсизликни ечиш учун а) $\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x+1>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ x+1<0 \end{cases}$ системаларни ечиш керак. а) ҳол: $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x>-1 \end{cases} \Longrightarrow x \geqslant 1$, системанинг ечими $[1; \infty)$. б) ҳол: $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x<-1$, системанинг ечими $(-\infty; -1)$. Шундай қилиб, тенгламанинг ечимлари тўплами $(-\infty; -1) \cup [1; \infty)$. **7.** $f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(-1)=3$, $f(2)=3$, $f(a+1)=a^2+a+1$. **8.** $\varphi(0)= -3$, $\varphi(-1)=-\frac{5}{2}$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=0$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x(2-3x)}{1+x^2}$, $\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{x^2+1}{2x-3}$. **9.** 1) $b+a$; 2) $2ah$. **10.** $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(1)=\cos 1(1+4\sin 1)$, $f(a)=\cos a(1+4\sin a)$. **11.** $f(0)=-3$, $f(2)=1$, $f(-2)=-\frac{5}{3}$, $f(1)$ мавжуд эмас. **12.** $f(2)=1$, $f(0)=2$, $f(0{,}5)=2$, $f(-0{,}5)=-1$, $f(3)=2$, $x=4{,}5$ функциянинг аниқла-

ниш соҳасига кирмагани учун $f(4,5)$ мавжуд эмас. **13.** $(-\infty;\ \infty)$. **14.** $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ \infty)$. **15.** $(-\infty;\ \infty)$. **16.** $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup\cup(1;\ \infty)$. **17.** $(-\infty;\ 3)\cup(3;4)\cup(4;\ \infty)$. **18.** $(-\infty;3)\cup(3;\ 4)\cup(4;\infty)$ **19.** $(-\infty;\ -2)\cup[-2;\ 2)\cup(2;\ \infty)$. **20.** $[4;\ \infty)$. **21.** $(-\infty;\ 3]\cup[4;\ \infty)$. **22.** $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ \infty)$. **23.** $(-\infty;\ 0)$. **24.** $\left(\frac{3}{2};\ \infty\right)$. **25.** $(-\infty;\ 1)\cup\cup(3;\ \infty)$. **26.** $[2;\ 3]$. **27.** $\left[-\frac{2}{3};\ 2\right]$. **28.** $\left[\frac{7}{5};\ \frac{9}{5}\right]$. **29.** $[-1;\ 3]$. **30.** $(-1;\ 0)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ \infty)$. **31.** $(0;\ \infty)$. **32.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$. **33.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)$. **34.** а) $-1\leqslant x\leqslant 1$; б) $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k-1)\pi$. $k=0,-1,-2,\ \ldots$; в) $-a\leqslant\leqslant x\leqslant 1-a$; г) агар $|a|=0{,}5$ бўлса, у ҳолда $x=0{,}5$; агар $|a|>0{,}5$ бўлса, у ҳолда функция маъюга эга эмас. **35.** $0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$, $-\infty<t<\infty$. **36.** Агар $f(x)$ MN кесманинг массаси бўлса, у ҳолда

$$f(x)=\begin{cases}2x, \text{ агар } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2+\frac{3}{2}(x-1), \text{ агар } 1<x\leqslant 3;\\ x+2, \text{ агар } 3<x\leqslant 4\end{cases}$$

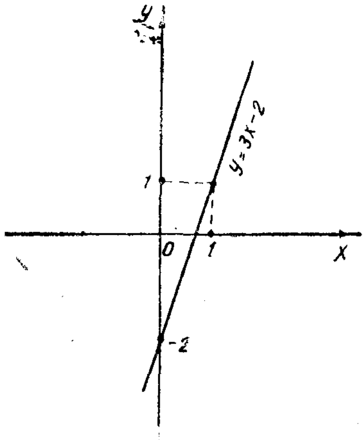
функция $0\leqslant x\leqslant 4$ да аниқланган.

37.

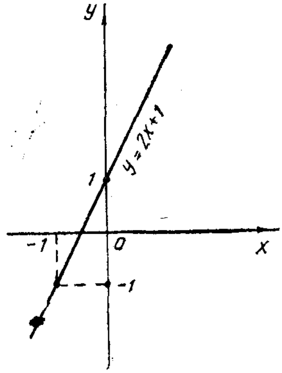
x	1	2	3	4	5	6
y	1	1/2	1/6	1/24	1/120	1/720

38. $S=\frac{\pi x^2}{2R}\sqrt{4R^2-x^2}$, $0<x<2R$. **40.** $y=x^2-2x+1$. **41.** $y==\cos^2 x$. **42.** $y=\sqrt[3]{(1+a^t)^2}$. **43.** $f(f(x))=f(x^2)=(x^2)^2=x^4$, $f(\varphi(x))=4^x$, $\varphi(f(x))=2^{x^2}$, $\varphi(\varphi(x))=2^{2^x}$. **44.** $f(3x)=\frac{45x^2+1}{2-3x}$, $f(x^3)=\frac{5x^6+1}{2-x^3}$, $3\cdot f(x)=\frac{3(5x^2+1)}{2-x}$, $(f(x))^2=\frac{25x^4+10x^2+1}{4-4x+x^2}$.

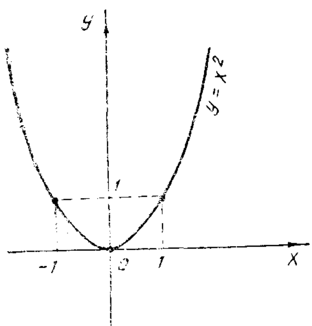
45. Жуфт функция. **46.** Жуфт функция. **47.** Тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. **48.** Тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. **49.** Тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. **50.** Жуфт функция. **51.** Тоқ функция. **52.** Тоқ функция. **53.** Жуфт функция. **54.** Жуфт функция. **56.** Бундай функциялар кўп, мисол учун $f(x)=0$. **60.** Даврий функция, унинг асосий даври 4π. **61.** Даврий функция, унинг асосий даври 1. **62.** Даврий функция, унинг асосий даври π. **63.** Даврий функция эмас. **64.** Даврий функция, унинг асосий даври 4. **65.** Даврий функция, унинг асосий даври 2π. **66.** Даврий функция, унинг асосий даври 1; $\{x\}$ — бу x ҳақиқий соннинг каср қисмини ифодалайди ва $\{x\}=x-[x]$ деб ёзилади, бунда $[x]$ — x ҳақиқий соннинг ўзидан катта бўлмаган бутун қисмини ифодалайди ва антье икс деб ўқилади. **67.** Даврий функция, асосий даври йўқ. **68.** Даврий функция эмас. **69.** Даврий функция, асосий даври a. 70. $(-\infty;\ \infty)$ да ўсади. **71.** $(-\infty,\ 0)$ да камаяди, $(0;\ \infty)$ да эса ўсади. **72.** $(-\infty;\ \infty)$ да ўсади. **73.** $(-\infty;$



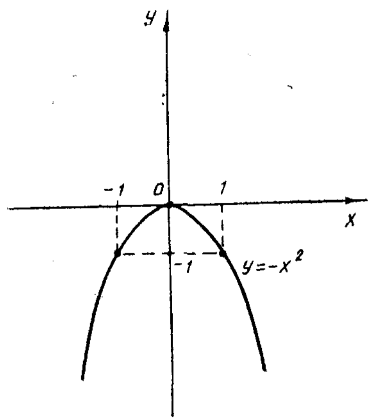
70- чизма



71- чизма

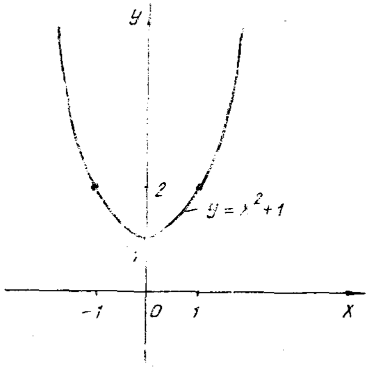


72- чизма

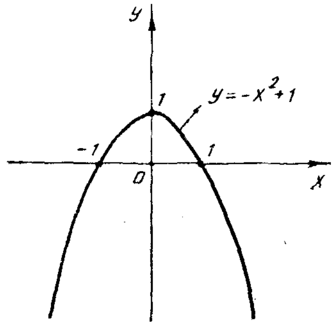


73- чизма

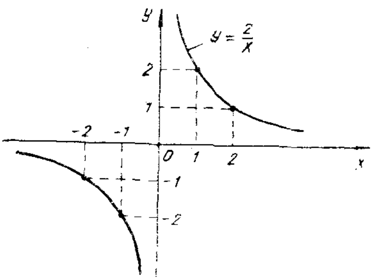
∞) да ўсади. **74**. $[-1;\ 1]$ да ўсади. **75**. $(-\infty;\ -1)$ да камаяди, $(-1;\ \infty)$ да ўсади. **76**. $(-\infty;\ \infty)$ да ўсади. **77**. $(-\infty;\ \infty)$ да камаяди. **79**. 70- чизма. **80**. 71- чизма. **81**. 72- чизма. **82**. 73- чизма. **83**. 74- чизма. **84**. 75- чизма. **85**. 76- чизма. **86**. 77- чизма. **87**. 78- чизма. **88**. 79- чизма. **89**. 80- чизма. **90**. 81- чизма. **91**. 82- чизма. **92**. 83- чизма. **107**. $\frac{1}{3}$. **108**. $\frac{1}{2}$. **109**. 1. **110**. 0. **111** $\frac{1}{2}$. **112**. $\frac{4}{3}$. **113**. $\frac{2}{3}$. **114**. 0. **115**. 0.



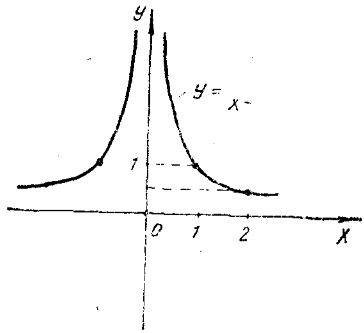
74- чизма



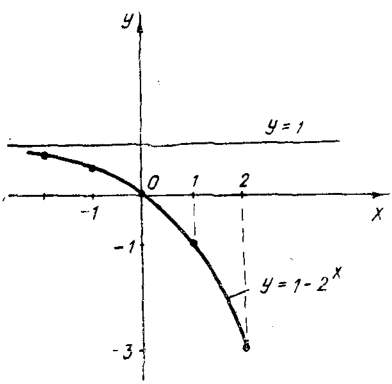
75- чизма



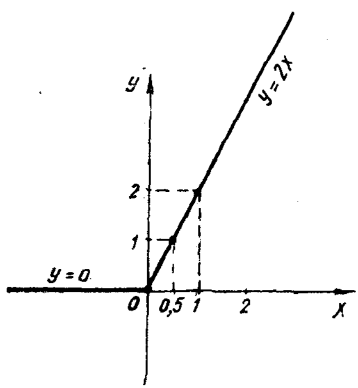
76- чизма



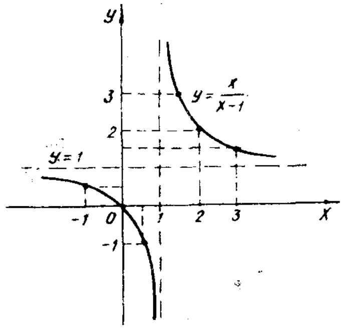
77- чизма



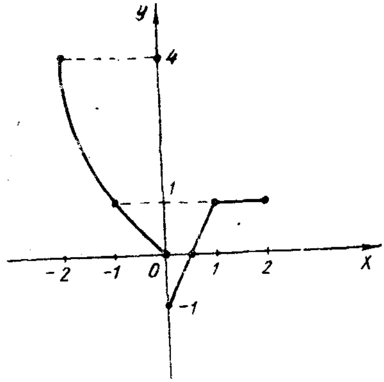
78- чизма



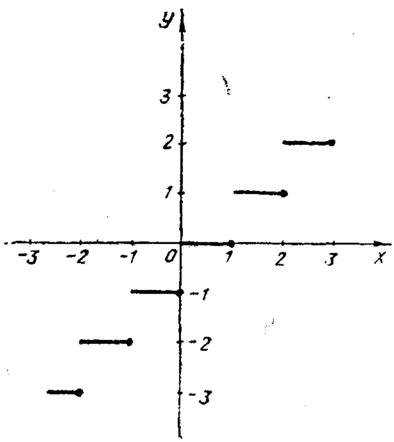
79- чизма



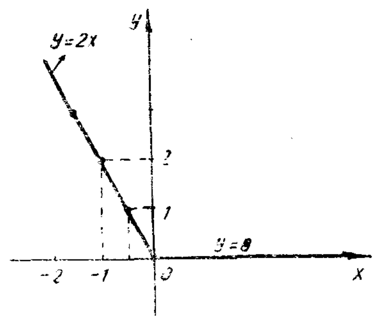
80- чизма



81- чизма



82- чизма



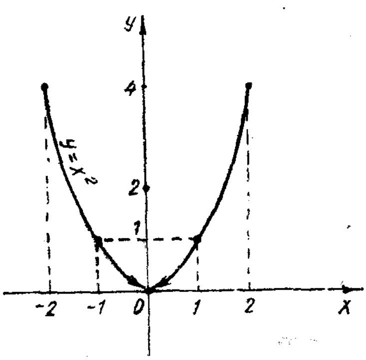
83- чизма

116. Лимити йўқ. **117.** 0. **118.** 0. **119.** 1. **120.** $-\frac{1}{2}$. **121.** $-\frac{2}{9}$. **127.** 0. **128.** 2. **129.** $8a$. **130.** Мавжуд эмас. **131.** 1) 8; 2) 0; 3) мавжуд эмас. **133.** $\frac{4}{3}$. **134.** 5. **135.** 36. **136.** 1. **137.** $\sqrt{2}$. **138.** -1. **140.** 0. **141.** 1. **142.** 1. **143.** $\frac{1}{2}$. **147.** $-0{,}6$. **148.** 1. **149.** 1. **150.** $\frac{3}{2}$. **151.** $\frac{3}{13}$. **152.** $\frac{5}{2}$. **153.** $\frac{2}{3}$. **154.** 0. **155.** $\frac{3}{4}$. **156.** $\frac{1}{4}$. **157.** $\frac{5}{2}$. **158.** 4. **159.** $\frac{2}{3}$.

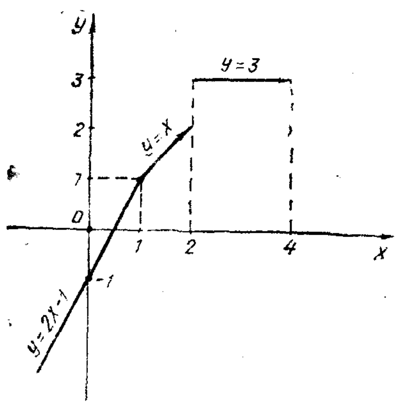
160. $\frac{m}{3}$. **161.** 1. **162.** -1. **163.** -12. **164.** $-\frac{1}{56}$. **165.** 2. **166.** $\frac{4}{3}$. **167.** $\frac{1}{3}$. **168.** $\frac{1}{5}$. **169.** $\frac{1}{4}$. **170.** 2. **171.** $6\sqrt{2}$. **172.** $2\cos x$. **173.** 1) ∞; 2) $-\frac{1}{2}$. Кўрсатма: 1) мисолда $\operatorname{arctg} x = t$; 2) мисолда $\arcsin(1-2x) = t$ деб белгиланг.

174. $\frac{1}{3}$. **175.** $\lim\limits_{x\to -0} \frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{x} = -\sqrt{2}$. **176.** 4. **177.** 1) $-2\sin x$; 2) $-\frac{1}{2}$. **178.** $\frac{3}{4}$. **179.** $\frac{1}{2}$. **180.** 1. **181.** -1. **182.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **183*.** 3. **184*.** 1. **187.** $\frac{2}{5}$. **188.** 0. **189.** 100. **190.** -1. **191.** 0,5. **192.** 2. **193.** x. **194.** 1. **195.** 1. **196.** 0. **197.** 0,5. **198.** -1. **199.** $\frac{1}{2}$. **200.** 0. **202.** e^{-1}. **203.** e^{-1}. **204.** e^{10}. **205.** e. **206.** e^{mk}. **207.** $e^{-3/2}$. **208.** e. **209.** e^2. **210.** $\frac{2}{3}$. **211.** e. **212.** 1. **213.** 1. **214.** k. **215.** $\frac{1}{a}$. **216.** $\frac{1}{3}$. **217.** $\frac{2}{3}$. **218.** $-\frac{1}{4}$.

225. $x = 0$ нуқтада функция узилишга эга, бу нуқтада узлуксизликни тиклаш мумкин, бунинг учун $f(0) = 0$ деб олиш керак (84- чизма). **226.** $x = 1$ да сакрашга эга. Сакраш катталиги 3 га тенг. **227.** $x = 1$ да 1- тур узилишга (яъни узлуксизликни тиклаш мумкин) эга. **228.** $x = 2$ да функция 1- тур узилиш (сакраш)га эга. Сакраш катталиги 1 га тенг (85- чизма). **229.** $x = 0$ да 2- тур узилишга эга. **230.** $x = 0$ да сакрашга эга, сакраш катталиги 2 га тенг. **231.** $x = 1$ да 2- тур узилишга эга. **232.** $x = \pm 2$ да 2- тур узилишга эга.



84- чизма



85- чизма

237. 3) $3i$; 4) $6i$; 5) 0. **238.** 1) $3+7i$; 2) $\frac{13}{20}-\frac{7}{4}i$; 5) $3a+3bi$. **239.** 6) $3-11i$; 8) 13. **240.** 8) $\frac{6-\sqrt{6}}{10}+\frac{\sqrt{6}-1}{5}i$. **243.** 1) $\cos 0+i\sin 0$; 2) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; 3) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; 4) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $13(\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi))$, бунда $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{12}{5}$; 7) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; 9) $5(\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi))$, бунда $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}$; 10) $\sqrt{2}\times\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. **247.** 1) $-7+7\sqrt{3}\,i$; 2) $6i$; 3) -24; 4) 42; 5) i; 7) $\cos 190^\circ+i\sin 190^\circ$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; 9) $-i$; 10) 1; 11) -1; 12) $-i$. **248.** 1) -1; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$; 2) -3; $\frac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$; 3) 1; $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}$; 5) ± 2; $\pm 2i$; 6) 1; 2; $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; $-1\pm i\sqrt{3}$; 7) $\cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}k\pi\right)$; $k=0, 1, 2, 3, 4$. **251.** 1) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$; 2) $2e^{\frac{\pi}{6}i}$; 3) $4e^{\frac{\pi}{3}i}$; 4) $2e^{\frac{3\pi}{2}i}$; 5) $3e^{\frac{\pi}{2}i}$; 6) $2e^{2k\pi i}$.

III боб

254. 1) $2x+3$; 2) $-\frac{2}{x^3}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$; 4) $-2\sin 2x$; 5) $2\sec^2 2x$; 6) $-\frac{1}{x^2}$; 7) $3x^2$; 8) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. **256.** Эга эмас. **257.** $f'_+(1)=1$, $f'_-(1)=-1$. **258.** $f'_+(2)=f'_-(2)=4$. **261.** $5x^4-12x^2+2$. **262.** $2x^{-1/3}-5x^{3/2}-3x^{-4}$. **263.** $-\frac{1}{3}+2x-2x^3$. **264.** $\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. **265.** $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. **266.** $\frac{bc-ab}{(c+dx)^2}$. **267.** $5\cos x+$

$+\sin x$. **268.** $4/\sin^2 2x$. **269.** $\operatorname{ctg} x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$. **270.** $\dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$. **271.** $y' = 0$. **272.** $x \operatorname{arc\,tg} x$. **273.** $x^6 e^x (x+7)$. **274.** $e^x (\cos x - \sin x)$. **275.** $\dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$. **276.** $\dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}$. **277.** $\dfrac{2\ln x}{x \ln 10} - \dfrac{1}{x}$. **278** $\operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x$.

279. $\dfrac{2x \operatorname{ch} x - x^2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$. **280.** $-\operatorname{th}^2 x$. **281.** $\dfrac{-3(x \ln x + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x)}{x \ln^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x}$.

282. $10(x^2+1)^9 \cdot 2x$. **283.** $\dfrac{2ax+b}{3 \cdot \sqrt[3]{(ax^2+bx+c)^2}}$. **284.** $-e^{-x}$. **285.** $3\cos 3x$. **286.** $\dfrac{5}{\cos^2 5x}$. **287.** *a*) $\dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x}$; *б*) $-4^{\cos x} \cdot \ln 4 \cdot \sin x$.

288. $(2x+5)\cos(x^2+5x+1)$. **289.** $-4\cos^3 x \sin x$. **290.** $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$.

291. $\dfrac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$. **292.** $-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **293.** $-\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$. **294.** $\dfrac{1}{2(x+\sqrt{x})}$. **295.** $-\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)$. **297.** $\dfrac{1}{\sin x}$. **298.** $4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}} \times \ln 4 \cdot \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **299.** $-\dfrac{2}{(x+1)^2} \cdot \operatorname{ctg} \dfrac{2x+4}{x+1}$. **300.** $2\operatorname{tg}^2 2x \times (3 - 2\sin^2 2x)$. **303.** $\dfrac{2}{\cos^2 2x}$. **304.** $x^6 (x^2+1)^{10} (x^3+1)^5 \left(\dfrac{6}{x} + \dfrac{20x}{x^2+1} + \dfrac{15x^2}{x^3+1}\right)$. **305.** $x^x(1+\ln x)$. **306.** $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right)$. **307.** $(\cos x)^{\operatorname{arc\,tg} x}\left(\dfrac{\ln \cos x}{1+x^2} - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arc\,tg} x\right)$. **308.** $(\ln x)^{x-1}(\ln \ln x \cdot \ln x + 1) + 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$. **309.** a) $y = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса}, \\ -x^2, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$

$f'_+(x) = 2x$,
$f'_-(x) = -2x$,
$f'_+(0) = f'_-(0) = 0$. Демак, $x = 0$ да дифференциалланувчи, лекин $x \neq 0$ да дифференциалланувчи эмас.

б) $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса}, \\ \ln(-x), & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$ $\quad \Bigg| \; y' = \dfrac{1}{x}, \; x \neq 0.$

310. $y' = \dfrac{7}{12\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x^5}}}}$. **311.** $y^{(5)} = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. **312.** $y^{(4)} = -\dfrac{15}{16x^3\sqrt{x}}$. **313.** $y^{(3)} = -4(2x^2\cos 2x + 6x\sin 2x - 3\cos 2x)$.

314. $y'' = \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **315.** $y'' = \dfrac{4}{(x-1)^3}$. **316.** $y^{(4)} = 0$. **317.**

$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$. **318.** $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

$y^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{агар } n \text{ — тоқ сон бўлса,} \\ \operatorname{sh} x, & \text{агар } n \text{ — жуфт сон бўлса.} \end{cases}$

319. $(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1} \cdot 2^{n-1} \cdot \sin\left(2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$; бунда $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ ифода $\frac{n+1}{2}$ нинг бутун қисми. **320.** $y^{(n)} = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$. **321.** $f'''(3) = 4320$. **325.** 1) $2^{n-1} \cdot e^{-2x}\left(2(-1)^n x^2 + 2n \cdot (-1)^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2}, (-1)^{n-2}\right)$, 2) $(1-x^2)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2nx \cdot \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1)\cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$. **330.** $y' = \frac{-3x^2y + 6xy^2 + 3}{x^3 - 6x^2y + 15y^2}$. **331.** $y' = \frac{-2x^3y - 2xy^3 + y}{x^4 + x^2y^2 + x}$.

332. $y'' = \frac{2y^5(xy^2+1)}{(3xy^2+2)^3}$. **333.** $\frac{13}{32}$. **334.** $\frac{x+y}{x-y}$. **335.** $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$. **336.** $\frac{y}{x} \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$. **337.** $\frac{3}{2} t^2$. **338.** $-\frac{b}{a}$. **339.** $-\frac{2t}{1-t^2}$.

340. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **341.** $-2e^{3t}$. **342.** $\operatorname{tg} t$. **343.** ∞. **344.** $9t^3$. **345.** $-\frac{1}{a\sin^3 t}$. **346.** $-\frac{1}{at\sin^3 t}$. **347.** 0. **348.** $(1+t^2)(1+3t^2)$. **349.** $y = e^x - 1$ ва $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = 1$, бу ерда оддий дифференциаллаш қоидаси ўринли эмас. **350.** $\frac{t^2 + t - 1}{e^{2t}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$. **359.** $7x - y - 2 = 0$. **360.** $x - y - 1 = 0$. **361.** $x + y - 4 = 0$ уринма тўғри чизиқ, $x - y = 0$ нормал тўғри чизиқ. **362.** $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} \approx 26°34'$. **363.** $\frac{\pi}{4}$. **364.** (2; 5). **365.** $y'(1) = -6$; $y = -6x + 7$ — уринма тўғри чизиқ тенгламаси. **366.** $x = 2$. **367.** $\frac{\pi}{4}$. **369.** $v = \frac{2}{3} + \ln 3$. **370.** $E = 625\ \frac{\text{г} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$. **371.** $\frac{dQ}{dt} = k(a - Q)$. **372.** $\omega = 2\pi$ рад/с. **373.** 23 А. **374.** $v = -ae^{-at}(\cos(at + b) + \sin(at + b))$; $F = 2ma^2e^{-at} \cdot \sin(at + b)$. **379.** $\Delta f(1) = 0{,}862$; $df(1) = 0{,}8$. **380.** $\Delta y \approx dy = 0{,}05$. **381.** $\Delta f(1) = 0{,}0099$; $df(1) = -0{,}01$; $|\Delta y - dy| = 0{,}0001$; $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = 0{,}01$. **382.** 565 см³. **384.** $-\frac{dx}{1+x^2}$. **385.** $\frac{5(\arcsin x)^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **386.** $\frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$. **387.** $\frac{-(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$.

388. $\frac{-x(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$. 389. $\left(-\sin x \ln x + \frac{2\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)(dx)^2$. 390. $\frac{4(x^4+4x^2-1)}{(x^2-1)^2}\cdot(dx)^2$. 393. 2,02. 394. $-0{,}1$. 395. 0,851. 399. 0. 400. $\frac{a}{\sqrt{b}}$. 401. -2. 402. 2. 403. -2. 404. 0. 405. a. 406. $\frac{4a^2}{\pi}$. 407. -1. 408. 0. 409. ∞. 410. 1. 411. e^2 412. e^{π}. 413. 1. 414. 1. 418. 1) $1+\frac{x\ln 3}{1!}+\frac{x^2\ln^2 3}{2!}+\ldots+\frac{x^n\cdot\ln^n 3}{n!}$; $R_n=\frac{x^{n+1}\cdot\ln^{n+1}3}{(n+1)!}e^{\theta x}$.

x нинг ҳар қандай қийматида $R_n\to 0$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{1!}-\ldots\right.$ $\left.\ldots\pm\frac{x^n}{n!}\right)$, $R_n=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\cos\left(\theta x-\frac{\pi}{4}+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right|$; x нинг ҳар қандай қийматида $R_n\to 0$; 3) $x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n!}$; x нинг ҳар қандай қийматида $R_n\to 0$. 419. 1) $e\left(1+\frac{x-a}{1!\,a}+\frac{(x-a)^2}{2!\,a^2}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!\,a^n}\right)$, $x\in(-\infty;\infty)$ да $R_n\to 0$; 2) $\cos a+\frac{x-a}{1!}\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{(x-a)^2}{2!}\cos\left(a+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}\cos\left(a+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, x нинг ҳар қандай қийматида $R_n\to 0$. 420. 0,9848; 1,3955; 2,0022; 0,5878. 422. 1) $(-\infty;\infty)$ да ўсади; 2) $(-\infty;-1)$ ва $(1;\infty)$ да ўсади; $(-1;1)$ да камаяди; 3) $k>0$ бўлганда $(-\infty;\infty)$ да функция ўсади; $k<0$ бўлганда эса $(-\infty;\infty)$ да функция камаяди; 4) $(-\infty;-3]$ да функция камаяди; $[3;\infty)$ да эса ўсади; 5) $(-\infty;\infty)$ да камаяди; 6) функция $(-\infty;\infty)$ да ўсади. 430. $y_{\max}=y(0)=0$; $y_{\min}=y(4)=-32$. 431. $y_{\max}=y(\pm1)=4$; $y_{\min}=y(0)=3$. 432. Экстремум йўқ. 433. $y_{\min}=y(\pm 2)=4$. 434. $y_{\min}=y(0{,}5)=8$; $y_{\max}=y(1)=10$. 435. $y_{\min}=y\left(-\frac{\ln 2}{3}\right)=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

436. $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)=\sqrt{2}$; $y_{\min}=y\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)=-\sqrt{2}$.

437. $y_{\min}=y(e)=e$. 438. $y_{\max}=y(2)=2$. 439. $\max\limits_{[0;3]}y(x)=y(2)=10$; $\min\limits_{[0;3]}y(x)=y(0)=-10$. 440. $\min\limits_{[-2,1]}y(x)=y(\pm1)=2$; $\max\limits_{[-2;1]}y(x)=y(-2)=11$. 441. $\min\limits_{[-1;3]}y(x)=y(3)=-5{,}13$; $\max\limits_{[-1;3]}y(x)=y(0)=1$. 442. $\min\limits_{[-2;1]}y(x)=y(0)=1$; $\max\limits_{[-2;1]}y(x)=y(-2)=3$. 443. $\max\limits_{(0;1]}y(x)=0$; $\min\limits_{(0;1]}y(x)$ — м. э. 444. $\max\limits_{(-\infty;\infty)}y(x)=y(0)=1$; $\min\limits_{(-\infty;\infty)}y(x)$ — м. э. 445. $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}y(x)=\pi-1$; $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}y(x)=-(\pi+1)$. 446.

$\max\limits_{(-\infty;\,\infty)} y(x) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\min\limits_{(-\infty;\,\infty)} y(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **447.** $r = h = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$. **448.** Тўғри тўртбурчак квадрат бўлиши керак. **449.** 20 м ва 40 м. **450.** 6 см. **451.** $\sqrt{\frac{2ap}{k}}$. **452.** $\frac{2m_0}{3k}$; $\frac{2}{27}\cdot\frac{m_0^3 g^2}{k^2}$. **453.** Лагерга 3 км қолганда пиёда юриш керак. **454.** 2,4 м. **455.** $a\sqrt{2}$; $b\sqrt{2}$. **456.** 1. **457.** Цилиндр баландлиги $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ бўлганда ҳажм энг катта бўлади. **458.** Конус баландлиги $\frac{4R}{3}$ бўлганда V конус энг катта бўлади. **459.** $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **460.** $H = 2R$ бўлганда цилиндрнинг тўла сирти энг кичик бўлади. **463.** $\left(\frac{5}{3};\ -\frac{250}{27}\right)$ — бурилиш нуқтаси, $\left(-\infty;\ \frac{5}{3}\right)$ да қавариқ. $\left(\frac{5}{3};\ \infty\right)$ да ботиқ. **464.** Бурилиш нуқталари (2; 62) ва (4; 206); ($-\infty$; 2) да ботиқ, (2; 4) да қавариқ, (4; ∞) да ботиқ. **465.** Бурилиш нуқтаси йўқ, функция графиги ботиқ. **466.** Бурилиш нуқтаси (b; a); ($-\infty$; b) да қавариқ, (b; ∞) да ботиқ. **467.** Бурилиш нуқтаси (± 1; $\ln 2$); ($-\infty$; -1) да қавариқ, (-1; 1) да ботиқ, (1; ∞) да қавариқ. **468.** Бурилиш нуқтаси йўқ; ($-\infty$; -2) ва (2; ∞) да ботиқ, (-2; 2) да қавариқ. **469.** Бурилиш нуқтаси йўқ; ($-\infty$; 0) да қавариқ, (0; ∞) да ботиқ. **470.** $\left(2;\ \frac{2}{e^2}\right)$ — бурилиш нуқтаси; ($-\infty$; 2) да қавариқ, (2; ∞) да ботиқ. **473.** $a = -3$. **475.** $y = \pm\frac{b}{a}x$. **476.** $x = 0$; $y = 0$. **477.** $x = 0$. **478.** $x = -1$; $y = \frac{x}{2} - 1$. **479.** $y = x + 2$. **480.** $y = 0$. **481.** $x = 0$; $y = 0$. **482.** $x = -2$ ва $y = 2x - 4$. **484.** ($-\infty$; ∞) да аниқланган, функция графиги координата бошига нисбатан симметрик, $y_{\max}(-1) = 2$, $y_{\min}(1) = -2$; бурилиш нуқталари: (0; 0), $(\pm 0{,}1\cdot\sqrt{30};\ \mp 0{,}22\times\sqrt{30})$. Асимптотага эга эмас. **485.** ($-\infty$; ∞) да аниқланган. Функция графиги Oy ўқига нисбатан симметрик. $y_{\max}(0) = 1$, $y_{\min}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$; бурилиш нуқтаси $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{67}{72}\right)$, асимптотаси йўқ. **486.** Функция $x = 0$ ва $x = 1$ нуқталардан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = -4$, бурилиш нуқтаси йўқ. Асимптоталар: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. **487.** Функция $x = \pm 1$ дан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. График координата бошига нисбатан симметрик; $y_{\max}(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y_{\min}(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, бурилиш нуқтаси (0; 0), асимптота-

лар: $x = \pm 1$, $y = x$. **488.** Функция $x = \frac{1}{3}$ дан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган; $y_{\max}(0) = 0$, $y_{\min}\left(\frac{2}{3}\right) = 1\frac{1}{3}$, бурилиш нуқтаси йўқ. Асимптоталар: $x = \frac{1}{3}$, $y = x + \frac{1}{3}$. **489.** Функция $x \geqslant -1$ лар учун аниқланган бўлиб, икки қийматлидир. График Ox ўқига нисбатан симметрик, бурилиш нуқталари: $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$. Экстремум ва асимптоталар йўқ. **490.** Функция $x > 0$ ва $x \geqslant \sqrt[3]{2}$ лар учун аниқланган бўлиб, икки қийматлидир. График Ox ўқига нисбатан симметрик. $|y_{\min}(-1)| = 1$, бурилиш нуқтаси йўқ. Асимптоталар: $x = 0$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.
491. $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган, график координата бошига нисбатан симметрик, $y_{\max}(\sqrt{2}) = \frac{1}{e}\sqrt{2e}$, $y_{\min}(-\sqrt{2}) = -\frac{1}{e}\sqrt{2e}$. Бурилиш нуқталари: $(0;\ 0)$, $(\pm\sqrt{6};\ \pm\sqrt{6}\ e^{-3/2})$. Асимптотаси $y = 0$.
492. $x = 0$ дан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-0} y = 0$; $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}$, бурилиш нуқтаси йўқ. Асимптота $x = 0$.
493. $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган, 2π даврга эга; $y_{\max}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \sqrt{2}$, бунда $k = 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \ldots$, $y_{\min}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -\sqrt{2}$, бунда $k = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots$, бурилиш нуқтаси $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi;\ 0\right)$, бунда $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$. Асимптоталар йўқ. **494.** $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган, даври 2π. График координата бошига нисбатан симметрик. $[0;\ 2\pi]$ да $x = \frac{\pi}{3}$ бўлганда $y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $y_{\min}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Бурилиш нуқталари: $(0;\ 0)$, $(\pi;\ 0)$, $\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right);\ \frac{3}{16}\sqrt{15}\right)$, $\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right);\ -\frac{3}{16}\sqrt{15}\right)$. Асимптота йўқ. **495.** $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган, график координата бошига нисбатан симметрик. Экстремумлар йўқ. Бурилиш нуқталари $\left(-\sqrt{3};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0;\ 0)$, $\left(\sqrt{3};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Асимптота $y = 2x$. **496.** $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган ва узлуксиз. Экстремумлар йўқ. Бурилиш нуқталари: $(0;\ 1)$ ва $(1;\ 0)$. Асимптотаси $y = -x$.
497. $x = 0$ дан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$. График Oy ўқига нисбатан симметрик. Экстремум нуқталари $\operatorname{tg} x = x$ тенгламани қаноатлантиради. Бурилиш нуқталари $x_k = k\pi$, $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. Асимптота $y = 0$. **498.** $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган. График координата бошига нисбатан симметрик. $y_{\max}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$, $y_{\min}(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$; бурилиш нуқтаси $(0;\ 0)$. Асимптоталари: $y = x \pm \pi$. **499.** $(-\infty;\ \infty)$ да

аниқланган. $y_{max}\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4e}\right)^3$. Бурилиш нуқталарининг абсциссалари: $x=0,\ x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$. Асимптота: $y=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=0$.

500. $(-\infty;\ \infty)$ да аниқланган. График Oy ўқига нисбатан симметрик. $y_{max}(\pm 1)=1,\ y_{min}(0)=0$. Бурилиш нуқтаси ва асимптотаси йўқ.

IV боб

505. $\frac{x^5}{5}+C$. **506.** $\frac{5}{7}\sqrt[5]{t^7}+C$. **507.** $-\frac{1}{3y}+C$.

508. $\ln|x+3|+C$. **509.** $\frac{(a-5)^9}{9}+C$. **510.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

511. $\ln(v+\sqrt{v^2+7})+C$. **512.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C$. **513.** $\arcsin\frac{x}{2}+C$. **514.** $-3\cos\frac{x}{3}+C$. **515.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2\varphi+C$. **516.** $\frac{1}{4}e^{4x}+C$. **517.** $-\frac{3\cdot 5^{-2t}}{2\ln 5}+C$. **518.** $\frac{\ln|2x+5|}{2}+C$. **519.** $-\frac{1}{6(3x+2)^2}+C$. **520.** $-\ln|\cos x|+C$. **522.** $\frac{5}{3}x\sqrt[5]{x}-\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{4}x\cdot\sqrt[3]{x}+5x+C$. **523.** $\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+C$. **524.** $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **525.** $2(x^2-x+1)\sqrt{x}+C$. **526.** $\frac{x^2}{2}-3\ln(x^2+6)+C$. **527.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$.

528. $\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)-2x+C$. **529.** $\frac{(x-2)^2}{2}+2\ln|x+2|+C$.

531. $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$. **532.** $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C$. **533.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi+\ln|\cos\varphi|+C$. **534.** $-\frac{3x^2+2a}{15}\sqrt{(a-x^2)^3}+C$. **535.** $\ln|x-2|-\frac{3x-5}{(x-2)^2}+C$. **536.** $\frac{2}{15}(3x^2-ax-2a^2)\sqrt{a-x}+C$.

537. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}+C$. **538.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **539.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})+C$. **540.** $x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})+C$. **541.** $e^x+\ln|e^x-1|+C$. **542.** $\ln|\ln x|+C$. **543.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sin x+\sqrt{\frac{1}{2}+\sin^2 x}\right)+C$. **544.** $-2\sqrt{2+\cos^2 x}+C$. **545.** $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+$

$+C$. **546.** $\frac{4}{3}(\sqrt[4]{x^3}-\ln(1+\sqrt[4]{x^3})+C$. **549.** $\sin x -$
$-x\cos x + C$. **550.** $\frac{x^2}{9}(3\ln x - 1)+C$. **552.** $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|+C$.
553. $\frac{x^2-1}{2}\ln|x-1|-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+C$. **554.** $t\,\mathrm{arctg}\,t+\frac{1}{2}\ln(1+$
$+t^2)+C$. **555.** $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$. **556.** $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+$
$+C$. **557.** $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$. **558.** $e^x(x^3-3x^2+$
$+6x-6)+C$. **559.** $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\sin nx+a\cos nx)+C$. **560.** $x\,\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}-$
$-\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$. **561.** $I_n=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\cdot\ln^n x-\frac{n}{k+1}I_{n-1}$.
562. $I_n=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. **566.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+$
$+C$. **567.** $\frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{5}+C$. **569.** $2\ln(x^2+3x+4)-\frac{18}{\sqrt{7}}\times$
$\times\mathrm{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$. **570.** $\frac{4}{5}\ln|x|+\frac{11}{5}\ln|x+5|+C$. **571.** $2x+$
$+\frac{1}{9}\left(\frac{7}{3x+1}+\ln|3x+1|\right)+C$. **572.** $\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{3}{4}\ln|x-1|+$
$+\frac{41}{4}\ln|x+3|+C$. **573.** $\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$. **574.** $\ln|x-1+$
$+\sqrt{x^2-2x}|+C$. **575.** $\frac{3}{2}\arcsin 2x-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$. **576.**
$\sqrt{x^2+6x}-6\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x}|+C$. **577.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{2}-$
$-\frac{1}{3}\sqrt{1-2x-3x^2}+C$. **578.** $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+$
$+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. **580.** $\frac{1}{x}+\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|+C$. **581.** $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+$
$+C$. **582.** $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **583.**
$\ln|x-1|-\frac{2x-1}{(x-1)^2}+C$. **584.** $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\,\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.
585. $\frac{2x^3-3x}{2(x^2-1)}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **586.** $\frac{1}{9}\ln(x^2+2)-$

$-\frac{1}{9\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+C$. **587.** $-\frac{3}{x+1}+$ $+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg}x+C$. **588.** $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

590. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **592.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C$. **593.** $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}-$ $-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\cdot\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$. **594.** $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-$ $-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **595.** $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C$. **597.** $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$. **598.** $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+$ $+1)+C$. **599.** $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln|\sqrt[4]{x}+1|+$ $+C$. **600.** $6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **601.** $2\sqrt{1+x}+$ $+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$. **602.** $\frac{1}{3}(3x+4)-\frac{1}{2}(3x+4)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{3x+4}-$ $-\ln|\sqrt[3]{3x+4}+1|+C$. **603.** $-\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{4}{3}}+C$. **604.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-$ $-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **605.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+$ $+16\sqrt[6]{x}+\frac{3\cdot\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **606.** $\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

607. $\frac{1}{4}x^2\cdot\sqrt{1+x^4}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right|+C$. **608.** $\frac{3}{22}(1+$ $+x^2)^{11/3}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{8/3}+\frac{3}{10}(1+x^2)^{5/3}+C$. **609.** $2(4+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}+$ $+C$. **610.** $\frac{1}{14}(1+3\sqrt[3]{x^2})^{7/3}-\frac{1}{8}(1+3\sqrt[3]{x^2})^{4/3}+C$. **611.** $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{7/4}+C$. **612.** $-\frac{2}{5}(4+3\sqrt[3]{x})(2-$

$-\sqrt[3]{x})^{3/2}+C$. **613.** $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$. **614.** $\frac{x-3}{2}\times$ $\times\sqrt{x^2+2x+3}+C$. **615.** $\frac{x+5}{2}\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{7}{2}\ln(x+1+$ $+\sqrt{x^2+2x+2})+C$. **616*.** $\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}+\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+$ $+C$. **617*.** $\ln\frac{|Cx|}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left(x=\frac{1}{z}\right.$ алмаштиришни бажариш мумкин$\left.\right)$. **618.** $\frac{1}{2}\left((x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+$ $+C$. **620.** $C-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|$. **621.** $\left(\frac{1}{3}x^2-\right.$ $\left.-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+$ $+C$. **622.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+C$. **625.** $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. **626.** $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)+C$. **627.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$. **628.** $\frac{1}{12}\operatorname{tg}^4 3x-\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|+C$. **629*.** $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\ln|\operatorname{tg}x|)+C$. **630.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\sin 10x+C$. **631.** $\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **632.** $\frac{1}{5}\cos^5 x-$ $-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. **633.** $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+C$. **634.** $\frac{3}{8}x-$ $-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **635.** $x+\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$. **636.** $\frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x+\frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x+C$. **637.** $\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{22}\sin 11x+C$. **638*.** $\frac{\cos 12x}{48}-\frac{\cos 6x}{24}-\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 2x}{8}+C$. **639*.** $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 z-$ $-\operatorname{ctg}^2 z)+2\ln|\operatorname{tg}z|+C$. **640.** $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}-\operatorname{ch}x+C$. **641.** $\frac{\operatorname{sh}^4 x}{4}+C$. **642.** $-\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **643.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\operatorname{ch}x}+C$. **644.** $-2\operatorname{cth}2x$ $+C$. **645.** $\ln(\operatorname{ch}x)-\frac{\operatorname{th}^2 x}{2}+C$. **646.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)+C$. **647*.**

$-\frac{sh^2x}{2}-\frac{sh2x}{4}-\frac{x}{2}+C$. Кўрсатма: $\frac{-1}{\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x}=\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x$ айниятдан фойдаланинг. **648.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch} x+\sqrt{\operatorname{ch} 2x})+C$.

V боб

654. 8. **655.** $\frac{72}{5}$. **656.** $\frac{a^3}{3}$. **657.** $\frac{3\pi}{8}+\frac{\ln 2}{2}$. **658.** $-\ln 5$. **659.** π. **660.** $\ln 2$. **661.** $\sqrt{e}-1$. **662.** $\frac{T}{\pi}\sin\varphi_0$. **663.** 1. **664.** $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}-1)$. **665.** $0\leqslant a<b$ бўлса, $b-a$; $a<b\leqslant 0$ бўлса, $a-b$; $a<0<b$ бўлса, $a+b$. **666.** $\frac{4}{3}$. **667.** Йўқ, чунки $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ функция $[0;1]$ да чегараланмаган. Шунинг учун берилган интеграл мавжуд эмас. $\int_0^1\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}\Big|_0^1=1$ натижа эса тўғри эмас. **668.** Йўқ, чунки $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ функция $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$ функция учун $[-1;1]$ да бошланғич функция бўлмайди. $F(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ бошланғич функция $x=0$ да 1-тур узилишга эга: $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$. **669.** Йўқ, чунки $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ функция $[2;4]$ кесмада аниқланмаган. **670.** Йўқ, чунки $f(x)=\operatorname{tg}^2x$ функция $[0;\pi]$ кесмада аниқланмаган, яъни функция $x=\frac{\pi}{2}$ да узилишга эга. Шунинг учун Ньютон — Лейбниц формуласини қўллаш мумкин эмас. **671.** $\int_0^1 xdx>\int_0^1 x^2dx$. **672.** $\int_0^1 e^x\,dx>\int_0^1 e^{x^2}\,dx$. **673.** $\int_0^1 e^{-x}\,dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx$. **674.** $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^x dx>\int_{-2}^{-1}3^x\,dx$. **675.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$. **676.** $\frac{1}{3}$. **677.** 0. **678.** $\frac{2\sqrt{10}}{3}$. **679.** $\ln 2$. **680.** 3. **681.** $\frac{153}{6}$. **682.** $P_{\text{ўр}}=$

$= \dfrac{40}{\sqrt[3]{20}\,(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{2})} \approx 4{,}32$ атм. **683.** $I_{\text{ўр}}^2 = \dfrac{I_0^2}{2}$. **685.** $2\ln 2 - 1$.

686. $\dfrac{\pi}{2} - 1$. **687.** $\dfrac{1+3a}{a^2}$. **688.** $-\dfrac{\pi}{2}$. **689.** $\dfrac{1}{e}$. **690.** $2\left(1-\right.$ $\left.-\dfrac{1}{e}\right)$. $|\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & x \in \left[\dfrac{1}{e};\ 1\right] \\ \ln x, & x \in [1;\ e] \end{cases}$, бўлгани учун $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx =$ $= \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x)\,dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x dx = 2\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$. **692.** $2\ln 2 - 1$. **693.** $\dfrac{1}{24}$; $x + 1 = t$ алмаштиришдан фойдаланинг. **694.** $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **695.** $\ln\dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{3}$. **696.** $\operatorname{arctg} e - \dfrac{\pi}{4}$. **697.** $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ алмаштиришдан фойдаланинг. **698.** $2 - \dfrac{\pi}{2}$. **699.** $\ln\dfrac{4}{3}$; $\sin x = t$ алмаштиришдан фойдаланинг.

VI боб

704. $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. **705.** 1. **706.** $\dfrac{3}{4}$. **707.** $\dfrac{1}{p+1}$. **709.** $4\dfrac{2}{3}$ кв. б. **710.** $\dfrac{35}{6}$ кв. б. **711.** $\dfrac{3}{\ln 2} - \dfrac{4}{3}$ кв. б. **712.** $\ln 3$ кв. б. **713.** 2кв. б. **714.** 2 кв. б. **715.** $\dfrac{4}{3}$ кв. б. **716.** 1 кв. б. **717.** 21 кв. б. **718.** 4 кв. б. **719.** $2 - \sqrt{2}$. **722.** π. **723.** $\dfrac{3\pi c^4}{8ab}$. **724.** $\dfrac{8}{3}$. **725.** $\dfrac{3}{2}\pi a^2$. **726.** $\dfrac{3\pi a^2}{2}$. **727.** $\dfrac{\pi a^2}{4}$. **728.** $2a^2\left(\dfrac{5\pi}{8} - 1\right)$. **738.** $\dfrac{8}{27}\left(\dfrac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right)$. **739.** $\dfrac{112}{27}$. **740.** $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. **741.** $1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. **742.** $\ln 3 - \dfrac{1}{2}$. **743.** $2\pi r$. **744.** $\dfrac{a}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$. **745.** $\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. **746.** $10\left(\dfrac{67}{27} + \right.$ $\left.+\sqrt{5}\right)$. **748.** $6a$. **749.** $16a$. **750.** $\dfrac{\pi^3}{3}$. **752.** $2(e^t - 1)$. **753.** $4\sqrt{3}$. **755.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \dfrac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$. **756.** $8a$. $\sqrt{\rho'^2 + \rho^2} =$

$$= 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = \begin{cases} 2a\cos\frac{\varphi}{2}, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ -2a\cos\frac{\varphi}{2}, & \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$ дан фойдаланинг.

757. $\frac{5}{12} + \ln\frac{3}{2}$. **758.** $\frac{19}{3}$. $l = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{1 + \rho^2(\theta'(\rho))^2}\, d\rho$ формуладан фойдаланинг. **763.** $14{,}4\pi$. **764.** $\frac{\pi}{2}$. **765.** $\frac{4\pi}{3}a^2b$. **766.** $34\frac{2}{15}\pi$.

767. а) $\frac{\pi^2}{2}$; б) $2\pi^2$. **768.** а) $\frac{16}{15}\pi$; б) $\frac{8\pi}{3}$. **769.** 12π. **770.** 64π, кесим юзи $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi((3+x)^2 - (3-x)^2) = 12\pi x = 12\pi\sqrt{4-y}$; $V = 12\pi\int\limits_0^4 \sqrt{4-y}\, dy = 64\pi$. **771.** $\frac{1}{3}\pi R^2 H$. **772.** $2\pi r^2 b$.

773. $\frac{1}{15}\pi a^3$. **774.** а) $5\pi^2 a^3$; б) $6\pi^3 a^3$. **775.** $\frac{2}{3}\pi^2 a^3(\pi^2 - 6)$. **776.** $\frac{32}{105}\pi a^3$.

777. $\frac{8}{3}\pi a^3$. **778.** $\frac{4\sqrt{3}-6}{9}\pi ab^2$. **782.** $\frac{14\pi}{3}$. **783.** $\frac{62\pi}{3}$.

784. 8π. **785.** $\frac{\pi}{9}(34\sqrt{17} - 2)$. **786.** $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

788. 3π. **790.** $\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^{\pi} - 2)$. **791.** $4\pi r^2$. **792.** $16a^2\pi^2$. $P_y = 2\pi\int\limits_L x\,dl = 4\pi a^2\int\limits_0^{\pi}(t - \sin t)\sin\frac{t}{2}dt + 4\pi a^2\int\limits_{\pi}^{2\pi}(t - \sin t)\sin\frac{t}{2}dt = 16a^2\pi^2$.

793. $\frac{12}{5}\pi a^2$. **794.** $4\pi^2 r^2$. **795.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi = 4a\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$. $p = 2\pi\int\limits_0^{\pi} y\,dl = 16\pi a^2\int\limits_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{32}{5}\pi a^2$. **796.** $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$. $\cos 2\varphi \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ (лемниската ўнг тармоғи), $\frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{4}$ (лемниската чап тармоғи). $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $y = \rho\sin\varphi = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$. Изланаётган сирт юзи, лемниската ўнг тармоғининг айланишидан ҳосил бўлган сирт юзининг иккиланганига тенг бўлади, яъни

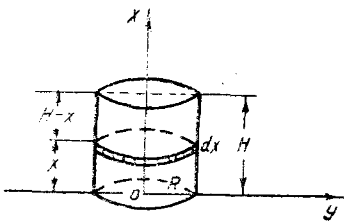
$p = 2\cdot 2\,\pi \int\limits_L y\,dl = 4\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sin\varphi\, d\varphi = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2})$. **804.** $M_x = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $M_y = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. **805.** $M_x = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1)$, $M_y = \frac{9}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{16}\ln(2+\sqrt{5})$. **806.** $M_x = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$. **807.** $x_0 = y_0 = \frac{a}{3}$. **808.** $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{2R}{\pi}$. **809.** $M_x = \frac{\pi}{4}$, $M_y = \pi$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{8}$. **810.** $x_0 = y_0 = \frac{9}{20}$. **811.** $M_x = \frac{P}{2}$, $M_y = \frac{2\sqrt{2p}}{5}$; $x_0 = \frac{3}{5}$, $y_0 = \frac{3}{8}\sqrt{2p}$. **812.** $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{4}{3\pi}R$.

813. $x_0 = \frac{4a}{3\pi}$, $y_0 = \frac{4b}{3\pi}$. **814.** $x_0 = y_0 = \frac{a}{5}$. Фигура $y = x$ $(x > 0,\ y > 0)$ биссектриссага нисбатан симметрик бўлгани учун $x_c = y_c$. $I_1 = \int\limits_0^a xy\,dx = \int\limits_0^a x(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = \frac{a^3}{30}$. $I_2 = \int\limits_0^a y\,dx = \int\limits_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = \frac{a^2}{6}$. $x_c = y_c = \frac{I_1}{I_2} = \frac{a}{5}$. **815.** $x_0 = \frac{4}{\pi}$, $y_0 = \frac{20}{3\pi}$. **816.** $x_0 = \frac{5a}{8}$, $y_0 = \frac{15\pi a}{256}$. **817.** $\frac{\sqrt{(1+e)^3} - 2\sqrt{2}}{3}$. **818.** $I_x = \frac{256}{15}a^3$, $I_y = 16a^3\left(\pi^2 - \frac{128}{45}\right)$.

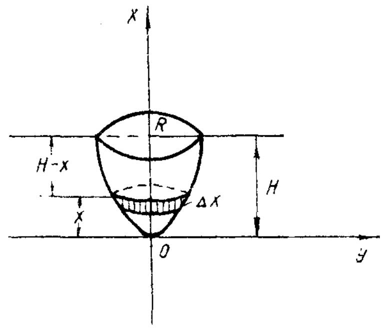
819. $I_x = \frac{ab^3}{3}$, $I_y = \frac{a^3b}{3}$. **820.** $I_x = \frac{ab^3}{12}$, $I_y = \frac{a^2b}{12}$. **821.** $I_y = \frac{8}{7}a^4$. **822.** $\frac{\pi R^4}{8}$. **823.** $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{2R}{\pi}$. $V = 4\pi R^2$, $l = \pi R$, $V = l\cdot 2\pi y_0$, $y_0 = \frac{4\pi R^2}{\pi R\cdot 2\pi} = \frac{2R}{\pi}$. **824.** $S = 2\pi y_0\cdot l$, $y_0 = \frac{2R}{\pi}$, $l = \pi R$, $S = 2\pi\frac{2R}{\pi}\cdot\pi R = 4\pi R^2$. **832.** $m = 75$кг. **833.** $m = k\pi r^4$. Ихтиёрий x радиусли шарнинг массаси $m(x)$ бўлсин. Масаланинг шартига асосан зичлик $\mu = kx$. Масса $m = \int\limits_0^r \mu\,dv = \int\limits_0^r kx\cdot 4\pi x^2 dx = 4k\pi\int\limits_0^r x^3 dx = k\pi r^4$.

834. $x_2 = x_1 + \sin\left(\frac{2\pi t_2}{T} + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \varphi_0\right)$. **835.** $S = V_0 t - \frac{gt^2}{2}$. **836.** 10^4м. **837.** $V = \frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a - bt}\right)$, $h = \frac{A}{b^2}\left(b^2 t_1 - \right.$

$-(a-bt_1)\ln\dfrac{a}{a-bt_1}\Big)$. **838.** 0,18 Ж. **839.** $A=0{,}024$ кг/м. Узунлиги l м, кесими S мм² бўлган симни $x_м$ чўзиш учун сарф этиладиган куч $F=E\dfrac{S\cdot x}{l}$ формула билан аниқланади, бунда Е — эластиклик модули бўлиб, мис учун $E\approx 12000$ кг/мм² деб олиш мумкин. **840.** $A=\dfrac{\pi\gamma}{2}\times$

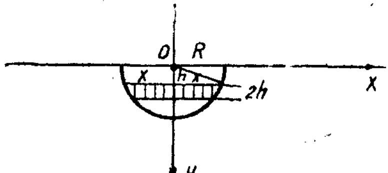


86- чизма

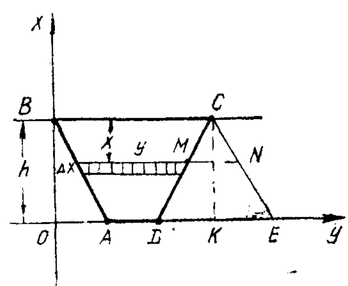


87- чизма

$\times R^2H^2$. Элементар куч (оғирлик кучи) $dF=\gamma\pi R^2dx$, бунда γ— сувнинг солиштирма оғирлиги ($dF=\gamma dv$). $A=\int\limits_0^H\gamma\pi R^2(H-x)\,dx=\dfrac{\pi\gamma}{2}R^2H^2$ (86- чизма). **841.** $l_0l_1\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$. **842.** $\dfrac{\pi R^2H^2\mu g}{6}$, μ — зичлик. Кесим юзи $S=\pi y^2$, элементар жисм ҳажми $\Delta V=\pi y^2\Delta x$, оғирлик кучи эса $\Delta p=\pi\mu y^2(H-x)\Delta x$. $y^2=2px$, $x=H$, $y=R$ бўлса, $R^2=2pH$,



88- чизма



89- чизма

$2p = \frac{R^2}{H}$; $y^2 = \frac{R^2}{H}x$, $A = \mu\pi\int\limits_0^H \frac{R^2}{H} x(H-x)\,dx$ (87- чизма). **843.** $0,12\ RTI_0^2$. $Q = 0,24I^2R$ Жоуль- Ленц қонунидан фойдаланинг. $Q = 0,24\,R\int\limits_{t_1}^{t_2} I^2dt$. **844.** $\frac{2}{3}R^3$. $dS = 2xdx = 2\sqrt{R^2-h^2}dh$, $\gamma = 1$, $g=1$; $dp = 2\mu gh\sqrt{R^2-h^2}\ dh$. $dp = 2h\sqrt{R^2-h^2}\,dh$ (88- чизма). **845.** $p = \frac{ah^2}{2}$ $(\gamma = 1)$. **846.** $\frac{h^2(a+2b)}{6}$. $\Delta DCE \backsim \Delta MCN$ дан: $\frac{DE}{MN} = \frac{ck}{x}$, $\frac{a-b}{a-y} = \frac{h}{x}$, $y = a - \frac{x}{h}(a-b)$. $p = \int\limits_0^h xydx$ (89- чизма). **851.** $\approx 0,6938$; $\delta(n) \leqslant 0,0017$. **855.** $\approx 0,957$. **856.** 1) $n_1 > 100$; 2) $n_2 > 4$; 3) $n_3 > 1$. **857.** $\approx 1,9541$. **858.** $\approx 0,7468$. **863.** $\frac{1}{3}$. **864.** π. **865.** Узоқлашувчи. **866.** Узоқлашувчи. **867.** $\frac{3\pi^2}{32}$. **868.** 1. **869.** $\frac{1}{2}$. **870.** e. **871.** -1. **872.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **873.** $\frac{1}{2}$. **874.** 2. **875.** Яқинлашувчи. **876.** Яқинлашувчи. **877.** Яқинлашувчи. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx + \int\limits_1^\infty e^{-x^2}dx$. $x \geqslant 1$ да $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ бўлади. $\int\limits_1^\infty e^{-x}dx$ яқинлашувчи, бу ҳолда берилган интеграл яқинлашувчи бўлади. **878.** Узоқлашувчи. **879.** Узоқлашувчи, $x \geqslant 1$ да $\frac{\sqrt{x}}{1+x} > \frac{\sqrt{x}}{x+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ дан фойдаланинг. **880.** Яқинлашувчи. $x \geqslant 2$ да $0 < \arcsin\frac{1}{x} \leqslant \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1$, $1 + x\sqrt{x} > x\sqrt{x}$, у ҳолда $\frac{2+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} < \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}$; $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ бўлгани учун берилган хосмас интеграл яқинлашувчи бўлади. **881.** Узоқлашувчи. $\frac{x+1}{x\sqrt{x}} > \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ дан фойдаланинг. **883.** Яқинлашувчи. $x \geqslant 1$.

$\frac{1}{x^2(1+e^{\frac{1}{x}})} < \frac{1}{x^2}$ дан фойдаланинг. **891**. Узоқлашувчи. **892**. $3+$
$+3\sqrt[3]{2}$. **893**. Узоқлашувчи. **894**. $9a^{\frac{2}{3}}$. **895**. Узоқлашувчи. **896**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
897. Узоқлашувчи. **898**. Узоқлашувчи. **899**. Яқинлашувчи. **900**. $\pi+2$;
$\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ дан фойдаланинг. **901**. $\frac{51}{7}$.

VII боб

911. $\frac{2}{3}$. **912**. 1. **913**. $\frac{1}{4}$. **914**. 1. $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ айниятдан фойдаланинг. **915**. $\frac{3}{4}$. **916**. $\frac{1}{2}$. **919**. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$. **922**. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e \neq 0$. **924**. Яқинлашувчи. **925**. Узоқлашувчи. **926**. Яқинлашувчи. **927**. Яқинлашувчи. **928**. Узоқлашувчи. **929**. Узоқлашувчи. **931**. Яқинлашувчи. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x) \backsim x$ дан фойдаланинг. **933**. Яқинлашувчи. **935**. Узоқлашувчи. **936**. Яқинлашувчи. **937**. Яқинлашувчи. **938**. Яқинлашувчи. **939**. Узоқлашувчи. **940**. Яқинлашувчи. **941**. Узоқлашувчи. **942**. Яқинлашувчи. **943**. Яқинлашувчи. **944**. Узоқлашувчи. **945**. Яқинлашувчи. **946**. Яқинлашувчи. **947**. Яқинлашувчи. **948**. Яқинлашувчи. **949**. Узоқлашувчи. **950**. Яқинлашувчи. **951**. Яқинлашувчи: $b_n = \frac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k = 1$. **952**. Узоқлашувчи. $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{n}$ дан фойдаланинг. **953**. Узоқлашувчи. **954**. Узоқлашувчи.
955. Яқинлашувчи. $(2n)!! = 2\cdot 4 \cdot\cdot\cdot 2n$. **956**. Узоқлашувчи. $b_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k = 1$. **957**. Яқинлашувчи. **958**. Узоқлашувчи. **959**. Яқинлашувчи. **960**. Узоқлашувчи. **961**. Яқинлашувчи. **962**. Узоқлашувчи. **963**. Яқинлашувчи. **964**. Яқинлашувчи, **965**. Узоқлашувчи. **966**. Яқинлашувчи. **968**. Шартли яқинлашувчи. **969**. Шартли яқинлашувчи. **970**. Абсолют яқинлашувчи. **971**. Шартли яқинлашувчи. **972**. Абсолют яқинлашувчи. **973**. Абсолют яқинлашувчи. **974**. Шартли яқинлашувчи.
975. Узоқлашувчи. **976**. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \ldots$

қаторлар яқинлашувчи бўлгани учун берилган қатор абсолют яқинлашувчи. **977.** Узоқлашувчи. **978.** $|a| > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $|a| < 1$ да узоқлашувчи, $a = 1$ да шартли яқинлашувчи. **980.** $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ қатор узоқлашувчи. **981.** $\approx 0{,}62$. **982.** $n = 4$. $S = 0{,}95$. **986.** $0 < x < \infty$. **987.** $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$. **988.** Бутун сонлар ўқида узоқлашувчи. **989.** $(-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3})$; берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қатор махражи $|q| = |2 - x^2| < 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлади. **990.** $(-\infty; \infty)$. **991.** $\left(\frac{1}{e}; e\right)$. **992.** Сонлар ўқининг $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ нуқталаридан бошқа барча нуқталари. **993.** $[-1; 1]$. **994.** $(-\infty; \infty)$. **995.** $R=1$; $(-1; 1)$. **996.** $R=1$; $[3; 5]$. **997.** $R = 0$, $x = 0$. **998.** $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **999.** $R = 1$; $[-1; 1]$. **1000.** $R = 3$, $(-6; 0)$. **1001.** $[0; 4]$. **1002.** $R = 2$; $(-2; 2)$. **1003.** $(-\infty; \infty)$. **1004.** $R = \frac{1}{10}$; $-0{,}1 < x < 0{,}1$. **1005.** $R = 1$, $[-1, 0)$. **1006.** $R = 3$; $(-3; 3]$. **1007.** $R = \infty$; $(-\infty; \infty)$. **1008.** $R = \frac{1}{3}$; $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **1009.** $R = \frac{1}{e}$; $\left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$. **1010.** $(-\infty; \infty)$. **1011.** $(-\infty; \infty)$. **1012.** $(-\infty; \infty)$. **1013.** $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$. **1016.** Мумкин эмас, чунки $\cos x + 2\cos 2^3 x + \ldots + n \cos n^3 x + \ldots$ қатор узоқлашувчи (масалан $x = 0$ да). **1017.** Мумкин. **1018.** $f'(x) = f(x)$ дан $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$. $\ln f(x) = x + c$, $f(x) = e^c \cdot e^x$. $x = 0$ да $f(0) = 1$, $e^c = 1$, $c = 0$; $\ln f(x) = x$, $f(x) = e^x$. 1024. $\frac{1}{3} - \frac{x-3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n} + \ldots$, $0 < x < 6$. **1025.** $f(x) = -2 + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$. **1026.** $\ln 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3^2}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{3^3}\frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\frac{(x-1)^n}{n} + \ldots$; $-2 \leqslant x \leqslant 4$. **1027.** $x^4 - 4x^2 = -16(x+2) + 20(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4$. **1028.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{x - \frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \right.$

$$+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\dots\Bigg); -\infty<x<\infty.$$ **1029.** $e^{-2}\left(1+\frac{x+2}{1!}+\right.$ $\left.+\frac{(x+2)^2}{2!}+\dots+\frac{(x+2)^n}{n!}+\dots\right); -\infty<x<\infty.$ **1030.** $1+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln^n 5}{n!}; -\infty<x<\infty.$ **1031.** $1+\frac{x}{2!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{n!}+$ $+\dots; -\infty<x<\infty.$ **1032.** $\sin^2 x=\frac{2x^2}{2!}-\frac{8x^4}{4!}+\dots+$ $+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\dots; -\infty<x<\infty.$ **1033.** $\ln 10+\left(\frac{x}{10}-\right.$ $\left.-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\frac{x^3}{3\cdot 10^3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\dots\right).$

1034. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n 2^{n+1})x^n;$ $f(x)=\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=$ $=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}.$ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n;$ $\frac{1}{1+2x}=1-2x+(2x)^2+\dots+(-1)^n 2^n x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times 2^n x^n.$ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n\times$ $\times 2^{n+1})x^n.$ **1035.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-3}x^{2n}}{(2n)!};$ $-\infty<x<\infty.$ $\left(\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x\right).$ **1036.** $f(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n;$ $-\infty<x<\infty.$ **1037.** $f(x)=2x+\frac{2x^3}{3}+\dots+\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}+\dots; -1<x<1.$

1038. $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x^4+\dots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+2}+\dots;$ $-1<x<1.$ **1039.** $f(x)=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-$ $-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\dots; -1<x<1.$ **1040.** $f(x)=$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(1+2^n)\frac{x^n}{n}; \quad -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}$. **1041.** $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$.

1049. 1,609. **1050.** 2,833. **1051.** 2,0043. **1052.** 3,1072. **1053.** 2,154 ($\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1,25}$). **1054.** 3,017. **1055.** $\cos 10^\circ \approx 0,9948$. **1056.** 0,3894. **1057.** 0,309. **1058.** 0,1973. **1059.** 1,649. **1060.** 0,779. **1061.** 0,608. **1062.** 0,758. **1063.** 0,310. **1064.** 0,747. **1065.** 0,487. **1066.** 0,500. **1067.** 0,508. **1068.** 0,072. **1071.** Абсолют яқинлашувчи. **1072.** Абсолют яқинлашувчи. **1073.** Узоқлашувчи $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right.$ гармоник қатор билан таққосланг$\left.\right)$. **1074.** Яқинлашувчи. **1075.** Яқинлашувчи. **1076.** Узоқлашувчи. **1077.** Абсолют яқинлашувчи. **1078.** Узоқлашувчи. **1079.** Яқинлашувчи. **1080.** Яқинлашувчи. **1081.** $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|Z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. **1082.** $R = \frac{1}{e}$, $|z| < \frac{1}{e}$. **1083.** $R = 0$, $z = 0$. **1084.** $R = 1$. **1085.** $R = \infty$. **1086.** $R = 2$. **1087.** $R = \frac{1}{4}$. **1088.** $R = \frac{1}{4}$, $|z| < \frac{1}{4}$.

VIII боб

1096. $V = \frac{1}{3}\pi y^2\sqrt{x^2+y^2}$ **1097.** $S = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}$.

1104. Координата бошидан бошқа бутун текислик. **1105.** $x + 4y \geqslant 5$. **1106.** $x \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$. **1107.** $x^2 + y^2 \leqslant 1$. **1108.** $x \geqslant 0$, $y > 0$. **1109.** $y = \pm x$ тўғри чизиқлардан ташқари бутун текислик. **1110.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. **1111.** $-x \leqslant y \leqslant x$, $x > 0$; $-x \geqslant y \geqslant x$, $x < 0$. **1112.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$. **1113.** $y \geqslant -x$, $y \leqslant x$. **1114.** $x \geqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, $x \leqslant -2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. **1115.** $y > 0$, $y > x$, $x \neq 0$. **1116.** $x^2 + y^2 \geqslant 1$, $x^2 + y^2 < 4$. **1117.** $y > \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. **1118** $-\frac{1}{2} \leqslant xy \leqslant \frac{1}{2}$. **1119.** I октант $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. **1120.** $x = \pm 2$, $y = \pm 2$, $z = \pm 2$ текисликлар билан чегараланган куб. **1121.** $x + y = C$. **1122.** $y = cx^2$. **1123.** $y = x + c$ тўғри чизиқлар оиласи. **1124.** $y = x^2 - c$ параболалар оиласи. **1125.** $x^2 + y^2 = c$ айланалар оиласи. **1126.** $y = c - x^2$ $(c > 0)$ параболалар оиласи. **1127.** $xy = c$ гиперболалар оиласи ($|c| \leqslant 1$) **1128.** $x + y + z = 0$ текисликка параллел бўлган $x + y + z = c$ текисликлар оиласи. **1129.** $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ маркази координата бошида бўлган концентрик сфералар оиласи **1130.** 0. **1131.** 2. **1132.** 0. **1133.** $-\frac{1}{4}$. **1134.** $\frac{1}{2a}$. **1135.** 0. $x = \rho\cos\varphi$, $y =$

$=\rho \sin\varphi$ қутб координаталарига ўтинг ва $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ формуладан фойдаланинг. $\left.\begin{matrix} x\to 0\\ y\to 0\end{matrix}\right\}$ да $\rho\to 0$. **1137.** Узлуксиз. **1138.** (0; 0) нуқтада узилишга эга. **1139.** (0; 0) нуқтада узилишга эга. **1140.** (0; 0) нуқтада узилишга эга. **1141.** (0; 0) нуқтада узилишга эга. **1142.** $x^2+y^2=1$ айлананинг ҳар бир нуқтасида функция узилишга эга. **1150.** $z'_x=2ay-2x$, $z'_y=2ax-2y$. **1151.** $z'_x=3x^2t-t^3$, $z'_t=x^3-3t^2x$. **1152.** $z'_x=\frac{1}{y}$; $z'_y=-\frac{x}{y^2}$. **1153.** $u'_x=-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{z}$, $u'_y=\frac{1}{x}+\frac{z}{y^2}$, $u'_x=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{y}$. **1154.** $S'_t=-axe^{-t}+b$, $s'_x=ae^{-t}$. **1155.** $z'_x=e^{\sin\frac{x}{y}}\cdot\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$, $z'_y=\frac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}$. **1156.** $z'_x=4(3xy^3-x^2+5)^3(3y^3-2x)$, $z'_y=4(3xy^3-x^2+5)^3(gxy^2)$. **1157.** $z'_x=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$, $z'_y=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$. **1158.** $z'_x=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$, $z'_y=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$. **1159.** $u'_x=yzx^{yz-1}$, $u'_y=zx^{yz}\ln x$, $u'_z=yx^{yz}\ln x$. **1160.** $u'_x=y^zx^{y^z-1}$, $u'_y=x^{y^z}\ln x\cdot zy^{z-1}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$, $u'_z=y^zx^{y^z}\ln x\cdot\ln y$. **1161.** $u'_x=y\cos(xy+yz)$, $u'_y=(x+z)\cos(xy+yz)$, $u'_z=y\cos(xy+yz)$. **1162.** $u'_x=-\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $u'_y=\frac{z}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $u'_z=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln\frac{y}{x}$. **1163.** $f'_x(4;3)=\frac{9}{5}$, $f'_y(4;3)=\frac{8}{5}$. **1164.** $f'_x(1;-1;0)=0$, $f'_y(1;1;4)=2\sin 2$, $f'_z\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)=-\sin(-1)\approx 0{,}84$. **1165.** $\frac{3}{2}$. **1166.** $f'_x(2;1)=\frac{1}{2}$, $f'_y(2;1)=0$. **1167.** $f'_x(1;2;0)=1$, $f'_y(1;2;0)=\frac{1}{2}$, $f'_z(1;2;0)=\frac{1}{2}$. **1173.** $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ — Ox ўқи йўналиши бўйича M_0 нуқтадаги функциянинг ўзгариш тезлигини ифодалайди. Худди шунингдек, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$. **1174.** Йўқ. $f'_x(0;0)$, $f'_y(0;0)$ лар мавжуд эмас ($z(x;0)=|x|$ функциянинг $x=0$ да ҳосиласи мавжуд эмас). **1175.** Ҳа. **1176.** $dz=15x^2y^2\,dx+10x^3y\,dy$. **1177.** $dz=\left(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)dy$. **1178.** $du=yz(xy)^{z-1}\,dx+xz(xy)^{z-1}\,dy+(xy)^z\ln(xy)\,dz$. **1179.** $dz=$

$= 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy)$. **1180.** $dz = \cos y\,(\sin x)^{\cos y - 1}\cdot\cos x dx - (\sin x)^{\cos y}\cdot\sin y\ln\sin x dy$. **1181.** $dz = \sin 2x\,dx - \sin 2y\,dy$. **1182.** $df\,(1;\,1) = -2dx + dy$. **1183.** $df\,(0;\,1;\,2) = 2e^5\,dy + 4e^5\,dz$. **1184.** $dz = -0{,}018$. **1185.** $\Delta z \approx -0{,}1$. **1186.** $\Delta V = -15{,}7$. Конус ҳажми тахминан 15,7 см³ миқдорга камаяди. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $R = 5$, $H = 10$, $dR = -0{,}2$; $dH = 0{,}2$; $\Delta v \approx dv = \frac{1}{3}\pi\,(2RHdR + R^2dH)$ га юқоридаги қийматларни қўйсак, $\Delta v \approx -15{,}7$ см³ ҳосил бўлади. **1187.** $\Delta v \approx dv$ формуладан фойдаланинг, $\Delta v = 1{,}2\,\pi$ дм³. **1188.** $A \approx 0{,}08$. **1189.** $A \approx 0{,}94$. **1190.** $A \approx 4{,}24$. $(1{,}94)^2 e^{0.12}$ ни $f\,(x;\,y) = x^2 e^y$ функциянинг $M_1\,(1{,}94;\,0{,}12)$ нуқтадаги қиймати деб қараймиз. $M_0\,(2;\,0)$ бўлиб, $\Delta x = -0{,}06$; $\Delta y = 0{,}12$ бўлади. $(1{,}94)^2 e^{0{,}12} \approx f\,(M_0) + f'_x\,(M_0)\,\Delta x + f'_y\,(M_0)\,\Delta y = 4{,}24$. **1191.** $A \approx 0{,}75$. **1192.** $\frac{dz}{dt} = 2e^{2t}\,(2e^{2t} + \sin^2 t) + e^{2t}\sin 2t$. **1193.** $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{e^t}{e^x + e^t}$; $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t + 3t^2 e^x}{e^x + e^t}$. **1194.** $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$. **1195.** $\frac{\partial z}{\partial x} = (2uv - v^2)\cos y + (u^2 - 2uv)\sin y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -x\,(2uv - v^2)\sin y + (u^2 - 2uv)\,x\cos y$. **1196.** $\frac{\partial z}{\partial s} = 2x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial t} = 2x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$. **1197.** $\frac{dy}{dt} = 2t\ln t\cdot\operatorname{tg} t + \frac{t^2 + 1}{t}\operatorname{tg} t + \frac{t^2 + 1}{\cos^2 t}\ln t$. **1198.** $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{dz}{dx} = x^y\left(\varphi'\,(x)\ln x + \frac{y}{x}\right)$. **1199.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\times f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x + \frac{1}{x}\right)f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$. **1205.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{x - y^2}$.
1206. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. **1207.** $y'\,(1) = 1$. **1208.** $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$.
1209. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x\ln y}{1 - xy^{x-1}}$. **1210.** $y'\Big|_{y=\frac{\pi}{2}} = -1$. **1211.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x - z}$. **1212.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^x - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}$.
1214. $dz = \frac{(yz - 1)\,dx + (xz - 1)\,dy}{1 - xy}$. **1215.** $dz = -\operatorname{tg} x dx - \operatorname{tg} y\,dy$. **1216.** $dz = \frac{ze^{\frac{x}{z}}\,(zdy + ydx)}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}}$. **1224.** $z''_{xx} = 6x - 4y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -4x$, $z''_{yy} = 6$. **1225.** $z''_{xx} = 0$, $z''_{xy} = z''_{yx} = e^y$, $z''_{yy} = xe^y$. **1226.** $z''_{xx} = \frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^2}$; $z''_{xy} = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}$. $z''_{yy} = -\frac{1}{(x^2 + y)^2}$. **1227.** $u''_{xx} = y^2 t^2 e^{xyz}$;

$u''_{xy}=u''_{yx}=z(1+xyz)e^{xyz}$; $u''_{xz}=u''_{zx}=y(1+xyz)e^{xyz}$; $u''_{yz}=u''_{zy}=x(1+$ $+xyz)e^{xyz}$; $u''_{yy}=x^2z^2e^{xyz}$; $u''_{zz}=x^2y^2e^{xyz}$. **1228.** $z''_{xx}=e^x\ln y-$ $-\dfrac{\sin y}{x^2}$; $z''_{xy}=\dfrac{e^x}{y}+\dfrac{\cos y}{x}$; $z''_{yy}=-\dfrac{e^x}{y^2}-\sin y\cdot\ln x$. **1229.** $z''_{xx}=$ $=-y^2\cos xy$; $z''_{xy}=-xy\cos xy-\sin xy$; $z''_{yy}=-x^2\cos xy$. **1230.** $u''_{xx}=$ $=u''_{yy}=u''_{zz}=0$; $u''_{xy}=u''_{yz}=u''_{zx}=1$. **1232.** $d^3z=0$. **1233.** $d^2z=$ $=-\dfrac{y}{x^2}dx^2+\dfrac{2}{x}dx\,dy$; $d^3z=\dfrac{2y}{x^2}dx^3-\dfrac{3}{x^2}\cdot dx^2dy$. **1234.** $d^2z=$ $=e^{x+y^2}(dx^2+4y\,dx\,dy+(2+4y^2)dy^2)$. **1235.** $d^2z=2\sin 2y\,dx\,dy+$ $+2x\cos 2y\,2dy^2$. **1236.** $f''_{xx}(0;1)=6$; $f''_{xy}(-1;1)=30$; $f''_{yy}(2;0)=0$. **1237.** $f''_{xx}(0;0)=m(m-1)$, $f''_{xy}(0;0)=mn$; $f''_{yy}(0;0)=n(n-1)$. **1238.** $df(1;2)=0$; $d^2f(1;2)=6\,dx^2+2\,dx\,dy+4{,}5\,dy^2$. **1243.** $u(x;y)=\varphi(x)+\psi(y)$. **1244.** $u(x;$ $y)=x\,\varphi(y)+\psi(y)$. **1245.** $f(x;y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+$ $+3(y-1)^2$. **1246.** $f(x;y)=y+xy+\dfrac{3x^2y-y^2}{3!}$. **1247.** $e^{x+y}=1+$ $+((x-1)+(y+1))+\dfrac{((x-1)+(y+1))^2}{2!}+\dfrac{((x-1)+(y+1))^3}{3!}$. **1248.** $1{,}0081$. $f(x;y)=\sqrt[y]{x}\cdot\sqrt[3]{y}$ деб олиб, $M_0(1;1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг. **1249.** $(0{,}95)^{2{,}01}\approx 0{,}902$. $f(x;y)=y^x$ деб, олиб, $M_0(2;1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг. **1250.** $z=x+$ $+2y-2$; $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$. **1251.** $8x-8y-z=4$, $\dfrac{x-2}{8}=$ $=\dfrac{y-1}{-8}=\dfrac{z-4}{-1}$. **1252.** $x-2y+3z=6$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$.

1253. $x+2y=4$; $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$. **1254.** $z=-x+\pi y$; $\dfrac{x-\pi}{1}=$ $=\dfrac{y-1}{-\pi}=\dfrac{z}{1}$. **1255.** $M_1(6;-24;8)$, $M_2(-6;24;-8)$. Сиртнинг $(x_0;y_0;z_0)$ нуқтасида сиртга ўтказилган уринма текислик тенгламаси $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$ ёки $x_0x+y_0y+z_0z=x_0^2+y_0^2+$ $+z_0^2=4$ бўлади. Икки текисликнинг параллеллик шартига асосан $\dfrac{x_0}{3}=\dfrac{x_0}{-12}=\dfrac{z_0}{4}=\lambda$ бўлада, бундан $x_0=3\lambda$, $y_0=-12\lambda$, $z_0=4\lambda$ ларни сфера тенгламасига қўйсак, $\lambda=\pm 2$ келиб чиқади ва изланган нуқта топилади. **1256.** $2x+2y+z=6$. **1257.** $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{3}=$ $=\dfrac{z-5}{-5}$; $O(0;0;0)$ нуқтада нормал аниқланмаган. **1264.** $z_{\min}(1;0)=$ $=0$. **1265.** $z_{min}\left(1;\ \dfrac{1}{2}\right)=4$. **1266.** Экстремумга эга эмас. **1267.**

$z_{\min}(1;\ 0) = -1$. **1268.** Экстремумга эга эмас. **1269.** $z_{\min}(\sqrt{3};\ -\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$, $z_{\max}(-\sqrt{3};\ -\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$. **1270.** $z_{\max}(4;\ -2) = 8$. **1271.** $z_{\max}(-1;\ -1) = -3$. **1272.** $z_{\max}(4;\ 4) = 12$. **1273.** $z_{\min}(-2;\ 0) = -\frac{2}{e}$. **1274.** $z_{\min}(2;\ 1) = -28$, $z_{\max}(-2;\ -1) = 28$. **1275.** $z_{\max}\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. **1276.** $z_{\min}(1;\ 1) = 2$. **1277.** $z_{\max}(1;\ 2) = 5$; $z_{\min}(-1;\ -2) = -5$. **1278.** $z_{\min}\left(\frac{18}{13};\ \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$. **1279.** $x = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, $y = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, x — цилиндр асосининг радиуси, y — цилиндр баландлиги. Маълумки, цилиндр сиртининг юзи $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$, $v = \pi x^2 y$. $v = \pi x^2 y$ шартда $S = f(x;\ y) = 2\pi(x^2 + xy)$ функцияни экстремумга текшириш керак. Ёрдамчи Лагранж функциясини $F = 2\pi(x^2 + xy) + \lambda(\pi x^2 y - v)$ кўринишда олинг. **1280.** Энг катта қиймати $z\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$, энг кичик қиймати $z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$. $z'_x = z'_y = 1 \neq 0$ бўлгани учун берилган функция энг катта ва энг кичик қийматларига соҳанинг чегарасида эришиши мумкин. $x^2 + y^2 = 1$ айлана тенгламаси параметрик кўринишда $\left.\begin{array}{l} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{array}\right\}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ бўлади. У ҳолда $z = \cos t + \sin t$, $z'_t = -\sin t + \cos t = 0$ дан $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{5\pi}{4}$; $x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1281.** $z_{\text{э.кат.қ}}(0;\ 1) = 3$. **1282.** $z_{\text{э. кат. қ.}}(4;\ 4) = 128$, $z_{\text{э. кич. қ.}}(0;\ 0) = -4$. **1283.** Энг катта қиймати 1, энг кичик қиймати -1. **1284.** $z_{\text{э. кат. қ.}}\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27}$; $z_{\text{э. кич. қ.}}(1;\ 2) = -2$. **1285.** $z_{\text{э. кат. қ.}}(4;\ 0) = z(0;\ 4) = 91$, $z_{\text{э. кич. қ.}}(3;\ 3) = 0$. **1286.** $x = y = z = \frac{a}{3}$, $\frac{a^3}{27}$. Изланаётган қўшилувчилар x, y, $a - x - y$ бўлсин. Бу ҳолда қўйилган масала $z = xy(a - x - y)$ функциянинг максимумини излашга келтирилади. **1287.** Тенг томонли учбурчак бўлиб, $a = b = c = \frac{2p}{3}$, бунда $a = x$, $b = y$, $c = 2p - x - y$. **1288.** $M_0(\sqrt{5};\ 1)$, $M_1(-\sqrt{5};\ 1)$, $x^2 - y^2 - 4 = 0$ шартда $z = d^2 = x^2 + (y - 2)^2$ функцияни минимумга текширинг. **1289.** $d = \sqrt{20}$.

АДАБИЁТ

1. Г. И. Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу. «Высшая школа», М., 1961.

2. Марон. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах.

3. П. Е. Дюбюк, Г. И. Кручкович и др. Сборник задач по курсу высшей математики для втузов. «Высшая школа», М., 1963.

4. А. Ғ. Ҳикматов, У. Т. Тошметов, Қ. Қарашева. Математик анализдан машқлар ва масалалар тўплами, «Ўқитувчи», Т., 1987.

5. Н. Я. Виленкин, Н. С. Куницкая, А. Г. Мордкович. Математический анализ. Дифференциальное исчисление. «Просвещение», М., 1978.

6. Н. Я. Виленкин, Н. С. Куницкая, А. Г. Мордкович. Математический анализ. Интегральное исчисление. «Просвещение», М., 1979.

7. Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович и др. Задачи и упражнения по математическому анализу, для втузов. «Наука», М., 1972.

8. Н. А. Давыдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский. Сборник задач по математическому анализу. «Просвещения», М., 1973.

9. Л. А. Кутузов. Сборник заданий по высшей математике. «Высшая школа» М., 1983.

10. В. Ф. Бутузов, Н. У. Крутицкая и др. Математический анализ в вопросах и задачах. «Высшая школа» М., 1984.

11. Г. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. «Наука» М., 1985.

12. Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. Алгебра и элементарные функции, часть 2, «Просвещение», М., 1968.

МУНДАРИЖА