А. А. РАҲИМҚОРИЕВ

ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ГРАФИК УСУЛДА ЕЧИШ

II ҚИСМ

Ўзбекистон Республикаси
Халқ таълими вазирлиги
тавсия этган

ЎҚИТУВЧИЛАР УЧУН ҚЎЛЛАНМА

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1997

Тақризчилар: Тошкент шаҳар 169-ўрта мактабнинг методист ўқитувчиси *К. Тўрақулов,*

Ўзбекистонда хизмат кўрсатган халқ таълими ходими, педагогика фанлари номзоди, доцент, *А. А. Акмалов.*

Ушбу қўлланмада ўрта мактаб математика курсида учрайдиган тенгсизликларни ҳамда уларнинг системаларини, шунингдек, аниқмас тенглама ва тенгсизликларни, модулли тенгсизликларни график усулда ечиш методикаси баён қилинган. Қўлланма мактаб математика ўқитувчиларига мўлжалланган бўлиб, ундан математика чуқур ўрганиладиган синфларда, синфдан ташқари машғулотларда, факультатив машғулотларда, шунингдек, мустақил ўрганувчи кенг китобхонлар фойдаланишлари мумкин.

Р 33

Раҳимқориев А. А.

Тенгсизликларни график усулда ечиш: Ўқитувчилар учун қўлланма. Қ.2.— Т.: Ўқитувчи, 1996.—296 б.

ББК 74.262

$Р\ \frac{4306010500-268}{353\ (04)-97}\ 175-96$

ISBN 5—645—02388—9

СЎЗ БОШИ

Ушбу методик қўлланма «Трансцендент тенгсизликларни график усулда ечиш» (Ўқитувчи» нашриёти, 1995 й.) номли қўлланманинг узвий давоми бўлиб, унда мактаб математика курсида учрайдиган тенгсизликларни ечиш учун зарур бўлган асосий назарий билимлар системаси, шунингдек, уларнинг ечимларини топиш тўғрисида сўз юритилади.

Бу қўлланмада ҳам ҳар бир мавзу мисол ва масалаларнинг ечимлари ва графиклари билан бойитилган. Китоб охирида мустақил ечиш учун берилган машқларнинг жавоблари ва кўрсатмалар берилган. Қўлланмадан мактаб математика ўқитувчилари, ўқувчилари, мустақил ўрганувчи кенг китобхонлар фойдаланишлари мумкин.

Кўпинча ўқувчилар бирор кўринишдаги тенгсизликларнинг ечимларини топиш тўғрисида умумий тушунчага эга бўлсалар ҳам, аммо ечимнинг геометрик кўриниши (яъни графиги) тўғрисида деярли тасаввурга эга эмаслар ва ечимнинг фақат аналитик ёзувидан фойдаланадилар. Шу сабабли ўқувчиларнинг график саводхонлиги талаб даражасида эмас, шунингдек, ўқувчилар бир неча функция иштирок этган, ўзгарувчилар сони билан тенгсизликлар сони (ёки тенгламалар сони) тенг бўлмаган аниқмас тенглама ва тенгсизликнинг ечимларини топишда қийналадилар. Одатда бундай тенглама ва тенгсизликларни ечишга кам эътибор берилади. Бундай тенглама ва тенгсизликларнинг ечимлари мажмуасини (яъни тўпламини) аналитик усулда ёзиш ҳамда у ечимнинг тўғри ёки нотўғрилигини текшириб кўриш ҳам анча мураккабдир. Масалан, $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$ ёки $\frac{xy+1}{xy-1} \geqslant \frac{x+y}{x-y}$ кўринишдаги тенгсизликларни ечиш учун авваллари ўзгарувчилардан бирини иккинчиси орқали бирор параметрга боғлиқ ҳолда (яъни $y=xt$ ёки

$x=yt$) белгилаб, сўнгра уларга боғлиқ ҳолда ечимларни кўрсатишга ҳаракат қилинар эди. Аммо топилган ечимлар тўпламининг ўзи янги параметр орқали ёзилиб, ошкормас ҳолда жавобларга эга бўлинар эди. Шу сабабли жавоблар анча мураккаб боғланишда бўлиб, ечимларни бевосита кўрсатиш мушкул эди. Ваҳоланки, уларнинг ечимларини сонлар текислигида кўрсатиш қулай ва барча ноқулайликларнинг олдини олади. Бунга қўлланмани ўрганиш жараёнида ишонч ҳосил қилишингиз мумкин бўлади. Шу билан бирга, иррационал тенгсизликларнинг турли кўринишларини ечишга кенг эътибор берилган. Одатда, бир ўзгарувчили иррационал тенгсизликларни ечишга кам бўлса ҳам шуғулланиб турилади, аммо икки ўзгарувчили иррационал тенгсизликларни ечишга деярли эътибор берилмайди. Шунинг учун бу ерда келтириладиган назарий билимлар ва мисоллар тизими анча қўл келади.

Ушбу қўлланмада модул белгиси остида ўзгарувчилар иштирок этган ҳар хил кўринишдаги тенгсизликларнинг ечимларини топишга кенг ўрин берилган, чунки бундай тенгсизликларнинг ечимларини топишда ўқувчилар кўп қийналадилар ҳамда ечимлар мажмуасини ёзишда хатоликка тез-тез йўл қўядилар.

Шунингдек, қўлланманинг сўнгги бобида аралаш система ечимларини топиш, тескари масалалар, функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топиш ва тенгсизликлар системаларининг ечимларини топиш тўғрисида гап боради.

Шундай қилиб, ушбу қўлланмада тенгсизликлар ва тенгламалар тўғрисидаги билим ва амалий кўникмаларни чуқурлаштиришни мақсад қилиб қўйилган бўлиб, кенг китобхонлар оммасига мўлжалланган. Ундан дарс жараёнларида, факультатив машғулотларда, тўгарак машғулотларида, тайёрлов курсларида, математикани чуқур ўрганувчи мактаб ва синфларда, шунингдек, педагогика олийгоҳларининг талабалари ҳамда ўқитувчилар фойдаланишлари мумкин.

Тушунтириш матнларининг ҳаддан ташқари кўпайиб кетмаслигини назарга олган ҳолда математикада кенг қўлланиладиган анъанавий белгилашлардан кенг фойдаланилди, чунки бундай ёндошиш математик ёзувларни мантиқан тушунишга яхши ёрдам беради.

Қўлёзмани синчиклаб кўриб, уни такомиллаштиришга оид ўзларининг самимий маслаҳатларини берган физика-математика фанлари номзоди, доцент М. Мирзааҳмедовга, физика-математика фанлари номзоди, доцент М. Маматовга, педагогика фанлари номзоди, доцент М. Раемовга, Республикада хизмат кўрсатган халқ таълими ходими А. Акмаловга, Тошкентдаги 169-мактабнинг методист ўқитувчиси К. Тўрақуловга, Андижон вилоят педагогик кадрлар малакасини ошириш институтининг кафедра мудири, педагогика фанлари номзоди Ш. Тўйчиевга ҳамда А. Собировга муаллиф ўзининг самимий миннатдорчилигини изҳор қилади.

Муаллиф

I БОБ. ТЕНГСИЗЛИКЛАР ТЎҒРИСИДА УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР

1-§. Тенгсизликлар ва уларнинг асосий хоссалари

Қуйида биз ушбу қўлланмада фойдаланиш мумкин бўлган тенгсизликлар тўғрисидаги асосий маълумотларни келтирамиз.

Маълумки, ўзаро $>$ (катта) ёки $<$ (кичик), $\geqslant$ (кичик эмас) ёки $\leqslant$ (катта эмас), шунингдек, $\neq$ (тенг эмас) белгилари билан боғланган муносабатлар *тенгсизликлар* дейилади.

Тенгсизликлар тўғри ва нотўғри тенгсизликларга бўлинади. Масалан: $-3<0$ ва $x^2 \geqslant 0$ — тўғри, $1>2$ ва $y^2+1<-1$ — нотўғри тенгсизликлардир.

Тенгсизликнинг ҳар иккала қисмидаги ифодаларнинг аниқланиш соҳаларининг умумий қисми (яъни кесишмаси) га тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси деб айтилади.

Масалан, $x+y<2x^2+xy+y^2$ тенгсизлик x ва y ўзгарувчиларнинг барча ҳақиқий қийматларида аниқланган. Бу тенгсизликка $x=0$ ва $y=-1$ қийматларни қўйсак, тўғри сонли тенгсизликка (яъни $-1<1$); $x=0$ ва $y=0$ қийматларни қўйсак, нотўғри сонли тенгсизликка (яъни, $0<0$) эга бўламиз. $>$ ёки $<$ белгилар ёрдамида тузилган тенгсизликлар *қатъий*, $\geqslant$ ёки $\leqslant$ белгилар ёрдамида тузилган тенгсизликлар эса *ноқатъий* тенгсизликлар дейилади.

Масалан, $-1<0$ ва $x^2+3>0$ — қатъий, $y^2 \geqslant 0$ ва $3-x \leqslant 0$ — ноқатъий тенгсизликлардир.

Тенгсизликларнинг ушбу хоссаларидан кенг фойдаланилади:

1-хосса. Агар $a>b$ бўлса, $b<a$ бўлади ва аксинча, $a<b$ бўлса, $b>a$ бўлади.

2-хосса. Агар $a>b$ ва $b>c$ бўлса, $a>c$ бўлади.

Агар иккита тенгсизликда бир хил $>$ ($\geqslant$) ёки $<$ ($\leqslant$) белги бўлса, улар бир хил маъноли; агар тенгсизликлардан бирида $>$ белги, иккинчисида эса $<$ белги бўлса, улар қарама-қарши маъноли тенгсизликлар дейилади.

Тенгсизликнинг *ечими* деб унинг таркибидаги ўзгарувчи (ёки ўзгарувчилар)нинг бу тенгсизликни тўғри

сонли тенгсизликка айлантирадиган қиймати (ёки қийматлари) тўпламига айтилади.

Тенгсизликни ечиш унинг ҳамма ечимларини топиш ёки уларнинг йўқлигини исботлаш демакдир.

Масалан, $x=-1$ ва $y=1$ қийматлар $x+y<3x^2+xy+y^2$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳасига тегишли ва уни тўғри сонли тенгсизликка айлантиради, чунки $0<3$. Шунинг учун улар бу тенгсизликнинг ечими ҳисобланади.

Одатда, агар ўзгарувчиларнинг қийматлари тўплами берилган тенгсизликнинг ечими бўлса, у ҳолда улар тенгсизликни қаноатлантиради дейилади.

Ўзгарувчиларнинг аниқланиш соҳасида тўғри сонли тенгсизликка айланадиган, ва аксинча, ўзгарувчиларнинг аниқланиш соҳасидан олинган бирорта қийматида ҳам тўғри сонли тенгсизликка айланмайдиган тенгсизликлар учраб туради.

Агар ўзгарувчи (ёки ўзгарувчилар)нинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларида тенгсизлик тўғри сонли тенгсизликка айланса, бундай тенгсизликни *айний* тенгсизлик дейилади.

Агар ўзгарувчи (ёки ўзгарувчилар)нинг қабул қилиши мумкин бўлган бирорта ҳам қийматида тенгсизлик тўғри сонли тенгсизликка айланмаса, бундай тенгсизлик *ечимга эга бўлмаган* тенгсизлик дейилади.

Масалан, $x^2+1>0$ тенгсизликнинг чап қисми x нинг аниқланиш соҳасидан (яъни $x\in R$ дан) олинган исталган қийматида мусбат сон бўлади, шунинг учун берилган тенгсизлик айний тенгсизликдир; $y^2<0$ тенгсизлик ечимга эга бўлмаган тенгсизликдир, чунки тенгсизликнинг чап қисми y нинг барча ҳақиқий қийматларида номанфий, шунинг учун у нолдан кичик бўла олмайди.

2- §. Тенг кучли тенгсизликлар

Таъриф. Агар икки тенгсизликдан бирининг барча ечимлари иккинчисининг ҳам ечимлари бўлса ва аксинча, иккинчисининг барча ечимлари биринчисининг ҳам ечимлари бўлса, бундай тенгсизликлар *тенг кучли* тенгсизликлар дейилади. Одатда, ечимга эга бўлмаган тенгсизликлар ҳам тенг кучли дейилади. Ечимни қисқача ёзишда «тенг кучли» сўзи ўрнига кўпинча «$\Leftrightarrow$» белгидан фойдаланилади.

Тенгсизликларнинг тенг кучлилигига оид хоссаларни санаб ўтамиз:

1-хосса. Агар тенгсизликнинг иккала қисмига айни бир сон ёки тенгсизликнинг аниқланиш соҳасида аниқланган айни бир ифода қўшилса (ёки айирилса), берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

Тенгсизликнинг бир қисмидан иккинчи қисмига бирор ҳадини қарама-қарши ишора билан ўтказилганда тенг кучлилик бузилмайди, аммо бу ўтказишдан кейин ўхшаш ҳадларни ихчамлаш натижасида ҳосил бўлган янги тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси дастлабкисига нисбатан кенгайиши ва натижада тенг кучлилик бузилиши ҳам мумкин.

Масалан, $3x+4>2-x$ тенгсизликдаги $(-x)$ ни ўнг қисмдан чапга, 4 ни эса чапдан ўнгга ўтказиб,

$$3x+x>2-4$$

ёки

$$4x>-2$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. $4x>-2$ тенгсизлик x нинг $(-0, 5)$ дан катта барча қийматларида бажарилади. x нинг ана шу қийматларида ҳам $3x+4>2-x$ тенгсизлик бажарилади. Демак, бу тенгсизликлар тенг кучли экан.

Масалан, $x-\sqrt{2-x}>1-\sqrt{2-x}$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $2-x\geqslant 0$, яъни $x\leqslant 2$ дан иборат. $x-\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x}>1$ тенгсизлик берилган $x-\sqrt{2-x}>1-\sqrt{2-x}$ тенгсизликка тенг кучли. Аммо берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган тенгсизликнинг чап қисмидаги ўхшаш ҳадларни ихчамлагандан кейин ҳосил бўлган $x>1$ тенгсизлик берилганига тенг кучли эмас, чунки охирги тенгсизликнинг ечимлари тўплами 1 дан катта бўлган исталган ҳақиқий сондир. Шу сабабли аниқланиш соҳаси кенгайди ва натижада тенг кучлилик бузилди. Бундай нотўғри натижага келиб қолмаслик учун берилган тенгсизликнинг ечимлари тўпламини ёзаётганда, албатта аниқланиш соҳасини назарда тутиш лозим, ана шундагина ноаниқликларга барҳам берилади. Шундай қилиб, берилган тенгсизликнинг ечимлари тўплами $1<x\leqslant 2$ қўш тенгсизлик ечимлари тўпламидан иборат. Айрим ҳолларда бундай шакл алмаштириш натижасида тенг кучлилик бузилмаслиги ҳам мумкин.

Шу сабабли айрим шакл алмаштиришларни бажаргандан сўнг тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси ўзгарадими ёки йўқлигини текшириб кўриш лозим. Агар ўзгарган бўлса, у ҳолда топилган ечим берилган тенгсизликнинг аниқланиш соҳасига кирган ёки кирмаганлигини аниқлаш қолади, холос.

2-хосса. Агар тенгсизликнинг иккала қисми айни бир мусбат сонга ёки тенгсизлик таркибидаги ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари соҳасида фақат мусбат қийматларни қабул қилувчи ифодага кўпайтирилса (ёки бўлинса), унда тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади. Ва аксинча, агар тенгсизликнинг иккала қисми айни бир манфий сонга ёки тенгсизлик таркибидаги ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари (яъни аниқланиш) соҳасида фақат манфий қийматларни қабул қилувчи ифодага кўпайтирилса (ёки бўлинса) ва бунда тенгсизликнинг ишорасини қарама-қаршисига ўзгартирилса, унга тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

3- §. Тенгсизликлар системаси ва тенгсизликлар бирлашмаси ҳақида дастлабки тушунчалар

1-таъриф. Тенгсизликлар системаси деб «ва» боғловчи ёрдамида тузилган тенгсизликларга айтилади.

Тенгсизликлар системаси фигурали қавс билан белгиланади.

1-мисол. «$a>b$ ва $c>d$» мулоҳаза тенгсизликлар системаси бўлади ва у қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} a>b; \\ c>d. \end{cases}$$

2-мисол. $\begin{cases} 5>-3, \\ 0>-1, \\ 9<10 \end{cases}$ системанинг таркибига кирган ҳар бир тенгсизлик тўғри тенгсизлик бўлгани сабабли бу тенгсизликлар системаси тўғри (яъни маънога эга бўлган) система бўлади.

3-мисол. $\begin{cases} 3<-2, \\ 5>-7, \\ -0,2<0 \end{cases}$ система таркибига кирган $3<-2$ тенгсизлик нотўғри тенгсизлик бўлгани сабабли бу система нотўғри (яъни маънога эга бўлмаган) система бўлади.

Тенгсизликлар системасининг аниқланиш соҳаси деб система таркибидаги тенгсизликлар аниқланиш соҳаларининг кесишмаси (яъни умумий қисми) га айтилади.

Тенгсизликлар системасининг ечими деб, ушбу система таркибидаги ўзгарувчиларнинг мазкур системадаги ҳар бир тенгсизликни тўғри сонли тенгсизликка айлантирувчи қийматларига (ёки агар икки ўзгарувчили бўлса, у ҳолда қийматлар жуфти, яъни (x, y) га) айтилади.

2-таъриф. Тенгсизликлар бирлашмаси деб «ёки» боғловчи ёрдами билан тузилган мулоҳазага айтилади.

Агар бирлашма таркибидаги тенгсизликлардан бирортаси тўғри (яъни рост) тенгсизлик бўлса, тенгсизликлар бирлашмаси тўғри, акс ҳолда эса тўғри бўлмаган (яъни ёлғон) бирлашма бўлади.

Тенгсизликлар бирлашмаси квадрат қавс билан белгиланади.

1-мисол. «$a>b$ ёки $c<d$» деган мулоҳаза тенгсизликлар бирлашмаси бўлади ва у қуйидагича ёзилади:

$$\left[\begin{array}{l} a>b \\ c<d. \end{array}\right.$$

2-мисол. $\left[\begin{array}{l} —2>—1 \\ 0<3 \end{array}\right.$ тўғри тенгсизликлар бирлашмасидир, чунки бирлашма таркибига тўғри тенгсизлик кирган (яъни $0<3$ — тўғри тенгсизликдир).

3-мисол. $\left[\begin{array}{l} —4>0— \\ 2<—3 \end{array}\right.$ нотўғри тенгсизликлар бирлашмасидир, чунки бирлашма таркибидаги ҳар иккала тенгсизлик ҳам нотўғри тенгсизликлардир.

4-мисол. $\left[\begin{array}{l} x^2>—1, \\ y^2\geqslant 0 \end{array}\right.$ — тўғри тенгсизликлар бирлашмасидир, чунки унинг таркибидаги ҳар иккала тенгсизлик ҳам тўғри тенгсизликдан иборат.

Тенгсизликлар бирлашмасининг аниқланиш соҳаси деб унинг таркибидаги тенгсизликлар аниқланиш соҳаларининг йиғиндиси (бирлашмаси)га айтилади.

Тенгсизликлар бирлашмасининг ечими деб бирлашма таркибидаги тенгсизликлар ечимлари тўпламларининг йиғиндисига (яъни бирлашмасига) айтилади.

Тенгсизликлар бирлашмасини (тўпламини) ечиш унинг ҳамма ечимлари тўпламини топиш ёки ечимлари мавжуд эмаслигини исботлашдан иборатдир.

$\begin{cases} a > b, \\ a < c \end{cases}$ кўринишдаги тенгсизликлар системасини $b < a < c$ кўринишда ёзишга ва уни қўш тенгсизлик дейишга келишилган.

$\left[\begin{array}{l} a > b \\ a = b \end{array}\right.$ кўринишдаги тенгсизликлар бирлашмаси a b дан катта ёки a b га тенг, яъни a b дан кичик эмаслигини билдиради. Бундай тенгсизликлар бирлашмасини $a \geqslant b$ кўринишда ёзишга келишилган.

Худди шунга ўхшаш $\left[\begin{array}{l} a < b \\ a = b \end{array}\right.$ кўринишдаги тенгсизликлар бирлашмаси ё a b дан кичик, ёки a b га тенг, яъни a b дан катта эмаслигини билдиради. У $a \leqslant b$ кўринишда ёзилади.

$\begin{cases} a > b, \\ a \leqslant c \end{cases}$ кўринишдаги тенгсизликлар системаси қўш тенгсизлик бўлиб, у $b < a \leqslant c$ кўринишда ёзилади.

$a \neq b$ ифода $\left[\begin{array}{l} a > b \\ a < b \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмаси деганидир.

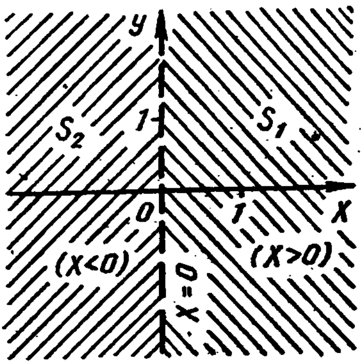
Келгусида биз фақат иккита тенгсизликлар системаси ва бирлашмасига оид мисолларни кўрибгина қолмасдан, балки ВА боғловчи билан ҳамда ЁКИ боғловчи билан тузилган турли тенгсизликлар мажмуидан ташкил топган боғланишлар ҳам кўрилади.

II БОБ. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ГРАФИК УСУЛДА ЕЧИШ

1-§. $x \gtreqless a$ ва $y \gtreqless a$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

$x = 0$ тенгламани текисликда ординаталар ўқи нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. Абсциссаси мусбат, ординаталари ихтиёрий сон бўлган нуқталар мажмуи эса ординаталар ўқидан ўнг томондаги очиқ ярим текисликни ташкил қилади, шу сабабли бу очиқ ярим текислик $x > 0$ тенгсизлик билан аниқланади (1-расмдаги S_1 соҳа). $x < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи ординаталар ўқидан чап томондаги очиқ ярим текисликдан иборатдир (1-расмда у S_2 билан кўрсатилган).

$x \geqslant a$ кўринишдаги тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуасини текисликда тасвирлаш учун эса



1- расм.

дастлаб абсциссаси a га тенг бўлган нуқтадан ординаталар ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз, яъни $x=a$ тенглама графигини чизамиз. Шу тўғри чизиқ ва ундан ўнг томондаги ярим текислик нуқталари мажмуи — изланаётган мажмуа (яъни берилган тенгсизликнинг графиги) бўлади.

Координаталари $x \leqslant a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи $x=a$ тўғри чизиқ ва ундан чап томондаги ярим текислик нуқталари мажмуасидан иборат бўлади.

Одатда чегара нуқталари мажмуи ечимга кирса ёпиқ соҳа, акс ҳолда очиқ соҳа деб ҳам ишлатилади.

Аммо кўпинча бир ўзгарувчили тенгсизликларнинг ечимларини сонлар текислигида тасвирлаш кенг кўламда ишлатилмасдан, балки сонлар тўғри чизиғида ҳамда турли тўплам кўринишидаги белгилашлардан фойдаланиш одат тусига кириб қолган. Шунинг учун зарур бўлган тақдирдаги графикка мурожаат қилинади, акс ҳолда жавобни символик кўринишда ёзиш билан чегараланади.

Демак, ўқувчиларга айни бир жавобни турли кўринишда кўрсатиш мақсадга мувофиқдир.

$$f_1(x) > f_2(x)\,(f_1(x) \geqslant f_2(x)) \text{ ёки } f_1(x) < f_2(x)\,(f_1(x) \leqslant f_2(x))$$

кўринишдаги тенгсизликларни бир номаълумли (яъни ўзгарувчили) тенгсизликлар дейилади, бунда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ — чизиқли ҳамда чизиқли бўлмаган функциялар ҳам бўлиши мумкин.

Исталган чизиқли тенгсизликни

$$ax+b>0\,(ax+b \geqslant 0)$$

кўринишга келтириш мумкин, бунда x — ўзгарувчи, a ва b қандайдир ўзгармас ҳақиқий сонлардир.

$ax+b>0\,(ax+b \geqslant 0)$ тенгсизлик қуйидагича ечилади: а) агар $a>0$ бўлса, у ҳолда тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини $\frac{1}{a}>0$ га кўпайтириб, берилган тенгсизликка тенг кучли $x+\frac{b}{a}>0$ $\left(x+\frac{b}{a}\geqslant 0\right)$ ни ҳосил қиламиз, бундан эса $x>-\frac{b}{a}$ $\left(x\geqslant -\frac{b}{a}\right)$ келиб чиқади. Бу ҳолда жавоб $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$ $\left(\left[-\frac{b}{a}:+\infty\right)\right)$ кўринишда ёзилади;

б) агар $a<0$ бўлса, у ҳолда тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини $\frac{1}{a}<0$ га кўпайтириб, берилганига тенг кучли $x+\frac{b}{a}<0$ $\left(x+\frac{b}{a}\leqslant 0\right)$ тенгсизликни ҳосил қиламиз, бундан эса

$$x<-\frac{b}{a}\left(x\leqslant -\frac{b}{a}\right)$$

келиб чиқади. Жавоб $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$ $\left(\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right]\right)$ кўринишда ёзилади;

в) агар $a=0$ ва $b\leqslant 0$ бўлса, у ҳолда x нинг исталгаи ҳақиқий қийматларида тенгсизлик ечимга эга бўлмайди, бу ҳолда жавоб $\varnothing$ кўринишда ёзилади; агар $a=0$ ва $b>0$ бўлса, у ҳолда тенгсизлик x нинг исталган ҳақиқий қийматларида чексиз кўп ечимга эга бўлади, у ҳолда жавоб $-\infty<x+\infty$ ёки $x\in R$ кўринишда ёзилади.

$ax+b<0$ $(ax+b\leqslant 0)$ тенгсизликниг ҳар иккала қисмини (—1) га кўпайтириб, $-ax-b>0$ $(-ax-b\geqslant 0)$ кўриниш (яъни юқоридаги муҳокама қилинган ҳол) га келтириш мумкинлигини ҳар доим назарда тутиш керак.

Юқоридаги шакл алмаштиришлар I бобнинг 2-§ идаги хоссаларга асосан амалга оширилди. Бундай тенгсизликларни ечиш жараёнида эса ҳар бир қадамда тегишли асосларни эслатиб бориш мақсадга мувофиқдир. $ax+b$ $(a\neq 0)$ иккиҳадни текшириш учун унинг илдизини ёки $ax+b=0$ га айлантирадиган x нинг қийматини топамиз, яъни $x=-\frac{b}{a}$.

Аввало юқоридаги иккиҳадни

$$a\left(x+\frac{b}{a}\right)\quad(a\neq 0)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

$a>0$ бўлсин. У ҳолда, агар $x+\frac{b}{a}>0$, яъни $x>-\frac{b}{a}$

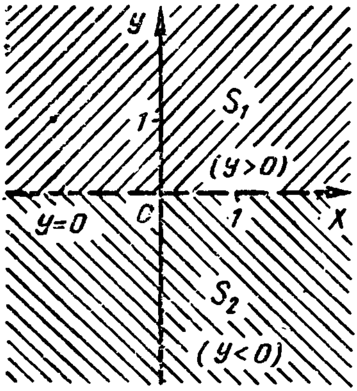
бўлса, иккиҳад мусбат; агар $x+\frac{b}{a}<0$, яъни $x<-\frac{b}{a}$ бўлса, манфий бўлади.

Хулоса. Агар $a>0$ бўлса, у ҳолда $ax+b$ иккиҳад илдизидан катта x нинг қийматларида иккиҳад мусбат, илдизидан кичик x нинг қийматларида эса манфий бўлади ($a<0$ да эса аксинча).

Бу геометрик нуқтаи назардан эса $a>0$ бўлганда $ax+b$ иккиҳад ўз илдизи $\left(x=-\frac{b}{a}\right.$ тўғри чизиқ$\left.\right)$ дан ўнгда ётган исталган нуқтанинг абсциссаларида мусбат, чапда ётган исталган нуқтанинг абсциссаларида эса манфий бўлишини билдиради.

$y=0$ тенгламани абсциссалар ўқи нуқталари тўплами қаноатлантиради, чунки абсциссалар ўқи $y=0$ тенглама билан берилади. Абсциссалар ўқида ётган исталган нуқтанинг ординатаси «0» га тенг бўлиб, абсциссаси эса исталган ҳақиқий сон бўлади, яъни $-\infty<x<+\infty$ $(x\in R)$.

Абсциссалар ўқидан юқоридаги ярим текислик нуқталари мажмуаси ординаталари мусбат, абсциссалари ихтиёрий сон бўлган нуқталар мажмуасидир, у эса $y>0$ тенгсизлик билан аниқланади. Демак, координаталари $y>0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи сонлар текислигининг нуқталари мажмуи — абсциссалар ўқидан юқоридаги очиқ ярим текисликдан иборат (2-расмдаги S_1 соҳа).



2- расм.

Абсциссалар ўқидан пастда (қуйида) жойлашган очиқ ярим текисликдаги исталган нуқтанинг ординатаси манфий бўлгани учун $y<0$ тенгсизликни қаноатлантиради (2-расмдаги S_2 соҳа).

Координаталари $y>a$ кўринишдаги тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуасини текисликда тасвирлаш учун ординатаси a га тенг бўлган нуқтадан абсциссалар ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз ва шу тўғри чизиқ (яъни $y=a$) дан юқоридаги очиқ ярим текислик нуқталари мажмуаси — изланаётган мажмуа бўлади, чунки у очиқ ярим текисликдаги исталган нуқтанинг ординатаси a дан катта бўлади, сонлар тўғри чизиғида эса (a; ∞) очиқ нурдан иборат бўлади.

Агар $y \geqslant a$ бўлса ($y \geqslant a \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y > a, \\ y = a \end{matrix}\right.$), $y = a$ тўғри чизиқ узлуксиз чизилади, чунки $y = a$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуаси ҳам тенгсизликнинг ечимлари мажмуасига киради. У ҳолда $y = a$ тўғри чизиқ ва ундан юқоридаги ярим текислик нуқталари мажмуаси, яъни $y = a$ тўғри чизиқ билан чегараланган юқоридаги ёпиқ ярим текислик нуқталари мажмуаси— $y \geqslant a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуаси бўлади. $y \leqslant a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуаси эса $y = a$ тўғри чизиқ билан чегараланган пастдаги ёпиқ ярим текислик нуқталари мажмуасидан иборатдир.

Шундай қилиб, y ўзгарувчига нисбатан исталган чизиқли тенгсизликлар муҳокамаси юқорида келтирилган x ўзгарувчига нисбатан чизиқли тенгсизликларнинг муҳокамасига ўхшаш олиб борилади.

Эслатма. Бундан кейин тушунтириш матнларидаги айрим муҳокамалар фақат чизмаларнинг сони ортиб кетмаслиги нуқтаи назардан бериб борилади, тасаввур қилиш қийинроқ бўлганларига эса қўшимча чизмалар илова қилинади.

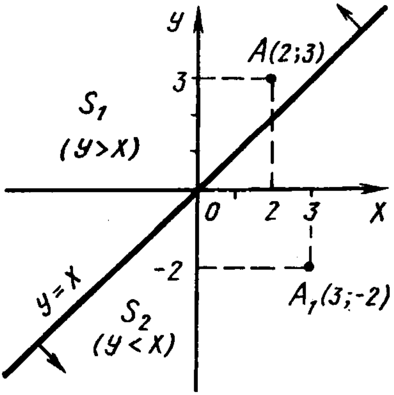
2-§. $ax+by+c \gtrless 0$ кўринишдаги тенгсизликни график усулда ечиш

Агар a ёки b коэффициентлардан бирортаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда f (x, y) $ax+by+c=0$ тенглама текисликни икки ярим текисликка (уларни ўз навбатида юқори ва қуйи ярим текисликлар деб атаймиз) бўлувчи чизиқни беради. Уларнинг ҳар бирида f $(x, y)=ax+by+c$ функциянинг ишораси сақланади. Функциянинг ишорасини аниқлаш учун ярим текисликдаги исталган нуқта олинади ва f функциянинг ўша нуқтадаги қийматини ҳисоблаш етарлидир.

Биз $ax+by+c>0$ тенгсизликда a ва b коэффициентлар бир вақтда нолдан фарқли ҳолларини кўриб чиқамиз, акс ҳолда юқоридаги (1-§) муҳокама қилинган ҳолларга келиб қолади. Шунинг учун тўғри чизиқ координаталар ўқининг ҳеч бирига параллел бўлмайди.

Агар ярим текисликнинг исталган нуқтаси тўғри чизиқдан юқорида (қуйида) жойлашса, у ҳолда ярим текислик тўғри чизиқдан юқорида (қуйида) жойлашган бўлади. Бирор M нуқтанинг тўғри чизиққа нисбатан вазиятини аниқлаш учун бу нуқта орқали ординаталар ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз ва бу тўғри чизиқ берилган тўғри чизиқни бирор A нуқтада кесиб ўтсин. Агар M нуқта биз ясаган вертикал чизиқда A нуқтадан юқорида (қуйида) ётса, у ҳолда M нуқта тўғри чизиқдан юқорида (қуйида) ётади дейилади.

$ax+by+c>0$ тенгсизликни y га нисбатан ечиб, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизликни ҳосил қиламиз, яъни $ax+by+c>0$ тенгсизликнинг ечими $b>0$ бўлганда $y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ (1) ёки $b<0$ бўлганда эса $y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ (2) бўлади.



3- расм.

$y=x$ функцияни кўрайлик. Бу функциянинг графиги биринчи ва учинчи координаталар бурчаклари биссектрисасидан иборат (3- расм). $y=x$ тўғри чизиқдан юқорида жойлашган ярим текисликдаги исталган нуқтанинг ординатаси абсциссасидан катта бўлгани сабабли $y>x$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Масалан, A (2, 3) нуқтани олайлик. Бу нуқтанинг ординатаси абсциссасидан катта, яъни $3>2$ тенгсизлик ўринли. Шунинг учун $y=x$ тўғри чизиқдан юқорида жойлашган ярим текислик нуқталари тўплами $y>x$ тенгсизлик билан берилади (3- расмдаги S_1 соҳа). $y=x$ тўғри чизиқ нуқталари тўпламини S_1 соҳага қўшсак, $y\geqslant x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи ҳосил бўлади.

$y=x$ тўғри чизиқдан қуйидан жойлашган A_1 (3,—2) нуқтани олайлик. Бунда $-2<3$ тенгсизлик ўринли, яъни A_1 нуқтанинг ординатаси шу нуқтанинг абсциссасидан кичик. Шунинг учун $y=x$ тўғри чизиқдан қуйида жойлашган ярим текислик нуқталари тўплами $y<x$ тенгсизликни қаноатлантиради (3- расмдаги S_2 соҳа), унга $y=x$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуини қўшсак, $y\leqslant x$ тенгсизлик ечимлари мажмуи ҳосил бўлади.

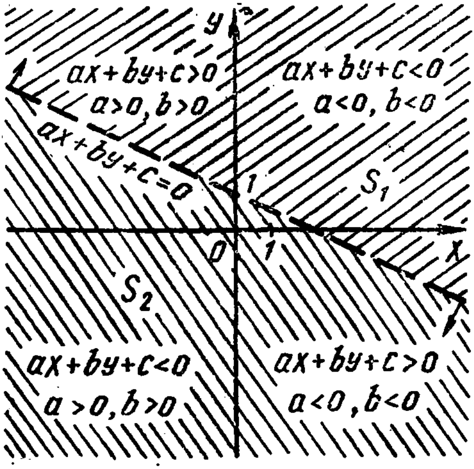
Шундай қилиб, $ax+by+c=0$ тўғри чизиқ координаталар текислигини иккита ярим текисликка бўлади, булардан бирида $ax+by+c>0$ тенгсизлик, иккинчисида эса $ax+by+c<0$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги умумий хулосаларга келиш мумкин:

1-хулоса. $ax+by+c=0$ тенгламанинг илдизлари $ax+by+c=0$ $\left(\text{яъни } y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуидир.

2-хулоса. а) Координаталари, агар $a>0$ ва $b>0$ бўлса, $ax+by+c>0$ (яъни $y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$) тенгсизликни, агар $a<0$ ва $b<0$ бўлса, $ax+by+c<0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ тўғри чизиққа нисбатан юқорида (ўнгдаги) жойлашган очиқ ярим текислик нуқталари мажмуидан иборат (4- расмдаги S_1 соҳа).

б) Координаталари, агар $a<0$ ва $b<0$ бўлса, $ax+$

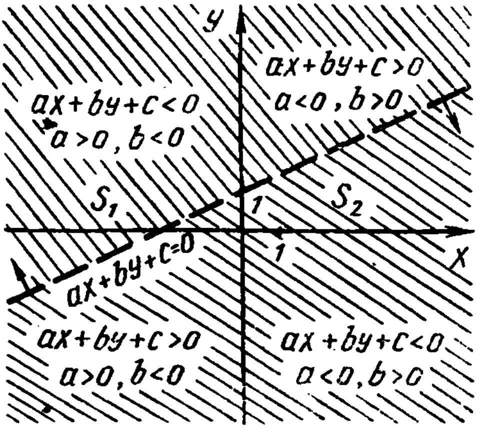


4- расм.

$+by+c>0$ $\left(\text{яъни } y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)$ тенгсизликни, агар $a>0$ ва $b>0$ бўлса, $ax+by+c<0$ $\left(\text{яъни } y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ тўғри чизиққа нисбатан қуйида (чапдаги) жойлашган очиқ ярим текислик нуқталари мажмуидан иборатдир (4-расмдаги S_2 соҳа).

3-хулоса. а) Координаталари, агар $a>0$ ва $b<0$ бўлса, $ax+by+c<0$ $\left(\text{яъни } y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)$ тенгсизликни, агар $a<0$ ва $b>0$ бўлса, $ax+by+c>0$ $\left(\text{яъни } y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ тўғри чизиққа нисбатан юқорида (чапдаги) жойлашган очиқ ярим текислик нуқталари мажмуидан иборат бўлади (5-расмдаги S_1 соҳа).

б) Координаталари, агар $a>0$ ва $b<0$ бўлса, $ax+by+c>0$ $\left(\text{яъни } y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)$ тенгсизликни, агар $a<0$ ва $b>0$ бўлса, $ax+by+c<0$ $\left(\text{яъни } y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)$



5- расм.

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ тўғри чизиққа нисбатан қуйида (ўнгдаги) жойлашган очиқ ярим тенгсизлик нуқталари мажмуидан иборат (5-расмдаги S_2 соҳа).

4-хулоса. $ax + by + c \geqslant 0$ ва $ax + by + c \leqslant 0$ тенгсизликларнинг ечимлари мажмуига $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуи ҳам киради.

Энди икки ўзгарувчили чизиқли тенгсизликлар ечимларини топишга доир мисолларни кўриб чиқамиз.

1-мисол. Координаталари $2x + y + 1 > 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуини кўрсатинг.

Ечиш. $2x + y + 1 > 0$ тенгсизлик $y > -2x - 1$ тенгсизликка тенг кучли. 2-хулосанинг а) сига кўра берилган тенгсизликни $y = -2x - 1$ тўғри чизиққа нисбатан юқорида (ўнгдаги) жойлашган очиқ ярим текислик нуқталари мажмуи — изланаётган ечим бўлади.

2-мисол. Координаталари $2x - 3y + 1 < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуини кўрсатинг.

Ечиш. $2x - 3y + 1 < 0 \Leftrightarrow y > \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Демак, изланаётган мажмуа $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ тўғри чизиқ билан чегараланган юқоридаги (чапдаги) очиқ ярим текислик нуқталари мажмуасидан иборат бўлади (3-хулосанинг а) сига қаранг, яъни $a = 2 > 0$ ва $b = -3 < 0$).

3-мисол. $2x - y + 1 > 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $2x - y + 1 > 0 \Leftrightarrow y < 2x + 1$. Бу тенгсизликни қаноатлантирувчи (x, y) нуқталар мажмуини текисликда тасвирлаш учун $2x - y + 1 = 0$ (яъни $y = 2x + 1$) тўғри чизиқни чизиш ва шу тўғри чизиқдан қуйида (ўнгдаги) жойлашган ярим текисликнинг ҳамма нуқталарини олиш керак (3-хулосанинг б) сига қаранг, яъни $a=2>0$ ва $b= -1 < 0$). Ҳақиқатан ҳам, тўғри чизиқдан қуйида жойлашган очиқ ярим текислик нуқталари мажмуи — изланаётган мажмуа эканлигига ишониш учун $f(x, y) = 2x - y + 1$ функциянинг $(0; 0)$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз. $f(0; 0) = 2 \cdot 0 - 0 + 1 = 1 > 0$. Демак, тенгсизлик ўринли.

4-мисол. $5x + y - 2 \leqslant 2$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуини топинг

Ечиш. $5x + y - 2 \leqslant 2 \Leftrightarrow y \leqslant -5x + 4$. Бу тенгсизликни $y = -5x + 4$ тўғри чизиқ билан чегараланган ва ундан қуйида (чапдаги) жойлашган очиқ ярим текислик нуқталари мажмуи қаноатлантиради. График ечимни кўрсатаётганда у соҳани штрихлаб кўрсатиш зарур.

3- §. Чизиқли тенгсизликлар системасини ва тенгсизликлар бирлашмасини график усулда ечиш

Тенгсизликлар системасининг ёки тенгсизликлар бирлашмасининг ечимини график кўринишда берилиши айниқса методик жиҳатдан осон ва кўргазмалидир. Айрим тенгсизликнинг, тенгсизликлар системасининг ёки тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари тўпламини аналитик кўринишда кўрсатиш анча қийин ва кўп вақтни талаб қилиши мумкин. Шу сабабли уларни график усулда ечиш ва ечимни график кўринишда кўрсатиш мақсадга мувофиқдир.

Координаталар текислигида координаталари иккита ёки ундан ортиқ чизиқли тенгсизликлардан тузилган тенгсизликлар системасини ва тенгсизликлар бирлашмасини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини топиш билан шуғулланамиз. (Тенгсизликлар системаси ва тенгсизликлар бирлашмаси, шунингдек, уларнинг ечимлари ҳақидаги тушунчалар I-бобнинг 3- § да келтирилган.)

Агар тенгсизликлар системасини ечиш керак бўлса, аввал система таркибидаги ҳар бир тенгсизлик график усулда ечилади, сўнгра ҳосил бўлган текислик бўлакларининг умумий қисми (кесишмаси) топилади. Шундай қилиб, тенгсизликлар системасининг ечимлари тўплами шу системага кирувчи тенгсизликлар ечимлари тўпламларининг кесишмасидан иборат бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, тенгсизликлар системасини системанинг ҳар бир тенгсизлиги билан берилган нуқталар тўплами кесишмасига тегишли ва фақат шунга тегишли нуқталарнинг координаталаригина қаноатлантиради.

Агар тенгсизликлар бирлашмасини ечиш керак бўлса, аввал бирлашма таркибидаги ҳар бир тенгсизликнинг ечимлари тўплами топилади, сўнгра ҳосил бўлган текислик бўлакларининг бирлашмаси (йиғиндиси) топилади. Демак, тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари тўплами бирлашма таркибидаги тенгсизликлар ечимлари тўпламларининг бирлашмасидан иборатдир.

Шундай қилиб, тенгсизликлар системасини ва тенгсизликлар бирлашмасини аввал геометрик (график) кўринишда, сўнгра аналитик йўл билан ечиш ўзини методик жиҳатдан оқлайди.

I. Бир номаълумли чизиқли тенгсизликлар системасини график усулда ечиш.

Бир номаълумли энг содда тенгсизликлар системасини умумий ҳолда

$$\begin{cases} a_1x + b_1 \gtreqless 0, \\ a_2x + b_2 \gtreqless 0 \end{cases}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу системанинг ҳар бир тенгсизлигини тенг кучли тенгсизликлар хоссаларидан фойдаланиб шакл алмаштирилганда система қуйидаги содда ҳоллардан бири кўринишига келади. Бу ерда система таркибига фақат иккита тенгсизлик кирганлари қараб чиқилади, аммо хулосаларни ундан кўп тенгсизликлар қатнашган системалар учун ҳам умумлаштириш мумкин.

1-ҳол. Система таркибидаги тенгсизликларни тенг кучли шакл алмаштиришлардан сўнг бу система бир хил маъноли тенгсизликлардан ташкил топиши мумкин, яъни:

1) агар $m > n$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} x > m, \\ x > n \end{cases} \Leftrightarrow x > m$ бўлади, яъни тенгсизликлар ечимларининг умумий қисми катта илдиздан каттаси бўлади. Демак, $x > m$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи $(m; +\infty)$ интервалдан иборат бўлади.

Ва аксинча, агар $m < n$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} x > m, \\ x > n \end{cases} \Leftrightarrow x > n$ бўлади, яъни бу ҳолда системанинг ечими $(n; +\infty)$ интервалдан иборат бўлади;

2) агар $m > n$ бўлса, бу ҳолда $\begin{cases} x < m, \\ x < n \end{cases} \Leftrightarrow x < n$ бўлади, яъни тенгсизликлар ечимларининг умумий қисми кичик илдиздан кичиги бўлади. Демак, бу ҳолда ечим $(-\infty; n)$ дан иборатдир. Ва аксинча, агар $m < n$ бўлса, $\begin{cases} x < m, \\ x < n \end{cases} \Leftrightarrow x < m$ бўлади.

2-ҳол. Система таркибидаги тенгсизликларни тенг кучли шакл алмаштиришлардан сўнг бу система турли маъноли тенгсизликлардан ташкил топиши мумкин, яъни:

1) агар $m < n$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} x > m, \\ x < n \end{cases} \Leftrightarrow m < x < n$ бўлади. Демак, бу ҳолда ечим $(m;\ n)$ дан иборат.

Агар $m \geqslant n$ бўлса, у ҳолда системанинг тенгсизликлари бир-бирига зид ечимларга эга бўлади. Шунинг учун система ечимга эга бўлмайди, яъни система таркибига кирган тенгсизликлар ечимларининг умумий қисми йўқ.

2) агар $m > n$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} x < m, \\ x > n \end{cases}$ системанинг ечимлари $n < x < m$ қўш тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами, яъни ечими $(n;\ m)$ бўлади.

Агар $m \leqslant n$ бўлса, $\begin{cases} x > m, \\ x < n \end{cases}$ система ечимга эга бўлмайди.

1-мисол. Қуйидаги тенгсизликлар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x - 3 > 5, \\ 2x - 3 > 1, \\ x - 1 < 2, \\ x < 4. \end{cases}$$

Ечиш. Қуйидаги кетма-кет тенг кучли шакл алмаштиришларни бажарамиз:

$$\begin{cases} x - 3 > 5, \\ 2x - 3 > 1, \\ x - 1 < 2, \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 8, \\ x > 2, \\ x < 3, \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 8, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Жавоб. Ечими йўқ, яъни $\varnothing$.

2-мисол. Қуйидаги тенгсизликлар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3ax - 5 < 6 - ax, \\ (a + 1)\,x - 3 < (1 - 2a)\,x + 5. \end{cases}$$

Ечиш. Қуйидаги тенг кучли шакл алмаштиришларни бажарамиз:

$$\begin{cases} 3ax - 5 < 6 - ax, \\ (a + 1)\,x - 3 < (1 - 2a)\,x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax < \frac{11}{4}, \\ ax < \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow ax < \frac{8}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ ax < \dfrac{8}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ ax < \dfrac{8}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ ax < \dfrac{8}{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ x < \dfrac{8}{3a}; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ 0 \cdot x < \dfrac{8}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ x > \dfrac{8}{3a}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ x < \dfrac{8}{3a}; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ -\infty < x < +\infty; \end{cases} \\ a < 0, \\ x > \dfrac{8}{3a}. \end{array}\right.$$

Охирги ёзилган тенгсизликлар системаси бирлашмаси изланаётган жавоб бўлади. Бунда жавоб параметрнинг олиши мумкин бўлган қийматларини назарга олган ҳолда умумий кўринишда ёзилган.

Кўпинча функцияларнинг олиши мумкин бўлган қийматлари тўплами (яъни аниқланиш соҳаси)ни топишда тенгсизликлар системасини ечишга тўғри келади. Шунинг учун система ечимини топишда зарур бўлган тақдирдагина, графикка мурожаат қилинади.

II. Бир номаълумли чизиқли тенгсизликлар бирлашмасини график усулда ечиш.

Бир номаълумли икки чизиқли тенгсизликлар бирлашмаси тенг кучли шакл алмаштиришлардан сўнг, қуйида келтирилган ҳолатлардан бири кўринишида бўлиши мумкин, яъни:

1-ҳол. Агар $m > n$ бўлса, у ҳолда $\left[\begin{array}{l} x > m \\ x > n \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечими $x > n$ тенгсизлик ечимлари мажмуидан иборат бўлади: *Жавоб:* $(n;\ +\infty)$.

Масалан, $\left[\begin{array}{l} x > -5 \\ x > 5 \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечими $-x > -5$ тенгсизликнинг ечимлари тўпламидан иборатдир, яъни жавоб: $(-5,\ +\infty)$.

Эслатма. Бу ҳолда бирлашма таркибига кирган тенгсизликлар ечимларидан кичигидан кичик бўлмаган барча ўзгарувчининг қийматлари тўпламига тенгсизлик катта илдизидан кичик бўлмаган қийматлари мажмуи кирган бўлади, шунинг учун тенгсизликлар бирлашмаси таркибига тенгсизлик ечимларидан энг қуйи чегарасидан ўнг томондаги очиқ нурда ётган нуқталар тўплами — изланаётган ечим бўлади.

2-ҳол. Агар $m > n$ бўлса, у ҳолда $\left[\begin{array}{l} x < m \\ x < n \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечими $x < m$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуидан иборат бўлади, яъни бу ҳолда *жавоб* $(-\infty;\ m)$ кўринишда ёзилади.

Масалан, $\left|\begin{array}{l} x<-5 \\ x<-1 \\ x<6 \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечими $x<6$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуидан иборат.

Демак, *жавоб:* $(-\infty;\ 6)$.

3- ҳол. Агар $m<n$ бўлса, у ҳолда $\left[\begin{array}{l} x>m \\ x<n \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари — сонлар текислиги (яъни R^2) дан иборат бўлади, аммо биз одатда бир ўзгарувчили тенгсизликлар учун ҳақиқий сонлар тўплами (яъни сонлар тўғри чизиғи) билан чегараланамиз.

Демак, бу ҳолда сонлар текислигида (ёки сонлар тўғри чизиғида) ётган исталган нуқтанинг абсциссаси (ёки $x \in R$ дан олинган x ўзгарувчининг исталган қиймати) ё бирлашма таркибига кирган биринчи тенгсизликни ёки иккинчи тенгсизликни албатта қаноатлантиради. Шунинг учун улар изланаётган ечим бўлади.

Масалан. $\left[\begin{array}{l} x\geqslant 2 \\ x<2 \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечими R бўлади, чунки тенгсизликлар бирлашмасига кирган тенгсизлик ечимлари сонлар тўғри чизиғини тўлдиради.

$$\left[\begin{array}{l} x\geqslant 2 \\ x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 2) \cup [2;\ +\infty)=(-\infty;\ +\infty)=R.$$

4- ҳол. Агар $m>n$ бўлса, у ҳолда $\left[\begin{array}{l} x>m \\ x<n \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечими $[n;\ m]$ ёпиқ кесмага тегишли бўлмаган барча ҳақиқий сонлардан иборат бўлади, яъни $x \in (-\infty;\ n) \cup (m;\ +\infty)$.

5- ҳол. Агар $m=n$ бўлса, у ҳолда $\left[\begin{array}{l} x>m \\ x<n \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари $x=m$ дан бошқа барча сонлар тўғри чизиғи нуқталаридан иборатдир, уни кўпинча $(-\infty;\ m) \cup (m;\ +\infty)$ кўринишда ёзамиз.

Масалан, $x \neq 3$, яъни $\left|\begin{array}{l} x>3 \\ x<3 \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$ дан иборат.

Мисоллар. 1. Қуйидаги тенгсизликлар бирлашмасини ечинг:

$$\left[\begin{array}{l} x>3x+1 \\ x<2x. \end{array}\right.$$

Ечиш. Қуйидаги тенг кучли шакл алмаштиришларни бажарамиз:

$$\left[\begin{array}{l} x > 3x+1, \\ x < 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x > 1, \\ -x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{1}{2} \\ x > 0. \end{array}\right.$$

Жавоб: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (0;\ +\infty)$.

2. Қуйидаги тенгсизликлар бирлашмасини ечинг:

$$\left[\begin{array}{l} (3a+1)\ x-2 < x+3 \\ 2+3ax > 14. \end{array}\right.$$

Ечиш. Бир ўзгарувчили тенгсизликларни ечишга оид хоссалардан фойдаланиб, қуйидаги тенг кучли шакл алмаштиришларни бажарамиз:

$$\left[\begin{array}{l} (3a+1)\ x-2 < x+3 \\ 2+3ax > 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3ax < 5 \\ 3ax > 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax < \frac{5}{3} \\ ax > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a > 0, \\ x < \frac{5}{3a}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a = 0, \\ 0\cdot x < \frac{5}{3}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a < 0, \\ x > \frac{5}{3a}; \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a > 0, \\ x > \frac{4}{a}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a = 0, \\ 0\cdot x > 4; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a < 0, \\ x < \frac{4}{a} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{5}{3a} \\ x > \frac{4}{a}, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a = 0, \\ \left[\begin{array}{l} -\infty < x < +\infty, \\ \varnothing; \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x > \frac{5}{3a} \\ x < \frac{4}{a} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{5}{3a} \\ x > \frac{4}{a}; \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a = 0, \\ x = R; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x > \frac{5}{3a} \\ x < \frac{4}{a}. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Натижани ихчамроқ кўринишга келтириш мақсадида, айрим ҳолларни, яъни параметрнинг оладиган бир хил қийматларини умумлаштириш мақсадга мувофиқдир.

III. Икки ўзгарувчили биринчи даражали тенгсизликлар системасини график усулда ечиш.

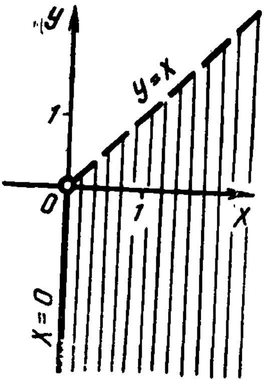
Таъриф. Икки ўзгарувчили системанинг ечими деб ўзгарувчиларнинг системага кирувчи тенгсизликнинг ҳар бирини тўғри сонли тенгсизликка айлантирувчи тартибланган қийматлари жуфтига айтилади.

1-мисол. $\begin{cases} x-y>0, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$ система ечимлари мажмуини координаталар текислигида тасвирланг.

Ечиш.

$$\begin{cases} x-y>0, \\ x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<x, \\ x\geqslant 0. \end{cases}$$

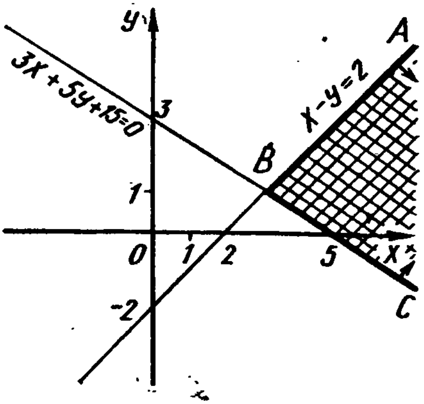
Изланаётган мажмуа I ва III координаталар бурчаклари биссектрисалари билан чегараланган қуйи (яъни $y=x$ тўғри чизиқдан пастдаги) очиқ ярим текисликнинг ординаталар ўқи ва ундан ўнг томондаги текислик нуқталари мажмуидан иборат бўлади, унга биссектриса нуқталари мажмуи кирмайди, шунинг учун у узуқ-узуқ (яъни пунктир) чизиқ билан кўрсатилади (6-расм). Шунингдек, (0; 0) нуқта, яъни координаталар боши изланаётган ечимга кирмайди, чунки бу нуқтанинг координаталари система биринчи тенгсизлигини тўғри сонли тенгсизликка айлантирмайди (яъни 0<0 тенгсизлик нотўғри тенгсизликдир), иккинчи тенгсизлигини эса тўғри сонли тенгсизликка айлантиради. Шунинг учун (0; 0) нуқтани графикда очиқ доирачага олиб қўйилади, акс ҳолда бу нуқта системанинг ечимига кириб қолган бўлади.



6-расм.

2-мисол. $\begin{cases} 3x+5y\geqslant 15, \\ x-y\geqslant 2 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш. Аввал $3x+5y=15$ тўғри чизиқни ясаймиз. Бунинг учун $x=0$ деб, $y=3$ ни; сўнгра $y=0$ деб, $x=5$ ни топамиз. $3x+5y=15$ тўғри чизиқ ва ундан юқорида ётган ярим текислик нуқталари система биринчи тенгсизлигининг ечими бўлади (7-расмда ярим текислик нуқталар мажмуини стрелка, яъни кўрсаткич билан кўрсатилган). Бундан кейин ишчи чизмаларининг кўпайиб



7- расм.

кетмаслиги учун бундай белгилашдан тез-тез фойдаланилади).

Энди $x-y=2$ тўғри чизиқни ясаймиз. $x=0$ бўлсин, у ҳолда $y=-2$ ва $y=0$ бўлса, $x=2$ бўлади; демак, (2; 0) ва (0;—2) нуқталар $x-y=2$ тўғри чизиқда ётадилар. $x-y=2$ тўғри чизиқ ва ундан пастда (ўнгдагиси) ётган ярим текисликдаги исталган нуқтанинг абсциссаси билан ординатаси орасидаги фарқ (яъни $x-y$ айирма) 2 дан кичик бўлмагани учун система иккинчи тенгсизлигининг ечимлари бўлади.

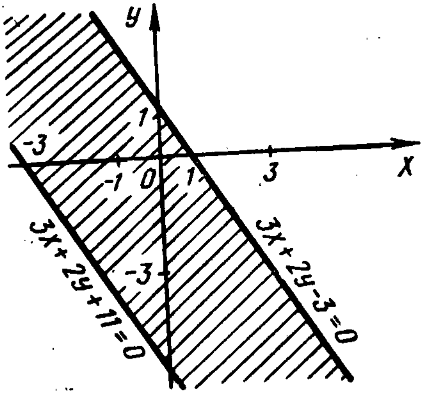
Шундай қилиб, изланаётган мажмуа — система таркибига кирган иккала тенгсизликнинг ечимлари кесишмаси (яъни ABC бурчак ва унинг ички нуқталари мажмуи)дан иборат бўлади (7- расмдаги икки марта штрихланган соҳа).

3-мисол. $\begin{cases}3x+2y-3\leqslant 0,\\ 3x+2y+11\geqslant 0\end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш.

$$\begin{cases}3x+2y-3\leqslant 0,\\ 3x+2y+11\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\leqslant -1{,}5x+1{,}5,\\ y\geqslant -1{,}5x-5{,}5.\end{cases}$$



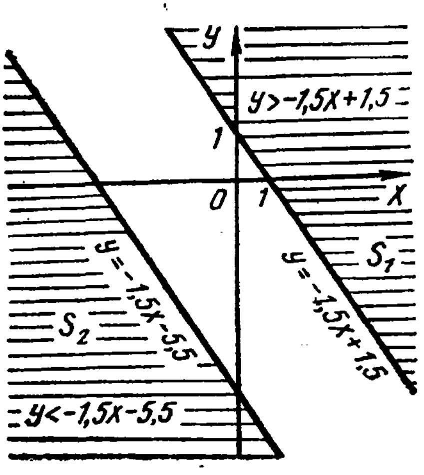
8- расм.

Система биринчи тенгсизлигини $y=-1{,}5x+1{,}5$ ((0 ;1) ва (3;—3) нуқталардан ўтувчи) тўғри чизиқ ва ундан қуйида жойлашган ярим текислик, иккинчи тенгсизлигини эса $y=1{,}5x-5{,}5$ ((—3; —1) ва (—1;

—4) нуқталардан ўтувчи) тўғри чизиқ ва ундан юқоридаги ярим текислик нуқталари мажмуи қаноатлантиради. Шундай қилиб, системанинг ечимлари мажмуи— $3x+2y—3=0$ ($y=—1,5x+1,5$) ва $3x+2y+11=0$ ($y=—1,5x—5,5$) тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полоса нуқталари мажмуидан иборат (8- расм).

Эслатма. $\begin{cases} y\leqslant -1,5x+1,5, \\ y\geqslant -1,5x-5,5 \end{cases}$ системани қўш тенгсизлик, яъни $—1,5x-5,5\leqslant y\leqslant -1,5x+1,5$ кўринишда ёзиб олиб, сўнгра муҳокама қилса ҳам бўлар эди.

Агар берилган система $\begin{cases} 3x+2y-3\geqslant 0, \\ 3x+2y+11\geqslant 0 \end{cases}$ кўринишда бўлганда эди, у ҳолда уни $\begin{cases} y\geqslant -1,5x+1,5, \\ y\geqslant -1,5x-5,5 \end{cases}$ кўринишда ёзиб олиб, сўнгра бу системани ўз навбатида $y\geqslant -1,5x+1,5$ (чунки $—1,5x+1,5\geqslant$ $\geqslant -1,5x-5,5 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1,5\geqslant -5,5$) тенгсизлик билан алмаштирилса, муҳокама анча соддалашади. Шундай қилиб, бу системанинг ечимлари мажмуи $—y=—1,5x+$ $+1,5$ тўғри чизиқ ва ундан юқоридаги ярим текислик нуқталари мажмуидан иборат бўлади (9- расмдаги S_1 соҳа).



9- расм.

Агар система $\begin{cases} 3x+2y-3\leqslant 0, \\ 3x+2y+11\leqslant 0 \end{cases}$ кўринишда бўлса, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} y\leqslant -1,5x+1,5, \\ y\leqslant -1,5x-5,5 \end{cases} \Leftrightarrow y\leqslant -1,5x-5,5.$$

Бундан кўринадики, $y\leqslant—1,5+1,5$ тўғри чизиқ ва ундан қуйидаги ярим текислик билан $y\leqslant—1,5x—5,5$ тўғри чизиқ ва ундан қуйида ётган ярим текислик нуқталари мажмуи кесишмасини фақат $y\leqslant—1,5x—5,5$

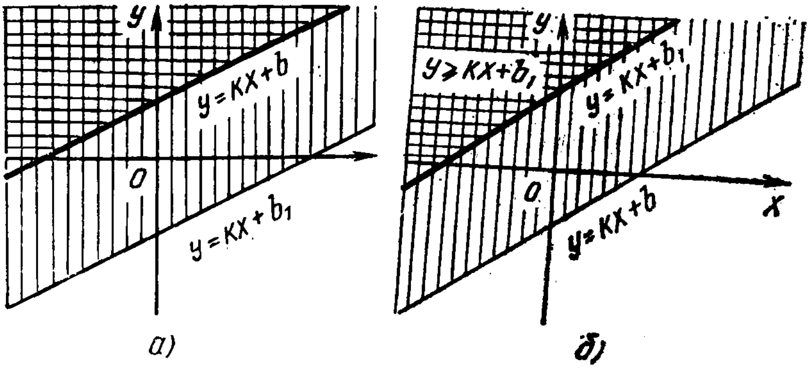
(чунки $-1{,}5x-5{,}5\leqslant 1{,}5x+1{,}5; -5{,}5\leqslant 1{,}5$) тенгсизлик орқали берилса ҳам бўлади (9-расмдаги S_2 соҳа).

Агар тенгсизликлар системаси $\begin{cases}3x+2y-3\geqslant 0,\\ 3x+2y+11\leqslant 0\end{cases}$ кўринишда берилганда эди, у ҳолда бу система биринчи тенгсизлигини $3x+2y-3=0$ (яъни $y=-1{,}5x+1{,}5$) тўғри чизиқ ва ундан юқорида жойлашган ярим текислик нуқталари мажмуи, иккинчи тенгсизлигини эса $3x+2y+11=0$ (яъни $y=-1{,}5x-5{,}5$) тўғри чизиқ ва ундан қуйида ётган ярим текислик нуқталари мажмуи қаноатлантиради. Аммо берилган система тенгсизликларини қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуининг умумий қисми мавжуд эмас (9-расм). Шунинг учун бу ҳолда система ечимга эга эмас экан.

Шундай қилиб, система таркибига кирган ҳар иккала тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлганда, юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги умумий хулосаларни чиқариш мумкин бўлади.

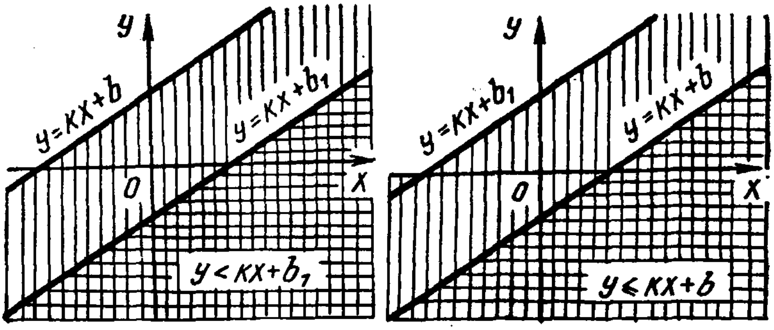
1-хулоса. $b>b_1$ ($b<b_1$) бўлса, у ҳолда $\begin{cases}y\geqslant kx+b,\\ y\geqslant kx+b_1\end{cases}$ системанинг умумий ечимини $y\geqslant kx+b$ ($y\geqslant kx+b_1$) тенгсизлик билан бериш мумкин, яъни $y=kx+b$ ($y=kx+b_1$) тўғри чизиқ ва ундан юқоридаги ярим текислик нуқталари мажмуи изланаётган ечимдир (10-расм).

2-хулоса. Агар $b>b_1$ ($b<b_1$) бўлса, у ҳолда $\begin{cases}y\leqslant kx+b,\\ y\leqslant kx+b_1\end{cases}$ системанинг ечимини $y\leqslant kx+b_1$ ($y\leqslant kx+b$) тенгсизлик билан бериш мумкин, яъни $y=kx+b_1$ ($y=$



а) б)

10-расм.



а)

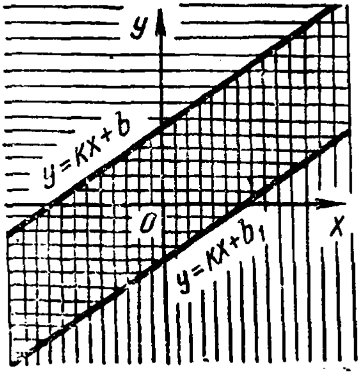
б)

11- расм.

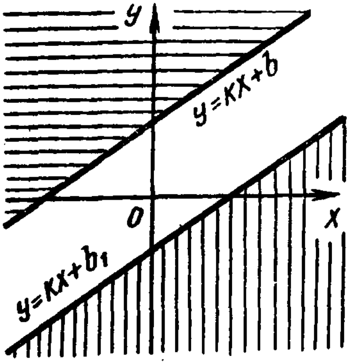
$= kx + b$) тўғри чизиқ ва ундан пастда ётган ярим текислик нуқталари мажмуи изланаётган ечим бўлади (11- расм).

3- хулоса. Агар $b > b_1$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} y \leqslant kx + b, \\ y \geqslant kx + b_1 \end{cases}$ система ечимини $kx + b_1 \leqslant y \leqslant kx + b$ қўш тенгсизлик билан бериш мумкин, яъни $y = kx + b_1$ ва $y = kx + b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полоса нуқталари мажмуи изланаётган ечимдир (12- расм).

4- хулоса. Агар $b > b_1$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} y \geqslant kx + b, \\ y \leqslant kx + b_1 \end{cases}$ система ечимга эга эмас (13- расм).

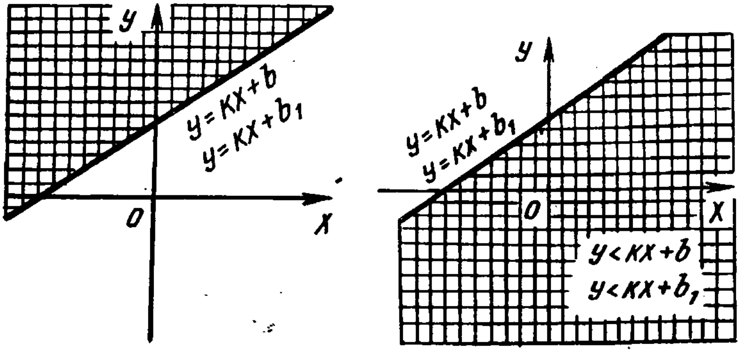


12- расм.



13- расм.

5-хулоса. Агар $b = b_1$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} y \geqslant kx + b, \\ y \geqslant kx + b_1 \end{cases}$ система ечимини $y \geqslant kx + b$ тенгсизлик билан бериш мумкин, яъни тўғри чизиқлар устма-уст тушганда системанинг ечими $y = kx + b$ тўғри чизиқ ва ундан юқоридаги ярим текислик нуқталари мажмуидан иборатдир ва аксинча (14-расм).



а) б)

14- расм.

6-хулоса. Агар $b = b_1$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} y \geqslant kx + b, \\ y \leqslant kx + b_1 \end{cases}$ система ечимини $y = kx + b$ тўғри чизиқ билан бериш мумкин, яъни система ечими $y = kx + b$ тўғри чизиқ нуқталаридан иборат бўлади.

Агар $b = b_1$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} y > kx + b, \\ y < kx + b_1 \end{cases}$ система ечимга эга эмас.

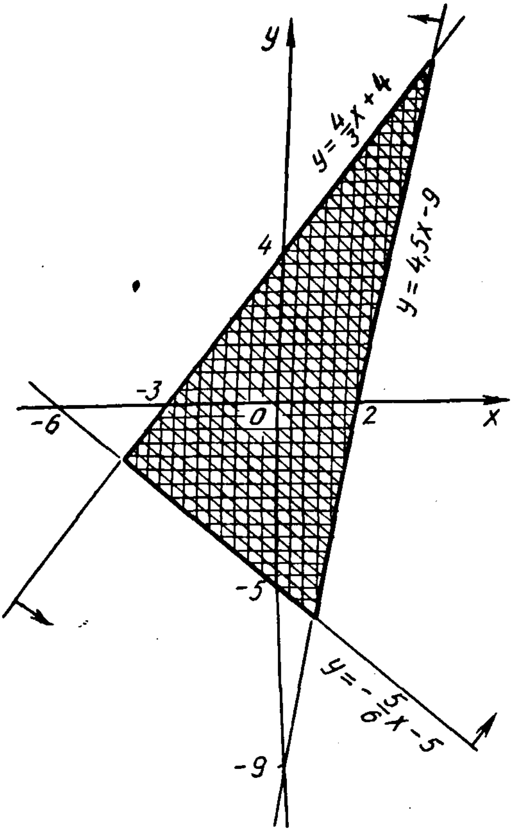
7-хулоса. Агар тўғри чизиқлар параллел бўлмаса (яъни кесишса), у ҳолда системанинг ечими шу тўғри чизиқлар кесишишидан ҳосил бўлган бурчаклардан бири бўлади.

4-мисол.
$$\begin{cases} -4x + 3y - 12 \leqslant 0, \\ 5x + 6y + 30 \geqslant 0, \\ 9x - 2y - 18 \leqslant 0 \end{cases}$$
системани ечинг.

Ечиш. Системанинг ҳар бир тенгсизлигини тенг кучли шакл алмаштириб, стандарт кўринишга келтирамиз, яъни:

$$\begin{cases} -4x+3y-12\leqslant 0, \\ 5x+6y+30\geqslant 0, \\ 9x-2y-18\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leqslant \frac{4}{3}x+4, \\ y\geqslant -\frac{5}{6}x-5, \\ y\geqslant 4{,}5x-9. \end{cases}$$

Изланаётган ечим 15- расмда кўрсатилган.



15- расм.

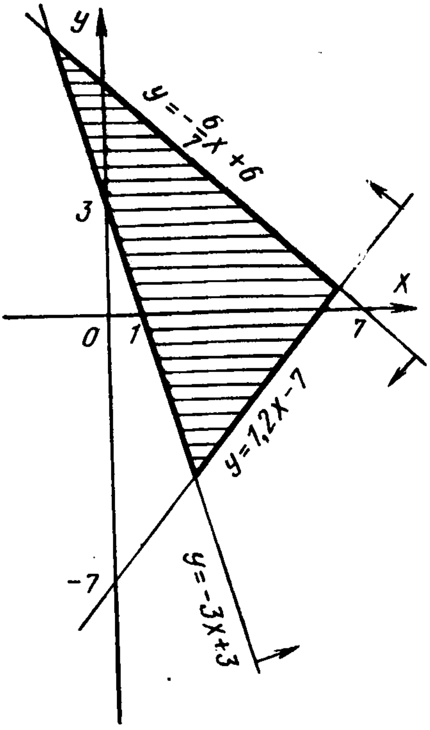
5-мисол. $\begin{cases} 3x+y-3\geqslant 0, \\ 6x+7y-42\leqslant 0 \\ 7x-5y-35\leqslant 0 \end{cases}$

системани ечинг.

Ечиш.

$$\begin{cases}3x+y-3\geqslant 0,\\ 6x+7y-42\leqslant 0.\Leftrightarrow\\ 7x-5y-35\leqslant 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant -3x+3,\\ y\leqslant -\frac{6}{7}x+6,\\ y\geqslant 1{,}2x-7.\end{cases}$$



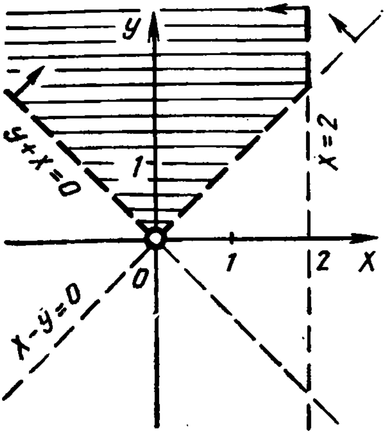
16- расм.

Системанинг биринчи тенгсизлигини $y=-3x+3$ ((0;3) ва (1; 0) нуқталардан ўтувчи) тўғри чизиқ ва ундан юқоридаги (ўнгдаги), иккинчи тенгсизлигини $y=-\frac{6}{7}x+6$ ((0; 6) ва (7; 0) нуқталардан ўтувчи) тўғри чизиқ ва ундан пастдаги (чапдаги), ниҳоят учинчи тенгсизлигини эса $y=1{,}2x-7$ ((0; -7) ва (5; -1) нуқталардан ўтувчи) тўғри чизиқ ва ундан юқоридаги (чапдаги) ярим текислик нуқталари мажмуи қаноатлантиради. Мос ечимлар стрелка билан кўрсатилган.

Изланаётган ечим юқорида қайд қилинган тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ *ABC* учбурчак нуқталари мажмуидан иборат (16- расм).

6- мисол. $\begin{cases}x+y>0,\\ x-y<0,\\ x-2<0\end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. $\begin{cases}x+y>0,\\ x-y<0,\\ x-2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y>-x,\\ y>x,\\ x<2\end{cases}$ эканини назарга олсак, изланаётган мажмуа — биринчи ва иккинчи координаталар бурчаги биссектрисалари орасидаги бурчак ички нуқталари мажмуининг $x=2$ тўғри чизиқдан чапдаги нуқталари мажмуидан иборатдир, унга $x+y=0$, $x-y=0$



17- расм.

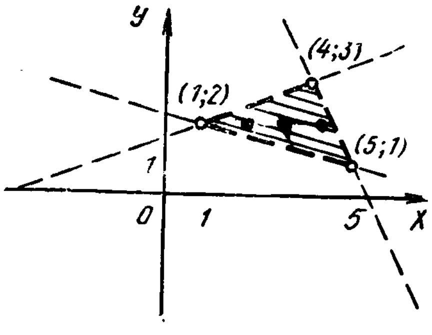
ва $x-2=0$ тўғри чизиқлар нуқталари мажмуи кирмайди, шунинг учун улар пунктир чизиқ билан кўрсатилган (17- расм).

7- мисол. $\begin{cases} 3y-x<5, \\ y+2x<11, \\ 4y+x>9 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар мажмуини xOy текисликда кўрсатинг. Шунингдек, бу системани қаноатлантирувчи x ва y ларнинг ҳамма бутун қийматларини топинг.

Ечиш.

$$\begin{cases} 3y-x<5, \\ y+2x<11, \\ 4y+x>9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}, \\ y<-2x+11, \\ y>-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}. \end{cases}$$

Шундай қилиб, берилган тенгсизликлар системасини $3y-x=5$ ва $y+2x=11$ тўғри чизиқлардан пастдаги ҳамда $4y+x=9$ тўғри чизиқдан юқоридаги ярим текисликлар кесишишидан ҳосил бўлган учбурчак ички нуқталари қаноатлантиради. Ечимга учбурчак томонларида ётувчи нуқталар мажмуи кирмайди. Демак, системанинг ечимлари мос равишда $3y-x=6$, $y+2x=11$ ва $4y+x=9$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ учбурчак нуқталари мажмуидан иборат (18- расм). $\begin{cases} 3y-x=5, \\ 4y+x=9 \end{cases}$ системанинг ечими $\{(1;\ 2)\}$ (яъни система таркибига кирган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасининг координаталари). $\begin{cases} 3y-x=5, \\ y+2x=11 \end{cases}$



18- расм.

системанинг ечими $\{(4;\ 3)\}$ ва $\begin{cases} y+2x=11, \\ 4y+x=9 \end{cases}$ системанинг ечими $\{(5;\ 1)\}$ дан иборат. $(1;\ 2)$, $(4;\ 3)$ ва $(5;\ 1)$ нуқталар — учбурчак учининг координаталаридир. Шундай қилиб, берилган тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталарнинг абсциссаси 1 билан 5 ($x \in (1;\ 5)$) ва ординатаси эса 1 билан 3 (яъни $y \in (1;\ 3)$) орасида ўзгарар экан. Бундан x нинг қабул қилиши мумкин бўлган бутун қийматлари 2, 3 ва 4 лардан, y нинг эса фақат битта 2 бутун сонидан иборат эканлиги келиб чиқади.

Демак, системани қаноатлантирувчи x ва y ларнинг ҳамма бутун қийматлари: $\{(2;\ 2),\ (3;\ 2),\ (4;\ 2)\}$.

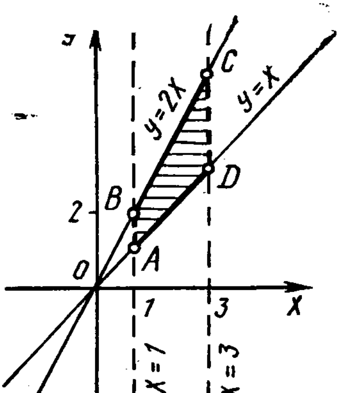
Эслатма. Шундай қилиб, икки ўзгарувчили биринчи даражали учта тенгсизликдан иборат системанинг ечимлари текисликда бурчак, кесилган бурчак, учбурчак ва шунга ўхшаш шакл (яъни фигура) ларни берар экан.

8-мисол. $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \leqslant 2x, \\ x < 3, \\ x > 1 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликларни жуфт-жуфти билан гуруҳлаб, қуйидаги иккита тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \leqslant 2x \end{cases} \quad (1) \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x<3, \\ x>1. \end{cases} \quad (2)$$

(1) системанинг ечимлари соҳаси DOC бурчакдан, (2) система учун эса $x=1$ ва $x=3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полосадан иборат. Изланаётган соҳа (1) ва (2) системалар ечимларининг умумий қисмидан, яъни DOC бурчакнинг полоса билан кесишмасидан иборат. Изланаётган соҳага $ABCD$ трапециянинг барча ички нуқталари, шунингдек, BC ва AD кес-



19- расм.

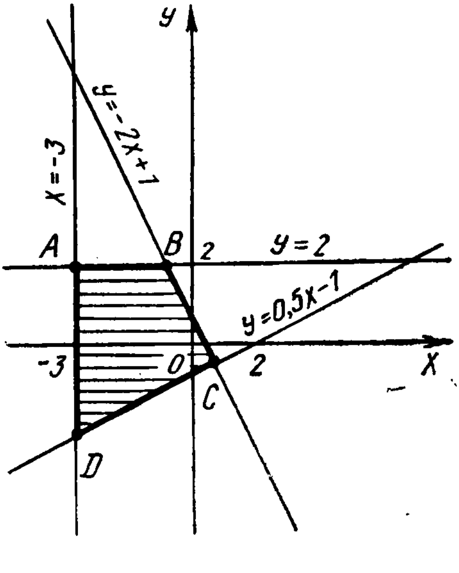
маларнинг барча ички нуқталари киради. Аммо AB ва DC кесмалар, худди трапеция учлари каби изланаётган соҳага кирмайди (19- расм).

9-мисол. $\begin{cases} x-2y\leqslant 2, \\ 2x+y\leqslant 1, \\ y\leqslant 2, \\ x\geqslant -3 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Қуйидаги тенг кучли алмаштиришларни бажарамиз:

$$\begin{cases} x-2y\leqslant 2, \\ 2x+y\leqslant 1, \\ y\leqslant 2, \\ x\geqslant -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0,5x-1, \\ y\leqslant -2x+1, \\ y\leqslant 2, \\ x\geqslant -3. \end{cases}$$

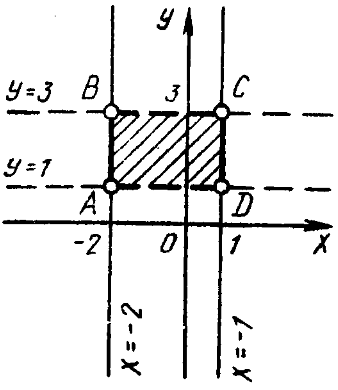
$y=0,5x-1$, $y=-2x+1$, $y=2$ ва $x=-3$ тўғри чизиқларни ясаймиз ва стрелкалар билан тенгсизликларнинг мос ечимларини кўрсатамиз. Шундай қилиб, системанинг ечимлари мажмуи $ABCD$ тўртбурчакнинг чегараларидан ва унинг ички қисмига тегишли нуқталар мажмуидан иборат (20- расм).



20- расм.

10-мисол. $\begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 1, \\ 1<y<3 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. $\begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 1, \\ 1<y<3 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси аслида $\begin{cases} x\geqslant -2, \\ x\leqslant 1, \\ y>1, \\ y<3 \end{cases}$ тенгсизликлар системасига тенг кучли. Бизга маълумки, $-2\leqslant x\leqslant 1$ қўш тенгсизликни $x=-2$ ва $x=1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полоса, $1<y<3$



21- расм.

тенгсизликни эса $y=1$ ва $y=3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полоса нуқталари мажмуи қаноатлантиради. Берилган қўш тенгсизликлар системаси ечимлари мажмуи юқоридаги иккала полосанинг кесишишидан ҳосил бўлган $ABCD$ тўғри тўртбурчак ва унинг ички нуқталари мажмуидан (21- расм) иборат бўлиб, унга AB ва CD кесмалар нуқталари мажмуи изланаётган мажмуага киради, лекин BC ва AD кесмалар нуқталари мажмуи эса кирмайди. Шунингдек, изланаётган соҳага A, B, C ва D нуқталар, яъни тўғри тўртбурчак учлари тегишли эмас. Масалан, A нуқта $x=-2$ ва $y=1$ координаталарга эга бўлиб, $y=1$ сони иккинчи қўш тенгсизликни қаноатлантирмайди.

11-мисол. $\begin{cases} x+y \leqslant 1, \\ x+y \geqslant -1, \\ x-y \leqslant 1, \\ x-y \geqslant -1 \end{cases}$

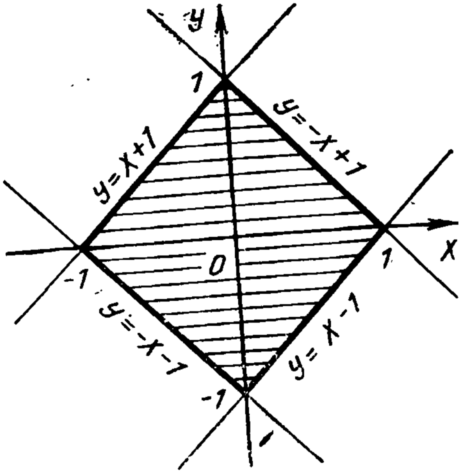
тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш.

$$\begin{cases} x+y \leqslant 1, \\ x+y \geqslant -1, \\ x-y \leqslant 1, \\ x-y \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x+y \leqslant 1, \\ -1 \leqslant x-y \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \leqslant y \leqslant -x+1. \\ x-1 \leqslant y \leqslant x+1. \end{cases}$$

Изланаётган мажмуа чегаралари $y=-x-1$ тўғри чизиқ билан $y=-x+1$ тўғри чизиқ ҳамда $y=x-1$ тўғри чизиқ билан $y=x+1$ тўғри чизиқ бўлган ёпиқ полосалар кесишишидан ҳосил бўлган квадрат ва унинг ички нуқталари мажмуидан иборатдир (22- расм).

Агар берилган система $\begin{cases} x+y \leqslant 1, \\ x+y \geqslant -1, \\ x-y \leqslant 1, \\ x-y \geqslant -1 \end{cases}$ кўринишда бўлган-



22- расм.

да эди, у ҳолда бу системанинг ечимлари мажмуи — бўш тўплам бўларди, чунки система таркибига кирган $x+y\geqslant 1$ тенгсизлик билан $x+y\leqslant -1$ тенгсизликни бир вақтда қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуи мавжуд эмас (яъни координаталарнинг йиғиндиси бир вақтда 1 дан катта бўлмаган ҳамда —1 дан кичик бўлмаган нуқта текисликда йўқ). Шунинг учун система таркибига кирган тенгсизликлар ечимларининг умумий қисми йўқ, шу сабабли система биргаликда эмас, яъни ечими йўқ.

Шундай қилиб, система таркибига 4 та чизиқли тенгсизликлар кирган бўлса, у ҳолда бу системанинг ечимлари геометрик жиҳатдан турли тўртбурчаклар (яъни система таркибига кирган тўғри чизиқлар билан чегараланган)дан иборат бўлади. Ечимга система таркибига кирган тўғри чизиқлар нуқталари мажмуи кириши ёки кирмаслиги мумкин.

IV. Биринчи даражали икки ўзгарувчили тенгсизликлар бирлашмасини график усулда ечиш.

Биринчи даражали икки ўзгарувчили иккита тенгсизликлар бирлашмасини умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

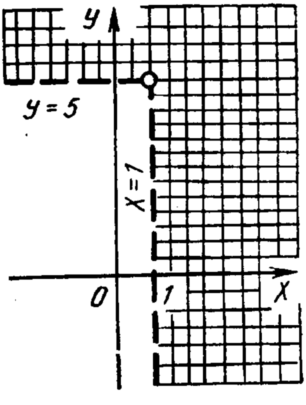
$$\left[\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1\gtrless 0\\ a_2x+b_2y+c_2\gtrless 0.\end{array}\right.$$

Тенгсизликлар бирлашмасининг ечими бирлашма таркибига кирган тенгсизликлардан камида бирини тўғри сонли тенгсизликка айлантирувчи x ва y ўзгарувчиларнинг қийматлари тўплами бўлади.

1-мисол. $\left[\begin{array}{l}3x+y>3x+5\\ 2x-3y>x-3y+1\end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари соҳасини текисликда аниқланг.

Ечиш. $\left[\begin{array}{l}3x+y>3x+5\\ 2x-3y>x-3y+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y>5\\ x>1.\end{array}\right.$

Аввал $y=5$ ва $x=1$ тўғри чизиқларни ясаймиз. Сўнгра $y=5$ тўғри чизиқдан юқоридаги ва $x=1$ тўғри чизиқдан ўнгдаги очиқ ярим текисликларни штрихлаймиз. Изланаётган ечимлар соҳаси 23-расмда тасвирланган.



23- расм.

2-мисол. $\left[\begin{array}{l}2x+3>y\\ 4x-2y>-6\end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасини ечинг.

Ечиш. $\left[\begin{array}{l}2x+3>y\\ 4x-2y>-6\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y<2x+3\\ y<2x+3\end{array}\right. \Leftrightarrow y<2x+3.$

Изланаётган ечимлар соҳаси $y=2x+3$ тўғри чизиқдан қуйида жойлашган очиқ ярим текислик нуқталари мажмуидан иборатдир.

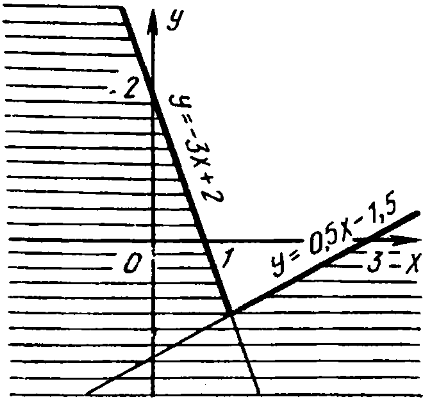
3-мисол. $\left[\begin{array}{l}x-3\geqslant 2y\\ 3x+y\leqslant 2\end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари тўпламини топинг.

Ечиш. $\left[\begin{array}{l}x-3\geqslant 2y\\ 3x+y\leqslant 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y\leqslant 0,5x-1,5\\ y\leqslant -3x+2.\end{array}\right.$

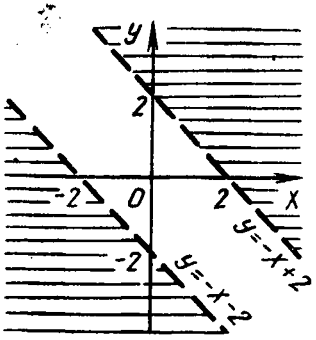
Бир вақтда $y=0,5x-1,5$ ва $y=-3x+2$ тўғри чизиқлар ҳамда улардан қуйида жойлашган ярим текисликлар нуқталари тўплами изланаётган ечимлар соҳаси бўлади (24-расм).

4-мисол. $\left[\begin{array}{l}x+y>2\\ x+y<-2\end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечимларини текисликда аниқланг.

Ечиш. $\left[\begin{array}{l}x+y>2\\ x+y<-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y>-x+2\\ y<-x-2.\end{array}\right.$



24- расм.



25- расм.

$y=-x+2$ ҳамда $y=-x-2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полоса нуқталаридан бошқа барча текислик нуқталари тўплами изланаётган ечимлар тўпламидир (25- расм), яъни $y=-x+2$ тўғри чизиқдан юқоридаги ҳамда $y=-x-2$ тўғри чизиқдан қуйида ётган очиқ ярим текислик нуқталари тўплами ё бирлашма таркибига кирган биринчи тенгсизликни ёки иккинчи тенгсизликни албатта тўғри сонли тенгсизликка айлантиради. Шунинг учун у нуқталар тўплами берилган тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари соҳаси бўлади.

5- мисол. $\left[\begin{array}{l}2x+y>1\\ 4x+2y<-3\end{array}\right.$

тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари тўпламини топинг.

Ечиш. $\left[\begin{array}{l}2x+y>1\\ 4x+2y<-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y>-2x+1,\\ y<-2x-1{,}5.\end{array}\right.$

$y=-2x+1$ тўғри чизиқдан юқорида ҳамда $y=-2x-1{,}5$ тўғри чизиқдан қуйида ётган очиқ ярим текисликлар нуқталари тўплами йиғиндиси изланаётган ечимлар тўпламини беради, яъни у сонлар текислигидан иборат бўлади. Демак, сонлар текислигидан олинган исталган нуқтанинг координаталари ё бирлашма таркибига кирган биринчи тенгсизликни ёки иккинчи тенгсизликни қаноатлантиради, яъни $\{(x,\ y)\}\in R^2$.

6-мисол. $\left[\begin{array}{l}x-y>1\\ x-y<1\end{array}\right.$

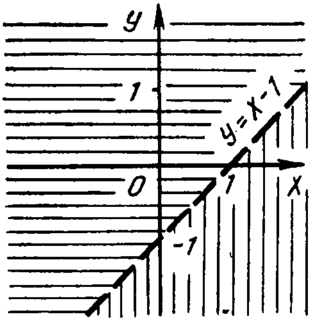
тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари соҳасини топинг.

Ечиш. $\left[\begin{array}{l} x-y>1 \\ x-y<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<x-1 \\ y>x-1. \end{array}\right.$

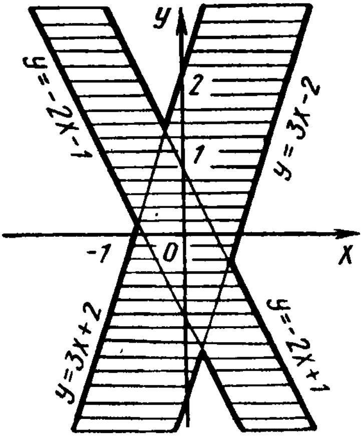
Берилган тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари тўплами $y=x-1$ тўғри чизиқда ётган нуқталар тўпламидан бошқа барча сонлар текислигидан иборат бўлади (26- расм).

7-мисол. $\left[\begin{array}{l} -1\leqslant 2x+y\leqslant 1 \\ -2\leqslant 3x-y\leqslant 2 \end{array}\right.$ қўш тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари тўпламини текисликда тасвирланг.

Ечиш. $\left[\begin{array}{l} -1\leqslant 2x+y\leqslant 1 \\ -2\leqslant 3x-y\leqslant 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x-1\leqslant y\leqslant -2x+1 \\ 3x-2\leqslant y\leqslant 3x+2. \end{array}\right.$



26- расм.



27- расм.

Шундай қилиб, чегаралари $y=-2x-1$ билан $y=-2x+1$ тўғри чизиқлар ҳамда $y=3x-2$ билан $y=3x+2$ тўғри чизиқлар бўлган ёпиқ полосалар нуқталари тўплами берилган қўш тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари тўплами бўлади (27- расм).

Ёпиқ полосалар кесишишидан ҳосил бўлган параллелограмм томонларида ҳамда унинг ичида ётувчи (параллелограммнинг ички соҳаси назарда тутиляпти) нуқталарнинг координаталари бир вақтда бирлашма таркибига кирган ҳар иккала қўш тенгсизликни тўғри сонли қўш тенгсизликка айлантиради. Масалан, (0; 0) нуқта, яъни координаталар боши нуқтасининг координаталарини берилган қўш тенгсизликлар бирлашмасига қўямиз, натижада тўғри сонли тенгсизлик ҳосил бўлади, яъни

$$\left[\begin{array}{l} -1<0<1 \\ -2<0<2 \end{array}\right].$$

8-мисол. $\left[\begin{array}{l} x-2y>x-2y+3 \\ 2x+5y-1>2x+5y+4 \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари тўпламини топинг.

Ечиш $\left[\begin{array}{l} x-2y>x-2y+3 \\ 2x+5y-1>2x+5y+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0>3 \\ -1>4. \end{array}\right.$

Тенг кучли шакл алмаштиришдан ҳосил бўлган сонли тенгсизликларнинг ҳар бири тўғри сонли тенгсизлик бўлмагани учун берилган тенгсизликлар бирлашмаси биргаликда эмас, яъни ечими бўш тўпламдир.

Машқлар

Координаталар текислигида координаталари қуйидаги тенгсизликлар системаларини, шунингдек тенгсизликлар бирлашмасини қаноатлантирувчи текислик нуқталари тўпламини штрихлаб кўрсатинг:

1. $\begin{cases} y-x+1>0, \\ 2x-y-3>0, \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+3y+8<4x+2y+13, \\ 2x+3y>6-x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-3y+6>0, \\ x-3>0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-y+2>0, \\ x+y+1<0, \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-2y>1+4x+y, \\ 3x+y<5y+5x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-y>9-3y, \\ x-3y>5-2y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3-2y<8-2x, \\ x+2y>1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x+2y+1\geqslant 0, \\ 3x+2y-3\leqslant 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+2y<4y+x+2, \\ x-3y<3(1-y). \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+1\geqslant y+x-2, \\ x+y\leqslant 2y+2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x>0, \\ y<0, \\ y-x+4>0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-y\leqslant 3, \\ x+y\leqslant 2-y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y+x\geqslant 3, \\ y-2x<0, \\ 2y-x>0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-y\leqslant 1, \\ x+y\leqslant 2, \\ y\leqslant 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x-3y+13\leqslant 0, \\ y+5\leqslant 5x, \\ 4y+28\geqslant 7x. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y-x-2\leqslant 0, \\ y+2x-4\leqslant 0, \\ y+5\geqslant 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+y-2\leqslant 0,\\ 2y+5x\geqslant 10,\\ 5x-2y-10\leqslant 0.\end{cases}$

18. $\begin{cases} x+2y\geqslant 0,\\ x-y\leqslant 0,\\ x-4y\geqslant -6.\end{cases}$

19. $\begin{cases} y-2x\geqslant 2,\\ y-2x\leqslant 8,\\ y+x-6\leqslant 0,\\ y+x-2\geqslant 0.\end{cases}$

20. $\left[\begin{array}{l} -3\leqslant x\leqslant 3,\\ -3\leqslant y\leqslant 3.\end{array}\right.$

21. $\left[\begin{array}{l} 2x-y>2(2-y+x),\\ x+2y>6+2(y-x).\end{array}\right.$

22. $\left[\begin{array}{l} x>3\\ y>2\\ y\leqslant -1.\end{array}\right.$

23. $\left[\begin{array}{l} x\leqslant -2\\ y\geqslant 4\\ x>3.\end{array}\right.$

24. $\left|\begin{array}{l} x\geqslant -2\\ y\leqslant -3\\ y\geqslant 2.\end{array}\right.$

25. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geqslant 3\\ x\leqslant -3,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} y\geqslant 4\\ y\leqslant -3.\end{array}\right.\end{cases}$

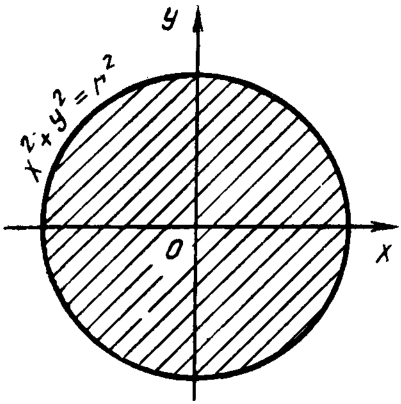
26. $\left[\begin{array}{l} y-x\geqslant 3\\ y+x\leqslant 2x-2.\end{array}\right.$

III БОБ. ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ГРАФИК УСУЛДА ЕЧИШ

1-§. $x^2+y^2\gtreqless r^2$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

Биз биламизки, $x^2+y^2=r^2$ — маркази координаталар бошида ва радиуси r га тенг бўлган айлана тенгламасидан иборат бўлиб, бу тенгламани айланада ётган барча нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради, яъни у нуқталар тенгламанинг илдизларидир. $x^2+y^2\leqslant r^2$ тенгсизликнинг ечимлари эса маркази координаталар бошида ва радиуси r га тенг бўлган доира нуқталари тўпламидаи иборат бўлиб, изланаётган ечимга айлана нуқталари тўплами ҳам киради, яъни доирага фақатгина координаталари $x^2+y^2\leqslant r^2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталаргина тегишли бўлади (28-расм).

Масалан, $A(-1,\ -7)$, $B(0,\ 6)$, $C(-2,\ 2)$ ва $D(7,\ 0)$ нуқталар маркази координаталар бошида ва радиуси 6 бирликка тенг бўлган айланага тегишли бўладими?



28- расм.

$x^2 + y^2 \leqslant 6^2 = 36$ — маркази координаталар бошида ва радиуси 6 бирликка тенг бўлган доира тенгламасидир.

1) $(-1)^2 + (-7)^2 \leqslant 36$, яъни $50 \leqslant 36$ — тенгсизлик ўринли эмас. Демак, A нуқта доирага тегишли эмас.

2) $0^2 + 6^2 \leqslant 36$, яъни $36 \leqslant 36$ — тенгсизлик ўринли. Шунинг учун B нуқта доирага тегишли бўлади.

3) $(-2)^2 + 2^2 \leqslant 36$, яъни $8 \leqslant 36$ — тўғри тенгсизлик. Демак, C нуқта доирага тегишли.

4) $7^2 + 0^2 \leqslant 36$, яъни $49 \leqslant 36$ — тенгсизлик ўринли эмас. Шунинг учун D нуқта доирага тегишли эмас.

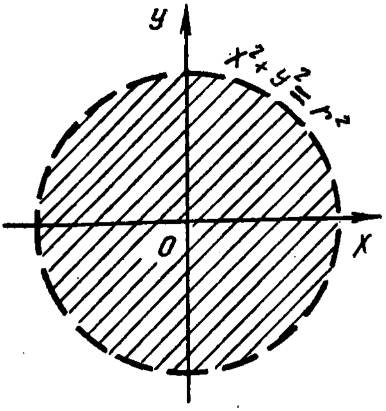
A ва D нуқталар доирага тегишли бўлмаса, у ҳолда улар доирага нисбатан қаерда жойлашган бўлади?

Юқоридаги мисолнинг муҳокамасидан шундай хулосага келиш мумкин эканки, агар берилган нуқта координаталари квадратларининг йиғиндиси радиуси квадратидан катта бўлмаса, у нуқталар доирага тегишли бўлади; агар берилган нуқта координаталари квадратлари йиғиндиси радиуси квадратидан катта бўлса, у нуқта доиранинг ташқарисидаги нуқталар дейиш мумкин ($50>36$ ва $49>36$).

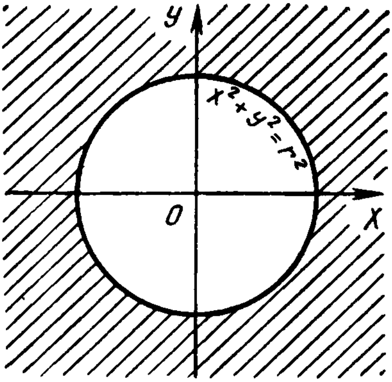
Демак, A ва D нуқталар — доира ташқарисидаги нуқталар экан. $x^2+y^2<r^2$ тенгсизликнинг ечимлари — маркази координаталар бошида ва радиуси r га тенг бўлган доира бўлиб, унга айлана нуқталари тўплами кирмайди. Демак, изланаётган тўплам — маркази координаталар бошида ва радиуси r га тенг бўлган очиқ доира нуқталари тўпламидан иборат экан (29- расм).

$x^2 + y^2 \geqslant r^2$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами эса маркази координаталар бошида ва радиуси r га тенг бўлган айлана нуқталари тўплами ҳамда текисликнинг шу айлана билан чегараланган доирадан ташқарида жойлашган нуқталари тўпламлари йиғиндиси (бирлашмаси) дан иборат (30- расм).

$x^2 + y^2 > r^2$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами — маркази координаталар бошида ва радиуси r га тенг бўлган ёпиқ



29- расм.



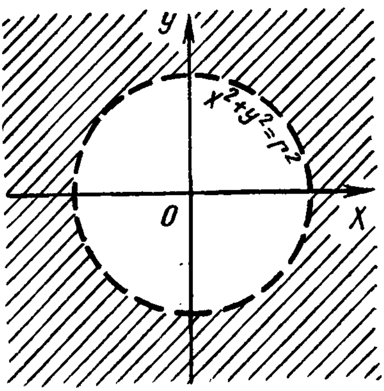
30- расм.

доирадан ташқарида ётган текислик нуқталаридан иборат бўлиб, унга айлана нуқталари тўплами кирмайди (31- расм).

Демак, айланада ва шу айлана билан чегараланган доирадан ташқарида ётган текисликдаги исталган нуқта координаталари квадратлари йиғиндиси шу айлана радиуси квадратидан кичик эмас экан.

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ — маркази (a, b) нуқтада ва радиуси R га тенг бўлган айлананинг умумий тенгламасидир.

x^2+px+y^2+qy+f йиғиндини ҳар доим тўла квадрат ажратиш ёрдами билан чап қисми икки x ва y ўзгарувчилар қатнашган сонлар квадратларининг йиғиндиси ҳамда ўнг қисми бирор маълум сон бўлган муносабат кўринишига келтириш мумкин (бунда айлана умумий тенгламасига ўхшаш кўринишга келтириш назарда тутиляпти). Бунинг натижасида ҳосил бўлган муносабатнинг, яъни тенгсизликнинг ечимлари тўғрисида гап юритиш мумкин бўлади

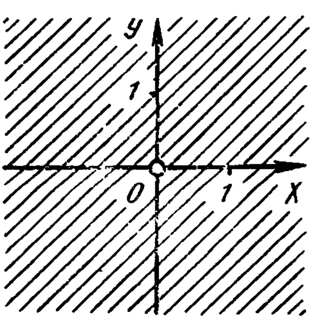


31- расм.

Энди (x, y) координаталар текислигида тенгсизликлар ечимларини тасвирлашга доир мисолларни кўриб чиқамиз.

1-мисол. $x^2+y^2\geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари тўпламини координаталар текислигида тасвирланг.

Ечиш. Биламизки, текисликдаги исталган нуқта координаталари квадратлари йиғиндиси номанфий сондир. Шунинг учун берилган тенгсизликни координаталар текислигидаги исталган нуқтанинг координаталари қаноатлантиради. Демак, изланаётган тўплам — сонлар текислиги, яъни R^2 (бундай ўқилади: «эр икки») дан, $x^2+y^2=0$ тенгламанинг графиги эса координаталар бошидан иборат (яъни $O(0; 0)$).



32- расм.

2-мисол. $x^2+y^2>0$ тенгсизликнинг ечимини координаталар текислигида кўрсатинг.

Ечиш. Тенгсизликни координаталар бошидан бошқа барча текислик нуқталари тўплами қаноатлантиради (32-расм). Шундай қилиб, тенгсизликнинг ечимлари R^2 дан иборат бўлиб, унга (0; 0) нуқта кирмайди. Изланаётган ечимни $R^2\setminus\{(0; 0)\}$ кўринишда ҳам ёзиш мумкин ($\setminus$ белги — изланаётган ечимга кўрсатилган нуқта кирмаслигини билдиради).

$x^2+y^2>0$ тенгсизлик $(x-a)^2+(y-b)^2>0$ тенгсизликнинг $a=0$ ва $b=0$ бўлгандаги хусусий ҳолидир.

Демак, $(x-a)^2+(y-b)^2>0$ тенгсизликнинг ечимлари $(a; b)$ нуқтадан бошқа сонлар текислигидан иборатдир, яъни $R^2\setminus\{(a; b)\}$.

Масалан, $(x-4)^2+(y-1)^2>0$ тенгсизликни (4; 1) нуқтадан бошқа исталган ҳақиқий сонлар жуфти қаноатлантиради. Демак, изланаётган тўплам — xOy текислигидир, унга (4; 1) нуқта кирмайди.

3-мисол. $x^2+y^2\leqslant 0$ тенгсизликнинг ечимини координаталар текислигида тасвирланг.

Ечиш. Берилган тенгсизликнинг ечимлари $x^2+y^2=0$ тенгламанинг ечимлари билан бир хил, уни фақат координаталар боши координатаси қаноатлантиради. Изланаётган ечим $\{(0; 0)\}$ дан иборат.

4-мисол. $x^2+y^2<0$ тенгсизликнинг ечимини координаталар текислигида тасвирланг.

Ечиш. Сонлар текислигидаги ҳеч қандай ҳақиқий сонлар жуфтининг квадратлари йиғиндиси манфий сон бўла олмаганлигидан, изланаётган тўплам — бўш ($\varnothing$) тўпламдан иборат бўлади.

5-мисол. Координаталари $x^2+y^2\leqslant 2x+2y$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталарни координаталар текислигида кўрсатинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликни муҳокама қилиниши мумкин бўлган стандарт кўринишга келтириш учун тенг кучли шакл алмаштиришларни бажарамиз, яъни берилган тенгсизликни $x^2+y^2\leqslant 2x+2y \Leftrightarrow (x^2-2x+$ $+1)+(y^2-2y+1)\leqslant 2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$ кўринишга келтирамиз. Бу тенгсизликнинг ечимлари эса, маркази (1; 1) нуқтада ва радиуси $R=\sqrt{2}$ га тенг бўлган ёпиқ доира нуқталари тўпламидан иборат.

6-мисол. $x^2+4x+y^2\geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари тўпламини кўрсатинг.

Ечиш. $x^2+4x+y^2\geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2+4x+4)-4+y^2\geqslant$ $\geqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2\geqslant 4.$

Демак, изланаётган ечимлар тўплами — маркази (—2, 0) нуқтада ва радиуси $R=2$ га тенг бўлган айлана ва ундан ташқаридаги текислик нуқталаридан иборат экан.

7-мисол. $x^2+y^2-2y\leqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари тўпламини координаталар текислигида кўрсатинг.

Ечиш. $x^2+y^2-2y\leqslant 0 \Leftrightarrow x^2+(y^2-2y+1)\leqslant 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2\leqslant 1$. Демак, $x^2+2y^2-2y\leqslant 0$ тенгсизликни маркази (0, 1) нуқтада ва радиуси $R=1$ га тенг бўлган ёпиқ доира нуқталари тўплами қаноатлантиради.

8-мисол. $3x^2-8x+4+3y^2\geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари тўпламини координаталар текислигида тасвирланг.

Ечиш. $3x^2-8x+4+3y^2\geqslant 0 \Leftrightarrow x^2-\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}+$

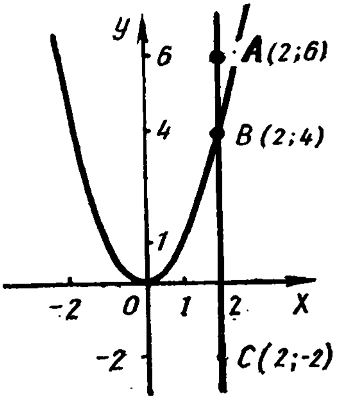
$$+y^2\geqslant 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}+\frac{4}{3}+y^2\geqslant 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+$$

$$+y^2\geqslant \frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Демак, изланаётган тўплам — маркази $\left(\frac{4}{3}\,;\,0\right)$ нуқтада ва радиуси $R=\frac{2}{3}$ бўлган айлана ва ундан ташқаридаги текислик нуқталаридан иборат.

2-§. $y \gtrless ax^2$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

Умуман олганда $y=ax^2$ парабола xOy координаталар текислигини ҳеч бир умумий нуқталарга эга бўлмаган икки соҳага ажратади — «парабола ичи» ва «ташқи соҳа». $y=x^2$ ($a=1$) параболани чизиб, унинг ичидаги ёки ташқи соҳасидаги нуқталар тўплами $y>x^2$ ёки $y<x^2$ тенгсизликлардан қайси бирини қаноатлантиришини қуйидагича муҳокама қилиш осон бўлади.



33- расм.

Параболада ётувчи B (2; 4) нуқтани олайлик (33- расм). Унинг координаталари учун $y=x^2$ $(4=2^2 \Rightarrow \Rightarrow 4=4)$ тенглик бажарилади. B нуқта орқали ординаталар ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Агар B (2; 4) нуқтани шу $x=2$ тўғри чизиқ бўйича «юқорига», яъни ординатаси ортиб борадиган қилиб кўчирсак, у ҳолда $y>x^2$ тенгсизлик бажарилади. Масалан, A(2; 6) нуқтани олайлик. Параболанинг «ичи»га тегишли бўлган A нуқтанинг ординатаси параболада ётувчи B нуқтанинг ординатасидан катта (6>4), аммо абсциссалари бир хил. Шунинг учун «парабола ичи»га тегишли бўлган текисликнинг барча нуқталари $y>x^2$ тенгсизликни қаноатлантиради, яъни «парабола ичи»га тегишли исталган нуқтанинг ординатаси шу нуқта абсциссаси квадратидан катта. Энди B нуқтани $x=2$ тўғри чизиқ бўйича «паст»га, яъни ординатаси камаядиган йўналишда ҳаракатлантирилса, $y<x^2$ тенгсизлик бажарилади. Масалан, C (2; —2) нуқтани олайлик. Параболанинг «ташқи соҳа» сига тегишли бўлган C нуқтанинг ординатаси параболада ётган B нуқта-

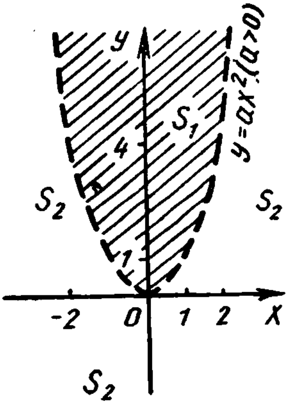
нинг ординатасидан кичик $(-2<4)$, аммо абсциссалари бир хил. Параболанинг «ташқи соҳа» сига тегишли бўлган исталган нуқтанинг ординатаси абсциссаси квадратидан кичик (масалан, C нуқта учун $-2<2^2=4$) бўлгани учун $y<x^2$ тенгсизликни қаноатлантиради. Изланаётган тўпламга парабола нуқталари тўплами кирмайди.

$y=x^2$ параболага нисбатан юқоридагидек муҳокама қилишни ўзингизга ҳавола қиламиз.

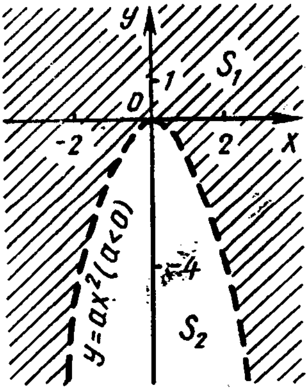
Юқоридаги муҳокамалардан қуйидаги **хулосаларни** чиқарамиз:

1. $y>ax^2$ $(a>0)$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами «парабола ичи»га тегишли барча нуқталари тўпламидан иборат (парабола нуқталари тўпламга тегишли эмас) (34- расмдаги S_1 соҳа).

2. $y>ax^2$ $(a>0)$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами параболанинг «ташқи соҳа»сига тегишли бўлган нуқталари тўпламидан иборат (34- расмдаги S_2 соҳа).



34- расм.



35- расм.

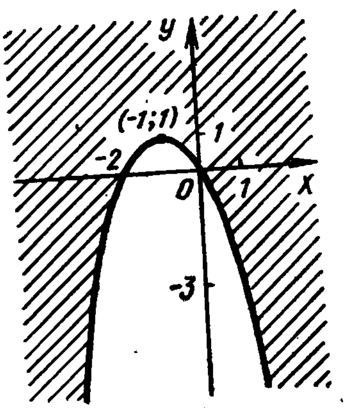
3. $y>ax^2$ $(a<0)$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами — параболанинг «ташқи соҳа»сига тегишли бўлган нуқталари тўпламидан иборатдир (35- расмдаги S_1 соҳа).

4. $y<ax^2$ $(a<0)$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами— параболанинг ички соҳасига тегишли барча нуқталари тўпламидан иборат (35- расмдаги S_2 соҳа).

Юқоридаги тўртала ҳолнинг ҳаммасида ҳам тенгсизлик қатъий бўлгани учун парабола нуқталари тўплами тенгсизлик ечимлари тўпламига кирмайди, шунинг учун парабола пунктир чизиқ билан кўрсатилган. $y \geqslant ax^2$ ва $y \leqslant ax^2$ кўринишдаги тенгсизликнинг ечимлари тўпламига тенгсизлик ноқатъий бўлгани учун парабола нуқталари тўплами ҳам киради, шунинг учун бундай ҳолларда парабола узлуксиз чизилади.

Умумий ҳолдаги $y \gtreqless ax^2+bx+c$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами худди хусусий ҳолдагидек муҳокама қилиб топилади.

$y=ax^2+bx+c$ парабола қатъий айтилганда xOy текисликни учта соҳага бўлади, иккитаси учун бир-биридан ажратувчи чегара ҳисобланади. Учинчиси эса, парабола нуқталари тўпламидан ташкил топади. Ўша икки соҳага xOy текисликни бўлувчи парабола нуқталаридан бошқа текислик нуқталари тўплами киради. Бундан кейин қандайдир чизиқ xOy текисликни (ёки унинг бирор бўлагини) икки соҳага ажратади. Масалан, шартга кўра ўша чизиқ (чегара) соҳаларнинг бирига киритилади ёки киритилмайди.



36- расм.

1-мисол. $y+x^2+1 \leqslant 0$ тенгсизликнинг ечимларини координата текислигида кўрсатинг.

Ечиш. $y+x^2+1 \leqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y \leqslant -x^2-1$. $y=-x^2-1$ функциянинг графиги $y=-x^2$ функция графигини ординаталар ўқи бўйича—1 бирликка параллел кўчириш ёрдамида ҳосил қилинади. Изланаётган тўплам — $y = -x^2-1$ парабола ва ундан қуйида жойлашган, яъни парабола ички соҳаси нуқталари тўпламидан иборат (4-ҳолга қаранг).

2-мисол. $y+x^2+2x \geqslant 0$ тенгсизликнинг ечимларини топинг.

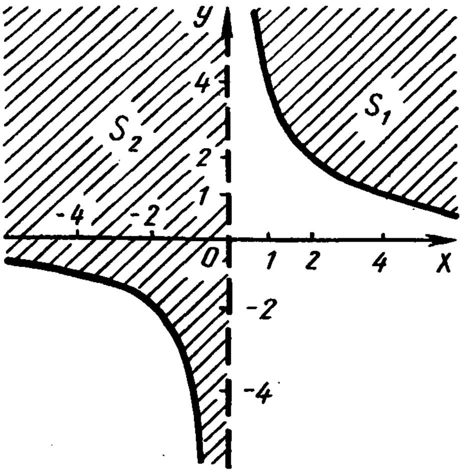
Ечиш. $y+x^2+2x \geqslant 0$ тенгсизликни стандарт кўринишга келтирамиз, бунинг учун эса тенг кучли шакл алмаштиришларни бажарамиз. $y+x^2+2x \geqslant 0 \Leftrightarrow y \geqslant -x^2-2x \Leftrightarrow y \geqslant -(x+1)^2+1$. Охирги тенгсизликни, яъни берилган тенгсизликни $y=-(x+1)^2+1$ парабола ва ундан ташқарида жойлашган текислик нуқталари тўплами қаноатлантиради (3-ҳолга қаранг). Изланаётган тўплам 36-расмда тасвирланган.

3-§. $y \gtrless \frac{k}{x}$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

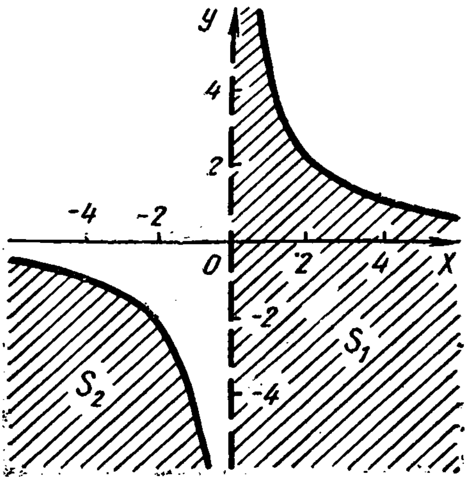
$y = \frac{k}{x}$ функциянинг графиги $k \neq 0$ ва $x \neq 0$ бўлганда гиперболадан иборат эканлиги маълум. Функциянинг аниқланиш соҳаси $x \neq 0$ $(x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty))$ дан иборат. Демак, $y = \frac{k}{x}$ тенгламани юқоридаги шартларда гипербола нуқталари мажмуи қаноатлантиради.

Аниқланиш соҳасини назарга олган ҳолда $y \gtrless \frac{k}{x}$ кўринишдаги тенгсизликларнинг ечимларини ординаталар ўқи билан аниқланувчи чап (яъни $(-\infty;\ 0)$) ва ўнг (яъни $(0;\ +\infty)$) очиқ ярим текисликларнинг ҳар бирида алоҳида-алоҳида кўриб чиқиш қулайдир. Биламизки, гипербола шохчалари $k > 0$ бўлганда I ва III координаталар бурчакларида, $k < 0$ бўлганда эса II ва IV координата бурчакларида бўлади.

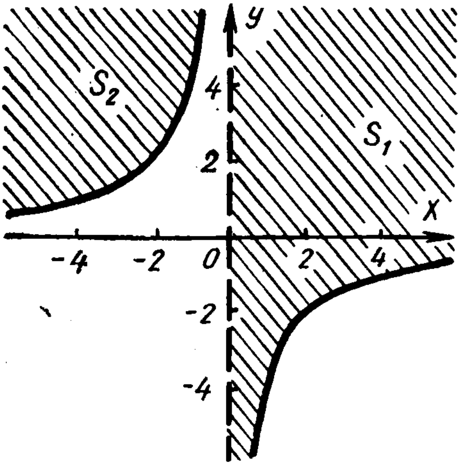
$y \geqslant \frac{k}{x} (k > 0)$ тенгсизликни x нинг $(0;\ +\infty)$ очиқ оралиқдаги, яъни ординаталар ўқи билан чегараланган ўнг очиқ ярим текисликдаги гипербола шохчасига тегишли бўлган ва ундан юқорида жойлашган текислик нуқталарининг координаталари қаноатлантиради (37-расмдаги S_1 соҳа) ҳамда x нинг $(-\infty;\ 0)$ очиқ оралиқдаги (яъни чап очиқ ярим текисликдаги) гипербола шохчаларига тегишли бўлган ва ундан юқорида жойлашган текислик нуқталарининг координата-



37-расм.



38- расм.



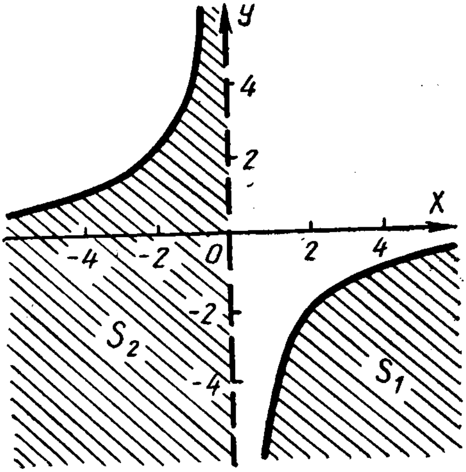
39- расм.

лари қаноатлантиради (37-расмдаги S_2 соҳа). Шундай қилиб, $k > 0$ бўлганда $y \geqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуи 37- расм (S_1 ва S_2 текислик қисмлари йиғиндиси) да кўрсатилган.

37- расмда кўрсатилган текислик нуқталаридан бошқа текислик нуқталари мажмуи эса $y < \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуи бўлади. Бунга гипербола шохчалари мажмуи қўшилса, $y \leqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуи, яъни графиги ҳосил бўлади (38- расмдаги S_1 ва S_2 соҳалар йиғиндиси).

$k < 0$ бўлган ҳолни муҳокама қилишни ўзингизга ҳавола қиламиз ва фақат натижани келтирамиз. Координаталари $y \geqslant \frac{k}{x}$ $(k < 0)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи 39-расмда, $y \leqslant \frac{k}{x}$ $(k < 0)$ ники эса 40- расмда кўрсатилган.

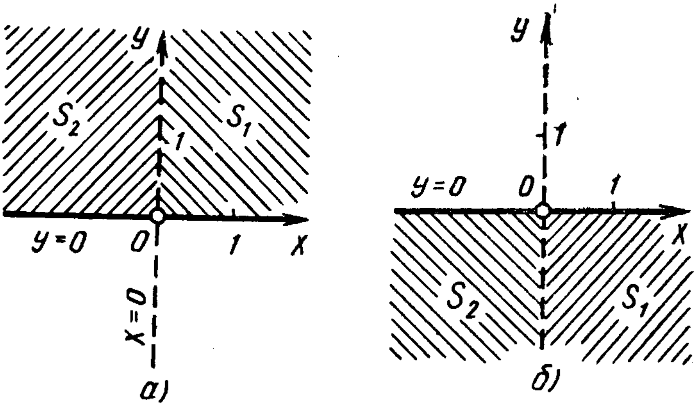
Ординаталар ўқи нуқталари мажмуи ($x = 0$) x нинг олиши мумкин бўлган қийматлари мажмуига кирмаганлиги учун у пунктир чизиқ билан кўрсатилган. Шунинг учун



40- расм.

$y \gtrless \frac{k}{x}$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуини излашда текисликни ординаталар ўқи билан аниқланувчи чап ва ўнг очиқ ярим текисликларда алоҳида-алоҳида муҳокама қилиниб, сўнгра жавоблар умумлаштирилган.

Умумий эслатма. Умуман олганда $k = 0$ ва $x \neq 0$ бўлган ҳолларни ҳам кўриб чиқиш мақсадга мувофиқдир, чунки акс ҳолда k параметр-



41- расм.

нинг олиши мумкин бўлган қийматлари мажмуи тўла муҳокама қилинмаган бўлиб қолади, яъни бунда $k = 0$ ҳол назарда тутиляпти.

Демак, $k = 0$ ва $x \neq 0$ бўлган ҳолда:

1) $y = \frac{k}{x}$ функция (тенглама) нинг графиги абсциссалар ўқидан иборат бўлиб, унга координаталар боши, яъни $O(0;\ 0)$ нуқта кирмайди.

2) $y \geqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликнинг ечими 41-*а* расмда кўрсатилган S_1 ва S_2 соҳалар йиғиндисидан, $y \leqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликники эса 41-*б* расмда кўрсатилган S_1 ва S_2 соҳалар йиғиндисидан иборатдир.

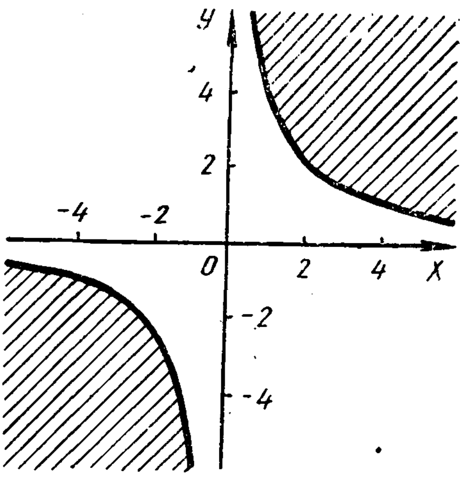
4-§. $xy \gtreqless k$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

$xy \gtreqless k$ тенгсизлик x ва y ларнинг исталган қийматларида маънога эга, яъни $x \in (-\infty;\ +\infty)$ ва $y \in (-\infty;\ +\infty)$.

Агар $x \neq 0$, $y \neq 0$ ҳамда $k \neq 0$ бўлса, у ҳолда $xy = k$ билан $y = \frac{k}{x}$ функциялар (тенгламалар) нинг графиги (геометрик тасвири) гиперболадан иборат бўлиши бизга маълум. Шуни назарга олиб, айрим ўқувчилар умуман $xy \gtreqless k$ тенгсизлик билан $y \gtreqless \frac{k}{x}$ тенгсизлик ечимлари бир-биридан фарқ қилмайди ва улар тенг кучли деган хулосага келадилар. Лекин бу фикр тўғри эмас.

Масалан, $y = \frac{k}{x}$ $(x \neq 0)$ да $x = 0$ бўла олмайди, акс ҳолда каср маънога эга бўлмайди. Шу сабабли $x \neq 0$ бўлганда $y = 0$ бўла олмайди. $xy = k$ да эса тенгликнинг чап қисмидаги ҳар иккала ўзгарувчи ноль қийматга тенг бўлиши мумкин. Бунда тенгсизликнинг чап қисми маънога эга бўлади. Бунга ўқувчиларнинг эътиборини алоҳида қаратиш лозим. Шунинг учун уларнинг графикларини чизишда тенгсизликларнинг берилишига қараб координаталар ўқлари нуқталари тўплами тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламига кириши ёки кирмаслигини белгилаш зарур.

1. $xy \geqslant k$ $(k > 0)$ тенгсизлик $x > 0$ бўлганда $y \geqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликка (37-расмдаги S_1 соҳа), $x < 0$ бўлганда эса $y \leqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликка (38-расмдаги S_2 соҳа) тенг кучли бўлади. $x = 0$ бўлганда $y \gtreqless \frac{k}{x}$ тенгсизлик ечимга эга эмас.



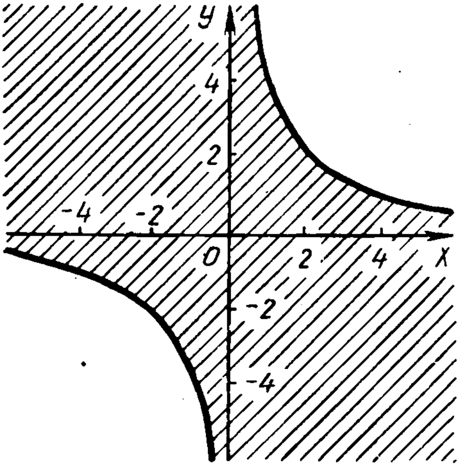
42- расм.

42- расмда координаталари $xy \geqslant k$ $(k > 0)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуи кўрсатилган. Текисликнинг $xy \geqslant k$ $(k > 0)$ тенгсизлик билан бериладиган нуқталари мажмуи $xy = k$ гипербола нуқталаридан, ординаталар ўқи билан аниқланиб, гипербола шохчаларидан юқорида жойлашган ўнг ярим текислик ва гипербола шохчаларидан қуйида жойлашган чап ярим текислик нуқталаридан иборат.

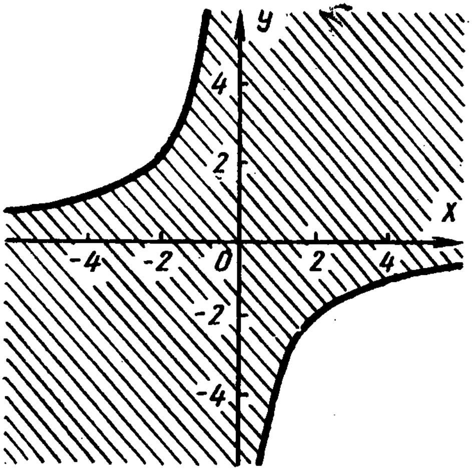
2. $xy \leqslant k$ $(k < 0)$ тенгсизлик $x > 0$ бўлганда $y \leqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликка, $x < 0$ бўлганда эса $y \geqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликка тенг кучли бўлади. Агар нуқтанинг абсциссаси нолга тенг бўлса, у ҳолда у нуқталарнинг координаталари тенгсизликни қаноатлантиради.

Маълумки, $x > 0$ бўлганда $y \leqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи биринчи чоракдаги гипербола шохчаси билан ординаталар ўқининг ўнг томони орасига жойлашган текислик нуқталари мажмуи (38- расмдаги S_1 соҳа) дан иборатдир. $x < 0$ бўлганда $y \geqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи 37- расмдаги S_2 соҳадан иборат бўлишини тушуниш қийин эмас. Ҳар иккала мулоҳазадан сўнг шундай хулосага келиш мумкинки, ординаталар ўқининг нуқталари мажмуи $xy \leqslant k$ тенгсизликни қаноатлантиради. Демак, $xy \leqslant k$ тенгсизлик $y \leqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликка тенг кучли эмас экан.

Хулоса. $x > 0$ да $y \leqslant \frac{k}{x}$ ҳамда $x < 0$ да $y \geqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи бирлашмаси $xy \leqslant k$ тенгсизликни қаноатлантиради ва бу мажмуага ординаталар ўқи, яъни $x = 0$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуи ҳам киради (43-расм).



43- расм.



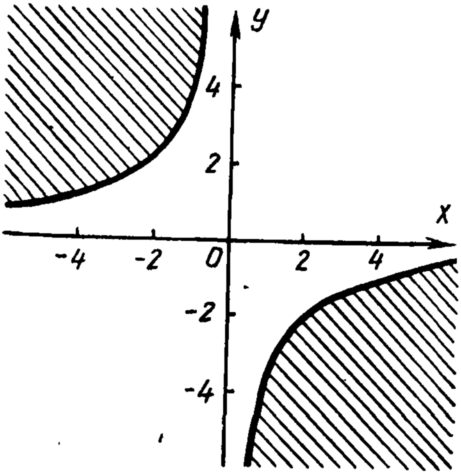
44- расм.

3. $xy \geqslant k$ $(k<0)$ тенгсизлик $x>0$ бўлганда $y \geqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликка (39-расмдаги S_1 соҳа) ва $x<0$ бўлганда эса $y \leqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликка (40- расмдаги S_2 соҳа) тенг кучли бўлади. Ординаталар ўқи нуқталари мажмуи тенгсизликни қаноатлантиради (44- расм).

4. $xy \leqslant k$ $(k<0)$ тенгсизлик $x>0$ бўлганда $y \leqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликка (40- расмдаги S_1 соҳа) ва $x<0$ бўлганда эса $y \geqslant \frac{k}{x}$ тенгсизликка тенг кучли (39- расмдаги S_2 соҳа) бўлади. $x = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи (ординаталар ўқи) нуқталар мажмуи тенгсизликни қаноатлантирмайди (45-расм).

Шундай қилиб, $xy \gtreqless k$ кўринишдаги тенгсизликларнинг ечимлари мажмуи $y \gtreqless \frac{k}{x}$ кўринишдаги тенгсизликларнинг ечимлари мажмуидан бошқа нуқталар мажмуини беришини тушунтириш мақсадга мувофиқдир.

5. Координаталар текислигининг координаталари

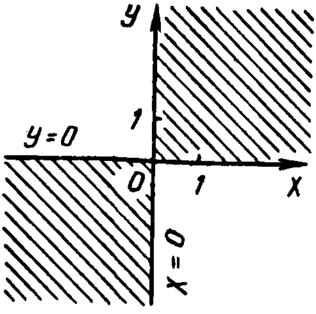


45- расм.

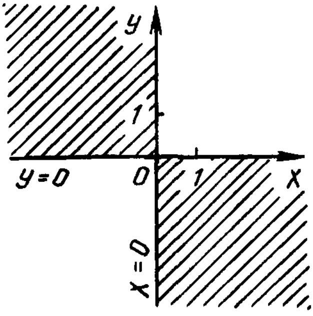
$xy \geqslant 0$ $(k=0)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталари мажмуаси қаерда жойлашган?

Биламизки, кўпайтманинг номанфий бўлиши учун кўпайтувчиларнинг ҳар бири бир вақтда номанфий ёки номусбат бўлиши зарур ва етарлидир, яъни улар бир хил маъноли бўлиши керак.

Демак, $xy \geqslant 0$ тенгсизлик $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0, \end{cases}$ яъни x ва y ўзгарувчиларнинг ишоралари бир хил бўлгандагина ўринли бўлгани учун изланаётган мажмуа—I ва III координаталар бурчаги нуқталари мажмуидан иборат, унга абсциссалар ва ординаталар ўқлари нуқталари мажмуи ҳам киради (46- расм).



46- расм.



47- расм.

6. $xy \leqslant 0$ $(k = 0)$ тенгсизлик $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ яъни x ва y ўзгарувчиларнинг ишоралари турлича бўлгандагина ўринли бўлгани учун, изланаётган мажмуа — II ва IV координаталар бурчаги нуқталари мажмуасидан иборатдир (47- расм).

Машқлар

Координаталар текислигида қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантирувчи текислик нуқталари тўпламини кўрсатинг:

1. $x^2 + y^2 + 2x \geqslant 0.$
2. $x^2 + y^2 + 4y \leqslant 0.$
3. $x^2 + y^2 + 2y \geqslant 3.$
4. $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 \geqslant 0.$
5. $x^2 + y^2 + 2y - 10x \geqslant 10.$
6. $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 30 \leqslant 0.$
7. $x^2 + y^2 \geqslant 12x + 6y - 20.$
8. $x^2 + y^2 - 4x \leqslant -6y + 12.$
9. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 > 0.$
10. $x^2 + y^2 \leqslant 8x - 6y - 34.$
11. $x^2 + y^2 \geqslant 8x - 6y - 25.$
12. $x^2 + y^2 \geqslant x + y.$
13. $y - x^2 \geqslant 4x + 3.$
14. $y \geqslant -x^2 + 4x - 1.$
15. $y + 4 \leqslant x^2 - 2x.$
16. $y - x^2 \leqslant 6x + 9.$
17. $y \leqslant 4x - x^2.$
18. $y \geqslant \frac{1}{x-2} + 2.$
19. $y \leqslant \frac{1}{2-x} - 1.$
20. $y + 1 \leqslant \frac{2}{x-1}.$
21. $(x-3)(y-2) \geqslant 4.$
22. $x(y-2) \geqslant 1.$
23. $(x-1)(y+1) \leqslant 2.$
24. $(x+2)(y-1) \leqslant 3.$
25. $(x-2)y \geqslant 4.$

IV БОБ. ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАСИГА ЕКИ УЛАРНИНГ БИРЛАШМАСИГА КЕЛТИРИБ ЕЧИЛАДИГАН ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ГРАФИК УСУЛДА ЕЧИШ

1- §. Тенглама ва тенгсизликни тенг кучли тенгсизликлар системалари мажмуасига алмаштириш

Тенгсизликдан тенгсизликлар системалари бирлашмасига ўтиш учун асосан қуйидаги тенг кучлилик схемаларидан фойдаланилади:

1) $p(x;\ y)\cdot q(x;\ y)\geqslant 0^* \Leftrightarrow \begin{cases} p(x;\ y)\geqslant 0, \\ q(x;\ y)\geqslant 0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} p(x;\ y)\leqslant 0, \\ q(x;\ y)\leqslant 0; \end{cases}$

2) $p(x;\ y)\cdot q(x;\ y)\leqslant 0^* \Leftrightarrow \begin{cases} p(x;\ y)\geqslant 0, \\ q(x;\ y)\leqslant 0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} p(x;\ y)\leqslant 0, \\ q(x;\ y)\geqslant 0; \end{cases}$

$$3)\ \frac{p(x;\ y)}{q(x;\ y)}\geqslant 0^* \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p(x;\ y)\geqslant 0, \\ q(x;\ y)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} p(x;\ y)\leqslant 0, \\ q(x;\ y)<0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$4)\ \frac{p(x;\ y)}{q(x;\ y)}\leqslant 0^* \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p(x;\ y)\geqslant 0, \\ q(x;\ y)<0; \end{cases} \\ \begin{cases} p(x;\ y)\leqslant 0, \\ q(x;\ y)>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Юқорида келтирилган тенг кучлилик схемалари анча мураккаб тенгсизликларни унга тенг кучли бўлган тенгсизликлар системалари бирлашмасига алмаштириш имконини беради.

Эслатма. Тенгсизликлар қатъий бўлганда эса тенг кучлилик схемасидаги тенглик белгилари тушириб қолдирилади.

Берилган тенгсизликларни унга қараганда анча содда бўлган тенгсизликларга ўтиш ёрдами билан ечиш — тенгсизликларни ечишнинг асосий усули ҳисобланади. Бунда кўпинча берилгандан содда тенгсизликлар системаси бирлашмасига ўтилади.

Шундай қилиб, мураккаб тенгсизликларни ечишда унинг таркибидаги ҳамма ифодаларни тенгсизликнинг бирор қисмига ўтказиш, сўнгра тегишли шакл алмаштиришларни бажариш ва ҳосил бўлган ифодани кўпайтувчиларга ажратиш (агар мумкин бўлса) фойдалидир. Агар тенгсизлик таркибида каср ифодалар бўлса, у ҳолда уларни умумий махражга, сўнгра ҳосил бўлган касрни стандарт кўринишга келтириш мақсадга мувофиқдир.

Одатда, юқоридаги тенгсизликларнинг ечимлари мажмуасини «соҳалар усули» («соҳалар методи») дан

---

[*] Шу кўринишдаги тенгсизликларни стандарт кўринишдаги тенгсизликлар деб қабул қиламиз.

фойдаланиб топиш қулайдир. «Соҳалар усули» икки ўзгарувчили тенгсизликлар учун оралиқлар, яъни интерваллар усулининг умумлашган ҳолидир. Шунинг учун икки ўзгарувчили тенгсизликларнинг ечимлари мажмуи фақат сонлар текислигида кўрсатилади, акс ҳолда ечимларни аёний тасаввур қилиш қийин.

«Соҳалар усули»да кўпайтмани ёки касрнинг сурат ва махражини нолга айлантирувчи (x, y) тартибланган сонлар нуқталари мажмуаси кўриб чиқилади. Бу нуқталар мажмуаси умуман олганда сонлар текислигидаги айрим чизиқлар бирлашмасини бериб, текисликни бир неча соҳалар (яъни юзачалар)га бўлади. Икки ўзгарувчили функциялар учун мос узлуксиз функциялар ҳақидаги теоремаларга кўра берилган ифода бу соҳаларда маълум ишорали қийматларни қабул қилади. Шунинг учун иштирок этаётган функцияларнинг ҳар бир соҳадаги ишорасини аниқлаш қолади холос.

Қуйида биз берилган тенгсизликларни аввал тенгсизликлар системалари бирлашмасига келтириб, сўнгра унинг ечимлари мажмуини координаталар (яъни сонлар) текислигида штрихлаб кўрсатишга доир мисолларнинг муҳокамалари билан келтирамиз.

Бу борада тенглик (яъни тенглама)нинг бажарилиши ёки бажарилмаслиги (яъни берилган тенгсизликка мос тengламанинг ечимларга эга бўлиши ёки бўлмаслиги) ҳолатларига эътибор беришнинг ҳам нақадар зарурлигини намойиш қилиб ўтамиз.

1-мисол. $x^2 - x \leqslant y - xy$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликни аввал $(x^2 - x) - (y - xy) \leqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(x-1) + y(x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+y) \leqslant 0$ кўринишда ёзиб оламиз.

Эслатма. Берилган тенгсизлик ечимлари мажмуини топиш ўрнига унга тенг кучли бўлган $(x^2 - x) - (y - xy) \leqslant 0$ тенгсизликнинг (яъни берилган тенгсизлик чап ва ўнг қисмидаги ифодалар айирмаси) мусбат эмаслигини кўрсатсак ҳам бўлади. Бундай йўл билан биз кўпинча ишорани аниқлашимизга тўғри келади.

Энди иккинчи тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб, шакл алмаштиришларни бажарамиз, яъни:

$$x^2 - x \leqslant y - xy \Leftrightarrow (x-1)(x+y) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x+y \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ x+y \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \leqslant -x; \end{cases} & (S_1) \\ \begin{cases} x \leqslant 1, \\ y \geqslant -x. \end{cases} & (S_1) \end{array}\right.$$

Тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари тўплами 48- расмда штрихлаб кўрсатилган.

$x^2 - x = y - xy$ тенгламани $x = 1$ ҳамда $y = -x$ тўғри чизиқларда ётувчи нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради. Аслида бу тенглама икки ўзгарувчили иккинчи даражали аниқмас тенгламадир, чунки тенгламанинг сони ўзгарувчилар сони билан бир хил эмас. Бундай тенгламаларнинг ечимларини авваллари аналитик кўринишда бирор параметрлар орқали берилар эди. Лекин ўқувчилар бу ечимдан қаноатлантирувчи бирор ечимини топишга келганда эса қийналар, шунингдек, у ечимларни кўр-кўрона кўрсатар эдилар. Аммо бундай тенгламаларнинг ечимларини график кўринишда кўрсатиш эса барча ноқулайликларга барҳам беради.

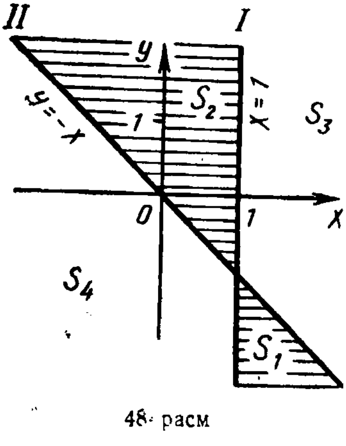
Шакл алмаштиришлар қуйидагича кечади:

$$x^2 - x = y - xy \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x-1)(x+y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -x. \end{array}\right.$$

Бу тенгламанинг графиги 48- расмда I ва II билан белгилаб кўрсатилган.

$x^2 - x \leqslant y - xy$ тенгсизлик ечимларидан қолган текислик қисмлари йиғиндиси эса $x^2 - x > y - xy$ тенгсизликнинг ечимлари (яъни графиги) мажмуи бўлади. Унга $x = 1$ ва $y = -x$ тўғри чизиқлар нуқталари тўпламларини қўшсак, $x^2 - x \geqslant y - xy$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами келиб чиқади (48- расмдаги S_3 ва S_4 соҳалар бирлашмаси).



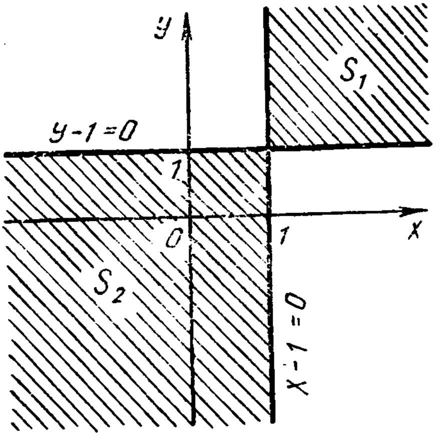
48- расм

Эслатма. Айрим ўқувчилар $x=1$ билан $y=-x$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси координаталари $x^2-x=y-xy$ тенглама илдизи бўлади, деган хулосага келадилар. Бу эса нотўғри хулосадир, чунки тўғри чизиқлар кесишган нуқтасининг координаталари тенглама ечимларидан биридир холос, яъни кесишган нуқтанинг координаталари бир вақтда $(x-1)$ $(x+y)$ кўпайтмадаги ҳар иккала кўпайтувчини нолга айлантиради. Лекин бу кўпайтманинг нолга тенг бўлиши учун кўпайтувчилардан бирининг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

2-мисол. $xy+1\geqslant x+y$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $xy+1\geqslant x+y\Leftrightarrow(xy-y)+(1-x)\geqslant 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y(x-1)-(x-1)\geqslant 0\Leftrightarrow(x-1)(y-1)\geqslant 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ y-1\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\leqslant 0,\\ y-1\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\geqslant 1,\\ y\geqslant 1\end{cases} & (S_1)\\ \begin{cases}x\leqslant 1,\\ y\leqslant 1.\end{cases} & (S_2)\end{array}\right.$$



49- расм.

Изланаётган ечимлар мажмуаси 49-расмда тасвирланган.

$x=1$ ҳамда $y=1$ тўғри чизиқларда ётган нуқталарнинг координаталари, яъни қайд қилинган тўғри чизиқлар бирлашмаси $xy+1=x+y\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-1)(y-1)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ y=1\end{array}\right.$ тенгламанинг илдизларидир.

3-мисол. $y>-2^x(y-1)+y^2$ тенгсизликни ечинг.

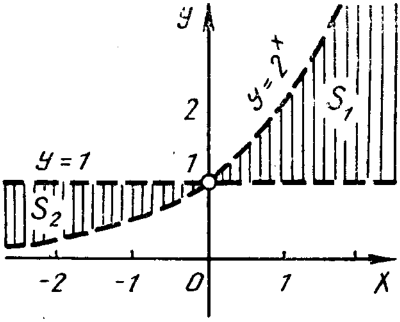
Ечиш. Тенг кучли шакл алмаштиришлар ёрдамида берилган тенгсизликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$y>-2^x(y-1)+y^2\Leftrightarrow-2^x(y-1)+y(y-1)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y-1)(y-2^x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y-1>0,\\ y-2^x<0\end{cases}\\ \begin{cases}y-1<0,\\ y-2^x>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}y>1,\\ y<2^x\end{cases} & (S_1)\\ \begin{cases}y<1,\\ y>2^x.\end{cases} & (S_2)\end{array}\right.$$

50-расмда изланаётган ечимлар мажмуи штрихлаб кўрсатилган.

4-мисол. $x^2-xy-2y^2+3y-1\geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.



50-расм.

Ечиш. Тенгсизликнинг чап қисмини кўпайтма кўринишга, сўнгра мос тенг кучлилик схемаларидан фойдаланиб, стандарт ҳолга келтирамиз, яъни:

$$x^2-xy-2y^2+3y-1\geqslant 0\Leftrightarrow x^2+xy-x-2xy-2y^2+2y+x+y-1\geqslant 0\Leftrightarrow x(x+y-1)-2y(x+y-1)+(x+y-1)\geqslant 0\Leftrightarrow(x+y-1)(x-2y+1)\geqslant 0\Leftrightarrow(x+y-1)(-2(y-0,5x-0,5))\geqslant 0\Leftrightarrow$$

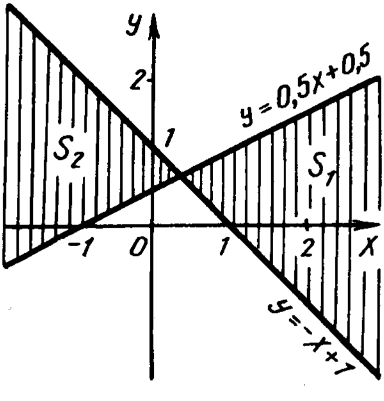
$$\Leftrightarrow(x+y-1)(y-0,5x-0,5)\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-1\geqslant 0,\\ y-0,5x-0,5\leqslant 0\end{cases}$$

ёки $\begin{cases}x+y-1\leqslant 0,\\ y-0,5x-0,5\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant -x+1,\\ y\leqslant 0,5x+0,5\end{cases}$ (S_1) ёки

$$\begin{cases}y\leqslant -x+1,\\ y\geqslant 0,5x+0,5.\end{cases}\quad(S_2)$$

Изланаётган ечимлар соҳаси 51-расмда кўрсатилган.

5-мисол. $\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}$ тенгсизлик ечимлари мажмуини топинг.



51-расм.

Ечиш. Берилган тенгсизлик барча $xy\neq 0\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}x\neq 0\\ y\neq 0\end{matrix}\right.$ да аниқланган, яъни координаталар ўқларида ётмаган барча сонлар текислиги нуқталари мажмуи тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси бўлади. Шунинг учун координаталар ўқларини пунктир чизиқ билан кўрсатамиз. Бу эса ўз навбатида тенгсизликнинг ечимлари мажмуига координаталар ўқлари нуқталари мажмуи кирмаслигини билдиради. Бундай чекланишларни ўз вақтида координаталар текислигида кўрсатиб бориш турли хатоликларни келиб чиқишдан сақлайди. Шу сабабли махражида ўзгарувчилар қатнашган каср-рационал тенгсизликларнинг аниқланиш соҳасида тенг кучли шакл алмаштиришлар бажарилади. Буни ҳар доим назарда тутиш керак.

Энди берилган тенгсизлик устида тенг кучли шакл алмаштиришларни бажариб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{y-x}{xy} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-x \geqslant 0, \\ xy > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x \leqslant 0, \\ xy < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

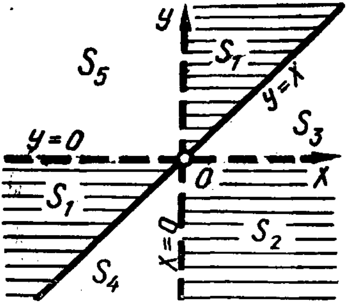
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y \geqslant x, \\ xy > 0 \end{cases} & (S_1) \\ \begin{cases} y \leqslant x, \\ xy < 0. \end{cases} & (S_2) \end{array}\right.$$

Айрим ҳолларда тенг кучли шакл алмаштиришларни охиригача олиб борилмаса ҳам бўлади, яъни ечимни топиш учун энг қулай ҳолатгача шакл алмаштиришлар олиб борилади, лекин бундай ёндошиш учун ҳар доим шакл алмаштиришлар жараёнини диққат билан синчиклаб ўрганиб бориш лозимдир. Бу албатта мисолнинг табиатига боғлиқдир. Шу сабабли муҳокама қилинаётган мисолда шакл алмаштиришларни қулай ҳолгача давом эттирдик, акс ҳолда шакл алмаштиришлар анча стандарт кўринишга келгунча давом эттирилиши лозим.

S_1 система биринчи тенгсизлиги (яъни $y \geqslant x$)ни $y=x$ тўғри чизиқ (биринчи ва учинчи координаталар бурчаги биссектрисаси) билан чегараланган юқоридаги ярим текислик нуқталари мажмуи қаноатлантиради, бу эса ўз навбатида система ечимлари қидириладиган соҳадир, лекин фақат ва фақат шу соҳадан олинган қайси нуқталар мажмуи системанинг ечимлари бўлишини система таркибига кирган иккинчи тенгсизлик ёрдамида аниқланади. Система иккинчи тенгсизлиги (яъни $xy>0$) ни биринчи ва учинчи координаталар бурчаклари ички нуқталари мажмуи қаноатлантиради, чунки уларда ётган нуқталарнинг координаталари бир хил ишоралидир.

Шунинг учун $xy > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}$ эканлигини назарга олган ҳолда юқоридаги натижага келинди. Бундан I чорак $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$ ва III чорак $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан берилиши келиб чиқади. Шундай қилиб, S_1 системанинг ечимлари фақат биринчи ва учинчи чоракларнинг $y = x$ тўғри чизиқ ва ундан юқорида қолган қисми иуқталари мажмуи бўлади (52-расмда улар S_1 билан белгиланган).

S_2 системанинг биринчи тенгсизлигини $y=x$ тўғри чизиқ билан чегараланган ва ундан паст (яъни қуйи) да ётган ёпиқ ярим текислик, иккинчи тенгсизлигини эса иккинчи ва тўртинчи чораклар нуқталари мажмуи (чунки у чораклардаги нуқталарнинг координаталари турли ишорали бўлиб, уларнинг кўпайтмаси манфий сон бўлади), системанинг ўзини тўртинчи чорак нуқталари мажмуи қаноатлантиради (52-расмдаги S_2 соҳа).



52- расм.

Шундай қилиб, берилган тенгсизликни биринчи ва учинчи чоракларнинг $y=x$ тўғри чизиқ ҳамда ундан юқорида қолган қисмлари билан тўртинчи чорақ нуқталари мажмуи, яъни S_1 ва S_2 соҳалар бирлашмасига тегишли нуқталар мажмуи қаноатлантиради (52-расм).

$\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ тенгламанинг графиги 52-расмда иккита очиқ нур кўринишида тасвирланган.

Эслатма. Айрим ўқувчилар $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ тенгламанинг ечимини нотўғри кўрсатиб қўядилар, яъни у $y=x$ тўғри чизиқдан иборат, деб ўйлайдилар. Бундай натижага нотўғри мулоҳаза юритиш натижасида келадилар. Ваҳоланки, бундай мулоҳаза юритилиши натижасида келинган ечимлар ичида (0;0) нуқта, яъни координаталар боши координаталари берилган тенгламани қаноатлантирмайди, чунки $x=0$ ва $y=0$ қийматларда тенгламанинг чап ва ўнг қисмлари маънога эга бўлмайди. Бундай натижага аниқланиш соҳасини ҳисобга олинмаганлиги сабабли келинади.

Шундай қилиб, касрнинг махражида ўзгарувчилар қатнашганда уларнинг аниқланиш соҳасини ҳисобга олишни унутмаслик керак.

Текисликнинг $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$ тенгсизлик ечимлари мажмуидан қолган қисмлари мажмуи $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ тенгсизликнинг ечимлари бўлади (52-расмда улар мос равишда S_3, S_4 ва S_5 соҳалар билан кўрсатилган).

Аслида $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ тенгсизлик ечимлари мажмуини қуйидагича шакл алмаштиришлар ёрдамида топса ҳам бўлади, яъни:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0 \Leftrightarrow \frac{y-x}{xy} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-x>0, \\ xy<0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x<0, \\ xy>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y>x, \\ xy<0 \end{cases} \\ \begin{cases} y<x, \\ xy>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y>x, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ y>0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y<x, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0; \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y>x, \\ x>0, \\ y<0; \end{cases} \\ \begin{cases} y>x, \\ x<0, \\ y>0; \end{cases} \\ \begin{cases} y<x, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \\ \begin{cases} y<x \\ x<0, \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \begin{cases} x<0, \\ y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} y<x, \\ x>0, \\ y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} y<x, \\ x<0, \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x<0, \\ y>0 \end{cases} & (S_3) \\ 0<y<x & (S_4) \\ y<x<0. & (S_5) \end{array}\right.$$

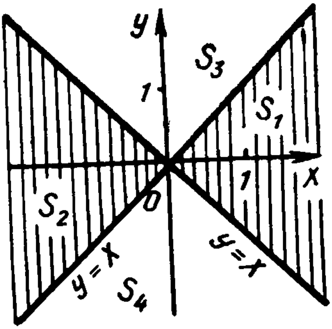
Эслатма. $\begin{cases} y>x, \\ x>0, \\ y<0 \end{cases}$ система ечимга эга эмас, чунки система таркибига кирган тенгсизликлар ечимларининг умумий қисми йўқ. Шунинг учун охирги тенгсизликлар системалари бирлашмасига у система киритилмаган. Бундан кўринадики, берилган тенгсизлик кўриниш жиҳатидан соддадай бўлиб кўринса ҳам, аммо унинг аналитик муҳокамаси анча мураккабдир.

6-мисол. $x^2 - y^2 \geqslant 0$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликни дастлаб $(x+y)(x-y) \geqslant 0$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгсизлик $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-y\geqslant 0\end{cases}$ ёки $\begin{cases}x+y\leqslant 0,\\ x-y\leqslant 0,\end{cases}$ яъни $\begin{cases}y\geqslant -x,\\ y\leqslant x\end{cases}$ (1) ёки $\begin{cases}y\leqslant -x,\\ y\geqslant x\end{cases}$ (2) бўлгандагина ўринли бўлади.

(1) тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар мажмуи I ва IV координаталар бурчаклари биссектрисалари ва улар орасидаги нуқталар мажмуасидан (53- расмда Oy ўқдан ўнг томондаги штрихлаб кўрсатилган бурчак, яъни S_1 соҳа); (2) тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар мажмуаси эса II ва III координаталар бурчаклари биссектрисалари ва улар орасидаги нуқталар мажмуасидан (53- расмдаги Oy ўқдан чап томондаги штрихланган бурчак, яъни S_2 соҳа) иборат бўлиб, уларнинг бирлашмаси $x^2-y^2\geqslant 0$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуи бўлади.



53- расм.

$$x^2-y^2=0\Leftrightarrow(x+y)(x-y)=0\Leftrightarrow-(y+x)(y-x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-x,\\ y=x.\end{array}\right.$$

Демак, $y=-x$ ва $y=x$ тўғри чизиқлар бирлашмаси $x^2-y^2=0$ тенгламанинг ечимлари (яъни графиги) дир.

$x^2-y^2\geqslant 0$ тенгсизлик билан $\frac{x+y}{x-y}\geqslant 0$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси бир хилми ёки бир-биридан фарқ қиладими? —деган саволни ўқувчиларга бериш фойдали.

Айрим ўқувчилар $\frac{x+y}{x-y}\geqslant 0$ тенгсизлик $(x+y)(x-y)\geqslant 0$ (яъни $x^2-y^2\geqslant 0$) тенгсизликка тенг кучли деб ўйлайдилар ва бунинг натижасида уларнинг ечимлари мажмуаси бир хил, деган хулосага келадилар. Бу эса нотўғри хулосадир, чунки $\frac{x+y}{x-y}\geqslant 0$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси сонлар текислигидан иборат бўлиб, унга $y=x$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуи кирмайди, аммо $(x+y)(x-y)\geqslant 0$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси эса сонлар текислигидан иборатдир.

Демак, таққосланаётган тенгсизликларнинг аниқланиш соҳалари бир-биридан фарқли экан. Шундай қилиб, $x^2-y^2\geqslant 0$ тенгсизлик ечимлари мажмуидан $y=x$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуини чиқариб юборсак, $\frac{x+y}{x-y}\geqslant 0$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси ҳосил бўлади.

Аслида қуйидагича муҳокама қилиш мақсадга мувофиқдир:

$$\frac{x+y}{x-y}\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+y\leqslant 0,\\ x-y<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\geqslant -x,\\ y<x\end{cases}\\ \begin{cases}y\leqslant -x,\\ y>x.\end{cases}\end{array}\right.$$

Худди шунингдек, $x^2-y^2\geqslant 0$ тенгсизлик ечимлари мажмуасидан $y=-x$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуаси чиқариб юборилса, $\frac{x-y}{x+y}\geqslant 0$ тенгсизликнинг; $y=-x$ ва $y=x$ тўғри чизиқлар нуқталари мажмуи чиқариб юборилса, $\frac{1}{(x+y)(x-y)}>0$ (ёки $x^2-y^2>0$) тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси (яъни графиги) ҳосил бўлади.

Демак, қайд қилинган тенгсизлик ечимлари мажмуини график кўринишда кўрсатиш учун 53-расмда тегишли ўзгартиришлар киритишингизни ўзингизга ҳавола қиламиз. Шу сабабли бу ерда кўрсатилган тенгсизликлар учун тегишли графиклар кўрсатилмади.

Айрим ўқувчилар $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)>0$ ёки $(x-y)\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)>0$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини топиш учун аввал юқоридаги мулоҳазаларга суяниб ва тегишли тенгсизликлар системалари бирлашмасини тузиб, сўнгра уларни алоҳида-алоҳида муҳокама қилишга киришадилар. Бунинг натижасида улар хатоликка йўл қўйишлари мумкин.

$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)>0$ тенгсизликни аввал $\frac{(x+y)^2}{xy}>0$ кўринишда ёзиб олиб, сўнгра муҳокама қилиш мақсадга мувофиқдир.

Аввало $xy\neq 0$ эканини (бу каср тенгсизликнинг аниқланиш соҳасидир), сўнгра $x+y\neq 0\Leftrightarrow y\neq -x$ эканини назарда тутамиз. $x+y=0$ да каср нолга айланади. $(x+y)^2>0$

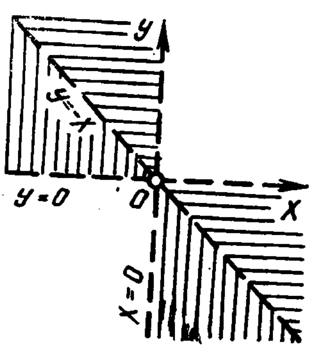
тенгсизликни $y = -x$ тўғри чизиқ (иккинчи ва тўртинчи координаталар бурчаклари биссектрисаси) нуқталари мажмуи қаноатлантирмайди, чунки $y = -x$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуида $(x+y)^2 = 0$ бўлади. Демак, $y = -x$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуи бошқа барча сонлар текислиги нуқталари мажмуида $(x+y)^2 > 0$ бўлади. $(x+y)^2 < 0$ тенгсизликни сонлар текислигидаги бирор нуқтанинг координаталари қаноатлантирмайди, шунинг учун бу тенгсизлик ечимга эга эмас.

Шундай қилиб, $\frac{(x+y)^2}{xy} > 0$ каср $xy \neq 0$ ва $x+y \neq 0$ (яъни $y \neq -x$) бўлганда ва фақат шундагина мусбат қийматларни қабул қилади. $y = -x$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуи $xy > 0$ тенгсизлик ечимлари мажмуига тегишли эмас. Шунинг учун изланаётган мажмуа — координаталари $xy > 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуаси (яъни биринчи ва учинчи координаталар чораклари нуқталари мажмуасининг бирлашмаси) дан иборат бўлиб, унга координаталар ўқлари нуқталари мажмуаси кирмайди.

Иккинчи ва тўртинчи координаталар бурчаклари биссектрисалари (яъни $y = -x$ тўғри чизиқ) нуқталари мажмуасидан координаталар боши координаталарини чиқариб юборсак, $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 0$, яъни $\frac{(x+y)^2}{xy} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = 0$ тенгламанинг ечимлари мажмуи келиб чиқади. Демак, ечим иккита очиқ нурдан иборатдир.

54-расмда $\frac{(x+y)^2}{xy} < 0$ тенгсизлик ечимлари мажмуи кўрсатилган.

$(x+y)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) \geqslant 0$ тенгсизлик ечимлари мажмуи эса иккинчи ва тўртинчи чорак нуқталари мажмуидан иборатдир. Оралиқ муҳокамалари юқоридаги тенгсизликникига ўхшаш олиб борилади. 54-расмдаги ечимлар мажмуасига иккита очиқ нур нуқталари мажмуасини киритилса, қайд қилинган тенгсизлик ечимлари келиб чиқади.



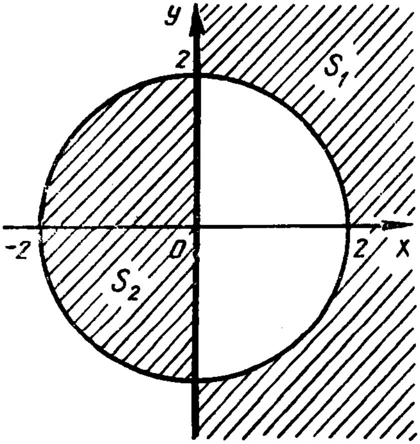
54- расм.

7-мисол. $\sqrt{(x(1-x^2-y^2))^2} = -x(1-x^2-y^2)$ тенгламани қаноатлантирувчи сонлар текислиги нуқталари мажмуасини штрихлаб кўрсатинг.

Ечиш. Арифметик илдиз таърифига кўра, берилган тенгламанинг ўнг қисми номанфий қийматларни қабул қилади. Шунинг учун берилган тенглама $-x(1-x^2-y^2) \geqslant 0$, яъни $-x(-(x^2+y^2-1)) \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x^2+y^2-1) \geqslant 0$ тенгсизликка тенг кучлидир. Бу тенгсизлик эса ўз навбатида

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2+y^2-1 \geqslant 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2+y^2-1 \leqslant 0, \end{cases} \text{ яъни } \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2+y^2 \geqslant 1 \end{cases} (1) \text{ ёки } \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2+y^2 \leqslant 1 \end{cases} (2)$$

бўлганда ва фақат шундагина ўринли бўлади.



55- расм.

55- расмдаги S_1 соҳа (1) ва S_2 соҳа (2) тенгсизликлар системасининг ечимларидир. Уларнинг бирлашмаси изланаётган ечимдир.

Эслатма. Айрим ўқувчилар бу кўринишдаги тенгламаларни ечиш учун тенгламанинг ҳар иккала қисмини квадратга оширадилар ва айний тенгликка эга бўладилар. Сўнгра бу тенгламанинг ечими x ва y ўзгарувчиларнинг исталган қийматларида ўринли бўлади, деган хулосага келадилар. Бундай муҳокаманинг нотўғрилигини юқоридаги мисолнинг натижаси билан таққослаб, ишонч ҳосил қилиш мумкин. Юзаки қараганда тенгламанинг ҳар иккала қисми ўзгарувчиларнинг исталган қийматларида маънога эга, аммо арифметик илдиз нуқтаи назардан эса тенгламанинг ўнг қисми манфий сон бўла олмайди.

Шундай қилиб, арифметик илдизга доир тенгламаларнинг аниқланиш соҳасига юзаки қараб, нотўғри хулосаларга келмасликка ҳаракат қилиш лозим.

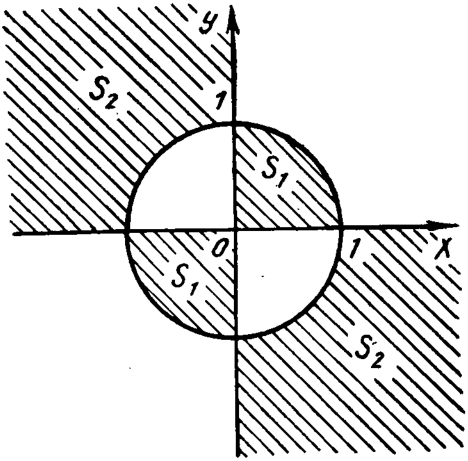
8-мисол. $xy(1-x^2-y^2) \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг

Ечиш. $xy(1-x^2-y^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow xy(x^2+y^2-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy \geqslant 0, \\ x^2+y^2-1 \leqslant 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} xy \leqslant 0, \\ x^2+y^2-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases} \quad 1) \text{ (ёки } \begin{cases} xy \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1. \end{cases} \quad (2)$$

Тенг кучли шакл алмаштиришларни шу ерда тўхтатиш қулай.



56- расм.

Шундай қилиб, (1) системанинг ечимлари S_1, (2) ники S_2 соҳа, уларнинг бирлашмаси эса изланаётган ечимдир (56-расм).

$xy(1 - x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ёки $y = 0$ ёки $x^2 + y^2 = 1$ бўлгани учун уни маркази координаталар бошида ва радиуси 1 бирликка тенг бўлган айлана ҳамда координаталар ўқларида ётган нуқталар мажмуаси қаноатлантиради.

9-мисол. $x^2y^2 + 1 \geqslant x^2 + y^2$ тенгсизлик ечимларини координаталар текислигида тасвирланг.

Ечиш. $x^2y^2 + 1 \geqslant x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2(y^2 - 1) - (y^2 - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

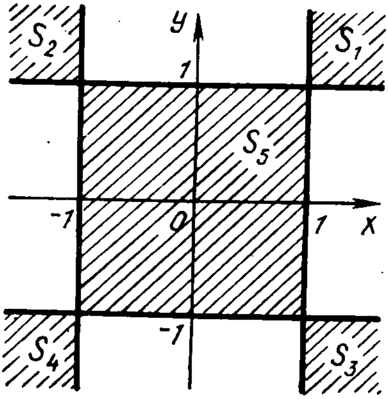
$$\Leftrightarrow (y^2 - 1)(x^2 - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 - 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 1 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 - 1 \leqslant 0, \\ x^2 - 1 \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 \geqslant 1, \\ x^2 \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 \leqslant 1, \\ x^2 \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} |y| \geqslant 1, \\ |x| \geqslant 1 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} |y| \leqslant 1, \\ |x| \leqslant 1 \end{cases} & (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y \geqslant 1 \\ y \leqslant -1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x \leqslant -1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y \geqslant 1, \\ x \geqslant 1 \end{cases} & (S_1) \\ \begin{cases} y \geqslant 1, \\ x \leqslant -1 \end{cases} & (S_2) \\ \begin{cases} y \leqslant -1, \\ x \geqslant 1 \end{cases} & (S_3) \\ \begin{cases} y \leqslant -1, \\ x \leqslant -1 \end{cases} & (S_4) \\ \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} & (S_5) \end{array}\right.$$

(1) системанинг биринчи тенгсизлигини $y = -1$ ва $y = 1$, иккинчи тенгсизлигини эса $x = -1$ ва $x = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полосалар нуқталаридан бошқа текислик нуқталари мажмуи қаноатлантиради. Уларнинг кесишмаси (1) тенгсизликлар системасининг ечимлари мажмуини беради (57- расмдаги S_1, S_2, S_3 ва S_4 соҳалар).

(2) системани $y = -1$ ва $y = 1$, шунингдек, $x = -1$ ва $x = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полосалар кесишишидан ҳосил бўлган квадрат ва унинг ички нуқталари мажмуи қаноатлантиради (57-расмдаги S_5 соҳа).



57- расм.

Изланаётган мажмуа (1) ва (2) системалар ечимлари мажмуи бирлашмасидан иборатдир (57- расм).

Муҳокамалар оралиқ натижага нисбатан айтилди, аммо унинг давоми содда боғланишлар бўлгунча давом эттирилган.

$x^2y^2 + 1 = x^2 + y^2$ тенглама тўртинчи даражали тенгламадир.

$x^2y^2 + 1 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 1)(x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ёки $y = 1$, ёки $x = -1$, ёки $x = 1$.

Бундан кўринадики, тенглама тўртинчи даражали бўлиб, аммо у содда $y = -1$, $y = 1$, $x = -1$ ва $x = 1$ тўғри чизиқлар бирлашмасидан иборат графикка эга.

10-мисол. $\dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \leqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

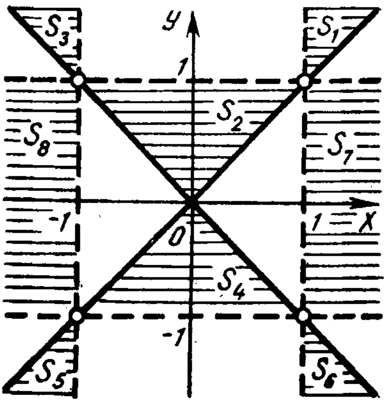
Ечиш. Тенгсизлик $(x^2 - 1)(y^2 - 1) \neq 0$ бўлганда маънога эга, яъни $x \neq \pm 1$ ва $y \neq \pm 1$ бўлиши керак. Демак, $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ ва $y = 1$ тўғри чизиқларда ётган нуқталар мажмуаси тенгсизлик ечимлари мажмуасига кирмайди, шунинг учун пунктир чизиқ билан кўрсатилади.

Муҳокама қулай бўлиши учун берилган тенгсизликни дастлаб $\dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \geqslant 0$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгсизлик

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \geqslant 0, \\ (x^2 - 1)(y^2 - 1) > 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} y^2 - x^2 \leqslant 0, \\ (x^2 - 1)(y^2 - 1) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

бўлганда ўринли бўлади.

(1) системанинг биринчи тенгсизлигини қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуи 53-расмдаги S_3 ва S_4 соҳалар, иккинчисиникини эса ҳосил қилиш учун 57-расмдаги тўғри чизиқларни пунктир чизиқ билан кўрсатилса бас, уларнинг кесишмаси эса 58-расмдаги S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ва S_6 соҳалардан иборатдир.



58- расм.

(2) системанинг биринчи тенгсизлигини биринчи ва тўртинчи ҳамда иккинчи билан учинчи координаталар бурчаклари биссектрисалари, шунингдек, улар орасидаги текислик нуқталари мажмуи, иккинчисини $y = -1$ ва $y = 1$ ҳамда $x = -1$ ва $x = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полосаларнинг кесишмаси, ва ниҳоят, системани $y = -1$ билан

$y = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полосанинг $x = -1$ тўғри чизиқдан чапдаги ва $x = 1$ тўғри чизиқдан ўнгдаги қисми нуқталари мажмуи (яъни 58-расмдаги S_7 ва S_8 соҳалар) қаноатлантиради.

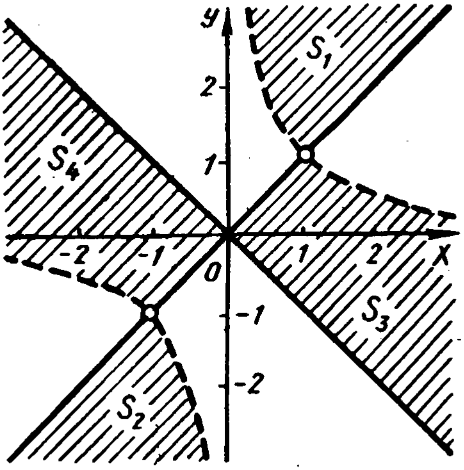
Шундай қилиб, (1) ва (2) тенгсизликлар системалари ечимлари бирлашмаси — изланаётган ечимлар мажмуини беради (58-расм). $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} = 0$ тенгламанинг ечимлари мажмуи $y = -x$ ва $y = x$ тўғри чизиқлар бирлашмасидан иборат бўлиб, унга $(1;\ 1)$, $(-1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$ ва $(1;\ -1)$ нуқталар кирмайди, шунинг учун уларни графикда очиқ доирачага олиб қўйилди.

11-мисол. $\frac{x^2 - y^2}{1 - xy} \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\frac{x^2 - y^2}{1 - xy} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-(y^2 - x^2)}{-(xy - 1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 - x^2}{xy - 1} \geqslant 0.$

Каср $xy - 1 \neq 0 \Leftrightarrow xy \neq 1$, яъни биринчи ва учинчи чоракдаги гипербола тармоқларида ётган нуқталар мажмуидан бошқа барча сонлар текислиги нуқталари мажмуида аниқланган, шунинг учун гипербола тармоқларини пунктир билан кўрсатамиз, бу эса ўз навбатида касрнинг аниқланиш соҳасини эътиборга олинганлигидан далолат беради.

Берилган тенгсизлик $\begin{cases} y^2 - x^2 \geqslant 0, \\ xy - 1 > 0 \end{cases}$ (1) ёки $\begin{cases} y^2 - x^2 \leqslant 0, \\ xy - 1 < 0 \end{cases}$ (2) бўлганда бажарилади.



59- расм.

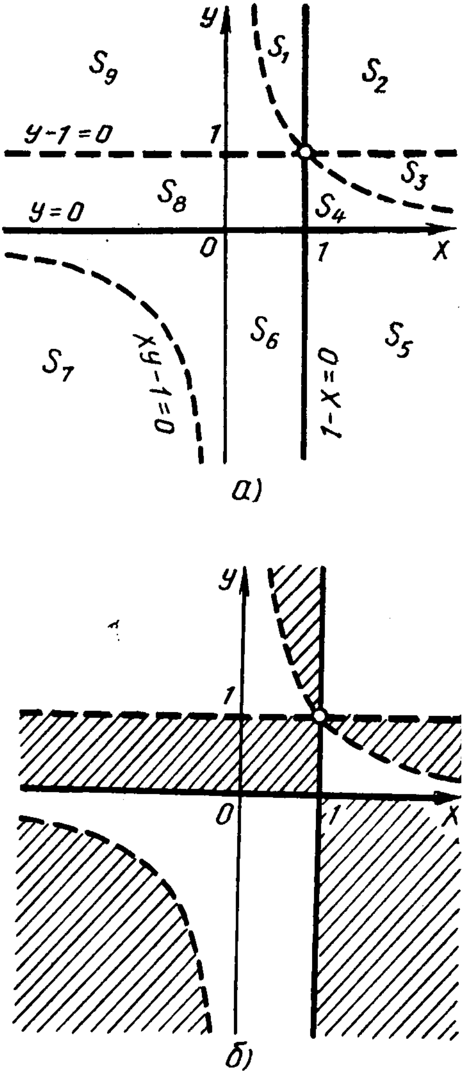
59-расмдаги S_1 ва S_2 соҳалар (1) системанинг, S_3 ва S_4 соҳалар (2) системанинг ечимлари мажмуидан иборат. Уларнинг бирлашмаси — изланаётган ечимлар мажмуидир.

12-мисол.

$$\frac{xy+1}{xy-1} \geqslant \frac{y+1}{y-1}$$

тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизлик ечимлари мажмуини топиш учун дастлаб уни стандарт кўринишга келтирамиз. Айрим ўқувчилар тенгсизликда иштирок этаётган функциялар стандарт кўринишдалигини кўриб, уларнинг графикларини битта координаталар системасида кўрсатамиз, деган фикрга келадилар, бу эса асло нотўғри ёндошишдир. Шунинг учун бутун фикрни тенгсизлик чап ва ўнг қисмлари айирмасини номанфий қиладиган қийматларини топиш қулай бўладиган ҳолга келтиришга қаратиш лозим. Стандарт кўринишга, яъни ишорани аниқлаш қулай бўлиши учун эса тенг кучли шакл алмаштиришлар бажарилиши керак.



60- расм.

$$\frac{xy+1}{xy-1}-\frac{y+1}{y-1}=\frac{xy^2+y-xy-1 \quad xy^2+y-xy+1}{(xy-1)(y-1)}=$$

$$=\frac{2y-2xy}{(xy-1)(y-1)}=\frac{-2y(x-1)}{(xy-1)(y-1)}=p(x,y)\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{y(x-1)}{(xy-1)(y-1)}\leqslant 0.$$

$$D(p)=\{(x;\ y)|\ (x;\ y)\in R^2,\quad (xy-1)(y-1)\neq 0\}.$$

Изланаётган ечимлар мажмуини топиш учун аввал координаталар текислигида касрнинг сурат ва махражини нолга айлантирадиган, яъни $\frac{y(x-1)}{(xy-1)(y-1)}=0$ тенгламанинг илдизлари мажмуини кўрсатамиз (60-*а* расм). Бу мажмуа сонлар текислигини 9 та соҳачаларга (юзаларга) бўлади, уларни мос равишда S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 ва S_9 билан белгилаймиз.

Икки ўзгарувчили узлуксиз функциялар ҳақидаги теоремаларга кўра 9 та соҳанинг ҳар бирида каср-функция маълум бир ишорали қийматларга эга бўлади. Шунинг учун ҳар бир соҳада функциянинг ишорасини аниқлаб чиқамиз.

Абсцисса ўқидан юқоридаги ярим текисликда ётувчи нуқталарнинг ординаталари мусбат бўлгани учун S_1, S_2, S_3, S_4, S_8 ва S_9 соҳаларда $y>0$, қолганларида эса $y<0$ бўлади. $x-1$ ифода $x=1$ тўғри чизиқдан ўнгда жойлашган S_2, S_3, S_4 ва S_5 соҳаларда мусбат (яъни $x-1>0$); қолганларида эса манфий ишорали (яъни $x-1<0$) бўлади. $xy-1=0$ гиперболанинг биринчи чоракда ётган тармоғидан юқорида ва учинчи чоракда ётган тармоғидан қуйида ётган S_1, S_2,

соҳалар ифода	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
y	+	+	+	+	—	—	—	+	+
$x-1$	—	+	+	+	+	—	—	—	—
$xy-1$	+	+	+	—	—	—	+	—	—
$y-1$	+	+	—	—	—	—	—	—	+
$\frac{y(x-1)}{(xy-1)(y-1)}=f(x;\ y)$	—	+	—	+	—	+	—	—	+

S_3 ва S_7 соҳаларида $xy - 1 > 0$, шунингдек, қолганларида эса $xy - 1 < 0$ (манфий) бўлади. $y = 1$ тўғри чизиқдан юқоридаги S_1, S_2 ва S_9 соҳаларда $y - 1$ мусбат (яъни $y - 1 > 0$), қолганларида эса манфий ишорали бўлади.

Юқоридагиларни назарга олган ҳолда жадвал тўлдирилади (76-бетдаги жадвал).

Жадвалдан кўринадики, $f(x;\ y)$ каср-функция S_2, S_4, S_6 ва S_9 соҳаларда мусбат, қолган соҳаларда эса манфий қийматларни қабул қилади. S_1, S_3, S_5, S_7 ва S_8 соҳалар бирлашмаси $\frac{y(x-1)}{(xy-1)(y-1)} < 0$ тенгсизликнинг, унга $y = 0$ билан $x = 1$ тўғри чизиқ нуқталари ((1; 1) нуқтадан бошқа) мажмуини қўшсак, берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуи келиб чиқади (60-*б* расм).

13-мисол. $\frac{x+y}{1+xy} \geqslant \frac{x-y}{1-xy}$ тенгсизлик ечимлари мажмуини топинг.

Ечиш.

$$\frac{x+y}{1+xy} - \frac{x-y}{1-xy} = \frac{x+y-x^2y-xy^2-x+y-x^2y+xy^2}{(1+xy)(1-xy)} =$$

$$= \frac{2y-2x^2y}{(1+xy)(1-xy)} = \frac{-2y(x^2-1)}{-(xy+1)(xy-1)} = \frac{2y(x+1)(x-1)}{(xy+1)(xy-1)} \geqslant$$

$$\geqslant 0 \Leftrightarrow p(x;\ y) = \frac{y(x+1)(x-1)}{(xy+1)(xy-1)} \geqslant 0.$$

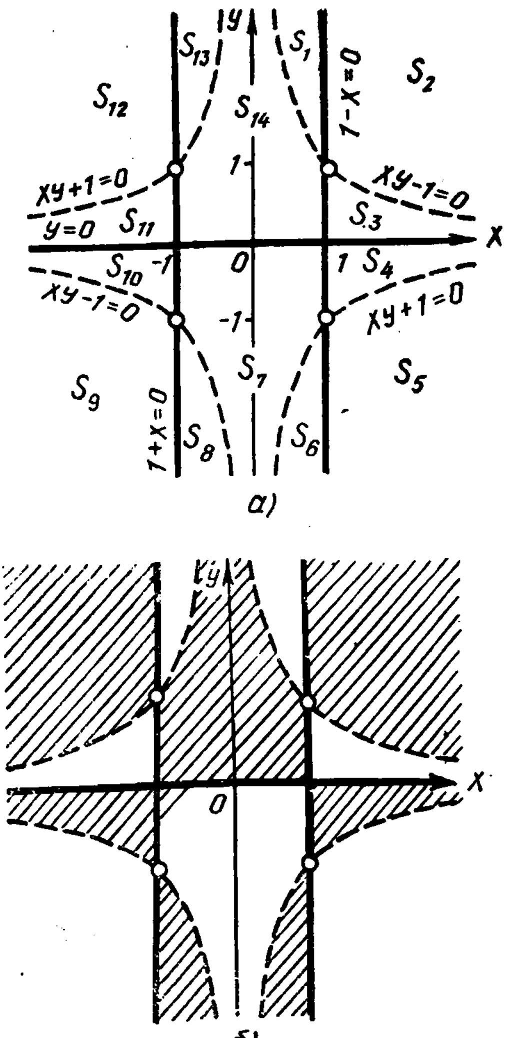
$$D(p) = \{(x;\ y) | (x;\ y) \in R^2,\ 1 \pm xy \neq 0\}.$$

Шундай қилиб, $1 \pm xy \neq 0$ да $\frac{x+y}{1+xy} \geqslant \frac{x-y}{1-xy} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{y(x+1)(x-1)}{(xy+1)(xy-1)} \geqslant 0.$

Абсциссалар ўқи нуқталари мажмуи, $x + 1 = 0$ тўғри чизиқнинг (—1; 1) ва (—1; —1) нуқталаридан бошқа нуқталари мажмуи, шунингдек, $x - 1 = 0$ тўғри чизиқнинг (—1; 1) ва (1; 1) нуқталаридан бошқа нуқталари мажмуи $\frac{y(x+1)(x-1)}{(xy+1)(xy-1)} = 0$ тенгламанинг ечимлари мажмуи (яъни графиги) ни беради (61 *а*-расм).

Касрнинг сурат ва махражини нолга айлантирадиган нуқталар мажмуи (яъни $y = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$ тўғри чизиқлар билан $xy + 1 = 0$ ва $xy - 1 = 0$ гиперболалар нуқталари мажмуи назарда тутиляпти) сонлар текислигини 14 та соҳага ажратади, улар мос равишда S_1, S_2, . . . , S_{14} деб белгиланган. У соҳаларнинг ҳар бирида y, $x + 1$, $x - 1$,



61- расм.

$xy+1$ ва $xy-1$ ифодаларнинг ишорасини аниқлагандан сўнг, $p(x, y)$ каср функциянинг ишораси аниқланади.

Одатда, 12-мисолдагига ўхшаш жадвални тўлдириб ўтиришнинг ҳожати йўқ. Аслида қайд қилинган соҳаларнинг бирида p (x; y) каср функциянинг ишорасини аниқлаш етарлидир. Бунинг учун у соҳалардан бирига тегишли бўлган бирор қулай нуқта танлаб олинади ва унинг координаталарини p (x; y)каср функцияга қўйиб, унинг ишораси аниқланади.

Масалан, S_7 соҳага тегишли (0; — 1) нуқтани олайлик, у ҳолда $\frac{-1\cdot(0+1)\cdot(0-1)}{(0\cdot(-1)+1)\cdot(0\cdot(-1)-1)} = \frac{-1\cdot 1\cdot(-1)}{1\cdot(-1)} < 0$ бўлади. Демак, S_7 соҳа биз излаётган ечимлар мажмуига кирмас экан. Қаср-функция ўз илдизларидан ўтгандан кейин ишорасини ўзгартирганлиги сабабли қолган соҳалардаги ишорасини аниқлаш энди муаммо эмас.

Шундай қилиб, изланаётган ечимлар мажмуи — S_2, S_4, S_6, S_8, S_{10}, S_{12} ва S_{14} соҳалар бирлашмасидан иборатдир (61-*б* расм).

2-§. Иррационал тенглама ва тенгсизликларни график усулда ечиш

Ушбу параграфда биз иррационал тенглама ва тенгсизликларнинг анъанавий турларига оид мисоллар ечимларини тўла таҳлил қилишни келтирамиз, чунки ўқувчилар бундай мисолларни ечганларида кўпинча нотўғри мулоҳазалар юритадилар ва натижада хатоликка йўл қўядилар.

1. Иррационал тенгламаларни ечиш

Таъриф. Ўзгарувчиси илдиз белгиси остида бўлган тенгламалар *иррационал тенгламалар* дейилади.

Иррационал тенгламалар элементар алгебрада фақат ҳақиқий сонлар мажмуасида қаралади. Шунинг учун уларнинг ечимлари ҳақиқий сонлар мажмуасидан қидирилади.

Иррационал тенгламаларни ечаётганда қуйидагиларни назарда тутиш лозим:

1. Агар икки тенглама илдизлари мажмуаси айнан бир хил мажмуадан иборат бўлса, у ҳолда улар тенг кучли тенглама дейилади.

2. Агар икки тенгламадан биринчисининг ҳар қандай илдизи иккинчисининг ҳам илдизи бўлса, у ҳолда иккинчи тенглама биринчисининг натижаси (яъни натижа тенглама) дейилади.

3. Агар икки тенглама ўзаро тенг кучли бўлса, у ҳолда уларнинг ҳар бири иккинчисининг натижаси бўлади.

4. Тенглама таркибига кирган ҳамма жуфт даражали илдизлар арифметик маънода тушунилади. Бошқача айтганда, агар илдиз остидаги ифода манфий бўлса, у ҳолда илдиз маънога эга бўлмайди; агар илдиз остидаги ифода нолга тенг бўлса, илдиз ҳам нолга тенг бўлади ва ниҳоят, агар илдиз остидаги ифода мусбат бўлса, у ҳолда илдиз ишораси ҳам мусбат бўлади.

5. Тенглама таркибига кирган ҳамма тоқ даражали илдиз илдиз остидаги ифоданинг барча ҳақиқий қийматларида аниқланган бўлади: Шу сабабли, агар илдиз остидаги ифода манфий бўлса, у ҳолда илдиз ҳам манфий; агар илдиз остидаги ифода нолга тенг бўлса, у ҳолда илдиз ҳам нолга тенг, ва ниҳоят, агар илдиз остидаги ифода мусбат бўлса, илдиз ҳам мусбат бўлади.

Исталган тенгламани шакл алмаштириш жараёнини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to \ldots$$

Бу дегани, берилган (1) тенгламани унга қараганда соддароқ (2) тенгламага алмаштирамиз; (2) тенгламани унга қараганда соддароқ (3) тенгламага алмаштирамиз ва ҳ.к. Пировард натижада етарлича содда бўлган тенгламага келинади ва унинг илдизлари топилади. Сўнгра топилган илдизлар дастлабки берилган (1) тенгламанинг илдизи бўладими ёки йўқми, деган асосий савол ўз-ўзидан туғилади.

Агар барча шакл алмаштиришлар тенг кучли бўлган бўлса, яъни (1) ва (2) тенгламалар тенг кучли, (2) ва (3) тенгламалар тенг кучли, (3) ва (4) тенгламалар тенг кучли ва ҳ. к. бўлса, у ҳолда қўйилган саволга жавоб «ҳа» деган бир қийматли бўлади.

Агар айрим шакл алмаштиришлар тенг кучли эканига ишончимиз комил бўлмаса (лекин аниқ натижа — тенгламага келганимизни билсак), у ҳолда юқорида қўйилган саволга жавоб қатъий бўлмайди. Қўйилган саволга жавоб аниқроқ бўлиши учун эса сўнгги тенгламанинг илдизларини навбатма-навбат (1) тенгламага қўйиб, текшириб кўриш лозим бўлади. Агар бундай текшириш натижасида кейинги тенгламанинг илдизи дастлабки тенгламани қаноатлантирмаслигини кўрсатса, у ҳолда у берилган тенглама учун чет илдиз дейилади (табиийки, улар ташлаб юборилади).

Умуман тенгламани ечиш, одатга кўра, қуйидаги режа асосида амалга оширилади:

1) техник қисмида (1) ⟶ (2) ⟶ (3) ⟶ (4) ⟶ . . . схема бўйича кетма-кет шакл алмаштиришлар амалга оширилади ва бу кетма-кетликдаги охирги (нисбатан соддароқ) тенгламанинг илдизи қидирилади (яъни топилади);

2) ечим таҳлил қилинади, яъни барча шакл алмаштиришлар тенг кучлими ёки йўқми, деган саволга жавоб топилади;

3) агар бу таҳлил барча шакл алмаштиришлар тенг кучли бўлмаганини кўрсатса, у ҳолда кетма-кетликдаги кейинги тенгламанинг илдизлари дастлабки тенгламани қаноатлантириши ёки қаноатлантирмаслиги текширилади.

Бу режани амалга оширишда табиий равишда қуйидаги 4 та муаммо келиб чиқади.

1-муаммо. Бир тенгламадан иккинчи тенгламага ўтиш тенг кучли бўлдими ёки йўқлигини қандай билиш мумкин?

2-муаммо. Қандай ҳолларда биз шакл алмаштиришлар натижасида тенгламадан натижа тенгламага келамиз?

3-муаммо. Агар текшириш нисбатан қийинроқ ҳисоблашлар билан боғлиқ бўлса, у ҳолда уни қандай қилиб амалга оширамиз?

4-муаммо. Қандай ҳолларда бир тенгламадан иккинчисига ўтаётганда илдизлар «йўқотилади» ва қандай қилиб бунинг олдини олиш мумкин?

Энди тартиб билан бу муаммоларни кўриб чиқамиз:

1-муаммо. Ҳеч қандай «ташвишга солмайдиган» учта теорема мавжуд бўлиб, улар ҳар доим «ишлайди» ва ундан фойдаланилганда ҳеч қандай кўнгилсиз натижаларга олиб келмайди.

1-теорема. *Агар ҳар қандай қўшилувчини тенгламанинг (тенгсизликнинг) бир қисмидан иккинчи қисмига қарама-қарши ишора билан ўтказилса, у ҳолда берилган тенгламага (тенгсизликка) тенг кучли тенглама (тенгсизлик) ҳосил бўлади.*

2-теорема. *Агар тенгламанинг (тенгсизликнинг) иккала қисмини бир хил тоқ даражага кўтарилса, у ҳолда берилган тенгламага (тенгликка) тенг кучли тенглама (тенгсизлик) ҳосил бўлади.*

3-теорема. $a > 0$, $a \neq 1$ *да* $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ *тенглама* $f(x) = g(x)$ *тенгламага тенг кучли бўлади.*

Шунингдек, учта «ташвишли» (яъни «хавотирли») теорема бўлиб, улар фақат маълум бир шартларда «ишлайди», демак, улардан фойдаланаётганда эътиборсизликка йўл қўймаслик керак бўлади.

4-теорема. а) *Агар $f(x)=g(x)$ тengламанинг иккала қисмини тенгламанинг аниқланиш соҳасида маънога эга бўлган айни бир $h(x)$ ифодага кўпайтирилса, у ҳолда берилган тенгламага тенг кучли $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ тенглама ҳосил бўлади;*

б) *Агар $f(x)=g(x)$ тенгламанинг иккала қисмини тенгламанинг аниқланиш соҳасида нолга айланмайдиган айни бир $h(x)$ га кўпайтирилса, у ҳолда берилган тенгламага тенг кучли $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ тенглама ҳосил бўлади.*

1-эслатма. 4-теореманинг натижаси сифатида яна бир «ташвишга солмайдиган» шакл алмаштиришни кўриб чиқиш мумкин, яъни агар тенгламанинг иккала қисмини нолдан фарқли c сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, у ҳолда берилганига тенг кучли тенглама ҳосил бўлади.

5-теорема. *Агар $f(x)=g(x)$ тенгламанинг иккала қисми тенгламанинг аниқланиш соҳасида номанфий бўлса, у ҳолда тенгламанинг иккала қисмини бир хил ва фақат бир хил жуфт даражага кўтариш натижасида берилганига тенг кучли $(f(x))^{2n}=(g(x))^{2n}$ тенглама ҳосил бўлади.*

6-теорема. *Агар $f(x)>0$ ва $g(x)>0$ бўлса, у ҳолда $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ тенглама $f(x)=g)x)$ тенгламага тенг кучли бўлади*, бунда $a>0$, $a\neq 1$.

Сўнгги уч теорема бизга 2-муаммони ҳал қилишга имконият яратади, яъни агар тенгламани ечиш жараёнида биз кейинги уч теоремалардан бирини теоремада чекланган шартларни текширмасдан қўллаган бўлсак, у ҳолда натижа тенглама ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, тенгламани ечиш босқичларидан бирида тенгламанинг иккала қисмини бир хил ва фақат бир хил ифодага (ўз-ўзидан тенгламанинг аниқланиш соҳасининг барчасида маънога эга бўлган) кўпайтирилса ёки тенгламанинг иккала қисмини бир хил ва фақат бир хил жуфт даражага оширилса, у ҳолда топилган илдизларни текшириш албатта мажбурийдир (яъни шартдир).

2-эслатма. Одатда ўқитувчилар умуман алгебрадаги теоремаларга ва хусусан тенг кучлилик теоремаларига эҳтиётлик билан ёндошадилар (геометрияда эса бундай ёндошиш ёт ҳисобланади, у ерда теоремани қўллаш оддий бир воқеадир). Аммо бундай қарашга ҳеч қандай асос йўқ. Биринчидан, биз кўрдикки, фойдаланиладиган теоремалар саноқли бўлиб, улар мактаб математика курсида учрайдиган барча турдаги тенгламаларни ечишга «хизмат қилади», иккинчидан, улар мазмуни жиҳатдан етарлича содда, учинчидан, юқорида келтирилган оралиқ хулосамиз эса амалиётда 4, 5, 6- теоремалардан фойдаланишга ҳожат қолдирмайди.

Оралиқ хулоса бизга тенгламадан натижа тенгламага ўтишнинг бош сабабини аниқлаб бермайди. Бош сабаб эса аниқланиш соҳасининг кенгайишидир.

3- эслатма. Агар шакл алмаштиришлар жараёнида тенгламанинг аниқланиш соҳасининг кенгайишига йўл қўйилган бўлса, у ҳолда топилган илдизларнинг барчасини текшириш албатта шартдир.

Юқоридаги хулосадан табиийки, қандай шакл алмаштиришлар аниқланиш соҳасининг кенгайишига олиб келиши мумкин, деган яна бир савол туғилади. Аниқланиш соҳасининг кенгайишига олиб келадиган сабаблар умуман саноқли бўлиб, улар қуйидагилардан иборатдир:

1) Махраждан қутулиш. Бу ўз-ўзидан тушунарли: $g(x)$ махраж бўлганда $g(x) \neq 0$ чекланиш бўлади, махраждан қутулгандан кейин эса чегараланиш йўқолади ва натижада аниқланиш соҳаси кенгаяди;

2) $(\sqrt{f(x)}\,)^n = f(x)$ формуладан жуфт n учун фойдаланиш. Агар $(\sqrt{f(x)}\,)^{2n}$ ифода берилган бўлса, у ҳолда унинг аниқланиш соҳаси $f(x) \geqslant 0$ тенгсизлик билан берилади; агар $(\sqrt{f(x)}\,)^{2n}$ ни $f(x)$ га алмаштирилса ва $f(x)$ ифодани мустақил ифода сифатида қаралса, у ҳолда $f(x) \geqslant 0$ чекланиш йўқолади, яъни натижада аниқланиш соҳаси кенгаяди.

Масалан, $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5$ тенгламани ечиш талаб қилинган бўлсин.

Ечиш. Мисолни юқорида келтирилган режа асосида ечамиз.

1. **Техник қисми.** Кетма-кет қуйидагиларга эга бўламиз: $\sqrt{5x-6} = 5 - \sqrt{2x+5}$, $(\sqrt{5x-6})^2 = (5 - \sqrt{2x+5})^2$, $5x - 6 = 25 - 10\sqrt{2x+5} + 2x + 5$, $10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x$, $(10\sqrt{2x+5})^2 = (36 - 3x)^2$, $100(2x+5) = 1296 - 216x + 9x^2$, $9x^2 - 416x + 796 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 398/9$.

2. **Ечимнинг таҳлили.** Шакл алмаштиришлар жараёнида аниқланиш соҳаси кенгайди, чунки икки марта тенг кучли бўлмаган квадратга кўтариш амали қўлла-

нилди. Демак, биз натижада натижа тенгламага эга бўлдик. Шунинг учун текшириш мажбурийдир!

Текшириш. $x_1=2$ ни дастлабки тенгламага қўямиз. $\sqrt{9}+\sqrt{4}=5$ тўғри тенглик. Демак, $x=2$ — изланаётган илдиз бўлади. $x_2=398/9$ ни берилган тенгламага қўя туриб, $\sqrt{2\cdot\frac{398}{9}}+5$ нинг 5 дан катта эканини сезамиз, яъни x_2 берилган тенгламани қаноатлантирмайди. Шунинг учун x_2 чет илдиздир.

Жавоб: $\{2\}$.

4-эслатма. Ҳар доим ҳам ечимнинг учала босқичини ажратиб кўрсатиш, албатта мажбурий эмас. Аммо буни ҳар доим эсда сақлаб туриш шарт. Агар таҳлил текшириш лозимлигини кўрсатса, аммо биз уни бажармаган бўлсак, у ҳолда тенгламани ечилган деб бўлмайди. Бунга эътиборни қаратиш жуда зарурдир.

3-муаммо. Агар топилган қийматларни дастлабки тенгламага қўйиб, ҳисоблашларни бажариш нисбатан қийинчиликлар билан боғлиқ бўлса, у ҳолда текширишни қандай қилиб амалга ошириш мумкин бўлади? Бундай ҳолларда ўз-ўзидан текширишни четлаб ўтиб, бошқа йўлни излашга тўғри келади. Масалан, келтирилган мисолда $x_1=2$ қийматни берилган тенгламага қўйиш унча қийинчилик туғдирмайди. Иккинчи илдизни қўйишда бошқача йўл тутдик, яъни чамалашдан фойдаландик ва бунда x_2 чет илдиз экани яққол кўриниб қолди. Бундай чамалаш—четлаб ўтишнинг бир йўлидир. Ваҳоланки, $x_2=398/9$ қийматни дастлабки тенгламага қўйиб текшириш ўрнига ечиш жараёнида ҳосил бўлган $10\sqrt{2x+5}=36-3x$ тенгламага қўйиб текшириш мумкин. Бу тенгламанинг маъносига кўра $36-3x\geqslant0$, яъни $x\leqslant12$ бўлиши керак, аммо x_2 нинг 12 дан катталиги равшан. Демак, x_2 қиймат $10\sqrt{2x+5}=36-3x$ тенглама учун чет илдиз, бундан у сўзсиз дастлабки тенглама учун ҳам чет илдиз бўлади. Текширишни бундай амалга ошириш ҳам четлаб ўтишнинг ўзига хос усули ҳисобланади. Четлаб ўтишнинг энг яхши йўли — берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси бўйича текшириш ҳисобланади.

5-эслатма. Бироқ, аниқланиш соҳаси бўйича текшириш ҳар доим ҳам мақбул деб бўлмайди. Унинг тўла бўлиши учун эса тенгламани ечиш чоғида аниқланиш соҳасининг кенгайишидан бошқа сабаблар бўлмаслиги керак. Берилган иррационал тенгламанинг аниқланиш соҳаси $x\geqslant6/5$ тенгсизлик билан берилади. x_1 ва x_2 илдизларнинг ҳар иккаласи эса $x\geqslant6/5$ тенгсизликни қаноатлантиради. Аммо биз кўрдикки, x_2 чет илдиздир. Бу мисолдан кўринадики, дастлабки тенг-

ламанинг аниқланиш соҳаси чет илдизни «чиқариб юборишга» ёрдам бермаслиги мумкин.

4-муаммо. Қандай қилиб тенгламани ечиш жараёнида илдизларни йўқотишнинг олдини олиш мумкин? «Мактаб ҳажмида» илдизларни йўқотиш қуйидаги икки сабабга кўра бўлиши мумкин:

1) тенгламанинг иккала қисмини битта ва фақат битта $h(x)$ ифодага бўлганда ($h(x) \neq 0$ экани аниқ бўлган ҳолдан ташқари ҳолларда) илдизларини йўқотиш мумкин; 2) бир тенгламадан иккинчи тенгламага ўтиш жараёнида аниқланиш соҳасининг торайиши натижасида ҳам илдизларни йўқотиш мумкин.

Биринчи сабабни бартараф қилиш унча қийин эмас. Бунинг учун $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ тенгламадан $h(x)(f(x) - g(x)) = 0$ тенгламага ўтишни ўқувчиларга ўргатиш керак. Умуман олганда, тенгламанинг иккала қисмини битта ва фақат битта $h(x)$ ифодага бўлишни ман этиш керак (фақат очиқ-ойдин кўриниб тургандан ташқари ҳолларда).

Иккинчи сабабни бартараф қилиш эса анча мушкул ҳисобланади, бунинг учун қандай формулалардан фойдаланиш хавфли бўлса, имконияти борича ундан фойдаланмасликка ўргатиш керак бўлади.

Энди иррационал тенгламаларга оид мисолларнинг асосий турларини кўриб чиқамиз.

I тур. Тенгламанинг аниқланиш ва ўзгариш соҳасини текшириш билан иррационал тенгламанинг ечими бор ёки йўқлигини аниқлашга доир мисоллар.

1-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x-5} + \sqrt{1-x} = 2.$

Ечиш. Одатда ўқувчилар ишни тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтаришдан бошлайдилар, сўнгра илдизни «якказлаб» квадрат тенгламага келтирадилар. Кейин ҳосил бўлган квадрат тенгламани ечиш, топилган ечимни текшириш ва жавобни тўғри ёзиш эса унча қийинчилик туғдирмайди. Рационал тенгламалар учун мақбул бўлган бундай ёндошиш энди иррационал тенгламалар учун тўғри бўлмай қолади. Тенглама таркибида жуфт даражали илдизнинг мавжуд бўлиши бу илдиз остидаги ифоданинг номанфий бўлиши зарурлигини билдиради. Шунинг учун дастлаб тенгламанинг чап қисми учун ўзгарувчи x нинг йўл қўядиган қийматлари соҳасини топишимизга тўғри келади, яъни $\begin{cases} x-5 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow \varnothing.$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг чап қисми ўзгарувчи x нинг ҳеч бир қийматида мавжуд бўлмагани сабабли бу тенгламани ечиш масаласи кун тартибидан чиқарилади, чунки тенгламанинг чап қисми учун ақалли қўшиш амалини амалга ошириш мумкин эмас, яъни $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}$ йиғиндининг ўзи ҳам мавжуд эмас экан.

Хўш бундан қандай хулоса чиқариш мумкин? Берилган тенгламанинг чап қисми x нинг бирор-бир қийматида мавжуд бўлмаганлигидан бу тенглама аввалдан ечимга эга эмаслиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, агар алгебраик ифода мавжуд бўлмаса, у ҳолда ўзгарувчи x нинг қандай қийматларида бу ифода маълум бир сонга тенг (ёки бирор сондан катта ёки кичик), деган саволнинг қўйилиши ўринли эмас. Юқоридаги мулоҳазалардан бирор алгебраик ифода ёзилган бўлса, бундан бу ифода мавжуд деган хулосани чиқариб бўлмас экан. Қатъий айтганда, дастлаб ифоданинг мавжуд ёки мавжуд эмаслигини аниқлаш лозим, агар мавжуд бўлса, у ҳолда унинг қаерда мавжудлигини аниқлаш ва шундан кейингина тенгламани ёки тенгсизликни ечиш, функциянинг графигини ясаш ва ҳоказо масалаларни қўйиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Яна бир бор берилган тенглама аввалдан шак-шубҳасиз ечимга эга эмаслигини уқдириб ўтамиз. Бундай ҳолда кўпчилик ўқувчилар, шунингдек, айрим ўқитувчилар «тенглама ечимга эга эмас» деб ёзадилар, лекин нима учунлигини кўрсатмайдилар.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x^3-x-1}+\sqrt{2x+1}=-2.$$

Ечиш. Бу тенглама ечимга эга эмас, чунки x нинг олиши мумкин бўлган барча қийматларида тенгламанинг чап қисми номанфий, ўнг қисми эса манфий, аммо номанфий сон манфий сонга тенг бўла олмайди.

3-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x-5}+\sqrt{1+x}=2$.

Ечиш. Бу мисол 1-мисолдан фақат бир ишораси билан фарқ қилади. Худди юқоридаги мисолга ўхшаш x ўзгарувчининг йўл қўядиган қийматлари соҳасини топамиз, яъни

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0,\\ 1+x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 5,\\ x\geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 5.$$

Шундай қилиб, тенгламанинг чап қисми исталган $x\geqslant 5$ да мавжуд. Бундай қараганда ҳаммаси ўринлидай, шу сабабли асосий мақсадни амалга ошириш учун тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтариш, сўнгра илдизни «яккалаб», яна квадратга кўтариш ва ҳоказо лозимдай бўлиб кўринади. Аммо бу ҳолда бундай эмас. Тенгламанинг чап қисмига диққат билан қарасак, $\sqrt{x-5}+\sqrt{1+x}$ ифода иккита монотон ўсувчи функциялар йиғиндисидан иборат, шу сабабли йиғинди функция ҳам монотон ўсувчи бўлади. $x \in [5;+\infty)$ учун бу функция $x=5$ да энг кичик қийматни қабул қилади, яъни:

$$f(5)=\sqrt{5-5}+\sqrt{1+5}=\sqrt{6}\approx 2{,}45$$

ва кейин эса фақат ўсади (чизмада кўришни ўзингизга ҳавола қиламиз).

Шунинг учун $f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{1+x}$ функция графиги $y=2$ тўғри чизиқни бирор жойда ҳам кесмайди. Бундан берилган тенгламанинг ечимга эга эмаслиги келиб чиқади.

Бу мисолни ечаётганда биз фақат ўзгарувчи x нинг йўл қўядиган қийматларини, шунингдек, унга мос $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{1+x}$ функциянинг қийматлари соҳасини ҳам ҳисобга олдик.

4-мисол: Тенгламани ечинг:
$\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{1-x}.$

Ечиш. Бу тенгламанинг аниқланиш соҳаси қуйидаги тенгсизликлар системасининг ечимларидан иборат:

$$\begin{cases} x^2+x-6\geqslant 0, \\ 2x+3\geqslant 0, \\ 1-x\geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Энди бу системани ечамиз:

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+3)(x-2)\geqslant 0, \\ x\geqslant -3/2, \\ x\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x\geqslant 2, \\ x\leqslant -3; \end{array}\right. \\ -3/2\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

Бундан берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси мавжуд бўлмагани сабабли, унинг ечимга эга эмаслиги келиб чиқади.

Жавоб: $\{\varnothing\}$.

6-эслатма. Аниқланиш соҳаси бўш бўлган тенгламалар ечимга эга эмас.

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=3+x^2.$$

Ечиш. Бу тенгламанинг олиши мумкин бўлган қийматлари мажмуаси қуйидаги системанинг ечимидан иборат бўлади:

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0, \\ 2x-1\geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Аммо берилган тенгламанинг ўнг қисми x нинг олиши мумкин бўлган қийматлари мажмуасида мусбат, шунинг учун (*) системага яна битта $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}>0$ ёки $x-5>2x-1$ шартни қўшамиз. Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими қуйидагича топилади:

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0, \\ 2x-1\geqslant 0, \\ x-5>2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 5, \\ x\geqslant 1/2, \\ x<-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 5, \\ x<-4 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Демак, берилган тенглама ечимга эга эмас.

6-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}=1.$

Ечиш. Бу тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 1-x^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\geqslant 1, \\ |x|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow |x|=1.$$

Аммо $|x|=1$ тенгламанинг ечими бўла олмайди, чунки $0\neq 1$.

7-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{2-x}=2.$

Ечиш. Аниқланиш соҳаси: $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=2$. Аммо $x=2$ тенгламанинг илдизи эмас, чунки $0\neq 2$.

8-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{4-x^2}.$

Ечиш. Бу тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$\begin{cases} x^2-4\geqslant 0, \\ 4-x^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 4, \\ x^2\leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Демак, бу тенгламанинг йўл қўядиган қийматлари -2 ва 2 сонлардан иборат экан.

Эслатма. Умумий ҳолда $\sqrt[2n]{f(x;\ y)} = \sqrt[2n]{\varphi(x;\ y)}$ кўринишдаги тенгламаларни қуйидаги тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб ечиш мақсадга мувофиқ, бунда $n \in N$, яъни,

$$\sqrt[2n]{f} = \sqrt[2n]{\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \geqslant 0, \\ f = \varphi \end{cases} \text{ёки } \sqrt[2n]{f} = \sqrt[2n]{\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} f \geqslant 0, \\ f = \varphi. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

f ва φ функциялардан қайси бири соддароқ функция бўлса, ўшанинг аниқланиш соҳасини система таркибига киритиш мақсадга мувофиқдир, аммо бунда иккинчи функциянинг аниқланиш соҳасини система таркибидаги тенглама ўз ичига қамраб олган бўлади.

Тенглама ва тенгсизликларни тенг кучлилик схемаларидан фойдаланиб ечилганда текшириш бажарилмайди, яъни у ортиқча ишдир.

Энди берилган тенгламани (I) тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб ечса ҳам бўлади, яъни

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \geqslant 0, \\ x^2-4 = 4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geqslant 4, \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Эслатма. $x^2 \geqslant 4$ шартдан кўриниб турибдики, тенглик фақат $x^2 = 4$ да бажарилади, шу сабабли тенгсизликни ечиб ўтирилмади.

Шундай қилиб, (I) тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб ечилганда ҳам дастлабки натижага келинди.

9-мисол. Тенгламани ечинг: $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{4-x^2}$.

Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси: $|x| \leqslant 2$. Тенгламанинг чап ва ўнг қисмларининг ўзгариш соҳасини кўриб чиқамиз.

а) $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2$, яъни чап қисмининг ўзгариш соҳаси $2 \leqslant f(x) < +\infty$ дан иборат;

б) ўнг қисмининг ўзгариш соҳаси эса $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 2$.

Шундай қилиб, мумкин бўлган ягона ечим $f(x) = \varphi(x) = 2$ да мавжуд бўлади. Лекин $f(x) = 2$ $x = -1$ бўлганда, $\varphi(x) = 2$ эса $x = 0$ да бажарилади. x нинг бу қийматлари бир хил бўлмагани сабабли, ечим мавжуд эмас.

10-мисол. Тенгламани ечинг:

$\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = a.$

Ечиш. Тенглама чап қисмининг йўл қўядиган қийматларини топамиз:

$$\begin{cases} x^2-x\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ x\leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geqslant 1\\ x\leqslant 0,\end{array}\right.\\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=0.\end{array}\right.$$

Шундай қилиб, тенгламанинг чап қисми иккита $x=0$ ва $x=1$ нуқталарда мавжуд. Бу икки нуқтада чап қисмининг қийматларини топамиз:

$$f(0)=\sqrt{0^2-0}-\sqrt{0}+\sqrt{1-0}=1;$$
$$f(1)=\sqrt{1^2-1}-\sqrt{1}+\sqrt{1-1}=-1.$$

Шундай қилиб, $a=1$ бўлганда $x=0$; $a=-1$ бўлган да $x=1$; $|a|\neq 1$ да ечим йўқ.

11-мисол. a параметрнинг қийматларига боғлиқ ҳолда $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=a$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап қисми битта $x=1$ нуқтада мавжудлигини аниқлаш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

Шундай қилиб, бу ягона нуқтада тенгламанинг чап қисми 0 га тенг, яъни $\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}=0$.

Демак, агар $a=0$ бўлса, у ҳолда $x=1$ бўлади; агар $a\neq 0$ бўлса, у ҳолда тенглама ечимга эга бўлмайди.

II тур. Битта ёки бир неча илдиз остидаги ифодалар аниқ квадрат бўлган иррационал тенгламаларга доир мисоллар.

1-мисол. Тенгламани ечинг:
$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}=10.$

Ечиш. Дастлаб тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз: $\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2}=10$ ёки $|x+2|+|x-5=10$. Энди охирги тенгламани кўриб чиқамиз:

а) агар $x<-2$ бўлса, $-x-2-x+5=10$ бўлади, бундан $x_1=-3,5$ ни топамиз. $-3,5\in(-\infty;-2)$. Шунинг учун у изланаётган илдиз бўлади;

б) агар $-2\leqslant x\leqslant 5$ бўлса, у ҳолда $x+2-x+5=10$ ёки $7=10$ бўлади. Аммо $7\neq 10$. Шу сабабли бу шартда тенглама ечимга эга эмас;

в) агар $x>5$ бўлса, $x+2+x-5=10$ бўлади, бундан $x_2=6{,}5$ келиб чиқади. Бу илдиз қаралаётган оралиққа тегишли. Демак, у изланаётган илдиз бўлади.

Жавоб: $\{-3{,}5;\ 6{,}5\}$.

Эслатма. Модуль остидаги ифодаларнинг нолга айланадиган қийматлари -2 ва 5 бўлгани учун улар сонлар тўғри чизиғини учта оралиққа бўлади, шу сабабли уларни ҳисобга олган ҳолда учта ҳолат кўриб чиқилди, яъни модуллар очиб қаралди.

2-мисол. Тенгламани ечинг:
$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{x^2-6x+9}$.

Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз: $1-4x\geqslant 0$, бундан $x\leqslant 1/4$. Берилган тенгламани

$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(x-3)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-4x}+2=|x-3| \tag{*}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Аниқланиш соҳасини эътиборга олиб, (*) ни $\sqrt{1-4x}+2=3-x$, яъни $\sqrt{1-4x}=1-x$ (**) кўринишда ёзиш мумкин. (**) тенгламанинг ҳар иккала қисмини квадратга кўтарамиз ва тегишли шакл алмаштиришларни бажариб, $x^2+2x=0$ ёки $x(x+2)=0$ тенгламага эга бўламиз, бундан эса $x_1=-2$ ва $x_2=0$ ларни топамиз. Ҳар иккала илдиз аниқланиш соҳасига тегишли бўлгани учун изланаётган илдизлардир, текшириш йўли билан унга ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Эслатма. Умумий ҳолда $\sqrt[2n]{f}=\varphi$ кўринишдаги иррационал тенгламаларни қуйидаги тенг кучлилик схемаларидан фойдаланиб ҳам ечиш мумкин:

$$\sqrt[2n]{f}=\varphi\Leftrightarrow\begin{cases}f\geqslant 0,\\ \varphi\geqslant 0,\\ f=\varphi^{2n}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi\geqslant 0,\\ f=\varphi^{2n}.\end{cases}$$

Демак,

$$\sqrt[2n]{f}=\varphi\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi\geqslant 0,\\ f=\varphi^{2n}.\end{cases} \tag{II}$$

Тенглама чап қисмининг аниқланиш соҳаси бу ерда ташлаб юборилаётгани йўқ, аммо уни система таркибидаги тенглама ўз ичига қамраб олган, шунинг учун уни система таркибига киритиш ортиқчадир.

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$2+\sqrt{x^2+2x+1}=3x+1. \tag{*}$$

Ечиш. 1-усул. (*) $\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2}=3x-1\Leftrightarrow|x+1|=$

$$= 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x + 1 = 3x - 1 \\ x + 1 = 1 - 3x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1/3, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Эслатма. Модулни ўнг томонига шарт қўйиб очилади.

Жавоб: $\{1\}$.

2-усул. $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (3x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow 8x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 8x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Текшириш. $x = 0$ бўлганда $3 = 1$ нотўғри, $x = 1$ бўлганда эса $4 = 4$ тўғри тенгликка эга бўламиз.

Жавоб: $\{1\}$.

3-усул. Тенгламани (II) тенг кучлилик схемасидан фойланиб ечиш ҳам мумкин.

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geqslant 0, \\ x^2 + 2x + 1 = (3x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1/3, \\ x^2 + 2x + 1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1/3, \\ 8x(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1/3, \\ x(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1/3, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

III тур. Бир неча квадрат илдизларни ўз ичига олган иррационал тенгламаларга доир мисоллар.

Бу турдаги иррационал тенгламалар тенгламанинг иккала қисмини бир хил даражага кўтариш усулидан фойдаланиб ечилади.

1-мисол. Тенглтамани ечинг: $\sqrt{4 - x} + \sqrt{5 + x} = 3.$

Ечиш. Тенгламанинг иккала қисми номанфий бўлгани учун уни квадратга кўтариб, $4 - x + 5 + x + 2\sqrt{(4 - x)(5 + x)} = 9$, яъни $\sqrt{(4 - x)(5 + x)} = 0$ ни ҳосил қиламиз, бундан: $(4 - x)(5 + x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - x = 0 \\ 5 + x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -5. \end{array}\right.$

Текшириш: $x_1 = -5$, $\sqrt{9} + \sqrt{0} = 3$, $3 = 3$ — ўринли;
$x_2 = 4$, $\sqrt{0} + \sqrt{9} = 3$, $3 = 3$ — ўринли.

Демак, топилган ҳар иккала илдиз ҳам берилган тенгламани тўғри сонли тенгликка айлантиргани учун изланаётган ечим бўлади.

Жавоб: $\{-5;\ 4\}$.

2-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x-3}=$ $=\sqrt{4x-1}$.

Ечиш. $\begin{cases} x+5 \geqslant 0, \\ 2x-3 \geqslant 0, \\ 4x-1 \geqslant 0 \end{cases}$ системани ечиб, тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз, яъни $x \geqslant 3/2$.

Берилган тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтариб,

$$3-x=2\sqrt{2x^2+7x-15} \qquad (1)$$

тенгламани ҳосил қиламиз ва бу тенглама ўз навбатида $\sqrt{x+5} > \sqrt{2x-3}$ да, яъни $x<8$ шартда берилганига тенг кучли. Энди (1) тенгламанинг иккала қисмини квадратга оширамиз ва натижада $7x^2+34x-69=0$ (2) келиб чиқади, бу тенглама эса $3-x \geqslant 0$ да, яъни $x \leqslant 3$ шартда (1) тенгламага тенг кучли бўлади. Шундай қилиб, $x \geqslant 3/2$, $x<8$ ва $x \leqslant 3$ шартларда, яъни $3/2 \leqslant x \leqslant 3$ оралиқда (2) тенглама дастлабки тенгламага тенг кучли бўлади.

(2) тенгламани ечиб, $x_{1,2}=\frac{-17\pm\sqrt{772}}{7}$ ни топамиз, лекин $x_1=((-17-\sqrt{772})/7) \notin [3/2;\ 3]$ (шунинг учун x_1 чет илдиз), аммо $x_2=(-17+\sqrt{772})/7=((-17+2\sqrt{193})/7 \in$ $\in [3/2;\ 3]$. Демак, x_2 берилган тенгламанинг ягона илдизидир.

Жавоб: $\{(-17+2\sqrt{193})/7\}$.

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x^2-8x+7}+2\sqrt{x^2-18x+17}=2\sqrt{x^2-32x+31}.$$

Ечиш. Илдиз остидаги ифодаларни кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\sqrt{(x-1)(x-7)}+2\sqrt{(x-1)(x-17)}=$$
$$=2\sqrt{(x-1)(x-31)}.$$

Тенгламанинг аниқланиш соҳаси қуйидаги система билан аниқланади:

$$\begin{cases} (x-1)(x-7) \geqslant 0, \\ (x-1)(x-17) \geqslant 0, \\ (x-1)(x-31) \geqslant 0, \end{cases}$$

бундан эса $x \leqslant 1$ ва $x \geqslant 31$ ларни топамиз.

$$\sqrt[2n]{abc}=\sqrt[2n]{|a|}\cdot\sqrt[2n]{|b|}\cdot\sqrt[2n]{|c|}\quad(abc\geqslant 0)$$

формулага кўра:

$$\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-17|}=$$
$$=2\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-31|}$$

ёки

$$\sqrt{|x-1|}(\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-17|}-$$
$$-2\sqrt{|x-31|})=0$$

га эга бўламиз, бундан эса қуйидагилар келиб чиқади:

а) $\sqrt{|x-1|}=0$, бундан $x_1=1$;

б) $\sqrt{|x-7|}-2\sqrt{|x-17|}-2\sqrt{|x-31|}=0$. $x\leqslant 1$ шартда бу тенглама $\sqrt{7-x}+2\sqrt{17-x}-2\sqrt{31-x}=0$ кўринишда бўлиб, иррационалликдан қутилгандан сўнг $15x^2-482x-497=0$ кўринишга келади, ва ниҳоят, ундан $x_2=-1$ ва $x_3=497/15$ ларни топамиз, аммо $\frac{497}{15}\notin(-\infty;1]$, шунинг учун у чет илдиздир. $x\geqslant 31$ шартда б) тенгламани $\sqrt{x-7}+2\sqrt{x-17}-2\sqrt{x-31}=0$, яъни $\sqrt{x-7}+2\sqrt{x-17}=2\sqrt{x-31}$ кўринишда ёзиб оламиз ва унинг ҳар иккала қисмини квадратга кўтариб ҳамда тегишли шакл алмаштиришларни бажаргандан кейин $4\sqrt{(x-7)(x-17)}=-x-49$ кўринишга келтирилади, аммо бу тенглама ечимга эга эмас, чунки $x\geqslant 31$ шартда тенгламанинг ўнг қисми фақат манфий қийматларни қабул қилади, бу эса арифметик илдиз шартини қаноатлантирмайди.

Текширишлар кўрсатадики, $x=-1$ в $x=1$ берилган тенгламанинг илдизларидир.

Жавоб: $\{-1;\ 1\}$.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{\frac{x^2-4x}{x}}=1+\sqrt{x-4}.$$

Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ \dfrac{x(x-4)}{x}\geqslant 0,\\ x-4\geqslant 0\end{cases}$$

системадан топилади, уни ечиб $x \geqslant 4$ га эга бўламиз.

Аниқланиш соҳасини эътиборга олган ҳолда берилган тенгламани шакл алмаштирамиз ва натижада $\sqrt{x-2}+$ $+\sqrt{\frac{x(x-4)}{x}}=1+\sqrt{x-4}$, яъни $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-4}$ ва бундан $\sqrt{x-2}=1$ $(*)$, $x-2=1$, $x=3$ лар келиб чиқади, аммо бу илдиз чет илдиздир, чунки $3 \notin [4; +\infty)$. Демак, $x=3$ шакл алмаштиришлардан ҳосил бўлган $(*)$ тенгламанинг илдизидир, лекин дастлабки тенгламани шакл алмаштиришдан ҳосил бўлган тенглама (яъни $(*)$) нинг аниқланиш соҳаси эса $x-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$ дан иборат. Шундай қилиб, шакл алмаштиришлардан кейин ҳосил бўлган тенгламанинг аниқланиш соҳаси берилган тенгламаникига қараганда кенгайди ва натижада чет илдиз ҳосил бўлди. Шунингдек, чет илдизлар тенгламанинг ҳар иккала қисмини жуфт даражага ёки тенгламанинг ҳар иккала қисмини ўзгарувчи қатнашган ифодага кўпайтирган тақдирда ҳам ҳосил бўлиши мумкин.

Жавоб: $\{\varnothing\}$.

5-мисол. Тенгламани ечинг: $2(x-3)=\sqrt{x^2-2x-3}$.

Ечиш. $x^2-2x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 3 \\ x \leqslant -1. \end{array}\right.$$

Демак, берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси: $x \in$ $\in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. Берилган тенгламани $2(\sqrt{x-3})^2=$ $=\sqrt{(x+1)(x+3)}$ кўринишда ёзамиз ва унинг ҳар иккала қисмини $\sqrt{x-3}$ га бўлиб, $2\sqrt{x-3}=\sqrt{x+1}$ га эга бўламиз, уни ечиб, $4x-12=x+1 \Leftrightarrow x=13/3$ натижага келамиз. $\frac{13}{3} \in [3; +\infty)$ — ўринли, шунинг учун у изланаётган илдиз бўлади. Аммо бевосита ўрнига қўйиш йўли билан $x=3$ илдиз ҳам берилган тенгламанинг илдизи эканлигига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин. Шакл алмаштиришлардан кейин ҳосил бўлган $2\sqrt{x-3}=\sqrt{x+1}$ тенгламанинг аниқланиш соҳаси — $x \geqslant 3$ дан иборат, бу эса берилган тенглама аниқланиш соҳасининг бир қисми холос. Демак, шакл алмаштиришлардан кейин берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси торайган ва натижада $x=3$ илдиз йўқотилган.

Шундай қилиб, тенгламани ўзгарувчи иштирок этган ифодага бўлганда ҳам илдизларни йўқотишимиз мумкин экан.

Аслида берилган тенгламани қуйидагича муҳокама қилиб ечиш лозим эди. $2(x-3)=\sqrt{(x+1)(x-3)}$ тенгламанинг аниқланиш соҳаси гарчанд $(-\infty;\ -1]\cup[3;\ +\infty)$ бўлса ҳам, моҳияти жиҳатидан $(-\infty;\ -1]$ да тенгламанинг чап қисми манфий, ўнг қисми эса номанфий сон бўлади. Демак, $(-\infty;\ -1)$ да тенглама ечимга эга эмас. Шу сабабли ечим фақат $[3;\ +\infty)$ да бўлади. Шуни назарга олиб, берилган тенгламани ечамиз.

1-усул. $2(x-3)=\sqrt{(x+1)(x-3)}\Rightarrow 2(\sqrt{x-3})^2=$
$=(\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}\Leftrightarrow\sqrt{x-3}\,(2\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1})=$
$=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}=0\\ 2\sqrt{x-3}-\sqrt{x-1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3=0\\ 2\sqrt{x-3}=\sqrt{x+1}\end{array}\right.\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=3\\ 4(x-3)=x+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=3\\ x_2=13/3.\end{array}\right.$

Топилган илдизларнинг ҳар иккаласи кўрилаётган соҳага тегишли бўлгани учун изланаётган илдизлар бўлади.

2-усул. $(2(x-3))^2=(\sqrt{x^2-2x-3})^2\Rightarrow 4(x^2-6x+9)=$
$=x^2-2x-3\Leftrightarrow 3x^2-22x+39=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm 2}{3}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=3\in[3;\ +\infty),\\ x_2=13/3\in[3;\ +\infty).\end{array}\right.$

Жавоб: $\{3;\ 13/3\}$.

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}=0.$$

Ечиш. Номанфий сонларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши учун ҳар бир қўшилувчи нолга тенг бўлиши керак. Шунинг учун $\sqrt{x-1}=0$, яъни $x=1$. Энди текширамиз: $0+0+0=0$ — ўринли.

Жавоб: $\{1\}$.

7-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x^2+x+1}=x-4$.

Ечиш. Тенгламани (II) тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб ечамиз:

$$\sqrt{x^2+x+1}=x-4\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-4\geqslant 0,\\ x^2+x+1=(x-4)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 4,\\ x^2+x+1=x^2-8x+16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 4,\\ 9x=15\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 4,\\ x=5/3\end{array}\right.\Leftrightarrow\varnothing$$

Аммо $5/3 \notin [4; +\infty)$. Шунинг учун тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: $\{\varnothing\}$.

8-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$.

Ечиш. Бу тенгламанинг илдизлари қуйидаги система ечимлари орасида бўлиши мумкин:

$$\begin{cases} x+a\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ a-\sqrt{x}\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -a,\\ x\geqslant 0,\\ \sqrt{x}\leqslant a. \end{cases} \qquad (1)$$

$\sqrt{x}\leqslant a$ шартдан фақат $a\geqslant 0$ қийматларни қараш кераклиги келиб чиқади ва бу чекланишдан $x\geqslant 0$ чекланиш $x\geqslant -a$ га қараганда кучли ҳисобланади, шу сабабли (1) системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} x\geqslant 0,\\ \sqrt{x}\leqslant a. \end{cases} \qquad (2)$$

Бу шартни назарга олган ҳолда берилган тенгламани квадратга кўтарамиз ва $x+a=a^2-2a\sqrt{x}+x \Leftrightarrow 2a\sqrt{x}=a(a-1)$ (3) ни ҳосил қиламиз. $a=0$ бўлганда (3) тенгламадан ва (2) системадан $x=0$ экани, шунингдек, $a>0$ бўлганда эса $\sqrt{x}=\frac{a-1}{2}$ дан $x=\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$ келиб чиқади. $0\leqslant\sqrt{x}\leqslant a$ эканини назарга олсак, яна қуйидаги системани ечишга тўғри келади:

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{a}\geqslant 0,\\ \dfrac{a-1}{2}\leqslant a, \end{cases} \text{бундан} \begin{cases} a\geqslant 1,\\ a\geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow a\geqslant 1.$$

Жавоб: $a=0$ бўлганда $x=0$; $a\geqslant 1$ бўлганда $x=$ $x=\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$; $0<a<1$ ва $a<0$ бўлганда эса ечимга эга эмас.

9-мисол. Тенгламани ечинг: $x^2+a=\sqrt{3x^2+2a-2x}$.

Ечиш. Бу тенгламанинг ечимлари фақат қуйидаги система ечимлари орасида бўлиши шарт:

$$\begin{cases} 3x^2+2a-2x\geqslant 0,\\ x^2+a\geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) системани назарга олган ҳолда берилган тенгламанинг ҳар иккала қисмини квадратга кўтарамиз. У ҳолда:

$$x^4+2ax^2+a^2=3x^2+2a-2x.$$

Бу эса x га нисбатан тўртинчи даражали тенглама. Уни a га нисбатан иккинчи даражали деб, унинг илдизларини топамиз, яъни:

$$a^2+2a(x^2-1)+x^4-3x^2+2x=0,\ a=-(x^2-1)\pm$$

$$\pm\sqrt{x^4-2x^2+1-x^4+3x^2-2x}=-(x^2-1)\pm$$

$$\pm\sqrt{(x-1)^2}=-(x^2-1)\pm|x-1|.$$

Энди x га нисбатан иккита квадрат тенгламанинг илдизларини топамиз:

1) $a=-(x^2-1)+(x-1);\ x^2-x+a=0,$

$x_{1,2}=(1\pm\sqrt{1-4a})/2;$

2) $a=-(x^2-1)-(x-1);\ x^2+x-2+a=0,$

$x_{3,4}=(-1\pm\sqrt{9-4a})/2.$

Бу топилган тўртала илдизнинг ҳар бирини (1) системага қўйиб, параметрнинг йўл қўйиладиган қийматларини топамиз:

$$x_1=(1+\sqrt{1-4a})/2;\ ((1+\sqrt{1-4a})/2)^2+a\geqslant 0;$$

$$((1+2\sqrt{1-4a}+1-4a)/4)+a\geqslant 0,$$

$$\sqrt{1-4a}\geqslant -1,\ 1-4a\geqslant 0,\ a\leqslant 1/4.$$

Демак, $a\leqslant 1/4$ да $x_1=(1+\sqrt{1-4a})/2;$

$$x_2=(1-\sqrt{1-4a})/2;\ \left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)^2+a\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-2\sqrt{1-4a}+1-4a}{4}+a\geqslant 0\Leftrightarrow\sqrt{1-4a}\leqslant 1\Leftrightarrow\begin{cases}1-4a\geqslant 0,\\ 1-4a\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant\frac{1}{4},\\ a\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}.$$

Демак, $0\leqslant a\leqslant 1/4$ да $x_2=(1-\sqrt{1-4a})/2;$

$$x_3=\frac{-1+\sqrt{9-4a}}{2};\ \left(\frac{-1+\sqrt{9-4a}}{2}\right)^2+a\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-2\sqrt{9-4a}+9-4a}{4}+a\geqslant 0\Leftrightarrow\sqrt{9-4a}\leqslant 5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9-4a\geqslant 0,\\ 9-4a\leqslant 25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant 9/4,\\ a\geqslant -4\end{cases}\Leftrightarrow -4\leqslant a\leqslant 9/4.$$

Демак, $-4 \leqslant a \leqslant 9/4$ да $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{9-4a}}{2}$;

$$x_4 = \frac{-1-\sqrt{9-4a}}{2}; \quad \left(\frac{-1-\sqrt{9-4a}}{2}\right)^2 + a \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2\sqrt{9-4a}+9-4a}{4} + a \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-4a} \geqslant -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9-4a \geqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant 9/4.$$

Демак, $a \leqslant 9/4$ да $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{9-4a}}{2}$.

Жавоб: $a \leqslant 1/4$ да $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$; $0 \leqslant a \leqslant 1/4$ да $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$; $-4 \leqslant a \leqslant 9/4$ да $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{9-4a}}{2}$; $a \leqslant 9/4$ да $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{9-4a}}{2}$.

10-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{a+\sqrt{a+x}} = x$.

Ечиш. Берилган тенглама

$$\begin{cases} a+\sqrt{a+x} = x^2, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a+x} = x^2 - a, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

системага тенг кучли, бу ўз навбатида

$$\begin{cases} a + x = (x^2 - a)^2, \\ x^2 - a \geqslant 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

системага тенг кучли.

(1) системадаги тенглама x га нисбатан тўртинчи даражали ва a га нисбатан иккинчи даражали тенгламадир. Уни

$$a^2 - (2x^2+1)a + (x^4 - x) = 0$$

кўринишда ёзиб, чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз. a га нисбатан квадрат учҳаднинг дискриминанти

$$D = (2x^2+1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$$

га тенг, ва натижада

$$a^2 - (2x^2+1)a + x^4 - x =$$

$$= \left(a - \frac{(2x^2+1)+(2x+1)}{2}\right)\left(a - \frac{(2x^2+1)-(2x+1)}{2}\right)$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, берилган тенглама қуйидаги аралаш системалар бирлашмасига тенг кучли бўлади:

$$\begin{cases} x^2+x+1=a, \\ x^2-a\geqslant 0, \\ x\geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-x-a=0, \\ x^2-a\geqslant 0, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$$

яъни бундан қуйидаги аралаш система бирлашмасига келамиз:

$$\begin{cases} x^2-a=-x-1, \\ -x-1\geqslant 0, \\ x\geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-a=x, \\ x\geqslant 0. \end{cases}$$

Бирлашмадаги биринчи система ечимга эга эмас, иккинчи система эса

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\right)=0, \\ x\geqslant 0, \\ a\geqslant -1/4 \end{cases}$$

системага тенг кучли, бу ўз навбатида қуйидаги системалар бирлашмасига тенг кучли:

$$\begin{cases} -1/4\leqslant a\leqslant 0; \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} a>0, \\ x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}. \end{cases}$$

Шундай қилиб, берилган тенглама учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$a<-1/4$ бўлганда илдизлар йўқ; $a=-1/4$ ва $a>0$ бўлганда тенглама ягона $x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ илдизга эга;

$-1/4<a<0$ бўлганда тенглама иккита илдизга эга, яъни $x=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ ва $x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

11-мисол. a, b ва c ларнинг шундай қийматларини топингки, у қийматларда $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$ тенглама чексиз кўп ечимга эга бўлсин.

Ечиш. $\sqrt{x}$ ни тенгламанинг ўнг қисмига ўтказамиз ва ҳосил бўлган тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтарамиз. Ўхшаш ҳадларни ихчамлагандан сўнг тенгламанинг натижаси бўлган қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$(a+2c)\sqrt{x}=c^2-b.$$

$a+2c=0$ ва $c^2-b=0$ бўлганда ва фақат шундагина охирги тенглама чексиз кўп ечимларга эга бўлади (ҳаммаси номанфий сонлар).

$a=-2c$ ва $b=c^2$ ларни дастлабки тенгламага қўйиб,

$\sqrt{x-2c\sqrt{x}+c^2}=c-\sqrt{x}$ ёки $\sqrt{(\sqrt{x}-c)^2}=c-$ $-\sqrt{x}$, $|\sqrt{x}-c|=-(\sqrt{x}-c)$ (*) тенгламага эга бўламиз.

$c<0$ бўлганда (*) тенгламанинг чап қисми мусбат (чунки x — номанфий, $-c>0$; шу сабабли уларнинг йиғиндиси мусбат), ўнг қисми эса манфий сонлар бўлади, шунинг учун мусбат сон манфий сонга тенг бўлмагани учун у ечимга эга эмас; $c=0$ бўлганда эса $x_1=0$ дан иборат ягона ечимга эга.

$c>0$ бўлсин, у ҳолда (*) тенгламанинг ўнг қисми $-(\sqrt{x}-c)\geqslant 0$, яъни $\sqrt{x}-c\leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\leqslant c \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x\leqslant c^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0\leqslant x\leqslant c^2$ шартдагина номанфий қийматларга эга бўлади. Бундан (*) тенглама $\begin{cases} c>0, \\ 0\leqslant x\leqslant c^2 \end{cases}$ системага тенг кучлилиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган тенглама $a=-2c$, $b=c^2$ ва $c>0$ бўлганда ва фақат шундагина чексиз кўп ечимга эга ва унинг ечимлари $[0;\ c^2]$ кесмадан олинган барча сонлар бўлади.

IV тур. Куб илдиз қатнашган иррационал тенгламаларга доир мисоллар.

1-мисол. Тенгламани ечинг: $x-\sqrt[3]{x^2-x-1}=1$.

Ечиш. Берилган тенгламани аввал $x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1}$ кўринишда ёзиб оламиз, сўнгра кубга кўтарамиз ва соддалаштиришлардан кейин $x^3-4x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4x+$ $+4)=0 \Leftrightarrow x(x-2)^2=0$ келиб чиқади, бундан эса $x_1=$ $=0$ ва $x_2=2$ ларни топамиз. Ҳар иккала илдиз берилган тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: $\{0;\ 2\}$.

2-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+$ $+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$.

Ечиш. $x\geqslant 0$ экани ўз-ўзидан кўриниб турибди. Одатда бу кўринишдаги мисолларни ечаётганда қуйидаги теоремадан фойдаланилади:

Теорема. *Агар* $a \pm b = c$ *бўлса, у ҳолда* $a^3 \pm b^3 \pm 3abc = c^3$ *бўлади.*

Исботи. $a \pm b = c \Leftrightarrow (a \pm b)^3 = c^3 \Leftrightarrow a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 = c^3 \Leftrightarrow a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b) = c^3 \Rightarrow a^3 \pm b^3 \pm 3abc = c^3$.

$(a \pm b)$ ни c га алмаштиришдан ҳосил бўлган тенгликдан $3abc = \pm c^3 \mp a^3 - b^3$ келиб чиқади. Кейин бу тенгликнинг иккала қисмини кубга ошириб, осонгина иррационалликдан қутулиш мумкин.

Эслатма. Аниқ берилган мисолда тенгламанинг чап қисмини ўнг қисми билан алмаштириш умуман олганда ўринли (яъни мумкин) эмас, чунки бу тенгламани қаноатлантирувчи x нинг бирор қиймати бизга олдиндан маълум эмас. Балки бундай қийматлар умуман йўқдир, шу сабабли бундай алмаштириш мумкин эмас. Аммо амалиётда биз бундай алмаштириш натижасида ечимлар мажмуасини кенгайтирамиз. Шунинг учун топилган барча илдизларни текшириб кўриб, фақат дастлабки берилган тенгламани қаноатлантирадиганларини жавоб қилиб ёзиш лозим.

Энди икки сон йиғиндисининг куби формуласидан фойдаланиб, берилган тенгламанинг иккала қисмини кубга кўтарамиз:

$54 + \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{(54 + \sqrt{x})\,(54 - \sqrt{x})}\,(\sqrt[3]{54 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{54 - \sqrt{x}}) + 54 - \sqrt{x} = 18.$ Тенгламанинг чап қисмидаги қавс ичидаги ифодани (яъни йиғиндини) $\sqrt[3]{18}$ билан алмаштирамиз ва қуйидагиларга эга бўламиз:

$108 + 3\sqrt[3]{54^2 - x}\cdot\sqrt[3]{18} = 18,\ 3\sqrt[3]{54^2 - x}\cdot\sqrt[3]{18} = -90,$
$\sqrt[3]{54^2 - x}\cdot x\sqrt[3]{18} = -30.$

Охирги тенгламани яна кубга оширгандан кейин $(54^2 - x)\cdot 18 = -27000,\ 54^2 - x = -1500,\ x = 54^2 + 1500 = 4416$ келиб чиқади.

Текшириш натижасида $x = 4416$ — берилган тенгламанинг илдизи эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб: {4416}.

3- мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[3]{x + 45} - \sqrt[3]{x - 16} = 1.$$

Ечиш. Тенглама таркибига тоқ даражали илдизлар киргани сабабли, унинг аниқланиш соҳаси барча R дан иборат бўлади.

Бу тенгламани ечишнинг уч усулини кўрсатамиз:

1-усул. Тенгламанинг иккала қисмини кубга кўтарамиз:

$$x+45-3\sqrt[3]{x+45}\cdot\sqrt[3]{x-16}\,(\sqrt[3]{x+45}-$$
$$-\sqrt[3]{x-16})-(x-16)=1.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз ва шартга кўра $(\sqrt[3]{x+45}-$ $-\sqrt[3]{x-16})$ нинг 1 га тенглигини эътиборга олиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$61-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=1,$$

$$\text{яъни } \sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20. \qquad (*)$$

Аммо бу тенглама берилганига тенг кучли бўлмаслиги мумкин. Энди (*) тенгламанинг иккала қисмини кубга кўтарамиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$(x+45)(x-16)=8000; \quad x^2+29x-720=8000;$$
$$x^2+29x-8720=0.$$

Бу квадрат тенгламани ечиб, $x_1=-109$ ва $x_2=80$ илдизларни топамиз. Текшириш натижасида топилган ҳар иккала илдиз ҳам ечим эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

2-усул. $x+45=y^3$ ва $x-16=z^3$ — янги номаълумларни киритиб, қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x+45=y^3, \\ x-16=z^3, \\ y-z=1. \end{cases}$$

Системанинг биринчи тенгламасидан иккинчисини айирамиз ва ҳосил бўлган айирмани шакл алмаштирамиз:

$$61=y^3-z^3=(y-z)\left((y-z)^2+3yz\right).$$

$y-z$ нинг ўрнига унинг учинчи тенгламадаги қийматини қўйиб, $61=1+3yz$ га эга бўламиз, бундан $yz=20$ келиб чиқади. Шундай қилиб, кўпайтмаси 20 га, айирмаси эса 1 га тенг бўлган сонни топиш лозим бўлади. Бундай сонлар: $y_1=5$, $z_1=4$ ва $y_2=-4$, $z_2=-5$.

$x-16=z^3$ тенгламага z нинг топилган қийматларини қўйиб, $x_1=16+4^3=80$ ва $x_2=16+(-5)^3=-109$ ларни топамиз.

Шундай қилиб, бу усулда ҳам 1-усулдаги натижага эга бўлдик.

3-усул. Берилган тенгламани $\sqrt[3]{x+45} = 1 + \sqrt[3]{x-16}$ кўринишда ёзиб оламиз ва унинг ҳар иккала қисмини кубга кўтарамиз:

$$x+45 = 1 + 3\sqrt[3]{x-16} + 3\,(\sqrt[3]{x-16})^2 + x - 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-16})^2 + \sqrt[3]{x-16} - 20 = 0.$$

$\sqrt[3]{x-16} = y$ бўлсин, у ҳолда $y^2 + y - 20 = 0$; $y_1 = 4$, $y_2 = -5$. Бундан $x_1 = 80$ ва $x_2 = -109$ келиб чиқади. Бу усул билан ишлаганда текширишга ҳожат йўқ.

Жавоб: $\{-109;\ 80\}$.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2x+1}.$$

Ечиш. Юқорида исботланган формуладан фойдаланиб, берилган тенгламани шакл алмаштирамиз, у ҳолда

$$x + 1 + x + 3\sqrt[3]{(x+1)\,x(2x+1)} = 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)\,x\,(2x+1)} = 0$$

бўлади, бундан эса $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -0{,}5$ келиб чиқади. Топилган илдизларни текшириб, улар ичида чет илдизлар йўқлигига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин.

Жавоб: $\{-1;\ -0{,}5;\ 0\}$.

5-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3}$.

Ечиш. $2 - x^3 \geqslant 0$ тенгсизликни ечиб, берилган тенгламанинг йўл қўядиган қийматларини топамиз, яъни $x \leqslant \sqrt[3]{2}$. Берилган тенгламанинг йўл қўядиган қийматлари мажмуасидан олинган исталган x да унинг ўнг қисми номанфий сон бўлади, шунинг учун $x^2 - 2 \geqslant 0$, яъни $|x| \geqslant \sqrt{2}$. $x \leqslant \sqrt[3]{2}$ ва $|x| \geqslant \sqrt{2}$ тенгсизликлардаи берилган тенгламанинг барча илдизлари фақат $x \leqslant -\sqrt{2}$ шартни қаноатлантириши лозимлиги келиб чиқади.

Берилган тенгламанинг иккала қисмини олтинчи даражага кўтариб, натижа тенглама $(x^2-2)^2 = (2-x^3)^3$ ни, яъни $x^9 - 6x^6 + x^4 + 12x^3 - 4x^2 - 4 = 0$ ни ҳосил қиламиз ва уни шакл алмаштириб, қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$x^4\,(x^5+1) - 6x^6 + 12x^3 - 4\,(1 + x^2) = 0.$$

Шундай қилиб, берилган тенглама қуйидаги системага тенг кучли бўлади:

$$\begin{cases} x^4(x^5+1)-6x^6+12x^3-4(1+x^2)=0,\\ x\leqslant -\sqrt{2}.\end{cases}$$

Бу система ечимга эга эмас, чунки $x\leqslant-\sqrt{2}$ шартда система таркибидаги тенгламанинг чап қисмидаги ҳамма қўшилувчилар манфийдир.

Демак, тенглама ечимга эга эмас экан.

6-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt[3]{x-3}=1$.

Ечиш. Тенгламанинг иккала қисмини кубга кўтариб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(2x+4)+(x-3)+3\sqrt[3]{(2x+4)(x-3)}\,(\sqrt[3]{2x+4}+\\ +\sqrt[3]{x-3})=1.$$

Қавс ичидаги ифоданинг 1 га тенглигини ҳисобга олиб, соддалаштиришлардан сўнг $\sqrt[3]{(2x+4)(x-3)}=-x$ га эга бўламиз. Бу тенгламанинг иккала қисмини кубга кўтарсак, $x^3+2x^2-2x-12=0$ келиб чиқади. Чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз: $(x-2)(x^2+4x+6)=0$. Бундан $x=2$ келиб чиқади. Текшириш натижасида унинг ягона илдиз эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб: $\{2\}$.

V тур. «Танлаш» усули билан ечиладиган иррационал тенгламаларга доир мисоллар.

1-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{3x-2}=2$.

Ечиш. «Танлаш» усули ёрдамида берилган тенгламани $x=1$ қаноатлантиришини топамиз. Топилган бу қиймат берилган тенгламанинг ягона илдизи эканини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $x>1$ бўлсин, у ҳолда $\sqrt[3]{2x-1}>1$ ва $\sqrt[3]{3x-2}>1$, яъни тенгламанинг чап қисми иккидан катта. Агар $x<1$ (x нинг йўл қўядиган қийматлари соҳаси, яъни $1/2\leqslant x<1$ да) бўлса, у ҳолда тенгламанинг чап қисми иккидан кичик бўлади. Шундай қилиб, берилган тенглама $x=1$ дан иборат ягона илдизга эга экан.

Эслатма. $\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}=0$ тенгламани «танлаш» усули ёрдамида ечиш мумкин эмаслигини эслатиб ўтамиз, гарчанд $x=1$ тенгламанинг илдизи экани кўриниб турса ҳам, аммо бу илдизнинг ягоналигини исботлаш осон эмас. «Танлаш» усули ёрдамида топилган илдиздан бошқа илдизлар йўқлигини исботламасдан туриб, тенгламани ечилган деб бўлмайди.

2-мисол. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган тенгламани $\sqrt{2x+6}=6-\sqrt{x-1}$ кўринишда ёзиб оламиз. «Танлаш» ёрдамида тенгламанинг илдизи $x=5$ эканини топиш унчалик қийин эмас. $y=\sqrt{2x+6}$ функция ўсувчи, $y=6-\sqrt{x-1}$ функция эса камаювчи бўлгани учун тенглама бошқа илдизга эга бўлмайди.

Эслатма. $f=g$ кўринишдаги тенгламани шакл алмаштиришлар натижасида ёки номаълумни қулай алмаштириш ёрдамида ҳам у учун ечиш алгоритми мавжуд бўлган тенглама кўринишига ҳар доим келтира олмаслигимиз мумкин. Бундай ҳолларда f ва g функцияларнинг айрим хоссаларини қўллаш ёрдамида тенглама илдизларини топиш фойдалидир. Масалан, агар бирор X ораликда функцияларнинг бири камаювчи, иккинчиси ўсувчи бўлса, у ҳолда $f=g$ тенглама ё битта илдизга эга бўлади ва уни «танлаш» ёрдамида топиш мумкин, ёки тенглама ечимга эга бўлмаслиги мумкин.

Масалан. $\sqrt{7-x}=x-1$ тенгламани ечиш учун унинг иккала қисмини квадратга кўтаришнинг ҳожати йўқ. $x=3$ — тенгламанинг илдизи, тенгламанинг чап қисми камаювчи, ўнг қисми эса ўсувчи функция бўлганлигидан, унинг бошқа илдизлари йўқ эканини эътиборга олиш етарлидир.

Агар бирор X оралиқда $f(x)$ функция юқоридан ва $g(x)$ функция қуйидан чегараланган ҳамда уларнинг қиймати бирор A сонга тенг бўлса, у ҳолда $f(x)=g(x)$ тенглама

$$\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A \end{cases}$$

тенгламалар системасига тенг кучли бўлади.

Айрим ҳолларда $f(x)=g(x)$ тенгламани ечиш учун эса $y=f(x)$ ва $y=g(x)$ функцияларнинг графикларини ясаш, сўнгра улар кесишган нуқтанинг абсциссасини аниқлаш етарлидир. Шунингдек, айрим ҳолларда ҳосиладан ҳам фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

3-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt[4]{2x-1}=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$.

Ечиш. $x=1$ берилган тенгламанинг илдизи эканини сезиш қийин эмас. Аммо бу илдиз берилган тенгламанинг ягона илдизи эканини ҳозирча биз $y=\sqrt[4]{2x-1}$ ва $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$ функциялар берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасида (яъни $x\in[1/2;+\infty)$ да) ҳар иккаласи ўсувчи функциялар бўлганлигидан тасдиқлай олмаймиз, чунки биз юқорида келтирилган мисолга ўхшаш шакл алмаштиришлар ёрдамида бир қисми ўсувчи, иккинчи қисми эса камаювчи функция бўлган кўринишга келтира олмадик. Шунинг учун биз бошқача ёндошмоғимиз керак бўлади. $y_1=\sqrt[4]{2x-1}$ ва $y_2=$

$=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$ функцияларнинг ҳосилаларини топамиз ва уларни $x=1$ (бу функциялар графиклари кесишган нуқтаси) даги қийматини ҳисоблаймиз:

$$y_1' = \frac{1}{4}(2x-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{2x-1)^3}};\quad y_1'(1)=1/2;$$

$$y_2' = x/2,\ y_2'(1)=\frac{1}{2}.$$

$y_1'(1)=y_2'(1)=1/2$ бўлгани учун y_1 ва y_2 функциялар $(1;\ 1)$ нуқтада умумий уринмага эга, лекин y_1 функция қуйига қабариқ, y_2 функция ботиқ бўлганликларидан, уларнинг графиклари умумий уринмадан турли томонда жойлашади, шу сабабли $y_1(x)=y_2(x)$ тенглама ягона илдизга эга.

Шундай қилиб, $x=1$ — берилган тенгламанинг ягона илдизидир.

4-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{x+1}=4.$

Ечиш. Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси $x\geqslant -1$ тенгсизлик билан берилади ва $x>0$ мажмуада тенгламанинг чап қисми ўсувчи бўлади, шу сабабли тенглама бу мажмуада биттадан ортиқ илдизга эга бўлмайди. Танлаш ёрдамида бу сон 3 эканини осонгина топиш мумкин. Иккинчи томондан $[-1;\ 0]$ кесмада биринчи қўшилувчи манфий, иккинчиси эса 1 дан катта эмас, шу сабабли бу оралиқда тенглама ечимга эга бўлмайди.

Жавоб: $\{3\}$.

VI тур. Янги номаълум киритиш усули ёрдамида ечиладиган иррационал тенгламаларга доир мисоллар.

Бу усулнинг моҳияти жуда соддадир, яъни, агар $f(x)=0$ тенгламани $p(g(x))=0$ кўринишга келтира олсак, у ҳолда янги $u=g(x)$ номаълумни киритиш ва $p(u)=0$ тенгламани ечиш, сўнгра $g(x)=u_1,\ g(x)=u_2,\ \ldots,\ g(x)=u_n$ тенгламалар бирлашмасини кўриб чиқиш лозим бўлади, бунда $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ лар $p(u)=0$ тенгламанинг илдизларидир. Қулай янги номаълумни киритиш кўникмаси—ўқувчилар математик маданиятининг муҳим элементидир. Янги номаълумни қулай танлаш эса тенглама таркибини анча ойдинлаштиради. Тенгламаларни ечишда дарҳол шакл алмаштиришни бажаришга киришиш керак эмас, балки янги номаълумни киритиш орқали берилган тенгламани жуда содда кўринишда ёзиш мумкинми ёки йўқлигини фикран таҳлил қилиб чиқиш мақсадга мувофиқдир.

Ҳақиқатан ҳам, айрим тенгламаларда янги номаълум сифатида нимани танлаб олиш мумкинлиги очиқдан-очиқ кўриниб турса, айримларида эса уни «кўриш» қийин, лекин у «ҳис қилинади» ёки маълум шакл алмаштиришларни бажариш жараёнидагина билиб олиш мумкин бўлади. Айрим ҳолларда эса битта эмас, балки иккита номаълум киритиш мақсадга мувофиқ бўлади. Буларни биз турли мисолларда кўриб чиқамиз.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^2-3x-\sqrt{2x^2-6x+5}=-3.$$

Ечиш. $x^2-3x=y$ белгилаш киритамиз, у ҳолда тенглама $\sqrt{2y+5}=y+3$ кўринишни олади. Энди бу тенгламани ечамиз:

$$\sqrt{2y+5}=y+3\Leftrightarrow\begin{cases}y+3\geqslant 0,\\2y+5=(y+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant -3,\\2y+5=y^2+6y+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant -3,\\y^2+4y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant -3,\\(y+2)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant -3,\\y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant -3\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow y=-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x=-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\end{array}\right.$$

Жавоб: $\{1;\ 2\}$.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-x+7}=\sqrt{2x^2-2x+21}.$$

Ечиш. $y=x^2-x$ деб $\sqrt{y+2}+\sqrt{y+7}=\sqrt{2y+21}$ ни ҳосил қиламиз. Кейин қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y+2+y+7+2\sqrt{(y+2)(y+7)}=2y+21,$$

$$\sqrt{y^2+9y+14}=6,\ y^2+9y+14=36,$$

$$y^2+9y-22=0,\ \text{бундан}\ y_1=2,\ y_2=-11.$$

Энди иккита $x^2-x=2$ ва $x^2-x=-11$ тенгламалар бирлашмасини ечиш лозим бўлади. Биринчи тенгламадан $x_1=2$ ва $x_2=-1$ ларни топамиз, иккинчи тенгламанинг илдизлари йўқ. Ҳар иккала илдиз ҳам изланаётган илдиз бўлишини текшириш қийин эмас.

Жавоб: $\{-1;\ 2\}$.

3-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+10}=2.$$

Ечиш. Бу тенгламани «таваккал» қилиш йўли билан ечимга эришиш анча мушкул бўлади. Мақсадга эришиш учун эса бир оз бўлса ҳам «тадбиркорлик» зарур, ва шунингдек, тенгламаларни ечишнинг турли усулларини кенг кўламда билишга ҳам боғлиқ бўлади. Унча мураккаб бўлмаган шакл алмаштиришлардан кейин тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1+\sqrt{x^2+2x+10}=3$, ёки $3-(x^2+2x+1)^2=\sqrt{x^2+2x+10}$. $\sqrt{x^2+2x+10}=y$ $(y>0)$ бўлсин, у ҳолда $x^2+2x+10=y^2$, яъни $x^2+2x+1=y^2-9$ бўлади. Демак, $3-(y^2-9)^2=y\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(y+3)^2(y-3)^2+(y-3)=0\Leftrightarrow(y-3)((y+3)^2(y-3)+1)=0$, бундан $y=3$ келиб чиқади.

Шундай қилиб, $x^2+2x+1=0$, бундан $(x+1)^2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-1$ га эга бўламиз.

Жавоб: $\{-1\}$.

Эслатма. Ушбу тенгламани бошқача усул билан ҳам ечиш мумкин, яъни берилган тенгламани $\sqrt{x^2+2x+10}=2-x^4-4x^3-6x^2-4x$ кўринишда ёзиб олиш, сўнгра ҳосиладан фойдаланиб, ҳосил бўлган тенгламанинг чап қисми 3 га тенг бўлган энг кичик қийматни, ўнг қисми эса $x=-1$ да 3 га тенг бўлган энг катта қийматни қабул қилиши, бундан берилган тенглама $x=-1$ дан иборат ягона илдизга эга эканлиги келиб чиқади.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\frac{3(x-2)+4\sqrt{2x^2-3x+1}}{2(x^2-1)}=1.$$

Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$\begin{cases}2x^2-3x+1\geqslant0,\\x^2-1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1/2)(x-1)\geqslant0,\\x\neq\pm1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geqslant1\\x\leqslant1/2,\end{array}\right.\\x\neq\pm1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1/2]\cup(1;\ +\infty).$$

Берилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$3x-6+4\sqrt{2x^2-3x+1}=2(x^2-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow4\sqrt{2x^2-3x+1}=2x^2-3x+4.$$

$\sqrt{2x^2-3x+1}=y\,(y\geqslant0)$ белгилашни киритамиз, у ҳолда охирги тенглама $4y=y^2+3$, яъни $y^2-4y+3=0$ кўринишни олади, уни ечиб, $y_1=3$ ва $y_2=1$ ларни топамиз. Ҳар иккала илдиз шартни қаноатлантиради. Энди x га қайтамиз:

а) $\sqrt{2x^2-3x+1}=3$, $2x^2-3x+1=9$, $2x^2-3x-8=0$, бундан $x_1=(3+\sqrt{73})/4$ ва $x_2=(3-\sqrt{73})/4$ келиб чиқади;

б) $\sqrt{2x^2-3x+1}=1$, $2x^2-3x+1=1$, $2x^2-3x=0$, $2x(x-3/2)=0$; $x(x-3/2)=0$, бундан $x_3=0$ ва $x_4=3/2$ келиб чиқади.

Топилган тўртала илдизнинг ҳаммаси аниқланиш соҳасига тегишли бўлгани учун улар изланаётган илдизлар бўлади.

Жавоб: $\{(3-\sqrt{73})/4;\ 0;\ 3/2;\ (3+\sqrt{73})/4\}$.

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$3(x+5)(x-2)+\sqrt{x(x+3)}=0.$$

Ечиш. Тенглама чап қисмининг йўл қўядиган қийматлари соҳаси $x(x+3)\geqslant 0$ дан ташқари, яна шу билан бир қаторда $(x+5)(x-2)\leqslant 0$ эканини назарга олишни талаб қилади, чунки номанфий сонга номусбат сонларни қўшгандагина нолга тенг бўлиши мумкин. Шу сабабли $\begin{cases}x(x+3)\geqslant 0,\\(x+5)(x-2)\leqslant 0\end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечамиз. Шундай қилиб, тенгламанинг йўл қўядиган қийматлари қуйидаги мажмуага тегишли бўлади: $x\in[-5;\ -3]\cup[0;\ 2]$.

Берилган тенгламадаги қавсларни очиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$3x^2+9x-30+\sqrt{x^2+3x}=0$$

ёки

$$3(x^2+3x)+\sqrt{x^2+3x}-30=0.$$

$\sqrt{x^2+3x}=t\ (t\geqslant 0)$ деб оламиз, у ҳолда $3t^2+t-30=0$, $t_1=3$ ва $t_2=-3\frac{1}{3}$ (чет илдиз) келиб чиқади.

Энди x га қайтамиз:

$\sqrt{x^2+3x}=3$, бундан $x^2+3x=9$, ёки $x^2+3x-9=0$, яъни $x_{1,2}=(-3\pm 3\sqrt{5})/2$.

Топилган x_1 ва x_2 ларнинг қийматлари изланаётган соҳага тегишли, шу сабабли берилган тенгламанинг илдизлари бўлади.

Жавоб: $\{(-3-3\sqrt{5})/2;\ (-3+3\sqrt{5})/2\}$.

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$\sqrt{17x^2+7x+0{,}5}=13x^2+5x+0{,}5.$

Ечиш. $x\in R$ да $13x^2+5x+0{,}5>0$ бўлгани учун берилган тенглама $17x^2+7x+0,5=(13x^2+5x+0,5)^2$ (*) тенгламага тенг кучли бўлади. $y=13x^2+5x+0,5$ белгилашни киритамиз, у ҳолда $17x^2+7x+0,5=(13x^2+5x+0,5)+4x^2+2x=y+4x^2+2x$ бўлади. Топилганларни (*) га қўйиб, $y^2=y+4x^2+2x$, ёки $y^2-y-4x^2-2x=0$ (**) ни ҳосил қиламиз. (**) тенгламани y га нисбатан квадрат тенглама деб қараб, унинг дискриминантини ҳисоблаймиз:

$$D=1+4(4x^2+4x)=16x^2+8x+1=(4x+1)^2.$$

Демак, $y_{1,2}=(1\pm(4x+1))/2$, бундан $y_1=-2x$, $y_2=2x+1$ келиб чиқади. y нинг топилган қийматларини (*) тенгламага қўйсак, $13x^2+5x+0,5=-2x\Leftrightarrow 13x^2+7x+0,5=0$ ва $13x^2+5x+0,5=2x+1\Leftrightarrow 13x^2+3x-0,5=0$ лар келиб чиқади. Бу тенгламаларни ечиб, берилган тенгламанинг илдизларини топамиз, яъни

$x_{1,2}=(-7\pm\sqrt{23})/26$; $x_{3,4}=(-3\pm\sqrt{35})/26$.

7-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt[4]{x(x+5)^2}+6\sqrt[4]{x^3}=5\sqrt[4]{x^2(x+5}$.

Ечиш. Агар тенгламанинг барча ҳадлари изланаётган ўзгарувчини ёки ўзгарувчили умумий ифодани кўпайтувчи сифатида ўз ичига олса, бу ҳадларни тенгламанинг бир томонга ўтказиш ва умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш керак, сўнгра ҳосил бўлган кўпайтувчиларни нолга тенглаш ва ҳосил бўлган тенгламаларни ечиш керак. Қаралаётган ҳолда эса қуйидагича ёзилади:

$\sqrt[4]{x}\,(\sqrt[4]{(x+5)^2}+6\sqrt[4]{x^2}-5\sqrt[4]{x(x+5)})=0$, бу ерда $\sqrt[4]{x}=0$, яъни $x_1=0$ ёки $\sqrt[4]{(x+5)^2}+6\sqrt[4]{x^2}-5\sqrt[4]{x(x+5)}=0$. $x=0$ бу тенгламани қаноатлантирмагани учун унинг ҳамма ҳадларини $\sqrt[4]{x^2}$ га бўламиз ва натижада унга тенг кучли бўлган

$$\sqrt[4]{\left(\frac{x+5}{x}\right)^2}-5\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}}+6=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама $\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}}$ га нисбатан квадрат тенглама, шунинг учун $\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}}=y\ (y\geqslant 0)$ белгилашни киритамиз. Демак, $y^2-5y+6=0$. Бундан $y=3$ ва $y=2$ келиб чиқади. Энди x ўзгарувчига қайтиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$x = 0 \text{ ёки } x = 1/16 \text{ ёки } x = 1/3.$$

Жавоб: $\{0;\ 1/15;\ 1/3\}$.

8-мисол. Тенгламани ечинг: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Ечиш. $\sqrt[3]{2x-1} = y$ деб белгилаймиз, у ҳолда $2x - 1 = y^3$, яъни $y^3 + 1 = 2x$ бўлади, ва натижада қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y, \\ y^3 + 1 = 2x, \end{cases}$$

бундан $x^3 - y^3 = 2(y - x)$ ёки $(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$, яъни $x - y = 0$ ёки $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0$ келиб чиқади. Биринчи тенгламадан $x = y$ га эга бўламиз, аммо иккинчи тенглама ечимга эга эмас, чунки $x^2 + xy + y^2 + 2 = (x + 0{,}5y)^2 + (3/4)y^2 + 2 > 0$.

Энди x га қайтиб, система биринчи тенгламасини $\sqrt[3]{2x-1} = x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$ кўринишда ёзамиз. Бу тенгламани ечиб, $x = 1$ ва $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ ларни топамиз.

Жавоб: $\{(-1 - \sqrt{5})/2;\ 1;\ (-1 + \sqrt{5})/2\}$.

9-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^3 + x + \sqrt[3]{x^3 + x - 2} = 12.$$

Ечиш. $\sqrt[3]{x^3 + x - 2} = y$ белгилашни киритамиз, у ҳолда $y^3 + y - 10 = 0$ бўлади. Агар тенгламанинг бутун илдизлари бўлса, у ҳолда улар 10 нинг бўлувчиларидан иборат бўлади. 10 нинг бўлувчилари: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10. Уларни янги ҳосил бўлган тенгламага қўйиб, синаш натижасида $y = 2$ тенгламанинг илдизи эканини кўрамиз. $A(y) = y^3 + y - 10$ кўпҳадни $(y - 2)$ га бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(y - 2)(y^2 + 2y + 5) = 0.$$

Бу тенглама қуйидаги тенгламалар бирлашмасига тенг кучли:

$$\left[\begin{array}{l} y - 2 = 0 \\ y^2 + 2y + 5 = 0. \end{array}\right.$$

Бу бирлашмадаги иккинчи тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас, чунки $y^2 + 2y + 5 = (y + 1)^2 + 4 > 0$. Шунинг учун $y = 2$ дан иборат ягона илдизга эга бўламиз ва берилган тенглама $\sqrt[3]{x^3 + x - 2} = 2$ ёки $x^3 + x - 2 = 8$, яъни $x^3 + x - 10 = 0$ тенгламани ечишга келиб қолади. Бу тенглама y га нисбатан тенгламанинг худди ўзгинаси, шунинг учун у $x=2$ дан иборат ягона ҳақиқий илдизга эга бўлади.

Жавоб: $\{2\}$.

10-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{8+x+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4,$$

Ечиш. $\sqrt{x+7}=y\,(y\geqslant 0)$ бўлсин, у ҳолда $x=y^2-7$ бўлади, бу қийматларни берилган тенгламага қўямиз ва натижада

$$\sqrt{8+y^2-7+2y}+\sqrt{y^2-7+1-y}=4,$$

$$\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2-y-6}=4,$$

$$\sqrt{(y+1)^2}+\sqrt{y^2-y-6}=4,\quad |y+1|+\sqrt{y^2-y-6}=4$$

келиб чиқади, аммо $y\geqslant 0$, демак,

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y+1+\sqrt{y^2-y-6}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, \\ \sqrt{y^2-y-6}=3-y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, \\ 3-y\geqslant 0, \\ y^2-y-6=(3-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, \\ y\leqslant 3, \\ y^2-y-6=9-6y+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant y\leqslant 3, \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow y=3.$$

Шундай қилиб, $x=y^2-7=3^2-7=2$.

Жавоб: $\{2\}$.

11-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$$

Ечиш. 1-усул. $\sqrt{x-1}=y\,(y\geqslant 0)$ бўлсин, у ҳолда $x=y^2+1$. y нинг бу қийматини берилган тенгламага қўямиз:

$$\sqrt{y^2+1+2y}+\sqrt{y^2+1-2y}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2}+\sqrt{(y-1)^2}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y+1|+|y-1|=2,$$

аммо $y\geqslant 0$, у ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y+1+|y-1|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, \\ |y-1|=-(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, \\ -(y-1)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, \\ y-1\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, \\ y\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leqslant y\leqslant 1 \Leftrightarrow 0\leqslant y^2\leqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\leqslant y^2+1\leqslant 2 \Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Жавоб: [1; 2].

2-усул. $x+2\sqrt{x-1}=x-1+2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}+1)^2$ ва $x-2\sqrt{x-1}=x-1-2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}-1)^2$ эканини эътиборга олиб, берилган тенгламанинг чап қисмини шакл алмаштириб, қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=2\ (*)$$

(*) тенглама $x-1\geqslant 0$, яъни $x\geqslant 1$ шартда ечимга эга. $x=1$ да эса берилган тенглама тўғри сонли тенгликка айланади, яъни $1+2\sqrt{1-1}+1-2\sqrt{1-1}=2\Leftrightarrow 2=2$. Демак, $x=1$ берилган тенгламанинг илдизи бўлади. Шунингдек, $x\geqslant 1$ шартда $\sqrt{x-1}+1>0$ бўлгани учун (*) тенгламани $\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|=2$, яъни $|\sqrt{x-1}-1|=1-\sqrt{x-1}\Leftrightarrow|\sqrt{x-1}-1|=-(\sqrt{x-1}-1)$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенглик модул белгиси остидаги ифода номусбат ва фақат номусбат бўлгандагина бажарилади (яъни $|y|+y=0\Leftrightarrow y\leqslant 0$).

Демак, $\sqrt{x-1}-1\leqslant 0$, бундан $\sqrt{x-1}\leqslant 1$, яъни $x-1\leqslant 1\Leftrightarrow x\leqslant 2$ келиб чиқади. $x=2$ да ҳам берилган тенглама сонли тенгликка айланади, шунинг учун у ҳам илдиз бўлади. Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасини эътиборга олсак, $\begin{cases}x\geqslant 1,\\x\leqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant 2$ келиб чиқади.

Демак, *жавоб*: [1; 2].

12-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt[4]{x+2}+\sqrt[4]{15-x}=3$.

Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\15-x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -2,\\x\leqslant 15\end{cases}\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 15.$$

Энди берилган тенгламанинг иккала қисмини тўртинчи даражага, қуйидаги формуладан фойдаланиб, кўтарамиз:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=a^4+4ab((a+b)^2-2ab)+6a^2b^2+b^4.$$

У ҳолда:

$$x+2+4\sqrt[4]{(x+2)(15-x)}((\sqrt[4]{x+2}+\sqrt[4]{15-x})^2-2\sqrt[4]{(x+2)(15-x)})+6(\sqrt[4]{(x+2)(15-x)})^2+15^2-x=81.$$

Бу тенгламадаги $(\sqrt[4]{x+2}+\sqrt[4]{15-x})$ ни 3 билан алмаштириб ва $y=\sqrt[4]{(x+2)(15-x)}$ белгилашни киритиб, $y^2-18y+32=0$ тенгламани ҳосил қиламиз, унинг илдизлари $y=2$ ва $y=16$ дан иборат.

Энди қуйидаги иккита тенгламани ечамиз:

1) $\sqrt[4]{(x+2)(15-x)}=2$, $(x+2)(15-x)=16$, $x^2-13x-14=0$, бундан $x_1=-1$ ва $x_2=14$. Бу топилган илдизларнинг ҳар иккаласи берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлгани учун тенгламанинг илдизлари бўлади.

2) $\sqrt[4]{(x+2)(15-x)}=16 \Leftrightarrow (x+2)(15-x)=2^{16} \Leftrightarrow x^2-13x+30-2^{16}=0$, бундан $x=\frac{13\pm\sqrt{169+2^{16}}}{2}\notin[-2;15$ бўлгани учун чет илдизлардир.

Жавоб: $\{-1;\ 14\}$.

13-мисол. Тенгламани ечинг:

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}-28=0\ (*)$$

Ечиш. 1-усул. $\frac{x+1}{x-3}\geqslant 0$ тенгсизликни ечиб, (*) тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз. яъни $x\leqslant-1$ ва $x>3$. Аниқланиш соҳасида қуйидагиларга эга бўламиз:

$$x>3 \text{ да } 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=3\sqrt{(x+1)(x-3)};$$

$$x\leqslant-1 \text{ да эса } 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-3\sqrt{(x+1)(x-3)}.$$

Шунинг учун (*) тенглама қуйидаги системалар бирлашмасига тенг кучли бўлади:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\leqslant-1,\\(x-3)(x+1)-3\sqrt{(x+1)(x-3)}-28=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x>3,\\(x-3)(x+1)+3\sqrt{(x-3)(x+1)}-28=0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$\sqrt{(x-3)(x+1)}=y\ (y\geqslant 0)$ бўлсин, у ҳолда $y^2-3y-28=(y-7)(y+4)$ ва $y^2+3y-28=(y+7)(y-4)$ эканини эътиборга олиб, юқоридаги бирлашмани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\leqslant-1,\\(\sqrt{(x-3)(x+1)}-7)(\sqrt{(x-3)(x+1)}+4)=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x>3,\\(\sqrt{(x-3)(x+1)}+7)(\sqrt{(x-3)(x+1)}-4)=0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасида $\sqrt{(x-3)(x+1)}+$ $+7>0$ ва $\sqrt{(x-3)(x+1)}+4>0$ эканини назарга олсак, охирги бирлашмадан қуйидагилар келиб чиқади:

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leqslant-1,\\ \sqrt{(x-3)(x+1)}=7\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ \sqrt{(x-3)(x+1)}=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leqslant-1,\\ (x-3(x+1)=49\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ (x-3)(x+1)=16\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leqslant-1,\\ x^2-2x-52=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ x^2-2x-19=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leqslant-1,\\ \left[\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{53}\\ x_2=1+\sqrt{53}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ \left[\begin{array}{l}x_3=1+2\sqrt{5}\\ x_4=1-2\sqrt{5}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2=1-\sqrt{53}\\ x_3=1+2\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

Шундай қилиб, (*) тенгламанинг барча илдизлари $1-\sqrt{53}$ ва $1+2\sqrt{5}$ сонлардан иборат экан.

2-усул. Бизга маълумки, (*) тенгламанинг аниқланиш соҳаси: $x\leqslant-1$ ва $x>3$. $y=(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$ белгилашни киритамиз, у ҳолда $y^2=(x-3)(x+1)$ бўлади, натижада (*) тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$y^2+3y-28=0.\ (**)$$

$y^2+3y-28=(y+7)(y-4)$ бўлганлигидан, (**) тенглама иккита илдизга эга: $y_1=-7$ ва $y_2=4$. Демак, (*) тенглама қуйидаги тенгламалар бирлашмасига тенг кучли:

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-7,\quad (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=4.$$

$\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$ ифода номанфий; тенгламанинг аниқланиш соҳасида қуйидагиларга эга бўламиз: $x>3$ да $x-3>0$; $x\leqslant-1$ да эса $x-3\leqslant0$. Шунинг учун (*) тенглама ўзининг аниқланиш соҳасида қуйидаги иккита системага тенг кучли:

$$\begin{cases}x\leqslant-1,\\ x^2-2x-52=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}x>3,\\ x^2-2x-19=0.\end{cases}$$

Ҳосил бўлган системалар бирлашмасини ечиб, (*) тенгламанинг барча илдизлари мажмуасини, яъни $x=1-\sqrt{53}$ ва $x=1+2\sqrt{5}$ ларни топамиз.

14-мисол. Тенгламани ечинг: $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=\frac{2-x}{2+x}$.

Ечиш. $\begin{cases} 2-x\geqslant 0, \\ 2+x>0 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечиб, берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасини топамиз, яъни: $-2<x\leqslant 2$.

$\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=y$ деб, $y^2=\frac{2-x}{2+x}$ ни ҳосил қиламиз ва натижада берилган тенгламани $y=y^2$ кўринишда ёзамиз, бу тенгламанинг илдизлари $y_1=0$ ва $y_2=1$. Шундай қилиб, $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=0$ ва $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=1$, яъни $\sqrt{2-x}=0$ ва $\sqrt{2-x}=\sqrt{2+x}$ тенгламалар натижа тенгламалардир. Уларнинг илдизлари $x=2$ ва $x=0$. Топилган ҳар иккала илдиз $-2<x\leqslant 2$ оралиққа тегишли; 0 ва 2 сонларини берилган тенгламага қўйиб, уларнинг ҳар иккаласи берилган тенгламанинг илдизи эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб: {0; 2}.

Эслатма. Айрим шакл алмаштиришлар шунга олиб келадики, ҳосил бўлган тенгламанинг аниқланиш соҳаси берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасининг бир қисмини қамраб олмаслиги мумкин ва шу билан бир қаторда берилган тенгламанинг аниқланиш соҳасига кирмайдиган қисмга эга бўлиши мумкин. Бундай шакл алмаштиришларни амалга ошириб, илдизлари ичида берилган тенгламанинг айрим илдизи бўлмаган тенгламани ҳосил қилиш мумкин, шунингдек, ҳосил бўлган тенгламанинг илдизлари ичида берилган тенглама учун чет илдизлар ҳам бўлиши мумкин.

Масалан, $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\frac{2}{x}$ (*) тенгламани пропорция деб қарасак ва пропорциянинг $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b+a}=\frac{c-d}{c+d}$ хоссасидан фойдаланиб, уни

$$\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=\frac{2-x}{2+x} \quad (**)$$

тенглама билан алмаштирсак, у ҳолда (**) тенгламанинг $x=2$ ва $x=0$ илдизларидан бири (юқорида муҳокама қилинган мисолга қаранг) $x=0$ (*) тенглама учун чет илдиз бўлади, (*) тенгламанинг учинчи $x=-2$ илдизи эса (**) тенгламанинг илдизлари ичида мавжуд эмас.

Илдизларнинг йўқолиши ва чет илдизлар пайдо бўлишининг олдини олиш мақсадида тенгламани тенг кучли ўтиш усули ёрдамида ечиш, яъни тенгламани унга тенг кучли тенгламага фақат аниқланиш соҳасида ечиш мақсадга мувофиқдир. Агар аниқланиш соҳасида тенглама ёки унинг ҳадлари учун шакл алмаштириш бажара олинмаса, у ҳолда аниқланиш соҳасини қисмларга бўлиш ва шу қисмларнинг ҳар бирида берилган тенгламани ечиш лозим бўлади. Сўнгра, тенгламанинг аниқланиш соҳасининг қисмларида ҳосил бўлган тенглама илдизларини бирлаштириб, берилган тенгламанинг барча илдизлари мажмуасини ҳосил қиламиз.

Масалан, (*) тенгламани тенг кучли ўтиш усули ёрдамида ечамиз. (*) тенгламанинг аниқланиш соҳаси x нинг $-2 \leqslant x < 0$ ва $0 < x \leqslant 2$ оралиқлардан олинган барча қийматлари мажмуасидан иборат. (*) тенгламанинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлган $x = -2$ ва $x = 2$ ларни бевосита ўрнига қўйиш орқали бу сонлар унинг илдизлари эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Аниқланиш соҳасининг қолган $-2 < x < 0$ ва $0 < x < 2$ оралиқларида (*) тенглама (**) тенгламага тенг кучли. (**) тенгламанинг $x = 0$ ва $x = 2$ илдизлари $-2 < x < 0$ ва $0 < x < 2$ оралиқларнинг ҳеч бирига тегишли эмас (яъни ётмайди); шунинг учун аниқланиш соҳасининг кўрилаётган қисмларида (*) тенглама ечимга эга эмас. Шундай қилиб, (*) тенгламанинг барча илдизлари мажмуаси $x = -2$ ва $x = 2$ сонлардан иборат экан.

15-мисол. Тенгламани ечинг: $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}$.

Ечиш. Тенгламанинг илдизлари $x > 0$ ва $x^2 - 1 > 0$ ни, яъни $x > 1$ шартни қаноатлантириши керак. Шу шартда тенгламанинг ҳар иккала қисмини квадратга кўтариб,

$$x^2 + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1225}{144} \text{ ёки } \frac{x^4}{x^2-1} + 2\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1225}{144}$$

тенгламани ҳосил қиламиз ва бу тенглама берилганига тенг кучли. Аммо бу тенглама $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ га нисбатан квадрат тенглама. Шунинг учун $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = y \; (y > 0)$ белгилашни киритамиз, у ҳолда $y^2 + 2y + 1 = \frac{1225}{144} + 1 \Leftrightarrow (y+1)^2 = \frac{1369}{144} \Leftrightarrow y + 1 = \pm\frac{37}{12} \Leftrightarrow y = -1 \pm \frac{37}{12}$, $y_1 = \frac{25}{12}$ ва $y_2 = -\frac{49}{12}$ келиб чиқади. $y_2 = -\frac{49}{12} < 0$ бўлгани учун у чет илдиз.

Энди x га қайтамиз:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{25}{12} \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-1} = \frac{625}{144} \Leftrightarrow 144x^4 - 625x^2 + 625 = 0.$$

Бу тенглама x га нисбатан биквадрат тенглама, шунинг учун $x^2 = t > 0$ белгилашни киритамиз, у ҳолда $144t^2 - 625t + 625 = 0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади, уни ечиб, $t_1 = \frac{25}{9}$ ва $t_2 = \frac{25}{16}$ ларни топамиз. Яна x га қайтамиз ва қуйидагиларга эга бўламиз:

$$x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{5}{3};\quad x^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow x_{3,4} = \pm\frac{5}{4}.$$

$x > 1$ шартни назарга олиб, $x = 5/3$ ва $x = 5/4$ натижаларга эга бўламиз.

16-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt[n]{(x+1)^2} + 3\sqrt[n]{(x-1)^2} = 4\sqrt[n]{x^2-1}$.

Ечиш. Бу кўринишдаги тенгламаларни ечиш учун дастлаб ҳамма ҳадларни чап томонга ўтказамиз, сўнгра $x = \pm 1$ берилган тенгламанинг илдизлари бўла олмаслигини эътиборга олиб, унинг ҳамма ҳадларини $\sqrt[n]{(x-1)^2}$ (ёки $\sqrt[n]{(x+1)^2}$) га бўламиз ва натижада берилган тенгламага тенг кучли $\left(\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2 - 4\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} + 3 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Янги $y = \sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}$ ўзгарувчини киритамиз, у ҳолда берилган тенгламани $y^2 - 4y + 3 = 0$ кўринишда ёзиш мумкин, бундан: $y = 3$ ёки $y = 1$.

Энди x га қайтамиз:

а) $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = 3$; $\frac{x+1}{x-1} = 3^n$; $x + 1 = 3^n \cdot x - 3^n$;

$x = \frac{3^n+1}{3^n-1}$.

б) $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = 1$; $\frac{x+1}{x-1} = 1$; $x + 1 \neq x - 1$. Демак, бу ҳолда тенгламанинг ечими йўқ экан.

Жавоб: $\left\{\frac{3^n+1}{3^n-1}\right\}$.

Эслатма. Агар тенгламанинг ҳамма ҳадларини $\sqrt[n]{x^2-1}$ га бўлсак, $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} + 3\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}} - 4 = 0$ келиб чиқади. Аммо бу ҳолда $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ белгилашни киритсак, натижада $y + \frac{3}{y} - 4 = 0$ тенгламага эга бўламиз. Лекин бу тенгламани ечиш матнда келтирилганига қараганда бироз кўпроқ мулоҳазани талаб қилгани учун маъқул эмас.

17-мисол. Тенгламани ечинг: $27^x - 7\sqrt[3]{7\cdot 3^x + 6} = 6$.

Ечиш. **1-усул.** $3^x = t\,(t > 0)$ белгилашни киритамиз ва берилган тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз: $\frac{t^3-6}{7}=$ $=\sqrt[3]{7t+6}$.

$y=f(t)=(t^3-6)/7$ функция ўсувчи, шу сабабли t ни y орқали (яъни $y=\sqrt[3]{7t+6}$) ифодаласак, у ҳолда ҳосил бўлган тенгламани $f(t)=g(t)$ кўринишда ёзиш мумкин бўлади, бу ерда $g t$ га нисбатан тескари функция. Аммо ўсувчи функция ва унга тескари бўлган функция графиклари фақат биринчи ва учинчи координата бурчакларининг биссектрисаларида кесишиши мумкин, у ҳолда

$$\begin{cases} t>0, \\ f(t)=g(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ f(t)=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ t^3-6=7t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ t^3-7t-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ (t-3)(t^2+3t+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2 \\ t=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=3.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ягона илдизи $x=$ $=1$ бўлади.

2-усул. $y=3^x\ (y>0)$ ва $z=\sqrt[3]{7y+6}\ (z>0)$ белгилашларни киритамиз, у ҳолда $y^3=7z+6$, $z^3=7y+6$, бундан $y^3-z^3=7(z-y) \Leftrightarrow (y-z)(y^2+yz+z^2)=-7(y-$ $-z) \Leftrightarrow y=z$ ёки $y^2+yz+z^2=-7$. Аммо исталган y ва z ларда $y^2+yz+z^2>0$. Шунинг учун $y^2+yz+z^2\neq-7$. $y=\sqrt[3]{7y+6}$ ёки $y^3=7y+6$ дан $(y-3)(y^2+3y+2)=0$, бундан эса $y=3$ келиб чиқади. Демак, $x=1$.

3-усул. Берилган тенгламанинг иккала қисмини $3^x>0$ га бўламиз, у ҳолда $9^x=\frac{6}{3^x}+7\sqrt[3]{\frac{7}{9^x}+\frac{6}{27^x}}$ бўлади. Бу тенгликнинг чап қисми ўсувчи, ўнг қисми эса камаювчи функциядан иборат. Шу сабабли тенглама биттадан ортиқ илдизга эга бўлмайди. Танлаш йўли билан $x=1$ ни топиш қийин эмас.

18-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

Ечиш. $\sqrt{a+x}=y$ белгилашни киритамиз. $x\geqslant0$, $y\geqslant0$ шартларда берилган тенглама $\begin{cases} \sqrt{a-y}=x, \\ \sqrt{a+x}=y \end{cases}$ га, яъни

$\begin{cases} a - y = x^2, \\ a + x = y^2 \end{cases}$ системага тенг кучли. Иккинчи тенгламадан биринчини ҳадма-ҳад айириб, $x + y = (y - x)(y + x)$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $x = -y$ ёки $y - x = 1$, бироқ $x = -y$ фақат ва фақат $x = y = a = 0$ бўлгандагина бажарилади, чунки $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Агар $y - x = 1$ бўлса, $\sqrt{a + x} = x + 1$ бўлиб, бундан $x^2 + x + 1 - a = 0$, демак, $x = (-1 + \sqrt{4a - 3})/2$ ёки $x = ((-1 - \sqrt{4a-3})/2) < 0$. Бироқ $x \geqslant 0$, шунинг учун кейинги илдизни ташлаб юборамиз ва $a \geqslant 1$ (яъни $\sqrt{4a} - 3 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 1$) да $x = (\sqrt{4a-3} - 1)/2$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб: Агар $a = 0$ бўлса, $x = 0$ бўлади; агар $a \geqslant 1$ бўлса, $x = (\sqrt{4a - 3} - 1)/2$ бўлади; a нинг бошқа қийматларида тенглама ечимга эга эмас.

19-мисол. Тенгламани ечинг: $x^2 - \sqrt{a - x} = a$.

Ечиш. $\sqrt{a - x} = y\,(y \geqslant 0)$ белгилашни киритамиз ва $y - x = y^2$ эканини назарга олиб, x ва y ларни аниқлаш учун қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x^2 - y = a, \\ y^2 + x = a. \end{cases}$$

Системанинг биринчи тенгламасидан иккинчисини айириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x^2 - y^2 - y - x = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) - (y + x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y, \\ x - 1 = y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{a - x} \\ x - 1 = \sqrt{a + x}. \end{array}\right.$$

а) $x = -\sqrt{a - x}$ (*) тенгламани ечамиз. Бу тенглама қуйидаги аралаш системага тенг кучли:

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \\ x^2 = a - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2 + x - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x = (-1 \pm \sqrt{4a + 1})/2. \end{cases}$$

$x = -(1 + \sqrt{4a + 1})/2$ илдиз (*) тенгламани барча $4a + 1 \geqslant 0$ ларда, яъни $a \geqslant -1/4$ қийматларда қаноатлантиради.

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x = (-1+\sqrt{4a+1})/2 \end{cases}$$ аралаш система фақат $-1/4 \leqslant a \leqslant 0$ шартда ечимга эга, шунинг учун $x = (-1 + \sqrt{4a+1})/2$ илдиз ҳам (*) тенгламани $-1/4 \leqslant a \leqslant 0$ шартда ва фақат шу шартдагина қаноатлантиради. $a < -1/4$ да тенглама ечимга эга эмас.

б) Энди $x - 1 = \sqrt{a-x}$ (**) тенгламани ечамиз. Бу тенглама аниқланиш соҳасида ($a - x \geqslant 0$, яъни $a \geqslant x$) қуйидаги аралаш системага тенг кучли:

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ a-x = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2-x+1-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x = (1 \pm \sqrt{4a-3})/2. \end{cases}$$

$x = (1+\sqrt{4a-3})/2$ илдиз (**) тенгламани барча $4a - 3 \geqslant 1$ ларда, яъни $a \geqslant 1$ қийматларда қаноатлантиради, чунки акс ҳолда $((1+\sqrt{4a-3})/2) < 1$ бўлади, аммо бу $x \geqslant 1$ шартга зид. $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x = (1-\sqrt{4a-3})/2 \end{cases}$ аралаш система a нинг ҳеч бир қийматида бажарилмайди, чунки $\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2} < 1$, бу $x \geqslant 1$ шартга зид.

Жавоб: Агар $a < -1/4$ бўлса, тенглама ечимга эга эмас; агар $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$ бўлса, $x = -(1 + \sqrt{4a+1})/2$ бўлади; агар $a \geqslant -1/4$ бўлса, $x = (-1+\sqrt{4a+1})/2$ бўлади; агар $a \geqslant 1$ бўлса, $x = (1+\sqrt{4a-3})/2$ бўлади.

20-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}} + \sqrt{x-\frac{7}{x^2}} = x.$

Ечиш. $\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}} = u \ (u \geqslant 0)$, $\sqrt{x-\frac{7}{x^2}} = v \ (v \geqslant 0)$ белгилашларни киритамиз, у ҳолда $\begin{cases} u^2-v^2 = x^2-x, \\ u+v=x \end{cases}$ бўлади. Ўрнига қўйиш натижасида системанинг биринчи тенгламаси қуйидаги кўринишга келади: $x(u-v) = x^2 - x$. $x \neq 0$ бўлганлигидан u ва v лар қуйидаги системани қаноатлантиради:

$$\begin{cases} u - v = x - 1, \\ u + v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x - \frac{1}{2}, \\ v = 1/2. \end{cases}$$

Охирги системадаги тенгликлардан бирини, қийин бўлмаган шакл алмаштиришлардан сўнг, $4x^3 - x^2 - 28 = 0$ тенгламага келтирамиз. $x = 2$ бу тенгламанинг илдизи эканини кўриш қийин эмас, шуни ҳисобга олиб, тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$4x^3 - x^2 - 28 = 4x^3 - 8x^2 + 7x^2 - 28 =$$
$$= (x - 2)(x^2 + 7x + 14),$$

бундан $x = 2$ ягона илдиз экани кўриниб турибди. Текширишни бажариб, бу илдиз дастлабки тенгламани ҳам қаноатлантиришига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб: {2}.

21-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x + 1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 - 5x - 3} - 16.$$

Ечиш. $\sqrt{2x^2 - 5x - 3} = \sqrt{(2x - 3)(x - 1)} = \sqrt{2x - 3} \times \sqrt{x - 1}$ эканини кўриш қийин эмас. Янги $\sqrt{2x - 3} = a (a \geqslant 0)$, $\sqrt{x - 1} = b (b \geqslant 0)$ номаълумларни киритамиз. У ҳолда берилган тенглама $a + b = 3x - 16 + 2ab$ кўринишни олади, энди $3x$ қўшилувчини нима қилиш керак, деган муаммо туғилади, яъни $3x$ ни a ва b лар орқали қандай ифодалаш масаласини ҳал қилиш лозим бўлади. $a^2 = 2x + 3$, $b^2 = x + 1$ эканини кўриш қийин эмас. Шундай қилиб, $a^2 + b^2 = 3x + 4$, яъни $3x = a^2 + b^2 - 4$. Энди $a + b = (a^2 + b^2 - 4) - 16 + 2ab$ тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин: $(a + b)^2 - (a + b) - 20 = 0$. Яна бир янги $a + b = y$ номаълумни киритамиз ва $y^2 - y - 20 = 0$; $y_1 = 5$, $y_2 = -4$ ларга эга бўламиз.

Дастлабки ўзгарувчига қайтиб, қуйидагиларни ёзамиз:

$a + b = 5$; $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 5$, бундан: $x = 3$;

$a + b = -4$; $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = -4$, бу тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: {3}.

22-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x + 1} - \sqrt{\frac{x - 1}{x}} - 1 = 0$.

Ечиш. $\sqrt{x + 1} = u \; (u \geqslant 0)$, $\sqrt{\frac{x - 1}{x}} = v \; (v \geqslant 0) \quad (*)$

алмаштиришлар бажарамиз, у ҳолда $u - v = 1$ бўлади. (*) системадан x ни йўқотамиз:

$$\begin{cases} x + 1 = u^2, \\ \dfrac{x-1}{x} = v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u^2 - 1, \\ x = \dfrac{1}{1 - v^2} \end{cases}$$

бўлганлигидан, $(u^2 - 1)(v^2 - 1) = -1$ келиб чиқади. Бинобарин, u ва v лар

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u^2v^2 - u^2 - v^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

системани қаноатлантиради. Иккинчи тенгламани

$$(uv)^2 - (u - v)^2 - 2uv + 2 = 0$$

кўринишда ёзиб оламиз. $u - v = 1$ бўлганлигидан $(uv)^2 - 2uv + 1 = 0$, $(uv - 1)^2 = 0$ тенгламага келамиз, бундан $uv = 1$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $\begin{cases} u - v = 1, \\ uv = 1 \end{cases}$ системага келамиз. $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ шартларни назарга олиб, $u = (1 + \sqrt{5})/2$; $v = (-1 + \sqrt{5})/2$ ларга эга бўламиз. Энди x ни топамиз:

$$x = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{6 + 2\sqrt{5} - 4}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Жавоб: $\left\{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Эслатма. Бу мисолда (*) системадаги ўзгарувчи x ни йўқотиш учун уларни танлашга тўғри келди. Янги номаълумларни киритиш ёрдами билан ҳар доим ҳам ҳосил бўлган системадан x ўзгарувчини йўқотишга эришиб бўлмайди. Шунга қарамасдан ҳосил бўлган система берилган тенгламани ечишга қараганда кўпгина имкониятга (яъни қулайликка) эга бўлади. Буни навбатдаги мисолда кўрамиз.

23-мисол. $\sqrt[3]{x^3 - \dfrac{14}{x}} + \sqrt[3]{\dfrac{14}{x} + 3x - 3x^2} = x$ тенгламанинг мусбат илдизларини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап қисмидаги қўшилувчиларни мос равишда $y = \sqrt[3]{x^3 - \dfrac{14}{x}}$ $\left(y^3 = x^3 - \dfrac{14}{x}\right)$ ва

$z = \sqrt[3]{\frac{14}{x} + 3x - 3x^2}$ $\left(z^3 = \frac{14}{x} + 3x - 3x^2\right)$ орқали белгилаб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y + z = x,\ y^3 + z^3 = x^3 - 3x^2 + 3x.$$

Иккинчи томондан, $(y+z)^3 = x^3 \Leftrightarrow y^3 + 3yz(y+z) + z^3 = x^3$, бундан $3yz(y+z) = 3x(x^3 - (y^3 + z^3)) \Leftrightarrow 3yz(y+z) = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x) \Leftrightarrow 3yz(y+z) = 3x(x-1)$ га эга бўламиз. $y + z = x$ ва $x \neq 0$ эканини назарга олсак, $3xyz = 3x(x-1)$, бундан эса $yz = x - 1$ келиб чиқади. $y + z = x$ ва $yz = x - 1$ эканини назарга олиб, y ва z ларни қуйидаги квадрат тенгламадан топиш мумкин бўлади:

$$t^2 - xt + x - 1 = 0,$$

бундан $\begin{cases} y = 1, \\ z = x - 1 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} y = x - 1, \\ z = 1. \end{cases}$

$y = 1$ учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\sqrt[3]{x^3 - \frac{14}{x}} = 1;\ x^3 - \frac{14}{x} = 1;\ \frac{x^4 - 14}{x} = 1;\ x^4 - 14 = x;$$

$$x^4 = x + 14.$$

Охирги тенгламанинг ҳар иккала қисмида турган функциялар ўсувчи, шунинг учун у ягона $x = 2$ илдизга эга бўлади ($2^4 = 2 + 14$, $16 = 16$ — тўғри тенглик).

$z = 1$ учун $\sqrt[3]{\frac{14}{x} + 3x - 3x^2} = 1$, яъни $3x^3 - 3x^2 + x - 14 = 0$ тенгламага эга бўламиз, бу ҳам ягона $x = 2$ мусбат илдизга эга.

Шундай қилиб, берилган тенглама ягона $x = 2$ мусбат илдизга эга экан.

24-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} - 1 = 0.$$

Ечиш. $\sqrt[3]{2 - x} = u$, $\sqrt{x - 1} = v \geqslant 0$ номаълумларни киритамиз, у ҳолда $\begin{cases} u^3 + v^2 = 1, \\ u + v = 1 \end{cases}$ (1) бўлади ва натижада $u^3 + v^2 - 2u = 0 \Leftrightarrow u(u^2 + u - 2) = 0 \Leftrightarrow u(u + 2)(u - 1) = 0$, бундан эса $u \in \{0;\ 1;\ -2\}$ келиб чиқади.

Демак, (1) система 3 та илдизга эга: (0; 1), (1; 0) ва (—2; 3).

Жавоб: {1; 2; 10}.

x нинг қийматларини топиш учун (1) системадаги ҳар иккала муносабатни кўриб чиқишга ҳожат ҳам йўқ. Аммо бундай ҳолда ечимни якунлаш учун текширишни бажариш албатта лозим.

Умуман олганда тенгламадан системага ўтганда тенглама таркибига кирган ўзгарувчилар орасида турли боғланишларнинг алоқаси бевосита кўринмаслиги, ҳосил бўлган система мураккаблиги, нимани янги номаълумлар деб қабул қилиш ва шунга ўхшаш каби айрим қийинчиликлар пайдо бўлиши мумкин.

25-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1$.

Эслатма. Одатда бундай кўринишдаги тенгламаларни икки марта квадратга кўтариш билан ечилади, сўнгра квадратга кўтариш натижасида ҳосил бўлган тенглама илдизлари ичидан берилган тенгламанинг илдизларини танлаб олиш лозим бўлади, аммо тенгламада параметр қатнашганда бу ишни амалга ошириш анча қийин бўлади. Шу сабабли ишни осонлаштириш томонини ўйлаш лозим бўлади.

Ечиш. Қуйидаги янги номаълумларни киритамиз:

$$u=\sqrt{x+2}\geqslant 0,\quad v=\sqrt{x-a+2}\geqslant 0.$$

Номаълум u ва v лар $u^2-v^2=a$ тенглик билан боғланган бўлиб, берилган тенглама $u-v=1$ кўринишни олади.

Шундай қилиб, биз берилган тенгламадан $\begin{cases} u-v=1, \\ u^2-v^2=a \end{cases}$ (*) системага келамиз, бу эса осонгина ечилади.

$$(*)\ (\Leftrightarrow)\ \begin{cases} u-v=1, \\ (u+v)(u-v)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1, \\ u+v=a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=(a+1)/2, \\ v=(a-1)/2. \end{cases}$$

Шундай қилиб,

$$\begin{cases} \sqrt{x+2}=((a+1)/2)\geqslant 0, \\ \sqrt{x-a+2}=((a-1)/2)\geqslant 0 \end{cases}$$

га эга бўламиз, бундан $a\geqslant 1$ бўлганда $x=\frac{(a+1)^2}{4}-2$ келиб чиқади, аммо $a<1$ бўлганда тенглама ечимга эга бўлмайди.

26-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-x}}}=x.$$

Ечиш: $y=\sqrt{a-x}\geqslant 0$, $z=\sqrt{a-y}\geqslant 0$ деб белгилаймиз, у ҳолда тенглама $\sqrt{a - z} = x$ кўринишга келади ва қуйидаги системага эга бўламиз:

$$a - x = y^2,\quad a - y = z^2,\quad a - z = x^2,$$

бундан $y^2 - z^2 = y - x$, $z^2 - x^2 = z - y$, $x^2 - y^2 = x - z$ келиб чиқади. Бу тенгликларни кўпайтириб,

$$(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)(x^2 - y^2) = (y - x)(z - y)(x - z),$$

$$(x - y)(y - z)(z - x)((x + y)(y + z)(z + x) + 1) = 0$$

га эга бўламиз. x, y, $z \geqslant 0$ бўлганлигидан $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$ бўлади.

Энди $y = z \Rightarrow \sqrt{a - x} = \sqrt{a - y} \Rightarrow x = y$ ва $z = x \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{a - y} = \sqrt{a - z} \Rightarrow y = z$ эканини эътиборга оламиз. Шу сабабли $x = y$ ҳолни кўриб чиқиш етарли, яъни $x = \sqrt{a - x}$, $x^2 = a - x$, $x^2 + x - a = 0$. Сўнгги тенглама фақат $a \geqslant 0$ шартда номанфий илдизларга эга бўлади ва бундай илдиз фақат биттадир: $x = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2$. Шундай қилиб, берилган тенглама $a \geqslant 0$ шартда ягона $x = (-1 + \sqrt{4a + 1})/2$ илдизга эга бўлади, $a < 0$ бўлганда эса илдизга эга бўлмайди.

27-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[3]{(29 - x)^2} + \sqrt[3]{(x - 1)^2} = 7 + \sqrt[3]{(29 - x)(x - 1)}.$$

Ечиш. Иккита янги номаълум киритамиз:

$$\sqrt[3]{29 - x} = y,\quad \sqrt[3]{x - 1} = z.$$

У ҳолда берилган тенгламани $y^2 - yz + z^2 = 7$ кўринишда ёзиб олиш мумкин. $y^3 = 29 - x$ ва $z^3 = x - 1$ эканини эътиборга оламиз, демак, $y^3 + z^3 = 28$. Шундай қилиб, янги y ва z номаълумларга нисбатан биз икки тенгламали система ҳосил қиламиз, яъни

$$\begin{cases} y^2 - yz + z^2 = 7, \\ y^3 + z^3 = 28. \end{cases}$$

Бу система нисбатан осон (масалан, бўлиш усули билан) ечилади ва икки жуфт илдизга эга бўлади, яъни:

$$\begin{cases} y_1 = 3, \\ z_1 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 1, \\ z_2 = 3. \end{cases}$$

x ўзгарувчига қайтиб,

$$\begin{cases} \sqrt[3]{29 - x} = 3, \\ \sqrt[3]{x - 1} = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt[3]{29 - x} = 1, \\ \sqrt[3]{x - 1} = 3 \end{cases}$$

ларга эга бўламиз. Биринчи системадан $x_1 = 2$ ни, иккинчисидан эса $x_2 = 28$ ни топамиз.

Жавоб: $\{2;\ 28\}$.

VII тур. Сунъий усуллар ёрдамида ечиладиган иррационал тенгламаларга доир мисоллар.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$$

Ечиш. $2x^2 \pm 3x + 5 = 2\left(x^2 \pm \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(\left(x \pm \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right) > 0$ бўлгани сабабли, берилган тенглама $x \in R$ да аниқланган. Мусбат сонлардан чиқарилган арифметик илдизларнинг йиғиндиси албатта мусбат бўлгани учун берилган тенглама чап қисмининг қиймати мусбат, шу сабабли ўнг қисмининг қиймати ҳам мусбат бўлиши, яъни изланаётган ечим $x > 0$ шартни қаноатлантириши лозим.

$(2x^2+3x+5)-(2x^2-3x+5)=6x$ айниятни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5})(\sqrt{2x^2+3x+5}-$$
$$-\sqrt{2x^2-3x+5})=6x.$$

Бу тенглама ечимга эга деб ва дастлабки берилишини эътиборга олиб, уни қуйидагича ёзамиз:

$$3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})=6x. \tag{*}$$

$x = 0$ берилган тенгламанинг илдизи бўлмагани учун (*) тенгламанинг иккала қисмини $3x$ га бўламиз ва натижада

$$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2 \tag{**}$$

келиб чиқади. (**) тенгламани берилган тенглама билан қўшиб, $2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$ тенгламани ҳосил қиламиз. Иррационалликдан қутқарилгандан сўнг $x^2-16=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x+4)(x-4)=0$ тенгламага келинади, бундан эса $x_1 = -4$ ва $x_2 = 4$ келиб чиқади. $x > 0$ шартни эътиборга олиб, фақат $x = 4$ берилган тенгламанинг илдизи эканини аниқлаймиз.

Жавоб: $\{4\}$.

Эслатма. $\sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{ax^2+bx+d} = e$ кўринишдаги тенгламаларни қуйидаги усул билан ечиш қулай.

Берилган тенгламага қўшма бўлган тенгламанинг ўнг қисмини t ҳарфи билан белгилаб, қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{ax^2+bx+d} = e,$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} \mp \sqrt{ax^2+bx+d} = t. \qquad (*)$$

Ёзилган тенгламаларнинг чап ва ўнг қисмларини кўпайтирамиз:

$$(\sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{ax^2+bx+d})(\sqrt{ax^2+bx+c} \mp \sqrt{ax^2+bx+d}) = et \text{ ёки}$$
$$ax^2+bx+c-ax^2-bx-d=et,$$

бундан

$$t=\frac{c-d}{e},$$

t нинг бу қийматини (*) га қўйиб ва уларни ҳадма-ҳад қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2\sqrt{ax^2+bx+c}=e+\frac{c-d}{e} \text{ ва ҳ.к.}$$

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$$

Ечиш. Бу тенгламани эслатмада келтирилган усул асосида ишлаймиз:

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1,$$
$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=t.$$

Буларни ҳадма-ҳад кўпайтириб, $t=7$ ни топамиз. $t=7$ ни ўрнига қўямиз, сўнгра уларни ҳадма-ҳад қўшиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$2\sqrt{3x^2+5x+8}=8$; $3x^2+5x+8=16$; $3x^2+5x-8=0$. Бундан: $x_1=-8/3$, $x_2=1$.

Жавоб: {—8/3; 1}.

3-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

Ечиш. $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-7}=y$ бўлсин. $e=2$, $c=9$ ва $d=-7$ эканини эътиборга олсак, $y=(9-(-7))/2=$ $=8$ натижага келамиз. $y=8$ ни ўрнига қўйиб, $\sqrt{x^2+9}+$ $+\sqrt{x^2-7}=8$ тенгламани ҳосил қиламиз ва буни берилган тенглама билан ҳадма-ҳад қўшиб, қуйидагиларга эга бўламиз: $2\sqrt{x^2+9}=10$; $\sqrt{x^2+9}=5$; $x^2+9=25$; $x^2=16$; $x=\pm 4$. Ҳар иккала илдиз берилган тенгламани қаноатлантиргани учун изланаётган илдиз бўлади.

Жавоб: {—4; 4}.

4-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$.

Ечиш. $\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}=y$ бўлсин. Юқоридаги эслатмада келтириб чиқарилган формуладан илдиз остидаги ифодалар биринчи даражали, яъни чизиқли бўлганда ҳам фойдаланиш мумкин. $e=4, c=2$ ва $d=-2$, демак, $y=(2-(-2))/4=1$. $y=1$ қийматни ўрнига қўйсак, $\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}=1$ бўлади. Буни берилган тенглама билан ҳадма-ҳад қўшамиз ва натижада $\sqrt{4x+2}=5/2$, $4x+2=25/4$, $x=17/16$ келиб чиқади.

Текшириш натижасида у берилган тенгламанинг илдизи эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\{17/16\}$.

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2.$$

Ечиш. Коши тенгсизлигига кўра:

$$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{(x^2+x-1)\cdot 1}\leqslant\frac{(x^2+x-1)+1}{2}=$$
$$=\frac{x^2+x}{2}, \qquad (1)$$

$$\sqrt{x-x^2+1}=\sqrt{(x-x^2+1)\cdot 1}\leqslant\frac{(x-x^2+1)+1}{2}=$$
$$=\frac{x-x^2+2}{2}. \qquad (2)$$

(1) ва (2) тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшсак,

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\leqslant x+1$$

келиб чиқади. Демак, берилган тенгламанинг чап қисми $(x+1)$ дан катта эмас экан. Шундай қилиб, берилган тенгламани ечиш ўрнига $x^2-x+2\leqslant x+1$ тенгсизликни ечсак ҳам бўлади. Бундан $(x-1)^2\leqslant 0$, яъни $x=1$ келиб чиқади. Бу қиймат берилган тенгламанинг ягона илдизидир.

Жавоб: $\{1\}$.

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=3.$$

Ечиш. **1-усул.** Коши тенгсизлиги ёрдамида бир неча таққослашларни амалга оширамиз:

$$\sqrt[4]{1-x^2}=\sqrt[4]{(1+x)(1-x)}\leqslant\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2},$$

$$\sqrt[4]{1-x}=\sqrt{1\cdot\sqrt{1-x}}\leqslant\frac{1+\sqrt{1-x}}{2},$$

$$\sqrt[4]{1+x}=\sqrt{1\cdot\sqrt{1+x}}\leqslant\frac{1+\sqrt{1+x}}{2},$$

$$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}\leqslant 1+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\leqslant$$
$$\leqslant 1+\frac{1+(1-x)}{2}+\frac{1+(1+x)}{2}=3.$$

Ҳамма ҳолларда тенглик $x=0$ да бажарилади, у ҳолда шу соннинг ўзи берилган тенгламанинг ягона илдизи бўлади.

Жавоб: $\{0\}$.

2-усул. Агар тенгламанинг чап қисмидаги ҳар бир қўшилувчини тўртта сон учун Коши тенгсизлиги ёрдамида баҳоласак, у ҳолда зарур бўлган тенгсизлик бир йўла ҳосил бўлади, бунинг учун ҳар бир илдиз остидаги ифодага учта бирни кўпайтириш кифоядир, яъни

$$\sqrt[4]{1-x^2}=\sqrt[4]{1\cdot1\cdot1\cdot(1-x^2)}\leqslant\frac{1+1+1+(1-x^2)}{4}=\frac{4-x^2}{4},\quad(1)$$

$$\sqrt[4]{1-x}=\sqrt[4]{1\cdot1\cdot1\cdot(1-x)}\leqslant\frac{1+1+1+(1-x)}{4}=\frac{4-x}{4},\quad(2)$$

$$\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{1\cdot1\cdot1\cdot(1+x)}\leqslant\frac{1+1+1+(1+x)}{4}=\frac{4+x}{4}.\quad(3)$$

Ҳосил бўлган (1), (2) ва (3) тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшамиз, сўнгра тенгсизликнинг ўнг томонини кучайтирамиз:

$$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}\leqslant\frac{12-x^2}{4}=3-\frac{x^2}{4}\leqslant 3.$$

Шундай қилиб, тенглик $x=0$ да бажарилади.

7-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}(x-1)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x}=\sqrt{2xy},\\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.\end{cases}$$

Ечиш. Коши тенгсизлигига кўра

$$\sqrt{y-1}\leqslant\frac{(y-x)+1}{2}=\frac{y}{2}$$

ва

$$\sqrt{x-1}\leqslant\frac{(x-1)+1}{2}=\frac{x}{2}$$

бўлганлигидан, иккинчи тенгламанинг чап қисми xy дан катта бўла олмайди ва ўнг томонга фақат $y-1=1$ ва $x-1=1$ бўлганда тенг бўлади. (2; 2) жуфтлик биринчи тенгламанинг ҳам ечими эканини осонгина текшириб кўриш мумкин.

8-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2.$$

Ечиш. $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ мураккаб радикални A^2-B дан илдиз чиқариш мумкин бўлган ҳолда шакл алмаштириш учун

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

формуладан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

Шунинг учун

$$\sqrt{x\pm\sqrt{2x-1}}=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-2x+1}}{2}}\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-2x+1}}{2}}=\sqrt{\frac{x+|x-1|}{2}}\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{x-|x-1|}{2}}.$$

Буни берилган тенгламага қўямиз ва натижада берилган тенглама $\sqrt{\frac{x+|x-1|}{2}}+\sqrt{\frac{x-|x-1|}{2}}+\sqrt{\frac{x+|x-1|}{2}}-$ $-\sqrt{\frac{x-|x-1|}{2}}=2,\quad 2\sqrt{\frac{x+|x-1|}{2}}=2;\ x+|x-1|=2$ кўринишга эга бўлади. Аниқланиш соҳасини эътиборга олсак, $x=3/2$ келиб чиқади. Аниқланиш соҳаси: $x\in[1/2;\ \infty)$.

Жавоб: $\{3/2\}$.

9-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{12-6\sqrt{x-4}}+$ $+\sqrt{6-3\sqrt{8-x}}=\sqrt{6}$.

Ечиш. $\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-$ $-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$ формуладан фойдаланиб, тенгламанинг чап қисмидаги қўшилувчиларни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sqrt{12-6\sqrt{x-4}}=\sqrt{6}\sqrt{2-\sqrt{x-4}}=$$

$$=\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{8-x}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{8-x}}{2}}\right)=$$

$$=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{8-x}}-\sqrt{2-\sqrt{8-x}}}{\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{3}\left(\sqrt{2+\sqrt{8-x}}-\sqrt{2-\sqrt{8-x}}\right),\qquad (1)$$

$$\sqrt{6-3\sqrt{8-x}}=\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{8-x}}\,. \qquad (2)$$

(1) ва (2) ларни берилган тенгламага қўямиз ва қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{8-x}}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{8-x}}+$$
$$+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{8-x}}=\sqrt{6}\,;$$
$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{8-x}}=\sqrt{6}\,;\ \sqrt{2+\sqrt{8-x}}=\sqrt{2}\,;$$
$$2+\sqrt{8-x}=2;\ \sqrt{8-x}=0;\ x=8.$$

Текширишдан сўнг, $x=8$ ягона илдиз экани келиб чиқади.

Жавоб: $\{8\}$.

VIII тур. Тригонометрик алмаштиришлар ёрдамида ечиладиган иррационал тенгламаларга доир мисоллар.

Стандарт деб ҳисобланадиган бир қатор машқларни номаълумларни айрим махсус алмаштиришлар, яъни хусусан тригонометрик алмаштиришдан фойдаланиб ечиш етарлича осон бўлади. Бундай алмаштиришдан асосан қуйидаги икки ҳолатда фойдаланиш мақсадга мувофиқдир, яъни:

1) агар изланаётган илдиз [— 1; 1] мажмуага ёки унинг бир қисмига тегишли бўлса; 2) агар масала шартида қатнашаётган тенглама учраб турадиган маълум бир тригонометрик формулаларни «эслатса».

Юқорида қайд қилинганлар кўпинча рационал ва иррационал тенгламалар (тенгламалар системаси) га тегишли бўлиб, уларни оддий йўллар билан ечиш мушкул бўлганда баъзилари тригонометрик алмаштиришни киритилгандан кейин унча мураккаб бўлмаган тригонометрик тенгламалар (тенгламалар системаси) га келтирилади.

Энди бир неча характерли мисолларни кўриб чиқамиз.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}\,.$$

Ечиш. Барча x лар $1-x^2\geqslant 0$, яъни $|x|\leqslant 1$ тенгсизликни қаноатлантириши лозимлиги кўриниб турибди. $|x|\leqslant 1$ шартнинг мавжуд бўлиши $x=\cos t$ ёки $x=\sin t$ тригонометрик алмаштиришни қўллаш лозимлиги фикрини туғдиради. Масалан, $x=\cos t$, $t\in[0;\ \pi]$ бўлсин. У ҳолда t нинг $[0;\ \pi]$ оралиққа тегишли бўлиши шу билан тушунтириладики, бундан $\cos t$, ва демак, $x \in [-1;\ 1]$ оралиқдан олинган барча қийматларни қабул қилади ва фақат бир марта қабул қилади. Шундай қилиб, ҳар бир t га x нинг ягона қиймати мос келади, ва аксинча, яъни келтирилган юқоридаги алмаштириш x ва t ўзгарувчилар орасида ўзаро бир қийматли мосликни ўрнатади, бу эса ниҳоятда муҳимдир.

Шундай қилиб, $x = \cos t$, $t \in [0;\ \pi]$ бўлсин. У ҳолда берилган тенглама $\sqrt{1-\cos t} = 2\cos^2 t - 1 + 2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}$ ёки соддалаштиришлардан кейин $\sqrt{2}\,|\sin(t/2)| = \cos 2t + 2\cos t\,|\sin t|$ кўринишни олади. Мана шу қадамда $x = \cos t$, $t \in [0;\ \pi]$ алмаштиришнинг мақсадга мувофиқлиги ўз-ўзидан кўриниб қолади. $t \in [0;\ \pi]$ да $\sin t$ ва $\sin(t/2)$ номанфий, шунинг учун сўнгги тенгламадаги модул белгисини ташлаб юбориш мумкин.

Шундай қилиб, $\sin(t/2) = (1/\sqrt{2})\cos 2t + (1/\sqrt{2})\sin 2t$, $\sin(t/2) = \sin(2x + \pi/4)$ тенгламага келамиз, бу ўз навбатида қуйидаги бирлашмага тенг кучли, яъни:

$$\left[\begin{array}{l} 2t + \pi/4 = t/2 + 2\pi n, \quad n \in Z, \\ 2t + \pi/4 = \pi - t/2 + 2\pi k, \quad k \in Z, \end{array}\right.$$

бундан

$$\left[\begin{array}{l} t = -\pi/6 - 4\pi n/3, \quad n \in Z, \\ t = 3\pi/10 + 4\pi k/5, \quad k \in Z \end{array}\right.$$

келиб чиқади.

Энди t нинг топилган қийматларидан $[0;\ \pi]$ оралиққа тегишлиларини ажратиб олиш унча қийин эмас. Бундай қиймат фақат $t = 3\pi/10$ дан иборат. У ҳолда $x = \cos(3\pi/10)$ бўлади.

Жавоб: $x = \cos(3\pi/10)$.

2-мисол. Тенгламани ечинг:

$$4(3x\sqrt{1-x^2} + 4x^2 - 2) = 5(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}).$$

Ечиш. Аввалги муҳокамаларга ўхшаш барча муҳокамаларни ортда қолдириб, бир йўла $x = \cos t$, $t \in [0;\ \pi]$ белгилашни киритамиз. У ҳолда берилган тенглама

$$4(3\cos t\sqrt{1-\cos^2 t} + 4\cos^2 t - 2) = 5(\sqrt{1-\cos t} + \sqrt{1+\cos t})$$

кўринишни олади. Соддалаштиришлар қуйидагича кечади:

$$12\cos t\,|\sin t| + 16\cdot\frac{1+\cos 2t}{2} - 8 = 5(\sqrt{2}|\sin(t/2)| + \sqrt{2}\,|\cos(t/2)|),$$

$$12\cos t\,|\sin t| + 8\cos 2t = 5\sqrt{2}\,(|\sin(t/2)| + |\cos(t/2)|).$$

$\sin t$, $\sin(t/2)$, $\cos(t/2)$ лар номанфий, чунки $t \in [0;\ \pi]$, шунинг учун бу ҳолда ҳам модуллар ташлаб юборилади, яъни:

$$6\cdot 2\cos t\cdot\sin t + 8\cos 2t = 5\sqrt{2}\,(\sin(t/2) + \cos(t/2)).$$

Бу тенгламани ёрдамчи бурчак киритиш ёрдамида ечамиз. У қуйидагига тенг кучли

$$\frac{3}{5}\cdot\sin 2t + \frac{4}{5}\cdot\cos 2t = \sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)$$

ёки

$$\sin(2t + \beta) = \sin(t/2 + \pi/4),\ \text{бунда}\ \beta = \arccos\frac{3}{5}.$$

Охирги тенгламани ечиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left[\begin{array}{ll} t = \pi/6 - (2/3)\arccos(3/5) + 4\pi n/3, & n \in Z, \\ t = 3\pi/10 - (2/5)\arccos(3/5) + 4\pi k/5, & k \in Z. \end{array}\right.$$

Энди t нинг топилган қийматларидан $[0;\ \pi]$ оралиққа тегишлиларини ажратиб олиш қолди, холос. Нолдан кичик ҳеч бир бутун сон ечимни бермаслиги ўз-ўзидан кўриниб турибди, чунки $3/5 < \sqrt{2}/2$ (бунга осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин), у ҳолда $\arccos(3/5) > \pi/4$, демак, $\pi/6 - (2/3)\arccos(3/5) < 0$.

Шундай қилиб, $n = 0$ қиймат ҳам ечимни бермайди, чунки $3/5 > 1/2$, у ҳолда $\arccos(3/5) < \frac{\pi}{3}$, бироқ $\pi/6 - (2/3)\arccos(3/5) + 4\pi/3 > \pi$. Шунингдек, $n = 1$ ҳам ечимни бермайди. 1 дан катта барча бутун n ларда $\pi/6 - (2/3)\arccos(3/5) + 4\pi n/3$ ифоданинг қиймати π дан катта бўлиши ўз-ўзидан тушунарли. Бундан, биринчи серия n нинг ҳеч бир бутун қийматларида берилган тенгламанинг илдизларини бермайди. Худди юқоридагига ўхшаш муҳокама қилиш (буни мустақил бажаришни ўзингизга топширамиз!) ёрдамида иккинчи серия фақат $k = 0$ ва $k = 1$ лардагина $[0;\ \pi]$ оралиққа тегишли илдизни беришига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб, берилган тенгламанинг илдизлари қуйидаги сонлар бўлади, яъни:

$$\left[\begin{array}{l} x = \cos(3\pi/10 - (2/3)\arccos(3/5) \\ x = \cos(11\pi/10 - (2/3)\arccos(3/5). \end{array}\right.$$

Тригонометрик алмаштиришга доир юқорида кўрилган ҳар икки мисолда x ўзгарувчига табиий чегара айтиб қўйилган эди. Айрим ҳолларда бундай чекланиш масала шартида кўрсатиб ўтилади, гарчанд тенгламанинг ўзи бундай чекланишни бермаса ҳам.

3-мисол. Тенгламани ечинг: $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

Ечиш. x нинг йўл қўядиган қийматлари мажмуасини топамиз:

$$\begin{cases}1-x^3\geqslant 0,\\ 4x^3-3x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\leqslant 1,\\ 4x\left(x^2-\frac{3}{4}\right)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 1,\\ x\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ \left[\begin{array}{l}-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{3}/2\leqslant x<+\infty\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant 1.\end{array}\right.$$

$x=\cos t$, $t\in[0;\ \pi]$ белгилашни киритамиз. Юқоридаги чекланишларни эътиборга олсак, $t\in[0;\ \pi/6]\cup[5\pi/6;\ \pi]$ келиб чиқади. $x=\cos t$ ни берилган тенгламага қўямиз ва тегишли шакл алмаштиришларни бажариб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\sqrt{1-\cos^2 t}=4\cos^3 t-3\cos t;$$

$$|\sin t|=4\cdot\left(\frac{3\cos t+\cos 3t}{4}\right)-3\cos t);$$

$$\sin t=\cos 3t;\ \cos 3t-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=0;$$

$$2\sin(t+\pi/4)\sin(2t-\pi/4)=0; \qquad (*)$$

бунда $\sin t$ — номанфий ҳамда $\cos^3 t=3\cos t+\cos 3t/4$.

$$(*)\Leftrightarrow\sin(t+\pi/4)\cdot\sin(2t-\pi/4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin(t+\pi/4)=0\\ \sin(2t-\pi/4)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t+\pi/4=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\\ 2t-\pi/4=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\pi/4+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ t=\pi/8+\pi k/2,\ k\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Энди t нинг шартни қаноатлантирувчи қийматларини топамиз:

$n=0$ да $t=-\pi/4$ — бу дастлабки оралиққа кирмайди;
$n=1$ да $t=3\pi/4\in[5\pi/6;\ \pi]$, шунинг учун у илдиз бў-

лади; n нинг 1 дан катта бутун қийматлари ўз-ўзидан ечим бўлмайди. Демак, биринчи сериядан $t = 3\pi/4$ илдиз экан, бундан $x = \cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ келиб чиқади.

k нинг манфий бутун қийматларида t нинг қийматлари кўрилаётган оралиққа тегишли бўлмайди, шунинг учун у қийматларда илдиз мавжуд эмас; $k = 0$ да $t = \pi/8 \in [0; \pi/6]$, демак, бу изланаётган илдиз бўлади, бунда $x = \cos(\pi/8)$; $k = 1$ да $t = 3\pi/8$ — бу қиймат кўрилаётган оралиққа тегишли эмас, шунинг учун у ечим эмас; $k = 2$ да $t = 5\pi/8$ — бу $[5\pi/6; \pi]$ оралиққа тегишли, шунинг учун у ечим бўлади, бундан $x = \cos(5\pi/8)$ келиб чиқади; k нинг қолган қийматлари ечимни бермайди.

Жавоб: $\left\{-\sqrt{2}/2;\ \cos\frac{5}{8}\pi;\ \cos\frac{\pi}{8}\right\}$.

4-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{\frac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1.$$

Ечиш. x нинг йўл қўядиган қийматларини топамиз:

$$\begin{cases} 1-|x| \geqslant 0, \\ 2x^2 - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ |x| \geqslant 1/\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Берилган тенгламанинг ҳар иккала қисми жуфт функциялар бўлгани учун уни $\sqrt{\frac{1-|x^2|}{2}} = 2|x|^2 - 1$ кўринишда ёзиб оламиз ва $|x| = \cos t$, $t \in [0; \pi/4]$ белгилашни киритамиз, шунингдек, қаралаётган оралиқда $\sin(t/2)$ нинг мусбатлигини эътиборга олиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = 2\cos^2 t - 1;\ |\sin(t/2)| = \cos 2t;$$

$$\sin(t/2) = \cos 2t;\ \cos(\pi/2 - t/2) - \cos 2t = 0;$$
$$2\sin(\pi/4 + 3t/4)\cdot\sin(5t/4 - \pi/4) = 0;$$

$$\sin(\pi/4 + 3t/4)\cdot\sin(5t/4 - \pi/4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(\pi/4 + 3t/4) = 0 \\ \sin(5t/4 - \pi/4) + 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi/4 + 3t/4 = \pi n \\ 5t/4 - \pi/4 = \pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pi/3 + 4\pi n/3,\ n \in Z \\ t = \pi/5 + 4\pi k/5,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

$n = 0$ да $t = -\frac{\pi}{3} \notin \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, демак, бу ҳолда илдиз мавжуд эмас; $n = 1$ да $t = \pi \notin [0; \pi/4]$, демак, бу изланаётган илдиз бўлмайди. Шундай қилиб, $n \in Z$ да биринчи сериянинг ичида шартни қаноатлантирувчи t нинг қийматлари мавжуд эмас экан.

$k = 0$ да $t = \pi/5 \in [0;\ \pi/4]$, шунинг учун у изланаётган илдиз бўлади; k нинг бошқа бутун қийматларида кўрилаётган шартга тегишли t нинг қийматлари мавжуд эмас.

Шундай қилиб, кўрилаётган шартни қаноатлантирувчи илдиз $t = \pi/5$ дан иборат. Энди x га қайтамиз:

$$|x| = \cos(\pi/5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \cos(\pi/5) \\ x = -\cos(\pi/5) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \cos(\pi/5) \\ x = \cos(4\pi/5). \end{array}\right.$$

Жавоб: $\{\cos(4\pi/5);\ \cos(\pi/5)\}$.

5-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{1-2x}\,(1-4x\sqrt{1+2x}) = 8x^2 - 1.$$

Ечиш. Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси $|2x| \leqslant \leqslant 1$ тенгсизлик билан берилади ва шунинг учун шундай t сони мавжудки, $2x = \cos 2t$ бўлади. Шу билан бирга, $0 \leqslant t \leqslant (\pi/2)$ деб ҳисоблашимиз мумкин. Мос ўрнига қўйишлар бажарилгандан сўнг тенглама қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$\sqrt{1-\cos 2t}\,\,(1 - 2\cos 2t\,\sqrt{1+\cos 2t}) = 2\cos^2 2t - 1,$$

$$\sqrt{2}\,|\sin t|\,(1 - 2\cos 2t \cdot \sqrt{2}\,|\cos t|) = \cos 4t$$

ёки бурчак t биринчи чоракда ётганлигидан

$$\sqrt{2}\sin t\,(1 - 2\sqrt{2}\,\cos t \cdot \cos 2t) = \cos 4t,$$

$$\sqrt{2}\sin t - \sin 4t = \cos 4t,\ \sqrt{2}\sin t = \sin 4t + \cos 4t,$$

$$\sin t = \sin(4t + \pi/4).$$

Бундан, $3t + \pi/4 = 2\pi k$ ёки $5t + \pi/4 = (2k+1)\pi$ $(k \in Z)$ ва биз икки серия ечимга эга бўламиз:

$$t = (8k - 1)\pi/12,\ t = (8k + 3)\pi/20\ (k \in Z.$$

Бу ечимлардан 0 дан $\pi/2$ оралиққача ётадигани фақат $t = 3\pi/20$ бўлади, бундан берилган тенгламанинг ягона илдизини ҳосил қиламиз:

$$x = (1/2)\cos(3\pi/20).$$

6-мисол. Тенгламани ечинг:

$$x^2\sqrt{1-x^2} = |x|^3 - |x| + 1/\sqrt{2}.$$

Ечиш. Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси $[-1;\ 1]$ кесмадан иборат, бундан ташқари унинг чап қисми — жуфт функция. Шунинг учун мусбат ечимларини қидирамиз.

У ҳолда 0 дан $\pi/2$ гача кесмада $x = \sin\alpha$ бўладиган α сони мавжуддир ва тенглама

$$\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha = \sin^3\alpha - \sin\alpha + 1/\sqrt{2}$$

кўринишни олади, бундан унча мураккаб бўлмаган шакл алмаштиришлардан кейин $\sin 2\alpha \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ тенгламага келамиз. Ҳар иккала кўпайтувчи модул бўйича 1 дан катта бўлмайди ва мусбат (2α 2-чоракда ётади), демак, бу кўпайтувчиларнинг ҳар бири 1 га тенг, бундан $\alpha = \pi/4$ ни топамиз, яъни $x = 1/\sqrt{2}$. Шунинг учун тенглама 2 та илдизга эга:

$$x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}.$$

2. Иррационал тенгсизликларни ечиш

Таъриф. Номаълум қатнашган ифодалари илдиз белгиси остида бўлган тенгсизликлар *иррационал тенгсизликлар* дейилади.

Энди биз иррационал тенгсизликларни қандай қилиб ечиш кераклигини кўриб чиқамиз. Одатда, иррационал тенгсизликлар илдиз белгисидан қутилиш усули билан ечилади. Бу усул шундан иборатки, илдиз белгисидан қутилиш учун тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини то рационал ифода келиб чиққунга қадар тегишли (яъни зарур) даражага ошириш борилади. Охирги топилган илдизларни дастлабки тенгсизликдаги номаълумнинг ўрнига қўйиш билан улар берилган тенгсизликнинг илдизи бўладими ёки улар ичида чет илдизлар бор-йўқлиги аниқланади. Кўпинча илдиз белгисидан қутилиш учун тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини жуфт даражага кўтарганда берилган тенгсизликка тенг кучли бўлмаган тенгсизлик келиб чиқади, яъни жуфт даражага кўтарганда тенгсизликнинг илдизлари йўқолмайди, балки чет (бегона) илдиз пайдо бўлиши мумкин. Чет илдизлар текшириш йўли билан аниқланиб, қолганлари ечимлар мажмуини ташкил этади. Шунинг учун иррационал тенгсизликларни ечаётганда, ниҳоятда эҳтиёт бўлиш талаб қилинади. Аввало, берилган иррационал тенгсизликни унинг ҳар иккала қисми маънога эга бўладиган ўзгарувчиларнинг қийматлари мажмуида кўриб чиқиш билан чегараланиш лозим.

Иррационал тенгсизликларни ечиш, одатда унга тенг кучли бўлган рационал тенгсизликлар системасини ёки уларнинг бирлашмасини ечишга келтирилади. Бундай системалар номаълумларга чекланишлар қўйиш ва шунингдек, тенгсизликни даражага ошириш натижасида ҳосил бўлади. Даражага кўтаришда тенгсизликларнинг мос хоссаларидан фойдаланилади.

Иррационал тенгсизликларни ечиш шу билан мураккабки, $f(x;\ y) < g(x;\ y)$ ва $(f(x;\ y))^n < (g(x;\ y))^n$ тенгсизликлар тенг кучли эмас, балки фақат номанфий a ва b сонлар учун $a < b$ дан $a^n < b^n$ ҳамда $a^n < b^n$ дан $a < b$ келиб чиқади. Шу сабабли иррационал тенгсизликларни ечаётганда унинг ўнг ва чап қисмлари ишораларини ҳисобга олиш албатта зарур, яъни қуйидаги тенг кучли шакл алмаштиришлардан фойдаланилади:

$$\text{I. } f(x,\ y) < g(x,\ y) \Leftrightarrow \begin{cases} f \geqslant 0, \\ g > 0, \\ f^n < g^n. \end{cases}$$

Иррационал тенгсизликларга хос дастлабки мисолларни кўриб чиқамиз.

1-мисол. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geqslant 2 - x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Кўпинча ўқувчилар бундай иррационал тенгсизликларни ечаётганда қуйидагича муҳокама юритадилар:

Иррационал тенглама ва тенгсизликларни ечаётганда, албатта илдиз белгисидан қутилиш зарур, шу сабабли берилган тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини квадратга кўтарамиз, яъни

$$x^2 - 4x + 3 \geqslant 4 - 4x + x^2$$

ни ёзамиз, бундан $3 \geqslant 4$ келиб чиқади, бу эса ўринли бўлмаган сонли тенгсизликдир; демак, берилган тенгсизлик ечимга эга эмас.

Олинган натижа ҳақиқатга қанчалик тўғри экан, деган саволни қўямиз. Бу ҳолда, тенгсизликка диққат билан назар солсак, олинган натижа ҳақиқатга тўғри келмаётганлигини, шунингдек умуман нотўғри эканлигини кўриш қийин эмас. Масалан, $x=5$ бўлганда тенгсизликнинг чап қисми мусбат, ўнг қисми эса манфийдир. Шундай қилиб, $x=5$ да тенгсизлик ечимга эга экан. Бу эса дастлабки муҳокамада чиқарилган хулосанинг нотўғри эканини кўрсатади.

Энди шу мисолнинг тўғри ечимини келтирамиз.

$x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$ тенгсизликни ўринли қиладиган x нинг қийматлари мажмуини кўриб чиқиш лозимлиги ўз-ўзидан кўриниб турибди. $x^2 - 4x + 3$ квадрат учҳаднинг ноллари:

$x_1 = 1$ ва $x_2 = 3$. Шундай қилиб, $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуи: $(-\infty;\ 1] \cup [3;\ \infty)$. $(1;\ 3)$ оралиқдан олинган x нинг барча қийматларида тенгсизликнинг чап қисми маънога эга бўлмаганлиги сабабли, у бу оралиқда ечимга эга эмас.

Ва ниҳоят, барча $x \geqslant 3$ учун $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$ (арифметик квадрат илдиз маъносида тушунилади) ва тенгсизликнинг ўнг қисми нолдан кичик, яъни манфий. Шу сабабли $x \geqslant 3$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ўзгарувчининг барча қийматлари берилган тенгсизликнинг ечими бўлади.

Агар $x \leqslant 1$ бўлса, у ҳолда $2 - x > 0$ бўлади; шу сабабли тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини квадратга ошириб, берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган

$$x^2 - 4x + 3 \geqslant 4 - 4x + x^2$$

тенгсизликка эга бўламиз; бу тенгсизлик эса ўз навбатида ечимга эга эмас, чунки $3 \geqslant 4$ тенгсизлик—нотўғри (яъни ёлғон) сонли тенгсизликдир.

Шундай қилиб, юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги *жавобга* эга бўламиз: $[3; +\infty)$.

2-мисол. $\sqrt{x^2 - 57x + 306} < x - 16$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Дастлаб хато ечимни кўриб чиқамиз. Бунга ўхшаш ечимлар тез-тез ёзма ишларда учрайди. Тенгсизликнинг чап қисми ўнг қисмидан кичик, шунингдек, арифметик илдиз бўлгани учун у номанфий бўлади. Тенгсизликнинг ҳар иккала қисми номанфий бўлгани сабабли унинг ҳар иккала қисмини квадратга ошириш тенг кучли шакл алмаштириш бўлади ва натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$x^2 - 57x + 306 < (x - 16)^2, \quad -57x + 306 < -32x + 256,$$

яъни $x > 2$.

Албатта жавоб тўғри, чунки $x = 3$ (ёки $x = 4$) бўлганда тенгсизликнинг чап қисмида мусбат, ўнг қисмида эса манфий сон келиб чиқди. $x = 10$ да эса илдиз остида ҳам, ўнг қисмида ҳам манфий сонлар бўлади.

Энди хатолик қаерда йўл қўйилганини аниқлаймиз. Агар тенгсизлик ҳақиқатан ҳам бажарилса, у ҳолда юқоридаги келтирилган ҳамма шакл алмаштиришлар тўғри ва $x > 2$ дегани дастлабки тенгсизлик ўринли бўлади, дегани эмас.

Тескари шакл алмаштиришларни бажариш мумкин эмас. Тенгсизлик чап қисмида квадрат илдизнинг мавжуд бўлиши x га маълум чекланишларни қўяди, аммо бизнинг юқоридаги шакл алмаштиришимизда квадратга оширилгандан кейин эса гўё у чекланиш йўқолиб кетди. Берилган тенгсизликда қуйидаги чекланишлар бажарилиши керак:

$$\begin{cases} x^2-57x+306 \geqslant 0, \\ x-16 \geqslant 0. \end{cases}$$

Бу чекланишларнинг бажарилиши эса тенгсизликнинг иккала қисмини квадратга ошириш мумкинлигини билдиради. Шунинг учун берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли, яъни:

$$\begin{cases} x^2-57x+306 \geqslant 0, \\ x-16 \geqslant 0, \\ x^2-57x+306 < (x-16)^2. \end{cases}$$

Уни ечиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant 6 \text{ ёки } x \geqslant 51 \Leftrightarrow x \geqslant 51. \\ x \geqslant 16. \end{cases}$$

Жавоб: $\{51\}$.

3-мисол. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-5} \geqslant \sqrt{5-2x}$. тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликнинг ҳар иккала қисми

$$\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0, \\ 2x-5 \geqslant 0, \\ 5-2x \geqslant 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи (бу берилган тенгсизликнинг йўл қўядиган қийматлар соҳаси) x нинг қийматларидагина маънога эга бўлади. Бу система $x=5/2$ дан иборат битта ечимга эга. x нинг бу қийматини берилган тенгсизликка қўямиз ва натижада у ечим эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб: $\{5/2\}$.

Одатда, илдизлардан ташкил топган алгебраик ифода иррационал ифода дейилади. Илдиз белгиси остида номаълумлар қатнашган ҳар қандай ифода ҳам иррационал ифода дейилавермайди. Масалан, $y=\sqrt{(x^2+3)^2}$ функция иррационал функция эмас, чунки уни $y=x^2+3$ рационал ифода кўринишида бериш мумкин.

Умуман иррационал тенгсизликларни ўрта мактабда фақат ҳақиқий сонлар мажмуида қаралиши сабабли, иррационал тенгсизликларни ечаётганда қуйидагиларга эътибор бериш керак:

а) жуфт даражали илдиз остидаги ифода номанфий бўлиши:

б) жуфт даражали илдизларнинг қийматлари номанфий бўлиши керак.

Шундай қилиб, иррационал тенгсизликларни ечишда иррационал тенгламаларни ечишдаги усуллардан бемалол фойдаланиш мумкин. Ечимни қуйидаги режа бўйича амалга ошириш мумкин:

1) берилган тенгсизликнинг аниқланиш соҳасини топиш;

2) тенгсизликнинг тенг кучлилик хоссаларидан фойдаланиб, берилган тенгсизликни ечиш;

3) топилган ечимлардан берилган тенгсизликнинг аниқланиш соҳасига тегишлиларини ажратиб олиш.

4-мисол. $\sqrt{2x+10} < 3x-5$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. 1) Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси: $2x+10 \geqslant \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$.

2) $x \geqslant -5$ дан олинган x нинг қийматларида берилган тенгсизликнинг чап қисми номанфий; ўнг қисми эса ҳам номанфий қийматларни, ҳам манфий қийматларни қабул қилиши мумкин. Шунинг учун қуйидаги икки ҳолни кўриб чиқиш зарур: $3x-5 \geqslant 0$ ва $3x-5<0$. Биринчи ҳолда берилган тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини квадратга ошириш мумкин, иккинчи ҳолда эса мумкин эмас, лекин бунга ҳожатнинг кераги йўқ, чунки $3x-5<0$ шартда берилган тенгсизликнинг чап қисми номанфий, ўнг қисми эса манфий бўлади, аммо бу берилган тенгсизликнинг маъносига зиддир. Демак, иккинчи ҳолда берилган тенгсизлик ечимга эга эмас. Шундай қилиб, берилган тенгсизлик ўзининг аниқланиш соҳасида қуйидаги системага тенг кучли:

$$\begin{cases} 3x-5 \geqslant 0, \\ (2x-10)^2 < (3x-5)^2. \end{cases}$$

Бу системадан $x>3$ ни топамиз.

3) $x>3$ ечимдан $x \geqslant -5$ мажмуига тегишли x нинг қийматларини танлаб олиш қолади холос, яъни қуйидаги тенгсизликлар системасини ечиш керак:

$$\begin{cases} x \geqslant -5, \\ x > 3. \end{cases}$$

Бундан $(3; +\infty)$, яъни берилган тенгсизликнинг ечимига эга бўламиз.

Энди умумий ҳолда $\sqrt[2n]{f(x;\ y)} < g(x;\ y)$ (1) кўринишдаги тенгсизликларни кўриб чиқамиз ($n \in N$).

Бу кўринишдаги тенгсизликларнинг ечимларидан исталгани бир вақтда ҳам $f(x;\ y) \geqslant 0$ (бу шартда тенгсизликнинг чап қисми аниқланган) тенгсизликнинг ҳам $g(x;\ y) > 0$ (чунки $g(x;\ y) > \sqrt[2n]{f(x;\ y)} \geqslant 0$) тенгсизликнинг ечимлари бўлади.

Демак, (1) тенгсизлиқ аввало қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases} f \geqslant 0, \\ g > 0, \\ \sqrt[2n]{f} < g, \end{cases}$$

бунда $f(x;\ y) \geqslant 0$ ва $g(x;\ y) > 0$ лар (1) тенгсизликнинг натижаларидир.

Бу системанинг дастлабки иккита тенгсизлиги билан аниқланадиган мажмуада система учинчи тенгсизлигининг ҳар иккала қисми фақат номанфий қийматларни қабул қилади, шу сабабли кўрсатилган мажмуа — (яъни тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси) да уларни квадратга ошириш натижасида (1) тенгсизликка тенг кучли шакл алмаштириш амалга оширилган бўлади. Шундай қилиб, (1) тенгсизлик қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли, деган хулосага келамиз:

$$\begin{cases} f(x,\ y) \geqslant 0, \\ g(x,\ y) > 0, \\ f(x,\ y) < (g(x,\ y))^{2n}. \end{cases}$$

Демак,

$$\text{II. } \sqrt[2n]{f} < g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geqslant 0, \\ g > 0, \\ f < g^{2n}. \end{cases}$$

Шунингдек,

$$\text{III. } \sqrt[2n]{f} \leqslant g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geqslant 0, \\ g \geqslant 0, \\ f \leqslant g^{2n}, \ n \in N. \end{cases}$$

Энди 4-мисолни II тенг кучлилик алмаштиришдан фойдаланиб, қуйидагича ечишимиз мумкин бўлади:

$$\sqrt{2x+10}<3x-5\Leftrightarrow\begin{cases}2x+10\geqslant 0,\\ 3x-5>0,\\ 2x+10<(3x-5)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -5,\\ x>5/3,\\ 2x+10<9x^2-30x+25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>5/3,\\ 9x^2-32x+15>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>5/3,\\ \left(x-\frac{5}{9}\right)(x-3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>5/3,\\ \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<5/9\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>5/3,\\ x>3;\end{cases}\\ \begin{cases}x>5/3,\\ x<5/9\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ \varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow x>3.$$

Жавоб: (3; $+\infty$).

5-мисол. $\sqrt{x^2-4x}>x-3$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. 1) Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси:

$$x^2-4x\geqslant 0\Leftrightarrow x(x-4)\geqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant 0 \text{ ёки } x\geqslant 4.$$

2) 4-мисолга ўхшаш мумкин бўлган икки ҳолни кўриб чиқиш керак:

$$x-3\geqslant 0 \text{ ва } x-3<0.$$

Лекин энди иккинчи ҳолда берилган тенгсизликнинг чап қисми номанфий сон, ўнг қисми эса манфий сон бўлади, шунинг учун тенгсизлик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, берилган тенгсизлик ўзининг аниқланиш соҳасида қуйидаги бирлашмага тенг кучли:

$$\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\ \left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2>(x-3)^2;\end{cases}(*)\quad x-3<0\ (**)$$

(*) дан $x>4{,}5$ ни, (**) дан эса $x<3$ ни топамиз. x нинг бу ечимларини бирлаштириб, $\left[\begin{array}{l}x>4{,}5\\ x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow(-\infty;\ 3)\cup(4{,}5;+\infty)$ ларни ҳосил қиламиз.

3) Энди қуйидаги тенгсизликлар системасини ечиш қолди:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leqslant 0\\ x\geqslant 4;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>4{,}5\\ x<3.\end{array}\right.\end{cases}$$

Уни ечиб, изланаётган ечимлар мажмуини топамиз:

$$(-\infty;\ 0] \cup (4{,}5;\ +\infty).$$

Энди $\sqrt[2n]{f(x;\ y)} > g(x;\ y)$ (2) кўринишдаги тенгсизликларнинг умумий муҳокамасини келтирамиз.

(2) тенгсизлик қуйидаги системага тенг кучли:

$$\begin{cases} f(x;\ y) \geqslant 0, \\ \sqrt[2n]{f(x;\ y)} > g(x;\ y). \end{cases}$$

Лекин $g(x;\ y)$ — номанфий ҳамда манфий қийматларни қабул қилгани учун, яъни $g(x;\ y) < 0$ ва $g(x;\ y) \geqslant 0$ ҳолнинг ҳар бирини назарга олиб, қуйидаги системалар мажмуига эга бўламиз:

$$\begin{cases} g(x;\ y) < 0, \\ f(x;\ y) \geqslant 0, \\ \sqrt[2n]{f(x;\ y)} > g(x;\ y) \quad (n \in N); \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x;\ y) \geqslant 0, \\ f(x;\ y) \geqslant 0, \\ \sqrt[2n]{f(x;\ y)} > g(x;\ y). \end{cases}$$

Бу системалардан биринчисида охирги тенгсизликни — дастлабки икки тенгсизликнинг натижаси сифатида ташлаб юбориш мумкин; иккинчи системада эса охирги тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини $2n$-даражага ошириш мумкин.

Шундай қилиб, (2) тенгсизлик қуйидаги иккита тенгсизликлар системалари мажмуига тенг кучли бўлади:

$$\sqrt[2n]{f(x;\ y)} > g(x;\ y) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x;\ y) < 0, \\ f(x;\ y) \geqslant 0 \end{cases} \text{ ёки}$$

$$\begin{cases} g(x;\ y) \geqslant 0, \\ f(x;\ y) \geqslant 0, \\ f(x;\ y) > (g(x;\ y))^{2n}. \end{cases}$$

Аммо, шу билан бир қаторда, иккинчи системанинг иккинчи тенгсизлигини система охирги тенгсизлигининг натижаси сифатида ташлаб юбориш мумкинлигини сезиш унча қийин эмас.

Демак, (2) тенгсизлик анча содда қуйидаги тенгсизликлар мажмуига тенг кучли экан:

$$\text{IV. } \sqrt[2n]{f} > g \Leftrightarrow \begin{cases} g < 0, \\ f \geqslant 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} g \geqslant 0, \\ f > g^{2n}, \end{cases} n \in N.$$

Шунингдек,

$$\text{V. } \sqrt[2n]{f} \geqslant g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} g \leqslant 0, \\ f \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g \geqslant 0, \\ f \geqslant g^{2n}, \end{cases} n \in N. \end{array}\right.$$

Демак, 5-мисолни қуйидагича ечишимиз мумкин (IV тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб):

$$\sqrt{x^2-4x} > x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ x^2-4x > (x-3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 < 0, \\ x^2-4x \geqslant 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x^2-4x > x^2-6x+9; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x(x-4) \geqslant 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x > 4{,}5; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x \leqslant 0 \\ x \geqslant 4 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4{,}5 \\ x \leqslant 0. \end{array}\right.$$

Жавоб: $(-\infty;\ 0] \cup (4{,}5;\ +\infty)$.

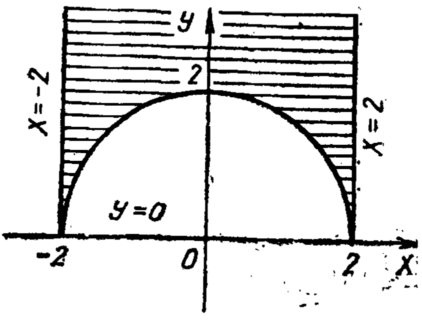
6-мисол. $\sqrt{4-x^2} \leqslant y$ тенгсизлик ечимлари мажмуини координаталар текислигида кўрсатинг.

Ечиш. III тенг кучлилик алмаштиришдан фойдаланиб, берилган тенгсизликни ечамиз:

$$\sqrt{4-x^2} \leqslant y \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2 \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ 4-x^2 \leqslant y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant 4, \\ y \geqslant 0, \\ x^2+y^2 \geqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ y \geqslant 0, \\ x^2+y^2 \geqslant 4. \end{cases}$$

Тенгсизликнинг аниқлаш соҳаси — $x=-2$ ва $x=2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полосанинг абсцисса ўқидан юқорида қолган қисми нуқталари мажмуидан иборат. Изланаётган мажмуа эса маркази координаталар бошида ва радиуси 2 бирликка тенг бўлган очиқ доирадан қолган



62- расм.

текислик нуқталари мажмуасининг тенгсизлик аниқланиш соҳасида қолган қисми нуқталари мажмуасидан иборатдир (62- расм).

7-мисол. $\sqrt{(x-3)(x+1)} > 3(x+1)$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. IV тенг кучли алмаштиришдан фойдаланган ҳолда берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган тенгсизликлар системаси мажмуасини тузамиз, бунда аввало тенгсизликнинг қатъийлигини назарга олган [ҳолда $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \neq -1$ эканини эътиборга олиш зарур, сўнгра $x+1<0$ ва $x+1>0$ ҳоллар кўриб чиқилади. Бундай чекланиш фақат тенгсизликнинг иккала қисмларида бир хил ўзгарувчили ифода бўлгани учун қилинди, аммо бундай қилиш (яъни ёндошиш) мутлақо шарт эмас.

Энди ечимни келтирамиз:

$$\sqrt{(x-3)(x+1)} > 3(x+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1<0, \\ (x-3)(x+1) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+1>0, \\ (x-3)(x+1) > (3(x+1))^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1<0, \\ x-3 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1>0, \\ x-3>9(x+1) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1, \\ x \leqslant 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x>-1, \\ 8x<-12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1; \\ \begin{cases} x>-1, \\ x<-1{,}5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x<-1.$$

Эслатма. Биринчи системанинг биринчи тенгсизлигини эътиборга олсак, унинг иккинчи тенгсизлиги $x-3 \leqslant 0$ бўлганда ўринли бўлади, худди шунингдек, иккинчи системанинг иккинчи тенгсизлигининг ҳар иккала қисмини биринчи тенгсизлигини эътиборга олган ҳолда бўлиб юбордик. Бунда тенг кучлилик бузилмайди.

Жавоб: $(-\infty;\ -1)$.

8-мисол. $\sqrt{2x^2+7x+50} \geqslant x-3$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган тенгсизликлар системаси мажмуасини V тенг кучлилик алмаштиришдан фойдаланиб ёзамиз ва ечамиз:

$$\sqrt{2x^2+7x+50} \geqslant x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \leqslant 0, \\ (2x^2+7x+50 \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 2x^2+7x+50 \geqslant (x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 3, \\ \left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\frac{351}{16}>0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 3, \\ \left(x+\frac{13}{2}\right)^2 \geqslant \frac{5}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3; \\ \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x+\frac{13}{2} \geqslant \frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3; \\ \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \geqslant -\frac{26-\sqrt{5}}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3, \\ x \geqslant 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty.$$

Жавоб: $(-\infty;\ +\infty)$, яъни $x \in R$.

Эслатма. Биринчи системанинг иккинчи тенгсизлиги барча $x \in R$ да мусбат бўлгани учун уни ташлаб юборса ҳам бўлади, яъни системанинг ечими биринчи тенгсизлик ечимидан иборат бўлади. Иккинчи системанинг иккинчи тенгсизлиги барча $x \leqslant 3$ да ўринли, шунинг учун бу система ечими ҳам биринчи тенгсизлик билан аниқланади. Шундай қилиб, ҳар иккала система ечимлари бирлашмаси (яъни йиғиндиси) сонлар тўғри чизиғини ташкил қилади.

9-мисол. $\sqrt{x+y} \geqslant x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. V тенг кучлилик алмаштиришидан фойдаланиб, берилган тенгсизликдан унга тенг кучли бўлган тенгсизликлар системаси бирлашмасига ўтамиз ва у бирлашмани ечамиз:

$$\sqrt{x+y} \geqslant x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x+y \geqslant 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x+y \geqslant x^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

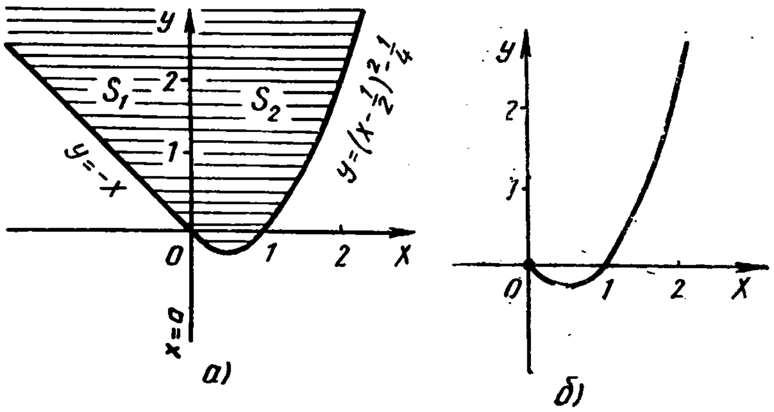
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant -x \end{cases} (S_1) \text{ ёки } \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}. \end{cases} (S_2).$$

Изланаётган ечим 63 *а*-расмда тасвирланган.

$$\sqrt{x+y} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y = (x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{cases}$$ бўлгани учун унинг

графиги 63 *б*-расмдаги ординаталар ўқи билан чегараланган парабола тармоғидан иборат бўлади.

10-мисол. $\sqrt{x+y} \geqslant |x|$ тенгсизлик ечимлари мажмуини координаталар текислигида тасвирланг.



63- расм.

Ечиш. Тенгсизликнинг чап қисми $x+y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \geqslant -x$ да аниқланган, ўнг қисми эса x нинг ҳар қандай қийматида номанфий, яъни $|x| \geqslant 0$. Демак, тенгсизлик $y=-x$ тўғри чизиқ билан чегараланган юқоридаги ёпиқ ярим текислик нуқталари мажмуасида аниқланган, шунинг учун тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини шу соҳадан қидирамиз.

Бу ерда юқоридаги мулоҳазалардан сўнг V тенг кучлилик алмаштиришидаги икки ҳолни кўришга ҳожат қолмайди, балки фақат иккинчи ҳолатдан фойдаланиб шакл алмаштирамиз:

$$\sqrt{x+y} \geqslant |x| \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geqslant 0, \\ x+y \geqslant |x|^2 \end{cases} \Leftrightarrow y \geqslant x^2 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \geqslant \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Эслатма. Берилган тенгсизликнинг моҳияти жиҳатидан ҳар иккала қисми номанфий, шунинг учун унинг ҳар иккала қисмини квадратга ошириш етарли эди.

Демак, $\sqrt{x+y} \geqslant |x|$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ парабола ва унинг ички соҳаси нуқталари мажмуасидан иборат, буни кўрсатишни ўзингизга ҳавола қиламиз.

Энди қуйидаги кўринишдаги тенгсизликларни муҳокама қиламиз:

VI. $\sqrt[2n]{f} > \sqrt[2n]{g} \Leftrightarrow \begin{cases} g \geqslant 0, \\ f > g. \end{cases}$

Эслатма. $\sqrt[2n]{f} > \sqrt[2n]{g}$ тенгсизлик аслида $\begin{cases} f \geqslant 0, \\ g \geqslant 0, \\ f > g \end{cases}$ тенгсизликлар системасига тенг кучли; аммо тенгсизликнинг чап ва ўнг қисмлари маънога эга бўлганда, системадан чап томондаги илдизнинг аниқланиш соҳасини кўрсатувчи тенгсизликни ташлаб юбориш натижасида ҳам ечим ўзгармайди. Шу сабабли VI тенг кучлилик схемасида $f \geqslant 0$ тенгсизлик иштирок этмаяпти.

$$\text{VII. } \sqrt[2n]{f} \geqslant \sqrt[2n]{g} \Leftrightarrow \begin{cases} g \geqslant 0, \\ f \geqslant g. \end{cases}$$

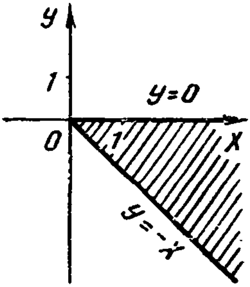
11-мисол. $\sqrt{x-y} \geqslant \sqrt{x+y}$ тенгсизлик ечимлари мажмуини сонлар текислигида тасвирланг.

Ечиш. VII тенг кучлилик схемасига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\sqrt{x-y} \geqslant \sqrt{x+y} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geqslant 0, \\ x-y \geqslant x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant -x, \\ y \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x \leqslant y \leqslant 0.$$

Берилган тенгсизликнинг ечими, яъни графиги 64-расмда тасвирланган.



64- расм.

$$\sqrt{x-y} = \sqrt{x+y} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \geqslant 0, \\ x-y = x+y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant x, \\ y = 0, \end{cases}$$

ёки

$$\sqrt{x-y} = \sqrt{x+y} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geqslant 0, \\ x-y = x+y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant -x, \\ y = 0. \end{cases}$$

Демак, $\sqrt{x-y} = \sqrt{x+y}$ тенгламанинг графиги абсциссалар ўқининг номанфий қисмидан иборат бўлади, яъни $\begin{cases} x \in [0;\ +\infty), \\ y = 0. \end{cases}$

12-мисол. $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Ушбу параграфдаги III ва IV тенг кучли алмаштиришлардан фойдаланиб, берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуини топамиз:

$$\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{x+3}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{3+x} \geqslant 0, \\ x+4 > 2-\sqrt{3+x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&\sqrt{3+x}\leqslant 2,\\&\sqrt{3+x}>-x-2\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&3+x\geqslant 0,\\&3+x\leqslant 4;\end{aligned}\right.\\&\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&-x-2\geqslant 0,\\&3+x>(-x-2)^2\end{aligned}\right.\\&\left\{\begin{aligned}&-x-2\leqslant 0,\\&3+x\geqslant 0\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&x\geqslant -3,\\&x\leqslant 1;\end{aligned}\right.\\&\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&x\leqslant -2,\\&3+x>x^2+4x+4;\end{aligned}\right.\\&\left\{\begin{aligned}&x\geqslant -2,\\&x\geqslant -3\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&3\leqslant x\leqslant 1,\\&\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&x\leqslant -2,\\&x^2+3x+1<0;\end{aligned}\right.\\&x\geqslant -2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&-3\leqslant x\leqslant 1,\\&\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&x\leqslant -2,\\&\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{5}}{2};\end{aligned}\right.\\&x\geqslant -2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&-3\leqslant x\leqslant 1,\\&\left[\begin{aligned}&\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x\leqslant\\&x\geqslant -2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

$$\leqslant -2 \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&-3\leqslant x\leqslant 1,\\&\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x<+\infty\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x\leqslant 1.$$

Жавоб: $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ 1\right]$.

VIII. $\sqrt[2n]{f}<\sqrt[2n]{g} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&f\geqslant 0,\\&f<g\end{aligned}\right. \Leftrightarrow 0\leqslant f<g.$

Эслатма. Агар система таркибида иккита $f\leqslant p$ ва $f\leqslant g$ тенгсизлик бўлиб, шунингдек, ўзгарувчининг олиши мумкин бўлган қийматлари мажмуининг исталганида $p\leqslant g$ экани маълум бўлса, у ҳолда система таркибидаги $f\leqslant g$ тенгсизликни тушириб қолдириш мумкин.

Демак, агар $f\geqslant 0$, $g\geqslant 0$ ҳамда $f\leqslant g$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[2n]{f}<\sqrt[2n]{g}$ тенгсизликка тенг кучли бўлган $\left\{\begin{aligned}&f\geqslant 0,\\&g\geqslant 0,\\&f<g\end{aligned}\right.$ тенгсизликлар системасидаги $g\geqslant 0$ тенгсизликни тушириб қолдириш мумкин, чунки бу тенгсизликнинг ечимлари мажмуини $f<g$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуи қамраб олган бўлади. Шу сабабли VIII тенг кучлилик схемасига $g\geqslant 0$ тенгсизлик киритилмаган, яъни у ортиқчадир.

IX. $\sqrt[2n]{f}\leqslant\sqrt[2n]{g} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&f\geqslant 0,\\&f\leqslant g\end{aligned}\right. \Leftrightarrow 0\leqslant f\leqslant g.$

13-мисол. $\sqrt{y-x+1}\leqslant$ $\leqslant\sqrt{4-x}$ тенгсизликни ечинг.

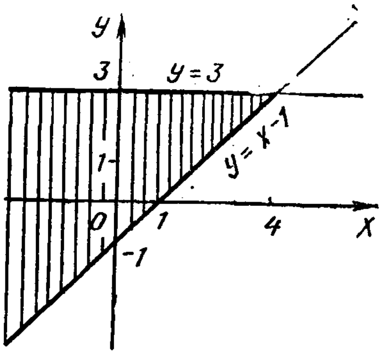
Ечиш. Берилган тенгсизликни IX тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб ечамиз, яъни:

$$\sqrt{y-x+1}\leqslant\sqrt{4-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y-x+1\geqslant 0,\\ y-x+1\leqslant 4-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant x-1\\ y\leqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1\leqslant y\leqslant 3.$$



65- расм.

Изланаётган ечим 65-расмда кўрсатилган.

14-мисол. $\sqrt{3x-10}<\sqrt{6-x}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликни VIII тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб ечамиз:

$$\sqrt{3x-10}<\sqrt{6-x}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-10\geqslant 0,\\ 3x-10<6-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\dfrac{10}{3},\\ x<4\end{cases}\Leftrightarrow\frac{10}{3}\leqslant x<4.$$

Жавоб: $\left[\frac{10}{3};\ 4\right)$.

$\sqrt[2n+1]{f}\gtrless\sqrt[2n+1]{g}$, $n\in N$, кўринишдаги тенгсизликлар қуйидаги тенг кучлилик алмаштиришларидан фойдаланиб ечилади:

X. $\sqrt[2n+1]{f}\gtrless\sqrt[2n+1]{g}\Leftrightarrow f\gtrless g,\ n\in N.$

$\sqrt[2n+1]{f}\gtrless g$ кўринишдаги тенгсизлик эса $f\gtrless g^{2n+1}$, $n\in N$, тенгсизликка тенг кучли, яъни

XI. $\sqrt[2n+1]{f}\gtrless g\Leftrightarrow f\gtrless g^{2n+1},\ n\in N.$

15-мисол. $\sqrt[3]{\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}}<\sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка тенг кучли (X тенг кучлилик алмаштиришига қаранг):

$$\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}<\frac{6}{x-1}.$$

Буни умумий махражга келтиргандан сўнг, қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{4x^2-15x-25}{(x+1)(x+2)(x-1)}<0,$$

яъни берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка тенг кучли бўлади:

$$\frac{(x+5/4)(x-5)}{(x+1)(x+2)(x-2)}<0.$$

Бу тенгсизликни оралиқ усули ёрдамида ечиб, берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини топамиз, яъни

$$(-\infty;\ -2)\cup(-5/4;\ -1)\cup(1;\ 5).$$

Энди $f(x;\ y)\sqrt{g(x;\ y)}\gtrless 0$ кўринишдаги тенгсизликлар ечимларини топиш ҳақида гап юритамиз.

16-мисол. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизлик $x^2-x-2\geqslant 0$ да аниқланган. Шу сабабли:

$$\begin{cases}x^2-x-2\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0.\end{cases}$$

Бундан:

$$\begin{cases}x^2-x-2\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(x-2)\geqslant 0,\\ x\geqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geqslant 2\\ x\leqslant -1;\end{array}\right.\\ x\geqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 2,\\ x\geqslant 1,\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -1,\\ x\geqslant 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 2\\ \varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow x\geqslant 2.$$

Юзаки қараганда мақсадга эришгандай бўламиз, аммо юқоридаги натижа ечимнинг бир қисми холос, чунки тенгсизлик $x^2-x-2=0\Leftrightarrow(x+1)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right.$ бўлганда ҳам ўринли бўлади. Шундай қилиб, ҳар иккала ечимни бирлаштириб, изланаётган ечимга келамиз:

$$\left[\begin{array}{l}x\geqslant 2,\\ x=-1,\\ x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 2\\ x=1.\end{array}\right.$$

Жавоб: $\{-1\}\cup[2;\ +\infty)$.

Ёки берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини қуйидагича муҳокама қилиб ҳам топиш мумкин:

Берилган тенгсизликнинг йўл қўядиган қийматлари соҳаси $x^2 - x - 2 \geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лардан, яъни $x \leqslant -1$ ва $x \geqslant 2$ оралиқлардан иборатдир. $x_1 = -1$ ва $x_2 = 2$ сонлардан ҳар бирини берилган тенгсизликка қўйиб, бу сонлар унинг ечимлари эканини аниқлаймиз.

Йўл қўядиган қийматларнинг қолган қисмларида, яъни $x < -1$ ва $x > 2$ оралиқларнинг ҳар бирида $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$ функция — мусбат; демак, бу оралиқларда берилган тенгсизлик $x - 1 \geqslant 0$ тенгсизликка тенг кучли: $x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$. Бу ечим — тенгламанинг йўл қўядиган қийматлари мажмуасидан $x > 2$ оралиққа мос келишини назарга олиб, $x > 2$ ечим бўлиши келиб чиқади.

Тенгламанинг йўл қўядиган қийматлари қисмларидаги ечимларни бирлаштирсак, берилган тенгсизликнинг барча ечимлари мажмуаси $x = -1$ нуқтадан ва $x \geqslant 2$ оралиқдан ташкил топади.

Юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги хулосага келамиз, яъни $f(x;\ y)\sqrt{g(x;\ y)} \gtrless 0$ кўринишдаги тенгсизликлар ечимлари мажмуаси қуйидаги тенг кучлилик алмаштиришлардан фойдаланиб топилади:

$$\text{XII. } f\sqrt{g} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g \geqslant 0, \\ f \geqslant 0; \end{cases} \\ g = 0. \end{array}\right.$$

$$\text{XIII. } f\sqrt{g} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g > 0, \\ f > 0. \end{cases}$$

$$\text{XIV. } f\sqrt{g} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g \geqslant 0, \\ f \leqslant 0; \end{cases} \\ g = 0. \end{array}\right.$$

$$\text{XV. } f\sqrt{g} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g > 0, \\ f < 0. \end{cases}$$

Кўпинча иррационал тенгсизликларни ечишда қуйидаги тенг кучли алмаштиришлардан фойдаланиб, изланаётган ечимлар мажмуаси топилади.

$$\text{XVI. } \frac{\sqrt{f}}{g} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g > 0, \\ f > g^2. \end{cases}$$

$$\text{XVII. } \frac{\sqrt{f}}{g} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g < 0, \\ f \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} g > 0, \\ g \geqslant 0, \\ f < g^2. \end{cases}$$

17-мисол. $\frac{2-x^2}{\sqrt{4x+5}} > 1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликнинг махражи фақат мусбат қийматларни қабул қилгани учун уни аввал XVI тенг кучли алмаштиришдан фойдаланиб, $\begin{cases} 4x+5>0, \\ \sqrt{4x+5} < 2-x^2 \end{cases}$ (*) кўринишда, сўнгра II тенг кучли алмаштиришдан фойдаланиб, (*) га тенг кучли тенгсизликлар системасини ёзамиз ва ечамиз:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5/4, \\ 2-x^2>0, \\ 4x+5<(2-x^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5/4, \\ x^2<2, \\ 4x+5<4-4x^2+x^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5/4, \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ 4x^4-4x^2-4x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < x < \sqrt{2}, \\ (x+1)^2(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} x < \sqrt{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x > +\sqrt{2} \\ x < 1-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < x < \sqrt{2}, \\ \left[\begin{array}{l} -\infty < x < -1 \\ -1 < x < 1-\sqrt{2} \\ x < 1+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{4} < x < -1, \\ -1 < x < 1-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Изоҳ. $x^4-(4x^2+4x+1)=(x^2)^2-(2x+1)^2=(x^2+$ $+2x+1)(x^2-2x-1)=(x+1)^2(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$.

Жавоб: $(-5/4;\ -1)\cup(-1;\ 1-\sqrt{2})$.

18-мисол. $\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < 1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. XVII тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб, берилган тенгсизликка тенг кучли системалар бирлашмасига ўтамиз ва уларни ечамиз:

$$\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ 24+2x-x^2 \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x>0, \\ 24+2x-x^2 \geqslant 0, \\ 24+2x-x^2 < x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ x^2-2x-24\leqslant 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ x^2-2x-24\leqslant 0,\\ x^2-x-12>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ (x+4)(x-6)\leqslant 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ (x+4)(x-6)\leqslant 0,\\ (x-4)(x+3)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ -4\leqslant x\leqslant 6;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ -4\leqslant x\leqslant 6;\\ \left[\begin{array}{l}x>4\\ x<-3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\leqslant x<0;\\ \begin{cases}0<x\leqslant 6,\\ x>4;\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\leqslant 6,\\ x<-3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\leqslant x<0\\ 4<x\leqslant 6,\\ \varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\leqslant x<0\\ 4<x\leqslant 6.\end{array}\right.$$

Жавоб: $[-4;\ 0)\cup(4;\ 6]$.

19-мисол. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1.$$

Ечиш. **1-усул.** Иррационал ва бошқа тенгсизликларни ечаётганда шу бобнинг 1-§ ида юритилган мулоҳазалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. $y=\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}-1$ функцияни кўриб чиқамиз. У ҳолда берилган мисолимиз y функцияни манфий қийматлар қабул қиладиган x нинг қийматларини топишга келиб қолади.

Бу функциянинг аниқланиш соҳаси ёки дастлабки тенгсизликнинг йўл қўядиган қийматлари $1-8x^2\geqslant 0$ ва $x\neq 0$ яъни $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<0$ ва $0<x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$ шартларни қаноатлантирувчи x нинг қийматларидан ташкил топади.

Энди y функцияни нолга айлантирувчи x нинг қийматларини топамиз. Бунинг учун $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}=1$ тенгламани ечиб, $x=1/3$ дан иборат ягона илдизни топамиз. Бу илдиз $y=\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}-1$ функциянинг аниқланиш соҳасини қуйидаги учта оралиққа бўлади:

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<0\ \text{(I)},\quad 0<x<\frac{1}{3}\ \text{(II)},\quad \frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\ \text{(III)}.$$

(I) оралиқдан x нинг бирор, масалан, $x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ қийматини олиб, $y\Big|_{x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}-1<0$ ни топамиз.

Бизнинг функциямиз бу оралиқда нолга айланмайди, у ҳолда шу оралиқдан олинган x нинг барча қийматларида фақат манфий қийматларни қабул қилади.

Энди $x=\frac{1}{4}$ ни (II) оралиқдан олиб, бунда ҳам y манфий қийматларни қабул қилишини кўрамиз.

(III) оралиқдан олинган $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ учун $y\Big|_{x=\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1>0$ га эга бўламиз, яъни бу оралиқдан олинган x нинг барча қийматларида функция фақат мусбат қийматларни қабул қилади.

Шундай қилиб, дастлабки тенгсизликнинг ечими $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<0$ ва $0<x<1/3$ оралиқлардан олинган x нинг барча қийматларидан иборат бўлади.

Жавоб: $\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$.

2-усул. XVII тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб ечамиз:

$$\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ 1-\sqrt{1-8x^2}\geqslant 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ 1-\sqrt{1-8x^2}\geqslant 0,\\ 1-\sqrt{1-8x^2}<2x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \sqrt{1-8x^2}\leqslant 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ \sqrt{1-8x^2}\leqslant 1,\\ \sqrt{1-8x^2}>1-2x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ 1-8x^2\geqslant 0,\\ 1-8x^2\leqslant 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ 1-8x^2\geqslant 0,\\ 1-8x^2\leqslant 1,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-2x\geqslant 0,\\ 1-8x^2>(1-2x)^2\end{cases}\\ \begin{cases}1-2x<0,\\ 1-8x^2\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x<0,\\ x^2\leqslant\frac{1}{8},\\ x^2\geqslant 0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x>0,\\ x^2\leqslant\frac{1}{8},\\ x^2\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\leqslant 1/2,\\ 1-8x^2>1-4x+4x^2;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x>1/2,\\ x^2\leqslant\frac{1}{8}\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x<0,\\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}},\\ x\neq 0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x>0,\\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}},\\ x\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\leqslant 1/2,\\ 4x(x-1/3)<0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x>1/2,\\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<0,\\ \left\{\begin{array}{l}0<x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}},\\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\leqslant 1/2,\\ 0<x<1/3,\end{array}\right.\\ \varnothing\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<0,\\ \left\{\begin{array}{l}0<x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ 0<x<1/3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<0,\\ 0<x<1/3.\end{array}\right.$$

Эслатма. Агар бундай тенг кучли алмаштиришларни то охиригача олиб бориш қўполроқ бўлса, у ҳолда дастлабки тенг кучли алмаштиришдан сўнг, ҳар бир системани алоҳида-алоҳида ечиб олиш ва натижаларни бирлаштириш ҳам мумкин.

20-мисол. $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $2-x\geqslant 0$ ва $x\neq 0$ шартлардан берилган тенгсизликнинг йўл қўядиган қийматлари соҳасини топамиз:

$$\left\{\begin{array}{l}2-x\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\leqslant 2,\\ x\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\ 0<x\leqslant 2.\end{array}\right.$$

$x<0$ шартда берилган тенгсизлик $\sqrt{2-x}+4x-3\leqslant 2x$

тенгсизликка, яъни $\sqrt{2-x} \leqslant 3-2x$ (*) га тенг кучли. x нинг исталган манфий қийматлари учун $\sqrt{2-x}>1$ ўринли бўлганлигидан, даражанинг хоссаларига кўра

$$\sqrt{2-x}<(\sqrt{2-x})^2=2-x.$$

Иккинчи томондан, исталган манфий x учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$2-x<(2-x)+(1-x)=3-2x.$$

Юқоридаги мулоҳазалардан, x нинг исталган манфий қийматлари учун (*) тенгсизликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади; шунинг учун барча $x<0$ — берилган тенгсизликнинг ечими бўлади.

$0<x \leqslant 2$ оралиқдан олинган x нинг исталган қиймати учун берилган тенгсизлик

$$\sqrt{2-x}+4x-3 \geqslant 2x, \text{ яъни } \sqrt{2-x} \geqslant 3-2x \quad (^{**})$$

тенгсизликка тенг кучли.

$0<x \leqslant 2$ оралиқни: $0<x \leqslant 3/2$ ва $3/2<x \leqslant 2$ оралиқларга бўламиз.

$0<x \leqslant 3/2$ оралиқда (**) тенгсизликнинг ҳар иккала қисми номанфий; шунинг учун у $2-x \geqslant (3-2x)^2$, яъни $4x^2-11x+7 \leqslant 0$ тенгсизликка тенг кучли, қаралаётган оралиқда унинг ечими $1 \leqslant x \leqslant 3/2$ кесмадан иборат бўлади. Бу кесмадан олинган барча x лар берилган тенгсизликнинг ечими бўлади.

$3/2<x \leqslant 2$ оралиқда (**) тенгсизликнинг чап қисми номанфий, ўнг қисми эса манфий сон бўлади. Шунинг учун бу оралиқдан олинган барча сонлар (**) тенгсизликнинг ва шу билан бир қаторда берилган тенгсизликнинг ечимлари бўлади.

Шундай қилиб, берилган тенгсизликнинг ечимлари $-\infty<x<0$ ва $1 \leqslant x \leqslant 2$ оралиқлардан олинган барча сонлар бўлади.

Берилган тенгсизликнинг ечимларини топишни юқоридаги мулоҳазаларга асосланиб, қуйидагича ёзсак ҳам бўлади:

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geqslant 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \sqrt{2-x}+4x-3 \geqslant 2x\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \sqrt{2-x}+4x-3 \leqslant 2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ \sqrt{2-x} \geqslant 3-2x; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ \sqrt{2-x} \leqslant 3-2x \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ 3-2x<0, \\ 2-x \geqslant 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ 3-2x \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant (3-2x)^2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ 3-2x \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0, \\ 2-x \leqslant (3-2x)^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ x>3/2, \\ x \leqslant 2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ x \leqslant 3/2, \\ 4x^2-11x+7 \leqslant 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ x \leqslant 3/2, \\ x \leqslant 2, \\ 4x^2-11x+7 \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3/2<x \leqslant 2; \\ \left\{\begin{array}{l} 0<x \leqslant 3/2, \\ 1 \leqslant x \leqslant 7/4 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 7/4, \\ x \leqslant 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3/2<x \leqslant 2 \\ 1 \leqslant x \leqslant 3/2 \\ x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{array}\right.$$

Берилган тенгсизликни белгилаш ёрдамида ҳам ечсак бўлади. $\sqrt{2-x}=t$ деб белгилаймиз, у ҳолда $t \geqslant 0$ ва $x=2-t^2$ бўлади. Берилган тенгсизликдаги ўзгарувчини t га алмаштириб, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\left\{\begin{array}{l} t \geqslant 0, \\ \dfrac{t+4(2-t^2)-3}{2-t^2} \geqslant 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \geqslant 0, \\ \dfrac{t+8-4t^2-3-4+2t^2}{2-t^2} \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \geqslant 0, \\ \dfrac{-2t^2+t+1}{2-t^2} \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \geqslant 0, \\ \dfrac{2t^2-t-1}{t^2-2} \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 0, \\ \dfrac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-1)}{(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 0, \\ \dfrac{t-1}{t-\sqrt{2}} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} t > \sqrt{2} \\ t \leqslant 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \geqslant 0, \\ t > \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} t \geqslant 0, \\ t \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > \sqrt{2} \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \cdot \end{array}\right.$$

Шундай қилиб, берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликлар бирлашмасига тенг кучли:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \sqrt{2-x} \leqslant 1 \\ \sqrt{2-x} > \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant 2-x \leqslant 1 \\ 2-x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant -x \leqslant -1 \\ -x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x < 0. \end{array}\right.$$

Демак, берилган тенгсизликнинг барча ечимлари мажмуаси $(-\infty;\ 0) \cup [1;\ 2]$ дан иборат экан.

$\sqrt{f} + \sqrt{g} < q$ кўринишдаги тенгсизликларни ечиш анча мураккабдир. $\sqrt{f} \geqslant 0$, $\sqrt{g} \geqslant 0$ бўлганлигидан $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ ва $\sqrt{g} < q$ (шунга ўхшаш мос равишда $\sqrt{f} < q$) шартлар бажарилиши керак. Бу шартлар бажарилган мажмуада эса берилган тенгсизлик $f < (q - \sqrt{g})^2$ тенгсизликка (мос равишда $g < (q - \sqrt{f})^2$ тенгсизликка) тенг кучли бўлади. Бу кўринишдаги тенгсизликлар юқорида келтирилган тенгсизликларнинг бирор кўринишига келади.

Юқорида келтирилган тенг кучли алмаштириш схемалари маълум бўлмаган тақдирдагина, иррационал тенгсизлик ечимлари (дастлабки келтирилган мисолларнинг муҳокамаларига ўхшаш муҳокамалар юргизиб) топилади. Акс ҳолда тайёр келтирилган тенг кучли алмаштиришлардан фойдаланган ҳолда ечимлар мажмуаси топилади.

21-мисол. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизлик аслида қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x+15 \geqslant 0, \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant -15, \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x+15} < 6. \end{cases}$$

Бу система охирги тенгсизлигининг ҳар иккала қисми фақат номанфий қийматларни қабул қилгани сабабли иккала қисмини квадратга оширсак, тенг кучлилик бузилмайди, шу сабабли ҳосил бўлган системани ечамиз:

$$\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x+3+x+15+2\sqrt{(x+3)(x+15)} < 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ \sqrt{(x+3)(x+15)} < 9-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ (x+3)(x+15) < (9-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x^2+18x+45 < 81-18x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \leqslant x < 1.$$

Эслатма. $x \geqslant -3$ шартда $9-x > 0$ бўлгани учун яна квадратга оширсак ҳам тенг кучлилик бузилмаслигини назарга олиб, давом эттирилди.

Жавоб: $[-3;\ 1)$.

22-мисол. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+4} > 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликни аввало

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2} > \sqrt{2x+4} \qquad (*)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгсизликнинг ҳар иккала қисми номанфий қийматларни қабул қилади. Шунинг учун унинг иккала қисмини квадратга кўтариш учун яна $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2} > 0$ шартни назарга оламиз ва булардан қуйидагиларни ёзамиз:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 \geqslant 0, \\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})^2 > (\sqrt{2x+4})^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ \sqrt{(x+3)(x+2)} > -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ (x+3)(x+2) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \geqslant -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant -2.$$

Жавоб: $[-2; +\infty)$.

23-мисол. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>4x-2. \qquad (1)$$

Ечиш. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ 5x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -2, \\ x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 0.$$

$x\geqslant 0$ шартда берилган тенгсизликнинг ўнг қисми фақат мусбат қийматларни қабул қилади, шу сабабли тенгсизликнинг ўринли бўлиши учун унинг чап қисмидаги айирма фақат мусбат қийматларни қабул қилиши шарт. Шуни назарга олган ҳолда (1) тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини $\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}>0$ га кўпайтирамиз ва натижада $(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{5x})>(4x-2)(\sqrt{x+2}+$ $+\sqrt{5x})\Leftrightarrow 2-4x>(4x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x})\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(4x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}+1)<0$ (2) тенгсизликка эга бўламиз. $\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}+1>0$ бўлгани учун (2) тенгсизлик $4x-2<0$, яъни $x<1/2$ бўлганда бажарилади. Энди $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x<1/2 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечиш қолди, холос. Бундан: $[0; 1/2)$.

Эслатма. Айрим тенгсизликларни ечишда сунъий усуллардан фойдаланиш ҳам мақсадга мувофиқдир.

Энди белгилаш ёрдамида ечиладиган иррационал тенгсизликларни кўриб чиқамиз.

24-мисол. $\sqrt{x^2-3x+5}>7+3x-x^2$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Ўзгарувчининг йўл қўядиган қийматлари соҳасида бевосита берилган тенгсизлик иккала қисмини квадратга ошириш натижасида x га нисбатан тўртинчи даражали тенгсизлик келиб чиқади. Уни ечиш эса техник жиҳатдан анча мураккаб масаладир. Аммо ёрдамчи номаълумдан фойдаланиб, ечимни анча соддалаштириш мумкин. $y=x^2-3x$ белгилашни киритиб, y га нисбатан қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{y+5}>7-y. \quad (*)$$

(*) тенгсизлик қуйидаги системалар бирлашмасига тенг кучли:

$$\begin{cases} 7-y<0, \\ y+5>0; \end{cases} (**) \begin{cases} 7-y\geqslant 0, \\ y+5>(7-y)^2. \end{cases} (***)$$

(**) системадан $y>7$ ни топамиз. (***) системадаги $y+5>(7-y)^2$, яъни $y^2-15y+44<0$ тенгсизликнинг барча ечимлари $4<y<11$ оралиқдан иборат бўлади, демак, (***) системанинг ечими: $4<y\leqslant 7$.

Шундай қилиб, (*) тенгсизлик қуйидаги тенгсизликлар бирлашмасига тенг кучли:

$$\left[\begin{array}{l} y>7, \\ 4<y\leqslant 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow y>4.$$

Энди номаълум x га қайтсак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$x^2-3x>4 \Leftrightarrow x^2-3x-4>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>4. \end{array}\right.$$

Натижада, берилган тенгсизликнинг барча ечимлари қуйидаги икки $x<-1$ ва $x>4$ оралиқдан иборат бўлади.

Берилган тенгсизликни қуйидагича ечсак ҳам бўлади: $\sqrt{x^2-3x+5}=y$ деб белгилаймиз, у ҳолда $y\geqslant 0$ ва $x^2-3x=y^2-5$ бўлади. Берилган тенгсизликдаги номаълумни алмаштириш натижасида $y^2+y-12>0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз, унинг ечими $y>3$ ($y<-4$ — чет илдиз, чунки у $y\geqslant 0$ шартга зид). Бундан

$$\sqrt{x^2-3x+5}>3 \Leftrightarrow x^2-3x+5>9 \Leftrightarrow x^2-3x-4>0$$

келиб чиқади, унинг ечими эса $\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-1 \end{array}\right.$ бўлади.

Жавоб: $(-\infty;\ -1)\cup(4;\ +\infty)$.

25-мисол. $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}>3$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\sqrt[3]{x}=y$ белгилашни киритамиз, у ҳолда $x=y^3$ бўлади. Энди берилган тенгсизликни $2y^2-5y-3>0$ кўринишда ёзамиз, уни ечиб, сўнгра $x=y^3$ эканини назарга олсак, изланаётган ечимлар келиб чиқади, яъни:

$$2y^2-5y-3>0 \Leftrightarrow 2(y+1/2)(y-3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y>3 \\ y<-1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x}>3 \\ \sqrt[3]{x}<-1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>27 \\ x<-1/8. \end{array}\right.$$

Жавоб: $(-\infty;\ -1/8)\cup(27;\ +\infty)$.

26-мисол. $\frac{2}{x}-\frac{1}{2}>\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $y=\frac{2}{x}$ белгилашни киритамиз. У ҳолда берилган тенгсизлик қуйидаги кўринишни олади:

$$y-\frac{1}{2}>\sqrt{y^2-\frac{3}{4}}.$$

Бу тенгсизлик қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases} y-\frac{1}{2}>0, \\ y^2-\frac{3}{4}\geqslant 0, \\ \left(y-\frac{1}{2}\right)^2>\left(\sqrt{y^2-\frac{3}{4}}\right)^2. \end{cases}$$

Уни ечиб, $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant y<1$ ни топамиз. Энди x га қайтамиз:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\frac{2}{x}<1.$$

Бундан $2<x\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ни топамиз.

Энди куб илдиз қатнашган тенгсизликларни кўриб чиқамиз.

27-мисол. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}<-\sqrt[3]{x+3}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{\varphi(x)}>\sqrt[3]{\psi(x)}$ кўринишдаги тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини кубга ошириш натижасида

$$f(x)\pm\varphi(x)+3\sqrt[3]{f(x)\cdot\varphi(x)}\,(\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{\varphi(x)})>\psi(x)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Фақат иррационал тенгламаларни ечиш жараёнида $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{\varphi(x)}$ йиғиндини $\sqrt[3]{\psi(x)}$ билан алмаштириш мумкин, аммо тенгсизликларни ечаётганда эса бундай алмаштириш мумкин эмас, чунки шартда $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{\varphi(x)}$ йиғинди $\sqrt[3]{\psi(x)}$ дан катта бўлиши лозим. Лекин кўп марта тенгсизликни қайта-қайта кубга ошириш эса умумий ҳолда илдиз белгиси (яъни радикал) дан қутилишга олиб келмайди, чунки шакл алмаштириш жараёнида тенг кучлилик сақланмаслиги мумкин, шу сабабли илдиздан ҳеч қутила олмаймиз. Бундай тенгсизликларни ечиш учун оралиқлар усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун эса аввал ўзгарувчининг қандай қийматларидан тенгсизликнинг чап қисми ўнг қисмига тенг бўлишини аниқлаб олиш зарур, яъни $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{\varphi(x)} = \sqrt[3]{\psi(x)}$ тенгламанинг илдизини топиш керак.

Юқоридаги мулоҳазага кўра $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = -\sqrt[3]{x+3}$ (*) тенгламанинг илдизини топамиз. Бунинг учун (*) тенгламанинг ҳар иккала қисмини кубга кўтарамиз ва ушбу бобнинг 1-§ да келтирилган формуладан фойдаланиб,

$$(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2})^3 = (-\sqrt[3]{x+3})^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1+x+2-3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)} = -(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)} = x+2 \quad (**)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Энди (**) тенгламанинг ҳар иккала қисмини кубга кўтарсак, $(x+1)(x+2)(x+3) = (x+2)^3$ келиб чиқади. Бундан эса тенглик фақат $x+2=0$, яъни $x=-2$ бўлгандагина бажарилиши келиб чиқади. Шундай қилиб, $(-\infty;\ -2)$ оралиқдан олинган x нинг барча қийматларида тенгсизликнинг чап қисми манфий, ўнг қисми эса мусбат бўлади; демак, берилган тенгсизлик тўғри сонли тенгсизликка айланади. Акс ҳолда эса тенгсизлик ўринли бўлмайди.

Жавоб: $(-\infty;\ -2)$.

28-мисол. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+3} < 1.$$

Ечиш. Агар тенгсизликнинг чап қисмига диққат билан қарасак, x нинг исталган ҳақиқий қийматларида $x+1 < x+3$, яъни $1<3$. Шунинг учун $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+3} < 0$ бўлади, бундан берилган тенгсизлик барча $x \in R$ да ҳам ҳар доим ўринли эканлиги келиб чиқади.

Демак, ҳар бир мисолни ечиш учун ижодий ёндошиш лозим экан.

Жавоб: $x \in R$.

29-мисол. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}.$$

Ечиш. Тенгсизликнинг йўл қўядиган қийматлари соҳаси ушбу системадан топилади:

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ 3x-2 \geqslant 0, \\ 4x-3 \geqslant 0, \\ 5x-4 \geqslant 0, \end{cases}$$

бундан $x \geqslant 4/5$.

Берилган тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}. \quad (*)$$

$5x-4>2x-1 \Leftrightarrow x>1$ ва $3x-2 \geqslant 4x-3 \Leftrightarrow x \leqslant 1$ бўлганлигидан, тенгламанинг йўл қўядиган қийматлари соҳасини $4/5 \leqslant x \leqslant 1$ кесмага ҳамда $x>1$ оралиққа бўлиш ва буларнинг ҳар бирида (*) тенгсизликни ечиш мақсадга мувофиқ.

$4/5 \leqslant x \leqslant 1$ кесмада $\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1} \leqslant 0$ ва $\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3} \geqslant 0$ тенгсизликлар ўринли, шунинг учун $4/5 \leqslant x \leqslant 1$ кесмада (*) тенгсизлик, шунингдек, берилган тенгсизлик ечимга эга эмас.

$x>1$ оралиқда $\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}>0$ ва $\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}<0$ тенгсизликлар ўринли, шунинг учун $x>1$ оралиқдан олинган x нинг исталган қийматлари (*) тенгсизликнинг, шунингдек, берилган тенгсизликнинг ечимлари бўлади.

Шундай қилиб, берилган тенгсизликнинг ечимлари соҳаси $x>1$ бўлар экан.

Машқлар

Қуйидаги тенглама ва тенгсизликларни ечинг:

1. $xy-8y \leqslant 4x-32$.
2. $xy \geqslant 2y-6x+12$.
3. $x^2-4y^2 \leqslant 0$.
4. $\frac{y}{x-y} \geqslant 1$.
5. $\frac{x+2y}{2x-y} \leqslant 1$.
6. $y \leqslant \sqrt{x-1}-2$.
7. $\sqrt{y-1} \geqslant \sqrt{x^2-1}$.
8. $\sqrt{4x^2+4y^2-4} \geqslant 2y+1$.
9. $\sqrt{y+x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2+2}$.
10. $\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x$.
11. $\sqrt{x^2-3x+2}>2-x$.
12. $\sqrt{2x-x^2}<5-x$.
13. $\sqrt{x^2-3x-10} \leqslant 8-5x$.
14. $\sqrt{2x-1} \leqslant x-2$.
15. $\sqrt{(x-6)(1-x)}<3+2x$.
16. $(x^2-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$.
17. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \leqslant 0$.
18. $\sqrt{x^2-1}>x$.
19. $\sqrt{3x-10}>\sqrt{6-x}$.
20. $\sqrt{(y-2)/(x-3)}>-1$.
21. $\sqrt{(x+1)(x-y)} \geqslant 1$.
22. $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1$.
23. $3\sqrt{x}>1+\sqrt{x+3}$.
24. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>2x-1$.

25. $\sqrt{3x^2+5x+7}-$
$-\sqrt{3x^2+5x+2}>1.$

26. $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geqslant 0.$

27. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}}>$
$>0.$

28. $\frac{\sqrt{x+20}}{x}-1<0.$

29. $\sqrt{y|x|}>y.$

30. $\sqrt[3]{x-16}>\sqrt[3]{x+3}-$
$-1.$

31. $\sqrt{(x^3+8)/x}>x-2.$

32. $x^2-2\sqrt{x^2-24}=39.$

33. $(x+1)\sqrt{16x+17}=$
$=(x+1)(8x-23).$

34. $\sqrt{2x^2+8x+1}-$
$-x=3.$

35. $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+$
$+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8.$

36. $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}.$

V БОБ. УЗГАРУВЧИЛАРИ МОДУЛ БЕЛГИСИ ОСТИДА БУЛГАН ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ГРАФИК УСУЛДА ЕЧИШ

Ушбу бобда биз ўзгарувчилари модул белгиси остида бўлган турли тенгсизликлар ечимларини топиш ҳақида гап юритамиз. Ана шу мақсадда маълум шартлар бўйича уларни параграфларга бўлдик.

Бир ўзгарувчили тенгсизликларнинг ечимлари мажмуасини асосан аналитик усулда, икки ўзгарувчиларникини эса график усулда кўрсатиш мақсадга мувофиқдир, шу билан бир қаторда айрим тенгсизлик ечимлари мажмуасини чизмалар сонини кўпайтирмаслик мақсадида сўзлар орқали тавсифладик ёки чизмасини чизишни ўқувчига вазифа сифатида бердик.

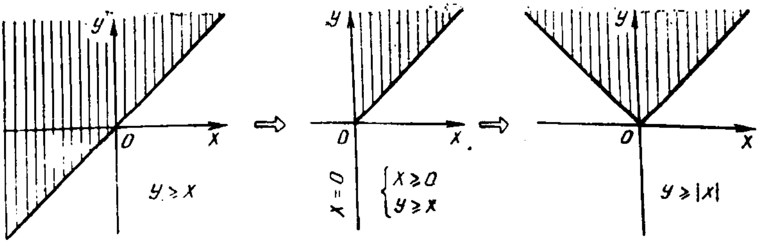
1-§. $y\gtrless f(|x|)$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

$y=f(|x|)$ функция жуфт функция бўлгани учун унинг графиги ординаталар (яъни Oy) ўқига нисбатан симметрик бўлади. Аслини олганда $|x|=|-x|$ бўлиб, $f(|-x|=f(x)$, яъни $y=f(|x|)\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y=f(x)\end{cases}$ ёки $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ y=f(-x)\end{cases}$ бўлади. Шунинг учун $y=f(|x|)$ функция графигини ясаш учун аввало унинг $x\geqslant 0$ қисми чизилади, сўнгра уни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, чап қисми ҳосил қилинади.

Умумий ҳолда $y \gtrless f(|x|) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \gtrless f(x) \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \gtrless f(-x) \end{cases}$ бўлади.

1-мисол. $y \geqslant |x|$ тенгсизликни ечинг.

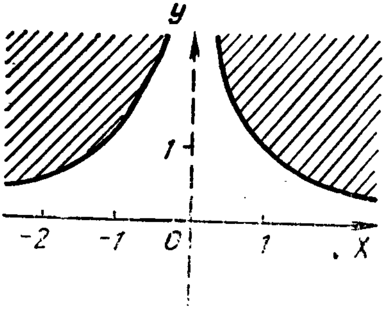
Ечиш. Биламизки, $y \geqslant x$ тенгсизликни $y = x$ тўғри чизиқ (яъни I ва III координата бурчаклари биссектрисалари) ва ундан юқоридаги ярим текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради, 1-қадамда шу графикнинг абсциссалар ўқидан пастда қолган қисмини «ўчирамиз», яъни ординаталар ўқи ($x=0$) ва ундан ўнг томондаги қисмини қолдирамиз; 2-қадамда ординаталар ўқидан ўнгда ҳосил бўлган нуқталар мажмуасини ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантирамиз ва натижада $y \geqslant |x|$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси (яъни графиги) га эга бўламиз (66-расм).



66-расм.

Шундай қилиб, изланаётган мажмуа I ва II координата бурчаклари биссектрисалари (яъни $y = |x|$ тенглама графиги) ва ундан юқорида қолган текислик нуқталари мажмуасидан иборат бўлади.

Ёки қуйидагича муҳокама қилсак ҳам бўлади: $x \geqslant 0$ да берилган тенгсизлик $y \geqslant x$ кўринишни олади. Бу ҳолда $y \geqslant x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуасининг ординаталар ўқидан ўнг қисми (яъни $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant x \end{cases}$ система ечимлари мажмуаси) қолдирилади, сўнгра уни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантирилса, берилган тенгсизликнинг $x \leqslant 0$ бўлгандаги (яъни $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant -x \end{cases}$ системасининг) ечимлари мажмуаси ҳосил бўлади, ҳосил бўлган графиклар бирлашмаси — изланаётган ечим (графиги) бўлади.



67- расм.

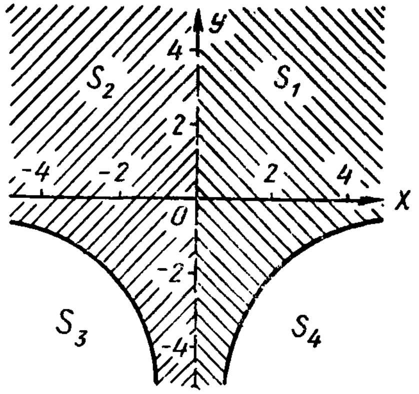
2-мисол. $y \geqslant \frac{1}{|x|}$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Тенгсизлик, агар $x > 0$ бўлса, $y \geqslant \frac{1}{x}$ ва агар $x < 0$ бўлса, $y \geqslant -\frac{1}{x}$ кўринишни олади. Биз биламизки, I чоракдаги гипербола тармоғи ва ундан юқорида жойлашган текислик нуқталари мажмуаси $y \geqslant \frac{1}{x}$ тенгсизликни қаноатлантиради. Ҳосил бўлган текислик нуқталари мажмуасини ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантирсак, $\begin{cases} x < 0, \\ y \geqslant -\frac{1}{x} \end{cases}$ системанинг ечимлари мажмуаси (ординаталар ўқининг чап қисмида) ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, изланаётган мажмуа — I ва II чоракдаги гипербола тармоқларидан ва улардан юқорида жойлашган текислик нуқталари мажмуасидан иборатдир (67- расм).

$y \leqslant \frac{1}{|x|}$ тенгсизлик $\left(\text{яъни } y \leqslant \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y \leqslant \frac{1}{x} \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x < 0, \\ y \leqslant -\frac{1}{x} \end{cases}\right)$ни I ва II чоракдаги гипербола тармоқлари ва улардан қуйида қолган текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради (ечимлар ординаталар ўқи, яъни $x = 0$ тўғри чизиқ нуқталари кирмайди, шунинг учун уни чизмада пунктир чизиқ билан кўрсатилади, чунки ординаталар ўқи нуқталари тенгсизликнинг ечимлари соҳасига кирмайди).

Умумий ҳолда $y \gtreqless f(-|x|)$ кўринишдаги тенгсизлик ечимлари мажмуасини координата текислигида кўрсатиш учун аввал $x \leqslant 0$ ярим текисликда жойлашган қисми (яъни $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \gtreqless f(x) \end{cases}$) нинг графиги олинади, сўнгра уни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантирилади (бунда $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \gtreqless f(-x) \end{cases}$ система ечимлари мажмуаси ҳосил бўлади) ва ҳосил бўлган графиклар бирлаштирилади.



68- расм.

3-мисол. $y \geqslant -\frac{1}{|x|}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш.

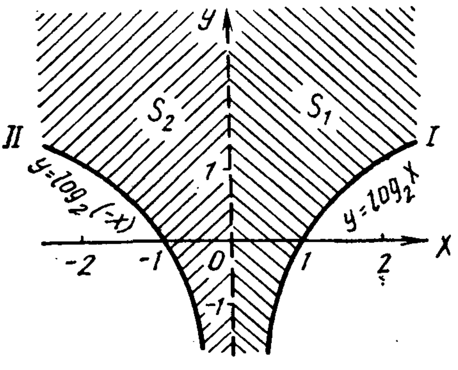
$$y \geqslant -\frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y \geqslant -\frac{1}{x}; \end{cases} (S_1) \\ \begin{cases} x < 0, \\ y \geqslant \frac{1}{x} \end{cases} (S_2) \end{array}\right.$$

(68- расм).

$y \leqslant -\frac{1}{|x|}$ тенгсизлик (яъни $y \leqslant -\frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y \leqslant \frac{1}{x} \end{cases} (S_3)$ ёки $\begin{cases} x > 0, \\ y \leqslant -\frac{1}{x} \end{cases} (S_4)$ ни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуаси — III ва IV чоракдаги гипербола тармоғи ва улардан пастда қолган текислик нуқталари (68- расмдаги S_3 ва S_4 соҳалар) мажмуасидан иборатдир.

4-мисол. $y \geqslant \log_2|x|$ тенгсизликни ечинг.

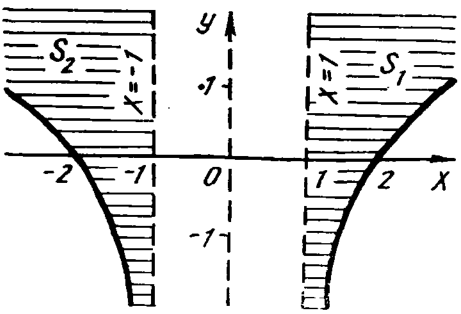
Ечиш. Тенгсизлик $x \neq 0$ да аниқланган. Аввал биз $y = \log_2|x|$ функция (тенглама) графигини ясашни қуйида келтирамиз:



69- расм.

а) $x > 0$ учун $y = \log_2 x$ функциянинг графигини ясаймиз, бу $\begin{cases} x > 0, \\ y = \log_2 x \end{cases}$ (I) аралаш системанинг графигидир.

б) $x < 0$ учун эса чизилган график (1) ни ординаталар ўқига нисбатан симметрик қилиб ясаймиз, бунда $\begin{cases} x < 0, \\ y = \log_2(-x) \end{cases}$ аралаш системанинг графиги



70-расм.

ҳосил бўлади (ординаталар ўқининг чап қисмида). Ҳосил бўлган графиклар бирлашмаси $y = \log_2|x|$ функция графигидир. Ҳосил бўлган графиклар орасидаги текислик нуқталари мажмуаси берилган тенгсизлик (яъни $y \geqslant \log_2|x| \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ y\geqslant \log_2 x \end{cases} (S_1)$ ёки $\begin{cases} x<0, \\ y\geqslant \log_2(-x) \end{cases} (S_2)$ да аниқланган ечимлари мажмуасидир, унга ординаталар ўқи нуқталари кирмайди (69-расм). $y = \log_2|x|$ функция графиги (69-расмдаги I ва II эгри чизиқлар) ва ундан қуйида қолган текислик нуқталари мажмуаси $y \leqslant \log_2|x|$ тенгсизлик графигидир.

5-мисол. $y \geqslant \log_2(|x|-1)$ тенгсизликни ечинг.

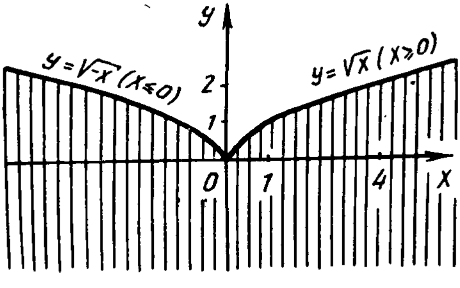
Ечиш. Берилган тенгсизлик $|x|-1>0 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1. \end{array}\right.$ Шунинг учун

$$y \geqslant \log_2(|x|-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x>1, \\ y\geqslant \log_2(x-1) \end{cases} & (S_1) \\ \begin{cases} x<-1, \\ y\geqslant \log_2(-x-1) \end{cases} & (S_2) \end{array}\right.$$

бўлади.

$y \geqslant \log_2|x|$ тенгсизликнинг $x>0$ бўлгандаги (яъни $\begin{cases} x>0, \\ y\geqslant \log_2 x \end{cases}$ системанинг) ечимлари мажмуасини (69-расмдаги S_1 соҳа) абсциссалар ўқи бўйича 1 бирлик ўнгга параллел кўчириш натижасида $\begin{cases} x>1, \\ y\geqslant \log_2(x-1) \end{cases} (S_1)$ системанинг, $x<0$ бўлгандаги (яъни $\begin{cases} x<0, \\ y\geqslant \log_2(-x) \end{cases}$ системанинг) ечимлари мажмуасини (69-расмдаги S_2 соҳа) эса абсциссалар ўқи бўйича

(— 1) бирлик чапга параллел кўчириш натижасида $\begin{cases} x < -1, \\ y \geqslant \log_2(-x-1) \end{cases}$ (S_2) системанинг ечимлари мажмуаси ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган графиклар бирлашмаси — изланаётган графикдир (70- расм).



71- расм.

6- мисол.

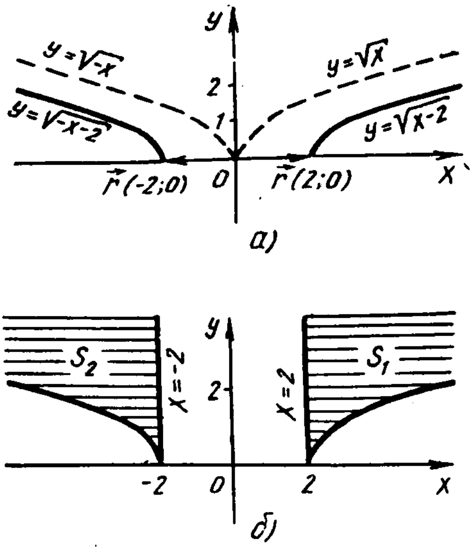
$y \leqslant \sqrt{|x|}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $y \leqslant \sqrt{|x|} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant \sqrt{x} \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant \sqrt{-x}. \end{cases}$

Изланаётган мажмуа 71-расмда кўрсатилган.

7-мисол. $y \geqslant \sqrt{|x|-2}$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Тенгсизликнинг ўнг қисми $|x| - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x| \geqslant 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -2 \end{array}\right.$ да аниқланган, яъни $X \in (-\infty;\ 2] \cup [2;\ +\infty)$. Шунинг учун изланаётган ечимни $x = -2$ ва $x = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полоса нуқталаридан бошқа текислик қисмларидан қидирамиз.



а)

б)

72- расм.

$y = \sqrt{|x|-2}$ функция графиги $y = \sqrt{x}$ функция графигини абсциссалар ўқи бўйича ўнг томонга 2 бирлик (яъни $\vec{r}\ (2,\ 0)$

вектор қадар), сўнгра $y=\sqrt{-x}$ функция графигини абсциссалар ўқи бўйича (—2) бирлик (яъни $\vec{r}(-2,\ 0)$ вектор қадар) параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлади (72-*а* расм).

Ёки қуйидагича муҳокама қилсак ҳам бўлади:

$$y=\sqrt{|x|-2}=\begin{cases}\sqrt{x-2}, & 2\leqslant x<\infty \text{ бўлса},\\ \sqrt{-x-2}, & -\infty<x\leqslant -2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

Бу икки формула билан берилган функциянинг графигини чизиш учун аввал $x\geqslant 2$ бўлганда $y=\sqrt{x-2}$, яъни $\begin{cases}x\geqslant 2,\\ y=\sqrt{x-2}\end{cases}$ аралаш система графигини, сўнгра $x\leqslant -2$ бўлганда $y=\sqrt{-x-2}$, яъни $\begin{cases}x\leqslant -2,\\ y=\sqrt{-x-2}\end{cases}$ аралаш система графигини, ва ниҳоят, ҳосил бўлган графиклар бирлашмаси $y=\sqrt{|x|-2}$ функция графигини беради.

$$y\geqslant\sqrt{|x|-2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\geqslant 2,\\ y\geqslant\sqrt{x-2};\end{cases} & (S_1)\\ \begin{cases}x\leqslant -2,\\ y\geqslant\sqrt{-x-2}\end{cases} & (S_2)\end{array}\right. \quad \text{(72-}б\text{ расм).}$$

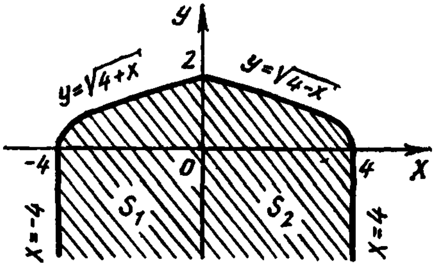
8-мисол. $y\leqslant\sqrt{4-|x|}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизлик $4-|x|\geqslant 0\Leftrightarrow|x|\leqslant 4\Leftrightarrow -4\leqslant x\leqslant 4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\leqslant x\leqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 4\end{array}\right.$ да аниқланган, яъни $X\in[-4;\ 4]$.

$y=\sqrt{x}$ функция графигининг $0\leqslant x\leqslant 4$ оралиқдаги қисмини абциссалар ўқи бўйича чап томонга (—4) бирлик (яъни $\vec{r}(-4;\ 0)$ вектор қадар) параллел кўчириш натижасида $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 0,\\ y=\sqrt{4+x}\end{cases}$, аралаш система графиги, сўнгра ҳосил бўлган графикни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4,\\ y=\sqrt{4-x}\end{cases}$, аралаш система графигини (яъни бу аралаш система графигини $y=\sqrt{-x}$ функция графигининг $-4\leqslant x\leqslant 0$ оралиқдаги қисмини абсциссалар ўқи бўйича 4 бирлик ўнг томонга, яъни $\vec{r}\ (4,\ 0)$ вектор қадар параллел кўчириш натижасида ҳам) ҳосил қиламиз, ҳосил бўлган графиклар бирлашмаси эса $y=\sqrt{4-|x|}$ функция графиги бўлади (графикни чизишни ўзингизга ҳавола қиламиз).

$$y \leqslant \sqrt{4-|x|} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 0, \\ y \leqslant \sqrt{4+x} \end{cases} (S_1)$$

$$\text{ёки} \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ y \leqslant \sqrt{4-x} \end{cases} (S_2)$$

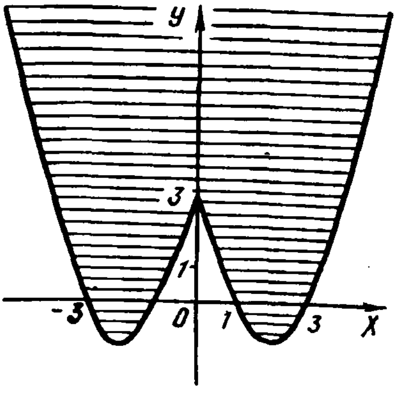


73- расм.

Изланаётган текислик нуқталари мажмуаси 73- расмда кўрсатилган.

9- мисол. $y \geqslant x^2 - 4\cdot|x| + 3$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $x^2 = |-x|^2 = |x|^2$ бўлгани учун $y = x^2 - 4|x| + 3$ жуфт функциядир. Шунинг учун $x \geqslant 0$ да $y = x^2 - 4x + 3$ функциянинг графигини ясаймиз. $a = 1 > 0$ бўлгани учун парабола тармоқлари юқорига йўналган. График ординаталар ўқини (0; 3) нуқтада, абсциссалар ўқини эса (1; 0) ва (3; 0) нуқталарда кесади. $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ эканини назарга олсак, парабола учи (2; — 1) нуқтада бўлиши келиб чиқади. Шу маълумотлардан фойдаланиб, $x \geqslant 0$ ҳол учун график чизилади; ҳосил бўлган графикни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, $x \leqslant 0$ ҳол учун график ҳосил қилинади, ҳосил бўлган графиклар бирлашмаси $y = x^2 - 4\cdot|x| + 3$ функция графиги бўлади (74- расмдаги чегара нуқталари мажмуаси).

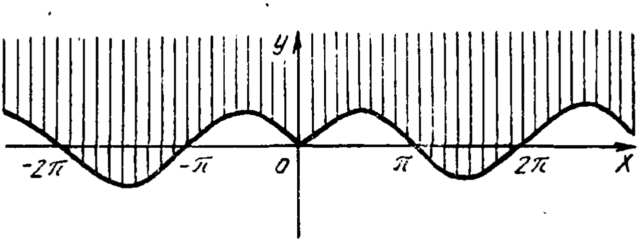


74- расм.

$y = x^2 - 4\cdot|x| + 3$ функция графиги ва ундан юқоридаги текислик қисми нуқталари мажмуаси изланаётган ечимдир (74- расм).

10- мисол. $y \geqslant \sin|x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $x \geqslant 0$ учун $y = \sin x$ функция графигини ясаймиз, $x \leqslant 0$ учун эса ясалган графикни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, графикни ҳосил қиламиз, натижада



75- расм.

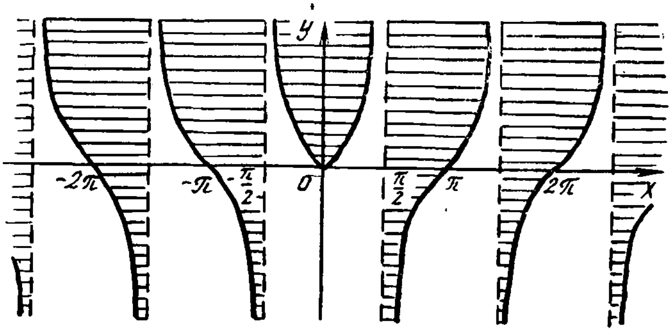
$y = \sin|x|$ функция графиги ҳосил бўлади (75-расмдаги чегара нуқталари мажмуаси).

$y = \sin|x|$ функция графиги ва ундан юқоридаги текислик нуқталари мажмуаси изланаётган ечимдир (75- расм).

11-мисол. $y \geqslant \operatorname{tg}|x|$ тенгсизлик ечимларини кўрсатинг.

Ечиш.

$$y \geqslant \operatorname{tg}|x| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant \operatorname{tg}x \end{cases} (1) \text{ ёки } \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant -\operatorname{tg}x. \end{cases} \qquad (2)$$



76- расм.

76- расмда изланаётган мажмуа тасвирланган (ординаталар ўқининг ўнг қисмидаги штрихлаб кўрсатилган текислик нуқталари мажмуаси (1) системанинг, чап қисмидагиси эса (2) системанинг ечимлари мажмуасидир).

2- §. $f(|x|) \gtreqless g(x)$ кўринишдаги тенгсизликларни ечиш

Одатда ўзгарувчиси модул белгиси остида бўлган тенгсизликларни ечишда тенгсизликнинг йўл қўядиган қийматлари соҳасини модул остидаги ифоданинг ишораси сақланадиган мажмуаларга бўлиш лозим. Бу мажмуаларда тенгсизликни ечиб ва ҳосил бўлган ечимларни бирлаштириб, берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси топилади.

$$\text{I. } f(|x|) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ f(x) = g(x); \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ f(-x) = g(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{II. } f(|x|) > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ f(x) > g(x); \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ f(-x) > g(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{III. } f(|x|) \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant g(x) \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ f(-x) \geqslant g(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{IV. } f(|x|) < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ f(x) < g(x); \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ f(-x) < g(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{V. } f(|x|) \leqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant g(x); \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ f(-x) \leqslant g(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1-мисол. $x^2 - |x| - 2 \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш.

$$x^2 - |x| - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 2 \geqslant 0; \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ x^2 + x - 2 \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ (x+1)(x-2) \geqslant 0; \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ (x-1)(x+2) \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -1; \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x \leqslant -2 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x \geqslant 2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x \leqslant -1; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ x \geqslant 1; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ x \leqslant -2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ \varnothing; \\ \varnothing; \\ x \leqslant -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -2. \end{array}\right.$$

Жавоб: $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

2-мисол. $x^2-5|x|+6<0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизлик қуйидаги иккита тенгсизликлар системасига (бирлашмасига) тенг кучли:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2-5x+6<0, \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2+5x+6<0. \end{cases} \quad (2)$$

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ бўлганлигидан x^2-5x+ $+6<0$ тенгсизликнинг барча ечимлари мажмуаси $2<x<3$ интервал бўлади; (1) система ечими ҳам $2<x<3$, чунки бу интервал $x \geqslant 0$ шартнинг бир қисми холос.

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ тенгликдан $x^2+5x+6<0$ тенгсизликнинг $-3<x<-2$ шартда бажарилиши келиб чиқади, бу оралиқ бир вақтда $x \leqslant 0$ шартнинг бир қисми бўлгани учун (2) тенгсизлик ечими ҳам бўлади.

(1) ва (2) система ечимларини бирлаштириб, берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини ҳосил қиламиз, яъни

$$x \in (-3; -2) \cup (2; 3).$$

$x^2-5|x|+6<0$ тенгсизликни $|x|=t$ $(t \geqslant 0)$ белгилашни киритиш ёрдамида ечсак ҳам бўлади (бунда $x^2=|x|^2$ эканини назарга олиш зарур), демак, биз аввал

$$\begin{cases} t \geqslant 0, \\ t^2-5t+6<0 \end{cases}$$

система ечими $2<t<3$ оралиқни топамиз, сўнгра $2<|x|<3$ тенгсизликни ечиб, берилган тенгсизлик ечимлари мажмуасини топамиз, яъни:

$$2<|x|<3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2<x<3, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 2<-x<3, \\ x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<3 \\ -3<x<-2. \end{array}\right.$$

3-мисол. $|x|<-x^2+x+6$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликни IV тенг кучли алмаштиришдан фойдаланиб, иккита тенгсизликлар системаси бирлашмаси кўринишида ёзамиз ва ҳосил бўлган системаларни ечамиз, яъни:

$$|x|<-x^2+x+6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x<-x^2+x+6; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ -x<-x^2+x+6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 < 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2 - 2x - 6 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ |x| < \sqrt{6}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ (x - 1 - \sqrt{7})(x - 1 + \sqrt{7}) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ -\sqrt{6} < x < \sqrt{6}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ 1 - \sqrt{7} < x < 1 + \sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < \sqrt{6}, \\ 1 - \sqrt{7} < x \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{7} < x < \sqrt{6}.$$

Жавоб: $(1 - \sqrt{7};\ \sqrt{6})$.

3-§. $y \gtreqless |f(x)|$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

1. $y \geqslant |f(x)|$ кўринишдаги тенгсизликлар муҳокамаси.

Соннинг модули таърифига кўра $y \geqslant |f(x)|$ тенгсизлик $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ y \geqslant f(x) \end{cases}$ ёки $\begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ y \geqslant -f(x) \end{cases}$ бўлгандагина ўринли бўлади.

Демак, $y \geqslant |f(x)|$ кўринишдаги тенгсизликлар қуйидаги тенг кучлилик схемаси асосида ечилади, яъни:

$$y \geqslant |f(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ y \geqslant f(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ y \geqslant -f(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Бу кўринишдаги тенгсизлик ечимлари мажмуаси, яъни графиги абсциссалар ўқидан юқоридаги ёпиқ текисликда жойлашади, чунки у ярим текисликда жойлашган исталган нуқтанинг ординатаси номанфий.

График қуйидаги тартибда ясалади.

1-қадам. $y = f(x)$ функция графигини ясаймиз. Графикнинг абсциссалар ўқидан пастда жойлашган қисмини пунктир чизиқ билан кўрсатамиз.

2-қадам. $y = f(x)$ функция графигининг абсциссалар ўқидан пастда жойлашган, яъни пунктир билан кўрсатилган қисмини абсциссалар ўқига нисбатан юқоридаги ярим текисликка симметрик акслантириш натижасида ҳосил бўлган график $y = |f(x)|$ функция графиги бўлади.

3-қадам. $y = |f(x)|$ функция графиги ва ундан юқорида жойлашган текислик нуқталари мажмуаси $y \geqslant |f(x)|$ тенгсизлик ечимлари мажмуаси (яъни графиги) бўлади.

2. $y \leqslant |f(x)|$ кўринишдаги тенгсизликларнинг муҳокамаси. Бу кўринишдаги тенгсизликлар қуйидаги тенг кучлилик схемалари асосида ечилади:

$$y \leqslant |f(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ y \leqslant f(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ y \leqslant -f(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Графикни ясаш худди юқорида келтирилган алгоритмга ўхшаш олиб борилади, фақат охирги қадам қуйидагича ўзгаради, яъни:

3-қадам. $y = |f(x)|$ функция графиги ва ундан пастда жойлашган текислик нуқталари мажмуаси $y \leqslant |f(x)|$ тенгсизлик ечимлари мажмуаси бўлади.

Агар фақат $y = |f(x)|$ функция графигини ясашга тўғри келса, у ҳолда қуйидаги тенг кучлилик схемасидан фойдаланилади:

$$y = |f(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ y = f(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ y = -f(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

$y = |f(x)|$ функция графигини икки усул билан ясаш мумкин. Биринчи усул юқорида қайд қилинган дастлабки икки қадамдан, иккинчи усул эса бевосита тенг кучлилик схемаси асосида ясашдан иборатдир (яъни $y = f(x)$ ва $y = -f(x)$ функциялар графикларининг абсциссалар ўқидан юқоридаги қисм нуқталари мажмуасидир).

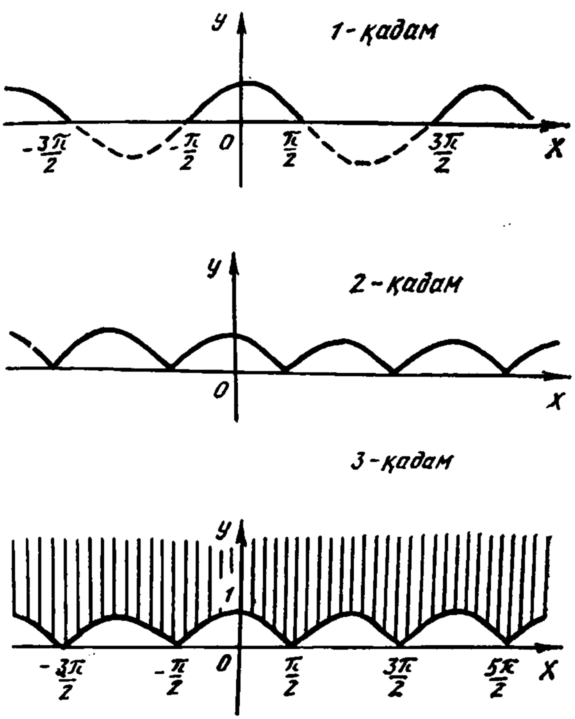
1-мисол. $y \geqslant |\cos x|$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. 1-қадам. $y = \cos x$ функция графигини ясаймиз ва графикнинг абсциссалар ўқидан пастда жойлашган қисмларини пунктир чизиқ билан кўрсатамиз.

2-қадам. $y = \cos x$ функция графигининг абсциссалар ўқидан пастда жойлашган қисмларини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, $y = |\cos x|$ функция графигини ҳосил қиламиз.

3-қадам. $y = |\cos x|$ функция графиги ва ундан юқорида жойлашган текислик нуқталари мажмуаси изланаётган графикдир (77-расм).

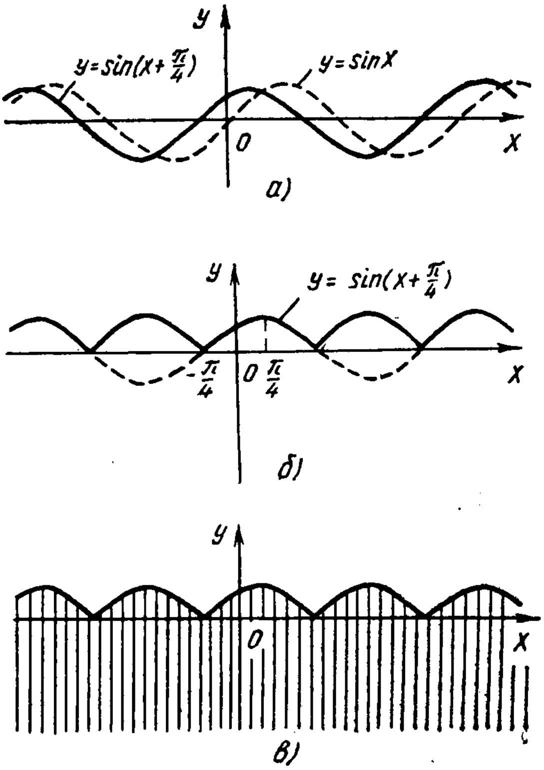
2-мисол. $y \leqslant \left|\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right|$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.



77- расм.

Ечиш. $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ эканини назарга олсак, у ҳолда берилган тенгсизлик $y\leqslant\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ кўринишга келиб қолади.

$y=\sin x$ функция графигини абсциссалар ўқи бўйича $\frac{\pi}{4}$ қадар чапга кўчирсак, $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ функциянинг графиги ҳосил бўлади (78-*а* расм). $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ функция графигининг абсциссалар ўқидан пастда қолган қисмини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантирсак, $y=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ функциянинг графиги ҳосил бўлади (78-*б* расм). Изланаётган мажмуа 78-*в* расмда тасвирланган.



78- расм.

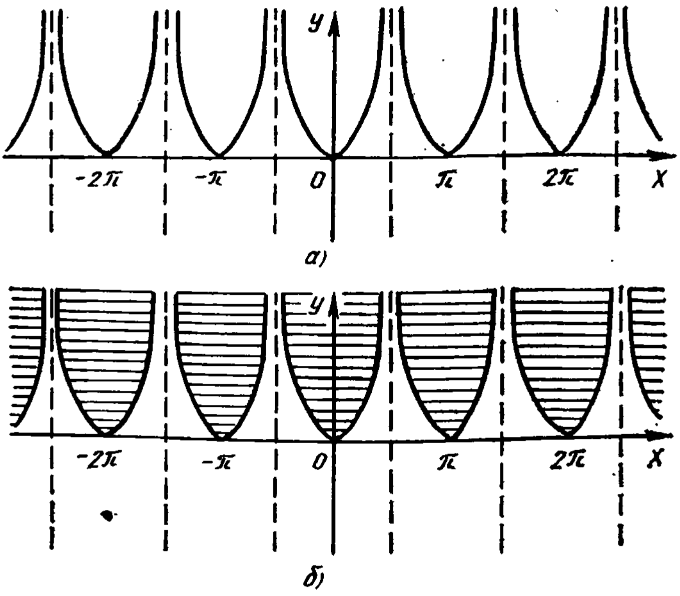
3-мисол. $y \geqslant |\mathrm{tg}x|$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш.

$$y \geqslant |\mathrm{tg}x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\mathrm{tg}x \geqslant 0,\\ y \geqslant \mathrm{tg}x;\end{cases}\\ \begin{cases}\mathrm{tg}x \leqslant 0,\\ y \geqslant -\mathrm{tg}x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\\ y \geqslant \mathrm{tg}x;\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \pi n,\\ y \geqslant -\mathrm{tg}x.\end{cases}\end{array}\right.$$

79-*а* расмда $y = |\mathrm{tg}x|$ функция графиги кўрсатилган. Шу функция графиги ва ундан юқорида қолган текислик нуқталари мажмуаси изланаётган мажмуадир (79-*б* расм).

4-мисол. $y \leqslant |2^x - 1|$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.



79- расм.

Ечиш. 1-усул. Шу параграфдаги 2-пунктда келтирилган тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб, изланаётган ечимлар мажмуасини топамиз:

$$y \leqslant |2^x - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - 1 \geqslant 0, \\ y \leqslant 2^x - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 1 \leqslant 0, \\ y \leqslant 1 - 2^x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x \geqslant 1, \\ y \leqslant 2^x - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x \leqslant 1, \\ y \leqslant -2^x + 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

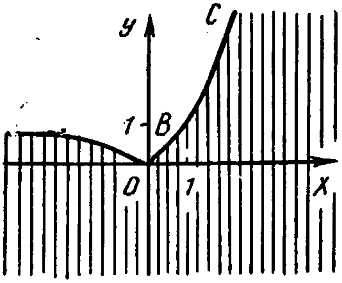
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant 2^x - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant -2^x + 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Изланаётган мажмуа 80-расмда кўрсатилган.

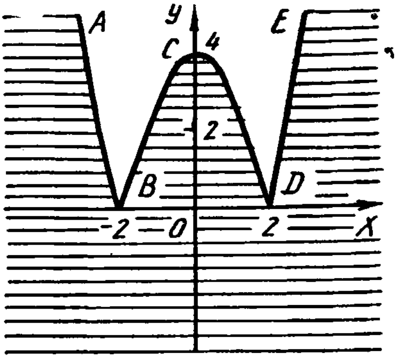
2-усул. Шу параграфнинг 2-пунктида келтирилган алгоритм бўйича изланаётган ечимлар мажмуаси топилади.

80-расмдаги *ABC* эгри чизиқ $y = |2^x - 1|$ функция графигидир.

5-мисол. $y \leqslant |4 - x^2|$ тенгсизликни ечинг.



80- расм.



81- расм.

Ечиш.

$$y \leqslant |4-x^2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x^2 \geqslant 0,\\ y \leqslant 4-x^2;\end{cases}\\ \begin{cases}4-x^2 \leqslant 0,\\ y \leqslant -4+x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2 \leqslant 4,\\ y \leqslant -x^2+4;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2 \geqslant 4,\\ y \leqslant x^2-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}-2 \leqslant x \leqslant 2,\\ y \leqslant -x^2+4;\end{cases} & (S_1)\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x \geqslant 2\\ x \leqslant -2,\end{array}\right.\\ y \leqslant x^2-4.\end{cases} & (S_2)\end{array}\right.$$

81-расмдаги $ABCDE$ эгри чизиқ $y=|4-x^2|$ тенгламанинг графигидир, шу эгри чизиқ ва ундан пастдаги текислик нуқталари мажмуаси эса изланаётган ечимдир.

4-§. $|f(x)| \gtrless g(x)$ кўринишдаги тенгсизликларни ечиш

1. $|f(x)| < g(x)$ кўринишдаги тенгсизликлар

$$\begin{cases}f(x) < g(x),\\ -f(x) < g(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) < g(x),\\ f(x) > -g(x)\end{cases}$$

системага тенг кучли, бунда $f(x)$ ва $g(x)$ — бир ўзгарувчили ихтиёрий функциялардир.

$g(x) \leqslant 0$ бўладиган x лар учун бу система, шунинг билан бир қаторда берилган тенгсизлик ечимга эга бўлмайди, чунки номанфий сон мусбат бўлмаган сондан кичик бўла олмайди.

Хусусан, $|f(x)| < a$ тенгсизлик $a \leqslant 0$ бўлганда ечимга эга эмас, $a > 0$ бўлганда эса у

$$\begin{cases} f(x) < a, \\ -f(x) < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a \end{cases}$$

системага тенг кучлидир.

1-мисол. Тенгсизликни ечинг: $|x^2-2x| < x$ (*)

Ечиш. $(*) \Leftrightarrow -x < x^2-2x < x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x > -x, \\ x^2-2x < x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x > 0, \\ x^2-3x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) > 0, \\ x(x-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < 0; \end{array}\right. \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ 0 < x < 3; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x < 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 3, \\ \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Жавоб: (1; 3).

2-мисол. $|x^2+x| < 5$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $|x^2+x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x^2+x < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > -5, \\ x^2+x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+5 > 0, \\ x^2+x-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1/2)^2+19/4 > 0, \\ \left(x+\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ -\frac{\sqrt{21}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{21}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{21}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{21}-1}{2}.$$

Жавоб: $\left(-\frac{\sqrt{21}+1}{2};\ \frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)$.

3-мисол. $\left|\frac{ax-5}{3}+x\right| < 3$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\left|\frac{ax-5}{3}+x\right| < 3 \Leftrightarrow -3 < \frac{ax-5+3x}{3} < 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -9 < x(a+3)-5 < 9 \Leftrightarrow -4 < x(a+3) < 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+3 < 0, \\ -\frac{4}{a+3} > x > \frac{14}{a+3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a+3 = 0, \\ -4 < 0 \cdot x < 14; \end{cases} \\ \begin{cases} a+3 > 0, \\ -\frac{4}{a+3} < x < \frac{14}{a+3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < -3, \\ \frac{14}{a+3} < x < -\frac{4}{a+3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a = -3, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} a > -3, \\ -\frac{4}{a+3} < x < \frac{14}{a+3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Жавоб: Агар $a < -3$ бўлса, $x \in \left(\frac{14}{a+3};\ -\frac{4}{a+3}\right)$; $a = -3$ бўлса, x — ихтиёрий; $a > -3$ бўлса, $x \in \left(-\frac{4}{a+3};\ \frac{14}{a+3}\right)$.

2. $|f(x)| > g(x)$ кўринишдаги тенгсизлик қуйидаги иккита $f(x) > g(x)$, $f(x) < -g(x)$ тенгсизликлар бирлашмасига, яъни

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$$

бирлашмага тенг кучли, бунда $f(x)$ ва $g(x)$ ихтиёрий функциялар. $|f(x)| > g(x)$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳасидан олинган, $g(x) < 0$ ўринли бўладиган барча x лар юқоридаги тенгсизликнинг ва шу билан бир қаторда унга тенг кучли бирлашманинг ечимлар мажмуаси бўлади.

Масалан, $|f(x)| > a$ тенгсизлик

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right.$$

бирлашмага тенг кучли.

Агар $a < 0$ бўлса, у ҳолда $|f(x)| > a$ кўринишдаги тенгсизлик берилган тенгсизлик ўринли бўладиган x нинг исталган қийматларида бажарилади.

4-мисол. $|-4x^2 - 6x - 5| > 9$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $|-4x^2 - 6x - 5| > 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4x^2 - 6x - 5 > 9 \\ -4x^2 - 6x - 5 < -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 + 6x + 14 < 0 \\ 4x^2 + 6x - 4 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 + 3x + 7 < 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{103}{8} < 0 \\ 2(x - 1/2)(x + 2) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x > 1/2 \\ x < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ x < -2. \end{array}\right.$$

Жавоб: $(\infty;\ -2) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

5-мисол. $|x^2 + 4x + 3| > x + 3$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш.

$$|x^2 + 4x + 3| > x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 > x + 3 \\ x^2 + 4x + 3 < -x - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x > 0 \\ x^2 + 5x + 6 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x + 3) > 0, \\ (x + 2)(x + 3) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -3 \\ -3 < x < -2. \end{array}\right.$$

Жавоб: $(-\infty;\ -3) \cup (-3;\ -2) \cup (0;\ +\infty)$.

6-мисол. $\left|\dfrac{3x-x^2}{x-1}\right| > 1+2x\,(*)$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш.

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x-x^2}{x-1} > 1+2x \\[2ex] \dfrac{3x-x^2}{x-1} < -1-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x-x^2-x-2x^2+1+2x}{x-1} > 0. \\[2ex] \dfrac{3x-x^2+x+2x^2-1-2x}{x-1} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-3x^2+4x+1}{x-1} > 0 \\[2ex] \dfrac{x^2+2x-1}{x-1} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x^2-4x-1}{x-1} < 0 \\[2ex] \dfrac{(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{x-1} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3\left(x-\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right)}{x-1} < 0 \\[2ex] x < -1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} < x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \\[2ex] 1 < x < \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \\[2ex] x < -1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} < x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \\[2ex] -1+\sqrt{2} < x < 1 \\[1ex] 1 < x < \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}. \end{array}\right.$$

Жавоб: $\left(-\infty;\ \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right) \cup (-1+\sqrt{2};\ 1) \cup \left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3};\ +\infty\right)$.

Эслатма. $x < \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ тенгсизликнинг ечимлари $x < -1-\sqrt{2}$ тенгсизлик ечимларини ўз ичига қамраб олгани учун у тушириб қолдирилди.

3. $|f(x)| = g(x)$ кўринишдаги тенгламани икки усул билан ечиш мумкин.

1-усул. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\[3ex] \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

2- усул. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \\ \begin{cases} g(x) \leqslant 0, \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Эслатма. Агар $|f(x)| = g(x)$ тенгламада $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга қараганда оддийроқ бўлса, у ҳолда берилган тенгламани 1-усулдаги бирлашма билан алмаштириш мақсадга мувофиқдир, акс ҳолда 2-усулда келтирилган бирлашма билан алмаштириш қулайдир.

Хусусан $|f(x)| = b\,(b \in R)$ кўринишдаги тенглама $b < 0$ бўлганда ечимга эга эмас; $b = 0$ бўлганда $f(x) = 0$ тенгламага тенг кучли; $b > 0$ бўлганда эса қуйидаги тенгламалар бирлашмасига тенг кучлидир, яъни

$$|f(x)| = b \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = b; \\ f(x) = -b; \end{array}\right. \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = b \\ f(x) = -b. \end{array}\right.$$

7-мисол. $|9 - x^2| = 5$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $|9 - x^2| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9 - x^2 = 5 \\ 9 - x^2 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ x = -\sqrt{14} \\ x = \sqrt{14}. \end{array}\right.$$

Жавоб: $\{-\sqrt{14};\ -2;\ 2;\ \sqrt{14}\}$.

8-мисол. Қуйидаги тенгламани ечинг: $|2x - 3| = 3 - 2x$ (*)

Ечиш. $(*) \Leftrightarrow |2x - 3| = -(2x - 3)$. Бу тенглама $|f(x)| = -f(x)$ кўринишдаги тенгламадир. Бу кўринишдаги тенглама қуйидагича ечилади:

$$|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = -f(x); \end{cases} \\ \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ f(x) = f(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0; \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ x \in R \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0.$$

Ёки қуйидагича муҳокама қилсак ҳам бўлади, яъни модул таърифига кўра у номанфий бўлиши керак, шунинг учун масала $-f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0$ тенгсизликни ечишга келади.

Шундай қилиб, $(*) \Leftrightarrow 2x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 3/2$.

Жавоб:$(-\infty;\ 3/2)$.

9-мисол. Қуйидаги тенгламани ечинг:

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}\right| = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}.$$

Ечиш. Бу тенглама — $|f(x)| = f(x)$ тенглама кўринишида. Модул таърифига кўра бу тенглама барча $f(x) \geqslant 0$ да ўринли бўлади, шунинг учун берилган тенглама $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} \geqslant 0$ тенгсизликни ечишга келади. Қасрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратамиз ва интерваллар усулидан фойдаланиб, тенгсизликни ечамиз:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0, \\ \dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 \leqslant x < 2 \\ x > 2. \end{array}\right.$$

Жавоб: $(-\infty;\ -1) \cup [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Юқорида келтирилган кўринишдаги ҳолатларнинг турли бирикмаларига оид мисоллар ҳам кўп учрайди. Шунинг учун уларни ечиш алгоритмларини келтирамиз (барча кўринишдагиларни):

$$\text{I. а) } |f| = g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g \geqslant 0, \\ f = g; \end{cases} \\ \begin{cases} g \leqslant 0, \\ f = -g; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{б) } |f| = g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geqslant 0, \\ f = g; \end{cases} \\ \begin{cases} f \leqslant 0, \\ -f = g. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{II. } |f| = a \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} f = a \\ -f = a \end{array}\right. \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} a = 0, \\ f = 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} a < 0, \\ \varnothing. \end{cases}$$

III. $|f| = f \Leftrightarrow f \geqslant 0$.

IV. $|f| = -f \Leftrightarrow f \leqslant 0$.

$$\text{V. а) } |f| > g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geqslant 0, \\ f > g; \end{cases} \\ \begin{cases} f \leqslant 0, \\ -f > g \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f > g, \\ f < -g \end{array}\right.$$

$$\text{б)}\ |f|>g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f>g, \\ -f>g; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} g<0, \\ x\in D(f) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g\geqslant 0, \\ f>g; \end{cases} \\ \begin{cases} g\geqslant 0, \\ f<-g; \end{cases} \\ \begin{cases} g<0, \\ x\in D(f). \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{VI.}\ |f|>a\ (a\in R) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f>a \\ f<-a; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} a<0, \\ x\in D(f). \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{VII.}\ |f|\geqslant g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f\geqslant g \\ f\leqslant -g; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} g\leqslant 0, \\ x\in D(f). \end{cases} \end{array}\right.$$

5-§. $y \gtrless |f(|x|)|$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

Аввал $y=|f(|x|)|$ функция (тенглама) графигини ясаш босқичларига тўхтаб ўтамиз:

1-қадам. $x\geqslant 0$ учун $y=f(x)$ функция (яъни $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y=f(x) \end{cases}$ аралаш система) графигини ясаймиз.

2-қадам. $x\leqslant 0$ учун $y=f(-x)$ функция (яъни $\begin{cases} x\leqslant 0, \\ y=f(-x) \end{cases}$ аралаш система) графигини ясаймиз.

Ёки қуйидагича мулоҳаза юритса ҳам бўлади:

Берилган функция жуфт, чунки $|x|=|-x|$; шунинг учун 1-қадамда ҳосил бўлган графикни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, $y=f(-x)$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган графиклар бирлашмаси $y=f(|x|)$ функция графиги бўлади.

3-қадам. Ҳосил бўлган (яъни $y=f(|x|)$ функция) графикнинг абсциссалар ўқидан пастда ётган ярим текисликдаги қисмларини абсциссалар ўқига нисбатан юқоридаги ярим текисликка симметрик акслантирамиз. Натижада $y=|f(|x|)|$ функциянинг графиги ҳосил бўлади.

$y=|f(|x|)|$ функция графиги ва ундан юқорида жойлашган текислик нуқталари мажмуаси $y \geqslant |f(|x|)|$ тенгсизликнинг графигидир.

$y = |f(|x|)|$ функция графиги ва ундан пастда жойлашган текислик нуқталари мажмуаси $y \leqslant |f(|x|)|$ тенгсизликнинг графиги бўлади.

$y \geqslant |f(|x|)'$ кўринишдаги тенгсизликларни қуйидаги тенг кучлилик схемаси ёрдамида ҳам ечиш мумкин:

$$y \geqslant |f(|x|)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ y \geqslant |f(x)|; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ y \geqslant |f(-x)| \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ y \geqslant f(x); \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) \leqslant 0, \\ y \geqslant -f(x); \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(-x) \geqslant 0, \\ y \geqslant f(-x); \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(-x) \leqslant 0, \\ y \geqslant -f(-x) \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ y \geqslant f(x); \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant 0, \\ y \geqslant -f(x); \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ f(-x) \geqslant 0, \\ y \geqslant f(-x); \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ f(-x) \leqslant 0, \\ y \geqslant -f(-x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Демак, $y \geqslant |f(|x|)|$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси абсциссалар ўқидан юқоридаги ёпиқ ярим текисликда бўлар экан.

$y \leqslant |f(|x|)|$ тенгсизлик ечимларини қуйидаги тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб топиш ҳам мумкин:

$$y \leqslant |f(|x|)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant |f(x)|; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant |f(-x)| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ y \leqslant f(x); \end{cases} \\ \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ y \leqslant -f(x); \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(-x) \geqslant 0, \\ y \leqslant f(-x); \end{cases} \\ \\ \begin{cases} f(-x) \leqslant 0, \\ y \leqslant -f(-x) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ y \leqslant f(x); \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant 0, \\ y \leqslant -f(x); \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ f(-x) \geqslant 0, \\ y \leqslant f(-x); \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ f(-x) \leqslant 0, \\ y \leqslant -f(-x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Юқоридаги тенг кучлилик схемалари (яъни тенгсизликларни ечишдаги шакл алмаштиришлар) фақат тенгсизликнинг ўнг қисмида битта x ўзгарувчи қатнашгандагина эмас, балки бир неча ўзгарувчи қатнашганда ҳам ўринлидир.

1-мисол. $y \geqslant \sqrt{(\sqrt{x^2}-2)^2}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликни шакл алмаштириб, стандарт кўринишга келтириб оламиз:

$y = \sqrt{(\sqrt{x^2}-2)^2} = \sqrt{(|x|-2)^2} = ||x|-2|$, демак, $y \geqslant ||x|-2|$. Энди $y = ||x|-2|$ тенглама графигини ясашга тўхтаб ўтамиз.

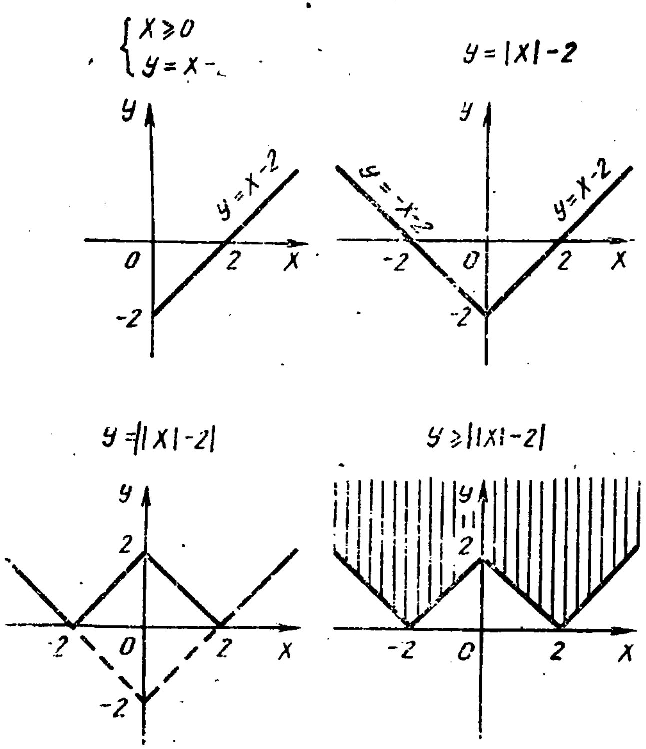
1-усул. 1-қадам. $x \geqslant 0$ учун $y = x - 2$ функция графигини ясаймиз (ёки $y = x - 2$ функция графигининг ординаталар ўқи билан чегараланган ўнг ярим текисликдаги қисмини қолдирамиз).

2- қадам. 1- қадамда ҳосил бўлган графикни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, $y = |x| - 2$ функция графигини ҳосил қиламиз (яъни $x \leqslant 0$ учун $y = -x - 2$ функция графигини ҳосил қиламиз, бу аввалги график билан биргаликда $y = |x| - 2$ функцня графигини беради).

3- қадам. 2- қадамда ҳосил бўлган графикнинг абсциссалар ўқидан пастда ётган қисмларини абсциссалар ўқидан юқоридаги ярим текисликка симметрик акслантирамиз ва натижада $y = ||x| - 2|$ (яъни $y = \sqrt{(\sqrt{x^2} - 2)^2}$) функциянинг графигини ҳосил қиламиз.

4- қадам. $y = ||x| - 2|$ функция графиги ва ундан юқоридаги текислик нуқталари мажмуаси — берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси бўлади (82- расм).

2- усул. **1- қадам.** $y = |x|$ функция графигини ясаймиз.



82- расм.

Бу кўринишдаги функцияларнинг графикларини ясаш шу бобнинг 1- § ида келтирилган.

2- қадам. $y=|x|$ функция графигини ординаталар ўқи бўйича 2 бирлик пастга параллел кўчирамиз ва натижада $y=|x|-2$ функция графиги ҳосил бўлади.

3- қадам. $y=|x|-2$ функция графигининг абсциссалар ўқидан пастда ётган қисмларини абсциссалар ўқидан юқоридаги ярим текисликка симметрик акслантириб, $y=||x|-2|$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз.

4- қадам. 3- қадамда ҳосил бўлган график ва ундан юқорида ётувчи текислик нуқталари мажмуаси — изланаётган график бўлади.

3- усул. Шу параграфда келтирилган $y\geqslant|f(|x|)|$ кўринишдаги тенгсизликларни ечишнинг схемасидан фойдаланиб, берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини топиш ҳам мумкин:

$$y\geqslant|y|x|-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant0,\\ x-2\geqslant0,\\ y\geqslant x-2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant0,\\ x-2\leqslant0,.\\ y\geqslant-(x-2);\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant0,\\ -x-2\geqslant0,\\ y\geqslant-x-2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant0,\\ -x-2\leqslant0,\\ y\geqslant-(-x-2)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant0,\\ x\geqslant2,\\ y\geqslant x-2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant0,\\ x\leqslant2,\\ y\geqslant-x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant0,\\ x\leqslant-2,\\ y\geqslant-x-2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant0,\\ x\geqslant-2,\\ y\geqslant x+2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant2,\\ y\geqslant x-2;\end{cases}\\ \begin{cases}0\leqslant x\leqslant2,\\ y\geqslant-x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant-2,\\ y\geqslant-x-2,\end{cases}\\ \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant0,\\ y\geqslant x+2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Сўнгги бирлашмадаги тенгсизликлар системалари ечимларини бир чизмада кўрсатилса, изланаётган ечимлар мажмуаси ҳосил бўлади.

4-усул. Берилган функция жуфт функция бўлгани учун (чунки $|-x| = |x|$) унинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик бўлади. Шунинг учун берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини $x \leqslant 0$ учун ясаб, $x > 0$ учун ҳосил бўлган графикни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантирамиз (яъни графикнинг ординаталар ўқидан чап томондаги қисмини ҳосил қиламиз), бу изланаётган ечимлар мажмуаси бўлади.

Берилган тенгсизлик-$x \geqslant 0$ да $y \geqslant |x-2|$ тенгсизликка тенг кучли. Шунинг учун қуйидаги тенг кучли шакл алмаштиришларни бажариб, содда тенгсизликлар системаси бирлашмасига келамиз, яъни

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant |x-2| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x-2 \geqslant 0, \\ y \geqslant x-2; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x-2 \leqslant 0, \\ y \geqslant -(x-2) \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant 2, \\ y \geqslant x-2; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \leqslant 2, \\ y \geqslant -x+2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

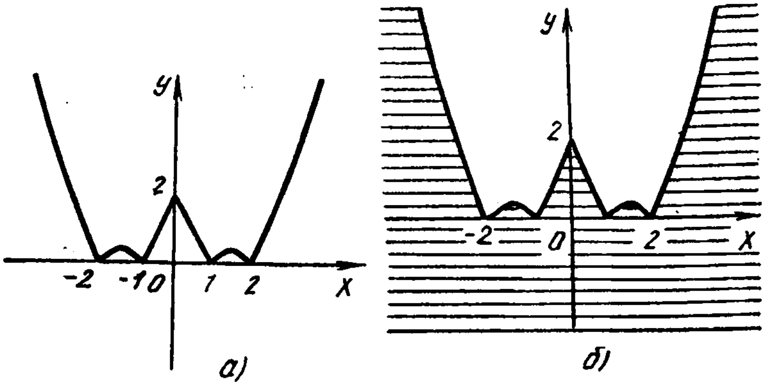
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ y \geqslant x-2; \end{cases} & (1) \\ \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ y \geqslant -x+2. \end{cases} & (2) \end{array} \right.$$

(1) ва (2) системалар ечимларини ясашни, сўнгра юқорида кўрсатилган мулоҳазаларга кўра графикнинг қисмларини ясашни ўзингизга ҳавола қиламиз.

2-мисол. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$y \leqslant |x^2 - 3|x| + 2|.$$

Ечиш. $x \geqslant 0$ учун $y = |x^2 - 3x + 2|$ функция графигини ясаймиз, парабола координата ўқларини (0; 2), (1; 0) ва (2; 0) нуқталарда кесади, параболанинг учи (1,5; —0,25) нуқтада ва парабола тармоқлари юқорига йўналган. Бу ерда шартга кўра графикнинг ординаталар ўқидан ўнгдаги қисмини қолдирамиз ва абсциссалар ўқидан пастда жойлашган қисмини пунктир чизиқ билан кўрсатамиз, сўнгра пунктир чизиқ билан чизилган графикнинг қисмини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, $y = |x^2 - 3x + 2|$ функция графигини тўлдирамиз. $x \geqslant 0$ учун $y = |x^2 - 3x + 2|$ функция графигини ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, $x \leqslant 0$ учун $y = |x^2 - 3(-x) + 2| = |x^2 + 3|x| + 2|$ функция графигини ҳосил қиламиз. $y = |x^2 - 3x + 2|$ функция графиги (83- *а* расм) ва ундан пастда жойлашган текислик қисмлари мажмуаси изланаётган ечимлар мажмуаси бўлади (83- *б* расм).



83- расм.

Ушбу тенгсизликни 1- мисолдагига ўхшаш бошқа усуллар билан ҳам ечиш мумкин (уларни кўриб чиқиш ўзингизга ҳавола қилинади).

6- §. $|f(|x|)| \gtreqless g(x)$ кўринишдаги тенгсизликларни ечиш

1. $|f(|x|)| < g(x)$ кўринишдаги тенгсизликларни ечиш учун қуйидаги тенг кучли шакл алмаштиришлардан фойдаланилади:

$$\text{I.}\quad |f(|x|)| < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ |f(x)| < g(x) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ |f(-x)| < g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases} & (S_1) \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ f(-x)| < g(x), \\ f(-x) > -g(x). \end{cases} & (S_2) \end{array}\right.$$

$$\text{II. } |f(|x|)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) < g(x), \\ f(|x|) > -g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S_1 \\ S_2. \end{array}\right.$$

Қайси бир тенг кучли алмаштиришдан фойдаланиб ечиш тенгсизликнинг қандайлигига, шунингдек, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг мураккаблик даражасига қараб аниқланади.

1-мисол. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$||x| - 1| < 1 - x. \quad (*)$$

Ечиш. (*) тенгсизликни икки усул билан ечамиз.

1-усул.

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ |x-1| < 1-x; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ |-x-1| < 1-x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x-1 < 1-x, \\ x-1 > -(1-x); \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ -x-1 < 1-x, \\ -x-1 > -(1-x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 1, \\ -1 > -1; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ -1 < 1, \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x < 0.$$

Жавоб: $(-\infty;\ 0)$.

2- усул.

$$(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x|-1<1-x, \\ |x|-1>-(1-x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x-1<1-x; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ -x-1<1-x; \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x-1>-1+x; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ -x-1>-1+x \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x<1; \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ -1<1; \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ -1>-1; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ x<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x<1 \\ x \leqslant 0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 1, \\ x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x<0.$$

2. $|f(|x|)|>g(x)$ кўринишдаги тенгсизликларни икки усул билан ечиш мумкин, яъни улар қуйидаги тенг кучли алмаштиришлардан фойдаланиб ечилади:

$$\text{III. } |f(|x|)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|)>g(x) \\ f(|x|)<-g(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ f(x)>g(x); \end{array}\right. & (A) \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ f(-x)>g(x); \end{array}\right. & (B) \\ \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ f(x)<-g(x); \end{array}\right. & (C) \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ f(-x)<-g(x). \end{array}\right. & (D) \end{array}\right.$$

$$\text{IV. } |f(|x|)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ |f(x)|>g(x) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ |f(-x)|>g(x) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \\ C \\ B \\ D \end{array}\right.$$

2-мисол. Қуйидаги тенгсизликни ечинг:

$$\left|1-\frac{|x|}{1+|x|}\right|>\frac{1}{2}. \qquad (**)$$

Ечиш. Берилган тенгсизликнинг қийматлари соҳаси барча ҳақиқий сонлар мажмуасидан иборат. (**) тенгсизлик қуйидаги иккита тенгсизликлар системалари бирлашмасига тенг кучли:

$$\left\{\begin{array}{l}\left|1-\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{1}{2},\\ x\geqslant 0;\end{array}\right. \quad (1) \qquad \left\{\begin{array}{l}\left|1-\dfrac{-x}{1-x}\right|>\dfrac{1}{2},\\ x\leqslant 0.\end{array}\right. \quad (2)$$

(1) системани ечамиз:

$$(1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|\dfrac{1}{1+x}\right|>\dfrac{1}{2},\\ x\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+x}>\dfrac{1}{2},\\ x\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2-1-x}{1+x}>0\\ x\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1-x}{1+x}>0,\\ x\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1-x>0,\\ x\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x<1,\\ x\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\leqslant x<1.$$

(2) системани ечамиз:

$$(2)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|\dfrac{1}{1-x}\right|>\dfrac{1}{2},\\ x\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{1-x}>\dfrac{1}{2},\\ x\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1-x<2,\\ x\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>-1,\\ x\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow -1<x\leqslant 0.$$

Шундай қилиб, $\left[\begin{array}{l}0\leqslant x<1\\ -1<x\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow -1<x<1\Leftrightarrow x\in(-1;\ 1).$

3. $|f(|x|)|=g(x)$ кўринишдаги тенглама қуйидаги тенг кучли шакл алмаштиришлар ёрдамида ечилади:

$$\text{V. } |f(|x|)|=g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0,\\ |f(x)|=g(x);\end{array}\right.\\ \\ \left\{\begin{array}{l}x\leqslant 0,\\ |f(-x)|=g(x)\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x); \end{array}\right. \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(-x)=g(x) \\ f(-x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x)=g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x)=-g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ f(-x)=g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ f(-x)=-g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

3-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$|2\sqrt{2|x|-1}-1|=3.$$

Ечиш.

$$|2\sqrt{2|x|-1}-1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ |2\sqrt{2x-1}-1|=3; \end{cases} & (1) \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ |2\sqrt{-2x-1}-1|=3. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Энди (1) системани ечамиз:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2x-1}-1=3 \\ 2\sqrt{2x-1}-1=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sqrt{2x-1}=2; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sqrt{2x-1}=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2x-1=4; \end{cases} \\ \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

(2) системани ечамиз:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{-2x-1}-1=3 \\ 2\sqrt{-2x-1}-1=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \sqrt{-2x-1}=2; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \sqrt{-2x-1}=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 0, \\ -2x-1=4; \end{cases} \\ \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечимлари мажмуаси иккита сондан ташкил топади, яъни $\left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$.

Юқоридаги дастлабки икки кўринишдаги тенгсизликларни учинчи кўринишдаги тенглама билан мос равишда бирлаштирсак, қуйидаги тенг кучлилик схемаларига эга бўламиз:

$$\text{VI. } |f(|x|)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ f(-x) \leqslant g(x), \\ f(-x) \geqslant -g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{VII. } |f(|x|)| \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ f(-x) \geqslant g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant -g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ f(-x) \leqslant -g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{VIII. } |f| < g \Leftrightarrow \begin{cases} f < g, \\ -f < g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f < g, \\ f > -g. \end{cases}$$

$$\text{IX. } |f| \leqslant g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f \leqslant g, \\ f \geqslant -g; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} g < 0, \\ \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g \geqslant 0, \\ f \leqslant g; \end{cases} \\ \begin{cases} g \geqslant 0, \\ f \geqslant -g; \end{cases} \\ \begin{cases} g < 0, \\ \varnothing. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{X. } |f| \leqslant a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ \begin{cases} f \leqslant a, \\ f \geqslant -a; \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ f = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ \varnothing. \end{cases} \end{array}\right.$$

4-мисол. $|x-6| \geqslant x^2-5x+9$ (**) тенгсизликни ечинг.

$$\text{Ечиш. } (^{**}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-6 \geqslant x^2-5x+9, \\ x-6 \leqslant -(x^2-5x+9) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+15 \leqslant 0 \\ x^2-4x+3 \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)^2+6 \leqslant 0 \\ (x-1)(x-3) \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

Жавоб: $[1;\ 3]$.

5-мисол. Тенгсизликни ечинг: $|x^2-6x-8| \leqslant 4-x$. (*)

$$\text{Ечиш. } (^{*}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-6x+8 \leqslant 4-x, \\ x^2-6x+8 \geqslant -(4-x) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-5x+4 \leqslant 0, \\ x^2-7x+12 \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)(x-4) \leqslant 0, \\ (x-3)(x-4) \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 4 \\ x \leqslant 3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ x \geqslant 4; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ x \leqslant 3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{array}\right.$$

Жавоб: $[1;\ 3] \cup \{4\}$.

7-§. $|y| \gtrless f(x)$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

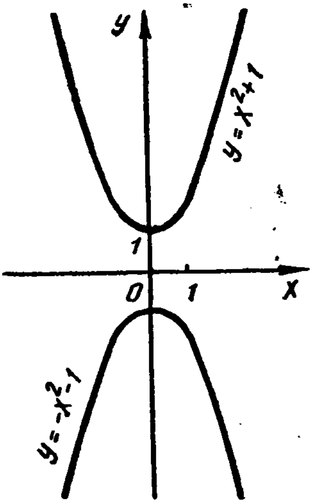
1. $|y| = f(x)$ кўринишдаги функциялар графигини ясаш, бунда $f(x) \geqslant 0$.

Модул таърифига кўра, қуйидагига эга бўламиз:
$y = \pm f(x)$, бунда $f(x) \geqslant 0$, яъни

$$\text{I. } |y| = f(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = -f(x) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ y = f(x); \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ y = -f(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Демак, берилган функция графиги икки қийматли, унинг графиги эса абсциссалар ўқига нисбатан симметрик бўлади.

Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $y = f(x)$ функция номанфий бўладиган x аргументнинг қийматлари оралиғидан иборат бўлади.



84- расм.

Берилган функция графиги қуйидагича ясалади:

1- қадам. $f(x) \geqslant 0$ шартдан функциянинг аниқланиш соҳаси топилади.

2- қадам. Функция аниқланган қисмларда $y = f(x)$ функция графиги ясалади.

3- қадам. Ясалган графикка абсциссалар ўқига нисбатан симметрик бўлган график ва шу билан берилган функция графиги ясалади.

1. мисол. $|y| = x^2 + 1$ функция графигини ясанг.

1- усул. 1- қадам. $x \in R$ да $x^2 + 1 > 0$.

2- қадам. $y = x^2 + 1$ функция графигини ясаймиз.

3- қадам. Ҳосил бўлган графикни абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, берилган функциянинг графигини ҳосил қиламиз (84- расм).

2- усул. $|y| = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x^2 + 1, \\ y = -x^2 - 1. \end{array}\right.$

Демак, бирлашма таркибига кирган ҳар бир графикни бир чизмада ясаб, изланаётган графикни топамиз.

Эслатма. $y = f(x)$ функция графиги бўйича $|y| = f(x)$ функция графигини осон ясаш мумкин. Бунинг учун $y \geqslant 0$ да $|y| = y$ ва $|-y| = y$ эканлигини назарга олиш кифоя. Демак, $y \geqslant 0$ да $y = f(x)$ билан берилган функция графиклари устма-уст тушади. $|-y| = |y|$ тенгликдан эса $|y| = f(x)$ функция графигининг абсциссалар ўқига нисбатан симметриклиги келиб чиқади. Шунинг учун $y = f(x)$ функция графигининг $y \geqslant 0$ ярим текисликда ётган қисмини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантиришдан ҳосил бўлган мажмуаларнинг бирлашмаси $|y| = f(x)$ функция графиги бўлади.

2. $|y| \geqslant f(x)$ кўринишдаги тенгсизлик ($f(x) \geqslant 0$ бўлганда) $y \geqslant f(x)$ ёки $y \leqslant -f(x)$ бўлгандагина ўринли бўлади, яъни

II. $|y| \geqslant f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \geqslant f(x) \\ y \leqslant -f(x). \end{array}\right.$

Агар $f(x) \leqslant 0$ бўлса, у ҳолда ҳам $|y| \geqslant f(x)$ тенгсизлик ўринли бўлади, яъни $y \geqslant 0$ ва $f(x) \leqslant 0$ бўлганда тенгсизлик $y \geqslant f(x)$ га, шунингдек, $y \leqslant 0$ ва $f(x) \leqslant 0$ бўлганда эса $y \leqslant -f(x)$ га тенг кучли бўлади.

3. $|y| \leqslant f(x)$ кўринишдаги тенгсизлик ($f(x) \geqslant 0$ бўлганда) $-f(x) \leqslant y \leqslant f(x)$ га тенг кучли бўлади; $|y| \leqslant f(x)$ тенгсизлик ($f(x) < 0$ бўлганда) эса берилган тенгсизликка тенг кучли эмас, чунки номанфий сон манфий сондан кичик бўла олмайди.

Демак,

$$\text{III. } |y| \leqslant f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ y \leqslant f(x), \\ y \geqslant -f(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ \varnothing \end{cases} \end{array}\right.$$

2-мисол. Қуйидаги тенгсизликни ечинг:

$$|y| \leqslant \frac{2(x-3)}{\sqrt{x^2-6x+9}}. \qquad (1)$$

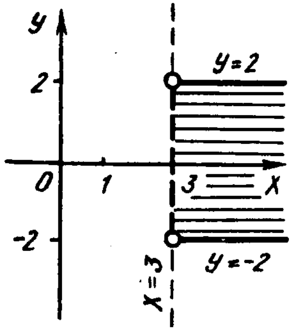
Ечиш.

$(1) \Leftrightarrow |y| \leqslant \frac{2(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2}}$ тенгсизлик аниқланиш соҳасида, яъни $x \neq 3$ да $|y| \leqslant \frac{2(x-3)}{|x-3|}$ тенгсизликка тенг кучли.

1) Агар $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$ бўлса, берилган тенгсизлик $|y| \leqslant 2$ кўринишга эга бўлади. Бу ҳолда тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси $\begin{cases} x-3>0, \\ |y| \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ |y| \leqslant 2 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси ечимлари билан бир хил бўлади.

2) Агар $x-3<0 \Leftrightarrow x<3$ бўлса, берилган тенгсизлик $|y| \leqslant -2$ кўринишга эга бўлади. Демак, $x<3$ бўлса, $|y| \leqslant -2$ тенгсизлик ва шу билан бир қаторда берилган тенгсизлик ечимга эга бўлмайди, яъни тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси бўш мажмуадан иборат бўлади.

Изланаётган мажмуа 85- расмда кўрсатилган.



85- расм.

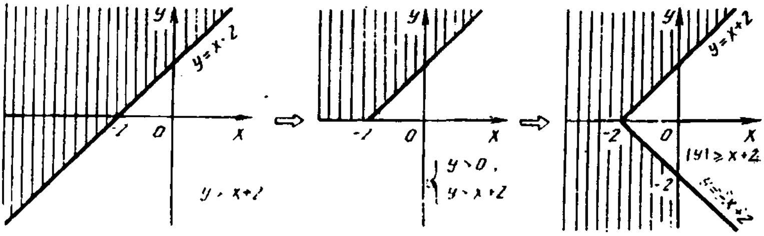
3- мисол. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$|y| \geqslant x+2. \qquad (2)$$

Ечиш. **1-усул.** $(2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} y \geqslant x+2, \\ y \leqslant -(x+2) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -2, \\ \left[\begin{array}{l} y \geqslant x+2 \\ y \leqslant -x-2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -2, \\ y \geqslant x+2; \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -2, \\ y \leqslant -x-2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

2-усул. $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y \geqslant 0, \\ y \geqslant x+2; \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} y \leqslant 0, \\ y \leqslant -x-2. \end{array}\right. \end{array}\right.$



86-расм.

Бу усул билан изланаётган ечимга келиш 86-расмда кўрсатилган.

Юқорида келтирилган тенг кучлилик схемалари тенгсизликнинг ҳар иккала қисмидаги функциялар икки ўзгарувчили бўлганда ҳам ўринли бўлади. Шундай қилиб, умумий ҳолда икки ўзгарувчили функциялар қатнашганда тенгсизликларни қуйидаги тенг кучли шакл алмаштиришлардан фойдаланиб, ечимлари мажмуасини топамиз.

4. $|f(x, y)| \geqslant \varphi(x, y)$ кўринишдаги тенгсизликлар қуйидагича муҳокама қилинади:

$$|f(x, y)| \geqslant \varphi(x, y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x, y) \geqslant 0, \\ f(x, y) \geqslant \varphi(x, y); \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} f(x, y) \leqslant 0, \\ -f(x, y) \geqslant \varphi(x, y) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,y) \geqslant 0, \\ f(x,y) \geqslant \varphi(x,y); \end{cases} \\ \\ \begin{cases} f(x,y) \leqslant 0, \\ f(x,y) \leqslant -\varphi(x,y) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x,y) \geqslant \varphi(x,y), \\ f(x,y) \geqslant -\varphi(x,y) \end{array}\right.$$

Юқоридаги тенгсизликлар бирлашмасига кирган ҳар бир тенгсизлик $\varphi(x, y) < 0$ бўлганда ҳам ўринли эканини кўриш қийин эмас.

. **Эслатма.** Агар $\varphi(x, y) < 0$ бўлса, умуман олганда тенгсизликнинг чап қисми албатта ўнг қисмидан катта бўлади, яъни номанфий сон манфий сондан катта. Шунинг учун берилган тенгсизлик $|f(x, y)| \geqslant \varphi(x, y)$ тенгсизликка тенг кучлидир. Шундай қилиб, бу ҳолда қуйидаги тенг кучлилик схемасига эга бўламиз:

$$\text{IV. } |f(x,y)| \geqslant \varphi(x,y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x,y) \geqslant \varphi(x,y) \\ f(x,y) \leqslant -\varphi(x,y). \end{array}\right.$$

5. $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x, y)$ кўринишдаги тенгсизликлар қуйидагича муҳокама қилинади:

$$|f| \leqslant \varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geqslant 0, \\ f \leqslant \varphi; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} f \leqslant 0, \\ -f \leqslant \varphi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant f \leqslant \varphi \\ \begin{cases} f \leqslant 0, \\ f \geqslant -\varphi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant f \leqslant \varphi \\ -\varphi \leqslant f \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\varphi \leqslant f \leqslant \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} f \leqslant \varphi, \\ f \geqslant -\varphi. \end{cases}$$

Агар $\varphi < 0$ бўлса, у ҳолда $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x, y)$ тенгсизлик ўринли эмас, чунки номанфий сон манфий сондан кичик бўла олмайди.

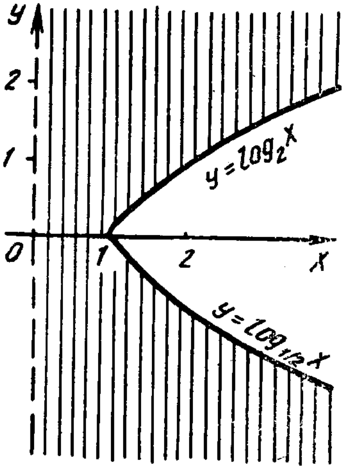
Демак, агар $\varphi(x, y) < 0$ бўлса, $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x, y)$ кўринишдаги тенгсизликларнинг ечими бўш мажмуадан иборат бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги тенг кучлилик схемасига эга бўламиз:

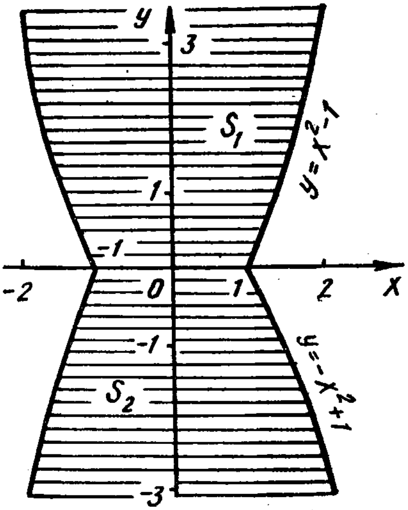
$$\text{V. } |f(x,y)| \leqslant \varphi(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) \leqslant \varphi(x,y), \\ f(x,y) \geqslant -\varphi(x,y). \end{cases}$$

4-мисол. $|y| \geqslant \log_2 x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликнинг ўнг қисми x нинг барча мусбат қийматларида аниқланган. Биламизки, берилган тенгсизлик $y \geqslant 0$ да $y \geqslant \log_2 x$ тенгсизликка тенг кучли бўлади. Шу-



87- расм.



88- расм.

нинг учун $y \geqslant \log_2 x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мажмуасининг $y \geqslant 0$ даги қисмини қолдирамиз ва ҳосил бўлган текислик нуқталари мажмуасини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, изланаётган натижага келамиз (87- расм).

5- мисол. $|y| \geqslant x^2 - 1$ тенгсизликни ечинг.

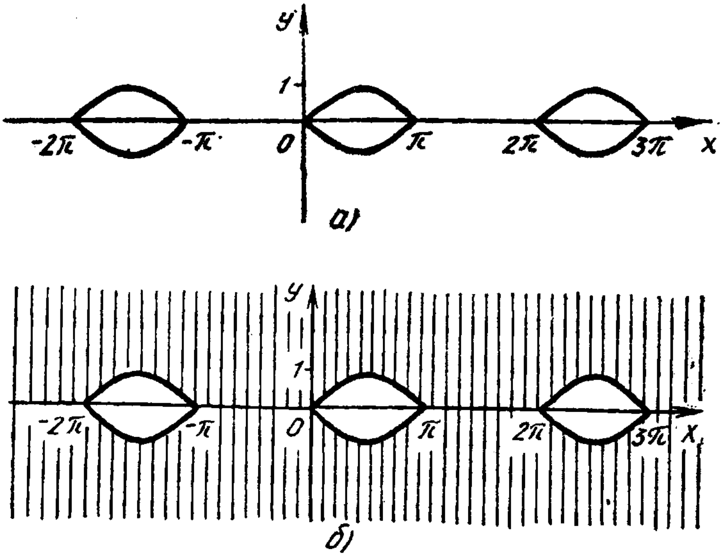
Ечиш. Берилган тенгсизлик $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \geqslant x^2 - 1 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \leqslant -x^2 + 1 \end{cases}$ бўлгандагина ўринли бўлади, яъни

$$|y| \geqslant x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \geqslant x^2 - 1; \end{cases} & (S_1) \\ \\ \begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \leqslant -x^2 + 1. \end{cases} & (S_2) \end{array} \right.$$

Изланаётган нуқталар мажмуаси 88- расмда кўрсатилган.

6- мисол. $|y| \geqslant \sin x$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. $y = \sin y$ функция графигининг абсциссалар ўқидан юқорида жойлашган қисмларини абсциссалар ўқига нис-



а)

б)

89- расм.

батан қуйига симметрик акслантириш натижасида $|y| = \sin x$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз (89- *а* расм) ва ҳосил бўлган график ҳамда ташқарида қолган текислик нуқталари мажмуаси $|y| \geqslant \sin x$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси бўлади (89- *б* расм).

$|y| = \sin x$ функция графиги ва унинг ички қисмлари мажмуаси $|y| \leqslant \sin x$ тенгсизликнинг ечимлари бўлади.

7- мисол. $|x+y| < x-y+1$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

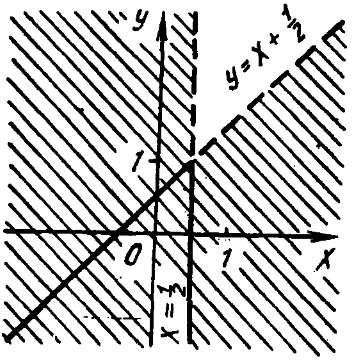
Ечиш. $|x+y|<x-y+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y<x-y+1, \\ x+y>-x+y-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<\frac{1}{2}, \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Графикни чизишни ўзингизга ҳавола қиламиз.

8- мисол. $|2x-y|>y-1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $|2x-y|>y-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-y>y-1, \\ 2x-y<1-y \end{array}\right. \Leftrightarrow$



90- расм.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y< x+\frac{1}{2} \\ x<\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

(90- расм).

8- §. $|y| \gtreqless |f(x)|$ кўринишдаги тенгсизликларни график усулда ечиш

Умумий ҳолда $|y| \gtreqless |f(x)|$ кўринишдаги тенгсизликни қаноатлантирувчи координата текислиги нуқталари мажмуасини топиш учун $y \gtreqless f(x)$ тенгсизликнинг биринчи чоракда ётган қисмини аввал ординаталар ўқига нисбатан (бунда ординаталар ўқидан чап томонда $y \gtreqless -f(x)$, абсциссалар ўқидан юқоридаги ярим текисликда эса $y \gtreqless |f(x)|$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси ҳосил бўлади) акслантирилади, сўнгра ҳосил бўлган ҳар иккала график бирлашмасини, яъни $y \gtreqless |f(x)|$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантирилади (абсциссалар ўқидан қуйида $y \gtreqless -|f(x)|$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси ҳосил бўлади).

Шундай қилиб, ҳосил бўлган текислик нуқталари мажмуаси изланаётган натижавий мажмуа бўлади.

Ёки қуйидагича муҳокама қилиб ҳам изланаётган ечимлар мажмуасини ҳосил қилиш мумкин.

Модул таърифига кўра:

$$|y| = |f(x)| \Leftrightarrow y = \pm |f(x)|.$$

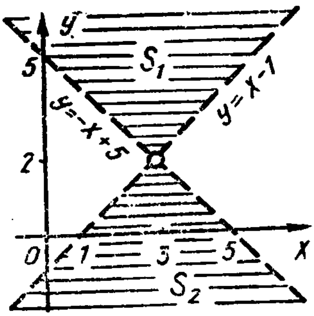
Бу функциянинг графиги қуйидагича ясалади:

а) $y=|f(x)|$ функция графигини ясаймиз (графикнинг ҳаммаси абсциссалар ўқидан юқорида ярим текисликда жойлашган).

б) $y=-|f(x)|$ функция графигини ясаймиз, у абсциссалар ўқига нисбатан $y=|f(x)|$ функция графигига симметрик бўлади.

Ҳосил бўлган графиклар бирлашмаси $|y|=|f(x)|$ функция графигидир. Бу графикнинг абсциссалар ўқидан юқорида қолган қисми ва ундан юқоридаги текислик нуқталари мажмуаси ҳамда абсциссалар ўқидан пастда ётган график қисмлари ва ундан пастдаги текислик нуқталари мажмуаси биргаликда $|y| \geqslant |f(x)|$ тенгсизликнинг, шунингдек, ундан қолган текислик нуқталари $|y| = |f(x)|$ функция билан биргаликда $|y| \leqslant |f(x)|$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси бўлади.

1-мисол. $|y-2| > |x-3|$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.



91- расм.

Ечиш. **1-усул.** Абсолют миқдор (яъни модул) таърифига кўра $y-2>|x-3|$ ва $y-2<-|x-3|$ ёки $y>2+|x-3|$ ва $y<2-|x-3|$ га эга бўламиз. $y=2\pm|x-3|$ функция графигида ҳосил бўлган вертикал бурчаклардан S_1 ва S_2 соҳалари бирлашмаси берилган тенгсизлик ечимлари мажмуаси бўлади, бурчак томонлари нуқталари мажмуаси изланаётган мажмуага кирмайди (91-расм).

2-усул. Тенгсизликнинг ўнг ва чап қисмлари ўзгарувчиларнинг олиши мумкин бўлган барча қийматларида номанфий, шунинг учун тенгсизликнинг иккала қисмини квадратга оширилганда тенг кучлилик бузилмайди, яъни $|y-2|>|x-3| \Leftrightarrow |y-2|^2>|x-3|^2 \Leftrightarrow (y-2)^2>(x-3)^2 \Leftrightarrow (y-2)^2-(x-3)^2>0 \Leftrightarrow (y-2+x-3)(y-2-x+3)>0 \Leftrightarrow (y+x-5)(y-x+1)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} y+x-5>0, \\ y-x+1>0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} y+x-5<0, \\ y-x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>-x+5, \\ y>x-1 \end{cases}$ (S_1) ёки $\begin{cases} y<-x+5, \\ y<x-1. \end{cases}$ (S_2)

Шундай қилиб, изланаётган ечим 91-расмда кўрсатилган.

3-усул. $|y|>|x|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуасини $\vec{r}$ (2; 3) вектор бўйича параллел кўчириш ёки аввал абсциссалар ўқи бўйича 3 бирлик ўнгга, сўнгра 2 бирлик (ординаталар ўқига параллел) юқорига кўчириш натижасида ҳам изланаётган нуқталар мажмуасини ҳосил қилиш мумкин.

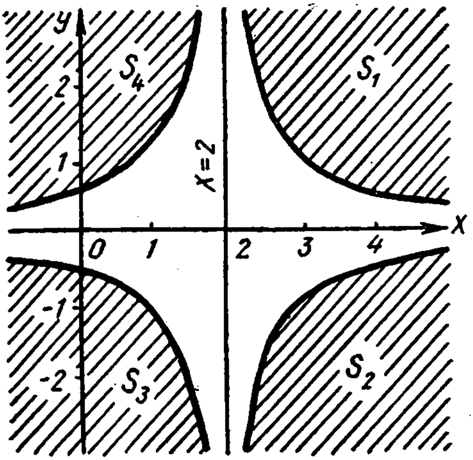
4-усул. Модул белгиси остидаги ифодалар, яъни тенгсизликнинг чап қисми $y-2=0 \Leftrightarrow y=2$ ва ўнг қисми эса $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ тўғри чизиқларни кесиб ўтганда (яъни нолларини) ўз ишорасини ўзгартиради. Шунинг учун $x=3$ ва $y=2$ тўғри чизиқлар координата текислигини 4 та бурчакка (яъни соҳага) бўлади. Бу соҳаларнинг (фикран координаталар бошини (3, 2) нуқтага кўчирганда ҳосил бўлган бурчаклар назарда тутиляпти) ҳар бирида берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизликлар системасини ечиб, изланаётган мажмуани ҳосил қилишимиз мумкин. Шундай қилиб, берилган тенгсизликни қуйидаги тенгсизликлар системалари ечимлари бирлашмасидан иборат деб қараймиз:

$$|y-2|>|x-3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-2>0, \\ x-3>0, \\ y-2>x-3; \end{cases} \\ \begin{cases} y-2>0, \\ x-3<0, \\ y-2>-(x-3); \end{cases} \\ \begin{cases} y-2<0, \\ x-3<0, \\ -(y-2)>-(x-3); \end{cases} \\ \begin{cases} y-2<0, \\ x-3>0, \\ -(y-2)>x-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y>2, \\ x>3, \\ y>x-1; \end{cases} \\ \begin{cases} y>2, \\ x<3, \\ y>-x+5; \end{cases} \\ \begin{cases} y<2, \\ x<3, \\ y<x-1; \end{cases} \\ \begin{cases} y<2, \\ x>3 \\ y<-x+5. \end{cases} \end{array}\right.$$

2-мисол. $|x-2|\cdot|y|\geqslant 1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Бунда 4 та ҳолни кўриб чиқиш лозим (яъни



92- расм.

тенгсизлик чап қисмидаги кўпайтувчиларни нолга айлантирувчи $x = 2$ ва $y = 0$ тўғри чизиқлар сонлар текислигини координата боши (2; 0) нуқтада бўлган 4 та соҳага бўлади).

1-ҳол. $\begin{cases} x > 2, \\ y > 0 \end{cases}$ да $|x-2| \cdot |y| \geqslant 1 \Leftrightarrow (x-2)y \geqslant 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y \geqslant \frac{1}{x-2}$ бўлади (92-расмдаги S_1 соҳа).

Қолган ҳоллар учун 2) $x > 2$, $y < 0$; 3) $x < 2$, $y < 0$; 4) $x < 2$, $y > 0$) ҳосил бўлган текислик нуқталари мажмуасини дастлаб $x = 2$ тўғри чизиққа, сўнгра Ox ўққа нисбатан симметрик акслантириш кифоядир. Қолган ҳолларга мос келувчи текислик нуқталари мажмуаси 92-расмда S_2, S_3 ва S_4 билан кўрсатилган. Ёки қуйидагича мулоҳаза юритсак ҳам бўлади:

а) аввал $|x| \cdot |y| \geqslant 1 \Leftrightarrow |xy| \geqslant 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуасини топиш;

б) сўнгра ҳосил бўлган текислик нуқталари мажмуасини $\vec{r}$ (2; 0) вектор қадар параллел кўчириш лозим.

Изланаётган мажмуа 92-расмда тасвирланган.

3-мисол. $4x^2 \leqslant \left| \frac{x}{y} \right|$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликнинг ечимлари мажмуасига абсциссалар ўқи нуқталари кирмайди, акс ҳолда тенгсизликнинг ўнг қисми маънога эга бўлмайди.

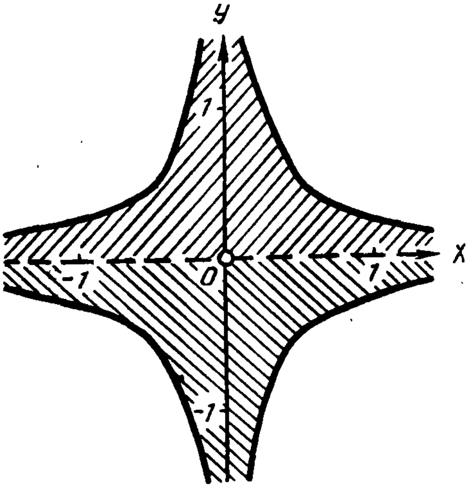
I координата бурчагида ($x > 0$, $y > 0$) берилган тенгсизлик $y \leqslant \frac{1}{4x}$ тенгсизликка тенг кучли. Биламизки, $y \leqslant \frac{1}{4x}$ тенгсизликни гипербола тармоғи (I чоракдаги) ва ундан пастда ётган текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. Ҳосил бўлган текислик нуқталари мажмуасини ординаталар ва сўнгра абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантирсак, изланаётган мажмуа ҳосил бўлади (93-расм).

4-мисол. $|y| \geqslant |x^2 - 2x|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуасини топинг.

Ечиш. Берилган тенгсизлик $y \geqslant 0$ бўлганда $y \geqslant |x^2 - 2x|$, $y \leqslant 0$ бўлганда эса $y \leqslant -|x^2 - 2x|$ тенгсизликка тенг кучли.

Берилган тенгсизлик графиги қуйидаги тартибда ясалади:

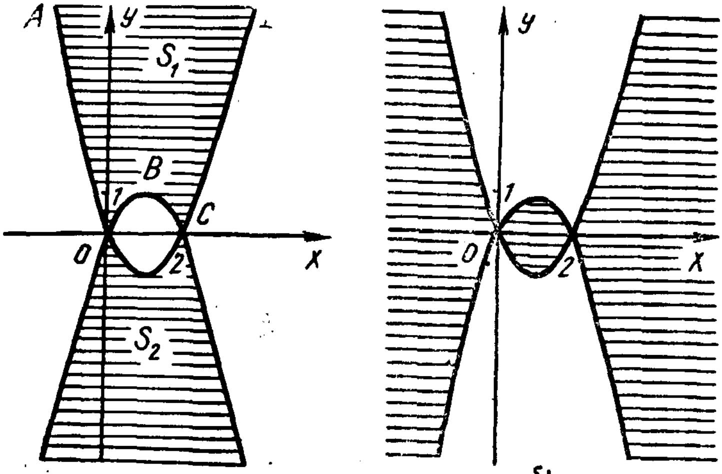
1) $y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ функция координата ўқларини (0; 0) ва (2; 0) нуқталарда кесиб, учи (1; -1) нуқтада бўлган ҳамда тармоқлари юқорига (чунки $a = 1 > 0$) йўналган парабола (парабола ўқи $x = 1$ тўғри чизиқ) дан иборат. Графикнинг ($y < 0$) абсциссалар ўқидан пастдаги қисмини пунктир билан чизамиз ($y = (x - 1)^2 - 1$ функция графиги $y = x^2$ функция графигини $\vec{r}$ (1; -1) вектор қадар параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлади);



93- расм.

2) параболанинг пунктир билан чизилган (яъни графикнинг абсциссалар ўқидан пастда қолган) қисмини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, $y = |x^2 - 2x|$ функция графигини ҳосил қиламиз (94-*а* расмдаги *AOBCD* эгри чизиқ).

AOBCD эгри чизиқ ва ундан юқоридаги текислик нуқталари мажмуаси $y \geqslant |x^2 - 2x|$ тенгсизлик ечимлари мажмуаси бўлади (S_1 соҳа);



а) *б)*

94- расм.

3) ҳосил бўлган текислик нуқталари мажмуасини (S_1 соҳа назарда тутиляпти) абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантирсак, $y \leqslant -|x^2-2x|$ тенгсизлик ечимлари мажмуаси келиб чиқади (S_2 соҳа). S_1 ва S_2 соҳалар йиғиндиси $|y| \geqslant |x^2-2x|$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуасидир (94- *а* расм).

94- *б* расмда $|y| \leqslant |x^2-2x| \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant -|x^2-2x|, \\ y \leqslant |x^2-2x| \end{cases}$

нинг ечимлари мажмуаси тасвирланган.

5-мисол. $|y| \leqslant |x^2-2|x||$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуасини кўрсатинг.

Ечиш. Модул таърифига кўра:

$$|y| = |x^2-2|x|| \Leftrightarrow y = \pm|x^2-2|x||.$$

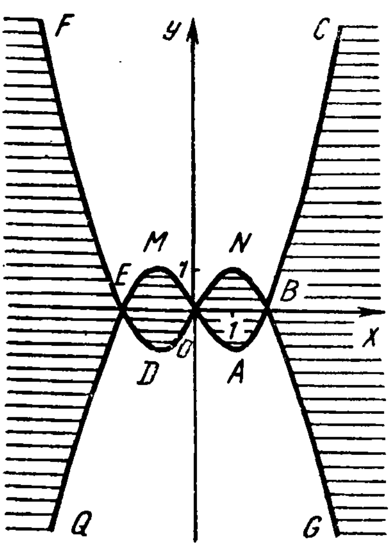
Буни эътиборга олсак, берилган тенгсизлик

$$-|x^2-2|x|| \leqslant y \leqslant |x^2-2|x|| \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant |x^2-2|x||, \\ y \geqslant -|x^2-2|x|| \end{cases}$$

га тенг кучли.

Изланаётган ечимлар мажмуасини қуйидагича ҳосил қиламиз:

1) $x \geqslant 0$ учун $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ функция графигини чизамиз (95-расмдаги *OABC* эгри чизиқ);



95- расм.

2) $x \leqslant 0$ учун $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ функция графигини чизамиз (ёки берилган функция жуфт функция бўлгани учун *OABC* эгри чизиқни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, $y = x^2 + 2x$ функция графигини ҳосил қиламиз) (95-расмдаги *ODEF* эгри чизиқ).

FEDOABC эгри чизиқ $y = |x^2 - 2x|$ функция графигидир;

3) $y = |x^2 - 2x|$ функция графигининг абсциссалар ўқидан пастдаги ярим текисликда ётган қисмини юқоридаги ярим текисликка симметрик акслантириш натижасида $y = |x^2 - 2|x||$ функция графиги ҳосил бўлади (95-расмдаги *FEMONBC* эгри чизиқ);

4) $y = |x^2 - 2|x||$ функция графигини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантирсак, $y = -|x^2 - 2|x||$ функция (*QEDOABG* эгри чизиқ) графиги ҳосил бўлади.

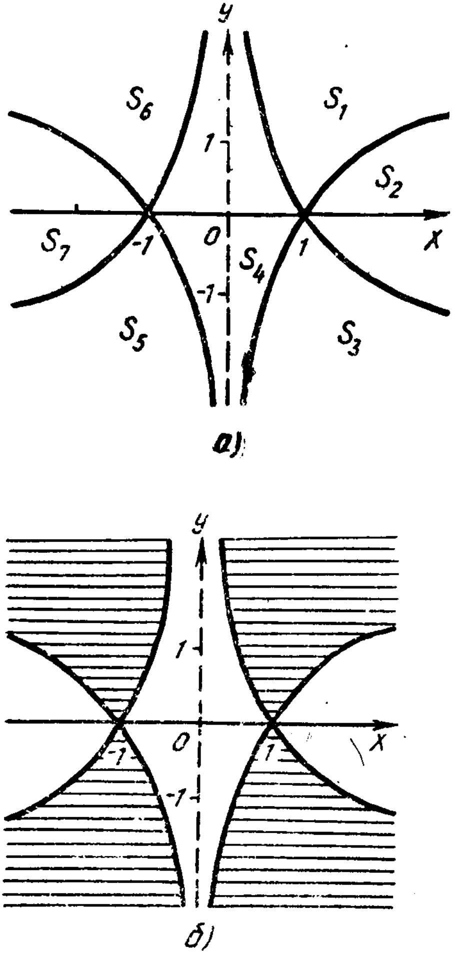
Шундай қилиб, $y \leqslant |x^2 - 2|x||$ функция графигидан пастда ҳамда $y \geqslant -|x^2 - 2|x||$ функция графигидан юқорида ётган текислик қисмларининг умумий қисми (яъни кесишмаси) $|y| \leqslant |x^2 - 2|x||$ тенгсизлик ечимлари мажмуаси бўлади (95-расм).

6-мисол. $|y| \geqslant |\log_2|x||$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш.

$$|y| \geqslant |\log_2|x|| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \geqslant |\log_2|x|| \\ y \leqslant -|\log_2|x||. \end{array}\right.$$

Графикни ясаш босқичлари юқорида келтирилганга ўхшаш олиб борилади. 96-*а* расмда $|y| = \log_2|x||$ функциянинг графиги келтирилган, у текисликни 7 та соҳага бўлади, бунда $x \neq 0$ ва $y = 0$ тўғри чизиқлар назарга олинмаган, яъни фақат функция ноллари назарга олинган. Соҳалар усулидан фойдаланиб, қайси бир соҳа нуқталари мажмуаси изланаёт-



96- расм.

ган мажмуага кириши IV бобда келтирилган. Масалан (—2; 0) нуқта S_7 соҳага тегишли, унда $0<|\log_2|-2||$ муносабат ўринли бўлади, шунинг учун бу соҳа изланаётган соҳа эмас экан. Энди навбатма навбат қолган соҳаларда қандай муносабат ўринли бўлишини ҳисоблаб чиқишга ҳожат қолмайди. Функциянинг ўзгармас ишора оралиқларини топиш аён бўлиб қолди. Изланаётган ечимлар мажмуаси 96-*б* расмда кўрсатилган.

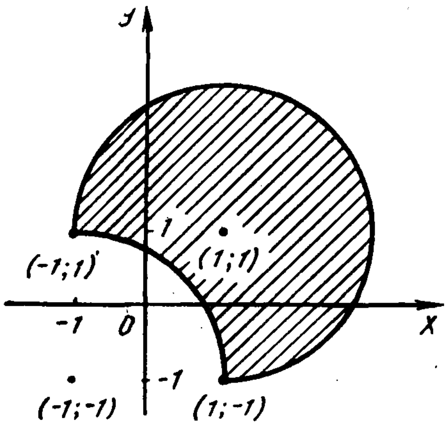
9- §. Ўзгарувчилари модул белгиси остида бўлган тенгсизликларга доир аралаш мисолларни ечиш

Ушбу параграф юқорида кўрилган ҳолларга ўхшамайдиган модул белгиси остида ўзгарувчилар иштирок этган тенгсизликларни ечишга бағишланади.

1-мисол. $|x^2+y^2-2|\leqslant 2(x+y)$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $|x^2+y^2-2|\leqslant 2(x+y) \Leftrightarrow -2(x+y)\leqslant x^2+y^2-2\leqslant 2(x+y) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2\leqslant 2(x+y), \\ x^2+y^2-2\geqslant -2(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 4, & (1) \\ (x+1)^2+(y+1)^2\geqslant 4. & (2) \end{cases}$$



97- расм.

(1) тенгсизликни маркази (1; 1) нуқтада ва радиуси 2 бирликка тенг бўлган ёпиқ доира, (2) тенгсизликни маркази (—1; —1) нуқтада ва радиуси 2 бирликка тенг бўлган очиқ доирадан қолган текислик нуқталари мажмуаси, шунингдек, берилган тенгсизликни эса (1) ва (2) тенгсизликлар ечимлари мажмуасининг кесишмасига (яъни умумий қисмига) тегишли текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради (97- расм). 97-расмдаги чегара нуқталари мажмуасидан олинган исталган нуқтанинг координаталари $|x^2+y^2-2| = 2(x+y)$ тенгламани қаноатлантиргани учун унинг графиги бўлади.

2- мисол. $\frac{y-1+|x-1|}{y-x^2+2x} \leqslant 0$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Тенгсизлик ечимлари мажмуаси $x-1=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=1$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик жойлашган.

$$\frac{y-1+|x-1|}{y-x^2+2x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ \dfrac{y-1+x-1}{y-x^2+2x} \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ \dfrac{y-1-(x-1)}{y-x^2+2x} \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ \dfrac{y+x-2}{y-x^2+2x} \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 1, \\ \dfrac{y-x}{y-x^2+2x} \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ y+x-2 \geqslant 0, \\ y-x^2+2x < 0 \end{cases} \quad \text{ёки}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y + x - 2 \leqslant 0, \\ y - x^2 + 2x > 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x \leqslant 1, \\ y - x \geqslant 0, \\ y - x^2 + 2x < 0 \end{cases} \text{ ёки}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 1, \\ y - x \leqslant 0, \\ y - x^2 + 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \geqslant -x + 2, \\ y < (x-1)^2 - 1 \end{cases} \text{(1) ёки}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \leqslant -x + 2, \\ y > (x-1)^2 - 1 \end{cases} \text{(2) ёки } \begin{cases} x \leqslant 1, \\ y \geqslant x, \\ y < (x-1)^2 - 1 \end{cases} \text{(3)}$$

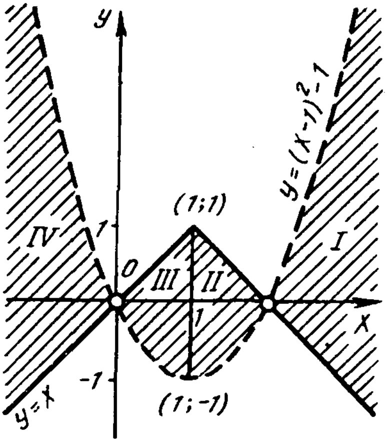
$$\text{ёки } \begin{cases} x \leqslant 1, \\ y \leqslant x, \\ y > (x-1)^2 - 1. \end{cases} \qquad (4)$$

98-расмдаги I соҳа (1), II соҳа (2), III соҳа (4) ва IV соҳа (3) системалар ечимлари мажмуасидир.

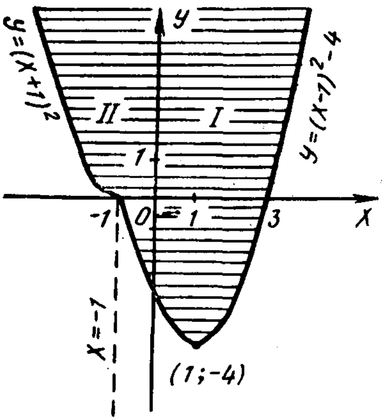
Эслатма. $y - x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow y = (x-1)^2 - 1$ парабола нуқталари мажмуасидан бошқа барча текислик нуқталари берилган тенгсизликнинг аниқланиш соҳасини ташкил қилади.

3-мисол. $y \geqslant x^2 - 2|x+1| - 1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $y \geqslant x^2 - 2|x+1| - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ y \geqslant x^2 - 2(x+1) - 1 \end{cases}$



98- расм.



99- расм.

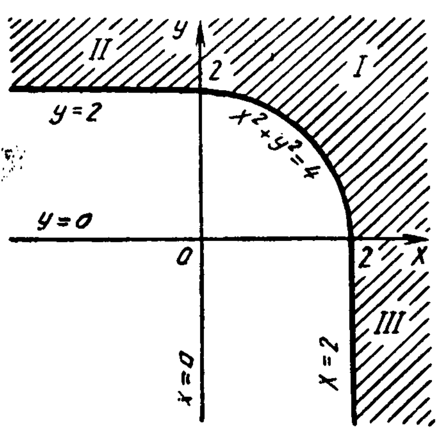
$$\text{ёки } \begin{cases} x+1 \leqslant 0, \\ y \geqslant x^2+2(x+1)-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ y \geqslant x^2-2x-3 \end{cases} \text{ ёки}$$

$$\begin{cases} x \leqslant -1, \\ y \geqslant x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ y \geqslant (x-1)^2-4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{ёки } \begin{cases} x \leqslant -1, \\ y \geqslant (x+1)^2. \end{cases} \quad (2)\ (99\text{-расм}).$$

99-расмдаги $x = -1$ тўғри чизиқ ва ундан ўнг томондаги I соҳа (1) системанинг, чап томондаги II соҳа эса (2) системанинг ечимлари мажмуасидир; чегара нуқталари мажмуаси $y = x^2 - 2|x+1| - 1$ функциянинг графигидир.

4-мисол. $(x+|x|)^2 + (y+|y|)^2 \geqslant 16$ тенгсизликни ечинг.



100-расм.

Ечиш. Модул белгиси остидаги ўзгарувчилар координата ўқларини кесиб ўтганда ўз ишораларини ўзгартирганликлари сабабли 4 та ҳолни кўриб чиқиш лозим.

I чоракда $x \geqslant 0$ ва $y \geqslant 0$, шунинг учун берилган тенгсизлик $(x+x)^2+(y+y)^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geqslant 4$ тенгсизликка тенг кучли бўлади. Демак, бу ҳолда берилган тенгсизликни маркази координаталар бошида ва радиуси 2 бирликка тенг бўлган айлана ҳамда ундан ташқаридаги нуқталар мажмуасининг I чоракда қолган қисми нуқталари қаноатлантиради (100-расмдаги I соҳа).

II чоракда $x \leqslant 0$ ва $y \geqslant 0$, шу сабабли берилган тенгсизлик $(x-x)^2+(y+y)^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow y^2 \geqslant 4 \Leftrightarrow |y| \geqslant 2$ га тенг кучли бўлади, аммо шартни назарга олсак

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ |y| \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 2. \end{cases}$$

Демак, бу ҳолда берилган тенгсизликни $y = 2$ тўғри чизиқ билан чегараланган юқоридаги ярим текисликнинг II чоракда қолган қисми нуқталари мажмуаси қаноатлантиради (100-расмдаги II соҳа).

III чоракда $x \leqslant 0$ ва $y \leqslant 0$. Бу ҳолда берилган тенгсизлик $(x - x)^2 + (y - y)^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow 0 \geqslant 16$ кўринишга эга бўлади. Аммо бу тенгсизлик ўринли эмас. Демак, $x \leqslant 0$ ва $y \leqslant 0$ шартларда берилган тенгсизлик ечимга эга эмас экан.

IV чоракда $x \geqslant 0$ ва $y \leqslant 0$. Бу ҳолда $(x + x)^2 + (y - y)^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow 4x^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow |x| \geqslant 2$ бўлади, аммо шартни эътиборга олсак $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0, \\ |x| \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ y \leqslant 0 \end{cases}$ системага эга бўламиз (100-расмдаги III соҳа).

Шундай қилиб, юқорида келтирилган ҳолларга тегишли ечимлар мажмуасининг бирлашмаси изланаётган ечимдир (100-расм). Чегара нуқталари мажмуаси $(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 16$ тенгламанинг ечимлари мажмуаси бўлади.

5-мисол. $|x| + |y| \leqslant 1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Аввалги мисолга ўхшаш тенгсизлик ечимлари мажмуасини топиш учун 4 та ҳолни кўриб чиқамиз:

1-ҳол. $(|x| + |y| \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0) \Leftrightarrow (x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0) \Leftrightarrow (y \leqslant -x + 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

2-ҳол. $(|x| + |y| \leqslant 1,\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0) \Leftrightarrow (-x + y \leqslant 1,\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0) \Leftrightarrow (y \leqslant x + 1,\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

3-ҳол. $(|x| + |y| \leqslant 1,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0) \Leftrightarrow (-x - y \leqslant 1,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0) \Leftrightarrow (y \geqslant -x - 1,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0)$.

4-ҳол. $(|x| + |y| \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0) \Leftrightarrow (x - y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0) \Leftrightarrow (y \geqslant x - 1,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0)$.

Энди ҳар бир чоракдаги ясашларни бажариб, изланаётган ечимни топамиз.

Биз биламизки, $y = -x + 1$ тўғри чизиқ (1; 0) ва (0; 1) нуқталардан ўтади. Шунинг учун $y = -x + 1$ тўғри чизиқнинг биринчи чоракда қолган кесмаси ва ундан пастда қолган нуқталар мажмуаси $y \leqslant -x + 1$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Қолган ҳол учун ҳам шундай мулоҳазалар юритиб, ечимлар мажмуасини топиш ўзингизга ҳавола қилинади.

Демак, изланаётган нуқталар мажмуаси $y = -x + 1$, $y = x + 1$, $y = -x - 1$ ва $y = x - 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган квадрат ва унинг ички нуқталари мажмуасидан иборат эканлиги келиб чиқади (22-расмга қ.) ёки изланаётган нуқталар мажмуаси $y = -x + 1$ ва $y = -x - 1$

ҳамда $y=x+1$ ва $y=x-1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полосалар кесишмаси деб қаралса ҳам бўлади; ёки учлари $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$ ва $(0;\ -1)$ нуқталарда бўлган квадрат ва унинг ички нуқталари мажмуасидир дейилса ҳам бўлади.

Умумий ҳолда $|x|+|y|=a$ $(a\geqslant 0)$ функция (тенглама) нинг графиги учлари $(a;\ 0)$, $(0;\ a)$, $(-a;\ 0)$ ва $(0;\ -a)$ нуқталарда бўлган ёки $x+y=a$, $-x+y=a$, $-x-y=a$ ва $x-y=a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган квадратдан иборатдир. $|x|+|y|\geqslant 1$ тенгсизликни эса учлари $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$ ва $(0;\ -1)$ нуқталарда бўлган квадрат ва ундан ташқаридаги текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради.

6-мисол. $|y|-|x+1|\geqslant 2$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Модул белгиси остидаги ифодалар $y=0$ ва $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ қийматлар орқали (яъни тўғри чизиқларни кесиб) ўтганда ўз ишорасини ўзгартиради. Шунинг унинг $y\geqslant 0$ бўлганда $|y|=y$ га, $y\leqslant 0$ бўлганда $|y|=-y$ га, $x\geqslant -1$ бўлганда $|x+1|=x+1$ га ва $x\leqslant -1$ бўлганда $|x+1|=-(x+1)=-x-1$ га эга бўламиз. Шундай қилиб 4 та ҳолни кўриб чиқамиз.

1-ҳол. Агар $x\geqslant -1$ ва $y\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} x\geqslant -1, \\ y\geqslant 0, \\ y-x-1\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -1, \\ y\geqslant 0, \\ y\geqslant x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -1, \\ y\geqslant x+3. \end{cases}$$

2-ҳол. Агар $x\leqslant -1$ ва $y\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда:

$$\begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\geqslant 0, \\ y+x+1\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\geqslant 0, \\ y\geqslant -x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\geqslant -x+1. \end{cases}$$

3-ҳол. Агар $x\leqslant -1$ ва $y\leqslant 0$ бўлса, у ҳолда:

$$\begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\leqslant 0, \\ -y+x+1\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\leqslant 0, \\ y\leqslant x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\leqslant x-1. \end{cases}$$

4-ҳол. Агар $x\geqslant -1$ ва $y\leqslant 0$ бўлса, у ҳолда:

$$\begin{cases} x\geqslant -1, \\ y\leqslant 0, \\ -y-x-1\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -1, \\ y\leqslant 0, \\ y\leqslant -x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -1, \\ y\leqslant -x-3. \end{cases}$$

Юқоридаги тўртта ечимлар мажмуасини бирлаштириб, берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуасини топамиз. Аммо диққат билан қарасак, берилган тенгсизлик ечимлари мажмуасини $\begin{cases} y \geqslant x+3, \\ y \geqslant -x+1 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} y \leqslant x-1, \\ y \leqslant -x-3 \end{cases}$ кўринишда ифодаласак ҳам бўлади (101-расм).

101-расмдаги ABC ва DEF синиқ чизиқлар бирлашмаси $|y|-|x+1|=2$ тенгламанинг графиги (яъни ечими) дир.

Берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуаси $x=-1$ ва $y=0$ тўғри чизиқларга нисбатан симметрик жойлашганлиги сабабли 1-ҳолда ҳосил қилинган $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ y \geqslant x+3 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини аввал $x=-1$ тўғри чизиққа, сўнгра ҳосил бўлган ҳар иккала ечимлар мажмуасини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантириш натижасида ҳам ҳосил қилиш мумкин.

$|x+1|-|y|\geqslant 2$ тенгсизликни ҳам юқоридагига ўхшаш шакл алмаштиришлар бажаришни ўзингизга ҳавола қиламиз ва фақат сўнгги натижани келтирамиз:

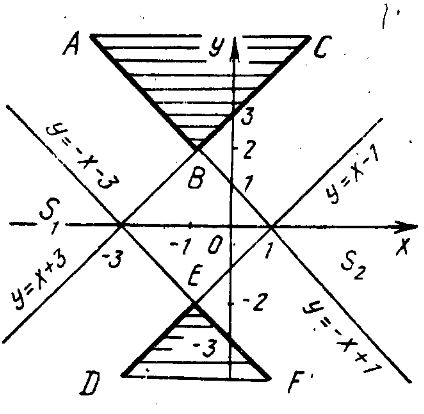
$$|x+1|-|y|\geqslant 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y\leqslant -x-3, \\ y\geqslant x+3\end{cases} \text{ёки} \begin{cases} y \leqslant x-1, \\ y\geqslant -x+1.\end{cases}$$

Бу тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси мос равишда S_1 ва S_2 соҳалар бирлашмасидан иборатдир (101-расмга қ.), ечимга бурчак томонлари нуқталари мажмуаси ҳам киради.

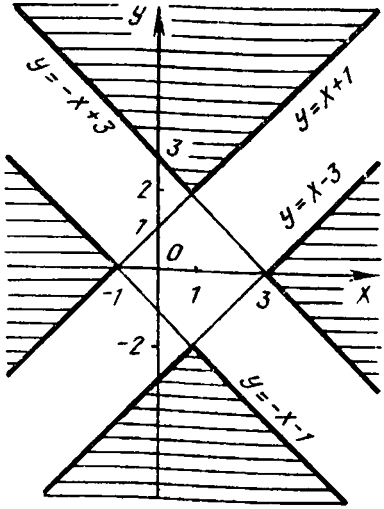
7-мисол. $||x-1|-|y||\geqslant 2$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Ички модул остидаги ифодалар $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ва $y=0$ қийматлардан ўтганда ўз ишораларини ўзгартирадилар. Шунинг учун тенгсизлик ечимлари мажмуаси $x=1$ ва $y=0$ тўғри чизиқларга нисбатан симметрик бўлади.

Берилган тенгсизлик $|x-1|-|y|\geqslant 2$ ёки $|x-1|-|y|\leqslant -2$,



101- расм.



102- расм.

яъни

$$\left[\begin{array}{l}|x-1|-|y|\geqslant 2,\\ |y|-|x-1|\geqslant 2\end{array}\right.$$

бўлганда ўринли бўлади. Бу кўринишдаги тенгсизликлар ечимларини топиш юқоридаги 6-мисолда кўрилган. Шунинг учун шакл алмаштиришлар жараёнини бажаришни ўзингизга ҳавола қиламиз ва фақат шакл алмаштиришлар натижасинигина келтирамиз:

$$||x-1|-|y||\geqslant 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x-1|-|y|\geqslant 2\\ |y|-|x-1|\geqslant 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y\leqslant x-3,\\ y\geqslant -x+3\end{array}\right.$$

$$\text{ёки } \left\{\begin{array}{l}y\leqslant -x-1,\\ y\geqslant x+1\end{array}\right. \text{ ёки } \left\{\begin{array}{l}y\geqslant x+1,\\ y\geqslant -x+3\end{array}\right. \text{ ёки } \left\{\begin{array}{l}y\leqslant x-3,\\ y\leqslant -x-1\end{array}\right.$$

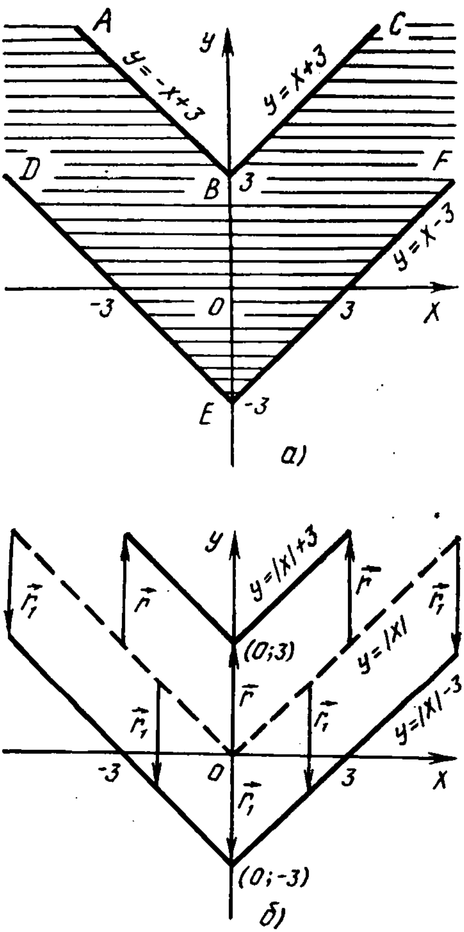
(102- расм).

8-мисол. $||x|-y|\leqslant 3$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. $||x|-y|\leqslant 3 \Leftrightarrow -3\leqslant |x|-y\leqslant 3 \Leftrightarrow -|x|-3\leqslant -y\leqslant -|x|+3 \Leftrightarrow |x|-3\leqslant y\leqslant |x|+3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0,\\ x-3\leqslant y\leqslant x+3;\end{array}\right. & (1)\\ \left\{\begin{array}{l}x\leqslant 0,\\ -x-3\leqslant y\leqslant -x+3.\end{array}\right. & (2)\end{array}\right.$$

(1) системани $y=x-3$ ва $y=x+3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полосанинг ординаталар ўқидаги ва ундан ўнг томонда қолган қисми нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. Бу ҳосил бўлган нуқталар мажмуасини ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантирсак, чап қисмда (2) система ечимлари мажмуаси ҳосил бўлади. Шундай қилиб, изланаётган мажмуа 103-*а* расмда тасвирланган. *ABC* ва *DEF* синиқ чизиқлар (яъни бурчаклар) нуқталари мажмуаси $-||x|-y|=3$ тенгламанинг ечимидир.



103- расм.

Ёки $||x|-y|=3$ тенглама ечимлари мажмуасини қуйидагича муҳокама қилиб топса ҳам бўлади, яъни:

$$||x|-y|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|-y=3,\\ |x|-y=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y=|x|-3, & (3)\\ y=|x|+3. & (4)\end{array}\right.$$

Бизга маълумки, $y=|x|$ тенглама графиги I ва II координата бурчаклари биссектрисаларидан иборат, уни $\vec{r}$ (0, 3) вектор қадар параллел кўчирсак (4) тенгламанинг; $\vec{r}_1$ (0; —3) вектор қадар параллел кўчирсак, (3) тенгламанинг; уларнинг бирлашмаси эса $||x|-y|=3$ тенгламанинг ечимлари мажмуаси бўлади (103-*б* расм).

$||x|-y|\leqslant 3$ тенгсизлик ечимларидан қолган текислик қисмлари мажмуаси $||x|-y|>3$ тенгсизликнинг, унга чегара нуқталари мажмуасини қўшсак, $||x|-y|\geqslant 3$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси ҳосил бўлади.

9-мисол. $|y|+2|x|\leqslant x^2+1$ (*) тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Модул белгиси остидаги ўзгарувчилар координата ўқларини кесиб ўтганда ўз ишораларини ўзгартирганлиги сабабли тўртала чоракда алоҳида-алоҳида кўриб чиқиш мақсадга мувофиқдир, яъни:

$$(*)\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ y+2x\leqslant x^2+1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ y-2x\leqslant x^2+1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\leqslant 0,\\ -y-2x\leqslant x^2+1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\leqslant 0,\\ -y+2x\leqslant x^2+1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ y\leqslant (x-1)^2;\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ y\leqslant (x+1)^2;\end{cases} & (2)\\ \begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\leqslant 0,\\ y\geqslant -(x+1)^2;\end{cases} & (3)\\ \begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\leqslant 0,\\ y\geqslant -(x-1)^2.\end{cases} & (4)\end{array}\right.$$

Изланаётган ечимлар мажмуаси дастлаб (1) система ечимлари мажмуасини ординаталар ўқига, сўнгра ҳосил бўлган текислик нуқталари мажмуасини абсциссалар ўқига нисбатан симметрик акслантириш натижасида ҳосил қилинади (104-расм).

10-мисол. $x^2+y^2\leqslant 2(|x|+|y|)$ (*) тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликни унга тенг кучли бўлган тенгсизликлар системаси бирлашмасига алмаштирамиз:

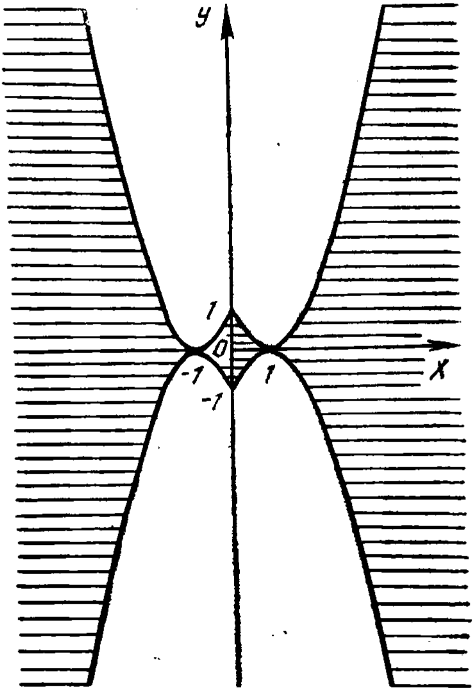
$$(*)\ \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x^2+y^2\leqslant 2(x+y)\end{cases}$$

$$\text{ёки}\ \begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x^2+y^2\leqslant 2(-x+y)\end{cases} \quad \text{ёки}\ \begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\leqslant 0,\\ x^2+y^2\leqslant 2(-x-y)\end{cases}$$

$$\text{ёки}\ \begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\leqslant 0,\\ x^2+y^2\leqslant 2(x-y)\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant (\sqrt{2})^2\end{cases}$$

$$\text{ёки}\ \begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ (x+1)^2+(y-1)^2\leqslant (\sqrt{2})^2\end{cases}$$

$$\text{ёки}\ \begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\leqslant 0,\\ (x+1)^2+(y+1)^2\leqslant (\sqrt{2})^2\end{cases}$$



104- расм.

$$\text{ёки} \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0, \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqslant (\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

(105- расм). Чегара нуқталари мажмуаси $x^2 + y^2 = 2(|x| + |y|)$ тенгламанинг графигидир.

11- мисол. Ушбу тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг:

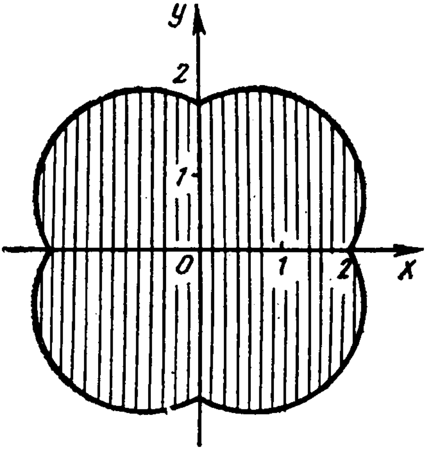
$$4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2(|x| + |y|).$$

Ечиш.

$$4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2(|x| + |y|) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2(|x| + |y|), & (1) \\ x^2 + y^2 \geqslant 4. & (2) \end{cases}$$

(1) тенгсизлик ечимлари мажмуаси (105-расмга қаранг) дан маркази координаталар бошида ва радиуси 2 бирликка тенг

бўлган очиқ доира нуқталари мажмуасини чиқариб юборсак, берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуаси ҳосил бўлади (106-расм).



105-расм.

12-мисол. Ушбу тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг:

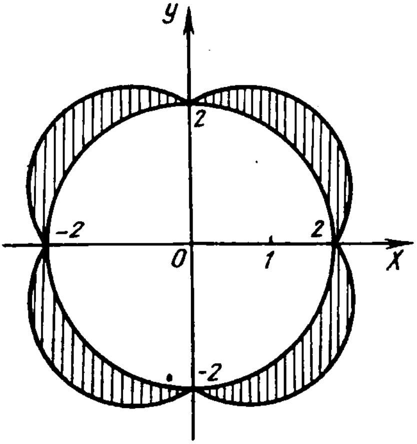
$$\left|\frac{x+2y}{x-y}\right|>2.$$

Ечиш. **1-усул.** Шу бобнинг 7-параграфида келтирилган IV тенг кучлилик схемаси ҳамда IV бобнинг 1-параграфида келтирилган тенг кучли алмаштиришлар схемаларини қўллаб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left|\frac{x+2y}{x-y}\right|>2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2y}{x-y}>2,\\ \dfrac{x+2y}{x-y}<-2\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2y-2x+2y}{x-y}>0,\\ \dfrac{x+2y+2x-2y}{x-y}<0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$



106-расм.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{4y-x}{x-y}>0,\\ \dfrac{3x}{x-y}<0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4y - x > 0, \\ x - y > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4y - x < 0, \\ x - y < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x - y < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x - y > 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > \frac{1}{4}x, \\ y < x; \end{cases} \\ \begin{cases} y < \frac{1}{4}x, \\ y > x; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ y > x; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y < x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

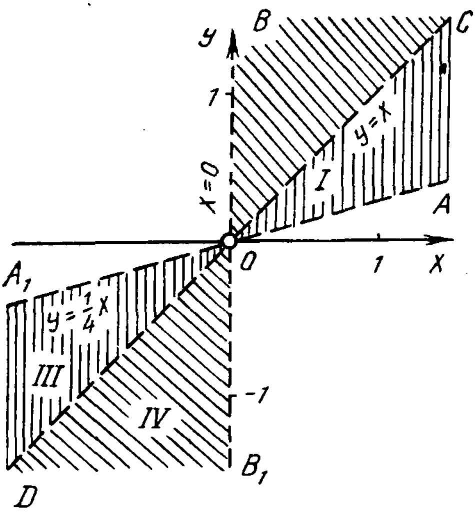
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{4}x < y < x, \\ \frac{1}{4}x < x; \end{cases} \\ \begin{cases} x < y < \frac{1}{4}x, \\ \frac{1}{4}x > x; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ y > x; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y < x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \frac{1}{4}x < y < x, \\ x > 0; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < y < \frac{1}{4}x, \\ x < 0, \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x > 0, \\ y > x; \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x < 0, \\ y < x. \end{cases} & (4) \end{array}\right.$$

Демак, берилган тенгсизликни мос равишда AOC, COB, A_1OD ва DOB_1 бурчаклар ички нуқталари мажмуаси қаноатлантиради (107- расм).

2- усул. $|x-y|$ — номанфий сон (x ва y ларнинг исталган қийматларида), шу сабабли $x-y \neq 0$ бўлганда тенгсизликнинг иккала қисмини унга кўпайтирилганда тенг кучлилик бузилмайди, демак:

$$\left|\frac{x+2y}{x-y}\right| > 2 \Leftrightarrow \frac{|x+2y|}{|x-y|} > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2y| > 2|x-y|, \\ x-y \neq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Эслатма. Биз юқорида $A\,|f(x, y)| + B\,|g(x, y)| \geqslant \varphi(x, y)$ кўринишдаги тенгсизликларни ечишга доир мисолларни кўриб ўтган эдик. Энди шу кўринишдаги тенгсизликларни умумий ҳолда қандай муҳокама қилишни кўрсатувчи тенг кучлилик схемасини келтирамиз:



107- расм.

$$A\,|f(x,y)|+B|g(x,y)|\geqslant\varphi(x,y)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x,y)\geqslant 0,\\ g(x,y)\geqslant 0,\\ A\,f(x,y)+Bg(x,y)\geqslant\varphi(x,y);\end{cases}\\ \begin{cases}f(x,y)\geqslant 0,\\ g(x,y)\leqslant 0,\\ A\,f(x,y)-Bg(x,y)\geqslant\varphi(x,y);\end{cases}\\ \begin{cases}f(x,y)\leqslant 0,\\ g(x,y)\leqslant 0,\\ -Af(x,y)-Bg(x,y)\geqslant\varphi(x,y);\end{cases}\\ \begin{cases}f(x,y)\leqslant 0,\\ g(x,y)\geqslant 0,\\ -Af(x,y)+B\,g(x,y)\geqslant\varphi(x,y).\end{cases}\end{array}\right.$$

Бу тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб, (*) система ечимларини топамиз:

$$(^*)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y\geqslant 0,\\ x-y>0,\\ x+2y-2x+2y>0\end{cases}\quad\text{ёки}\quad\begin{cases}x+2y\geqslant 0,\\ x-y<0,\\ x+2y+2x-2y>0\end{cases}$$

$$\text{ёки } \begin{cases} x + 2y \leqslant 0, \\ x - y < 0 \\ -x - 2y + 2x - 2y > 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x + 2y \leqslant 0, \\ x - y > 0, \\ -x-2y-2x+2y>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant -\frac{1}{2}x, \\ y < x, \\ y > \frac{1}{4}x \end{cases} (1) \text{ ёки } \begin{cases} y \geqslant -\frac{1}{2}x, \\ y > x, \\ x > 0 \end{cases} (2) \text{ ёки}$$

$$\begin{cases} y \leqslant -\frac{1}{2}x, \\ y > x, \\ y < \frac{1}{4}x \end{cases} (3) \text{ ёки } \begin{cases} y \leqslant -\frac{1}{2}x, \\ y > x, \\ x < 0 \end{cases} (4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4}x < y < x \\ y > x \end{array}\right. \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < y < \frac{1}{4}x \\ y > x. \end{array}\right. \end{cases}$$

Изоҳ. Агар $x > 0$ бўлса, у ҳолда (1) система $\begin{cases} y < x, \\ y > \frac{1}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}x < y < x$ га, (2) система $y > x$ га; агар $x < 0$ бўлса, у ҳолда (3) система $\begin{cases} y > x, \\ y < \frac{1}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow x < y < \frac{1}{4}x$ га, (4) система эса $y < x$ га тенг кучли бўлади. Шу сабабли юқоридагиларни назарга олган ҳолда фақат сўнгги натижа ёзилган.

Шундай қилиб, бу усулда ҳам 1-усулдаги натижага келинди.

3-усул. Тенгсизликнинг ҳар иккала қисми номанфий сон бўлгани учун унинг ҳар иккала қисмини квадратга ошириш натижасида тенг кучлилик бузилмайди. Сўнгра ҳосил бўлган каср-рационал тенгсизликни IV бобда келтирилган тенг кучлилик схемасидан фойдаланиб шакл алмаштирамиз:

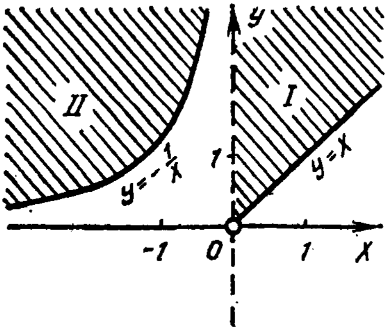
$$\left|\frac{x+2y}{x-y}\right| > 2 \Leftrightarrow \frac{(x+2y)^2}{(x-y)^2} > 4 \Leftrightarrow \frac{(x+2y)^2 - 4(x-y)^2}{(x-y)^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 12xy}{(x-y)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{12x\left(y - \frac{1}{4}x\right)}{(x-y)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(y - \frac{1}{4}x\right) > 0, \\ x - y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x > 0, \\ y - \frac{1}{4}x > 0, \\ x - y \neq 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x < 0, \\ y - \frac{1}{4}x < 0, \\ x - y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x > 0, \\ y > \frac{1}{4}x, \\ y \neq x \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x < 0, \\ y < \frac{1}{4}x, \\ y \neq x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4}x < y < x \\ y > x \end{array}\right. \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < y < \frac{1}{4}x \\ y < x. \end{array}\right. \end{cases}$$



108- расм.

Юқоридаги ечимларнинг учала усулини солиштирганда, улардан энг қулайи учинчиси эканлигини кўриш қийин эмас.

13-мисол. $y \geqslant |x|^{|x|/x}$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. $y \geqslant |x|^{|x|/x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x > 0, \\ y \geqslant x \end{cases} (1) \text{ ёки}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ y > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y \geqslant \frac{1}{x}. \end{cases} (2)$$

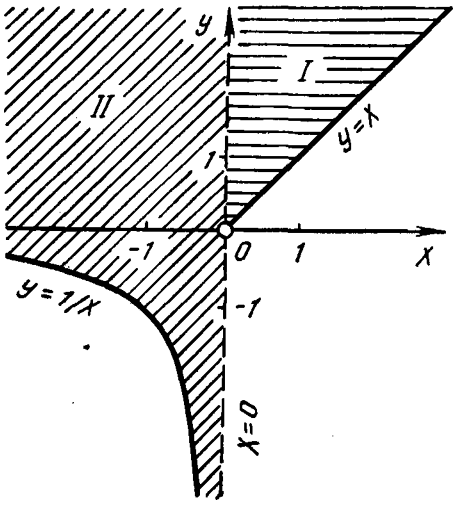
Ечимнинг геометрик тасвири 108-расмда келтирилган, ундаги I соҳа (1), II соҳа эса (2) системанинг ечимлари мажмуасидир.

Иккинчи чоракдаги гипербола ҳамда биринчи координата бурчагининг очиқ нури нуқталари мажмуасида $y = |x|^{|x|/x}$ бўлади.

14-мисол. $y \geqslant x^{|x|/x}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $y \geqslant x^{|x|/x} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y \geqslant x \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x < 0, \\ y \geqslant x^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x > 0, \\ y \geqslant x \end{cases} (1) \text{ ёки } \begin{cases} x < 0, \\ y \geqslant \frac{1}{x}. \end{cases} (2)$$



109- расм.

Изланаётган мажмуа 109-расмда тасвирланган, ундаги I соҳа (1), II соҳа эса (2) системанинг ечимларидир.

15-мисол. $y \geqslant |x|^{|y|/y}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизлик абсциссалар ўқида ($y = 0$) ётмаган барча текислик нуқталари мажмуасида аниқланган ва бу аниқланиш соҳасида тенгсизликнинг ўнг қисми фақат мусбат қийматларни қабул қилади. Шунинг учун ечимлар мажмуаси абсциссалар ўқидан юқоридаги очиқ ярим текисликда бўлади. Шунинг учун фақат $y > 0$ ҳолни кўриб чиқиш етарлидир, яъни $y \geqslant |x|^{|y|/y} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0, \\ y \geqslant |x|. \end{cases}$ Изланаётган ечимлар мажмуаси I ва II координата бурчаклари биссектрисалари ва улар орасидаги текислик нуқталари мажмуасидан иборат, унга (0; 0) нуқта (яъни координаталар боши) тегишли эмас.

16-мисол. $y \geqslant |x|^{|xy|/xy}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизлик $xy \neq 0$ (яъни координаталар ўқида ётмаган барча текислик нуқталари мажмуаси)да аниқланган, шунингдек, аниқланиш соҳасида тенгсизликнинг ўнг қисми фақат мусбат қийматларни қабул қилади. Шунинг учун тенгсизликнинг чап қисми ҳам тенгсизлик ўринли бўлиши учун фақат мусбат қийматларни қабул қилади. Шу сабабли фақат иккита ҳолни I ва II координата бурчакларида кўриб чиқиш етарлидир. Шундай қилиб, берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликлар системалари бирлашмасига тенг кучлидир:

$$y \geqslant |x|^{|xy|/xy} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y \geqslant x \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x < 0, \\ y > 0, \\ y \geqslant -\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y \geqslant x \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x < 0, \\ y \geqslant -\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Демак, изланаётган ечимлар мажмуаси 13-мисолдагининг ўзи экан (108-расмга қаранг).

Машқлар

Тенгсизликларни ечинг:

1. $|x - y| + y \geqslant 0$;
2. $y^2 - |x - 1| \geqslant 0$;
3. $y \geqslant |x^2 - 4| - |x^2 - 9|$;
4. $y \leqslant |x| (x - 2)$;
5. $y \geqslant (3 - x) |x + 1|$;
6. $y \geqslant |x^2 - 2x|$;
7. $y \leqslant -|x^2 - x - 6|$;
8. $|y - 1| \geqslant -\frac{2}{x}$;
9. $|x - 1| + |y + 1| \geqslant 2$;
10. $|x + y| + |x - y| \leqslant 2$;
11. $y \geqslant x + x\sqrt{(x - 1)^2}$;
12. $y \leqslant (x - 1)(2 - |x|)$;
13. $y \geqslant \frac{x^3 + x}{|x|}$;
14. $y \geqslant \frac{x^4 - 1}{|x^2 - 1|}$;
15. $y \geqslant \frac{x^3 - x^2}{2|x - 1|}$;
16. $y \leqslant |\sin x| + \sin |x|$;
17. $y \geqslant \sin x + |\sin x|$;
18. $y \geqslant 2\sin x\, |\cos x|$;
19. $y \geqslant \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x}}$;
20. $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geqslant 2x$;
21. $\frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0$;
22. $\frac{x^2 - 5x + 6}{|x| + 7} < 0$;
23. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$;
24. $|x^2 + x - 20| \leqslant x^2 + x - 20$;
25. $\left|\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}\right| > 1$;
26. $|x^2 - 4x| > 1$;
27. $|\log_8 (x^2 - 4x + 3)| < 1$;
28. $|\log_2 (x^2 - 6x + 7)| > 1$;
29. $\log_{\frac{1}{4}} \left|\frac{2x + 1}{x + 3} + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$;
30. $|x - |y|| \geqslant 3$;
31. $|2x - y| > y - 1$;
32. $|x + |y|| \geqslant 3$;
33. $|||x| - 4| + |y| - 4| \leqslant 2$;
34. $|||x| - 4| + |y| - 3| \leqslant 1$;
35. $|||x| - 4| + |y| - 3| \geqslant 1$;
36. $|x - 2| + |y| \leqslant x$.

VI БОБ. ТЕНГСИЗЛИКЛАРГА ДОИР ТУРЛИ МАСАЛАЛАР

Ушбу бобда турли тенгсизликларга доир масалаларнинг муҳокамалари келтирилади. Айрим машқларга доир чизмалар келтирилмаган ва фақат аналитик ечим келтирилган. Агар келтирилган ечимларни тасаввур қилишга қийналсангиз, у ҳолда чизмаларни чизиб, муҳокама қилишни ўзингизга ҳавола қиламиз.

1-§. Аралаш системаларни график усулда ечиш

Ушбу параграфда айрим аралаш система ечимларини топиш муҳокамалари келтирилади.

Таъриф. Икки ўзгарувчили аралаш система деб шундай муносабатлар мажмуасига айтиладики, улардан айримлари тенгламалар, айримлари эса тенгсизликлардан иборат бўлади.

Аралаш система таркибига кирган муносабатларни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуаси—аралаш системанинг ечимлари мажмуаси бўлади. Тенгламалар ва тенгсизликлар системаларига доир асосий тушунчалар (яъни ечим, тенг кучлилик, натижалар ва ҳ.к.) аралаш системага ҳам тааллуқлидир.

1-мисол $\begin{cases} x-y=0, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$ системанинг ечимларини координаталар текислигида кўрсатинг.

Ечиш. $x-y=0$, яъни $y=x$ тенгламани I ва III координата бурчаклари биссектрисаларида ётган нуқталар, $x\geqslant 0$ тенгсизликни эса ординаталар ўқи ва ундан ўнг томондаги ёпиқ ярим текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. Изланаётган мажмуа — I координата бурчаги биссектрисаси нуқталари мажмуасидан иборат (I координата бурчаги биссектрисаси — аралаш системанинг умумий қисмидир, шунинг учун у изланаётган ечим бўлади), унга координаталар боши ҳам киради.

Диққат билан қаралса, айрим бир ечим бир неча аралаш системанинг ечими ҳам бўлиши мумкин экан.

Масалан, $\begin{cases} x-y=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x-y=0, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$ аралаш системаларнинг ечимлари биринчи координата бурчаги биссектрисасидир.

2-мисол. $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x-y+1>0 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. $x^2+y^2=4$ тенгламани маркази координаталар бошида ва радиуси 2 бирликка тенг бўлган айлана нуқталари, $x-y+1>0\Leftrightarrow y<x+1$ тенгсизликни эса $y=x+1$ тўғри чизиқ билан чегараланган ҳамда ундан қуйида жойлашган очиқ ярим текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради.

Изланаётган мажмуа—маркази координаталар бошида ва радиуси 2 бирликка тенг бўлган айлананинг $y = x + 1$ тўғри чизиқдан қуйида қолган ёйи нуқталари мажмуасидан иборат бўлиб, унга ёйнинг учлари кирмайди.

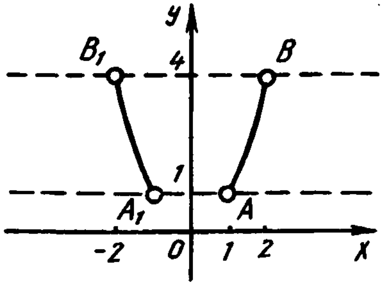
3-мисол. $\begin{cases} x + y = 1, \\ y - 2x - 1 > 0 \end{cases}$ системани қаноатлантирувчи нуқталар мажмуасини топинг.

Ечиш. Изланаётган нуқталар мажмуаси $y - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = 2x + 1$ тўғри чизиқдан юқорида ётиши, шунингдек, $x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$ тўғри чизиққа тегишли бўлиши керак. Шундай қилиб, изланаётган нуқталар мажмуаси (0; 1) нуқтадан чиқувчи ва $y = 2x + 1$ тўғри чизиқдан юқорида ётувчи очиқ нур ($x + y = 1$ тўғри чизиқнинг бир қисми) дан ташкил топади, (0; 1) нуқта эса изланаётган мажмуага кирмайди.

4-мисол. $\begin{cases} y + 7 > 0, \\ x - y + 1 = 0, \\ 2x - y + 4 < 0 \end{cases}$ системани қаноатлантирувчи нуқталар мажмуасини топинг.

Ечиш. $\begin{cases} y + 7 > 0, \\ x - y + 1 = 0, \\ 2x - y + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -7, \\ y = x + 1, \\ y > 2x + 4. \end{cases}$

Изланаётган нуқталар $y = 2x + 4$ ва $y = -7$ тўғри чизиқлардан юқорида ётиши ва бир вақтда $y = 2x + 1$ тўғри чизиққа тегишли бўлиши керак. Шундай қилиб, изланаётган нуқталар мажмуаси $y = x + 1$ тўғри чизиқ кесмасидан иборат бўлиб, унинг учлари координаталари $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ y + 7 = 0 \end{cases}$ системаларни ечиб топилади. Демак, изланаётган ечим-учлари $(-8; -7)$ ва $(-3; -2)$ бўлган очиқ кесмадан иборат.



110- расм.

5-мисол. $\begin{cases} y = x^2, \\ 1 < y < 4 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Изланаётган мажмуа $y = x^2$ парабола нуқталари мажмуаси билан

$y = 1$ ва $y = 4$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полоса нуқталари мажмуасининг умумий қисми — параболанинг AB ва A_1B_1 ёйлари нуқталари мажмуасидан иборат бўлиб, унга ёйларнинг учлари, яъни A, B, A_1 ва B_1 нуқталар кирмайди (110-расм).

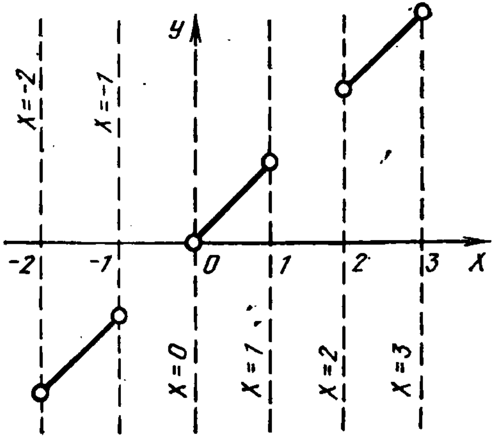
Агар $\begin{cases} y = x^2, \\ 1 < y < 4, \\ x > 0 \end{cases}$ бўлганда эди, у ҳолда бу системанинг ечими очиқ $\smile AB$ дан иборат бўлар эди.

6-мисол. $\begin{cases} y = x, \\ \sin \pi x > 0 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Бизга маълумки, $y = x$ тенгламани I ва III координата бурчаклари биссектрисалари нуқталари мажмуаси қаноатлантиради, $\sin \pi x > 0$ тенгсизликни эса $2\pi n < \pi x < < \pi + 2\pi n \Leftrightarrow 2n < x < 1 + 2n$ (*) оралиқлардан олинган x нинг қийматлари қаноатлантиради ($n \in Z$).

xOy текисликда $\sin \pi x > 0$ тенгсизлик ечимлари мажмуаси (*) тенгсизлик билан аниқланадиган чексиз кўп очиқ полосалар нуқталари мажмуасидан иборат. $y = x$ биссектриса билан кўрсатилган полосанинг умумий қисми кўрилаётган аралаш системанинг ечимлари ҳисобланади (111-расм).

7-мисол. $\begin{cases} y = x, \\ y = 1/x, \\ x > 0 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.



111-расм.

Ечиш. $y=x$ ва $y=1/x$ функцияларнинг графиклари иккита $M_1(1;\ 1)$ ва $M_2(-1;\ -1)$ нуқталарда кесишади. Изланаётган ечим эса система учинчи тенгсизлигини (яъни $x>0$ ни) қаноатлантирувчи очиқ ярим текисликка тегишли M_1 нуқтадир. Демак, берилган системанинг ечимлар мажмуаси $M_1(1;\ 1)$ нуқтадан иборат экан. *Жавоб:* $\{(1;\ 1)\}$.

Жавобнинг график тасвири $(1;\ 1)$ координатали битта нуқтадир.

Агар $\begin{cases} y=x, \\ y=1/x, \\ x>0 \end{cases}$ системадаги охирги шартни, масалан $x>-3$

шарт билан алмаштирилса, у ҳолда ҳосил бўлган $\begin{cases} y=x, \\ y=1/x, \\ x>-3 \end{cases}$

аралаш системанинг ечимлари мажмуаси координаталар текислигида иккита $M_1(1;\ 1)$ ва $M_2(-1;\ -1)$ нуқтадан иборат бўлади.

Жавоб: $\{(-1;\ -1)\}\cup\{(1;\ 1)\}$.

Кўпинча функцияларнинг графикларини ясаш жараёни аралаш системаларни ечишга боғлиқ бўлиб қолади, чунки бунда берилган функциялар ўзининг берилишига қараб турли чегараланишларни ўз ичига қамраб олади. Шу сабабли ўқувчилар функцияларнинг графикларини ясашда айрим хатоликларга йўл қўйишлари мумкин, яъни айрим шартлар (чегараланишлар)ни гўёки назарга олгандек бўладилару, лекин кейинчалик унга эътибор беришни унутадилар ва натижада хато натижага (яъни графикка) эга бўладилар. Бунинг натижасида ечимлар кенгайиши ёки торайиши мумкин. Бунинг олдини олиш мақсадида ҳар доим барча чегараланиш (яъни аниқланиш соҳалари, функцияларнинг хоссалари ва ҳ.к.) ҳисобга олинган ҳолда тенг кучли шакл алмаштиришларни бажариш ва стандарт кўринишга келтириш, сўнгра охирги аралаш система ечимлари мажмуасини топиш мақсадга мувофиқдир. Шундагина айрим тасодифлардан ҳоли бўлинади.

Қуйида биз айрим функцияларнинг графикларини ясашга доир мисолларни муҳокамалари билан келтирамиз.

8-мисол. $y=\dfrac{x-1}{|x-1|}(x^2-1)$ функциянинг графигини ясанг.

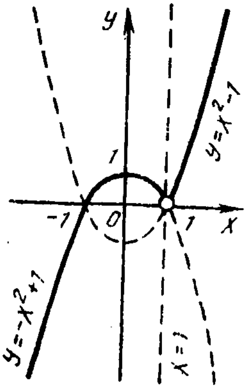
Ечиш. Функция $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ да аниқланган. Шунинг учун $x=1$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуаси функция графигига тегишли бўлмайди. Шу сабабли функция графиги $x=1$ тўғри чизиққа нисбатан чап ва ўнг қисмларда қандай бўлишини топиш қолади холос. Юқорида келтирилган чегараланишларни ҳисобга олган ҳолда қуйидаги натижаларга эга бўламиз:

$$y=\frac{x-1}{|x-1|}(x^2-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1>0,\\ y=\dfrac{x-1}{x-1}(x^2-1);\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x-1<0,\\ y=\dfrac{x-1}{-(x-1)}(x^2-1)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ y=x^2-1;\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x<1,\\ y=-x^2+1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Шундай қилиб, изланаётган график 112-расмда тасвирланган.

Графикдан кўринадики, (1; 0) нуқта графикка тегишли бўлмайди. Шунинг учун уни очиқ доирачага олиб қўйилиши албатта зарур, чунки агар бунга эътибор берилмаса, у ҳолда у функция графигига тегишли бўлиб қолади. Бу эса ўз навбатида қўпол хатодир, чунки у нуқтанинг координаталарини берилган ўзгарувчиларнинг ўринларига қўйсак, тенгликнинг чап томони маънога эга бўлади, аммо ўнг томони маънога эга бўлмай қолади. Бундан кўринадики, чегараланишларни графикда ҳисобга олиш албатта зарур экан.



112- расм.

9-мисол. $y=\dfrac{|\log_3 x|}{\log_3 x}$ функциянинг графигини ясанг.

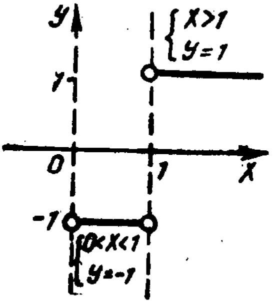
Ечиш. Берилган функция $x>0$ ва $\log_3 x\neq 0$ да аниқланган. Шуларни эътиборга олган ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y=\frac{|\log_3 x|}{\log_3 x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3 x>0,\\ y=1;\end{cases}\\ \\ \begin{cases}\log_3 x<0,\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ y=1;\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x>0,\\ x<1,\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ y=1;\end{cases}\\ \\ \begin{cases}0<x<1,\\ y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

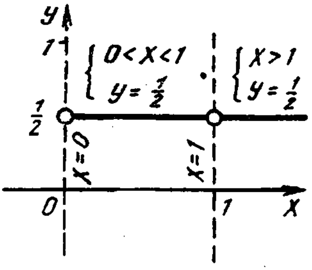
Берилган функциянинг графиги 113-расмда кўрсатилган.

10-мисол. $y=\log_{\sqrt{x}}\sqrt{x}$ функция графигини ясанг.

Ечиш. Логарифм асоси $x>0$ ва $x\neq 1$ да, логарифм белгиси остидаги ифода эса $x>0$ да, яъни берилган функция $\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1\end{cases}$ да аниқланган. Буларни эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:



113-расм.



114-расм.

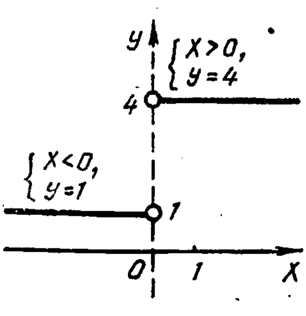
$$y=\log_x\sqrt{x}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\\ y=\log_x x^{1/2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ y=1/2;\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x>1,\\ y=1/2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Функциянинг графиги 114-расмда тасвирланган. (0; 0,5) ва (1; 0,5) нуқталар функция графигига тегишли эмас.

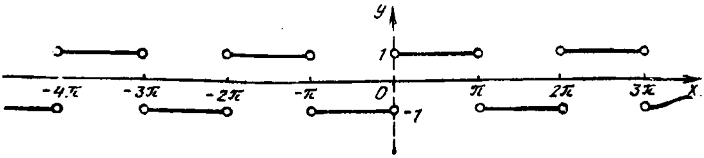
11-мисол. $y=2^{(|x|+x)/x}$ функциянинг графигини ясанг.

Ечиш. Функция $x\neq 0$ да аниқланган. Шунинг учун $x>0$ ва $x<0$ да функция графиги қандай бўлишини аниқлаш қолади холос.

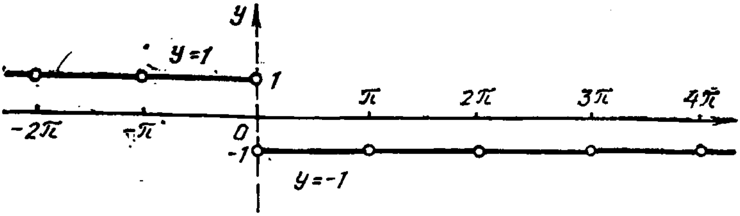
$$y=2^{(|x|+x)/x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ y=2^{(x+x)/x}\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x<0,\\ y=2^{(-x+x)/x}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$



115-расм.



116- расм.



117- расм.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y = 2^2 = 4; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x < 0; \\ y = 2^0 = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Изланаётган график 115- расмда кўрсатилган.

12- мисол. $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ функция графигини ясанг.

Ечиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \neq \pi n \,(n \in Z)$ дан иборат. Буни эътиборга олиб, қуйидаги натижага келамиз:

$$y = \frac{|\sin x|}{\sin x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0, \\ y = 1; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \sin x < 0, \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \\ y = 1; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -\pi + 2\pi n < x < 2\pi n, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Изланаётган график 116- расмда тасвирланган. Графикдаги ҳамма кесмалар очиқ кесмалардан иборат, яъни кесма учлари координаталари графикка тегишли эмас.

13- мисол. $y = \frac{\cos\left(|x| + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin x}$ функция графигини ясанг.

Ечиш. Функция $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi n\,(n \in Z)$ да аниқланган ва шу билан бир қаторда тоқ функциядир, чунки

$$y(-x) = \frac{\cos\left(|-x| + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(-x)} = -\frac{\cos\left(|x| + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin x} = -y(x).$$

Келтириш формуласига кўра $\cos\left(|x| + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin|x|$.

Шундай қилиб, юқоридагиларни эътиборга олган ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$y = \frac{\cos\left(|x| + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, \\ y = -\frac{\sin|x|}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \pi n, \\ y = -1; \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x < 0, \\ x \neq \pi n, \\ y = 1. \end{cases}$$

Изланаётган график 117-расмда тасвирланган.

14-мисол. $y = \lg\operatorname{tg}x + \lg\operatorname{ctg}x$ функция графигини ясанг.

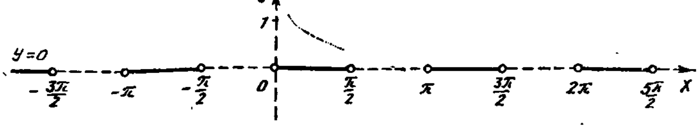
Ечиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси қуйидагича топилади:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x > 0, \\ \operatorname{ctg}x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi m < x < \frac{\pi}{2} + \pi m, \; m \in Z, \\ \pi n < x < \pi + \pi n, \; n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Бизга маълумки, ҳар қандай x ва y мусбат сонлар учун $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ўринли, шунингдек, $\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x = 1$. Шуларни ҳамда аниқланиш соҳасини ҳисобга олган ҳолда берилган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$y = \lg\operatorname{tg}x + \lg\operatorname{ctg}x \Leftrightarrow \begin{cases} \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ y = \lg(\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \; k \in Z, \\ y = \lg 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \; k \in Z, \\ y = 0. \end{cases}$$



118-расм.

Шундай қилиб, изланаётган график 118- расмда кўрсатилган.

15-мисол.

$$y=\frac{x^2\sqrt{x^4-6x^2+9}}{x^2-3}$$

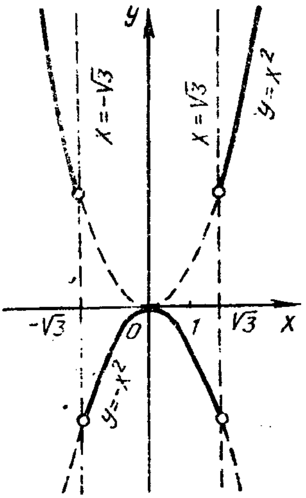
функция графигини ясанг:

Ечиш. $x^4-6x^2+9=(x^2-3)^2$. Шуни назарга олган ҳолда функцияни қуйидагича кўринишда ёзиб оламиз:

$$y=\frac{x^2\sqrt{x^4-6x^2+9}}{x^2-3}=$$

$$=\frac{x^2\sqrt{(x^2-3)^2}}{x^2-3}=\frac{x^2|x^2-3|}{x^2-3}$$

функция $x^2-3\neq0\Leftrightarrow x\neq\pm\sqrt{3}$ да аниқланган. Шундай қилиб, юқоридагиларни эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:



119- расм.

$$y=\frac{x^2|x^2-3|}{x^2-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-\sqrt{3},\\ y=x^2\end{cases}\text{ ёки }\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3},\\ y=-x^2\end{cases}\text{ ёки}$$

$$\begin{cases}x>\sqrt{3},\\ y=x^2.\end{cases}$$

119-расмда берилган функция графиги кўрсатилган.

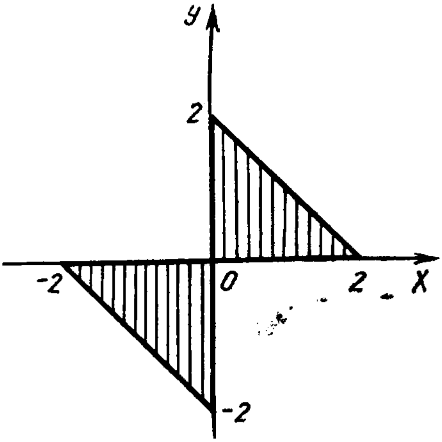
2-§. Алгебраик тенгсизликлар системасини уларнинг берилган ечимлари мажмуасига қараб тузиш (тескари масалалар)

Ўқувчиларни берилган тўғри чизиқ ёки текислик нуқталари мажмуасига қараб, уларнинг аналитик берилишини тузишга тўғри ўргатиш ҳам катта аҳамиятга эга.

1-мисол. Учлари (0, 0), (1, 0) ва (1, 1) нуқталарда бўлган очиқ учбурчак ички нуқталари мажмуасини аналитик кўринишда ёзинг.

Ечиш. Учбурчак томонлари $y=x$, $x=1$ ва $y=0$ тўғри чизиқлардан иборат. Учбурчак ички нуқталари $y=x$ тўғри чизиқдан қуйида, $x=1$ тўғри чизиқдан чапда ва $y=0$ тўғри чизиқдан юқорида жойлашган нуқталар мажмуасидан иборат, яъни бир вақтда қуйидаги учта тенгсизлик бажарилиши керак:

$$\begin{cases} y < x,\\ x < 1,\\ y > 0.\end{cases}$$

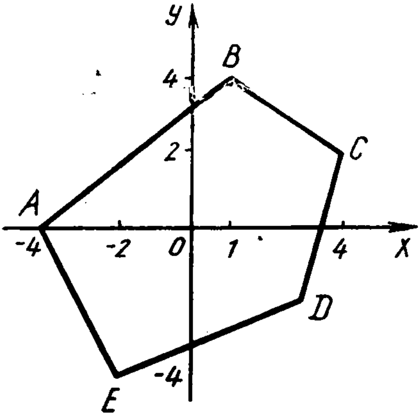


120- расм.

2-мисол. 120-расмда тасвирланган текислик нуқталари мажмуасини берувчи тенгсизликлар системасини аналитик кўринишда ёзинг.

Ечиш. Биз юқорида биринчи координата бурчаги нуқталари мажмуаси $\begin{cases}x \geqslant 0,\\ y \geqslant 0\end{cases}$ шарт билан, учинчи координата бурчаги нуқталари мажмуаси эса $\begin{cases}x \leqslant 0,\\ y \leqslant 0\end{cases}$ шарт билан берилишини кўриб ўтган эдик. Шунинг учун $xy \geqslant 0$ тенгсизликни фақат биринчи ёки учинчи координата бурчаги нуқталари мажмуаси қаноатлантиришини тушуниш қийин эмас. Бизнинг мажмуамизга биринчи ва учинчи координата бурчагидаги $y = x - 2$ ва $y = x + 2$ тўғри чизиқлар орасида ётганлари тегишли бўлади, у қуйидаги қўш тенгсизлик билан ифодаланади: $x - 2 \leqslant y \leqslant x + 2$.

Шундай қилиб, берилган мажмуа $\begin{cases}xy \geqslant 0,\\ x - 2 \leqslant y \leqslant x + 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy \geqslant 0,\\ |y - x| \leqslant 2\end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан аниқланади.



121- расм.

3-мисол. Учлари $A(-4;\ 0)$, $B(1;\ 4)$, $C(4;\ 2)$; $D(3;\ -2)$ ва $E(-2;\ -4)$ бўлган $ABCDE$ бешбурчакни (121-расм) берувчи тенгсизликлар системасини топинг.

Ечиш. $ABCDE$ бешбурчак AB, BC, CD, DE ва EA тўғри чизиқлар билан чегараланган. Тўғри чизиқ икки нуқтасининг координаталарини билган ҳолда бу тўғри чизиқ тенгламасини ёзиш мумкинлигини биламиз.

AB тўғри чизиқ тенгламаси $y = kx + b$ бўлсин. k ва b ларни қуйидагича топамиз:

$$\begin{cases} 0 = -4k + b, \\ 4 = k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4k, \\ b = 4 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0,8, \\ b = 3,2. \end{cases}$$

Шундай қилиб, $y = 0,8x + 3,2$ AB тўғри чизиқ тенгламасидир.

BC тўғри чизиқ тенгламаси $y = k_1x + b_1$ бўлсин. k_1 ва ва b_1 ларни қуйидагича топамиз:

$$\begin{cases} 4 = k_1 + b_1, \\ 2 = 4k_1 + b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4 - k_1, \\ b_1 = 2 - 4k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -\dfrac{2}{3}, \\ b_1 = \dfrac{14}{3}. \end{cases}$$

Демак, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$ BC тўғри чизиқ тенгламасидир.

$y = k_2x + b_2$ CD тўғри чизиқ тенгламаси бўлсин. Қуйидаги тенгламалар системасини ечиб, k_2 ва b_2 ларнинг қийматларини топамиз:

$$\begin{cases} 2 = 4k_2 + b_2, \\ -2 = 3k_2 + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 2 - 4k_2, \\ b_2 = -2 - 3k_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = 4, \\ b_2 = -14. \end{cases}$$

Демак, $y = 4x - 14$ CD тўғри чизиқ, яъни (4; 2) ва (3; —2) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидир.

(3; —2) ва (—2; —4) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси $y = k_3x + b_3$ бўлсин. k_3 ва b_3 ларни қуйидагича топамиз:

$$\begin{cases} -2 = 3k_3 + b_3, \\ -4 = -2k_3 + b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_3 = -3k_3 - 2, \\ b_3 = 2k_3 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_3 = 0,4, \\ b_3 = -3,2. \end{cases}$$

Демак, $y = 0,4x - 3,2$ DE тўғри чизиқ тенгламасидир.

EA тўғри чизиқ тенгламаси $y = k_4x + b_4$ бўлсин. У ҳолда k_4 ва b_4 ларнинг қийматларини қуйидаги тенгламалар системасини ечиб топамиз:

$$\begin{cases} -4 = -2k_4 + b_4, \\ 0 = -4k_4 + b_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_4 = -4 + 2k_4 - 1, \\ b_4 = 4k_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_4 = -2, \\ b_4 = -8. \end{cases}$$

Шундай қилиб, EA тўғри чизиқ тенгламаси $y = -2x - 8$ дан иборат.

Жавоб: Изланаётган тенгсизликлар системаси:

$$\begin{cases} y \leqslant 0{,}8\,x + 3{,}2 \\ y \leqslant -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{14}{3}, \\ y \geqslant 4\,x - 14, \\ y \geqslant 0{,}4\,x - 3{,}2, \\ y \geqslant -2x - 8. \end{cases}$$

3- §. Бир неча ўзгарувчили функцияларнинг аниқланиш соҳасини топиш

$z = f(x, y)$ функцияларнинг аниқланиш соҳаси етарлича мураккаб, шунингдек, соҳа чегаралари — битта ёки бир нечта узлуксиз чизиқлар билан чегараланган текисликнинг маълум бир чекланган ёки чекланмаган қисмидан иборат бўлиши мумкин. Соҳа чегараларидан бирортаси бир нуқтага айланиши мумкин бўлган айрим ҳолларни ҳам назарда тутиш лозим.

Агар соҳа ўзининг ҳамма чегараларини ўз ичига олсагина чегараланган соҳа дейилади. Бу ерда биз аниқланиш соҳаси текисликларда топиладиган икки ўзгарувчили функцияларга доир мисолларни кўриб чиқамиз.

1-мисол. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Арифметик илдиз таърифига кўра функциянинг аниқланиш соҳаси $x + y \geqslant 0$, яъни $y \geqslant -x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталаридан иборат бўлади. Бизга маълумки, $y = -x$ шартни қаноатлантирувчи нуқталар II ва IV координата бурчаклари биссектрисаларида, $y > -x$ шартни қаноатлантирувчи нуқталар эса биссектрисадан юқорида ётади, чунки II ва IV координата бурчаклари биссектрисаларида ва ундан юқоридаги ярим текисликда ётувчи нуқталарнинг ординатасига мос келувчи сон шу нуқта, абсциссасига мос келувчи соннинг қарама-қаршисидан кичик бўлмайди.

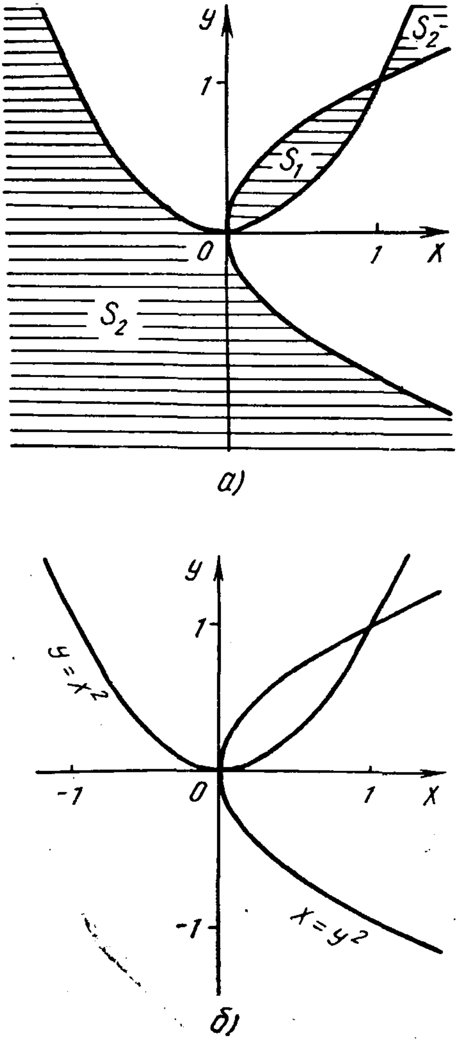
Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси II ва IV координата бурчаклари биссектрисалари ва ундан юқорида ётган текисликнинг қисмидан иборатдир.

2-мисол. $f(x, y) = \sqrt{(x - y^2)(y - x^2)}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш.

$$(x-y^2)(y-x^2)\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y^2\geqslant 0,\\ y-x^2\geqslant 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-y^2\leqslant 0,\\ y-x^2\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\geqslant y^2,\\ y\geqslant x^2;\end{cases} & (S_1)\\ \begin{cases}x\leqslant y^2,\\ y\leqslant x^2.\end{cases} & (S_2)\end{array}\right.$$

Изланаётган аниқланиш соҳа 122-*а* расмда, $(x-y^2)\times\times(y-x^2)=0$ тенгламанинг ечимлари мажмуаси эса 122-*б* расмда тасвирланган.



а)

б)

122- расм.

3-мисол. $z=\sqrt{1+x-y^2}+\sqrt{1-x-y^2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш.

$$\begin{cases}1+x-y^2\geqslant 0,\\ 1-x-y^2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

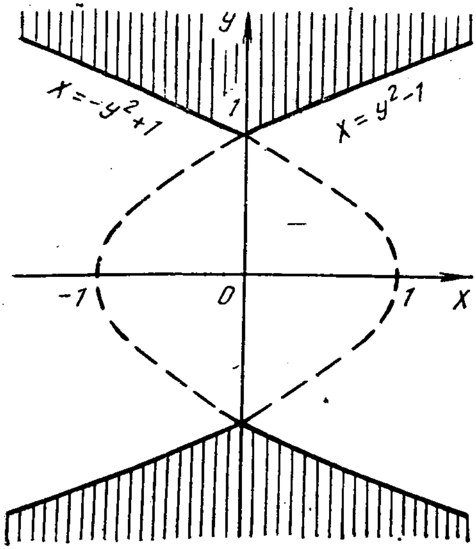
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant y^2-1,\\ x\leqslant -y^2+1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -y^2+1\leqslant x\leqslant y^2-1.$$

Функциянинг аниқланиш соҳаси 123-расмда кўрсатилган.

4-мисол. $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. $\sin\pi(x^2+y^2)\geqslant 0\Leftrightarrow 2\pi n\leqslant\pi(x^2+y^2)\leqslant\pi+$

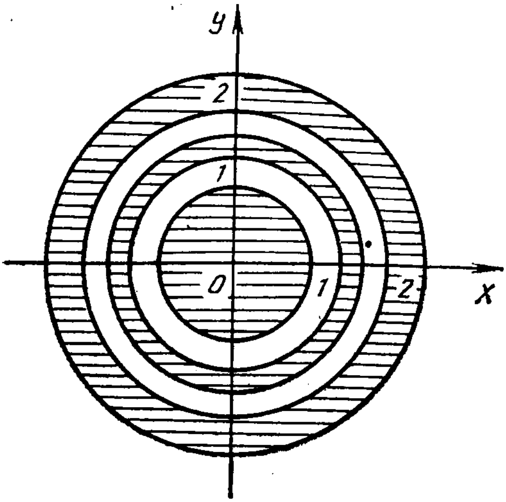


123- расм.

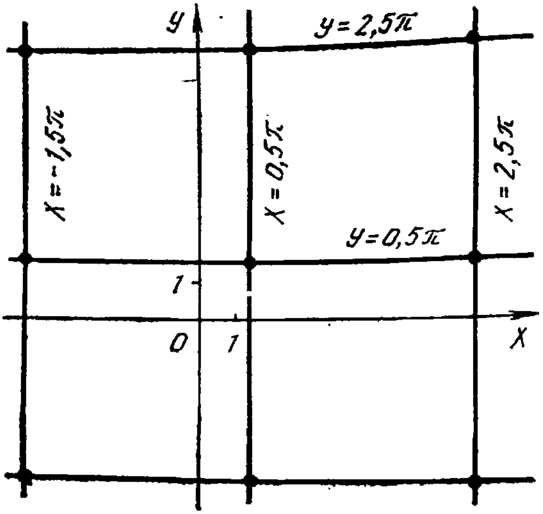
$+2\pi n \Leftrightarrow 2n \leqslant \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1+2n$, бунда $n=0, 1, 2, \ldots$ Агар $k=0$ бўлса, $0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$ бўлади; агар $k=1$ бўлса, $2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 3$ бўлади ва ҳ. к.

Изланаётган соҳа 124-расмда кўрсатилган. Юқоридаги қўш тенгсизликдаги тенглик (яъни $\sin \pi(x^2+y^2)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \pi(x^2+y^2) = = \pi n \Leftrightarrow x^2+y^2= = k$; $k=0, 1, 2, 3, \ldots$) концентрик айланаларда ётган нуқталарнинг координаталарида бажарилади.

5-мисол. $f(x, y) = \arcsin(xy)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.



124- расм.



125- расм.

Ечиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси $|xy| \leqslant 1$ тенгсизлик билан аниқланади, бу тенгсизликни эса тўртала чоракдаги гипербола ва координаталар бошини ўз ичига олган текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради.

6-мисол. $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. $\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{|y|}{|x|} \leqslant 1$. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси $|y| \leqslant |x|$ тенгсизлик билан аниқланадиган соҳа бўлиб, унга координаталар боши (яъни (0; 0) нуқта) кирмайди.

7-мисол. $\lg x = x - 1$ тенгламанинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап қисми x нинг барча мусбат қийматлари мажмуасида, ўнг қисми эса x нинг барча ҳақиқий қийматлари мажмуасида аниқланган. Уларнинг умумий қисми x нинг барча мусбат қийматлари мажмуасидан иборат, яъни $x > 0$.

8-мисол. $f(x, y) = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\sin y - 1}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. $\begin{cases}\sin x - 1 \geqslant 0, \\ \sin y - 1 \geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \geqslant 1, \\ \sin y \geqslant 1\end{cases}$, аммо синус функциясининг чекланганлигини эътиборга олсак,

$$\begin{cases}\sin x = 1,\\ \sin y = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\end{cases}$$

келиб чиқади, бунда $k,\ n \in Z$.

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ва $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарининг координаталаридан иборат (125-расм). Ёки жавобни қуйидагича ёзсак ҳам бўлади:

$$D(f) = \left\{(x,\ y) \middle| \left\{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z\right\} \cap \left\{y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}\right\}.$$

Энди бир ўзгарувчили функцияларнинг аниқланиш соҳасини топишга мисоллар кўриб чиқамиз.

9-мисол. $y = \arcsin \frac{2}{1-x} + \lg \frac{x^2 - 3x - 10}{-x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Арксинус функцияси чегараланганлиги ва логарифм белгиси остидаги ифода мусбат бўлганда логарифмик функция аниқланганлигини эътиборга олсак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси қуйидаги тенгсизликлар системасидан топилади:

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2}{1-x}\right| \leqslant 1,\\ \dfrac{x^2 - 3x - 10}{-x} > 0.\end{cases} \qquad (1)$$

Энди системани ечамиз:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}|x - 1| \geqslant 2,\\ \dfrac{(x+2)(x-5)}{x} < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x - 1 \geqslant 2\\ x - 1 \leqslant -2;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} x < -2\\ 0 < x < 5\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x \geqslant 3\\ x \leqslant -1;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} x < -2\\ 0 < x < 5\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant -1,\\ x < -2;\end{cases}\\ \begin{cases} x \geqslant 3,\\ 0 < x < 5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2\\ 3 \leqslant x < 5.\end{array}\right.$$

Жавоб: $D(y) = (-\infty;\ -2) \cup [3;\ 5)$.

9-мисол. $y = \log_{|x|-4} 2$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Логарифмик функциянинг асоси мусбат ва шу билан бир қаторда 1 дан фарқли сон бўлиши сабабли, берилган функция $\begin{cases} |x| - 4 > 0, \\ |x| - 4 \neq 1 \end{cases}$ да аниқланган, яъни:

$$\begin{cases} |x| - 4 > 0, \\ |x| - 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 4, \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -4; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \neq -5 \\ x \neq 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -5 \\ -5 < x < -4 \\ 4 < x < 5 \\ x > 5. \end{array}\right.$$

Демак, $D(y) = (-\infty;\ -5) \cup (-5;\ -4) \cup (4;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$.

10-мисол. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг: $y = (x + 0,5)^{\lg_{(0,5x + x)}((x^2 + 2x - 3)/(4x^2 - 4x - 3))}$

Ечиш. Логарифм асосидаги ўзгарувчининг олиши мумкин бўлган қийматлари $\begin{cases} 0,5 + x > 0, \\ 0,5 + x \neq 1 \end{cases}$ дан, шунингдек, логарифм белгиси остидаги касрнинг олиши мумкин қийматлари $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 4x - 3} > 0$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуасидан иборат. Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси қуйидаги система ечимлари мажмуасидан иборат бўлади:

$$\begin{cases} 0,5 + x > 0, \\ 0,5 + x \neq 1, \\ \dfrac{x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 4x - 3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -0,5, \\ x \neq 0,5, \\ \dfrac{(x-1)(x+3)}{4\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -0,5 < x < 0,5 \\ x > 0,5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ -0,5 < x < 1 \\ x > 1,5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -0,5 < x < 0,5 \\ 0,5 < x < 1 \\ x > 1,5. \end{array}\right.$$

Жавоб: $D(y) = (-0,5;\ 0,5) \cup (0,5;\ 1) \cup (1,5;\ +\infty)$.

Эслатма. $\dfrac{(x-1)(x+3)}{\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)} > 0$ тенгсизликнинг сурат ва махраждаги кўпайтувчиларни нолга айлантирадиган қийматларини сонлар тўғри чизиғида белгилаймиз. Бунинг натижасида сонлар тўғри чизиғи 5 та оралиққа бўлинади. Энди шу оралиқларда касрнинг ишорасини аниқлаш лозим (келтирилган жадвалга қаранг).

Жадвал

Оралиқлар / Функциялар	$(-\infty; -3)$	$(-3; -0{,}5)$	$(-0{,}5; 1)$	$(1; 1, 5)$	$(1{,}5; \infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1{,}5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+0{,}5$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1{,}5)(x+0{,}5)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

11-мисол. $y = \arccos((2x+1)/2\sqrt{2x})$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган функция $\left|\frac{2x+1}{2\sqrt{2x}}\right| \leqslant 1$ да аниқланган.

$$\left|\frac{2x+1}{2\sqrt{2x}}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ |2x+1| \leqslant 2\sqrt{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (2x+1)^2 \leqslant (2\sqrt{2x})^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 4x^2 + 4x + 1 \leqslant 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ (2x-1)^2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0{,}5.$$

$$D(y) = \{0{,}5\}.$$

12-мисол. $y = \frac{\sqrt{\lg \sin x}}{\cos x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Махраж $\cos x \neq 0$ бўлиши керак, бундан эса

$$\sin x \neq \pm 1 \quad (1)$$

эканлиги келиб чиқади.

Касрнинг сурати мавжуд бўлиши учун $\sin x > 0$ ва $\lg \sin x \geqslant 0$ (2) бўлиши керак (яъни зарур).

$|\sin x| \leqslant 1$ бўлганлигидан

$$\lg \sin x \leqslant 0 \quad (3)$$

эканлиги келиб чиқади.

(2) ва (3) га асосан $\lg \sin x = 0$, бундан эса $\sin x = 1$ (4) келиб чиқади.

Шундай қилиб, бир вақтда (1) ва (4) муносабатларнинг ўринли бўлиши лозим. Аммо улар бир-бирига зид, шу сабабли берилган функция x нинг ҳеч бир қийматида аниқланмаган.

13-мисол. $y = \arccos\sqrt{x^2-1}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 0\leqslant\sqrt{x^2-1}\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 0\leqslant x^2-1\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0\leqslant x^2-1\leqslant 1 \Leftrightarrow 1\leqslant x^2\leqslant 2 \Leftrightarrow 1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\leqslant x\leqslant\sqrt{2} \\ 1\leqslant -x\leqslant\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\leqslant x\leqslant\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant -1. \end{array}\right.$$

Демак, $D(y) = [-\sqrt{2};\ -1]\cup[1;\ \sqrt{2}]$.

14-мисол. $f(x) = \log_2\dfrac{\sin x-\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. $\dfrac{\sin x-\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > -3.$$

Демак, тенгсизликнинг геометрик тасвири сонлар текислигидан ёки бирлик айланада ётган исталган нуқтанинг координаталарида берилган функция маънога эга бўлгани учун бирлик айланадан иборат. Шунинг учун берилган функция x нинг ҳар қандай қийматида аниқланган, яъни $D(f) = (-\infty;\ \infty) = R$.

15-мисол. $y = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x + \arcsin 2^x$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$ функциянинг мавжуд бўлиши учун $\dfrac{\pi}{2}x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n$, яъни $x\neq 1+2n$ (бунда $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$) бўлиши зарур. $\arcsin 2^x$ функциянинг мавжуд бўлиши учун эса $-1\leqslant 2^x\leqslant 1$ бўлиши шарт. $2^x\geqslant -1$ тенгсизлик x нинг исталган қийматида ўринли, $2^x\leqslant 1$ тенгсизлик эса $x\leqslant 0$ да ўринли. Шундай қилиб, берилган функция барча мусбат бўлмаган x нинг қийматларида ўринли бўлиб, унга $x\neq 1+2n$ нуқталар кирмайди (сонлар тўғри чизиғида кўрсатишни ўзингизга ҳавола қиламиз).

Жавоб: $D(y) = \ldots \cup (-5;\ -3) \cup (-3;\ -1) \cup (-1;\ 0)$.

16-мисол. $y = \frac{1}{x} + 2^{\arcsin x} + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш.

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \Leftrightarrow \{\varnothing\}. \\ x > 2 \end{cases}$$

Системанинг иккинчи ва учинчи тенгсизликлари бир-бирига зид бўлганлиги учун тенгсизликлар системаси x нинг ҳеч бир қийматида бажарилмайди.

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси мавжуд эмас.

17-мисол. $y = \arccos(2/(2 + \sin x))$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Синус функцияси чегараланганлиги сабабли $(2 + \sin x)$ йиғинди x нинг барча қийматларида мусбат. Шу сабабли махраж берилгандан сўнг уни ташлаб юборсак ҳам бўлади, яъни у натижага таъсир қилмайди. Шундай қилиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$-1 \leqslant \frac{2}{2 + \sin x} \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 - \sin x \leqslant 2 \leqslant 2 + \sin \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - \sin x \leqslant 2, \\ 2 + \sin x \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geqslant -4, \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi n \leqslant x \leqslant (2n + 1)\pi, \quad n \in Z.$$

Демак, $D(y) = \{[2\pi n;\ (2n + 1)\pi] \mid n \in Z\}$.

18-мисол. $y = \log_{2\sqrt{3}}(4\cos^2 x - 2(1 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3})$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси $4\cos^2 x - 2(1 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} > 0$ муносабатдан топилади. $\cos x = z$ деб белгилаймиз, у ҳолда масала $4z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z - \sqrt{3} > 0$ тенгсизликни ечишга келиб қолади. Тенгсизликнинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратиш учун $4z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0$ тенгламанинг илдизларини топамиз:

$$\frac{D}{4} = (1 - \sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-\sqrt{3}) = 1 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 +$$

$$+ 4\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2.$$

Демак, тенглама иккита ҳақиқий илдизга эга экан, яъни: $z_{1,2} = \frac{(1-\sqrt{3}) \pm (1+\sqrt{3})}{4}$. Бундан $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Шундай қилиб,

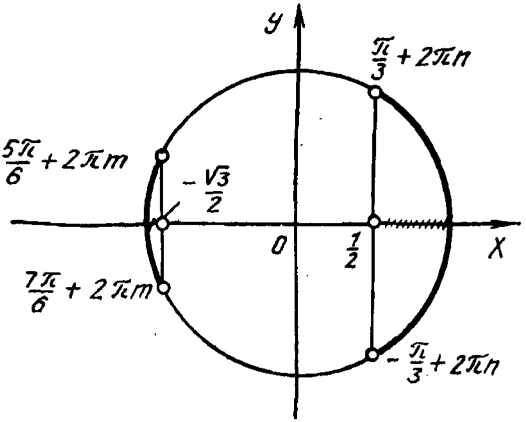
$$4z^2 - 2(1-\sqrt{3})z - \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow 4\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z > \frac{1}{2} \\ z < -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

га эга бўламиз. $\cos x = z$ эканини назарга олиб, $\left[\begin{array}{l} \cos x > 1/2 \\ \cos x < -\sqrt{3}/2 \end{array}\right.$ тенгсизликлар бирлашмасининг ечимлари мажмуасини топамиз, яъни:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x > \frac{1}{2} \\ \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi m < x < \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi m \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi m. \end{array}\right.$$



126- расм.

126-расмда берилган функциянинг аниқланиш соҳаси кўрсатилган.

Демак, $D(y)=\left\{\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi m;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi m\right)\middle| m,\ n\in Z\right\}$.

19-мисол. $y=\lg\left(\sin^4 x+\frac{1}{2}\sin^3 x-7\sin^2 x+2\frac{1}{2}\sin x+3\right)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси қуйидаги тенгсизлик ечимлари мажмуасидан иборатдир:

$$\sin^4 x+\frac{1}{2}\sin^3 x-7\sin^2 x+2\frac{1}{2}\sin x+3>0.$$

$\sin x=t$ белгилашни киритамиз, у ҳолда масала

$$t^4+\frac{1}{2}t^3-7t^2+2\frac{1}{2}t+3>0$$

алгебраик тенгсизликни ечишга келиб қолади. Бу тенгсизликнинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз, яъни:

$$t^4+\frac{1}{2}t^3-7t^2+2\frac{1}{2}t+3=t^3\left(t+\frac{1}{2}\right)-7t^2-\frac{7}{2}t+$$
$$+6t+3=t^3\left(t+\frac{1}{2}\right)-7t\left(t+\frac{1}{2}\right)+6\left(t+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\left(t+\frac{1}{2}\right)(t^3-7t+6)=\left(t+\frac{1}{2}\right)((t^3-t)-(6t-6))=$$
$$=\left(t+\frac{1}{2}\right)(t(t^2-1)-6(t-1))=\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-1)(t(t+$$
$$+1)-6)=\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-1)(t^2+t-6)=$$
$$=\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-1)(t-2)(t+3)>0.\quad (1)$$

$\sin x=t$ эканини назарга олиб, (1) тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

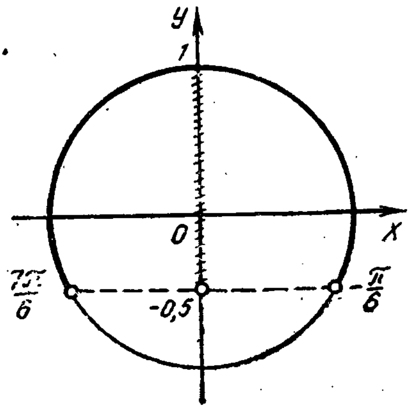
$$\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-1)(\sin x-2)(\sin x+3)>0\quad (2)$$

Тенгсизлик қатъий бўлгани сабабли $\sin x+\frac{1}{2}\neq 0$ ва $\sin x-1\neq 0$ бўлиши лозим. Бу шартларни қаноатлантирувчи x нинг барча қийматларида $\sin x-1<0$, $\sin x-2<0$ ва $\sin x+3>0$ бўлади. Шунинг учун (2) тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси

$\sin x + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \sin x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z,$ дан иборат (127- расм).

Жавоб: $D(y) = \{(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n) \mid n \in Z\}$.

Эслатма. Кўпайтувчиларга ажратишни бошқача олиб бориш ҳам мумкин эди. Лекин бу ерда кўпҳадни бевосита кетма-кет умумий кўпайтувчиларга ажратишни мақсад қилиб қўйдик.



127- расм.

20- мисол. $y = \left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^{\log_{x^2+1}(2\sin^2 x + \sin x - 1)}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган кўрсаткичли функциянинг асоси

$$\begin{cases} \sin^2 x - \frac{1}{4} > 0, \\ \sin^2 x - \frac{1}{4} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\sin x| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x > \frac{1}{2} \\ \sin x < -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

шартни, даража кўрсаткичи эса логарифмик функциядан иборат бўлгани сабабли унинг асоси $\begin{cases} x^2 + 1 > 0, \\ x^2 + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$ ни ва логарифм белгиси остидаги ифода $2\sin^2 x + \sin x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2(\sin x + 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0$ шартларни қаноатлантириши лозим. $x \neq 0$ да $\sin x + 1 > 0$ бўлади. Бундан $(\sin x + 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0$ тенгсизлик $\sin x - \frac{1}{2} > 0$ бўлганда ўринли бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, функциянинг аниқланиш соҳаси

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x > \frac{1}{2} \\ \sin x < -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \\ x \neq 0, \\ 2\sin^2 x + \sin x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x > \frac{1}{2} \\ \sin x < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \sin x - \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

дан иборат.

Демак, $D(y) = \left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) \middle| n \in Z\right\}$.

21-мисол. $y = \log_{0.5}\left(\frac{2 - f'(x)}{x+1}\right)^{1/2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг, бунда $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.

Ечиш. Аввал $f'(x)$ ни топамиз, яъни $f'(x) = x^2 - 3x - 2$.

Энди масала $y = \log_{0.5}\left(\frac{2 - (x^2 - 3x - 2)}{x+1}\right)^{1/2} =$

$= \log_{0.5}\left(\frac{-x^2 + 3x + 4}{x+1}\right)^{1/2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топишга келиб қолди. Бу функция x нинг $\frac{-x^2 + 3y + 4}{x+1} > 0$. тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида аниқланган. Энди бу тенгсизликни ечамиз:

$$\frac{-x^2 + 3x + 4}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow$$

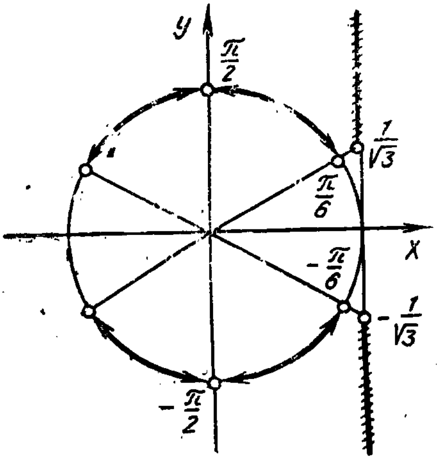
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 < 0, \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ -1 < x < 4. \end{array}\right.$$

Жавоб: $D(y) = \{(-\infty; -1) \cup (-1; 4)\}$.

22-мисол. $y = \sqrt{\sin^2 x - \sin x + 1} + \sqrt{\sin^2 x + \sin x - 2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси қуйидаги система ечимлари тўпламидан иборат бўлади, яъни:

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin x + 1 \geqslant 0, \\ \sin^2 x + \sin x - 2 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$



128- расм.

(1) системанинг биринчи тенгсизлиги x нинг барча қийматларида мусбат, чунки $=\sin^2 x - \sin x + 1 = = \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$; иккинчиси эса $(\sin x + + 2)(\sin x - 1) \geqslant 0$ тенгсизликни ечишга келиб қолади. Аммо бу тенгсизликнинг биринчи кўпайтувчиси, яъни $(\sin x + 2)$ x нинг барча қийматларида мусбат, шу сабабли тенгсизлик $\sin x - 1 \geqslant \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin x \geqslant 1$ муносабатни қаноатлантирувчи x нинг қийматларини топишга келиб қолади. Лекин $\sin x \geqslant 1$ тенгсизлик синус функцияси чегараланганлиги сабабли 1 дан катта бўла олмайди, аммо фақат 1 га тенг бўлиши мумкин, яъни $\sin x = 1$ тенгламанинг илдизларини топишга келиб қолади. Демак, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Жавоб: $D(y) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in Z\right\}$.

23- мисол. $y = \log_2(3\operatorname{tg}^2 x - 1)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси $3\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$ тенгсизлик ечимлари мажмуасидан иборат бўлади, яъни

$$3\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow |\operatorname{tg} x| > \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x > \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ -\frac{\pi}{2} + \pi m < x < -\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z. \end{array}\right.$$

Демак, $D(y) = \left\{\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + \pi m;\right.\right.$ $\left.\left. -\frac{\pi}{3} + \pi m\right) \mid m,\ n \in Z\right\}$ (128- расм).

24-мисол. $y = \lg\left(\arccos\left(\frac{x^2+3x-3}{x+5}\right)\right)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Бизга маълумки, арккосинус функцияси $[0;\ \pi]$ кесмада ўзгаради. Аммо логарифмик функция барча мусбат сонлар учун аниқланганлиги сабабли берилган функция $0 < \arccos\left(\frac{x^2+3x-3}{x+5}\right) \leqslant \pi$ қўш тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг барча қийматларидан иборат бўлади. Энди бу тенгсизлик ечимлари мажмуасини топамиз:

$$0 < \arccos\left(\frac{x^2+3x-3}{x+5}\right) \leqslant \pi \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{x^2+3x-3}{x+5} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+3x-3}{x+5} \geqslant -1, \\ \dfrac{x^2+3x-3}{x+5} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+3x-3+x+5}{x+5} \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2+2x-3-x-5}{x+5} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+4x+2}{x+5} \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2+2x-8}{x+5} < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

x^2+4x+2 квадрат учҳаднинг илдизлари $x_1 = -2-\sqrt{\ }$ ва $x_2 = -2+\sqrt{2}$ дан иборат, шунинг учун $x^2+4x+2 = (x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$.

x^2+2x-8 квадрат учҳаднинг илдизлари: $x_1 = -4$ ва $x_2 = 2$, шу сабабли $x^2+2x-8 = (x+4)(x-2)$ бўлади.

(1) системанинг биринчи тенгсизлиги $\frac{(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})}{x+5} \geqslant 0$ нинг ечимлари мажмуасини оралиқлар усули ёрдамида топсак, $(-5;\ -2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2};\ +\infty)$ келиб чиқади; иккинчи тенгсизлиги $\frac{(x-2)(x+4)}{x+5} < 0$ нинг ечимлари мажмуаси эса $(-\infty;\ -5) \cup (-4;\ 2)$ дан иборат бўлади.

Шундай қилиб, (1) система ҳар иккала тенгсизлигининг ечимлари мажмуаларининг кесишмаси $\{(-5;\ -2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2};\ +\infty)\} \cap \{(-\infty,\ 5) \cup (-4;\ 2)\} = \{(-4;\ -2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2};\ 2)\}$ берилган функциянинг аниқланиш соҳасини ташкил қилади.

Демак, $D(y) = \{(-4; -2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2}; 2)\}$.

4-§. Икки ўзгарувчили тенгсизликлар системаларини график усулда ечиш

Ушбу параграфда биз икки ўзгарувчили турли тенгсизликлар системаларининг ечимларини график усулда кўрсатамиз. Бундай системаларнинг ечимлари турли геометрик шаклларни беради. Бунда биз айрим мисолларнинг ечимларини сўзлар орқали ифодаладик, график ечимни кўрсатишни эса китобхонга ҳавола қиламиз.

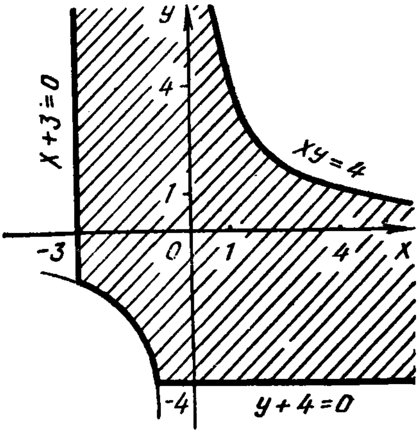
1-мисол. $\begin{cases} x < 0, \\ y \leqslant \frac{1}{x} \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Системанинг биринчи тенгсизлигини (яъни $x < 0$) ординаталар ўқи билан чегараланган чап очиқ ярим текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради, иккинчи тенгсизлигини қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуаси 38-расмда кўрсатилган (S_2 соҳа). Шундай қилиб, III координаталар бурчагидаги $y = \frac{1}{x}$ гипербола тармоғи ва ундан қуйида ётган текислик нуқталари мажмуаси — изланаётган мажмуадир.

2-мисол.

$\begin{cases} xy - 4 \leqslant 0, \\ x + 3 \geqslant 0, \\ y + 4 \geqslant 0 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликни аввал $\begin{cases} xy \leqslant 4, \\ x \geqslant -3, \\ y \geqslant -4 \end{cases}$ кўринишда ёзиб оламиз. Биламизки, системанинг биринчи тенгсизлигини $xy = 4$ гипербола тармоқлари ва улар орасидаги текислик нуқталари мажмуи, иккинчи тенгсизлигини



129- расм.

$x = -3$ тўғри чизиқ ва ундан ўнг томондаги ярим текислик, учинчи тенгсизлигини эса $y = -4$ тўғри чизиқ билан чегараланган юқоридаги ёпиқ ярим текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. Изланаётган мажмуа 129- расмда кўрсатилган.

3-мисол. $\left\{\begin{array}{l} y + x^2 < 0, \\ y - x^2 > 1 \end{array}\right.$ система ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. $\left\{\begin{array}{l} y + x^2 < 0, \\ y - x^2 > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y < -x^2, \\ y > x^2 + 1. \end{array}\right.$

Система таркибига кирган ҳар иккала тенгсизликни мос параболалар тармоқлари орасидаги текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. Лекин системанинг биринчи тенгсизлигини қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуаси билан иккинчи тенгсизлигини қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуасининг умумий қисми бўлмаганлиги учун берилган системанинг ечимлари мажмуаси — бўш мажмуадан иборат бўлади.

4-мисол. $\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 \leqslant 0, \\ (x-1)^2 + y^2 \geqslant 4 \end{array}\right.$ системани ечинг.

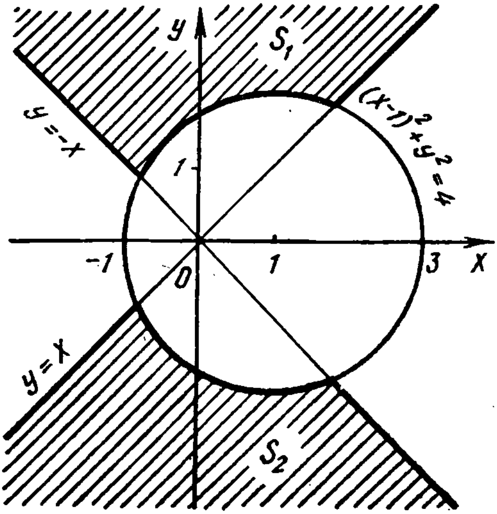
Ечиш.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 \leqslant 0, \\ (x-1)^2 + y^2 \geqslant 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+y)(x-y) \leqslant 0, \\ (x-1)^2 + y^2 \geqslant 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x + y \geqslant 0, \\ x - y \leqslant 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x + y \leqslant 0, \\ x - y \geqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \\ (x-1)^2 + y^2 \geqslant 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y \geqslant -x, \\ y \geqslant x; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y \leqslant -x; \\ y \leqslant x; \end{array}\right. \end{array}\right. \\ (x-1)^2 + y^2 \geqslant 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y \geqslant -x, \\ y \geqslant x, \\ (x-1)^2 + y^2 \geqslant 4 \end{array}\right. (S_1) \text{ ёки } \left\{\begin{array}{l} y \leqslant -x; \\ y \leqslant x, \\ (x-1)^2 + y^2 \geqslant 4. \end{array}\right. (S_2)$$

Шундай қилиб, берилган системани I ва II ҳамда III ва IV координата бурчаклари биссектрисалари ва улар орасидаги текислик нуқталари мажмуаларининг айланагача қолган қисмлари нуқталари мажмуаси қаноатлантиради (130- расм).



130- расм.

5- мисол. $\begin{cases}(x+y)^2 \geqslant 1,\\ 2x-3y \geqslant 7\end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.

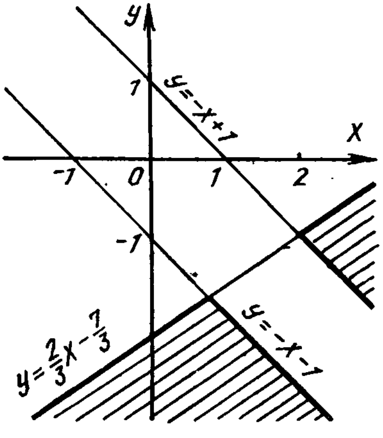
Ечиш. Берилган системанинг биринчи тенгсизлиги ё $x+y \geqslant 1$ ёки $x+y \leqslant -1$ деган талабга тенг кучли. Шунинг учун берилган системанинг ечимлари мажмуаси

$$\begin{cases}x+y \geqslant 1,\\ 2x-3y \geqslant 7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y \geqslant -x+1,\\ y \leqslant \frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\end{cases} \quad (S_1) \text{ ва}$$

$$\begin{cases}x+y \leqslant -1,\\ 2x-3y \geqslant 7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y \leqslant x-1,\\ y \leqslant \frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\end{cases} \quad (S_2)$$

тенгсизликлар системалари ечимлари мажмуаларининг бирлашмасидан иборат бўлади.

$(x+y)^2 \geqslant 1$ тенгсизликнинг $x+y \geqslant 1$ ёки $x+y \leqslant -1$ тенгсизликлардан ақалли биттаси бажарилсин, деган талабга тенг кучли эканини ушбу тенг кучлилик кўринишида ёзиш мумкин:



131- расм.

$$(x+y)^2\geqslant 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y\geqslant 1 \\ x+y\leqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\geqslant -x+1 \\ y\leqslant -x-1. \end{array}\right.$$

Шунингдек, $(x+y)^2\geqslant 1$ тенгсизлик $x+y\geqslant 1$ ва $x+y\leqslant -1$ тенгсизликлар мажмуасига тенг кучли дейилади. Бу ёзувни тенгсизликлар системасидаги тенгсизликларнинг тенг кучли эканини кўрсатувчи ёзувлар билан алмаштирмаслик керак.

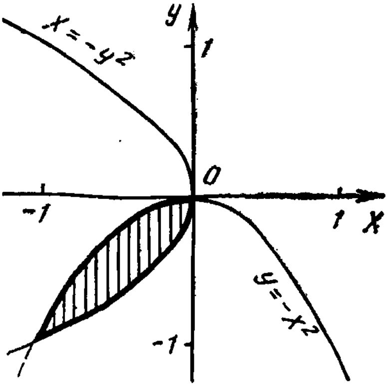
$y=-x+1$ ва $y=-x-1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полоса нуқталаридан бошқа текислик нуқталар мажмуаси $(x+y)^2\geqslant 1$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси бўлади. Изланаётган мажмуа —$(x+y)^2\geqslant 1$ тенгсизлик ечимлари мажмуасининг $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$ тўғри чизиқ ва ундан пастда ётган текислик нуқталари мажмуасидан иборат бўлади (131- расм).

6- мисол. $\begin{cases} x\geqslant y^2, \\ (x-4)^2+(y-1)^2>0 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. $x=y^2$ парабола xOy текисликни икки соҳага бўлади. $x\geqslant y^2$ тенгсизликни Ox ўқнинг мусбат йўналишини ўз ичига олган соҳа нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. $(x-4)^2+(y-1)^2>0$ тенгсизликни эса $x=4$ ва $y=1$ сонлардан ташқари исталган ҳақиқий сонлар жуфтлари қаноатлантиради, яъни унинг ечимлари мажмуаси (4; 1) нуқта кирмаган xOy текисликдан иборат. Топилган соҳалар кесишмаси берилган системанинг ечимлари мажмуаси бўлади ёки системанинг биринчи тенгсизлигини қаноатлантирувчи текислик нуқталар мажмуасидан (4; 1) нуқтани чиқариб юборсак, изланаётган мажмуа ҳосил бўлади.

7- мисол. $\begin{cases} y\leqslant -x^2, \\ x\leqslant -y^2 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. $y=-x^2$ парабола xOy текисликни икки соҳага бўлади. $y \leqslant -x^2$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси ординаталар ўқининг манфий йўналишини ўз ичига олган соҳасидан иборат. $x = -y^2$ парабола ҳам текисликни икки соҳага бўлади. $x \leqslant -y^2$ тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси абсциссалар ўқининг манфий ярим ўқини ўз ичига олган соҳасидан иборат. Топилган соҳаларнинг кесишмаси ўз навбатида берилган системанинг ечимлари мажмуаси бўлади (132-расм).



132- расм.

8- мисол. $\begin{cases} y \geqslant \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{1}{|x-y|} > 0, \\ x > 0 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.

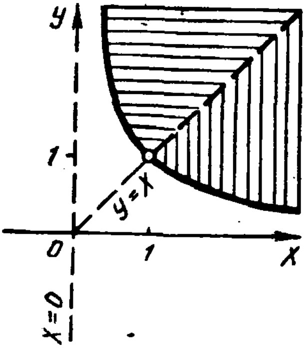
Ечиш. $x > 0$ бўлгани учун $y \geqslant \dfrac{1}{x}$ тенгсизликни I координаталар бурчагида жойлашган гипербола тармоғи ва ундан юқоридаги текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. $x - y \neq 0$ ($x \neq y$ шартни қаноатлантирувчи барча ҳақиқий x ва y сонлар жуфтида $\dfrac{1}{|x-y|} > 0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $y = x$ биссектриса кирмаган xOy координаталар текислиги унинг ечими бўлади.

Ҳосил бўлган соҳаларнинг кесишмаси ўз навбатида берилган системанинг ечимлари мажмуаси бўлади (яъни 1 координата бурчагидаги гипербола ва унинг тармоғидан юқоридаги текислик нуқталари мажмуасидан $y = x$ тўғри чизиқ нуқталари мажмуасини чиқариб юборилса ҳам бўлади (133- расм).

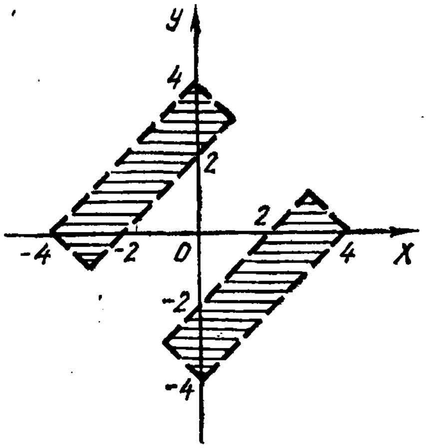
9- мисол. $\begin{cases} |x-y| > 2, \\ |x| + |y| < 4 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Системадаги биринчи тенгсизликни $y = x - 2$ ва $y = x + 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ

$\left(|x-y|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y>2 \\ x-y<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<x-2 \\ y>x+2 \end{array}\right.\right)$ полоса нуқталари мажмуасидан ташқари текислик нуқталари мажмуаси, $|x|+|y|<4$ тенгсизликни эса учлари (—4; 0), (0; 4), (4; 0) ва (0; — 4) нуқталардан иборат бўлган квадрат ички нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. Демак, берилган системанинг ечимлари мажмуаси учлари (—4; 0), (0; 4), (1; 3) ва (—3; —1) ҳамда (—1; — 3), (3; 1), (4; 0) ва (0 ; — 4) бўлган очиқ тўғри тўртбурчаклар ички нуқталари мажмуаларидан иборатдир (134- расм).



133- расм.



134- расм.

10- мисол. $\begin{cases} |2x-y| \leqslant 2, \\ |2x+y| \leqslant 1 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Модул таърифига кўра:

$$\begin{cases} |2x-y| \leqslant 2, \\ |2x+y| \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant 2x-y \leqslant 2, \\ -1 \leqslant 2x+y \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \leqslant y \leqslant 2x+2, \\ -2x-1 \leqslant y \leqslant -2x+1. \end{cases}$$

Изланаётган соҳа $y=2x+2$ ва $y=2x-2$ ҳамда $y=-2x+1$ ва $y=-2x-1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полосалар кесишишидан ҳосил бўлган $ABCD$ параллелограмм нуқталари мажмуасидан иборат бўлиб, унга параллелограмм томонлари мажмуалари ҳам киради.

Параллелограмм учларининг координаталари қуйидагича топилади:

$$((y = 2x + 2) \cap (y = -2x - 1)) = A.$$

$\begin{cases} y = 2x + 2, \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ системани ечиб, A нуқтанинг координаталари топилади, яъни $A(-3/4;\ 1/2)$.

Қолган нуқталарнинг координаталари ҳам шунга ўхшаш топилади.

$$((y = 2x + 2) \cap (y = -2x + 1)) = B(-1/4;\ 3/2);$$
$$((y = -2x + 1) \cap (y = 2x - 2)) = C(3/4;\ -1/2);$$
$$((x = 2x - 2) \cap (y = -2x - 1)) = D(1/4;\ -3/2).$$

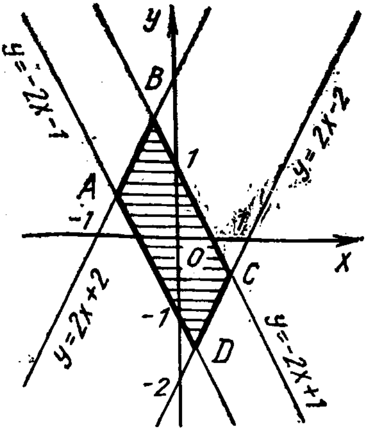
Изланаётган соҳа 135- расмда кўрсатилган.

11- мисол. $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ |y| \leqslant 3 \end{cases}$ система ечимлари соҳасини топинг.

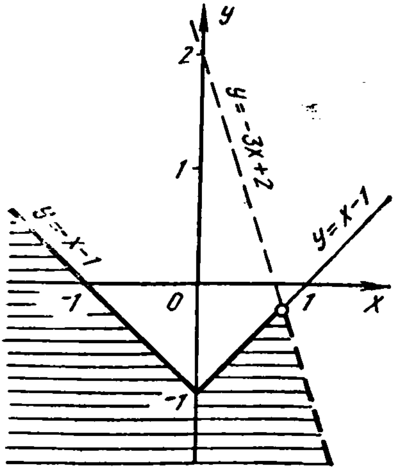
Ечиш. Изланаётган мажмуа — чегаралари $x = -2$ ва $x = 2$ ҳамда $y = -3$ ва $y = 3$ тўғри чизиқлардан иборат бўлган ёпиқ полосалар кесишмасидан, яъни учлари (2; 3), (— 2; 3), (— 2; — 3) ва (2; —3) нуқталардан иборат бўлган тўғри тўртбурчак ва унинг ички нуқталари мажмуасидир.

12- мисол.
$\begin{cases} |x| - y \geqslant 1, \\ 3x + y < 2 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. Берилган системани аввал $\begin{cases} y \leqslant |x| - 1, \\ y < -3x + 2 \end{cases}$ кўринишда ёзиб оламиз. $y \leqslant |x| - 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуасини топиш учун аввал $y = |x| - 1$ функциянинг графигини ясаймиз ($y = |x| - 1$ функциянинг графиги $y = |x|$ функция графигини ординаталар ўқи бўйича минус



135- расм.



136- расм.

бир бирлик қадар параллел кўчиришдан ҳосил бўлади). $y = |x| - 1$ функция графиги ва ундан пастда жойлашган текислик нуқталари мажмуаси $y \leqslant |x| - 1$ тенгсизликни, $y = -3x + 2$ функция графигидан пастда жойлашган очиқ полоса нуқталари мажмуаси $y < -3x + 2$ тенгсизликни қаноатлантиради. Изланаётган соҳа 136-расмда кўрсатилган.

13-мисол. $\begin{cases} x > 2, \\ y < -2, \\ x^2 + y^2 < -1 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топинг.

Ечиш. $x^2 + y^2 < -1$ тенгсизлик x ва y ларнинг ҳеч бир ҳақиқий қийматларида бажарилмайди, яъни унинг ечимлари мажмуаси бўш мажмуадир. Шу сабабли системанинг қолган тенгсизликларининг ечимларини топмасдан туриб, бир йўла берилган система биргаликда эмас, — деган хулосага келиш мумкин. Шунинг учун система ечимлари мажмуаси ҳам бўш мажмуа бўлади.

Умуман олганда система таркибига кирган шартлар ичида бирорта шартнинг ечимлари мажмуаси бўш мажмуа бўлса, у ҳолда қолган шартлардан қатъи назар, берилган система ечимлари мажмуаси ҳам бўш мажмуа эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Тескари тасдиқ нотўғри, яъни система таркибига кирган шартларда уларнинг ечимлари бўш мажмуа бўлмасдан, балки система ечимлари бўш мажмуа бўлиб қолиши мумкин.

Масалан, $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \geqslant 2, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4 \end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топиш керак бўлсин. Система таркибига кирган ҳар бир тенгсизликнинг ечимлари бўш мажмуа эмас, лекин берилган система биргаликда эмаслигини кўрсатамиз. $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geqslant 1, \\ y^2 \geqslant 4 \end{cases}$

бундан $x^2+y^2\geqslant 5$ келиб чиқади. Аммо $x^2+y^2\geqslant 5$ билан $x^2+y^2\leqslant 4$ тенгсизликларнинг умумий қисми мавжуд эмас. Шунинг учун берилган система ечимга эга эмас.

14-мисол. $\begin{cases} y>\log_2 x, \\ y<4^x, \\ x<1 \end{cases}$ система ечимлари соҳасини топинг.

Ечиш. Аввало $x>0$ бўлиши керак, чунки системанинг биринчи тенгсизлиги (ўнг томони) барча мусбат x лар учун аниқланган. Шундай қилиб, изланаётган нуқталарнинг координаталари қуйидаги тенгсизликлар системасини қаноатлантириши керак:

$$\begin{cases} y>\log_2 x, \\ y<4^x, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ y>\log_2 x, \\ y<4^x, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ y>\log_2 x, \\ y<4^x. \end{cases}$$

Бир вақтда ординаталар ўқидан ўнгдаги, $x=1$ тўғри чизиқдан чапда, $y=4^x$ эгри чизиқдан пастда ва $y=\log_2 x$ эгри чизиқдан юқорида ётувчи текислик нуқталари мажмуаси — изланаётган мажмуани беради, унга чегара нуқталари мажмуаси кирмайди (137-расм).

15-мисол.

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+y-1)>\log_{\frac{1}{2}} y, \\ \sqrt{y-x-1}<\sqrt{2-x} \end{cases}$$

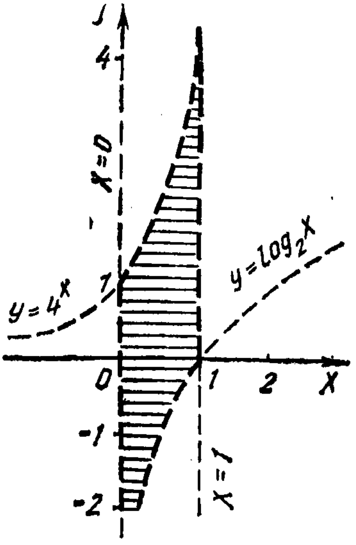
системани ечинг.

Ечиш. Система биринчи тенгсизлигидаги логарифмнинг асоси $0<1/2<1$ бўлгани учун у камаювчи функция бўлади, шунинг учун тенгсизлик ечимлари мажмуаси

$$0<x+y-1<y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1>0, \\ x+y-1<y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y>-x+1, \\ x<1 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси ечимлари соҳасидан



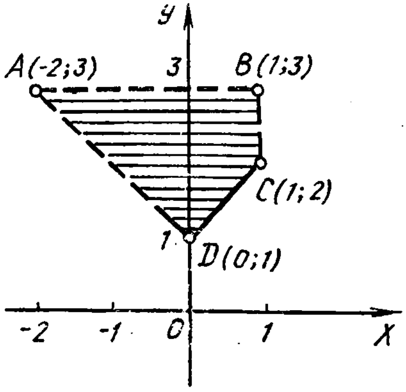
137-расм.

иборат бўлади. Система иккинчи тенгсизлиги эса $\begin{cases} y-x-1 \geqslant 0, \\ y-x-1<2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant x+1, \\ y<-3 \end{cases}$ системага тенг кучли (IV боб, 2- § га қаранг).

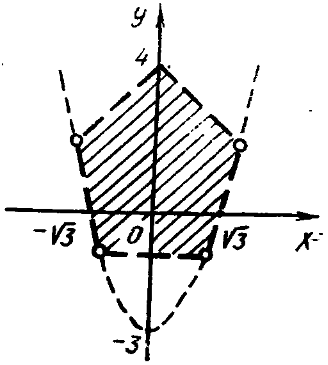
Шундай қилиб, берилган тенгсизликлар системасини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} \log_{1/2}(x+y-1) > \log_{1/2} y, \\ \sqrt{y-x-1} < \sqrt{2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -x+1, \\ x < 1, \\ y \geqslant x+1, \\ y < 3. \end{cases}$$

Демак, берилган системанинг ечимлари соҳаси учлари (—2; 3), (1; 3), (1; 2) ва (0; 1) нуқталарда бўлган *ABCD* тўртбурчакдан иборат бўлиб, чегаралар ечимлар мажмуасига кирмайди, фақат *CD* очиқ кесма нуқталаридан ташқариси (138-расм).



138- расм.



139- расм.

16- мисол. $\begin{cases} \log_2(2y-x^2+4) > \log_2(y+1), \\ |x|+|y|<4 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Система биринчи тенгсизлигини логарифм белгиси остидаги функцияларнинг олиши мумкин бўлган қийматлари қаноатлантиришини ва логарифмик функция ўсувчи (чунки $a=2>1$) эканлигини назарга олган ҳолда қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\log_2(2y - x^2 + 4) > \log_2(y+1) \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 > 0, \\ 2y - x^2 + 4 > x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > -1, \\ y > x^2 - 3. \end{cases}$$

Эслатма $y > -1$ шартда $y > x^2 - 3$ тенгсизлик ечимлари мажмуаси $y > 0{,}5x^2 - 2$ тенгсизлик ечимлари мажмуасини ўз ичига қамраб олади, шунинг учун системанинг охирида $y > 0{,}5x^2 - 2$ тенгсизлик тушириб қолдирилган.

Биламизки, берилган система иккинчи тенгсизлигини учлари (—4; 0), (0; 4), (4; 0) ва (0; —4) нуқталарда бўлган очиқ квадрат ички нуқталари мажмуаси қаноатлантиради.

Изланаётган соҳа 139- расмда кўрсатилган.

Машқлар

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

1. $y = \arcsin((x-3)/2) - \lg(4-x)$.
2. $y = \arcsin(x-2)$.
3. $y = \arccos(3x-4)$.
4. $y = \arcsin(x^2 + 2x - 9)$.
5. $x = \log_3\left(\frac{2x^2 + x - 6}{(x-1)(x+3)}\right) + \sqrt{1-x^2}$.
6. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$.
7. $y = \log_{1/2}(4 - x^2 - y^2)$.
8. $y = \sqrt{-x^2}$.
9. $y = x - \sqrt{1-x^2}$.
10. $y = \sqrt{x^2 - |x|} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.
11. $y = \sqrt{\lg\frac{3x-x^2}{x-1}}$.
12. $y = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{x^2+x}$.
13. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}$.
14. $y = \sqrt{2^x - 3^x}$.
15. $y = \log_{3+x}(x^2-1)$.
16. $y = \arccos(2\sin x)$.
17. $y = \sqrt{3 - 4\sin^2 x}$.
18. $y = \sqrt{1 - 2\cos^2 x}$.
19. $y = \sqrt{\log_{1/3}\cos x}$.
20. $y = \sqrt{\sin x^2}$.
21. $y = \sqrt{\lg(\arcsin x)}$.
22. $y = \lg\sin(x-3) - \sqrt{16-x^2}$.

23. $y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} + \log_2(25 - x^2)$.

24. $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x} - \sqrt{1 - \lg^2 x}$.

25. $y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\lg (x + 10)^2}$.

26. $y = \frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6 + 35x - 6x^2}}$.

27. $y = \sqrt{\sin x - \cos x} + \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

28. $y = \lg \left(\frac{(x-5)(x-3)(x-1)(x+4)x}{(x-2)(x+3)(x+6)(x+2)} \right)$.

29. $y = \lg(-x^2 + 16) + \frac{\arccos \frac{\sqrt{x+1}}{2}}{\operatorname{tg} x}$.

30. $y = \log_{\sin x^2} \left(\frac{2}{x} - 2x \right)$. 31. $y = \frac{\log_3 (x^2 + 4)}{\sin^2 x - \sin x + 0{,}25}$.

32. $y = \frac{\log_{2x^3}}{\arccos (2x - 1)}$.

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

33. $\log_x y = 0$. 34. $\log_x (y - 2x) = 2$. 35. $\log_2 y - \log_4 x = 1$.

Қуйидаги функцияларнинг графигини ясанг:

36. $y = \log_2 \sin x$. 37. $x = \log_{1/2} (1 - x)$. 38. $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$

Қуйидаги тенгсизликлар системасининг ечимлари мажмуасини координаталар текислигида тасвирланг:

39. $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4x + 3, \\ y < x^2 + 4x + 3. \end{cases}$ 40. $\begin{cases} 2x - y^2 \leqslant 0, \\ x + 2 > 1, \\ y^2 - 1 \leqslant 0. \end{cases}$

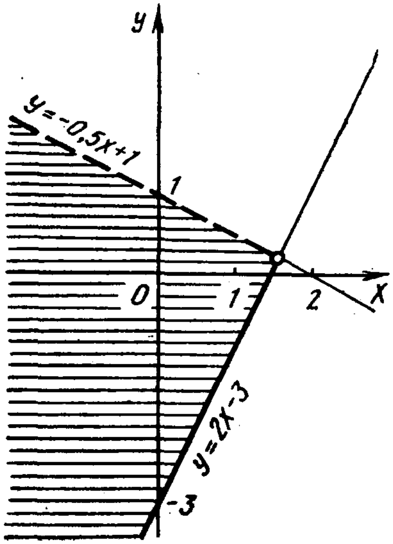
41. $\begin{cases} |x| > 3, \\ \operatorname{arcctg} \frac{x}{5} > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$ 42. $\begin{cases} y - \cos x \geqslant 0, \\ y - \sin x \leqslant 0. \end{cases}$

43. $\begin{cases} xy \leqslant 2, \\ x^2 + y^2 < 9, \\ x^2 - y^2 > 0. \end{cases}$ 44. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 16, \\ |xy| \leqslant 6. \end{cases}$

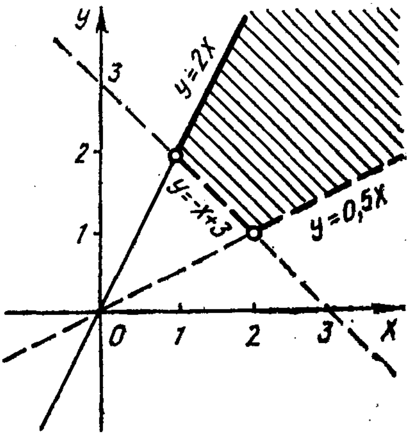
ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

II боб

1. $y = x - 1$ тўғри чизиқ билан чегараланган юқоридаги очиқ ярим текислик ва $y = 2x - 3$ тўғри чизиқ билан чегараланган пастки очиқ ярим текисликлар кесишмаси. 2. $y = -x + 2$ ва $y = -x + 5$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полоса. 3. $y = \frac{2}{3}x$ тўғри чизиқдан пастда ётган очиқ ярим текислик нуқталари мажмуасининг $x = 3$ тўғри чизиқдан ўнгда қолган қисми нуқталари мажмуаси. 4. Бир вақтда $y = 2x + 2$ ва $y = -x - 1$ тўғри чизиқлардан пастда ётган очиқ бурчак нуқталари мажмуаси. 5. $y > -0,5x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи очиқ ярим текисликнинг $y = -1/3$ тўғри чизиқдан пастда қолган қисми нуқталари мажмуаси, яъни очиқ бурчак. 6. Кўрсатма. Системани $\begin{cases} y > -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}, \\ y < x - 5 \end{cases}$ кўринишда ёзиб олинг ва уни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуасини тасвирланг. 7. Бир вақтда $y = x - 2,5$ ҳамда $y = -0,5x + 0,5$ тўғри чизиқлардан юқорида ётган очиқ ярим текисликлар кесишмасидан ҳосил бўлган бурчак (бурчак томонлари ечимга кирмайди, яъни очиқ бурчак). 8. $y = -1,5x - 0,5$ ҳамда $y = -1,5x + 1,5$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полоса. 9. $y = -1$ тўғри чизиқдан юқорида ётган очиқ ярим текисликнинг $x = 3$ тўғри чизиқдан чапда қолган қисми нуқ-

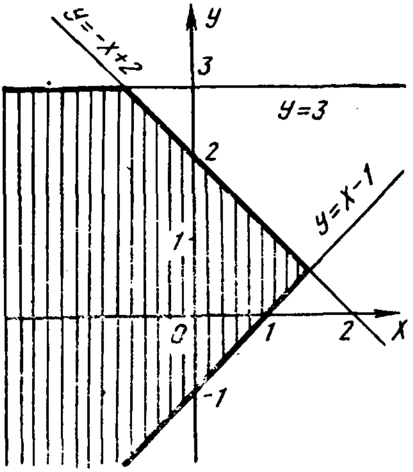


140- расм.

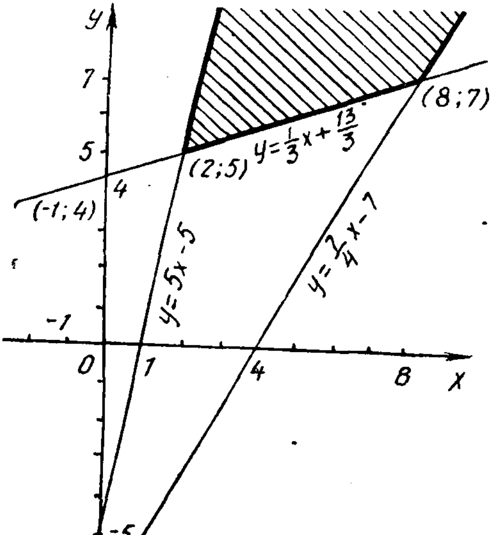


141- расм.

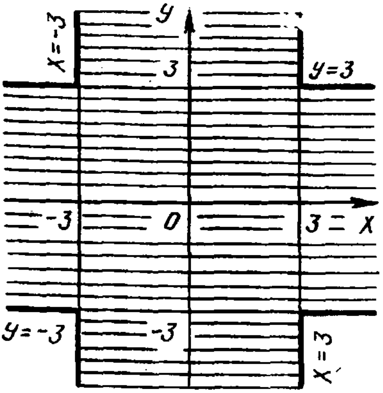
талари мажмуаси (бурчак томонлари ечимга кирмайди). 10. $y = x + 3$ ҳамда $y = x - 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ полоса. 11. Учлари (0; 0), (4; 0) ва (0; — 4) нуқталарда бўлган очиқ учбурчак ички нуқталари мажмуаси. 12. 140-расм. 13. 141-расм. 14. 142-расм. 15. 143-расм. 16. Бир вақтда $y = x + 2$ ҳамда $y = -2x + 4$ тўғри чизиқлардан пастда ва $y = -5$ тўғри чизиқдан юқорида ётган ёпиқ ярим текисликларнинг кесишмасидан ҳосил бўлган учбурчак, (— 7; — 5), (2/3; 8/3) ва (4,5; — 5) нуқталар унинг учлари. 17. {(2; 0)}. 18. Учлари (—2; 1),



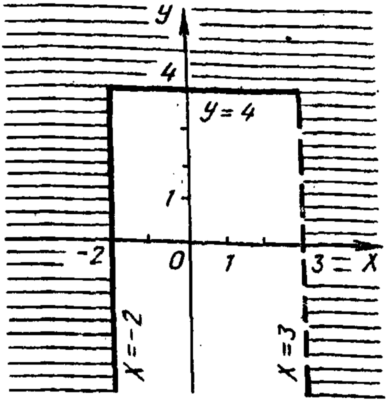
142- расм.



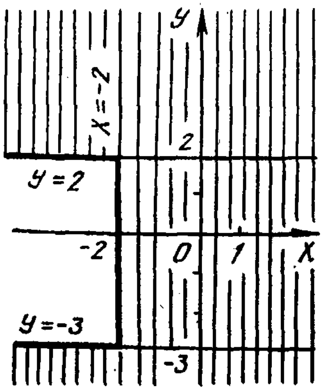
143- расм.



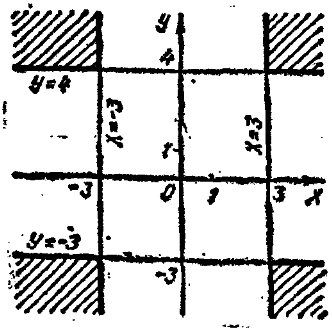
144-расм.



145-расм.



146-расм.



147-расм.

(0; 0) ва (2; 2) нуқталарда бўлган ёпиқ учбурчак. 19. $y=2x+2$ ҳамда $y=2x+8$ ва $y=-x+2$ ҳамда $y=-x+6$ тўғри чизиқлардан иборат бўлган полосаларнинг кесишишидан ҳосил бўлган ромб. 20. 144-расм. 23. 145-расм. 24. 146-расм. 25. 147-расм. 26. $y=x+3$ ва $y=x-2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган очиқ полосадан қолган текислик нуқталари мажмуаси.

III боб

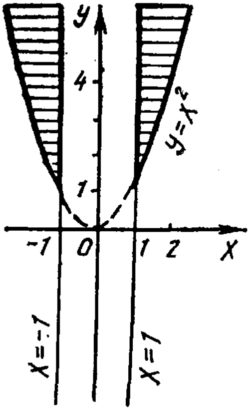
1. Маркази (— 1; 0) нуқтада ва радиуси 1 бирликка тенг бўлган айлана ҳамда ундан ташқаридаги текислик нуқталари мажмуаси. чунки $(x+1)^2+y^2\geqslant 1$. 2. Маркази (0; —2) нуқтада ва радиуси 2 бирликка тенг бўлган ёпиқ доира, чунки $x^2+(y+2)^2\leqslant 4$. 3. Маркази (0; —1) нуқтада

ва радиуси 2 бирликка тенг бўлган очиқ доирадан қолган текислик нуқталари мажмуаси, чунки $x^2+(y+2)^2 \geqslant 4$. 4. $\{(x, y)\} \in R^2$, чунки $(x-5)^2+(y+2)^2 \geqslant 0$. 5. Маркази (5; — 2) нуқтада ва радиуси 6 бирликка тенг бўлган айлана ҳамда ундан ташқаридаги текислик нуқталари мажмуаси. 6. $(x-5)^2+(y+2)^2 \geqslant 0$ бўлгани учун $(x-5)^2+(y+2)^2 \leqslant -1$ тенгсизлик ўринли эмас, шунинг учун тенгсизлик ечимлари мажмуаси — бўш тўплам. 7. Маркази (6; 3) нуқтада ва радиуси 5 бирликка тенг бўлган айлана ва ундан ташқаридаги текислик нуқталари мажмуаси. 8. Маркази (2; — 3) нуқтада ва радиуси 5 бирликка тенг бўлган ёпиқ доира. 9. $(x+4)^2+(y-3)^2>9$ — маркази (— 4; 3) нуқтада ва радиуси 3 бирликка тенг бўлган ёпиқ доирадан қолган текислик нуқталари мажмуаси. 10. $\varnothing$ 11. R^2, яъни сонлар текислиги. 12. Маркази (1/2; 1/2) нуқтада ва радиуси 1/2 бирликка тенг бўлган айлана ва ундан ташқаридаги текислик нуқталари мажмуаси. 13. Учи (— 2; — 1) нуқтада бўлган $y=(x+2)^2-1$ парабола ва унинг тармоқлари орасидаги нуқталари мажмуаси. 14. Учи (2, 3) нуқтада бўлган $y=-(x-2)^2+3$ парабола ва ундан ташқаридаги текислик нуқталари мажмуаси. 15. Учи (1; 4) нуқтада бўлган $y=(x-1)^2-4$ парабола тармоқлари орасидаги очиқ текислик нуқталари мажмуасидан қолган мажмуа. 16. Учи (— 3; 0) нуқтада бўлган $y=(x+3)^2$ парабола ва ундан ташқаридаги текислик нуқталари мажмуаси. 21. $y=\frac{4}{x-3}+2$ гипербола тармоқлари орасидаги текислик нуқталари мажмуасидан қолган мажмуа, унга гипербола нуқталари мажмуаси киради. 22. $y=\frac{1}{x}+2$ гипербола тармоқлари орасидаги нуқталар мажмуасидан қолган текислик нуқталари мажмуаси. 23. $y=\frac{2}{x-1}-1$ гипербола тармоқлари ва улар орасида қолган текислик нуқталари мажмуаси.

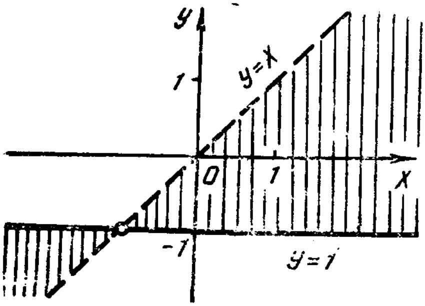
IV боб

1. Кўрсатма. Берилган тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз: $y(x-8)-4(x-8) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-8)(y-4) \leqslant 0$, бундан $\begin{cases} x \geqslant 8, \\ y \leqslant 4 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x \leqslant 8, \\ y \geqslant 4. \end{cases}$ 3. Кўрсатма. $x^2-4y^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -4\left(y^2-\frac{1}{4}x^2\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow y^2-\frac{1}{4}x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (y+0,5)(y-0,5) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant -0,5x, \\ y \geqslant 0,5x \end{cases}$ ёки $\begin{cases} y \leqslant -0,5x, \\ y \leqslant 0,5x. \end{cases}$ 4. Кўрсатма. Берилган тенгсизлик $\frac{2y-x}{x-y} \geqslant 0$ га, яъни $\frac{y-0,5x}{y-x} \leqslant 0$ тенгсизликка тенг кучли. 7. 148-расм. Кўрсатма. $\begin{cases} x^2-1 \geqslant 0, \\ y-1 \geqslant x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geqslant 1, \\ y \geqslant x^2. \end{cases}$ 9. $y \geqslant 1$. Кўрсатма. $x \in R$ да $x^2+2>0$ бўлгани учун берилган тенгсизлик $y+x^2+1 \geqslant x^2+2$ га, яъни $y \geqslant 1$ тенгсизликка тенг кучли. 10. (1; 4]. 11. (2; + ∞); 12. [0; 2]. 13. (— ∞; — 2]. Кўрсатма. Берилган тенгсизлик

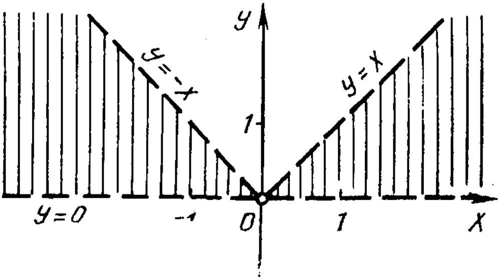
$$\begin{cases} 8-5x \geqslant 0, \\ x^2-3x-10 \geqslant 0, \\ x^2-3x-10 \leqslant 64-80x+25x^2 \end{cases}$$



148- расм.

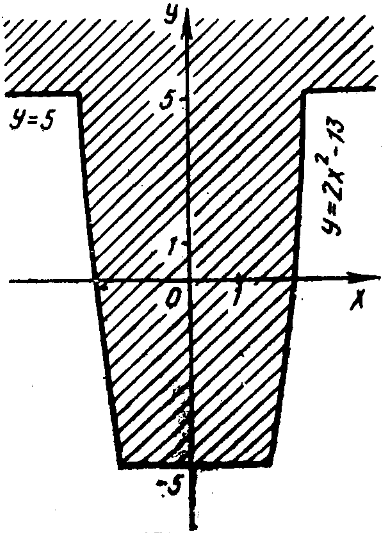


149- расм.



150 -расм.

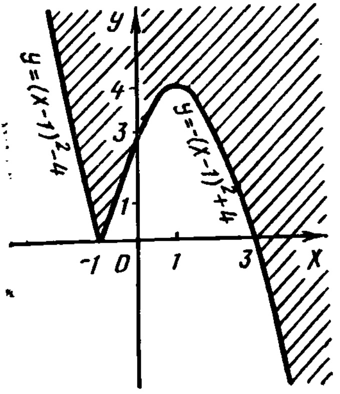
системага тенг кучли. Системанинг охирги тенгсизлиги барча $x \in \mathbf{R}$ да ўринли. Шунинг учун изланаётган ечим система биринчи ва иккинчи тенгсизликлари ечимлари мажмуаларининг кесишмасидан иборат бўлади. **14.** [5; +∞). **15.** [1; 6]. **16.** (—∞; —1] ∪ [2; +∞). **17.** (—∞; —1]. **18.** (—∞; —1]. **19.** (4; 6]. **20.** Кўрсатма. Берилган тенгсизлик $\frac{y-2}{x-3} \geqslant 0$ тенгсизликка тенг кучли. Уни ечиб, изланаётган натижани топамиз. **21.** 149-расм. Кўрсатма. Берилган тенгсизлик $\frac{x+1}{x-y} \geqslant 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1+y}{x-y} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-x} \leqslant 0$ тенгсизликка тенг кучли. **22.** [—1; 1].



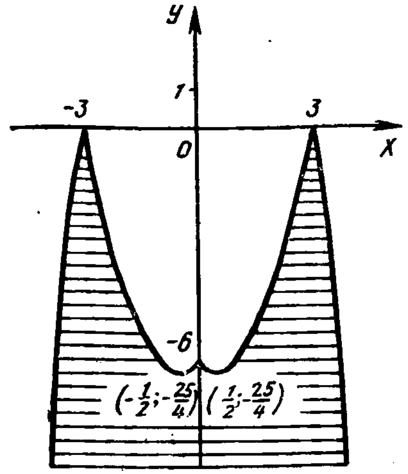
151- расм.

Кўрсатма. $\begin{cases}1+x\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$ — бу тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси. Тенгсизликнинг ҳар иккала қисми аниқланиш соҳасида манфий бўлмагани учун унинг иккала қисмини квадратга кўтарамиз ва натижада $\sqrt{1-x^2}>-1$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизлик эса барча $x\in[-1;\ 1]$ да ўринли. Шу сабабли тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси — изланаётган ечимнинг ўзи бўлади. **23.** $(1;\ \infty)$. **24.** $[1;\ 3/2]$. **Кўрсатма.** Тенгсизликни $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$ кўринишда ёзиб оламиз, сўнгра тенгсизликнинг иккала қисмини квадратга оширамиз, чунки ҳар иккала қисм номанфий. **25.** $(-2;\ -1]\cup[-2/3;\ 1/3)$. **26.** $[-\sqrt{3};\ 0)\cup(0;\ 2]$. **27.** $((\sqrt{13}-5)/2;\ 1]$. **Кўрсатма**. $\sqrt{1-x}=y$ деб оламиз, у ҳолда $1-x=y^2$ ҳамда $2-x=y^2+1$ бўлади. Шундай қилиб, $\sqrt{4-y}>\sqrt{1+y^2}$, бу ўз навбатида $4-y>1+y^2$, $1+y^2>0$, $y\geqslant 0$ тенгсизликлар системасига тенг кучли. Бу системани ечиб, $0\leqslant y<(\sqrt{13}-1)/2$ ни ҳосил қиламиз, бундан эса берилган тенгсизлик $0<\sqrt{1-x}<(\sqrt{13}-1)/2$ га тенг кучлилиги келиб чиқади. Уни ечиб, изланаётган натижага эга бўламиз. **28.** $[-20;\ 0)\cup(5;\ \infty)$. **29.** 150-расм. **Кўрсатма.** $\sqrt{y|x|}>y\Leftrightarrow\begin{cases}y>0,\\ y|x|>y^2\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}y>0,\\ |x|>y\end{cases}\Leftrightarrow 0<y<|x|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<y<x,\\ 0<y<-x.\end{array}\right.$ **30.** $(-\infty;\ -11)\cup(24;\ \infty)$. **31.** $(-\infty;\ -2]\cup(0;\ \infty)$. **32.** $\{-7;\ 7\}$. **33.** $\{-1;\ 4\}$. **34.** $\{2\}$. **35.** $\{2401\}$. **36.** $\{19;\ 84\}$.



152- расм.



153- расм.

V боб.

1. Кўрсатма. $|x-y|+y\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant x, \\ x\leqslant 0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} y\geqslant x, \\ y\geqslant \frac{1}{2}x. \end{cases}$

2. Кўрсатма. $y^2-|x-1|\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ y^2-(x-1)\geqslant 0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x-1\leqslant 0, \\ y^2+(x-1)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\leqslant y^2+1 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x\leqslant 1, \\ x\geqslant -y^2+1 \end{cases}$ 3. 151-расм. Кўрсатма. $y\geqslant |x^2-4|-|x^2-9| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4\geqslant 0, \\ x^2-9\geqslant 0, \\ y\geqslant x^2-4-(x^2-9) \end{cases}$

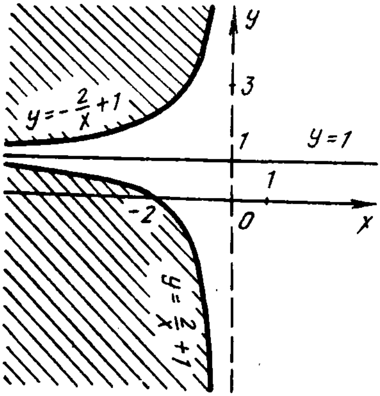
ёки $\begin{cases} x^2-4\geqslant 0, \\ x^3-9\leqslant 0, \\ y\geqslant x^2-4+(x^2-9) \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x^2-4\leqslant 0, \\ x^2-9\leqslant 0; \\ y\geqslant -(x^2-4)+(x^2-9) \end{cases}$

ёки $\begin{cases} x^2-4\leqslant 0, \\ x^2-9\geqslant 0, \\ y\geqslant -(x^2-4)-(x^2-9), \end{cases}$ бундан $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geqslant 3 \\ x\leqslant -3, \end{array}\right. \\ y\geqslant 5 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2\leqslant x\leqslant 3, \\ -3\leqslant x\leqslant -2, \end{array}\right. \\ y\geqslant 2x^2-13 \end{cases}$

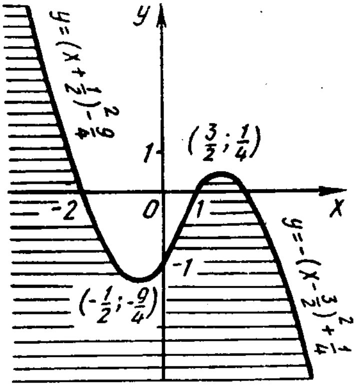
ёки $\begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 2, \\ y\geqslant -5, \end{cases}$ 4. Кўрсатма. $y\leqslant |x|(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\leqslant x(x-2) \end{cases}$

ёки $\begin{cases} x\leqslant 0, \\ y\leqslant -x(x-2), \end{cases}$ бундан $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\leqslant (x-1)^2-1 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x\leqslant 0, \\ y\leqslant -(x-1)^2+1 \end{cases}$ келиб чиқади. 5. 152-расм. Кўрсатма. Берилган тенгсизлик $\begin{cases} x>-1, \\ y\geqslant -(x-1)^2+4 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\geqslant (x-1)^2-4 \end{cases}$ бўлганда ўринли бўлади.

6. Кўрсатма. Берилган тенгсизлик $\begin{cases} x^2-2x\geqslant 0, \\ y\geqslant -(x^2-2x) \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x^2-2x\leqslant 0, \\ y\geqslant x^2-2x, \end{cases}$ яъни $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 0, \end{array}\right. \\ y\geqslant -(x-1)^3+1 \end{cases}$ ёки $\left[\begin{array}{l} 0\leqslant x\leqslant 2, \\ y\geqslant (x-1)^2-1 \end{array}\right.$ бўлганда ўринли бўла-

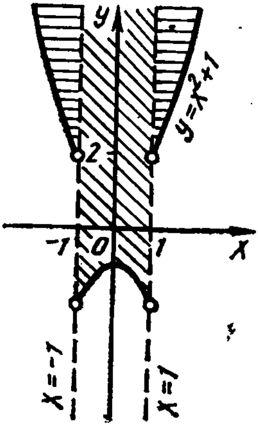


154-расм.

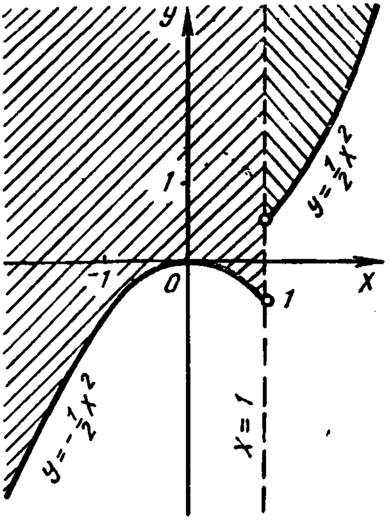


155-расм.

ди. 7. 153-расм. **Кўрсатма.** График ординаталар ўқига нисбатан симметрик ҳамда абсциссалар ўқидан пастда жойлашади. Шу сабабли $x \geqslant 0$ учун $y \leqslant -|x^2 - x - 6|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи текислик нуқталари мажмуасини топиш ва уни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириш кифоя. **8.** 154-расм. **9.** Кўрсатма. Биламизки, $|x|+|y| \geqslant 2$ тенгсизликни учлари (2; 0); (—2; 0), (0; 2) ва (0; —2) нуқталарда бўлган квадрат ҳамда ундан ташқарида ётган текислик нуқталари мажмуаси қаноатлантиради. Изланаётган ечимлар мажмуасини топиш учун эса юқоридаги ечимлар мажмуасини аввал абсциссалар ўқи бўйича бир бирлик ўнгга ва ҳосил бўлган ечимлар мажмуасини ординаталар ўқи бўйича минус бир бирлик қадар параллел кўчириш кифоя. Демак, изланаётган мажмуа учлари (3; — 1), (— 1; — 1), (1; 1) ва (1; — 3) нуқталарда бўлган квадрат ва ундан ташқаридаги текислик нуқталари мажмуасидан иборат. **10.** Кўрсатма. Модул белгиси остидаги ифодалар $y = -x$ ва $y = x$ тўғри чизиқлардан ўтганда ўз ишорасини ўзгартиргани учун 4 та ҳолни кўриш лозим. Шундай қилиб, берилган тенгсизлик $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$ системага тенг кучли. **11.** Кўрсатма. Аввал берилган тенгсизликни $y \geqslant x + x|x - 1|$ кўринишда ёзиб оламиз. Демак, берилган тенгсизлик $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \geqslant x^2 \end{cases}$ ёки

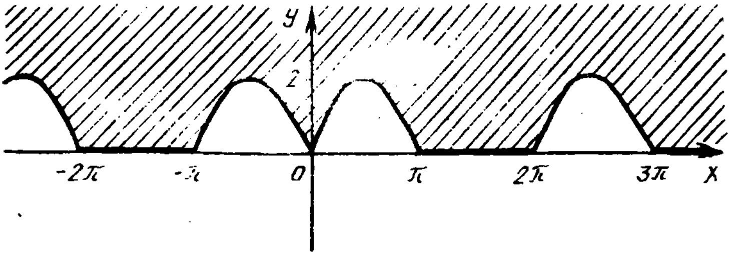


156-расм.



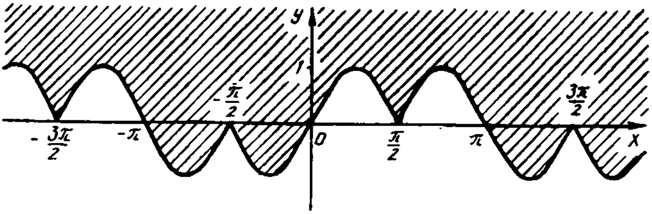
157-расм.

$\begin{cases} x \leqslant 1, \\ y \geqslant -(x-1)^2 + 1 \end{cases}$ бўлганда бажарилади. **12.** 155-расм. **13.** Кўрсатма. $y \geqslant \frac{x^3 + x}{|x|} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y \geqslant x^2 + 1 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x < 0, \\ y \geqslant -x^2 - 1. \end{cases}$ **14.** 156-расм. **15.** 157-расм. Кўрсатма. Берилган тенгсизликни дастлаб

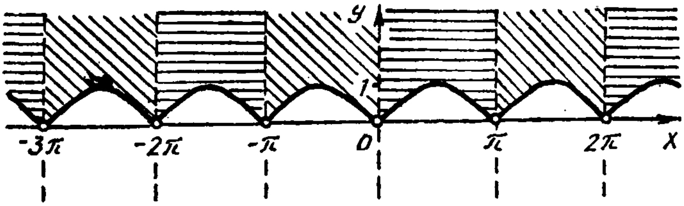


158- расм.

$y \geqslant \frac{x^2(x-1)}{2|x-1|}$ кўринишда ёзинг, сўнгра шакл алмаштиринг. **16.** 158-расм. Кўрсатма. $y = |\sin x| + \sin|x|$ функция жуфт, шунинг учун унинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик жойлашади. Демак, $x \geqslant 0$ учун функция графигини ясаш, сўнгра ҳосил бўлган графикни ординаталар. ўқига нисбатан симметрик акслантириш етарли. Функциянинг даври 2π га тенг бўлгани сабабли, уни $[0;\ 2\pi]$ кесмада кўриб чиқамиз. $0 \leqslant x \leqslant \pi$ оралиқда $y = 2\sin x$ бўлади, яъни бу кесмада функциянинг графиги $y = \sin x$ синусоидани ординаталар ўқи бўйича 2 марта чўзишдан ҳосил бўлган қисмидан иборат бўлади. $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ кесмада эса $y = 0$ бўлиб, бу оралиқда функциянинг графиги абциссалар ўқи кесмасидан иборат бўлади. Даврийлигини эътиборга олсак ($x \geqslant 0$ учун), барча ўнг қисмидаги графикнинг қисмларини ҳосил қиламиз. Функция жуфтлигидан фойдаланиб, графикнинг қолган қисми ҳосил қилинади. Демак, $y = |\sin x| + \sin|x|$. функция графиги ва ундан юқорида ётган текислик нуқталари мажмуаси изланаётган ечимлар мажмуаси бўлади. **17.** Кўрсатма. 158-расмдаги $x \geqslant 0$, учун график қисмини чап томонга ҳам навбатма-навбат давом эттирсак, изланаётган ечим келиб чиқади. **18.** 159- расм. Кўрсатма. Берилган тенгсизлик $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \\ y \geqslant \sin 2x \end{cases}$ ёки $\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \\ y \geqslant -\sin 2x \end{cases}$ бўлганда ўринли. **19.** 160- расм. Кўрсатма. Тенгсизликни дастлаб $y \geqslant \frac{\sin^2 x}{|\sin x|}$ кўринишда ёзиб оламиз. Бундан берилган тенгсизлик



159- расм.

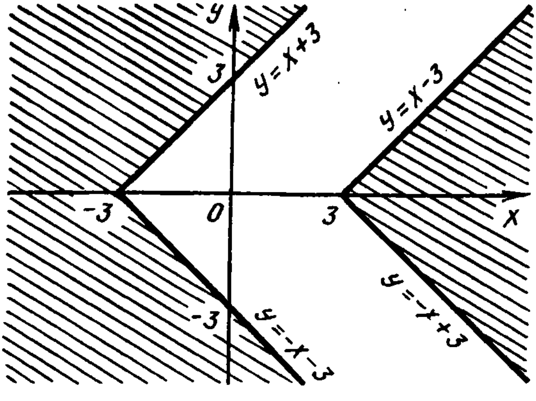


160- расм.

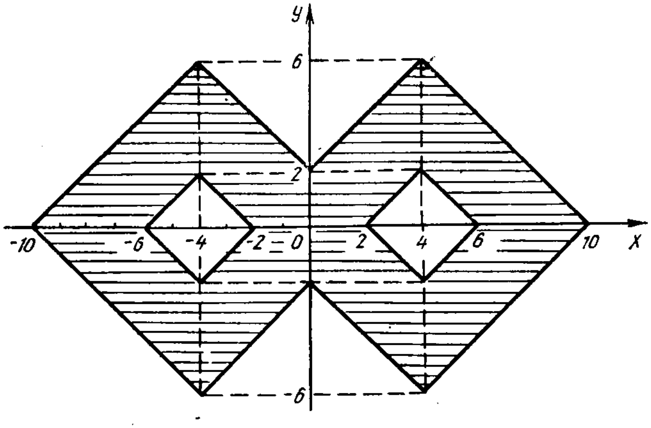
$\begin{cases}\sin x > 0,\\ y \geqslant \sin x\end{cases}$ ёки $\begin{cases}\sin x < 0,\\ y \geqslant -\sin x.\end{cases}$ яъни $\begin{cases}2n\pi < x < \pi + 2n\pi,\\ x \geqslant \sin x\end{cases}$ ёки $\begin{cases}\pi + 2\pi n < x < 2(n+1)\pi,\\ y \geqslant -\sin x\end{cases}$ бўлганда ўринли эканлиги келиб чиқади.

Ёки $\dfrac{\sin^2 x}{|\sin x|} = \dfrac{|\sin x|^2}{|\sin x|} = \begin{cases}|\sin x|,\\ x \neq n\cdot\pi\end{cases}$ эканлигини назарга олсак, $\begin{cases}y \geqslant |\sin x|.\\ x \neq n\pi\end{cases}$ бўлади. У ҳолда $y \geqslant |\sin x|$ тенгсизлик ечимлари мажмуасидан $x = n\pi$ тенглама ечимлари мажмуасини чиқариб, изланаётган ечимлар мажмуасига келамиз $(n \in \mathbf{Z})$. 20. $(-\infty;\ 3)$. 21. $(-5;\ -2) \cup (2;\ 3) \cup (3;\ 5)$.

Кўрсатма. Берилган тенгсизлик $\begin{cases}x \geqslant 0,\\ \dfrac{x^2 - 7x + 10}{(x-3)^2} < 0\end{cases}$ ёки $\begin{cases}x \leqslant 0,\\ \dfrac{x^2+7x+10}{(x-3)^2} < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geqslant 0,\\ x \neq 3,\\ (x-2)(x-5) < 0\end{cases}$ ёки $\begin{cases}x \leqslant 0,\\ x \neq 3,\\ (x+2)(x+5) < 0\end{cases}$ бўлганда ўринли бўлади. Ҳосил бўлган системаларни ечиб, изланаётган ечимлар мажмуасини топамиз. 22. $(2;\ 3)$. Кўрсатма. $x \in R$ да $|x| + 7 > 0$ бўлгани учун масала $x^2 - 5x + 6 < 0$ тенгсизликни ечишга келиб қолади. 23. $(2;\ 5)$. 24. $(-\infty;\ -5] \cup [4;\ \infty)$ 25. $(-\infty;\ -1) \cup (2;\ 3) \cup (3;\ \infty)$. 26.



161- расм.

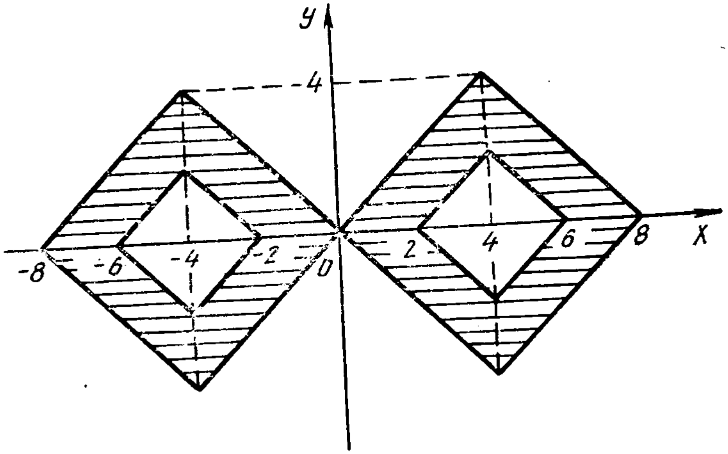


162- расм.

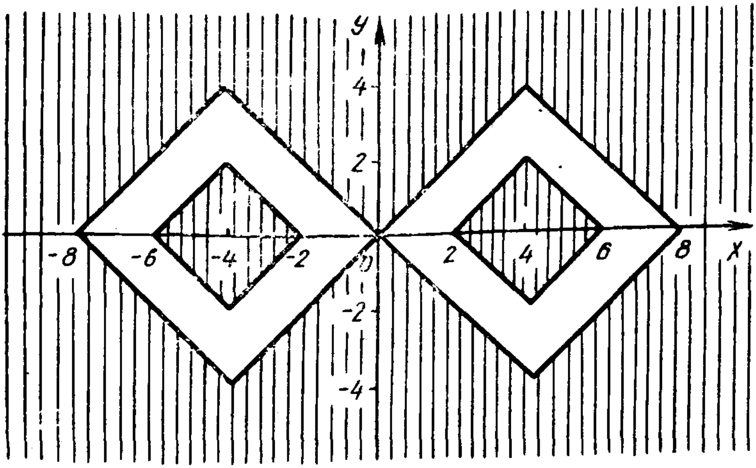
$(-\infty;\ 2-\sqrt{5})\cup(2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{5};\ \infty)$. **27.** $(-1;\ 2-3\sqrt{2}/4)\cup(3\sqrt{2}/4+2;\ 5)$. **28.** $(-\infty;\ 1)\cup(3-0{,}5\sqrt{10};\ 3+0{,}5\sqrt{10})\cup[5;\infty)$. **29.** $(-4/3;-1)\cup(-1;\ -0{,}5)$. **30.** 161-расм. Кўрсатма.

$$|x-|y||\geqslant 3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-|y|\geqslant 3\\ x-|y|\leqslant -3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|y|\leqslant x-3\\ |y|\geqslant x+3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x+3\leqslant y\leqslant x-3\\ y\geqslant x+3\\ y\leqslant -x-3.\end{array}\right.$$

31. Кўрсатма. $|2x-y|>y-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-y>y-1\\ 2x-y<1-y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y<x+0{,}5\\ x<0{,}5.\end{array}\right.$



163- расм.

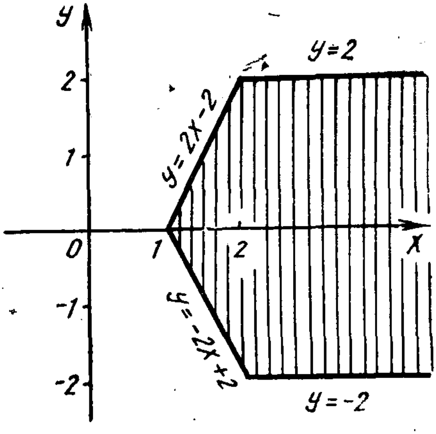


164- расм.

32. Кўрсатма. $|x+|y|| \geqslant 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+|y| \geqslant 3, \\ x+|y| \leqslant -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |y| \geqslant -x+3 \\ |y| \leqslant -x-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \geqslant -x+3 \\ y \leqslant x-3 \\ -x+3 \leqslant y \leqslant -x-3. \end{array}\right.$ 33. 162- расм. Кўрсатма. Берилган тенгсизликнинг ечимлари мажмуаси координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани учун биринчи координата бурчагидаги графикни ҳосил қилиш етарли. Сўнгра ҳосил бўлган текислик нуқталари мажмуасини мос равишда координата ўқларига нисбатан симметрик акслантириш кифоя. $|||x|-4|+|y|-4| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant ||x|-4|+|y|-4 \leqslant 2 \Leftrightarrow$

165- расм.



$$\Leftrightarrow 2 \leqslant \big|\,|x| - 4\big| + |y| \leqslant 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ 2 \leqslant |x-4| + y \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

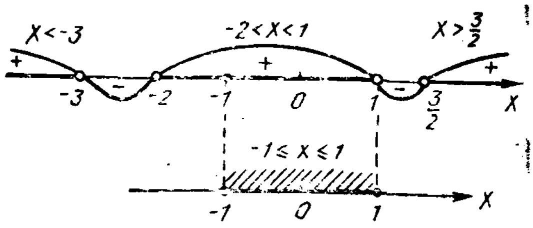
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ -|x-4|+2 \leqslant y \leqslant -|x-4|+6 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 4, \\ y \geqslant 0, \\ -x+6 \leqslant y \leqslant -x+10; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ y \geqslant 0, \\ x-2 \leqslant y \leqslant x+2. \end{cases} \end{array} \right.$$

34. 163-расм. Кўрсатма, 33-мисолга қаранг. **35.** 164-расм, **36.** 165-расм.

VI боб

1. [1; 4). Кўрсатма. Функциянинг аниқланиш соҳаси қуйидаги система ечимлари мажмуасидан иборат: $\begin{cases} \left|\dfrac{x-3}{2}\right| \leqslant 1, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$ **2.** [0; 3]. **3.** $\left[1; \dfrac{5}{3}\right]$. **4.** $[-1-\sqrt{11}; -4] \cup [2; -1+\sqrt{11}]$. **5.** $[-1; 1]$. Кўрсатма. $\begin{cases} \dfrac{2x^2+x-6}{(x-1)(x+3)} > 0, \\ 1 - x^2 \geqslant 0 \end{cases}$ системани ечиш лозим (166-расм).

6. $[4\pi^2n^2; \pi^2(2n+1)^2]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ечиш. $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sin\sqrt{x} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2\pi n \leqslant \sqrt{x} \leqslant \pi(2n+1) \end{cases} \Leftrightarrow 4\pi^2n^2 \leqslant x \leqslant \pi^3(2n+1)^2$. **7.** Маркази координаталар бошида ва радиуси 2 бирликка тенг бўлган очиқ доира.



166-расм.

8. {0}. **9.** [−1; 1]. **10.** $(-3; -1] \cup [1; 3)$. Кўрсатма. $\begin{cases} x^2 - |x| \geqslant 0, \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases}$ система ечилади. **11.** $(-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup (1; 1+\sqrt{2}]$. Кўрсатма. Функциянинг аниқланиш соҳаси $\lg \dfrac{3x-x^2}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-x^2}{x-1} \geqslant 1$ тенгсизлик ечимлари мажмуасидан иборат. **12.** $[-4; -1] \cup [0; 4]$. **13.** $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$; **14.** $(-\infty; 0]$. **15.** $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; \infty)$.

16. $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$. Кўрсатма. $-1\leqslant 2\sin x\leqslant 1$ қўш тенгсизликни ечиш лозим. 17. $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in Z$. Ечиш. $3-4\sin^2 x\geqslant 0\Leftrightarrow 3-4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\geqslant 0\Leftrightarrow \cos 2x\geqslant -\frac{1}{2}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3}+2\pi n\leqslant 2x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi n\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. 18. $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$. 19. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

20. $[-\sqrt{\pi+2\pi n};\ -\sqrt{2\pi n}]\cup[\sqrt{2\pi n};\ \sqrt{\pi+2\pi n}]$, $n=0,1,2,\ldots$ Ечиш. $\sin x^2\geqslant 0\Leftrightarrow 2\pi n\leqslant x^2\leqslant\pi+2\pi n$ — бу тенгсизлик $n=0,1,2,\ldots$ қийматларда ўринли, демак. $\sqrt{2\pi n}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\pi+2\pi n}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2\pi n}\leqslant x\leqslant\sqrt{\pi+2\pi n}\ \ (x\geqslant 0)\\ -\sqrt{\pi+2\pi n}\leqslant x\leqslant-\sqrt{2\pi n}\ \ (x\leqslant 0).\end{array}\right.$$

21. $[\sin 1\ 1]$. Ечиш. ;

$\lg(\arcsin x)\geqslant 0\Leftrightarrow\arcsin x\geqslant 1\Leftrightarrow 1\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{чунки } -\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\sin 1\leqslant x\leqslant 1$. 22. $(3-2\pi;\ 3-\pi)\cup(3;\ 4]$. Ечиш. Биринчи қўшилувчи $\sin(x-3)>0\Leftrightarrow 2\pi n<x-3\leqslant\pi(2n+1)\Leftrightarrow 2n\pi+3<x<(2n+1)\pi+3$ да, иккинчи қўшилувчи $16-x^2\geqslant 0\Leftrightarrow x^2\leqslant 16\Leftrightarrow -4\leqslant x\leqslant\leqslant 4$ да аниқланган. Энди n нинг қандай қийматларида берилган тенгсизлик аниқланганлигини топамиз: а) $n=-1$ да $-2\pi+3<x<<-\pi+3$ бўлади, бу оралиқ тўла ҳолда $-4\leqslant x\leqslant 4$ га жойлашади; б) $n=0$ да $3<x<\pi+3$ бўлади, бу ҳолда берилган тенгсизликни $3<x\leqslant 4$ оралиқдан олинган қийматлар қаноатлантиради. n нинг қолган қийматларида ҳосил бўладиган оралиқлар $-4\leqslant x\leqslant 4$ оралиққа тегишли бўлмайди. 23. $\left(-5;\ -\frac{7}{12}\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right]$. Ечиш. Берилган функциянинг аниқланиш соҳасини қуйидаги система ечимлари ичидан излаймиз:

$$\begin{cases}\sin x-\frac{1}{2}\geqslant 0,\\ 25-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\geqslant\frac{1}{2},\\ x^2<25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\\ -5<x<5.\end{cases}$$

а) $n=0$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз: $\begin{cases}\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}\\ -5<x<5\end{cases}\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

б) $n=-1$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз: $\begin{cases}-\frac{11}{6}\pi\leqslant x\leqslant-\frac{7}{12}\pi,\\ -5<x<5\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5\leqslant x\leqslant-\frac{7}{12}\pi$ (чунки $-5>-\frac{11}{6}\pi$). Демак, $n\neq 0$ ва $n\neq-1$ бўлганда система ечимга эга бўлмайди. 24. $D(y)=\left[\frac{1}{10};\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\cup$ $\cup\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)\cup\left(2\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{2};\ 3\pi\right)\cup(3\pi;\ 10]$.

Ечиш.

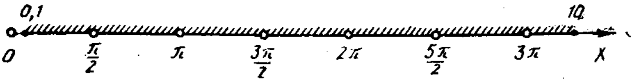
$$\begin{cases} \mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x \neq 0,\\ 1-\lg^2 x \geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\\ x\neq \pi n,\\ -1\leqslant \lg x\leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ x\neq \pi n,\\ \frac{1}{10}\leqslant x\leqslant 10.\end{cases}$$

$n=0$ бўлса, $x\neq 0$ ва $x\neq\frac{\pi}{2}$ бўлиб, улардан $\frac{\pi}{2}\in[1/10;\ 10]$;

$n=1$ бўлса, $x\neq\frac{3\pi}{2}$ ва $x\neq\pi$ бўлиб, улар $[1/10;\ 10]$ га киради;

$n=2$ бўлса, $x\neq\frac{5\pi}{2}$ ва $x\neq 2\pi$ бўлиб, улар $[1/10;\ 10]$ га киради;

$n=3$ бўлса, $x\neq\frac{7\pi}{2}$ ва $x\neq 3\pi$ бўлиб, улардан $3\pi\in[1/10;\ 10]$ ва $\frac{7\pi}{2}\in[1/10;\ 10]$ (167- расм). 25. $D(y)=(-\infty;\ -11)\cup(-11;\ -10)\cup$ $\cup(-10;\ -9)\cup(-9;\ 2]\cup[3;\ \infty)$.



167- расм.

Кўрсатма. $\begin{cases} x^2-5x+6\geqslant 0,\\ x+10\neq 0,\\ \lg(x+10)^2\neq 0\end{cases}$ система ечимлари мажмуасини топиш лозим. 26. $D(y)=(-1/6;\ \pi/3]\cup[5\pi/3;\ 6)$. Ечиш.

$$\begin{cases}\cos x-\frac{1}{2}\geqslant 0,\\ 6+35x-6x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\geqslant\frac{1}{2},\\ 6x^2-35x-6<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi n,\\ -\frac{1}{6}<x<6.\end{cases}$$

$n=0$ бўлсин, у ҳолда $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3},\\ -\frac{1}{6}<x<6\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3}$, чунки $-\frac{1}{6}>-\frac{\pi}{3}$ ва $\frac{\pi}{3}<6$;

$n=1$ бўлсин, у ҳолда $\begin{cases}-\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{3},\\ -1/6<x<6\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5\pi}{3}\leqslant x<6,$

чунки $\frac{5\pi}{3} > -\frac{1}{6}$ ва $\frac{7\pi}{6} > 6$.

27. $D(y) = \left(-\sqrt{3};\ -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Ечиш. $\begin{cases} \sin x - \cos x \geqslant 0, \\ 3 - x^2 > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \geqslant 1, \\ x^2 < 3, \\ \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \geqslant 1, \\ |x| < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}. \end{cases}$$

$n = -1$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} -\frac{3\pi}{4} \leqslant x < -\frac{\pi}{2}, \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < -\frac{\pi}{2}$,

чунки $-\frac{3\pi}{4} < -\sqrt{3}$ ва $-\frac{\pi}{2} < \sqrt{3}$.

$n = 0$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

n нинг қолган қийматларида функция аниқланмаган. 28. $D(y) = (-6; -4) \cup (-3; -2) \cup (0; 1) \cup (2; 3) \cap (5, \infty)$ 29. $D(y) = [-1; 0) \cup \cup (0; \pi/2) \cup (\pi/2; 3]$. Ечиш. Чегараланишларни назарга олсак, қуйидаги системага эга бўламиз:

$-x^2 + 16 > 0,$ — логарифмик функциянинг олиши мумкин бўлган қийматлари;

$\operatorname{tg} x \neq 0,$ — махраж нолга тенг эмас;

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\ (n \in Z),$ — тангенснинг йўл қўядиган қийматлари;

$\left|\frac{\sqrt{x+1}}{2}\right| \leqslant 1,$ — арккосинуснинг қабул қиладиган қийматлари;

$x + 1 \geqslant 0$ — жуфт даражали илдизнинг қабул қиладиган қийматлари.

Бу системани ечамиз:

$$\begin{cases} -4 < x < 4, \\ x \neq \pi n, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \leqslant 3, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \text{бундан} \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x \neq \frac{\pi m}{2},\ n \in Z \end{cases} \quad \text{келиб чиқади.}$$

Агар $m = 0$ ва $m = 1$ бўлса, у ҳолда улар мос $x \neq 0$ ва $x \neq \frac{\pi}{2}$ ларни $-1 \leqslant x \leqslant 3$ кесмадан чиқариб юборилганда қолган нуқталар мажмуаси изланаётган натижани беради. 30. $D(y) =$

$$= \left(-\sqrt{\pi(2n+1)}; -\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}; -\sqrt{2\pi n}\right) \cup$$

$$\cup \left(-\sqrt{\pi}; -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}; -1\right) \cup (0;\ 1).$$

Ечиш. Номаълумнинг олиши мумкин бўлган қийматлари мажмуасини қуйидаги системадан топамиз:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} - 2x > 0, \\ \sin x^2 > 0, \\ \sin x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - x^2}{x} > 0, & (1) \\ 2\pi n < x^2 < \pi(2n + 1), & (2) \\ x^2 \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n & (3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(x-1)}{x} < 0, \\ \sqrt{2\pi n} < |x| < \sqrt{\pi(2n+1)}, \\ x \neq \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ 0 < x < 1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{2\pi n} < x < \sqrt{\pi(2n+1)}\ (x \geqslant 0) \\ -\sqrt{\pi(2n+1)} < x < -\sqrt{2\pi n})(x < 0); \end{array}\right. \\ x \neq \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}. \end{cases}$$

(2) тенгсизликдан кўринадики, n фақат 0, 1, 2, ... қийматлар олиши мумкин.

1-ҳол. $n = 0$ бўлсин, у ҳолда системани қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 0 < x < 1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < \sqrt{\pi} \\ -\sqrt{\pi} < x < 0; \end{array}\right. \\ x \neq \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ -\sqrt{\pi} < x \leq 0, \\ x \neq -\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < x > \sqrt{\pi}, \\ x \neq \sqrt{\pi/2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

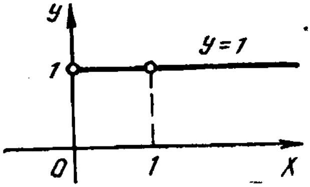
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\sqrt{\pi} < x < -1, \\ x \neq -\sqrt{\pi/2}; \end{cases} \\ 0 < x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{\pi} < x < -\sqrt{\pi/2} \\ -\sqrt{\pi/2} < x < -1 \\ 0 < x < 1. \end{array}\right.$$

2-ҳол. $n = 1, 2, 3, \ldots$ учун (2) системанинг ечими қуйидагича:

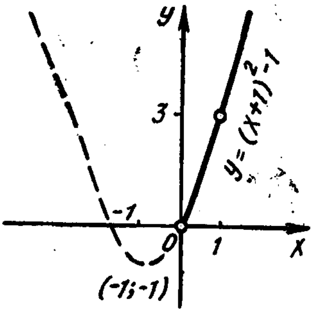
$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{\pi(2n+1)} < x < -\sqrt{2\pi n}, \\ \sqrt{2\pi n} < x < \sqrt{\pi(2n+1)}, \end{array}\right.$$

$x<-1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи оралиққа фақат $-\sqrt{\pi(2n+1)}<x<-\sqrt{2\pi n}$ ечим киради. Шунингдек, бу ечимдан (3) тенгсизлик ечими $x=-\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ ни чиқарилса, у ҳолда қуйидаги жавобни оламиз:

$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{\pi(2n+1)}<x<-\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}<x<-\sqrt{2\pi n}. \end{array}\right. \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$



168- расм.



169- расм.

31. $\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi;\ \ \frac{5\pi}{6}+2n\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi;\ \ \frac{7\pi}{6}+2n\pi\right)$, $n\in Z$.

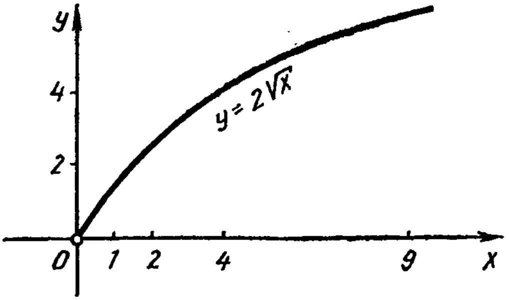
Ечиш. Қасрнинг сурати x нинг барча қийматлари учун аниқланган, чунки $x^2+4>0$. Функциянинг аниқланиш соҳаси махражнинг олиши мумкин бўлган қийматларидан иборат бўлади, яъни

$$\sin^2 x-\sin x+0{,}25\neq 0\Leftrightarrow(\sin x-0{,}5)^2\neq 0\Leftrightarrow|\sin x-0{,}5|\neq 0\Leftrightarrow$$

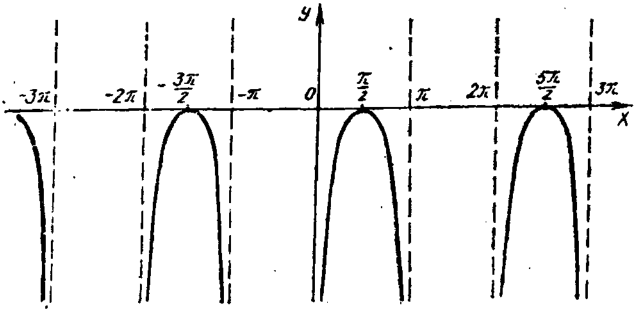
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x-0{,}5>0,\\ \sin x-0{,}5<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x>0{,}5\\ \sin x<0{,}5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}+2n\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2n\pi\\ \frac{5\pi}{6}+2n\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2n\pi,\ n\in Z.\end{array}\right.$$

32. (0; 1/2) $\cup$ (1/2; 1). Ечиш. $\left\{\begin{array}{l}2x>0,\\ 2x\neq 1,\\ 0<\arccos(2x-1)\leqslant\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>0,\\ x\neq\frac{1}{2},\\ -1\leqslant 2x-1<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>0,\\ x\neq\frac{1}{2},\\ 0\leqslant 2x<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>0,\\ x\neq\frac{1}{2},\\ 0<x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}<x<1.\end{array}\right.$$

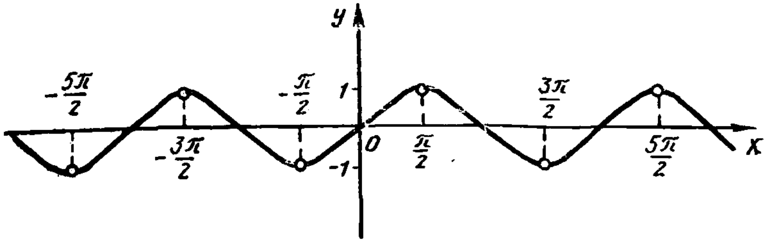


170- расм.

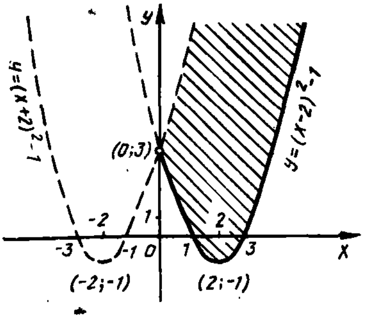


171- расм.

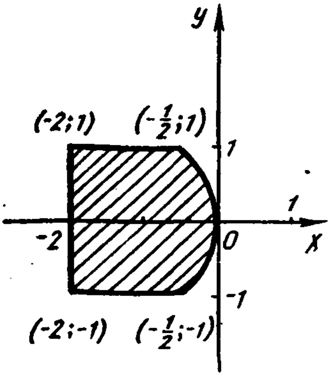
33. 168- расм. **34**. 169- расм. **35.** 170- расм. **36.** 171- расм. Кўрсатма. Функциянинг аниқланиш соҳаси: $0 < \sin x \leqslant 1$. $\sin x > 0 \Leftrightarrow 2\pi n < x < \pi(2n+1)$. Функция 2π даврга эга бўлгани учун уни бирор бир давр оралиғида (яъни маънога эга бўладиган) текшириш етарлидир. $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ярим оралиқда синус 0 дан 1 гача ўсади, $\log_2 \sin x$ эса $-\infty$ дан 0 гача ўсади. $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$ ярим оралиқда синус 1 дан 0 гача камаяди, $\log_2 \sin x$ эса 0 дан $-\infty$ гача камаяди. $\sin x \leqslant 1$ тенгсизликдан $y \leqslant 0$ ҳамда $y = 0$ $\left(\text{яъни } x = \frac{\pi}{2}\right)$ функциянинг энг катта қиймати эканлиги келиб чиқади. **37.** Кўрсатма. Функциянинг аниқланиш соҳаси $1 - x > 0$ шартдан топилади, бундан $x=1$. $x \to 1$ да $y \to \infty$. Бундан $x = 1$ тўғри чизиқ вертикал асимптота эканлиги келиб чиқади. График координаталар боши орқали ўтади, чунки $x = 0$ бўлса, у ҳолда $y = 0$ бўлади. Шунга кўра графикни ясаймиз. **38.** 172- расм. Кўрсатма. Агар $\cos x = 0$, яъни $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ бўлса,



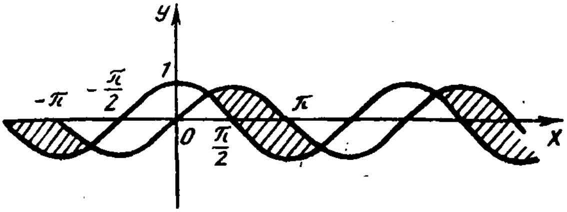
172- расм.



173- расм.



174- расм.



175- расм.

tg x ўз маъносини йўқотади. Шу сабабли функция $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ да аниқланган. Агар cos $x \neq 0$ бўлса, у ҳолда $y = \sin x$ бўлади. Шундай қилиб, берилган функциянинг графиги синусоида бўлиб, унга $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in Z$) нуқталар кирмайди. **39.** 173- расм. **40.** 174- расм. **41.** $(-\infty; \ -3) \cup (3; \ 5)$. Кўрсатма. Арккотангенс камаювчи функция, шунинг учун $\operatorname{arcctg} \frac{x}{5} > \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arcctg} \frac{x}{5}\right) > \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$; $\frac{x}{5} < 1$; $x < 5$. Система биринчи тенгсизлигини эътиборга олсак, изланаётган ечим келиб чиқади. **42.** 175- расм.

АДАБИЁТ

1. Блох А. Ш., Трухан Л. Т. Неравенства, Минск, «Народная асвета», 1972.
2. Зорин В. В., Фискевич Т. Т. Пособие по математике для поступающих в вузы, М., «Высшая школа», 1980.
3. Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф. Сборник конкурсных задач по математике, М., «Наука», 1986.
4. Шувалов Э. З. и др. Повторим математику. Изд. 2-е, доп., Учебное пособие для поступающих в вузы, М., «Высшая школа», 1974.
5. Гайдуков И. И. Абсолютная величина, М., «Просвещение», 1964.
6. Бородуля И. Т. Показательная и логарифмическая функции (задачи и упражнения), М., «Просвещение», 1984.
7. Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии, М., «Высшая школа», 1959.
8. Талочкин П. Б. Неравенства и уравнения. Упражнения и методические указания Из опыта работы учителя. М., Просвещение», 1970.
9. Лозанский Э. Д. Математика поступающим в вузы. Киев, «Выща школа», 1976.
10. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по решению математических задач, М., «Просвещение», 1984.
11. Сборник задач по математике для поступающих в вузы, изд. 2-е, под. редакцией А. И. Приленко, М., «Высшая школа», 1989.
12. Потапов М. К., Александров В. В., Пасиченко П. И. Алгебра и анализ элементарных функций, М., «Наука», 1980.
13. Сивашинский И. Х. Элементарные функции и графики, М., «Наука», 1968.
14. Алгебра ва анализ асослари, ўрта мактабнинг 10—11-синфлари учун ўқув қўлланмаси, Т., «Ўқитувчи» 1990.

МУНДАРИЖА

АБДУВАҲОБ АБДУРАҲМОНОВИЧ РАҲИМҚОРИЕВ

ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ГРАФИК УСУЛДА ЕЧИШ

II ҚИСМ

Ўқитувчилар учун қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1997

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Муҳаррир *С. Бекбоева*
Расмлар муҳаррири *М. Кудряшова*
Техник муҳаррир *Т. Грешникова*
Мусаҳҳиҳа *Л. Мирзаахмедова*

ИБ № 6558

Теришга берилди 19.07.94. Босишга рухсат этилди 01.02.97. Бичими 84×108$^1/_{32}$. Литер. гарн. Кегли 10,8 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 15,54. Шартли кр.-отт. 15,75. Нашр. л. 11,88. 4000 нусхада босилди. Буюртма 2819.

«Ўқитувчи» нашриёти, Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09-74-94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Тошполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1997.