MATEMATIKA 11

ALGEBRA HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ
GEOMETRIYA
I BÓLIM

Ulıwma orta bilimlendiriw mekteplerinin 11-klasları hám orta arnawlı, kásip-óner bilimlendiriw mákemeleri ushın sabaqlıq

Ózbekstan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrligi tárepinen tastıyqlanǵan

1-basılımı

TASHKENT
2018

UOK 51(075.32)
KBK 22.1ya72
M 88

Algebra hám analiz tiykarları bóliminiń avtorları:

Mirzaahmedov M.A., Ismailov Sh.N., Amanov A.Q.

Geometriya bóliminiń avtorı:

Haydarov B.Q.

Pikir bildiriwshiler:

R.B. Beshimov – Mirza Ulugbek atındagı Ózbekstan Milliy universiteti «Geometriya hám topologiya» kafedrası baslıgı, fizika-matematika ilimleri doktorı.

Q.S. Jumaniyazov – Nizamiy atındagı TMPU Fizika-matematika fakulteti «Matematikanı oqıtıw metodikası» kafedrası docenti, pedagogika ilimleriniń kandidatı.

R.O. Rozimov – Tashkent qalası, Sergeli rayonı 237-ulıwma bilim beriw mektebi matematika pani oqıtıwshısı.

S.B. Jumaniyozova – ÓzR Bilimlendiriw orayı metodisti.

S.R. Sumberdiyeva – Sergeli rayonı 6-qánigelestirilgen mektebi matematika páni oqıtıwshısı.

Qaraqalpaqsha awdarmasına pikir bildiriwshi:

Zaxida Úsenova – QR XBM Respublikalıq oqıw-metodikalıq orayı anıq pán metodisti

Sabaqlıqtıń "Algebra hám analiz tiykarları" bóliminde paydalanılgan belgiler hám olardıń mánisi:

△ – máseleni sheshiw (dálillew) baslandı

▲ – máseleni sheshiw (dálillew) tamamlandı

! – baqlaw jumısları hám test (sınaq) shınıgıwları

? – soraw hám tapsırmalar

■ – tiykargı maglıwmat

* – quramalıraq shınıgıwlar

ISBN 978-9943-5127-8-8

© JSHJ «ZAMIN NASHR», 2018
© Barlıq huqıqlar qorgalgan

I BAP

TUWÍNDÍ HÁM ONÍŃ QOLLANÍLÍWLARÍ

1–2 ÓZGERIWSHI MUǴDARLAR ARTTÍRMALARÍNÍŃ QATNASÍ HÁM ONÍŃ MÁNISI. URÍNBANÍŃ ANÍQLAMASÍ. FUNKCIYA ARTTÍRMASÍ

Ózgeriwshi muǵdarlar arttırmalarınıń qatnası

Túrli ólshem birliklerine iye bolǵan eki ózgeriwshi muǵdar qatnasın esaplaw, insan ómirinde tez-tez ushırap turadı.

Máselen, avtomashinanıń ***tezligi*** onıń júrgen jolınıń waqıtqa qatnası *km/h* yaki *m/s* larda ólshenedi, janılǵı sarıplawı bolsa *km/litr* yaki 100 *km/litr* lerde ólshenedi.

Tap sonday, basketbolshınıń uqıplılıǵı bir oyında toplaǵan ochkolar sanı menen belgilenedi.

Mısal. Oqıw óndirislik kompleksinde 11-klass oqıwshıları arasında tekst teriwdiń sapası hám tezligi boyınsha sınaw ótkizilmekte.

Kárim 3 minutta 213 sózdi terip, 6 imlá qáteligine, al Nargiza 4 minutta 260 sózdi terip, 7 imlá qáteligine jol qoyǵanlıǵı belgili boldı. Olardıń nátiyjelerin salıstırıń.

Δ Hár bir oqıwshı ushın tiyisli qatnaslardı dúzemiz:

Kárim:

Tekst teriwdiń tezligi $\dfrac{213\text{ sóz}}{3\text{ min}} = 71\dfrac{\text{sóz}}{\text{min}}$;

Tekst teriwdiń sapası $\dfrac{6\text{qáte}}{213\text{sóz}} \approx 0,0282\dfrac{\text{qáte}}{\text{sóz}}$;

Nargiza:

Tekst teriwdiń tezligi $\dfrac{260\text{ sóz}}{4\text{ min}} = 65\dfrac{\text{sóz}}{\text{min}}$;

Tekst teriwdiń sapası $\dfrac{7\text{ qáte}}{260\text{ sóz}} \approx 0{,}0269\dfrac{\text{qáte}}{\text{sóz}}$; .

Demek, Kárim tekstti Nargizaǵa qaraǵanda tezirek tergen bolsa da, Nargiza bul jumıstı sapalıraq orınlaǵan. ▲

Shınıǵıwlar

1. Puls jiyiligin tekseriw ushın barmaqlardıń ushı arteriya tamırı ótetuǵın jerge qoyıladı hám soqqılar sanın seziw ushın usı jeri basıladı.

Madina pulsti ólshegende bir minutta 67 soqqını sezdi.

a) Puls jiyiliginiń mánisin túsindiriń. Ol qanday shama (belgi)?

b) Har saatta Madinanıń júregi neshe márte uradı?

2. Kárim úyinde 14 bet tekst terip, 8 imla qátege jol qoydı. Eger 1 bette ortasha 380 sóz bolsa:

a) Kárimniń tekst teriw sapasın anıqlań hám joqarıdaǵı mısalda alınǵan nátiyje menen salıstırıń. Kárimniń tekst teriw sapası jaqsılandı ma?

b) Kárim 100 sóz tergende ortasha qansha qáte jiberedi?

3. Márip 12 saat islep 148 m 20 cm, al Murat 13 saat islep 157 m 95 cm salma tazaladı. Olardıń miynet ónimdarlıqların salıstırıń.

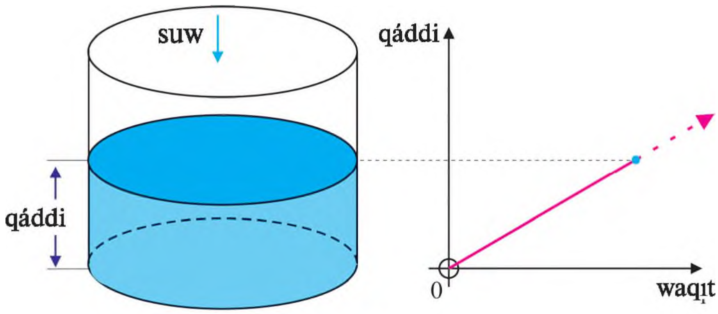
4. Avtomashinanıń jańa avtoshina protektorınıń tereńligi 8 mm di quraydı. 32178 km júrgennen soń jemiriliw nátiyjesinde shina protektorınıń tereńligi 2,3 mm bolǵanlıǵı belgili boldı.

a) 1 km aralıq júrilgende shina protektorınıń tereńligi qalay ózgeredi?

b) 10000 km aralıq júrilgende she?

5. Madina Qarshı qalasınan saat 11:43 te shıǵıp saat 15:49 da Gúlistan qalasına jetip keldi. Eger ol 350 km aralıq júrgen bolsa, onıń ortasha tezligi neshe $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ boldı?

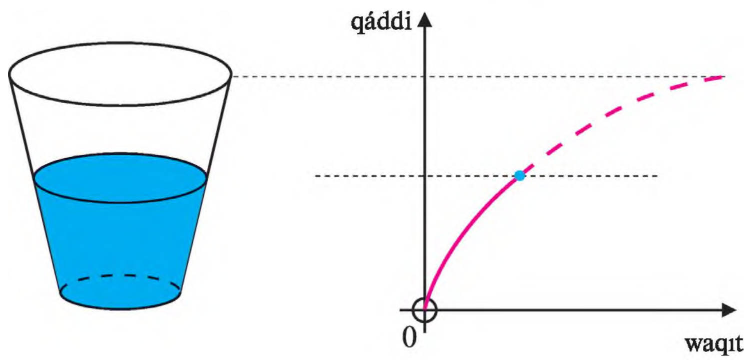
Mısal. Cilindr formasındaǵı ıdıs suw menen birdey tezlikte toltırılmaqta. Bunda cilindrli ıdıs ishine waqıtqa proporcional bolǵan suw (kólemi) quyılıp atırǵanlıǵı ushın suw qáddiniń (biyikliginiń) waqıtqa baylanısı sızıqlı funkciya kórinisinde boladı (1-súwretke qarań).



1-súwret.

Bul jaǵdayda ıdıstaǵı suw qáddiniń waqıtqa qatnası (yaǵnıy qáddiniń *ózgeriw tezligi*) turaqlı san bolıp qala beredi.

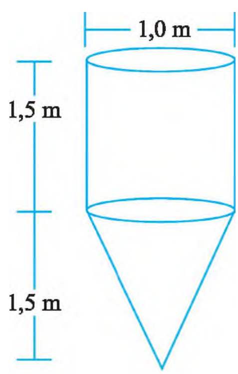
Endi basqa formadaǵı ıdıstı qaraymız (2-súwret):



2-súwret.

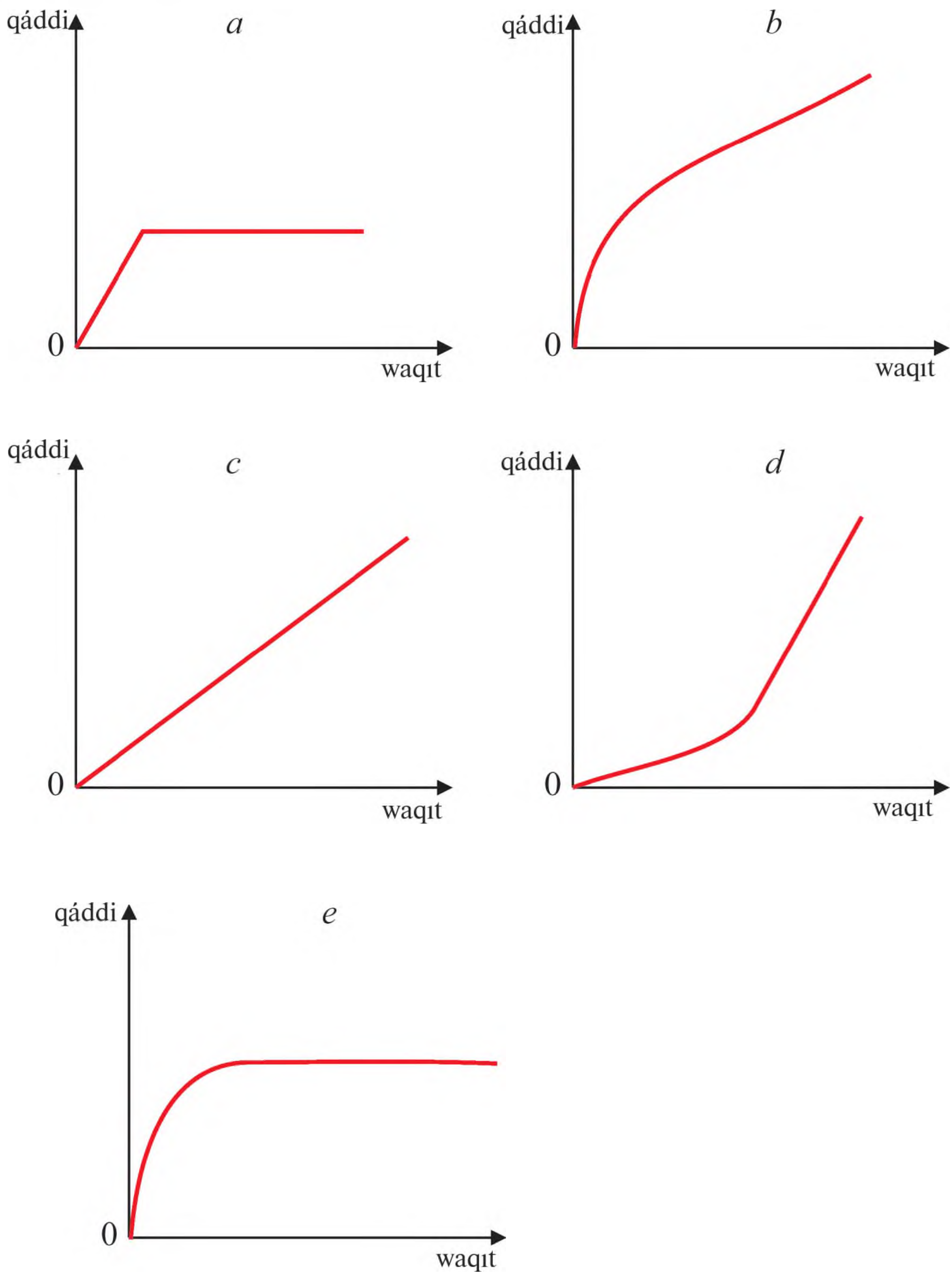
2-súwrette suw qáddiniń ózgeriw tezliginiń waqıtqa qatnası sáwlelengen.

1-soraw. 3-súwrette suw quyıwǵa mólsherlengen ıdıs kórsetilgen.



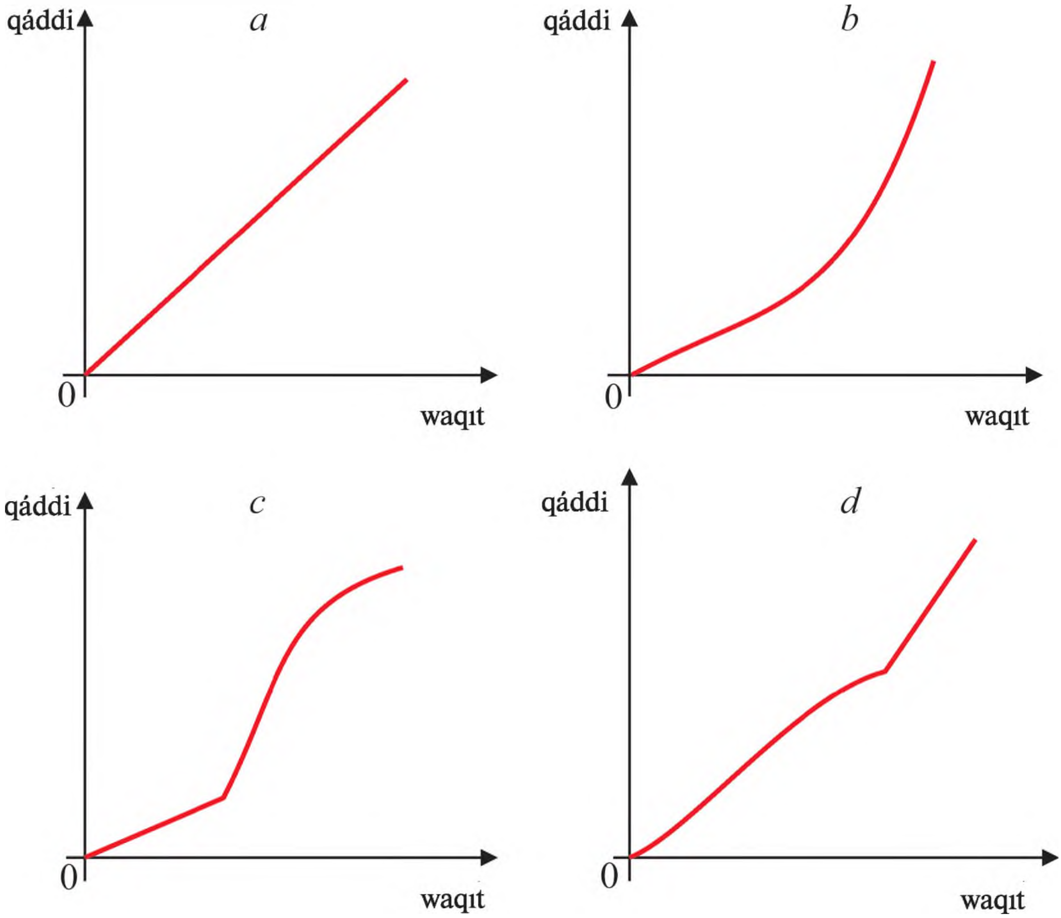
3-súwret.

Dáslep onda suw joq edi. Keyin ol «bir sekundta bir litr» tezlikte toltırıla basladı. Suw qáddiniń waqıtqa qaray ózgeriwi 4-súwrettegi qaysı grafikte durıs kórsetilgen?



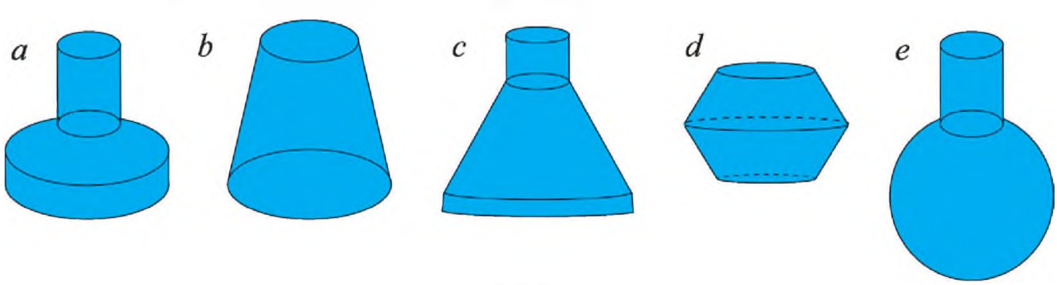
4-súwret.

2-soraw. Suw qáddiniń waqıtqa qaray ózgeriwi 5-súwrettegi grafiklerde berilgen:



5-súwret.

Olar 6-súwrettegi qaysı ıdıslarǵa sáykes keledi?



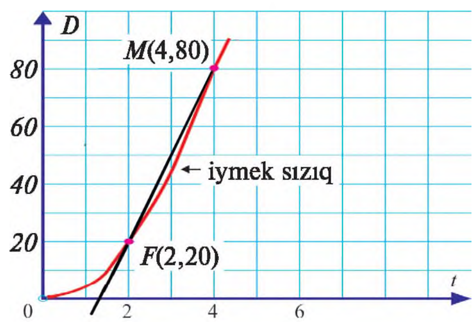
6-súwret.

Ózgeriwdiń ortasha tezligi

Eki ózgeriwshi muǵdardıń bir-birine baylanısı sızıqlı funkciya kórinisinde bolsa, bul muǵdarlar arttırmalarınıń qatnası turaqlı san boladı.

Eki ózgeriwshi muǵdardıń bir-birine baylanısı sızıqlı funkciya kórinisinde bolmasa, biz bul ózgeriwshi muǵdarlardıń berilgen aralıqtaǵı ortasha qatnasın taba alamız. Eger aralıq hár túrli alınsa, esaplanǵan ortasha qatnaslar da hár túrli boladı.

1-mısal. Biyik imarattıń tóbesinen páske qarap top atılmaqta. Toptıń t waqıt dawamında imarattıń tóbesinen uzaqlasıwı (pásleniwi) 7-súwrettegi grafikte kórsetilgen:



7-súwret.

Δ Grafikte $t=2$ sekundqa sáykes bolǵan F noqattı da onnan parıqlı (máselen, $t=4$ sekundqa sáykes bolǵan) M noqattı belgileyik. $2 \leq t \leq 4$ waqıt aralıǵında ortasha tezlik

$$\frac{(80-20)m}{(4-2)s} = 30\frac{m}{s}$$ qa teń ekenligin tabamız.

FM kesindiniń múyeshlik koefficienti 30 ǵa teń ekenligi kórinip tur. $\blacktriangle$

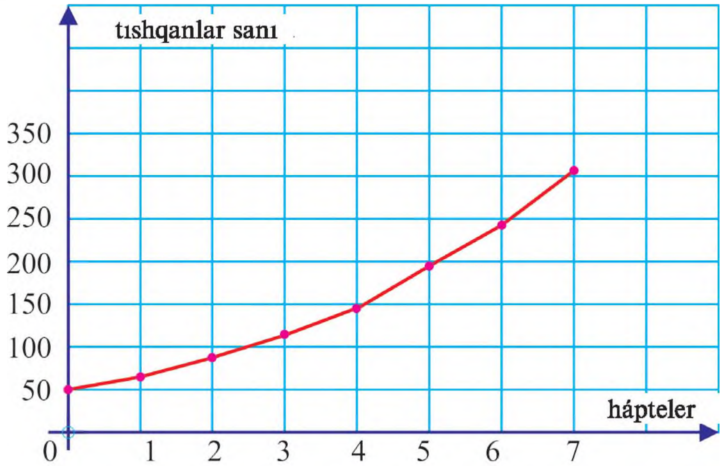
Soraw. F noqattı turaqlı dep esaplap, t nıń tómende berilgen mánislerine sáykes bolǵan M noqatlar ushın FM kesindilerdiń múyeshlik koefficientlerin esaplap, kestelerdi toltırıń:

t	múyeshlik koefficienti
0	
1,5	
1,9	
1,99	

t	múyeshlik koefficienti
3	
2,5	
2,1	
2,01	

Qanday juwmaqqa keldińiz?

2-mısal. Populyaciyadaǵı tıshqanlar sanı hápteler ótiwi menen tómendegishe ózgeredi (8-súwret):



8-súwret.

3- hám 6-hápte aralıǵında tıshqanlar sanı ortasha qalay ózgergen? 7 háptelik waqıt aralıǵında she?

∆ Tıshqanlar populyaciyasınıń ósiw tezligi

$\dfrac{(240-110)\text{ tıshqan}}{(6-3)\text{ hápte}} \approx 43\dfrac{\text{tıshqan}}{\text{hápte}}$, yaǵnıy 3- hám 6- hápte aralıǵında tıshqanlar sanı háptesine ortasha 43 ke kóbeygen.

Tap usınday 7 háptede $\dfrac{(315-50)\text{ tıshqan}}{(7-0)\text{ hápte}} \approx 38\dfrac{\text{tıshqan}}{\text{hápte}}$.

7 hápte aralıǵında tıshqanlar sanı háptesine ortasha 38 ge kóbeygen. ▲

Ulıwma jaǵdayda: x muǵdar a dan b ǵa shekem ózgergende $y=f(x)$ muǵdar ózgeriwiniń **ortasha tezligi**

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

arttırmalar qatnasına teń, bul jerde $f(b)-f(a)$ – funkciya arttırması, al $b-a$ argument arttırması.

$h=b-a$ dep belgilesek, ortasha tezlik $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ kórinisti aladı.

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ bólsheginiń alımın $y=f(x)$ *funkciyanıń* argumenti x tiń h *arttırmasına* sáykes keliwshi *arttırması* dep ataw qabıl etilgen. Bólshektiń ózin bolsa *ayırmalı qatnas* dep ataydı.

Shınıǵıwlar

6. Noqattıń tuwrı boylap júrgen jolı waqıtqa qalay baylanısqanlıǵı 9-súwrettegi grafikte kórsetilgen.

9-súwret.

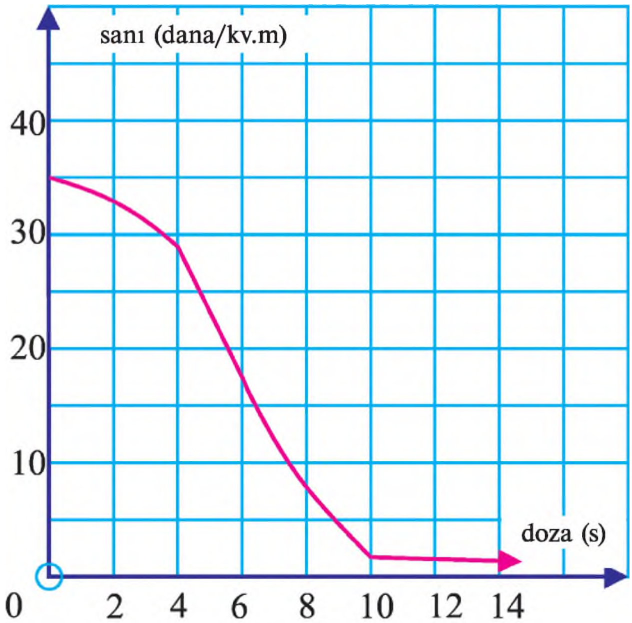
Noqattıń

a) dáslepki 4 sekund;

b) sońǵı 4 sekund;

c) 8 sekund dawamındaǵı ortasha tezligin tabıń.

7. Atızǵa hár túrli muǵdardaǵı (dozadaǵı) dári menen islew berilgende 1 m^2 ta bar bolǵan zıyanlı jánlikler sanınıń ózgeriwi 10-súwrettegi grafikte kórsetilgen.



10-súwret.

a) 1) doza 0 grammnan 10 grammǵa shekem arttırılsa; 2) 4 grammnan 7 grammǵa shekem arttırılsa, 1 m^2 ta bar bolǵan zıyanlı jánlikler sanınıń ózgeriwin tabıń.

b) doza 10 grammnan 14 grammǵa shekem arttırılsa, qanday qubılıs júz beredi?

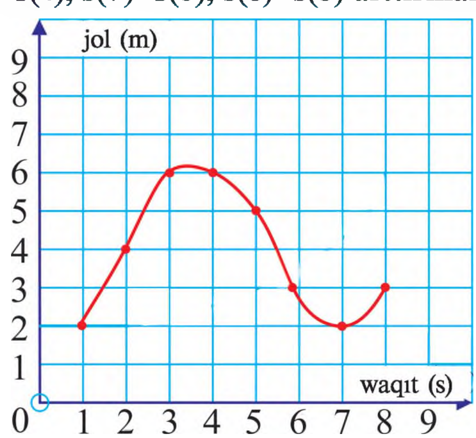
2) Materiallıq noqattıń tuwrı sızıq boyınsha qozǵalıs nızamı *s(t)* nıń grafigi súwrette berilgen.

a) s(2), s(3), s(5), s(7) sanlar neshege teń?

b) Qaysı aralıqlarda funkciya ósiwshi?

c) Qaysı aralıqta funkciya kemeyiwshi?

d) s(3)–s(1), s(5)–s(4), s(7)–s(6), s(8)–s(6) arttırmalardı esaplań.



3–4 LIMIT HAQQÍNDA TÚSINIK

x tiń mánislerinde 2 den kishi bolıp, 2 ge jaqınlasıp barǵanda $f(x)=x^2$ funkciyanıń mánisleri kestesin qarayıq:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	1	3,61	3,9601	≈ 3,996 00	≈ 3,999 60

Kesteden kórinip turǵanınday, x tiń mánisleri 2 ge shekem jaqın bola berse (*jaqınlassa*), $f(x)$ funkciyanıń mánisleri 4 sanına jaqınlasa beredi.

Bunday jaǵdayda x argument (ózgeriwshi) 2 ge *shepten jaqınlasqanda* $f(x)$ tiń mánisleri 4 sanına *jaqınlasadı* deymiz.

Endi x tiń mánisleri 2 den úlken bolıp, 2 ge jaqınlasıp barǵandaǵı $f(x)=x^2$ funkciyanıń mánisleri kestesin qarayıq:

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	9	4,41	4,0401	≈ 4,004 00	≈ 4,000 40

Bunday jaǵdayda x argument 2 ge *ońnan jaqınlasqanda,* $f(x)$ funkciyanıń mánisleri 4 sanına *jaqınlasadı* deymiz.

Joqarıdaǵı eki jaǵdaydı ulıwmalastırıp, x argument 2 ge *jaqınlasqanda,* $f(x)$ tiń mánisleri 4 sanına *jaqınlasadı* deymiz hám bunı tómendegishe jazamız:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Bul jazıw bılay oqıladı: x argument 2 ge jaqınlasqanda, $f(x)=x^2$ funkciyanıń *limiti (shegi)* 4 ke teń.

Ulıwma jaǵdayda *funkciya limiti (shegi)* túsinigine tómendegishe qatnas jasaladı:

$x \neq a$ bolıp, onıń mánisleri a sanına jaqınlassa, $f(x)$ tiń mánisleri A sanına *jaqınlassın.* Bul jaǵdayda A sanın x a ǵa *jaqınlasqanda* $f(x)$ funkciyanıń *shegi* delinedi hám bılay belgilenedi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Ayırım jaǵdaylarda bul jaǵdaydı x tiń mánisleri a ǵa *umtılǵanda* $f(x)$ funkciya A ǵa *umtıladı,* deymiz.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ jazıw ornına $x \to a$ da $f(x) \to A$ jazıw da qóllanıladı .

Esletpe. x a ǵa *umtılǵanda* $x \neq a$ shártiniń orınlanıw áhmiyetliligin aytıp ótiw orınlı.

Mısal. $x \to 0$ bolǵanda $f(x) = \dfrac{5x + x^2}{x}$ funkciyanıń shegin tabıń.

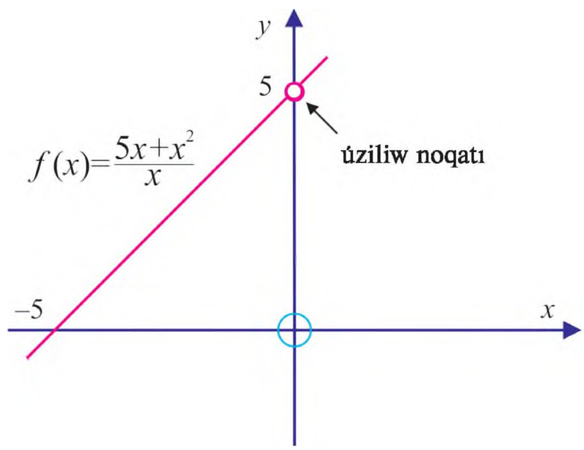
Meyli, Δ $x \neq 0$ shárti orınlanbasın, yaǵnıy $x=0$ bolsın. $x=0$ mánisti $f(x)$ qa tikkeley qoyıp kórsek, $\dfrac{0}{0}$ kórinisindegi *anıq emeslikk*e iye bolamız.

Basqa tárepten, $f(x) = \dfrac{x(5+x)}{x}$ bolǵanı ushın bul funkciya usı

$$f(x) = \begin{cases} 5 + x, \text{ eger } x \neq 0 \text{ bolsa} \\ \text{anıqlanbaǵan, eger } x = 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

kórinisin aladı.

$y=f(x)$ funkciyanıń grafigi (0; 5) koordinatalı noqatı «alıp taslanǵan» $y=x + 5$ tuwrı sızıq kórinisinde boladı (11-súwret):



11-súwret.

(0; 5) koordinatalı noqat $y=f(x)$ funkciyanıń *úziliw noqatı* delinedi.

Kórinip turǵanınday, bul noqattan parıqlı bolǵan noqatlarda x tiń mánisleri 0 ge *umtılǵanda* $f(x)$ funkciyanıń sáykes mánisleri 5 ke umtıladı, yaǵnıy onıń *shegi* bar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x + x^2}{x} = 5. \ \blacktriangle$$

Ámelde, funkciya shegin tabıw ushın, kerek bolsa, tiyisli ápiwayılastırıwlardı orınlaw máqsetke muwapıq.

1-mısal. Sheklerdi esaplań:

a) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+3x}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

△ a) x tıń mánisleri 2 ge *umtılǵanda* x^2 tıń mánisleri 4 ke umtıladı, yaǵnıy $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

b) $x \neq 0$ bolǵanı ushın

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+3)}{x} = \lim_{x \to 0}(x+3) = 3.$$

c) $x \neq 3$ bolǵanı ushın

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6. \ \blacktriangle$$

Shınıǵıwlar

Shekti esaplań (**8–11**):

8. a) $\lim\limits_{x \to 3}(x+4)$ b) $\lim\limits_{x \to -1}(5-2x)$ c) $\lim\limits_{x \to 4}(3x-1)$

d) $\lim\limits_{x \to 2}(5x^2-3x+2)$ e) $\lim\limits_{h \to 0} h^2(1-h)$ f) $\lim\limits_{x \to 0}(x^2+5)$.

9. a) $\lim\limits_{x \to 5} 5$ b) $\lim\limits_{h \to 2} 7$ c) $\lim\limits_{x \to 0} c$, c — turaqlı san.

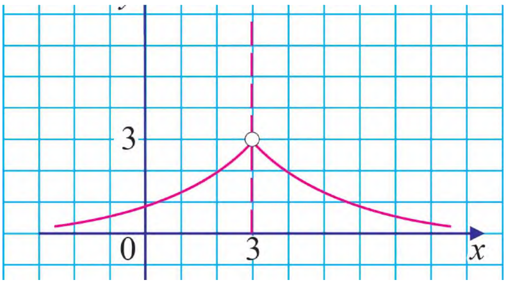
10. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x}{x}$ b) $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{h^2+5h}{h}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x+1}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x}$.

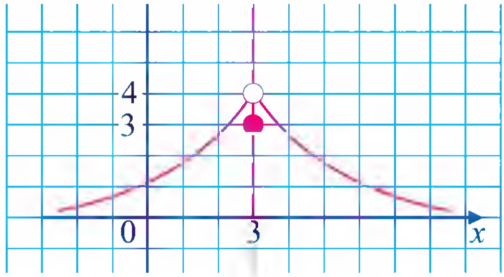
11. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-5x}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2-x}{x}$

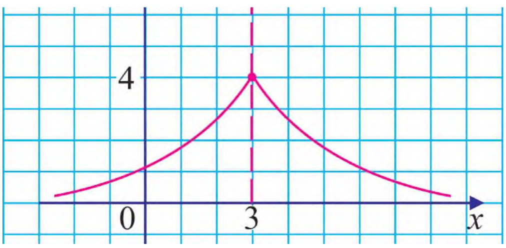
d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h^2+6h}{h}$ e) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^2-4h}{h}$ f) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3-8h}{h}$

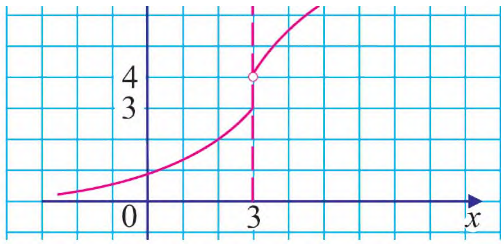
g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-x}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$ i) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$.

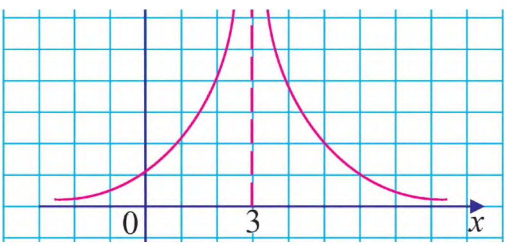
12. Tómendegi funkciyalardan qaysı biri $x \to 3$ de shekke iye? Usı shekti tabıń.

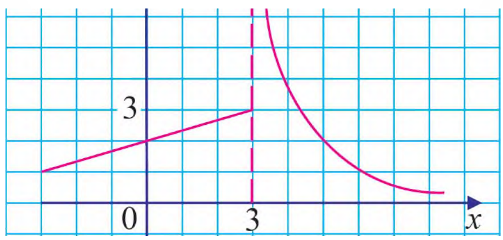


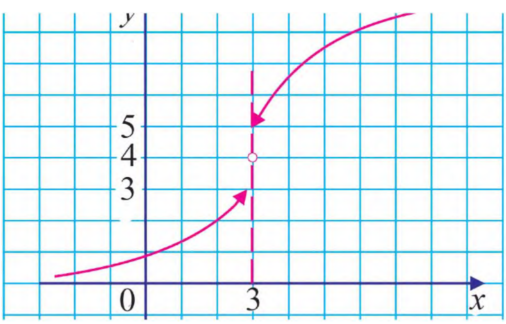


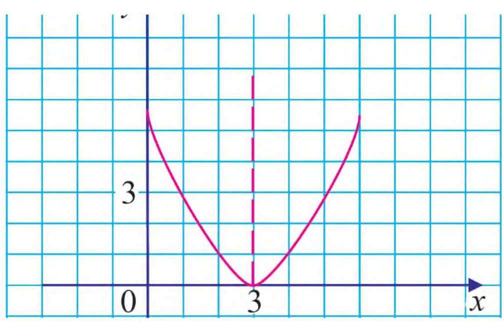






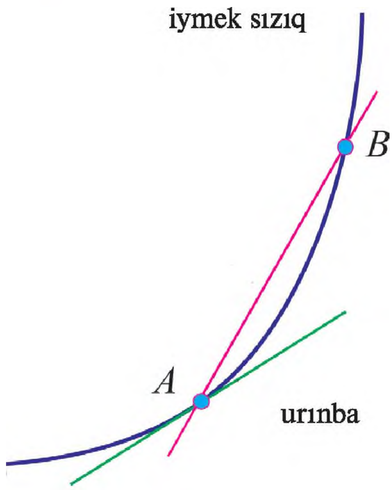




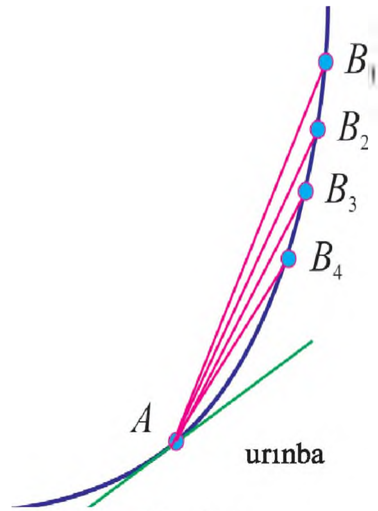


5–6 TUWÍNDÍ, ONIŃ GEOMETRIYALÍQ HÁM FIZIKALÍQ MÁNISI

12-súwrette iymek sızıq, kesindi hám urınba súwretlengen.



12-súwret.

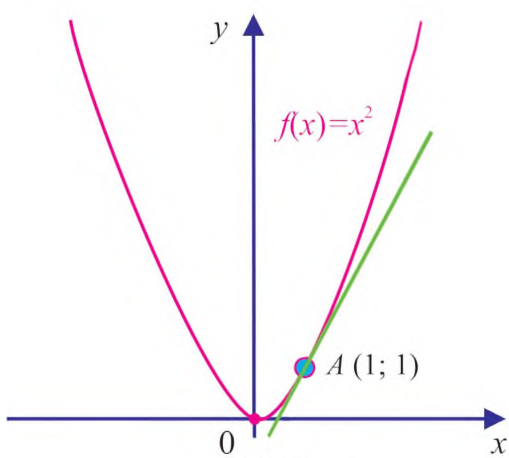


13-súwret.

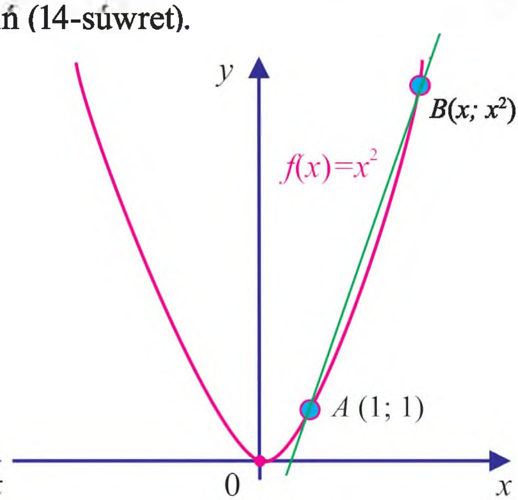
B noqat B_1, B_2, ... jaǵdaylardı izbe-iz qabıl etip, *A* noqatqa *iymek sızıq boylap* jaqınlassa, (13-súwret), sáykes kesiwshilerdiń iymek sızıqqa *A* noqatında ótkizilgen urınba jaǵdayın alıwǵa umtılıwın *intuitivlik tárizde* qabıl etemiz:

Bul jaǵdayda *AB* tuwrınıń múyeshlik koefficienti urınbanıń múyeshlik koefficientine jaqınlasatuǵını anıq.

1-mısal. $f(x)=x^2$ funkciyanıń grafigine $A(1;\ 1)$ noqatında urınatuǵın tuwrınıń múyeshlik koefficientin tabıń (14-súwret).



14-súwret.



15-súwret.

∆ $f(x)=x^2$ funkciyanıń grafigine tiyisli qálegen $B(x,\ x^2)$ noqattı kórip shıǵayıq (15-súwret).

AB tuwrınıń múyeshlik koefficienti

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \text{ yaki } \frac{x^2-1}{x-1} \text{ ge teń.}$$

B noqat A noqatqa iymek sızıq boylap jaqınlasqanda, x tıń mánisi 1 ge umtıladı, bunda $x \neq 1$.

Demek, AB tuwrınıń múyeshlik koefficienti urınbanıń múyeshlik koefficienti k ǵa umtıladı, yaǵnıy:

$$k=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2.$$

Solay etip, $k=2$ ▲

$y=f(x)$ funkciya berilgen bolsın. Onıń grafigine tiyisli bolǵan $A(x, f(x))$ hám $B(x+h, f(x+h))$ noqatlardı qarayıq (16-súwret).

AB tuwrınıń múyeshlik koefficienti

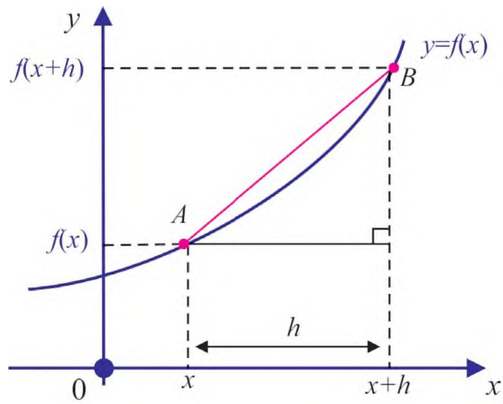
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ayırmalı qatnasqa teń.

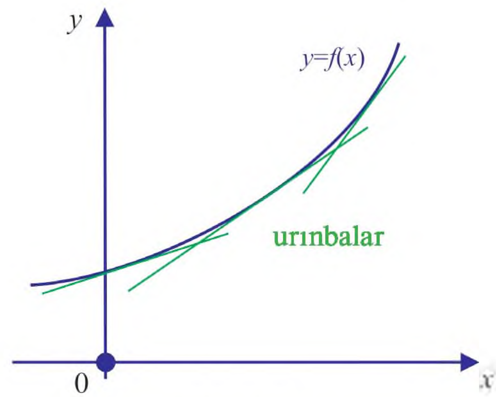
B noqat A noqatqa iymek sızıq boylap jaqınlasqanda $h\to0$, yaǵnıy h arttırma nolge umtıladı, al AB kesindi funkciya grafigine A noqatında ótkizilgen urınbaǵa umtıladı.

Sonıń menen birge, AB tuwrınıń múyeshlik koefficienti urınbanıń múyeshlik koefficientine jaqınlasadı.

Basqasha aytqanda, h tıń mánisi 0 ge umtılǵanda qálegen $(x,\ f(x))$ noqatında ótkizilgen urınbanıń múyeshlik koefficenti $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ayırmalı qatnastıń shek mánisine, yaǵnıy $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ mániske teń boladı.



16-súwret.



17-súwret.

x tıń usı shek bar bolǵan qálegen mánisine funkciya grafigine $(x, f(x))$ noqatında ótkizilgen urınbanıń múyeshlik koefficientiniń jalǵız mánisin sáykes qoyıw múmkin (17-súwret).

Demek, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ formula jańa funkciyanı ańlatadı.

Mine, usı funkciya $y=f(x)$ funkciyanıń **tuwındı funkciyası**, yaki ápiwayı qılıp **tuwındısı** dep ataladı.

Anıqlama. $y=f(x)$ funkciyanıń **tuwındısı** dep tómendegi shekke (Eger ol bar bolsa) aytıladı:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (1)$$

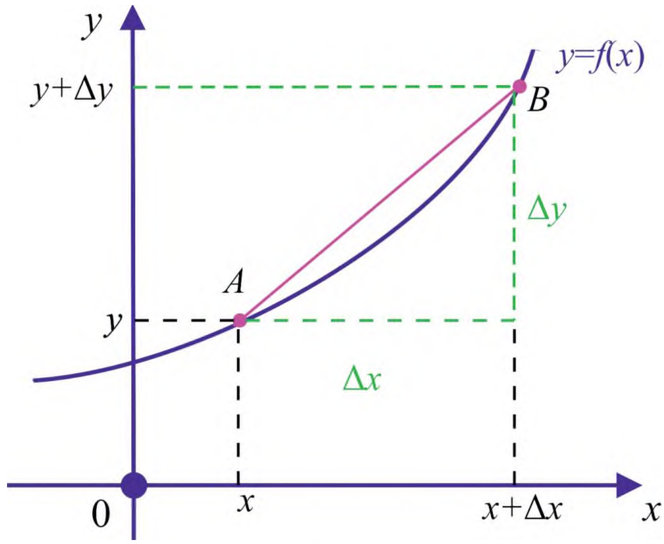
Ádette $y=f(x)$ funkciyanıń tuwındısı $f'(x)$ kórinisinde belgilenedi. Tuwındını tabıw ámeli *differenciallaw* delinedi.

$f'(x)$ belgilew ornına $\frac{dy}{dx}$ kórinisinde belgilew de qabıl etilgen.

Bul belgilewdiń «bólshek» kórinisinde ekenligin tómendegishe túsindiriw múmkin.

Eger arttırmalardı $h=\Delta x$, $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$ dep belgilesek,

$f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tan tómendegige iye bolamız (18-súwret): $f\ f'(x)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$.



18-súwret.

Joqarıdaǵı pikirlerden sonday juwmaqqa kelemiz: $y=f(x)$ funkciya tuwındısınıń x_0 noqattaǵı mánisi funkciya grafigine usı noqatta ótkizilgen urınbanıń múyeshlik koefficientine teń. Tuwındınıń *geometriyalıq mánisi* usıdan ibárat.

2-mısal. Materiallıq noqat $s=s(t)$ (s – metrlerde, t – sekundlarda ólshenedi) nızamǵa muwapıq tuwrı sızıq boylap qozǵalmaqta. Usı materiallıq noqattıń waqıttıń t momentindegi (máwritindegi) tezligi $v(t)$ nı tabıń.

Δ Momentlik tezlik noqattıń kishi waqıt aralıǵı Δt daǵı ortasha tezligi $v(t)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ ǵa shama menen teń. Δt nolge umtılǵanda bir zamatlıq tezlik hám ortasha tezlik arasındaǵı parıq ta nolge umtıladı. Demek, materiallıq noqattıń t momenttegi bir zamatlıq tezligi

$$v(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t) \ \blacktriangle$$

Solay etip, t momenttegi bir zamatlıq tezlik noqattıń qozǵalıs nızamı $s(t)$ funkciyasınan alınǵan tuwındıǵa teń eken.

Tuwındınıń fizikalıq *mánisi,* mine, usıdan ibárat. Ulıwma aytqanda, *tuwındı funkciyanıń ózgeriw tezligi bolıp tabıladı.*

Mısallar

Tuwındı anıqlamasınan paydalanıp, funkciyalardıń tuwındısın tabıń.

1. $f(x)=x^2$ **2.** $f(x)=5$ **3.** $f(x)=x^3-7x+5$

4. $f(x)=x^4$ **5.** $f(x)=\frac{1}{x}$ **6.** $f(x)=\sqrt{x}$ 7. $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Δ **1.** $h\neq0$ bolǵanı ushın

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x.$$

2. $h\neq0$ bolǵanı ushın $f(x+h)=5$, $f(x+h)-f(x)=5-5=0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{h}=0 \text{ Demek, } f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

3. $h\neq0$ bolǵanı ushın

$f(x+h)=(x+h)^3-7(x+h)+5=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5.$

$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5-x^3+7x-5=$
$=3x^2h+3xh^2+h^3-7h.$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-7h}{h}=3x^2+3xh+h^2-7.$$

$h\to0$ de $3xh+h^2\to0$ bolǵanı ushın

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2-7.$$

4. Qısqasha kóbeytiw formulaları boyınsha: $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

Demek, $(x+h)^4-x^4=(x+h-x)(x+h+x)((x+h)^2+x^2)=$

$=h(2x+h)(2x^2+2xh+h^2)=2hx(2x+h)(x+h)+h^3(2x+h)=$

$=2hx(2x^2+h(3x+h))+h^3(2x+h)$; $h\to0$ bolsa,

$2h^2x(3x+h)\to0$ hám $h^3(2x+h)\to0$ bolǵanı ushın

$$\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to0}(4x^3+2hx(3x+h))+h^2(2x+h))=4x^3.$$

Demek, $f'(x)=(x^4)'=4x^3$.

5. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq0$ bolsın,

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=-\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{(x+h)x}.$$

$h\to 0$ de $x+h\to x$ bolǵanı ushın $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ boladı.

6. $f(x)=\sqrt{x},\ x>0,\ x+h>0$ bolsın,

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ ayırmalı qatnastı dúzemiz hám onı ápiwayılastıramız:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

$h\to 0$ de $\sqrt{x+h}\to\sqrt{x}$ bolǵanı ushın $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ boladı. ▲

7. Ayırmalı qatnastı dúzemiz:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

$h\to 0$ de $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}\to\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Demek, $(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Juwabı: **1.** $2x$. **2.** 0. **3.** $3x^2-7$. **4.** $4x^3$. **5.** $-\frac{1}{x^2}$. **6.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **7.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.▲

x muǵdar x tan $x+h$ qa shekem ózgergende $y=f(x)$ muǵdar ózgeriwiniń **ortasha tezligi**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ayırmalı qatnasqa teń ekenligin esletiw orınlı.

Bunnan, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ańlatpası $y=f(x)$ muǵdar ózgeriwiniń **bir zamatlıq tezligin** bildiredi.

Shınıǵıwlar

13. Tómendegi funkciyalardıń tuwındısı nege teń?

a) $f(x)=x^3$ b) $f(x)=x^{-1}$ c) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ d) $f(x)=c$.

14. Kesteni dápterińizge kóshiriń hám toltırıń:

a.

$f(x)$	$f'(x)$
x^1	
x^2	
x^3	
x^{-1}	
$x^{\frac{1}{2}}$	

b. Pikirińizshe, $y=x^n$ funkciyanıń tuwındısı nege teń (bul jerde n – racional san)?

15. Anıqlamadan paydalanıp, funkciyalardıń tuwındısın tabıń:

a) $f(x)=2x+3$ b) $f(x)=3x^2+5x+1$ c) $f(x)=2x^3+4x^2+6x-1$.

16*. Dápterińizge kóshiriń hám toltırıń:

a) $f(x)=ax+b$ ushın $f'(x)=$ ...;

b) $f(x)=ax^2+bx+c$ ushın $f'(x)=$ ...;

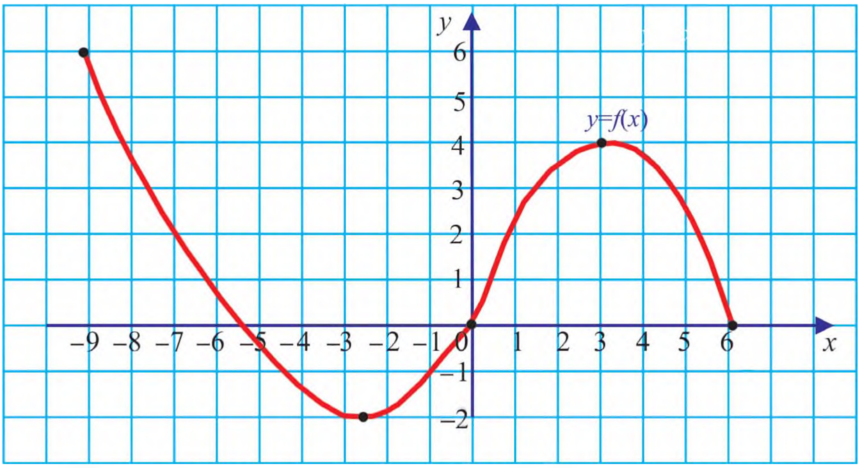
c) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ushın $f'(x)=$ ...

17*. Tómendegi tastıyıqlawlardı dálilleń:

a) $f(x)=cg(x)$ bolsa, ol jaǵdayda $f'(x)=cg'(x)$

b) $f(x)=g(x)+h(x)$ bolsa, ol jaǵdayda $f'(x)=g'(x)+h'(x)$.

18*. Funkciya grafigine qarap tuwındılardıń mánislerin salıstırıń:



a) $f'(-7)$ hám $f'(-2)$;
c) $f'(-9)$ hám $f'(0)$;
b) $f'(-4)$ hám $f'(2)$;
d) $f'(-1)$ hám $f'(5)$.

19. 1) Joqarıdaģı funkciya grafigine qarap usı shártlerdi qanaatlandıratuģın x_1, x_2 noqatlardı tabıń ($x_1, x_2 - Ox$ kósherindegi noqatlar : –9, –8, ..., 5, 6,):

a) $f'(x_1) > 0, f'(x_2) > 0$
b) $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0$
c) $f'(x_1) < 0, f'(x_2) < 0$
d) $f'(x_1) > 0, f'(x_2) < 0$.

2) Grafikke qarap tómendegi sorawlarģa juwap beriń:

a) funkciya qaysı aralıqta ósiwshi? qaysı aralıqta kemeyiwshi?

b) funkciyanıń [0; 3], [3; 6], [-9; -6] aralıqlarındaģı arttırmaların esaplań.

3) Funkciya qaysı noqatta eń úlken, qaysı noqatta eń kishi mánisti qabıl etedi?

4) Funkciya qaysı noqatlarda nolge aylanıp atır?

5) Qaysı aralıqta funkciya oń mánislerdi qabıl etip atır?

6) Qaysı aralıqta funkciya teris mánislerdi qabıl etip atır?

7–9 TUWÍNDÍNÍ ESAPLAW QAǴÍYDALARÍ

Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalarınıń hár biri tuwındıǵa iye bolsa, ol jaǵdayda tómendegi differenciallaw qaǵıydaları orınlı:

1. Qosındınıń tuwındısı tuwındılar qosındısına teń:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x). \qquad (1)$$

2. Ayırmanıń tuwındısı tuwındılar ayırmasına teń:

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x) \qquad (2)$$

1-mısal. Funkciyanıń tuwındısın tabıń:

1) $f(x)=x^3+x^2-x+10$; 2) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

∆ Tuwındını tabıwda 1, 2-qaǵıydalarınan hám tuwındılar kestesiniń 1, 3-bántlerinen paydalanamız, yaǵnıy:

1) $f'(x)=(x^3)'+(x^2)'-(x)'+10=3x^2+2x-1$;

2) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Juwabı: 1) $3x^2+2x-1$; 2) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. ▲

3. Turaqlı kóbeytiwshini tuwındı belgisinen sırtqa shıǵarıw múmkin:

$$(cf(x))'=c\cdot f'(x), \quad c - \text{turaqlı san} \qquad (3)$$

2-mısal. Funkciyanıń tuwındısın tabıń:

1) $f(x)=7x^3-5x^2+4$; 2) $f(x)=3\sqrt{x}+\frac{5}{x}-x^3$.

∆ Tuwındını tabıwda 1, 2, 3-qaǵıydalarınan hám tuwındılar kestesiniń 1, 3-bánterinen paydalanamız, yaǵnıy:

1) $f'(x)=(7x^3-5x^2+4)'=(7x^3)'-(5x^2)'+(4)'=21x^2-10x$;

2) $f'(x)=\left(3\sqrt{x}+\frac{5}{x}-x^3\right)'=3\left(\sqrt{x}\right)'+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'-(x^3)'=\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}-3x^2$.

Juwabı: 1) $21x^2-10x;$; 2) $\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}-3x^2$. ▲

4. Kóbeymeniń tuwındısı: $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$ (4)

3-mısal. Funkciyanıń tuwındısın tabıń:

1) $f(x)=(2x+4)(3x+1)$; 2) $f(x)=(3x^2+4x+1)(2x+6)$; 3) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)$

Δ Tuwındını tabıwda 1, 3, 4-qaǵıydalarınan hám tuwındılar kestesiniń 1, 3-bántlerinen paydalanamız, yaǵnıy:

1) $f'(x)=((2x+4)(3x+1))'=(2x+4)'(3x+1)+(2x+4)(3x+1)'=$
$=2(3x+1)+3(2x+4)=6x+2+6x+12=12x+14;$

2) $f'(x)=((3x^2+4x+1)(2x+6))'=(3x^2+4x+1)'(2x+6)+$
$+(3x^2+4x+1)'(2x+6)'=(6x+4)(2x+6)+2(3x^2+4x+1)=18x^2+52x+26;$

3) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)\right)'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\left(x^2-5x\right)'=$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\,(2x-5)=\frac{x^2-5x}{3\sqrt[3]{x^2}}+(2x-5)\sqrt[3]{x}=\frac{x^2-5x+3(2x-5)\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\frac{x^2-5x+6x^2-15x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-20x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x(7x-20)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{3}(7x-20).$$

Juwabı: 1) $12x+14;$; 2) $=18x^2+52x+26;$ 3) $\frac{\sqrt[3]{x}}{3}(7x-20)$. ▲

5. Bólshektiń tuwındısı:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2},\quad \text{bunda}\quad g(x)\neq 0. \qquad (5)$$

4-mısal. Funkciyanıń tuwındısın tabıń:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; 2) $f(x)=\frac{3x+7}{x-5}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{5x-7}$.

Δ Tuwındını tabıwda 1, 3, 5-qaǵıydalarınan hám tuwındılar kestesiniń 1, 3-bántlerinen paydalanamız, yaǵnıy:

1) $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2};$

2) $f'(x)=\left(\frac{3x+7}{x-5}\right)'=\frac{(3x+7)'(x-5)-(3x+7)(x-5)'}{(x-5)^2}=$

$$=\frac{3(x-5)-(3x+7)\cdot 1}{(x-5)^2}=\frac{3x-15-3x-7}{(x-5)^2}=-\frac{22}{(x-5)^2};$$

3) $f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{5x-7}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'\cdot(5x-7)-\sqrt{x}\cdot(5x-7)'}{(5x-7)^2}=$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-7)-\sqrt{x}\cdot 5}{(5x-7)^2}=\frac{5x-7-10x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}=-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}.$$

Juwabı: 1) $-\frac{3}{(x-2)^2}$; 2) $-\frac{22}{(x-5)^2}$; 3) $-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}$. ▲

5-mısal. Funkciyalardıń tuwındısın tabıń:

1) $f(x)=\sin x$; 2) $f(x)=\cos x$; 3) $f(x)=\text{tg}x$.

△ 1) Ayırmalı qatnastı tabıwda sinuslar ayırmasın kóbeymege keltiriw formulasınan paydalanamız:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2}.$$

$h\to 0$ de $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$, $\cos\frac{2x+h}{2}\to\cos x$ ekenin dálillew múmkin.

Demek, $(\sin x)'=\cos x$.

2) Ayırmalı qatnastı tabıwda kosinuslar ayırmasın kóbeymege keltiriw formulasınan paydalanamız:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\frac{2x+h}{2}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin(x+\frac{h}{2}).$$

$h\to 0$ de; $\sin(x+\frac{h}{2})\to\sin x$ ekenin dálillew múmkin.

Demek, $(\cos x)'=-\sin x$.

3) Tuwındını tabıwdıń 5-qaǵıydası hámde usı mısaldıń 1-, 2-bólim juwaplarınan paydalanıp, $f(x)=\text{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ funkciyanıń tuwındısın tabamız:

$$f'(x)=(\text{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Juwabı: 1) $(\sin x)'=\cos x$; 2) $(\cos x)'=-\sin x$; 3) $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. ▲

Tuwındını esaplawda differenciallaw qaǵıydaları hám tómendegi kesteden paydalanıw máqsetke muwapıq.

Tuwındılar kestesi

№	*Funkciyalar*	*Tuwındılar*
1.	c – turaqlı	0
2.	$kx+b$, k, b – turaqlılar	k
3.	x^p, p – turaqlı	px^{p-1}
4.	$\sin x$	$\cos x$
5.	$\cos x$	$-\sin x$
6.	$\mathrm{tg}x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
7.	$\mathrm{ctg}x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
8.	a^x, $a>0$	$a^x \ln a$
9.	e^x	e^x
10.	$\ln x$	$1/x$
11.	$\lg x$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln 10}$
12.	$\log_a x$, $a>0$, $a=1$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$

? Soraw hám tapsırmalar

1. Tuwındını esaplaw qaǵıydaların aytıp beriń. Hár bir qaǵıydaǵa mısal keltiriń.

2. Tuwındılar kestesiniń 4-, 5- bántlerin dálilleń.

3. Funkciyanıń $x=x_0$ noqattaǵı tuwındısı degen ne, tuwındılı funkciya degen ne? Olardıń qanday parqı bar? Mısallarda túsindiriń.

Shınıǵıwlar

Tuwındını tabıń (**20–22**):

20. 1) $y=x^4$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\frac{1}{x^3}$.

21. 1) $y=x^4-x^2+x$; 2) $y=\frac{1}{x}+x$; 3) $y=x^3+\sqrt[3]{x}$;

4) $y=x^4+x^3+x^2-x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

22. 1) $y=(x-1)(x^2-5)$; 2) $y=\frac{x^2-4}{x-2}$;

3) $y=(x^4-\sqrt{x})(x^2+x)$; 4) $y=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

23. Materiallıq noqattıń berilgen t_0 waqıttaǵı tezligin esaplań:

1) $s(t)=t^3-2t^2+t$; $t_0=5$; 2) $s(t)=5t+t^3+\sqrt{t}$, $t_0=4$.

24. Funkciyanıń abscissası berilgen noqattaǵı tuwındısın esaplań:

1) $f(x)=x^2+5x-3$, $x_0=1$; 3) $f(x)=2\sqrt{x}+x^3+\frac{1}{2}$, $x_0=4$;

2) $f(x)=4-3x$, $x_0=-2$; 4) $f(x)=x^2+\lg 2$, $x_0=1$.

Tuwındını tabıń (**25–29**):

25. 1) $y=2x^3-4x^2+5$; 3) $y=\frac{4}{x}+\frac{x}{4}$;

2) $y=7x^2-2x+\sqrt{7}$; 4) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

26. 1) $y=(x-2)(x+2)$; 3) $y=\frac{x^2-9}{x-3}$;

2) $y=(x+2)^3$; 4) $y=x^2+\lg 7+\sin\frac{\pi}{9}$.

27. 1) $y=x^8+7x^2+5x$; 2) $y=2x^8+x^6$;

3) $y=\frac{x^4}{x^6-1}$; 4) $y=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$;

5) $y=x^{-2}+\frac{1}{x}$; 6) $y=x^4-4x$;

7) $y=\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}$; 8) $y=(x^5+x^{-5})(x^2+x^{-2})$.

28. 1) $f(x)=x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$; 2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}x$; 5) $y=8^x$;

6) $y=\log_2 x+\log_2 3$; 7) $y=2^x x$; 8) $y=x\ln x$;

9) $y=e^x\cos x$; 10) $y=2e^x-\ln x+\dfrac{1}{x}$.

29. 1) $y=2^x\sin x$; 2) $y=e^x(\cos x+\sin x)$; 3) $y=x\mathrm{tg}x$;

4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 5) $y=3\sin^2 x$; 6) $y=5x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

7) $y=(x+1)(\ln x+1)$; 8) $y=(2+x)^3$; 9) $y=(3x+5)^6+2019$.

30. Materiallıq noqattıń berilgen t_0 waqıttağı tezligin tabıń:

1) $s(t)=t^2+5t+1$, $t_0=1$; 2) $s(t)=4t^3+\dfrac{1}{t}+1$, $t_0=1$.

31. Funkciyanıń berilgen noqattağı tuwındısın tabıń:

1) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=-1$; 2) $f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

32. Tuwındını tabıń:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sqrt{3}-\mathrm{tg}x$; 3) $y=-3\cos x$; 4) $y=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x$;

5) $y=4x-\cos x$; 6) $y=x^2\sin x$; 7) $y=\dfrac{x}{\sin x}$; 8) $y=x\sin x+\cos x$.

33. Funkciyanıń x_0 noqattağı tuwındısın esaplań:

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-5}$, $x_0=2$; 2) $f(x)=\mathrm{tg}x-x+2$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=x(\lg x-1)$, $x_0=10$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{2}\ln x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

34. Tuwındını nolge aylandıratuğın noqattı tabıń:

1) $f(x)=x^4-4x$; 2) $f(x)=\mathrm{tg}x-x$;

3) $f(x)=x^8-2x^4+3$; 4) $f(x)=\log_2 x-\dfrac{x}{\ln 2}$.

10–12 QURAMALİ FUNKCIYANİŃ TUWİNDİSİ

Quramalı funkciya. $y=(x^2+3x)^4$ funkciyanı kórip shıǵayıq. Eger biz $g(x)=x^2+3x$, $f(x)=x^4$ belgilewlerdi kirgizsek, $y=(x^2+3x)^4$ funkciya $y=f(g(x))$ kórinisin aladı. Biz $y=f(g(x))$ funkciyanı *quramalı funkciya* deymiz.

1-mısal. Eger $f(x)=x^2$ hám $g(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$ bolsa, tómendegilerdi tabıń:

1) $f(g(2))$; 2) $f(g(-4))$; 3) $g(f(1))$;

4) $f((-4))$; 5) $f(f(1))$ 6) $g(g(-1))$.

∆ Berilgen funkciyalardan paydalanıp, esaplawlardı orınlaymız:

1) $f(g(x))=f\left(\dfrac{x-2}{1-3}\right)$, bunnan $f(g(2))=f\left(\dfrac{2-2}{2+3}\right)=f(0)=0^2=0$;

2) $f(g(-4))=f\left(\dfrac{-4-2}{-4+3}\right)=f(6)=6^2=36$;

3) $g(f(1))=g(1^2)=g(1)=\dfrac{1-2}{1+3}=-\dfrac{1}{4}$;

4) $g(f(-4))=g((-4)^2)=g(16)=\dfrac{16-2}{16+3}=\dfrac{14}{19}$;

5) $f(f(1))=f(1^2)=f(1)=1^2=1$;

6) $g(g(-1))=g\left(\dfrac{-1-2}{-1+3}\right)=g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-\frac{3}{2}-2}{-\frac{3}{2}+3}=\dfrac{-3,5}{1,5}=-\dfrac{7}{3}$.

Juwabı: 1) 0; 2) 36; 3) $-\dfrac{1}{4}$; 4) $\dfrac{14}{19}$; 5) 1; 6) $-\dfrac{7}{3}$. ▲

Quramalı funkciyanıń tuwındısı ushın mına formula orınlı:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad (1)$$

2-mısal. Funkciyanıń tuwındısın tabıń (k, b – turaqlı sanlar):

1) $f(x)=(kx+b)^n$; 2) $f(x)=\sin(kx+b)$;
3) $f(x)=\cos(kx+b)$; 4) $f(x)=\operatorname{tg}(kx+b)$.

Δ 1) $f(t)=t^n$ hám $t(x)=kx+b$ funkciyalarǵa (1) formulanı qollanamız:

$$((kx+b)^n)'=(t^n)'\cdot(kx+b)'=nt^{n-1}\cdot k=n\cdot k\cdot(kx+b)^{n-1}.$$

2) $f(t)=\sin t$ hám $t(x)=kx+b$ funkciyalarǵa (1) formulanı qollanamız:

$$(\sin(kx+b))'=(\sin t)'\cdot(kx+b)'=k\cdot\cos t=k\cdot\cos(kx+b).$$

3) $f(t)=\cos t$ hám $t(x)=kx+b$ funkciyalarǵa (1) formulanı qollanamız:

$$(\cos(kx+b))'=(\cos t)'\cdot(kx+b)'=-k\cdot\sin t=-k\cdot\sin(kx+b).$$

4) $f(t)=\operatorname{tg}t$ hám $t(x)=kx+b$ funkciyalarǵa (1) formulanı qollanamız:

$$(\operatorname{tg}(kx+b))'=(\operatorname{tg}t)'\cdot(kx+b)'=\frac{1}{\cos^2 t}\cdot k=\frac{k}{\cos^2(kx+b)}.$$

Juwabı: 1) $((kx+b)^n)'=n\cdot k\cdot(kx+b)^{n-1}$; 2) $(\sin(kx+b))'=k\cdot\cos(kx+b)$;
3) $(\cos(kx+b)'=-k\cdot\sin(kx+b)$; 4) $(\operatorname{tg}(kx+b)'=\dfrac{k}{\cos^2(kx+b)}$. ▲

3-mısal. $f(x)=\sin 8x\cdot e^{(3x+2)}$ funkciya tuwındısın tabıń.

Δ Tuwındını tabıwdıń 4-qaǵıydası hámde (1) formulanı qollanıp tuwındını tabamız:

$$f'(x)=(\sin 8xe^{(3x+2)})'=(\sin 8x)'e^{3x+2}+\sin 8x\cdot(e^{3x+2})'=\cos 8xe^{3x+2}\cdot(8x)'+$$
$$+\sin 8xe^{3x+2}\cdot(3x+2)'=e^{3x+2}\cdot(8\cos 8x+3\sin 8x).$$

Juwabı: $e^{3x+2}\cdot(8\cos 8x+3\sin 8x)$ ▲

4-mısal. $h(x)=(x^3+1)^5$ funkciyanıń $x_0=1$ noqattaǵı tuwındısın tabıń.

Δ (1) formuladan paydalanıp tuwındını esaplaymız:

$h'(x)=5(x^3+1)^4(x^3+1)'=5(x^3+1)^4 3x^2=15x^2(x^3+1)^4$.

Demek, $h'(1)=15(1^3+1)^4\cdot 1^2=15\cdot 16=240$. *Juwabı:* 240. ▲

5-mısal. $f(x)=2^{\cos x}$ funkciyanıń tuwındısın tabıń.

Δ (1) formuladan paydalanıp tuwındını esaplaymız:

$f(x)=2^{\cos x}\ln 2(\cos x)'=-\sin x 2^{\cos x}\ln 2$. *Juwabı:* $-\sin x 2^{\cos x}\ln 2$. ▲

6-mısal. $f(x)=\mathrm{tg}^5 x$ funkciyanıń tuwındısın tabıń.

Δ (1) formuladan paydalanıp tuwındını esaplaymız:

$$f'(x)=5\mathrm{tg}^4 x(\mathrm{tg}\,x)'=5\mathrm{tg}^4 x\frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \textit{Juwabı:}\ \frac{5\mathrm{tg}^4 x}{\cos^2 x}.$$ ▲

7- mısal. $h(x)=3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x)$ funkciyanıń tuwındısın tabıń.

Δ $f(x)=3^{\cos x}$ hám $g(x)=\log_7(x^3+2x)$ belgilewlerdi kirgizip, (1) formulanı – quramalı funkciya tuwındısın tabıw formulasın qollanamız:

$$f'(x)=(3^{\cos x})'=3^{\cos x}\ln 3\cdot(\cos x)'=-3^{\cos x}\ln 3\cdot\sin x,$$

$$g'(x)=(\log_7(x^3+2x))'=\frac{1}{(x^3+2x)\ln 7}\cdot(x^3+2x)'=\frac{3x^2+2}{(x^3+2x)\ln 7}$$

hám de $h(x)$ funkciyanı 2 funkciyanıń kóbeymesi dep qaraymız:

$$h'(x)=(3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x))'=(3^{\cos x})'\cdot\log_7(x^3+2x)+3^{\cos x}\cdot$$

$$\cdot(\log_7(x^3+2x))'=-3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\frac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}.$$

Juwabı: $-3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\dfrac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}$. ▲

? Soraw hám tapsırmalar

1. Quramalı funkciya dep nege aytıladı? Mısal keltiriń.
2. Quramalı funkciyanıń anıqlanıw oblastı qalay tabıladı?
3. Quramalı funkciya tuwındısın tabıw formulasın jazıp bilesiz be?
4. Quramalı funkciya tuwındısın tabıwdı 1–2 mısalda kórsetiń.

Shınığıwlar

35. Eger $f(x)=x^2-1$ bolsa, berilgen funkciyalardı tabıń:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(2x)$; 3) $f(x^2-1)$; 4) $f(x+1)-f(x-1)$.

36. Eger $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ bolsa, berilgen funkciyalardı tabıń:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(\frac{1}{x^2})$; 3) $f(x-1)$; 4) $f(x+1)$.

37. Eger $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$ bolsa, tómendegilerdi tabıń:

1) $f(g(x))$; 2) $f(f(x))$; 3) $g(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

38. Eger $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$ bolsa, tómendegilerdi tabıń:

1) $\frac{f(x^2)}{g(x)-1}$; 2) $f(x)+3g(x)+3x-2$;

3) $f(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

Teńlikten paydalanıp, $f(x)$ ti tabıń **(39–42)**:

39. $f(x+1)=x^2-1$. **40*.** $f(x)+3\cdot f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$.

41. $f(x+3)=x^2-4$. **42*.** $2f(x)+f(\frac{1}{x})=x$.

Tuwındını tabıń **(43–44)**:

43. 1) $f(x)=(3x-2)^5$; 2) $f(x)=e^{\sin x}$; 3) $f(x)=(4-3x)^7$;
4) $f(x)=\sin^2 x$; 5) $f(x)=\frac{1}{(2x+9)^3}$; 6) $f(x)=\ln(4x-1)$;
7) $f(x)=\sqrt{4x-5}$; 8) $f(x)=(2x-1)^{10}$; 9) $f(x)=\cos^8 x$.

44*. 1) $e^{\sin x}\cdot \mathrm{tg}\frac{1}{x}$; 2) $3^{\mathrm{ctg}x}\cdot\log_a\cos x$; 3) $\ln\cos x$;
4) $(x^2-5x+4)^3\cdot 10^{\mathrm{tg}x}$; 5) $7^{\log 3x}\cdot(x^3-2x+1)^3$; 6) $3^{\cos x}\cdot(x^2-8x+4)^2$;
7) $\mathrm{ctg}x\cdot\ln(x^2+x)$; 8) $x^2\cos^{30}x+4$; 9) $5\ln x\cdot\mathrm{ctg}x$.

13–14 FUNKCIYA GRAFIGINE ÓTKIZILGEN URÍNBA HÁM NORMAL TEŃLEMELERI

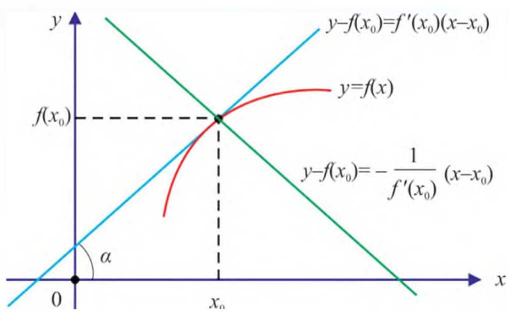
Urınba teńlemesi. $y=f(x)$ funkciyaǵa grafiginiń $(x_0;f(x_0))$ noqatınan ótiwshi urınba teńlemesin tabamız (19-súwret). Urınba tuwrı sızıq bolǵanı ushın onıń ulıwma kórinisi $y=kx+b$ boladı. Tuwındınıń geometriyalıq mánisi boyınsha $k=\text{tg}\alpha=f'(x_0)$, yaǵnıy urınba teńlemesi $y=f'(x_0)x+b$ kórinisin aladı. Bul urınba $(x_0;f(x_0))$ noqattan ótkeni ushın $f(x_0)=f'(x_0)x_0+b$ boladı, bunnan $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$. Tabılǵan b nı urınba teńlemesine qoyıp,

$$y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0 \text{ yaki}$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

teńlemeni payda etemiz.

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ teńleme $(x_0;\ f(x_0))$ noqatta $y=f(x)$ funkciyaǵa ótkizilgen urınba teńlemesi boladı.



19-súwret.

1-mısal. $f(x)=x^2-5x$ funkciya grafigine abscissası $x_0=2$ noqatta ótkizilgen urınba teńlemesin jazıń.

△ Aldın funkciyanıń hám funkciyadan alınǵan tuwındınıń $x_0=2$ noqattaǵı mánisin tabamız:

$$f(x_0)=f(2)=2^2-5\cdot2=-6, \quad f'(x)=2x-5, \quad f'(2)=2\cdot2-5=-1.$$

Tabılǵanlardı (1) teńlemege qoyıp, urınba teńlemesin payda etemiz:

$y-(-6)=-1\cdot(x-2)$ yaki $y=-x-4$. *Juwabı:* $y=-x-4$. ▲

2-mısal. $f(x)=x^3-2x^2$ funkciya grafigine $x_0=1$ abcsissalı noqatta ótkizilgen urınba teńlemesin jazıń.

∆ Aldın funkciyanıń hám funkciyadan alınǵan tuwındınıń $x_0=1$ noqattaǵı mánisin tabamız:

$$f(x_0)=f(1)=1^3-2\cdot1^2=-1, \quad f'(x)=3x^2-4x, \quad f'(1)=3\cdot1^2-4\cdot1=-1.$$

Tabılǵanlardı (1) teńlemege qoyıp, urınba teńlemesin payda etemiz:

$y-(-1)=-1(x-1)$ yaki $y=-x$. *Juwabı:* $y=-x$. ▲

Eger $y=f(x)$ funkciya grafiginiń x_0 abscissalı noqatında ótkizilgen urınba $y=kx+b$ tuwrı sızıqqa parallel bolsa, $f'(x_0)=k$ boladı. Bul shárt arqalı funkciyanıń berilgen tuwrı sızıqqa parallel bolǵan urınbası tabıladı.

3-mısal. $f(x)=x^2-3x+4$ funkciya ushın $y=2x-1$ tuwrı sızıqqa parallel bolǵan urınba teńlemesin jazıń.

∆ Urınbanıń berilgen tuwrı sızıqqa parallellik shárti boyınsha, $f'(x_0)=2$ yaki $2x_0-3=2$ teńlemeni payda etemiz. Bul teńlemede $x_0=2,5$ bolǵanı ushın urınba abscissası $x_0=2,5$ bolǵan noqattan ótedi. Esaplawlardı orınlaymız:

$$f(x_0)=f(2,5)=2,5^2-3\cdot2,5+4=6,25-7,5+4=2,75$$

$$f'(x_0)=f(2,5)=2.$$

Endi urınba teńlemesin tabamız:

$$y-2,75=2(x-2,5) \text{ yaki } y=2x-2,25.$$

Juwabı: $y=2x-2,25$. ▲

4-mısal. $f(x)=x^3-2x^2+3x-2$ funkciya grafigine $x_0=4$ abscissalı noqatta ótkizilgen urınba teńlemesin dúziń hám urınba menen Ox kósheriniń oń baǵıtı payda etken múyeshtiń sinusın tabıń.

∆ Aldın funkciyanıń hám funkciyadan alınǵan tuwındınıń $x_0=4$ noqattaǵı mánisin tabamız:

$$f(x_0)=f(4)=3\cdot4^3-2\cdot4^2+3\cdot4-2=170, \quad f'(x)=3x^2-4x+3,$$

$$f'(4)=3\cdot4^2-4\cdot4+3=35.$$

Tabılǵanlardı (1) teńlemege qoyıp, urınba teńlemesin payda etemiz:

$y-170=35(x-4)$ yaki $y=35x+30$.

Tuwındınıń geometriyalıq mánisi boyınsha $\text{tg}\alpha=35$, bunnan

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{35}{\sqrt{1+35^2}} = \frac{35}{\sqrt{1226}}.$$

Juwabı: $y=35x+30$; $\sin\alpha = \frac{35}{\sqrt{1226}}$. ▲

5*-mısal. $f(x)=x^2$ parabolaǵa abscissası x_0 bolǵan A noqatta ótkizilgen urınba Ox kósherin $\frac{1}{2}x_0$ noqatta kesip ótedi. Usı pikirdi dálilleń.

△ $f'(x)=2x$, $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x_0)=2x_0$.

Urınba teńlemesi (1) ge kóre $y=2x_0\cdot x-x_0^2$ boladı. Onıń Ox kósheri menen kesilisiw noqatı $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ ekenligi kórinip tur. Bunnan $y=x^2$ parabolaǵa abscissası x_0 bolǵan A noqatta ótkizilgen urınbanı jasaw usılı kelip shıǵadı: A noqat hám $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ noqat arqalı ótiwshi tuwrı sızıq $y=x^2$ parabolaǵa A noqatta urınadı.

Normal teńlemesi. $y=f(x)$ funkciya grafigine $x=x_0$ abscissalı noqatta ótkizilgen urınbaǵa $x=x_0$ noqatta perpendikulyar bolǵan

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (2)$$

tuwrı sızıqqa $y=f(x)$ funkciya grafiginiń x_0 abscissalı noqatında ótkizilgen normal delinedi (19-súwret).

6-mısal. $f(x)=x^5$ funkciya grafigine $x_0=1$ abscissalı noqatta ótkizilgen normal teńlemesin dúziń.

△ Tuwındı formulası boyınsha $f'(x)=5x^4$ boladı. Funkciya hám onıń tuwındısınıń $x_0=1$ noqattaǵı mánislerin esaplaymız:

$f(1)=1^5=1$ hám $f'(1)=5\cdot1^4=5$. Bul mánislerdi normaldıń teńlemesine qoyamız hám $y-1=-\frac{1}{5}(x-1)$ yaki $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$ teńlemeni payda etemiz.

Juwabı: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$. ▲

Esletpe: $f(x)=x^5$ funkciya grafigine $x_0=1$ abscissalı noqatta ótkizilgen urınba teńlemesi $y=5x-4$ boladı (dálilleń!). Urınba hám normaldıń múyeshlik koefficienti kó beymesi $5\cdot(-\frac{1}{5})=-1$ ekenligine itibar beriń.

Soraw hám tapsırmalar

1. $y=f(x)$ funkciya grafigine x_0 abscissalı noqatta ótkizilgen urınba teńlemesin jazıń.

2. $y=f(x)$ funkciya grafigine x_0 abscissalı noqatta ótkizilgen normal teńlemesin jazıń.

3. Berilgen funkciyanıń qanday da bir tuwrı sızıqqa parallel bolǵan urınbası qalay tabıladı? Mısalda túsindiriń.

Shınıǵıwlar

45. Funkciya grafigine abscissası $x_0=1$; $x_0=-2$; $x_0=0$ bolǵan noqatta ótkizilgen urınba teńlemesin jazıń:

1) $f(x)=2x^2-5x+1$;	2) $f(x)=3x-4$;	3) $f(x)=6$;
4) $f(x)=x^3-4x$;	5) $f(x)=e^x$;	6) $f(x)=2^x$;
7) $f(x)=2^x+\ln 2$;	8) $f(x)=\sin x$;	9) $f(x)=\cos x$;
10) $f(x)=\cos x-\sin x$;	11) $f(x)=e^x x$;	12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

46. Funkciya ushın $y=7x-1$ tuwrı sızıqqa parallel bolǵan urınba teńlemesin jazıń:

1) $f(x)=x^3-2x^2+6$; 2) $f(x)=4x^2-5x+3$; 3) $f(x)=8x-4$.

47. Berilgen $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń urınbaları parallel bolatuǵın noqatlardı tabıń:

1) $f(x)=3x^2-5x+4$, $g(x)=4x-5$;

2) $f(x)=8x+9$, $g(x)=-5x+8$;

3) $f(x)=7x+11$, $g(x)=7x-9$;

4) $f(x)=x^3-8$, $g(x)=x^2+5$;

5) $f(x)=x^3+x^2$, $g(x)=5x-7$;

6) $f(x)=x^4+11$, $g(x)=x^3+10$.

48. Funkciya grafigine abscissası a) $x_0=1$; b) $x_0=-2$; d) $x_0=0$ bolǵan noqatta ótkizilgen normal teńlemesin tabıń:

1) $f(x)=3x^2-5x+1$;	2) $f(x)=3x-40$;	3) $f(x)=7$;
4) $f(x)=x^3-10x$;	5) $f(x)=e^x$;	6) $f(x)=12^x$;
7) $f(x)=\sin x$;	8) $f(x)=\cos x$;	9) $f(x)=\cos x-\sin x$;
10) $f(x)=e^{\pi x}$;	11) $f(x)=x\cdot\cos x$;	12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

Qadaǵalaw jumısı úlgisi

I variant

1) $f(x)=x^3+2x^2-5x+3$ funkciya ushın $x_0=2$ hám $\Delta x=0{,}1$ bolǵanda funkciya arttırmasınıń argument arttırmasına qatnasın tabıń.

2) $f(x)=-8x^2+4x+1$ funkciyanıń $x_0=-3$ noqattaǵı tuwındısın esaplań.

3) $f(x)=x^3-7x^2+8x-5$ funkciya grafigine $x_0=-4$ abscissalı noqatta ótkizilgen urınba teńlemesin jazıń.

4) Materiallıq noqat $s(t)=8t^2-5t+6$ nızamlıq penen qozǵalmaqta. Eger t – sekund, s – metrlerde ólshenetuǵın bolsa, noqattıń $t_0=8$ sekundtaǵı momentlik tezligin tabıń.

5) Kóbeymeniń tuwındısın tabıń: $(3x^2-5x+4)\cdot e^x$.

II variant

1) Tiyindiniń tuwındısın tabıń: $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$.

2) Quramalı funkciyanıń tuwındısın tabıń: $\mathrm{ctg}^{15}x$.

3) $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}$ funkciyanıń $x_0=\dfrac{1}{16}$ noqattaǵı tuwındın esaplań.

4. $f(x)=\ln(x+1)$ funkciya grafigine $x=0$ noqatta ótkizilgen urınba teńlemesin jazıń.

5. $s(t)=0{,}5t^2-6t+1$ nızamlıǵı menen qozǵalıp atırǵın materiallıq noqattıń $t=16$ sekundtaǵı momentlik tezligin tabıń. (t – sekundta, s – metrlerde ólshenedi).

15–17 MÁSELELER SHESHIW

49. Berilgen $y=f(x)$ funkciya, x_0 hám x noqatlarǵa sáykes h hám Δy ti esaplań:

1) $f(x)=4x^2-3x+2$, $x_0=1$, $x=1{,}01$; 2) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=0$, $x=0{,}1$.

50. Eger $x_0=3$ hám $\Delta x=0{,}03$ bolsa, berilgen funkciyalar ushın: a) funkciya arttırmasın; b) funkciya arttırmasınıń argument arttırmasına qatnasın tabıń:

1) $f(x)=7x-5$; 2) $f(x)=2x^2-3x$; 3) $f(x)=x^3+2$; 4) $f(x)=x^3+4x$.

51. Eger $x_0=2$ hám $\Delta x=0{,}01$ bolsa, berilgen funkciyalar uchun: a) funkciya arttırmasın; b) funkciya arttırmasınıń argument arttırmasına qatnasın tabıń:

1) $f(x)=-4x+3$; 2) $f(x)=-8$; 3) $f(x)=x^2+10x$; 4) $f(x)=x^3-10$.

52. $x\to 0$ bolsa, funkciya qaysı sanǵa umtıladı:

1) $f(x)=x^3-2x^2+3x+4$; 2) $f(x)=x^5-6x^4+8x-7$;

3) $f(x)=(x^2-5x+1)(x^3-7x^2-11x+6)$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-x-19}{x^2+7x-28}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^3-8x}{x^3+x^2+x+1}$?

53. Funkciyanıń tuwındısın tabıń:

1) $y=17x$; 2) $y=29x-3$; 3) $y=-15$; 4) $y=16x^2-3x$;
5) $y=-5x+40$; 6) $y=18x-x^2$; 7) $y=x^2+15x$;
8) $y=16x^3+5x^2-2x+14$; 9) $y=3x^3+2x^2+x$.

54. Funkciyanıń tuwındısın: a) $x=-3$; b) $x=1{,}1$; c) $x=0{,}4$; d) $x=-0{,}2$ noqatlarda esaplań:

1) $y=15x$; 2) $y=9x+3$; 3) $y=-20$; 4) $y=5x^2+x$;
5) $y=-8x+4$; 6) $y=8x-x^2$; 7) $y=x^2+25x$; 8) $y=x^3+5x^2-2x+4$.

55. $y=f(x)$ funkciya tuwındısın táriypi boyınsha tabıń:

1) $f(x)=2x^2+3x+5$; 3*) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$;

2) $f(x)=(x+2)^3$; 4*) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

56. $y=f(x)$ funkciyanıń x_0 noqattaǵı tuwındısın tabıń:

1) $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1,\ x_0=1$; 2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\sin 22°,\ x_0=-1$;

3) $f(x)=(2x+1)(\sqrt{x}-1),\ x_0=4$; 4) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1},\ x_0=-3$

57. Materiallıq noqat $s(t)=\frac{4}{3}t^3-t+5$ nızamlılıq penen qozǵalmaqta (s – metrde, t – sekundta). Materiallıq noqattıń 2-sekundtaǵı tezligin tabıń.

58. Funkciyanıń tuwındısın tabıń:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}+2x^3$;

3*) $y=\sqrt[5]{x}+x\cdot \mathrm{tg}x-\log_3 x$; 4) $y=(2x+3)^3$;

5*) $y=x\cdot \ln x\cdot (x+1)$; 6) $y=(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)$;

7) $y=\frac{x+2}{\sin x}$; 8) $y=10^x+\log_2 5+\cos 15°$;

9) $y=3^{-x}\cdot \sin x$; 10*) $y=\mathrm{tg}x\cdot \cos x+7^x\cdot x^7$;

11) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-8x^2+3$; 12) $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x+5$;

13) $f(x)=x^{10}-80x$; 14) $f(x)=8x-\frac{2^x}{\ln 2}$.

59. Funkciya tuwındısınıń x_0 noqattaǵı mánisin esaplań:

1) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, $x_0=0$ 2) $f(x)=(x^2+3x)\ln x$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}$, $x_0=1$; 4) $f(x)=e^x(x-\ln 2)$, $x_0=\ln 2$.

60*. $f'(x)>0$ teńsizlikti sheshiń:

1) $f(x)=x\cdot \ln 27-3^x$; 2) $f(x)=\sin x-2x$;

61. Materiallıq noqat $s(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t$ nızamlılıq penen qozǵalmaqta.

Materiallıq noqattıń tezligi qashan nolge teń boladı? Bunıń mánisi ne?

62. Tuwındını tabıń: 1) $y=x^5-x^4+x$; 2) $y=\frac{1}{x^2}-x$; 3) $y=x^4+\sqrt[5]{x}$.

63. Materiallıq noqattıń t_0 waqıttaǵı tezligin tabıń:

1) $x(t)=t^4-2t^3+t$, $t_0=-5$; 2) $x(t)=-5t+t^2-\sqrt{t}$, $t_0=4$.

Tuwındını tabıń (**64–66**):

64. 1) $y=(x+2)(x^2-5x)$; 2) $y=\frac{x^2-3x}{x+8}$; 3) $y=(x^4+\sqrt{x})(x^3-5x)$;

4) $y=2x^3+4x^2+5x$; 5) $y=\frac{14}{x}-\frac{x}{14}$; 6) $y=7x^2+12x+\sqrt{2019}$.

65*. 1) $y=\frac{x^8}{x^{10}-1}$; 2) $y=\frac{x^3+x+1}{x^5+7}$; 3) $y=(x^{10}+x^{-10})(x^8+x^{-8})$.

66*. 1) $y=\frac{3x\cdot\sin x}{\cos x}$; 2) $y=e^{5x}(\cos x-\sin x)$;

3) $y=x\operatorname{ctg}x$; 4) $y=\frac{\ln x}{x^2}$.

67*. Tuwındını x_0 noqatta esaplań:

1) $f(x)=\frac{5x+1}{13x-5}$, $x_0=-2$; 2) $f(x)=\operatorname{ctg}x-2x+2$, $x_0=\frac{-\pi}{4}$;

3) $f(x)=x^2(\lg x-1)$, $x_0=1$; 4) $f(x)=\operatorname{ctg}x-\frac{1}{20}\ln x$, $x_0=1$.

68*. Quramalı funkciyanıń tuwındısın tabıń:

1) $x^2\cdot\sin x$; 2) $\log_{15}\cos x$; 3) $\ln\operatorname{ctg}x$;

4) $\operatorname{tg}^{35}x$; 5) $e^{\operatorname{ctg}x}$; 6) $23^{\cos x}$;

7) $35^{\sin x}$; 8) $(x^2-10x+7)\ln\cos x$;

9) $\frac{x^5-6x+4}{e^x}$; 10) $e^{-3x}(x^4-3x^2+2)$; 11) $\ln\operatorname{tg}x$;

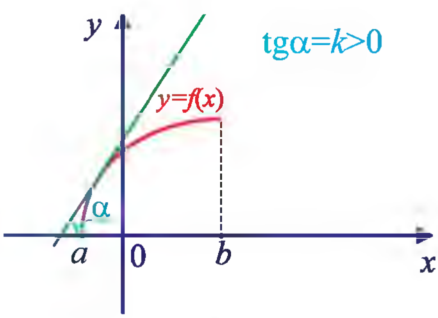
12) $\frac{x^3+7x+1}{e^{2x}}$; 13) $e^{5x}(x^5+8x+11)$; 14) $\ln\cos 2x$.

18–21 TUWÍNDÍ JÁRDEMINDE FUNKCIYANÍ TEKSERIW HÁM GRAFIKLERDI JASAW

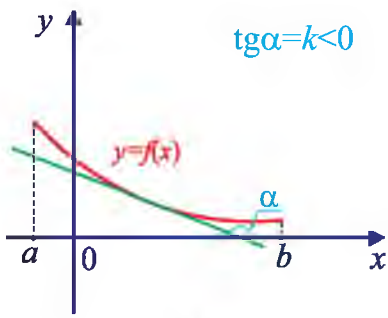
Funkciyanıń ósiwi hám kemeyiwi. Ósiwshi hám kemeyiwshi funkciyalar menen tanıssız. Endi funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların anıqlaw ushın tuwındı túsiniginen paydalanamız.

1-teorema. $y=f(x)$ funkciya $(a;\, b)$ aralıqta anıqlanǵan hám tuwındısı bar bolsın. Eger $x\in(a;\, b)$ ushın $f'(x)>0$ bolsa, $y=f(x)$ funkciya $(a;\, b)$ aralıqta ósiwshi funkciya boladı (20-súwret).

2-teorema. $y=f(x)$ funkciya $(a;\, b)$ aralıqta anıqlanǵan hám tuwındısı bar bolsın. Eger $x\in(a;\, b)$ ushın $f'(x)<0$ bolsa, $y=f(x)$ funkciya $(a;\, b)$ aralıqta kemeyiwshi funkciya boladı (21-súwret).



20-súwret.



21-súwret.

1, 2- teoremalardı dálillewsiz qabıl etemiz.

1-mısal. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$.

Δ Bul funkciya $(-\infty;+\infty)$ aralıqta anıqlanǵan. Onıń tuwındısı:

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$$

$f'(x)>0$, $f'(x)<0$ teńsizliklerdi aralıqlar usılı menen sheship $(-\infty;-1)$ hám $(2;+\infty)$ aralıqlarda funkciyanıń ósiwi hám de $(-1;\, 2)$ aralıqta funkciyanıń kemeyiwin bilip alamız.

Juwabı: $(-\infty;-1)$ hám $(2;+\infty)$ aralıqlarında funkciya ósedi; al $(-1;\, 2)$ aralıqta funkciya kemeyedi. ▲

2-mısal. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń: $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

Δ Bul funkciya $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ aralıqta anıqlanǵan. Onıń tuwındısı: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$; $f'(x)>0$, yaǵnıy $1-\frac{1}{x^2}>0$ teńsizlikti aralıqlar usılı menen sheship, tuwındınıń $(-\infty;-1)$ hám $(1;+\infty)$ aralıqlarda oń ekenligin tabamız. Dál sonday, $f'(x)<0$, yaǵnıy $1-\frac{1}{x^2}<0$ teńsizlikti aralıqlar usılı menen sheship, bul teńsizlik (–1; 0) hám (0; 1) aralıqlarda orınlanatuǵınının bilip alamız.

Juwabı: funkciya $(-\infty;-1)$ hám $(1;+\infty)$ aralıqlarda ósedi; al funkciya (–1; 0) hám (0; 1) aralıqlarda kemeyedi. ▲

Funkciyanıń stacionar noqatları. $y=f(x)$ funkciya $(a;\ b)$ aralıqta anıqlanǵan bolsın.

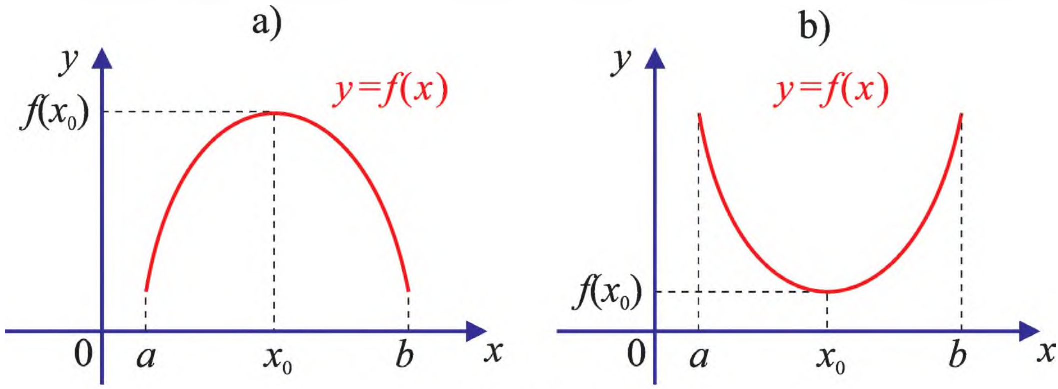
1-anıqlama. $y=f(x)$ funkciyanıń tuwındısı 0 ge teń bolatuǵın noqatlar *stacionar noqatlar* delinedi.

3-mısal. Funkciyanıń stacionar noqatların tabıń: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$.

Δ Funkciyanıń tuwındısın tawıp, onı nolge teńeymiz: $f'(x)=6x^2-6x-12=0$. Bul teńlemeni sheship funkciyanıń stacionar noqatları $x_1=-1$, $x_2=2$ ekenin tabamız.

Juwabı: funkciyanıń stacionar noqatları $x_1=-1$, $x_2=2$. ▲

Funkciyanıń lokal maksimum hám minimumları. Funkciyanıń lokal maksimum hám minimumların anıqlaw ushın tuwındıdan paydalanamız.



22-súwret.

3-teorema. $f(x)$ funkciya $(a;b)$ aralıqta anıqlanǵan hám $f'(x)$ bar; $(a;x_0)$ aralıqta $f'(x)>0$ hám $(x_0;b)$ aralıqta $f'(x)<0$ bolsın, $x_0\in(a,\ b)$.

Ol jaǵdayda x_0 noqat $f(x)$ funkciyanıń lokal maksimumı boladı (22-*a* súwret).

4-teorema. $f(x)$ funkciya $(a;b)$ aralıqta anıqlanǵan hám $f'(x)$ bar; $(a;x_0)$ aralıqta $f'(x)<0$ hám $(x_0;b)$ aralıqta $f'(x)>0$ bolsın, $x_0 \in (a, b)$.

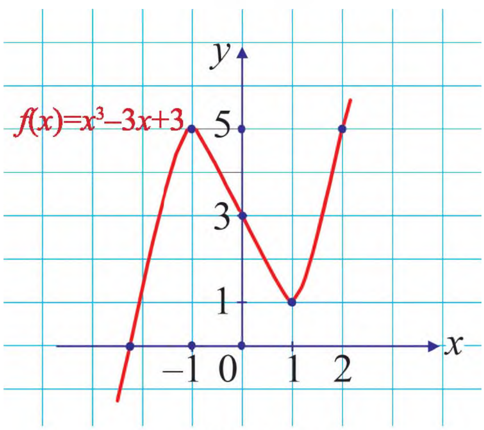
Ol jaǵdayda x_0 noqat $f(x)$ funkciyanıń lokal minimumı boladı (22-*b* súwret).

3, 4-teoremalardı dálillewsiz qabıl etemiz.

2-anıqlama. Funkciyanıń lokal maksimum hám minimumlarına onıń *ekstremumları* delinedi.

4-mısal. Funkciyanıń lokal maksimum hám minimum noqatların tabıń: $f(x)=x^3-3x+3$.

▲ Funkciyanıń tuwındısın tabamız: $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. Tuwındı barlıq noqatlarda anıqlanǵan hám $x=\pm 1$ noqatlarda nolge aylanadı. Sonıń ushın $x=\pm 1$ noqatlar funkciyanıń kritikalıq noqatları esaplanadı. Aralıqlar usılınan paydalanıp $(-\infty;-1)$ hám $(1;+\infty)$ aralıqlarda $f'(x)>0$, al $(-1;1)$ aralıqta $f'(x)<0$ ekenin anıqlaymız. Demek, $x=-1$ lokal maksimum hám $x=1$ lokal minimum noqatları eken (23-súwret).



23-súwret.

Juwabı: $x=-1$ lokal maksimum hám $x=1$ lokal minimum noqat. ▲

Funkciyanıń eń úlken hám eń kishi mánisleri menen 10 klastan tanıspız.

$f(x)$ funkciya $[a; b]$ kesindide anıqlanǵan hám $(a; b)$ da tuwındısı bar bolsın. Onıń eń úlken mánisin tabıw qaǵıydası tómendegishe:

1) funkciyanıń bul aralıqtaǵı barlıq stacionar noqatları tabıladı;

2) funkciyanıń stacionar, shegaralıq a hám b noqatlardaǵı mánisleri esaplanadı;

3) Bul mánislerdiń eń úlkeni funkciyanıń usı aralıqtaǵı eń úlken mánisi delinedi.

Funkciyanıń eń kishi mánisi de usıǵan uqsas tabıladı.

5-mısal. $f(x)=x^3+4{,}5x^2-9$ funkciyanıń $[-4; 2]$ aralıqtaǵı eń úlken hám eń kishi mánislerin tabıń.

Δ Funkciyanıń tuwındısın tabamız: $f'(x)=3x^2+9x$. Tuwındını nolge teńlestirip, funkciyanıń stacionar noqatların tabamız: $f'(x)=3x(x+3)=0$, $x_1=0$ hám $x_2=-3$. Funkciyanıń tabılǵan $x_1=0$, $x_2=-3$ hám de $a=-4$, $b=2$ noqatlardaǵı mánislerin tabamız:

$f(0)=0^3+4{,}5\cdot0^2-9=-9$, $f(-3)=(3)^3+4{,}5\cdot(-3)^2-9=4{,}5$,

$f(-4)=(-4)^3+4{,}5\cdot4^2-9=-1$, $f(2)=2^3+4{,}5\cdot2^2-9=17$.

Demek, funkciyanıń eń úlken mánisi 17 hám eń kishi mánisi –9 eken.

Juwabı: funkciyanıń eń úlken mánisi 17 hám eń kishi mánisi –9. ▲

Tuwındı járdeminde funkciyanı tekseriw hám grafigin sızıw. Funkciya grafigin sızıwdı tómendegi izbe-izlikte ámelge asıramız.

Funkciyanıń:

1. Anıqlanıw oblastın;
2. Stacionar noqatların;
3. Ósiw hám kemeyiw aralıqların;
4. Lokal maksimum hám minimumların hám de funkciyanıń usı noqatlardaǵı mánislerin;
5. Tabılǵan maǵlıwmatlar boyınsha funkciyanıń grafigin sızamız.

Grafikti sızıwda funkciya grafigin koordinata kósherleri menen kesilisiw hám basqa ayırım noqatların tabıw máqsetke muwapıq.

6-mısal. $f(x)=x^3-3x$ funkciyanı tuwındı járdeminde tekseriń hám onıń grafigin sızıń.

1. Funkciya $(-\infty; +\infty)$ aralıqta anıqlanǵan.

2. Statsionar noqatların tabamız:

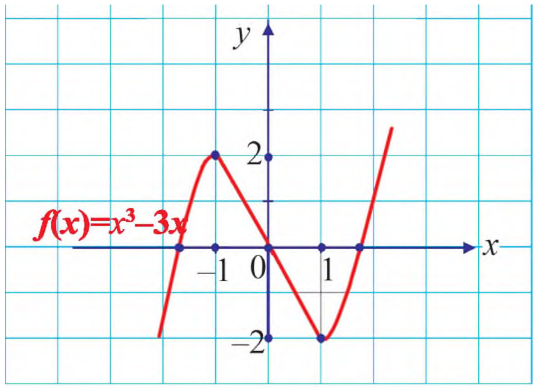
$f'(x)=(x^3-3x)'=3x^2-3=0$. $x_1=1$ hám $x_2=-1$ stacionar noqatlar.

3. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabamız:

$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ aralıqlarda $f'(x)>0$ bolǵanı ushın $f(x)$ funkciya usı aralıqlarda ósedi hám $(-1; 1)$ aralıqta $f'(x)<0$ bolǵanı ushın $f(x)=x^3-3x$ funkciya $(-1; 1)$ aralıqta kemeyedi.

4. $x=-1$ bolǵanda funkciya lokal maksimumǵa $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=2$ hám $x=1$ bolǵanda funkciya lokal minimumǵa $f(1)=1^3-3\cdot1=-2$ iye.

5. Funkciyanıń Ox kósheri menen kesilisiw noqatların tabamız: $x^3-3x=x(x^2-3)=0$. Bunnan $x=0$ yaki $x^2-3=0$ teńlemeni payda etemiz. Teńlemeni sheship $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$ funkciya grafiginiń Ox kósheri menen kesilisiw noqatların tabamız. Nátiyjede 24-súwrettegi grafikti payda etemiz.



24-súwret.

Soraw hám tapsırmalar

1. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqları qalay tabıladı?

2. Funkciyanıń stacionar noqatına anıqlama beriń.

3. Funkciyanıń lokal maksimum hám lokal minimumları qalay tabıladı?

4. Funkciyanıń eń úlken hám eń kishi mánisleri qalay tabıladı?

5. Tuwındı járdeminde funkciyanıń grafigin sızıw izbe-izligin aytıń hám bir mısalda túsindiriń.

6. Funkciyanıń stacionar noqatları onıń ekstremum noqatları bolıwı shárt pe? Mısallar keltiriń.

7. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$ funkciyanı tuwındı járdeminde tekseriń hám grafigin sızıń.

Shınıǵıwlar

69. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń:

1) $f(x)=2-9x$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x-8$; 3) $f(x)=x^3-27x$;

4) $f(x)=\frac{x-1}{x}$; 5) $f(x)=x^2-2x+4$; 6) $f(x)=x(x^2-6)$;

7) $f(x)=-x^2+2x-3$; 8) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 9) $f(x)=x^4-2x^2$;

10) $f(x)=3x^4-8x^3+16$; 11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; 12) $f(x)=\sin x$;

13) $f(x)=\cos x$; 14) $f(x)=\mathrm{tg}x$; 15*) $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$.

70. Funkciyanıń stacionar noqatların tabıń:

1) $f(x)=2x^2-3x+1$; 2) $f(x)=9x-\frac{1}{3}x^3$; 3*) $f(x)=|x-1|$;

4) $f(x)=x^2$; 5) $f(x)=8x^3+5x$; 6) $f(x)=3x-4$;

7*) $f(x)=|x|+1$; 8) $f(x)=2x^3+3x^2-6$; 9) $f(x)=3+8x^2-x^4$.

71. Funkciyanıń lokal maksimum hám minimumların tabıń:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{2}x^4$; 2) $f(x)=(x-4)^8$; 3) $f(x)=4-3x^2-2x^3$;

4) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{x}{5}$; 5) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-3$; 6) $f(x)=3\mathrm{tg}x$;

7) $f(x)=2\sin x+3$; 8) $f(x)=-5\cos x-7$; 9) $f(x)=x^4-x^3+4$.

72. Funkciyanıń ósiw, kemeyiw aralıqların tabıń:

1) $f(x)=x^3-27x$; 2*) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$; 3*) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$;

4) $f(x)=5\sin x+13$; 5) $f(x)=15\cos x-7$; 6) $f(x)=-3\mathrm{tg}x$.

73. Funkciyanıń eń úlken hám eń kishi mánislerin tabıń:

1) $f(x)=x^4-8x^2+3$, $x\in[-4;1]$; 2) $f(x)=3x^5-5x^3+1$, $x\in[-2;2]$;

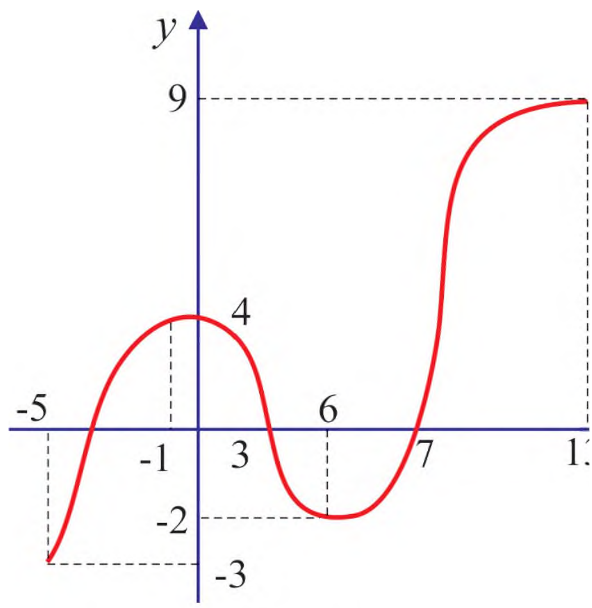
3) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $x\in[1;2]$; 4) $f(x)=3x^3-6x^2-5x+8$, $x\in[-1;4]$.

74. Funkciyanı tekseriń hám grafigin sızıń:

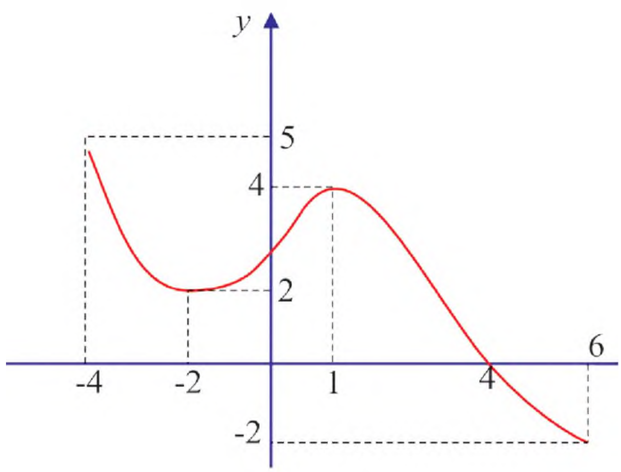
1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2;$ 2) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1;$ 3) $y = x^4 - 4x^3 + 15.$

75*. Funkciya tuwındısınıń grafigine qarap (24, 25-súwretler), tómendegilerdi tabıń:

1) stacionar noqatların;
2) ósiw aralıqların;
3) kemeyiw aralıqların;
4) lokal maksimumların;
5) lokal minimumların.



25-súwret.



26-súwret.

! Qadaǵalaw jumısı úlgisi

I variant

1. Tuwındını tabıń: $f(x)=20x^3+6x^2-7x+3$.

2. $f(x)=x^2-5x+4$ hám $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ bolsa, $f(g(3))$ ti esaplań.

3. $f(x)=x^3-5x^2+7x+1$ funkciya ushın tómendegilerdi tabıń:

1) stacionar noqatların;
2) ósiw aralıqların;
3) kemeyiw aralıqların;
4) lokal maksimumların;
5) lokal minimumların.

4. Tuwındını tabıń: $(3x+5)^3+\sin^2 x$.

II variant

1. Tuwındını tabıń: $f(x)=10x^3+16x^2+7x-3$.

2. $f(x)=x^2+6x-3$ hám $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ bolsa, $f(g(3))$ ti esaplań.

3. $f(x)=x^3+2x^2-x+3$ funkciya ushın tómendegilerdi tabıń:

1) stacionar noqatların;
2) ósiw aralıqların;
3) kemeyiw aralıqların;
4) lokal maksimumların;
5) lokal minimumların.

4. Tuwındını tabıń: $(2x-6)^3+\cos^2 x$.

5. $f(x)=\sqrt{1-2x}$ bolsa, $f'\left(\dfrac{3}{8}\right)$ ti esaplań.

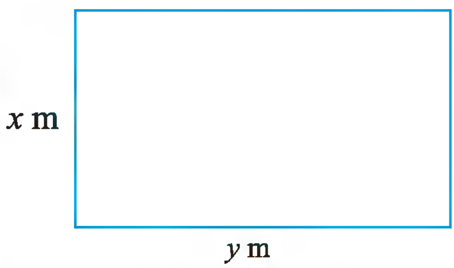
22–25 GEOMETRIYALİQ, FIZIKALİQ, EKONOMIKALİQ MAZMUNLİ EKSTREMALLİQ MÁSELELERDI SHESHIWDE DIFFERENCIALLİQ ESAPLAW USİLLARİ

Geometriyalıq mazmunlı máseleler

1-másele. Tuwrımúyeshlik kórinisindegi jer maydanı átırapın 100 m reshyotka menen qorshamaqshı. Bul reshyotka eń kóbi menen neshe kvadrat mert jer maydanın qorshawǵa jetedi?

Δ Jer maydanınıń eni x m hám uzınlıǵı y m bolsın (27-súwret).

Másele shárti boyınsha jer maydanınıń perimetri $2x+2y=100$. Bunnan $y=50-x$. Jerdiń maydanı $S(x)=xy=x(50-x)=50x-x^2$. Másele $S(x)$ funkciyanıń eń úlken mánisin tabıwǵa keltirildi. Aldın $S(x)$ funkciyanıń stacionar noqatın tabamız: $S'(x)=50-2x=0$, bunnan $x=25$. $(-\infty;\ 25)$ aralıqta $S'(x)>0$ hám $(25;\ +\infty)$ aralıqta $S'(x)<0$ bolǵanı ushın $S(x)$ funkciya $x=25$ te eń úlken mániske iye boladı hám $S(25)=625$. Demek, 100 m reshyotka járdeminde eń kóbi menen 625 m^2 jer maydanın qorshaw múmkin. *Juwabı:* 625 m^2. ▲

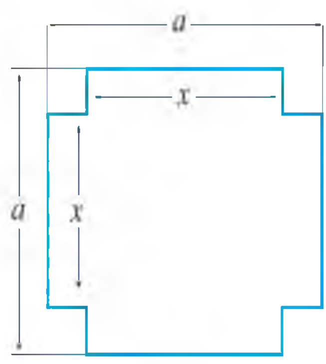


27-súwret.

Ulıwma, perimetr berilgen barlıq tuwrımúyeshlikler ishinde maydanı eń úlkeni kvadrat eken.

2-másele. Tárepi a cm bolǵan kvadrat kórinisindegi kartonnanústi ashıq qutı tayarlamaqshı. Bunda kartonnıń ushlarınan birdey kishkene kvadratlar kesip alınadı. Qutınıń kólemi eń úlken bolıwı ushın onıń ultan tárepiniń uzınlıǵı neshe santimetr bolıwı kerek?

Δ Kartonnıń ushlarınan birdey kishkene kvadratlar qırqıp alınıp, ultanı x cm bolǵan ashıq qutı jasalǵan, demek (28-súwret), kesip alınǵan kvadratshanıń tárepi $\frac{a-x}{2}$ sm boladı. Sonıń ushın ashıq qutınıń kólemi



28-súwret.

$V(x)=\frac{a-x}{2}\cdot x\cdot x= \ =-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ cm³. Demek, berilgen másele $V(x)=-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ funkciyanıń [0; a] kesindidegi eń úlken mánisin tabıwǵa keldi. $V(x)$ funkciyanıń stacionar noqatların tabamız: $V'(x)=-\frac{3}{2}x^2+ax=0$.

Bul jerden $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}a$ stacionar noqatlar tabıladı. Bunda, $V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{2}{27}a^3$ hám $V\left(\frac{2}{3}a\right)>V(0)=V(a)=0$ ekenligi kórinip tur. Demek, $V(x)$ tıń $[0;\, a]$ kesindidegi eń úlken mánisi $\frac{2}{27}a^3$ boladı.

Juwabı: ashıq qutınıń ultan tárepiniń uzınlıǵı $x=\frac{2}{3}a$ cm. ▲

Fizikalıq mazmunlı máseleler

3-másele. Materiallıq noqat $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ nızamı menen qozǵalmaqta ($s(t)$ m de, t *sek* ta ólshenedi). Tómendegilerdi tabıń:

1) eń úlken tezleniwge erisiletuǵın waqıttı (t_0);

2) t_0 waqıttaǵı momentlik tezlikti;

3) t_0 waqıt ishinde basıp ótilgen joldı.

∆ Materiallıq noqattıń tezligin tabamız:

$$v(t)=s'(t)=\left(-\frac{t^4}{12}+t^3\right)'=-\frac{t^3}{3}+3t^2.$$

Tezlikten alınǵan tuwındı tezleniwdi beriwi, fizika kursınan belgili:

$$a(t)=v'(t)=-t^2+6t.$$

1) Eń úlken tezleniwge iye bolatuǵın t_0 waqıttı anıqlaw ushın $a(t)=v'(t)=-t^2+6t$ funkciyanı maksimumǵa tekseremiz. Aldın

$a'(t)=-2t+6=0$ teńlemeni sheshemiz, bunnan $t_0=3$. (0; 3) aralıqta $a'(t)>0$ hám $(3;+\infty)$ aralıqta $a'(t)<0$ bolǵanı ushın $t=3$ da $a(t)$ eń úlken mániske erisedi.

2) t_0 waqıttaǵı momentlik tezlikti esaplaymız: $v(3)=-\frac{3^3}{3}+3\cdot 3^2=18\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3) t_0 waqıt ishinde basıp ótilgen jol $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ formulaǵa t_0=3 ti qoyıp esaplanadı: $s(3)=-\frac{3^4}{12}+3^3=-\frac{27}{4}+27=\frac{81}{4}=20,25$ m.

Juwabı: 1) 3 sek; 2) $18\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 3) 20,25 m. ▲

4-másele. Materiallıq noqat $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ nızamı menen qozǵalmaqta. ($s(t)$ aralıq metrde, waqıt t sekundta ólshenedi). Tómendegilerdi tabıń:

1) eń kishi tezlikke erisiletuǵın waqıttı (t_0);
2) t_0 waqıttaǵı tezleniwdi;
3) t_0 waqıt ishinde basıp ótilgen joldı.

∆ Materiallıq noqattıń tezligi hám tezleniwin tabamız:

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50\right)'=t^2-2t+4,$$

$$a(t)=v'(t)=\left(t^2-2t+4\right)'=2t-2.$$

1) Eń kishi tezlikke erisiletuǵın t_0 waqıttı anıqlaymız:

$$v'(t)=(t^2-2t+4)'=2t-2=0, \text{ bunnan } t_0=1.$$

(0; 1) aralıqta $v'(t)<0$ hám $(1;+\infty)$ aralıqta $v'(t)>0$ bolǵanı ushın t_0=1 de $v(t)$ eń kishi mániske erisedi.

2) t_0 waqıttaǵı tezleniwdi esaplaymız: $a(1)=2\cdot1-2=0$ m/s^2.

3) t_0 waqıt ishinde basıp ótilgen joldı $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ formulaǵa t_0=1 di qoyıp esaplanadı, yaǵnıy $s(1)=\frac{1^3}{3}-1^2+4\cdot1+50=53\frac{1}{3}$ m.

Juwabı: 1) 1 s; 2) 0 m/s^2; 3) $53\frac{1}{3}$ m. ▲

5-másele. Hawa sharına $t\in[0;8]$ minut aralıǵında $V(t)=2t^3-–3t^2+10t+2$ (m^3) kólemde hawa búrkip shıqpaqta. Tómendegilerdi tabıń:

1) dáslepki waqıttaǵı hawa kólemin;
2) $t=8$ minuttaǵı hawa kólemin;

3) $t=4$ minuttaǵı hawa úplew tezligin;

▲ 1) dáslepki waqıttaǵı hawa kólemin tabıw ushın $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ m³ formulaǵa $t=0$ qoyıladı, yaǵnıy $V(0)=2$ m³.

2) $t=8$ minut waqıttaǵı hawa kólemin tabıw ushın $V(t)=2t^3-\ -3t^2+10t+2$ m³ formulaǵa $t=8$ qoyıladı:

$$V(8)=2\cdot 8^3-3\cdot 8^2+10\cdot 8+2=1024-192+80+2=914 \text{ m}^3;$$

3) hawa úplew tezligin tabamız:

$$V'(t)=\left(2t^3-3t^2+10t+2\right)'=6t^2-6t+10\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min.}}\right).$$

Demek, $V'(4)=6\cdot 4^2-6\cdot 4+10=96-24+10=82\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right).$

Demek, $a(3)=12\cdot 3-6=30\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min}^2}\right).$

Juwabı: 1) 2 m³; 2) 914 m³; 3) $82\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ▲

Ekonomikalıq mazmunlı máseleler

6-másele. Kárima kóylek tigiw ushın buyırtpa aldı. Bir ayda x dana kóylek tikse, $p(x)=-x^2+100x$ mıń sum dáramat qıladı. Tómendegilerdi tabıń:

1) eń kóp dáramat alıw ushın qansha kóylek tigiw kerek?

2) eń kóp dáramat qansha boladı?

▲ 1) $p(x)=-x^2+100x$ funkciyanı maksimumǵa tekseremiz:

$p'(x)=(-x^2+100x)'=-2x+100=0$, bunnan $x_0=50$. (0; 50) kesindide $p'(x)>0$ hám $(50;+\infty)$ aralıqta $p'(x)<0$ bolǵanı ushın $x_0=50$ bolǵanda funkciya eń úlken mániske iye boladı. Demek, eń kóp dáramat alıw ushın 50 dana kóylek tigiw kerek eken.

2) Eń úlken dáramat qansha ekenligin tabıw ushın $p(x)=-x^2+100x$ ańlatpaǵa $x_0=50$ di qoyamız:

$$p(50)=-50^2+100\cdot 50=-2500+5000=2500(\text{mıń sum})=2500000 \text{ sum}.$$

Juwabı: 1) 50 dana kóylek; 2) 2 500 000 sum. ▲

? Soraw hám tapsırmalar

Tuwındını qollanıp sheshiletuǵın:

1) geometriyalıq; 2) fizikalıq; 3) ekonomikalıq mazmunlı máselege mısal keltiriń.

Shınıǵıwlar

76. Tuwrımúyeshlik kórinisindegi jer maydanınıń átırapın qorshamaqshı. 300 m reshyotka járdeminde eń kóbi menen neshe kvadrat metr jer maydanın qorshaw múmkin?

77. Tuwrımúyeshlik kórinisindegi jer maydanınıń átırapın qorshamaqshı. 480 m reshyotka járdeminde eń kóbi menen neshe kvadrat metr jer maydanın qorshaw múmkin?

78.* Tárepi 120 sm bolǵan kvadrat kórinisindegi kartonnan ústi ashıq qutı tayarlandı. Bunda kartonnıń ushlarınan birdey kishi kvadratlar kesip alındı. Qutınıń kólemi eń úlken bolıwı ushın kesip alınǵan kishi kvadrattıń tárepi neshe santimetr bolıwı kerek?

79.* Konserva banka cilindr kórinisinde bolıp, onıń tolıq beti 216π sm^2 ge teń. Bankaǵa eń kóp suw sıyıwı (ketiwi) ushın banka ultanınıń radiusı hám biyikligi qanday bolıwı kerek?

80. Tuwrımúyeshlik kórinisindegi jerdiń maydanı 6400 m^2. Jerdiń tárepleri qanday bolǵanda onı qorshaw ushın eń kem reshyotka zárúr boladı?

81.* Radiusı 5m bolǵan sharǵa eń kishi kólemli konus sırtlay sızılǵan. Konustıń biyikligin tabıń.

82.* Metalldan sıyımlıǵı 13,5 *l*, ultanı kvadrattan ibárat bolǵan tuwrı múyeshli parallelepiped jasalmaqta. Idıstıń ólshemleri qanday bolǵanda onı jasaw ushın eń kem metall ketedi?

83. Materiallıq noqat $s(t)=-\frac{t^4}{4}+5t^3$ nızamı menen qozǵalmaqta($s(t)$ metrde, waqıt t sekundta ólshenedi). Tómendegilerdi tabıń:

1) eń úlken tezleniwge erisiletuǵın t_0 waqıttı;

2) t_0 waqıttaǵı bir zamatlıq tezlikti;

3) t_0 waqıt ishinde basıp ótilgen joldı.

84. Materiallıq noqat $s(t)=-\frac{t^4}{2}+12t^3$ nızamı menen qozǵalmaqta($s(t)$ m de, waqıt t sekundta ólshenedi).

1) eń úlken tezleniwge erisiletuǵın t_0 waqıttı;
2) t_0 waqıttaǵı bir zamatlıq tezlikti;
3) t_0 waqıt ishinde basıp ótilgen joldı tabıń.

85. Materiallıq noqat $s(t)=\frac{t^3}{9}-2t^2+40t+50$ nızamı menen háreketlenbekte ($s(t)$ metrde, waqıt t sekundta ólshenedi).
1) eń kishi tezlikke erisiletuǵın t_0 waqıttı;
2) t_0 waqıttaǵı tezleniwdi;
3) t_0 waqıt ishinde basıp ótilgen joldı tabıń.

86. Materiallıq noqat $s(t)=\frac{t^3}{2}-3t^2+8t+5$ nızamı menen háreketlenbekte ($s(t)$ metrde, waqıt t sekundta ólshenedi). Tómendegilerdi tabıń:
1) eń kishi tezlikke erisiletuǵın t_0 waqıttı;
2) t_0 waqıttaǵı tezleniwdi;
3) t_0 waqıt ishinde basıp ótilgen joldı.

87. Hawa sharına $t\in[0;\ 10]$ minut aralıǵında $V(t)=5t^3+3t^2+2t+4$ (m^3) hawa búrkip shıqpaqta.
1) dáslepki waqıttaǵı hawa kólemin;
2) $t=10$ minuttaǵı hawa kólemin;
3) $t=5$ minuttaǵı hawa úplew tezligin;

88. Hawa sharına $t\in[0;\ 15]$ minut aralıǵında $V(t)=t^3+13t^2+t+20$ (m^3) hawa búrkip shıqpaqta. 1) dáslepki waqıttaǵı hawa kólemin;
2) $t=15$ minuttaǵı hawa kólemin;
3) $t=10$ minuttaǵı hawa úplew tezligin;

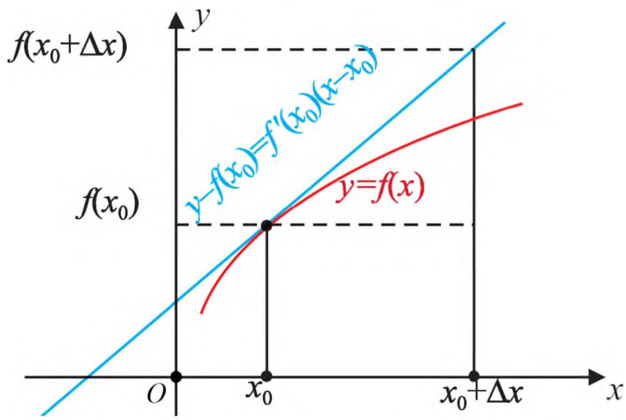
89. Muslima shalbar tigiw ushın buyırtpa aldı. Ol bir ayda x dana shalbar tikse, $p(x)=-2x^2+120x$ mıń swm dáramat qıladı. Tómendegilerdi tabıń:
1) dáramattı eń kóp qılıw ushın qansha shalbar tigiwi kerek?
2) eń kóp dáramat qansha boladı?

90. Muxlisa yubka tigiw ushın buyırtpa aldı. Bir ayda x dana yubka tikse, $p(x)=-3x^2+96x$ (mıń swm) dáramat qıladı. Tómendegilerdi tabıń:
1) dáramattı eń kóp qılıw ushın qansha yubka tigiw kerek?
2) eń kóp dáramat qansha boladı?

$y=f(x)$ funkciya x_0 noqatta shekli $f'(x_0)$ tuwındıǵa iye bolsın.

x_0 abscissalı noqatta $y=f(x)$ funkciya grafigine ótkizilgen urınba teńlemesi $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ kórinisinde jazılıwın bilemiz.

x_0 noqat átirapında $y=f(x)$ funkciya grafigin urınbanıń sáykes kesindisi menen almastırsa boladı (29-súwretke qarań):



29-súwret.

$x-x_0$ arttırmanı Δx dep belgilesek (yaǵnıy $x=x_0+\Delta x$ dep alsaq), tómendegi juwıq qatnasqa iye bolamız:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \text{ yaki}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (1)$$

(1) formula *kishi arttırmalar formulası* dep ataladı.

Túsinik. x_0 noqat sıpatında $f(x_0), f'(x_0)$ mánisler ańsat esaplanatuǵın noqattı tańlap alıw usınıs etiledi. Sonıń menen birge, x noqat x_0 ǵa qansha jaqın bolsa, bunday almastırıw anıǵıraq bolıwın aytıp ótemiz.

Endi biz kishi arttırmalar formulasına tayanǵan jaǵdayda juwıq esaplawlardı orınlaymız.

1-mısal.

$f(x) = x^7-2x^6+3x^2-x+3$ funkciyanıń $x=2{,}02$ noqattaǵı mánisin juwıq esaplań.

Δ $x=2{,}02$ noqatqa jaqın bolǵan $x_0=2$ noqattı alsaq, bul noqatta $f(x)$

funkciya mánisi ańsat tabıladı: $f(x_0)=f(2)=13$.

Bul funkciyanıń tuwındısın tabamız: $f'(x) = 7x^6 - 12x^5 + 6x - 1$.

Ol jaǵdayda,

$f'(x_0)=f'(2)=75$, $\Delta x = x - x_0 = 2{,}02 - 2 = 0{,}02$ boladı.

Demek, (1) formula boyınsha $f(2{,}02)=f(2+0{,}02)\approx 13+75\cdot 0{,}02=14{,}5$.

Kalkulyator yamasa basqa esaplaw quralı járdeminde $f(2{,}02)\approx 14{,}57995$ mánisti payda etiwimiz múmkin. ▲

2- mısal. $\sqrt{1{,}02}$ koренniń mánisin juwıq esaplań.

Δ $f(x)=\sqrt{x}$ funkciyanı qaraymız. Onıń tuwındısın tabamız:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$x_0=1$ dep alsaq, $f(x_0)=f(1)=\sqrt{1}=1$,

$f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$, $\Delta x = x - x_0 = 1{,}02-1=0{,}02$ boladı.

Demek, (1) formula boyınsha

$$\sqrt{1{,}02}=\sqrt{1+0{,}02}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=1{,}01.$$

Kalkulyator yamasa basqa esaplaw quralı járdeminde $\sqrt{1{,}02}\approx 1{,}0099504938...$ mánisti payda etiwimiz múmkin. ▲

3-mısal. $\sqrt[3]{7.997}$ niń mánisin juwıq esaplań.

Δ $f(x)=\sqrt[3]{x}$, funkciyanı qaraymız. Onıń tuwındısın tabamız:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

$x_0=8$ dep alsaq, $f(x_0)=f(8)=\sqrt[3]{8}=2$,

$$f'(x)=f'(8)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12},$$

$\Delta x = 7{,}997-8=-0{,}003$ boladı.

Demek, (1) formula boyınsha

$$\sqrt[3]{7,997}=\sqrt[3]{8+(-0,003)}\approx 2-\frac{0,003}{12}=1,9997.$$

Kalkulyator yaki basqa esaplaw qurali járdeminde

$\sqrt[3]{7.997}\approx 1,9997499687...$ mánisti payda etiwimiz múmkin. ▲

4-mısal. sin 29° tıń mánisin juwıq esaplań.

∆ $f(x)=\sin x$ funkciyanı qaraymız. Onıń tuwındısın tabamız: $f'(x)=\cos x$.

$x_0=\frac{\pi}{6}$ dep alsaq, $f(x_0)=f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

$f'(x_0)=f'(\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Delta x=\frac{29\pi}{180}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{180}$ boladı.

Demek, (1) formula boyınsha

$$\sin 29^\circ=\sin(\frac{\pi}{6}+(-\frac{\pi}{180}))\approx \sin\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}\approx 0,484... .$$

Kalkulyator yaki basqa esaplaw qurali járdeminde $\sin 29^\circ\approx 0,4848096202...$ mánisti payda etiwimiz múmkin. ▲

5-mısal. Logarifmlerdi esaplaw ushın kishi arttırmalar formulasın keltiremiz.

∆ $f(x)=\ln x$; $f'(x)=\frac{1}{x}$. (1) boyınsha, $\ln(x_0+\Delta x)\approx \ln x_0+\frac{1}{x_0}\cdot\Delta x$ — kishi arttırmalar formulasın payda etemiz.

Eger $x_0=1$ hám $\Delta x=t$ bolsa, $\ln(1+t)\approx t$ boladı.

Bunnan, máselen, $\ln 1,3907=\ln(1+0,3907)\approx 0,3907$ mánisti alamız.

Eger $x_0=0$, yaǵnıy $\Delta x=x-x_0=x$ bolsa, (1) kishi arttırmalar formulası

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x \qquad (2)$$

kórinisti aladı. ▲

Klasta orınlanatuǵın tapsırma. (2) formulaǵa tiykarlanıp, x jeterlishe kishi bolǵanda

$\sin x\approx x$, $\operatorname{tg} x\approx x$, $e^x\approx 1+x$, $(1+x)^m\approx 1+mx$, hám de, $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$, $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$ juwıq esaplaytuǵın formulalardı payda etiń.

6-mısal. $\dfrac{1}{0{,}997^{30}}$ ańlatpanı juwıq esaplań.

▲ $(1+x)^m \approx 1+mx$ formuladan paydalanamız:

$\dfrac{1}{0{,}997^{30}}=(1-0{,}003)^{-30}\approx 1+(-30)(-0{,}003)=1+0{,}09=1{,}09.$

Kalkulyator yaki basqa esaplaw quralı járdeminde $\dfrac{1}{0{,}997^{30}}\approx 1{,}0943223033...$ mánisti payda etiwimiz múmkin. ▲

$(1+x)^m \approx 1+mx$ juwıq esaplaytuǵın formuladan paydalanıp, korenlerdi tez esaplaw usılın usınıs etiw múmkin.

Shınında da, n – natural san bolıp, $|B|$ sanı $|A^n|$ ǵa qaraǵanda jeterlishe kishi bolsın.

Ol jaǵdayda

$$\sqrt[n]{A^n+B}=A\left(1+\frac{B}{A^n}\right)^{\frac{1}{n}}\approx A\left(1+\frac{B}{nA^n}\right)$$

yamasa

$$\sqrt[n]{A^n+B}\approx A+\frac{B}{nA^{n-1}}.$$

Máselen, $\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{125+6}=5+\dfrac{6}{3\cdot 5^2}=5{,}08.$

Kalkulyator yaki basqa esaplaw quralı járdeminde $\sqrt[3]{125}=5{,}0788...$ mánisti payda etiwimiz múmkin.

(2) formulaǵa tiykarlanıp, x jeterlishe kishi bolǵanda $\cos x$ tıń mánisin juwıq esaplayıq.

$(\cos x)'=-\sin x$ bolǵanı ushın $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$

formula $\cos x\approx\cos 0-(\sin 0)\,x=1$, yaǵnıy $\cos x\approx 1$ kórinisti aladı.

Bunday «juwıq» formula bizdi qanaatlandırmaydı.

Sonıń ushın, basqasha jol tutamız. Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylikten $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ teńlikti payda etemiz.

Joqarıda aytıp ótkenimizdey, x jeterlishe kishi bolǵanda $\sin x\approx x$ boladı.

Demek, $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}\approx\sqrt{1-x^2}$.

x jeterlishe kishi bolǵanda x^2 ta kishi bolatuǵını anıq.

Demek, $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$ formuladan $\sqrt{1-x^2}\approx 1-\frac{x^2}{2}$ formula tikkeley kelip shıǵadı, yaǵnıy $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$ formula orınlı boladı.

7-mısal. cos44° tı juwıq esaplań.

Δ cos(x–y)=cos$x$cos$y$+sin$x$sin$y$ bolǵanı ushın

$$\cos 44^\circ=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{180}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{180}).\ \cos\frac{\pi}{180}\approx 1-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{180})^2=0,9998476...,$$

$\sin\frac{\pi}{180}\approx\frac{\pi}{180}\approx 0,01793403...$. Demek, $\cos 44^\circ\approx 0,7193403....$

Kalkulyator yaki basqa esaplaw quralı járdeminde cos44°≈0,7193339... mánisti payda etemiz.

? Soraw hám tapsırmalar

1. Kishi arttırmalar formulasın jazıń.
2. Kishi arttırmalar formulasınıń qollanılıwına mısallar keltiriń.

Shınıǵıwlar

91. $f(x)$ funkciyanıń x_1 hám x_2 noqatlardaǵı juwıq mánisin esaplań:

a) $f(x)=x^4+2x$,	$x_1=2,016$,	$x_2=0,97$;
b) $f(x)=x^5-x^2$,	$x_1=1,995$,	$x_2=0,96$;
d) $f(x)=x^3-x$,	$x_1=3,02$,	$x_2=0,92$;
e) $f(x)=x^2+3x$,	$x_1=5,04$,	$x_2=1,98$.

$(1+x)^m\approx 1+mx$ formuladan paydalanıp, sanlı ańlatpanıń juwıq mánisin esaplań (**92–93**):

92. a) $1,002^{100}$;	b) $0,995^6$;	d) $1,03^{200}$;	e) $0,998^{20}$.
93. a) $\sqrt{1,004}$;	b) $\sqrt{25,012}$;	d) $\sqrt{0,997}$;	e) $\sqrt{4,0016}$.

Juwıq esaplaytuǵın formulalardan paydalanıp, esaplań (94–97):

94. a) tg 44°; b) cos 61°; d) sin 31°; e) ctg 47°.

95. a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0,04\right)$; b) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-0,02\right)$;

d) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0,03\right)$; e) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0,05\right)$.

96. a) $\frac{1}{1,003^{20}}$; b) $\frac{1}{0,996^{40}}$; d) $\frac{1}{2,0016^{3}}$; e) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

97. a) ln0,9; b) $e^{0,015}$; d) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

$y=f(x)$ tıń berilgen noqattaǵı juwıq mánisin esaplań (98–106):

98. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1,012$.

99. $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1,97$.

100. $y=x^3$ $x = 1,021$

101. $y=x^4$ $x = 0,998$

102. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1,03$.

103. $y=x^6$, $x=2,01$.

104*. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$, $x=0,01$.

105*. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0,01$.

106*. $y=\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}$, $x=1,02$.

29–32 TUWINDI JÁRDEMINDE MODELLESTIRIW

10-klasta (**79–81**-tema) bakteriyalar sanınıń kóbeyiw procesin úyrendik. Endi bul waqıyaǵa basqasha qarayıq.

1-másele. Hár bir bakteriya belgili waqıttan (bir neshe saat, yamasa, minutlardan) soń ekige bólinedi hám bakteriyalar sanı eki ese artadı. Náwbettegi waqıttan soń sol eki bakteriya da ekige bólinedi hám populyaciya muǵdarı (bakteriyalar ulıwma sanı) jáne eki ese artadı... Bul kóbeyiw procesi qolaylı shárayatlarda (populyaciya ushın zárúr resurslar, orın, jemtik (azıq-awqat), suw, energiya hám basqalar) dawam eteberedi, deyik.

Bakteriyalardıń ***kóbeyiw tezligi*** bakteriyalardıń ulıwma sanına proporcional dep oylayıq.

Bakteriyalar populyaciyasınıń sanı qálegen t waqıtqa qaraǵanda qalay ózgeredi?

▲ $b(t)$ dep t waqıt aralıǵında bakteriyalar populyaciyasınıń ulıwma sanın belgileylik.

Tuwındınıń mánisi boyınsha, bakteriyalar kóbeyiw tezligi $b'(t)$ ǵa teń.

Oylawımız boyınsha, qálegen t waqıtta $b'(t)$ muǵdar $b(t)$ muǵdarǵa proporcional, yaǵnıy

$$b'(t)=kb(t) \qquad (1)$$

qatnas orınlı. Bul jerde k – proporcionallıq koefficienti.

$b_0=b(0)$ – dáslepki $t=0$ waqıttaǵı populyaciya sanı bolsın.

$b(t)=b_0e^{kt}$ funkciya (1) di qanaatlandıradı.

Shınında da, $b'(t)=(b_0e^{kt})'=kb_0e^{kt}=kb(t)$.

Dáslep 10 million bakteriya bolsa, (b_0=10 mln), bunday bakteriyalar sanı bir saattan soń $b(1)=10e^k=20$ (mln) ǵa teń boladı, yaǵnıy $e^k=2$. Bunnan $k=\ln 2$ ge iye bolamız.

t waqıt aralıǵındaǵı bakteriyalar populyaciyasınıń sanın tabayıq:

$$b(t)=10e^{(\ln 2)t}=10\cdot 2^t \text{ (mln)}.$$

Bul nátiyje 10 klasta alınǵan nátiyje menen ústpe-úst túspekte. ▲

Tarıyxıy maǵlıwmat. 18-ásirde inglis ilimpazı Tomas Maltus joqarıdaǵı pikirlerge uqsas pikir júritip, jer júzindegi xalıq sanınıń ósiwi ushın

$$N'(t)=kN(t) \qquad (2)$$

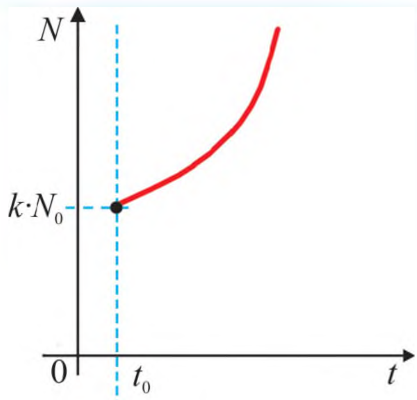
qatnastı payda etti, bul jerde $N(t)$ — waqıttıń t momentindegi xalıq sanı.

$N_0=N(t_0)$ – dáslepki t_0 waqıttaǵı xalıq sanı bolsın.

Bul jaǵdayda $N(t)=N_0e^{k(t-t0)}$ funkciya (2) teńlemeni qanaatlandıradı.

Shınında da, $N'(t)= N_0(e^{k(t-t0)})'=kN_0e^{k(t-t0)}=kN(t)$.

$N(t)=N_0e^{k(t-t0)}$ nızamı xalıqtıń ***eksponencial ósiwin,*** yaǵnıy, toqtawsız ósiw procesin ańlatıwın inabatqa alıp, Tomas Maltus waqıt ótiwi menen insanıyatqa azıq-awqat resursları jetispeytuǵının «boljaǵanın» aytıp ótemiz (30-súwretke qarań).



30-súwret.

2-másele. Ekologiya tiri organizmlerdiń sırtqı ortalıq penen óz ara qatnasın úyrenedi. Kóbeyiw yaki túrli sebepler menen nabıt bolıwına baylanıslı bolǵan populyaciyalar sanınıń ózgeriw tezligi waqıtqa qanday baylanısta ekenin úyreniń.

Δ $N(t)$ – waqıttıń t momentindegi populyaciya sanı bolsın, ol jaǵdayda eger waqıttıń bir birliginde populyaciyada tuwılatuǵın janzatlar sanın A, nabıt bolatuǵınlar sanın B desek, jeterli tiykar menen aytıw múmkin, N niń waqıtqa qaraǵanda ózgeriw tezligi

$$N'(t) =A-B \qquad (3)$$

qatnastı qanaatlandıradı.

Izertlewshiler A hám B nıń N ge baylanıslılıǵın tómendegishe túsindiredi.

a) Eń ápiwayı jaǵday: $A=aN(t)$, $B=bN(t)$. Bul jerde a hám b – waqıttıń bir birliginde tuwılıw hám nabıt bolıwı koefficientleri.

Bul jaǵdayda (3) qatnastı

$$N'(t)=(a-b)N(t) \tag{4}$$

kóriniste jazıw múmkin.

$N_0=N(t_0)$ – dáslepki t_0 waqıttaǵı populyaciya sanı bolsın.

Bul jaǵdayda $N(t)=N_0e^{(a-b)(t-t0)}$ funkciya (4) ti qanaatlandıradı (tekseriń).

b) $A=aN(t)$, $B=bN^2(t)$ jaǵday da ushırasadı.

Bunda

$$N'(t)=aN(t)-bN^2(t) \tag{5}$$

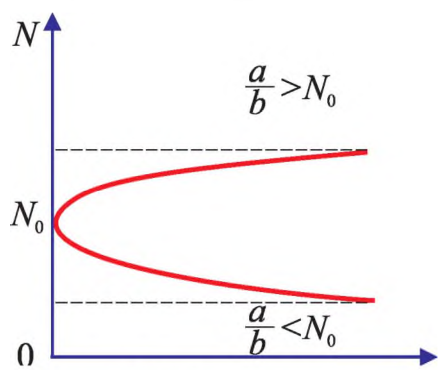
qatnas payda boladı.

$N(t)=\dfrac{N_0a/b}{N_0+[a/b-N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ funkciya (5) teńlemeni qanaatlandırıwın, tekseriw múmkin. ▲

(4) qatnastı 1845-jılı belgiyalı demograf-ilimpaz Ferxyulst populyaciyadaǵı ishki gúresti esapqa alǵan jaǵdayda dóretti. Bul nátiyje Maltustıń (2) qatnasına qaraǵanda populyaciyanıń rawajlanıwın anıǵıraq túsindiredi.

Populyaciyanıń ósiw-kemeyiwi a hám b sanlarına qalay baylanıslı boladı, degen soraw tuwılıwı tábiyiy.

31-súwrette $\dfrac{a}{b}>N_0$ hám $\dfrac{a}{b}<N_0$ jaǵdaylar ushın $N(t)=\dfrac{N_0a/b}{N_0+[a/b-N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ kórinistegi funkciya grafikleri súwretlengen:



31-súwret.

Kórinip turǵanınday, waqıt ótiwi menen populyaciya sanı $\frac{a}{b}$ sanına jaqınlasadı eken. Bul jaǵday *toyınıw* dep atalǵan qubılıstı bildiredi.

Sızılmada súwretlengen iymek sızıq Maltus tárepinen *logistikalıq* iymek sızıq dep atalıp, ol insan turmısınıń hár túrli salalarında ushırasıp turadı.

Funkciyanıń tuwındısın usı funkciya menen baylanıstırıwshı $y'(x)=F(x, y)$ kórinistegi qatnas differencial teńleme delinedi.

Joqarıda keltirilgen (1) – (5) qatnaslar differencial teńlemelerge mısallar bolıp esaplanadı.

Differencial teńlemeni qanaatlandıratuǵın hár qanday funkciya onıń sheshimi delinedi. Joqarǵı matematikada belgili shártlerde $y'(x)=F(x, y)$ kórinistegi differencial teńlemenıń $y(x_0)=y_0$ dáslepki shártti qanaatlandıratuǵın birden-bir $y(x)$ sheshimi bar ekenligi dálillengen.

3-másele. Waqıttıń t momentinde satılıp atırǵan ónim haqqında xabardar bolǵan qarıydarlar sanı $x(t)$ nıń waqıtqa baylanıslılıǵın úyreniń. (Bul másele reklama nátiyjeliligin anıqlawda áhmiyetli.)

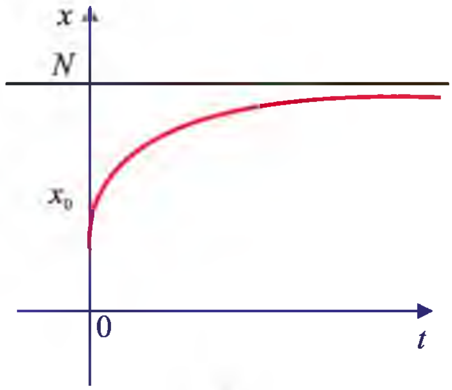
Δ Barlıq qarıydarlar sanın N dep belgilesek, satılıp atırǵan ónimnen xabarı joqlar sanı $N–x(t)$ boladı.

Ónim haqqında xabardar bolǵan qarıydarlar sanınıń ósiw tezligi $x(t)$ ǵa hám $N–x(t)$ ǵa proporcional dep esaplasaq, tómendegi differencial teńlemege iye bolamız:

$x'(t)=kx(t)(N–x(t))$, Bul jerde $k>0$ – proporcionallıq koefficienti.

Bul teńlemenıń sheshimi $x(t)=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ dan ibárat, bunda $P=\frac{1}{e^{NC}}$, C – turaqlı san.

Bizge belgili, hár qanday jaǵdayda t waqıt ótiwi menen Pe^{-Nkt} shek kishireyip bara beredi hám bunnan, $x(t)=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ ańlatpanıń mánisi N ge jaqınlasadı (32-súwretke qarań). ▲



32-súwret.

4-másele. Massası m, jıllılıq sıyımlıǵı c turaqlı bolǵan dene dáslepki momentte T_0 temperaturaǵa iye bolsın. Hawa temperaturası turaqlı hám τ $(T > \tau)$ ǵa teń. Deneniń sheksiz kishi waqıt ishinde bergen jıllılıǵı dene hám hawa temperaturaları arasındaǵı parıqqa, sonday, waqıtqa proporcional ekenligin itibárǵa alǵan halda, deneniń suwıw nızamın tabıń.

Δ Suwıw dawamında dene temperaturası T_0 den τ ǵa shekem páseyedi. Waqıttıń t momentinde dene temperaturası $T(t)$ ǵa teń bolsın. Sheksiz kishi waqıt aralıǵında dene bergen jıllılıq muǵdarı, joqarıda aytılǵanı boyınsha,

$$Q'(t) = -k(T-\tau)$$

ǵa teń, bul jerde k – proporcionallıq koefficienti.

Ekinshi tárepten, fizikadan belgili, dene T temperaturadan τ temperaturaǵa shekem suwıǵanda beretuǵın jıllılıq muǵdarı $Q=mc(T(t)-\tau)$ ǵa teń. Tuwındını esaplaymız:

$$Q'(t) = mcT'(t). \quad (6)$$

$Q'(t)$ ushın tabılǵan hár eki ańlatpanı salıstırıp, $mcT'(t)=-k(T-\tau)$ differencial teńlemeni payda qılamız.

$$T(t) = \tau + Ce^{-\frac{k}{mc}t}$$

funkciya (6) differencial teńlemeni qanaatlandıradı (ózińiz tekseriń!), Bul jerde C – qálegen turaqlı san.

Dáslepki shárt (t=0 de T=T_0) C nı tabıwǵa imkán beredi:

$C=T_0-\tau$

Sonıń ushın, deneniń suwıw nızamı tómendegi kóriniste jazıladı:

$$T(t)=\tau+(T_0-\tau)\,e^{-\frac{k}{mc}}.$$

Juwabı: $T(t)=\tau+(T_0-\tau)\,e^{-\frac{k}{mc}}$ ▲.

5-másele. Tandırdan alınǵan (úzilgen) nannıń temperaturası 20 minut ishinde 100° tan 60° qa shekem páseyedi. Sırtqı ortalıq temperaturası 25°. Nannıń temperaturası qansha waqıtta 30° qa shekem páseyedi?

Δ Joqarıdaǵı máseleniń sheshiminen paydalanıp, nannıń suwıw nızamın tómendegi kóriniste jaza alamız:

$$T(t)=\tau+(T_0-\tau)\,e^{-\frac{k}{mc}}=25+\left(100-25\right)e^{at}=25+75e^{at},$$

bul jerde a – belgisiz koefficient.

a nı tabıw ushın t=20 da T(20)=60 teńlikten paydalanamız:

$$T(20)=25+75e^{20a}=60$$

$$75e^{20a}=35,\qquad (e^a)^{20}=\frac{35}{75}=\frac{7}{15},\qquad e^a=\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Demek, nannıń suwıwı $T=25+75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}$ nızamına boysınar eken.

Nannıń temperaturası 30° qa shekem páseyiw waqtın tabamız:

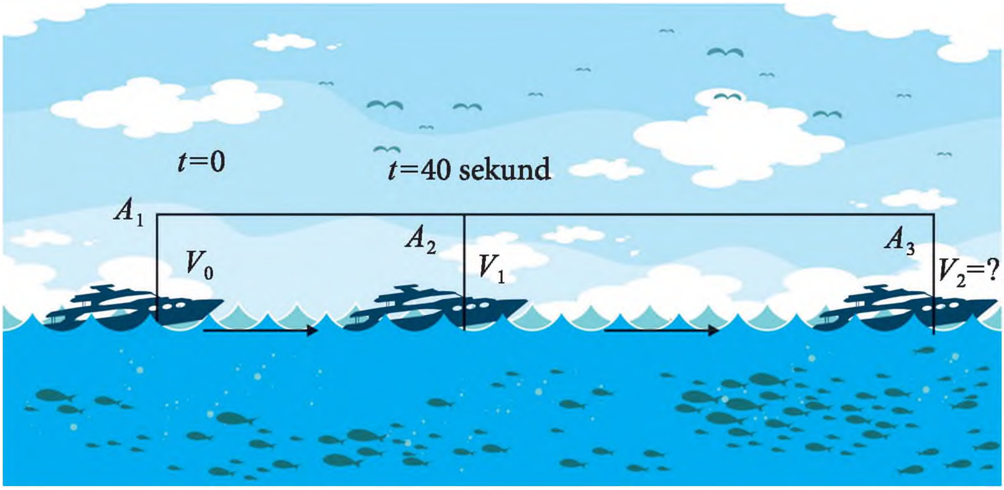
$$30=25+75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}},\quad \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{5}{75}=\frac{1}{15}$$

$$\ln\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{t}{20}(\ln(7)-\ln(15))$$

bolǵanı ushın $t^*=\dfrac{-20\ln 15}{\ln 7-\ln 15}\approx\dfrac{-20\cdot 2,7081}{-0,762}\approx 71$

Juwabı: 1 saat 11 minutta nannıń temperaturası 30° qa shekem páseyedi. ▲

6-másele. Motorlı qayıq tınısh suwda 20 km/h tezlik penen qozǵalmaqta. Belgili waqıttan keyin motor isten shıqtı. Motor toqtaǵannan 40 sekund waqıt ótkennen keyin qayıqtıń tezligi 8 km/h boldı. Suwdıń qarsılıǵı tezlikke proporcional bolsa, motor toqtaǵannan 2 minut waqıt ótkennen keyin qayıq tezligin tabıń.



33-súwret.

Δ Qayıqqa $F=-kv$ kúsh tásir etpekte. Nyuton nızamı boyınsha $F=mv'(t)$. Bunnan $mv'(t)=-kv$.

Bul teńlemeni $v(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}$ kórinistegi funkciya qanaatlandıradı.

t=0 de v=20 shártinen C=20 kelip shıǵadı.

Bunnan $v(t)=20e^{-\frac{r}{m}t}$. $t=40$ sek $=\frac{1}{90}$ saat bolǵanda qayıqtıń tezligi 8 km/saat qa teń, bunnan $8=20e^{-\frac{r}{m}\cdot\frac{1}{90}}$ yaki $e^{\frac{r}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{90}$ hám de

$t=2\min=\frac{1}{30}$ saat bolǵanlıqtan $v=20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}}=20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}=\frac{32}{25}\approx 1,28$

(km/s) ekenligin tabamız.

Juwabı: Motor toqtaǵannan 2 minut waqıt ótkennen keyin, qayıqtıń tezligi shama menen 1,28 km/h qa teń boladı. ▲

7-másele. Radioaktivlik ıdıraw nátiyjesinde radioaktivlik zattıń massası $m(t)$ nıń waqıtqa salıstırǵanda ózgeriw nızamın tabıń. Bul jerde $m(t)$ gramm, t – jıllarda ólshenedi.

Δ Idıraw tezligi massaǵa proporcional dep oylasaq,

$$m'(t)=-\alpha\, m(t) \tag{7}$$

differencial teńlemege iye bolamız. $m(t)=Ce^{-at}$ funkciya bul teńlemeniń sheshimi ekenligin tekseriw múmkin.

$m(t_0)=m_0$ dáslepki sharttten $m(t)=m_0e^{-\alpha\,(t-t_0)}$ nızamlıqqa iye bolamız. *Juwabı:* $m(t)=m_0e^{-\alpha\,(t-t_0)}$. ▲

Ekonomikalıq modeller. Talap hám usınıs ekonomikanıń fundamental (tiykarǵı) tusinikleri esaplanadı.

Talap (tovarlar hám xizmetlerge talap) – qarıydar, paydalanıwshınıń bazardaǵı belgili tovarlardı, zatlardı satıp alıwdı qálewi; bazarǵa shıqqan hám pul múmkinshilikleri menen támiyinlengen zárúrlikleri.

Talap muǵdarınıń ózgeriwine bir qansha faktorlar tásir etedi. Olardıń arasında eń áhmiyetlisi baha faktorı. Tovar bahasınıń páseyiwi satıp alınatuǵın tovar muǵdarınıń ósiwi hám kerisinshe, bahanıń ósiwi satıp alıw muǵdariniń kemeyiwine alıp keledi.

Usınıs — belgili waqıtta hám belgili bahalar menen bazarǵa shıǵarılǵan hám shıǵarılıwı múmkin bolǵan tovarlar hám xizmetler muǵdarı menen ańlatıladı; usınıs – óndiriwshilerdiń (satıwshılardıń)óz tovarların bazarda satıwǵa bolǵan qálewi. Bazarda tovar bahası menen onıń usınıs muǵdarı arasında tikkeley baylanıslılıq bar: baha qánshelli joqarı bolsa, basqa sharayatlar ózgermegen hallarda, satıw ushın sonsha kóbirek tovar usınıs etiledi, yaki kerisinshe, baha páseyiwi menen usınıs kólemi qısqaradı.

Talap hám usınıstıń túp mazmunı olardıń baha arqalı óz ara baylanısta bolıwı. Bul baylanıs — talap hám usınıs nızamı bazar ekonomikasınıń obyektiv nızamı esaplanadı. Talap hám usınıs nızamı boyınsha, bazardaǵı usınıs hám talap tek ǵana muǵdar emes, al óziniń quramı jaǵınan da bir-birine sáykes keliwi kerek, sonda ǵana bazar teń salmaqlıǵına erisiledi. Bul nızam almastırıw nızamı bolıp, bazardı basqarıwshı hám tártiplestiriwshi kúsh dárejesine kóteriledi. Bul boyınsha bazardaǵı talap ózgerisleri dárhal óndiriske jetkiziliwi kerek. Bazardaǵı talap hám usınıs qatnasına qarap óndiris páti hám dúzilmesi quraladı.

Tómendegi *máseleni* kórip shıǵayıq.

Fermer uzaq múddet dawamında miywelerdi bazarǵa satıwǵa shıǵarıp keledi. Hár hápte aqırında ol bahanıń ózgeriw tezligin baqlap, keyingi háptege shıǵarılatuǵın miywelerdıń jańa bahasın shamalaydı.

Dál usınday paydalanıwshılar da bahanıń ózgeriw tezligin baqlap, kelesi háptege satıp alınatuǵın miywelerdıń muǵdarın belgileydi.

Kelesi háptedegi miywelerdiń bahasın p arqalı, al bahanıń ózgeriw tezligin p' arqalı belgileyik.

Usınıs ta, talap ta tovar bahası menen onıń ózgeriw tezligine baylanıslı ekenligin isenim menen aytıwımız múmkin. Bul baylanıs qanday boladı?

∆ Bunday baylanıslardıń eń ápiwayı kórinisi tómendegishe boladı eken: $y=ap'+bp+c$, Bul jerde a, b, c – haqıyqıy sanlar.

Máselen, q arqalı talaptı, s arqalı bolsa usınıstı belgilesek, olar ushın joqarıdağı baylanıslar $q=4p'-2p+39$, $s=44p'+2p-1$ teńlemeler járdeminde ańlatılıwı múmkin.

Bul jağdayda talap hám usınıstıń óz ara teńligi $4p'-2p+39=44p'+2p-1$ qatnas járdeminde ańlatıladı.

Bul teńlikten $p'=-\frac{p-10}{10}$ kórinistegi differencial teńlemeni payda etemiz.

Eger dáslepki bahanı $p(0)=p_0$ dep belgilesek, baha $p=(p_0-10)e^{-\frac{t}{10}}+10$ nızamlığı menen ózgeriwin payda etemiz. ▲

Investiciya. Qanday da bir ónim p baha menen satıladı dep oylayıq, $Q(t)$ funkciya t waqıt dawamında islep shığarılğan ónim muğdarı ózgeriwin bildiredi desek, ol jağdayda t waqıt dawamında $pQ(t)$ ğa teń dáramat alınadı. Aytayıq, alınğan dáramattıń bir bólimi ónim islep shığarıw investiciyasına sarıplansın, yağnıy

$$I(t)=mpQ(t) \tag{8}$$

m – investiciya norması, turaqlı san hám $0<m<1$.

Eger bazar jeterlishe támiyinlengen hám islep shığarılğan ónim tolıq satılğan degen pikirden kelip shıqsa, bul jağday óndiris tezliginiń jáne asıwına alıp keledi.

Al, óndiris tezligi investiciyanıń ósiwine proporcional, yağnıy

$$Q'=l\cdot I(t), \tag{9}$$

bul jerde l – proporcionallıq koefficienti.

(8) formulanı (9) ğa qoyıp

$$Q'=kQ\,,\ \ k=lmp \tag{10}$$

differencial teńlemeni payda etemiz.

C – qálegen turaqlı san bolǵanda $Q = Ce^{kt}$ kórinistegi funkciya (10) differencial teńlemeni qanaatlandıradı.

Dáslepki moment $t=t_0$ da ónim islep shıǵarıw kólemi Q_0 berilgen dep oylayıq. Ol jaǵdayda bul shártten turaqlı C nı tabıw múmkin:

$$Q_0 = Ce^{kt_0}, \text{ bunnan } C = Q_0 e^{-kt_0}.$$

Nátiyjede islep shıǵarıw kólemi $Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}$ nızamı menen ózgeretuǵının bilip alamız.

Soraw hám tapsırmalar

1. Bakteriyalardıń belgili waqıttan soń ekige bólinip barıw procesin tuwındı járdeminde modellestiriń.
2. Tomas Maltustıń jer júzindegi xalıqtıń sanı ósiwine tiyisli máselesin túsindiriń.
3. Tomas Maltustıń logistikalıq iymek sızıǵın túsindiriń.
4. Reklama nátiyjeliligine tiyisli máseleni tuwındı járdeminde modellestiriń.

Shınıǵıwlar

Teksttegi 4-másele sheshiminen paydalanıp, shınıǵıwlardı orınlań **(107–108)**:

107. Temperaturası 25°C bolǵan metall bólegi pechke qoyıldı. Pechtıń temperaturası 25°C dan baslap minutına 20°C tezlik penen tegis ráwishte kóterile basladı. Pech hám metall temperaturasınıń parqı T°C bolǵanda, metall minutına $10 \cdot T$°C tezlik penen ısıtıla baslaydı. Metall bóleginiń 30 minuttan keyingi temperaturasın tabıń.

108. Denenıń dáslepki temperaturası 5°C. Dene N minut dawamında 0°C ǵa shekem ısıdı. Qorshaǵan ortalıqtıń temperaturası 25°C bolıp tur. Dene qashan 20°C qa shekem ısıydı?

Teksttegi 7-máseleniń sheshiminen paydalanıp, shınıǵıwlardı orınlań:

109. Tájiriybeler boyınsha 1 jıl dawamında radiydıń hár bir grammınan 0,44 mg zat jemiriledi

a) neshe jıldan soń bar radiydiń 20 procenti jemiriledi?

b) bar radiydiń 400 jıldan soń neshe procenti qaladi?

Teksttegi 6-máseleni sheshiwdegi usıllardan paydalanıp, shınıǵıwlardı orınlań **(110–111):**

110. Qayıq suwdıń qarsılıǵı tásiri astında óz qozǵalısın ástelestiredi. Suwdıń qarsılıǵı qayıqtıń tezligine proporcional. Qayıqtıń dáslepki tezligi 1,5 m/s, 4 sekundtan soń onıń tezligi 1 m/s tı quradı. Neshe sekundtan soń qayıqtıń tezligi 2 ese kemeyedi?

111. 10 l kólemdegi ıdıs hawa menen toltırılǵan (80% azot, 20% kislorod). Usı ıdısqa 1 sekundta 1 litr tezlikte azot búrkip shıqpaqta. Ol úzliksiz ráwishte aralasıp, usı tezlikte ıdıstan shıqpaqta. Qansha waqıttan soń ıdısta 95% azotlı aralaspa payda boladı?

Kórsetpe: $y(t)$ menen t waqıttaǵı azot úlesin belgilesek, $y(t)$ funkciya $y' \cdot V = a(1-y)$ qatnastı qanaatlandıradı deyik. Bul jerde V- ısıtıw kólemi, a- úplew tezligi.

! Qadaǵalaw jumısı úlgisi

1. Ultanı kvadrat bolǵan tuwrı múyeshli parallelepiped kórinisindegi ústi ashıq metall ıdıs jasamaqshı. Idıstıń kólemi 270 l bolıwı kerek. Idıstıń ólshemleri qanday bolǵanda onı jasawda eń kem metall ketedi?

2. Materiallıq noqat $s(t) = -\frac{t^4}{4} + 72t^3$ nızamı menen qozǵalmaqta ($s(t)$ metrde, t waqıt sekundta ólshenedi).

1) eń úlken tezleniwge erisetuǵın waqıttı (t_0);

2) t_0 waqıttaǵı momentlik tezlikti;

3) t_0 waqıt dawamında basıp ótilgen joldı tabıń.

3. Juwıq esaplaw formulasınan paydalanıp $\ln 0{,}92$ ni tabıń.

4. Juwıq esaplaw formulasınan paydalanıp sin(–1, 2) ni tabıń.

5. Ónim islep shıǵarıwshı isbilermenniń kúnlik dáramatı tómendegi formula menen esaplanadı:

$P(x) = -3x^2 + 42x - 6$ (mıń sum) Bul jerde x – ónimler sanı.

Tómendegilerdi anıqlań:

1) eń úlken dáramat alıw ushın isbilermen qansha ónim islep shıǵarıwı kerek?

2) isbilermenniń eń úlken dáramatı neshe swmdı quraydı?

33–36 MÁSELELER SHESHIW

112. Materiallıq noqat qozǵalıs nızamı $s=s(t)$ boyınsha onıń eń úlken yamasa eń kishi tezligin tabıń:

1) $s=13t$; 2) $s=17t-5$; 3) $s=t^2+5t+18$; 4) $s=t^3+2t^2+5t+8$; 5) $s=2t^3+5t^2+6t+3$; 6) $s=13t^3+2t^2$; 7) $s=t^3+t^2+3$.

113. Berilgen funkciya grafigine: 1) $x_0=-1$; 2) $x_0=2{,}2$; 3) $x_0=0$ abscissalı noqatta ótkizilgen urınbanı tabıń:

1) $f(x)=12x^2+5x+1$; 2) $f(x)=13x+4$; 3) $f(x)=60$; 4) $f(x)=x^3+4x$;

114. Berilgen funkciya ushın $y=-7x+2$ tuwrı sızıqqa parallel bolǵan urınba teńlemesin jazıń:

1) $f(x)=5x^3-2x^2+16$; 2) $f(x)=-4x^2+5x+3$; 3) $f(x)=-8x+5$.

115. Berilgen $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar grafikleriniń urınbaları parallel bolatuǵın noqatların tabıń:

1) $f(x)=2x^2-3x+4$, $g(x)=12x-8$;
2) $f(x)=18x+19$, $g(x)=-15x+18$;
3) $f(x)=2x+13$, $g(x)=4x-19$;
4) $f(x)=2x^3$, $g(x)=4x^2$;
5) $f(x)=2x^3+3x^2$, $g(x)=15x-17$;
6) $f(x)=2x^4$, $g(x)=4x^3$;

116. 1) $y=\frac{1}{x}$ funkciya grafiginiń $x=-\frac{1}{2}$ noqattan ótiwshi urınba teńlemesin dúziń. 2) $y=x^2$ parabolanıń $x=1$ hám $x=3$ abscissalarǵa sáykes noqatları tutastırılǵan. Parabolanıń usı 2 noqattı tutastırıwshı kesindige parallel bolǵan urınbası qaysı noqattan ótedi?

3) Materiallıq noqat $s(t)=\frac{2}{9}\cdot\sin\frac{\pi t}{2}+3$ nızamı menen háreketlenbekte. (s-santimetrda, t-sekundta). Materiallıq noqattıń 1-sekundtaǵı tezleniwin tabıń.

117. Funkciyanıń berilgen noqattaǵı tuwındısın esaplań:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=-\frac{1}{2}$; 2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=-\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-2$;

4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=5$;

6) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=-2$;

8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=-\frac{\pi}{8}$.

118. Berilgen waqıttaǵı tezlik hám tezleniwdi tabıń:

1) $s(t)=5t^2-t+50$ $t_0=2$;

2) $s(t)=t^3+12t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=2t+t^3$, $t_0=5$;

4) $s(t)=8\sin t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

119. Funkciyanıń abcsissası berilgen noqattaǵı tuwındısın esaplań:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=\frac{1}{2}$;

2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=2$;

4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=-5$;

6) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=2$;

8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=-\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=\frac{\pi}{8}$;

10) $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

120. Berilgen waqıttaǵı tezlik hám tezleniwdi tabıń:

1) $s(t)=3t^2-2t+10$, $t_0=2$;

2) $s(t)=t^3-6t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=5t+2t^3$, $t_0=5$;

4) $s(t)=8\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

Berilgen funkciyanıń tuwındısın tabıń (**121–122**):

121. 1) $f(x)=-x^2+x+30$; 2) $f(x)=\sin x-\cos x$; 3) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$;

4) $f(x)=4^x-\sin x$; 5) $f(x)=8\cos x$; 6) $f(x)=\ln x-10x^2+x-1$.

122. 1) $y=x^4$; 2) $y=\frac{x-1}{x+2}$; 3) $y=x-\frac{20}{x}$; 4) $y=x^2\ln x$;

5) $y=x^3\sin x$; 6) $y=e^x\sin x$; 7) $y=\frac{x+1}{4x^2}$; 8) $y=2(10x-1)\sin x$.

123. Berilgen funkciyalar ushın $f'(-\frac{\pi}{2}), f'(\frac{\pi}{4})$ sanlardı esaplań:

1) $f(x)=e^x\cos x$; 2) $f(x)=3x+1$; 3) $f(x)=2x^2+x+3$;

4) $f(x)=\sin x+x^2$; 5) $f(x)=\sin x+\cos x$; 6) $f(x)=\sin x$;

7) $f(x)=\cos x+x^4$; 8) $f(x)=\sin 3x+\cos 3x$.

124. Materiallıq noqat $x(t)=-\frac{t^3}{6}+6t^2+15$ nızamı menen qozǵalmaqta.

1) tezleniw nol bolǵan t_0 waqıttı; 2) usı t_0 waqıttaǵı tezlikti tabıń.

125*. $f(x)=x^2-13x+2$ funkciya Ox kósheri menen qanday múyesh astında kesilisedi?

126. $f'(0)$ sandı tabıń: 1) $f(x)=x^6-4x^3+4$; 2) $f(x)=(x+10)^6$.

127. $y'(x)$ ti tabıń: 1) $y(x)=\sin^2 x$; 2) $y(x)=\cos^2 x$; 3) $y(x)=\mathrm{tg}^2 x$.

128. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń:

1) $f(x)=3+7x$; 2) $f(x)=x^3+17x$; 3) $f(x)=\frac{1}{4}x+18$;

4) $f(x)=\frac{x+21}{x}$; 5) $f(x)=x^2+5x-14$; 6) $f(x)=x(x^2+8)$;

7) $f(x)=-x^2-4x+6$; 8) $f(x)=-\frac{1}{x^2}$;

9) $f(x)=x^3-12x^2-17x-23$; 10) $f(x)=3x^4+18x^3-6$;

11) $f(x)=x^3-5x^2+19x+22$; 12) $f(x)=x^4+7x^2$.

129. Funkciyanıń stacionar noqatların tabıń:

1) $f(x)=3x^2-7x+9$; 2) $f(x)=19x-\frac{1}{7}x^3$; 3) $f(x)=5x^3$;

4) $f(x)=8x^2$; 5) $f(x)=7x-14$; 6) $f(x)=27-x^3$;

7) $f(x)=12x^3+13x^2-16$; 8) $f(x)=x^3-6x^2+9$.

130. Funkciyanıń lokal maksimum hám mimimumların tabıń:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x^4$; 2) $f(x)=14+13x^2-12x^3$;

3) $f(x)=x^4-3x^3+x^2+9$; 4) $f(x)=2x^4-x^3+7$.

131. Funkciyanıń ósiw, kemeyiw aralıqları hám de lokal maksimum hám minimumların tabıń:

1) $f(x)=x^3-64x$; | 2) $f(x)=2x^3-24$; | 3) $f(x)=4x^3-108x$.

132. Funkciyanıń eń úlken hám eń kishi mánislerin tabıń:

1) $f(x)=x^4-3x^2+2$, $x\in[-4;1]$; 2) $f(x)=x^5+6x^3+1$, $x\in[-1;2]$;

3) $f(x)=\frac{x}{x+4}$, $x\in[1;5]$; 4) $f(x)=x^3+6x^2+5x+8$, $x\in[-3;4]$.

133. Funkciyanıń grafigin sızıń:

1) $y=x^3-2x^2+3x-2$; | 2) $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3$; | 3) $y=x^4+4x^3$.

134. Tuwrımúyeshlik kórinisindegi egin maydanınıń átırapın qorshaw ushın 1000 metr reshyotka satıp alındı. Bul reshyotka járdeminde eń kóbi menen neshe kvadrat metr maydandı qorshap alıw múmkin?

135. Tárepi 16 dm bolǵan kvadrat kórinisindegi kartonnan ústi ashıq qutı tayarlandı. Bunda kartonnıń ushlarınan birdey kishkene kvadratlar kesip alındı. Qutınıń kólemi eń úlken bolıwı ushın onıń ultanı neshe santimetr bolıwı kerek?

136*. Konserva banka cilindr kórinisinde bolıp, onıń tolıq beti 512π cm^2 qa teń. Bankaǵa eń kóp suw sıyıwı ushın banka ultanınıń radiusı hám biyikligi qanday bolıwı kerek?

137. Tuwrımúyeshlik kórinisindegi jerdiń maydanı 3600 m^2. Jerdiń tárepleri qanday bolǵanda, onı qorshaw ushın eń kem reshyotka zárúr boladı?

138*. Radiusi 8 dm bolǵan sharga eń kishi kólemli konus sırtlay sızılǵan. Usı konustıń biyikligin tabıń.

139*. Ultanı kvadrat bolǵan tuwrı múyeshli parallelepiped kórinisindegi ashıq metall ıdısqa 32 *l* suyıqlıq ketedi. Ídıstıń ólshemleri qanday bolǵanda onı jasawǵa eń kem metall sarıplanadı?

140. Materiallıq noqat $s(t)=-\frac{t^4}{4}+10t^3$ nızamı menen qozǵalmaqta (s(t) metrde, t sekundta ólshenedi).

1) eń úlken tezleniwge erisetuǵın (t_0) waqıttı;

2) t_0 waqıttaǵı momentlik tezlikti;

3) t_0 waqıtta basıp ótilgen joldı tabıń.

141. Hawa sharına $t\in[0;10]$ minut aralıǵında $V(t)=t^3+3t^2+2t+4$ m^3 hawa búrkip shıǵılmaqta.

1) dáslepki waqıttaǵı hawa kólemin;

2) $t=10$ minuttaǵı hawa kólemin;

3) $t=5$ minuttaǵı hawa úplew tezligin tabıń.

142. Akram shalbar tigiw ushın buyırtpa aldı. Bir ayda x dana shalbar tikse, $p(x)=-2x^2+240x$ (mıń swm) dáramat aladı.

1) dáramattı eń kóp alıw ushın qansha shalbar tigiw kerek?

2) eń úlken dáramat neshe swm boladı?

143. Funkciyanıń tuwındısın tabıń:

1) $y=e^{3x}$;	2) $y=e^{\sin x}$;	3) $y=\sin(3x+2)$;	4) $y=(2x+1)^4$;
5) $y=\frac{x-2}{x^2+1}$;	6) $y=\frac{\ln x}{x}$;	7) $y=\operatorname{arctg}2x$;	8) $y=x^2\cdot\cos x$.

144. $f(x)=e^{2x}$ hám $g(x)=4x+2$ funkciyalar ushın $F(x)$ quramalı funkciyanı dúziń:

1) $F(x)=f(g(x))$; 2) $F(x)=f(x)^{g(x)}$;

3) $F(x)=g(f(x))$; 4) $F(x)=\sqrt{g(g(x))}$.

145. Quramalı funkciyanıń tuwındısın tabıń:

1) $y=(x^2+1)^5$; 2) $y=\ln\cos x$;

3) $y=\sqrt{5x-7}$; 4) $y=\sqrt{\operatorname{tg}(2x-3)}$;

5) $y=\operatorname{arctg}(3x-4)$; 6*) $y=\sin(\operatorname{arctg}2x)$;

7) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$; 8*) $y=e^{\sin(\cos x)}$.

146. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń:

1) $y=2+x-x^2$;
2) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+100}\quad (x\geq 0)$;
3) $y=3x-x^3$;
4) $y=2x-\sin x$;
5) $y=\frac{2x}{1+x^2}$;
6) $y=\frac{x^2}{2^x}$.
7) $y=(x-1)^3$;
8) $y=(x-1)^4$.

147. Funkciyanıń stacionar noqatları, lokal maksimum hám minimumların tabıń:

1) $y=x^3-6x^2+9x-4$;
2) $y=\frac{2x}{1+x^2}$;
3) $y=x+\frac{1}{x}$;
4) $y=\sqrt{2x-x^2}$.

148. Funkciyanıń berilgen aralıqtaǵı eń úlken hám eń kishi mánislerin tabıń:

1) $f(x)=2^x$, $[-1;5]$;
2) $f(x)=x^2-4x+6$, $[-3; 10]$;
3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $[0{,}01; 100]$;
4) $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $[-1;1]$;
5) $f(x)=\cos x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$;
6) $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$, $[-10; 10]$;
7) $f(x)=\sin x$, $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$;
8) $f(x)=\left|x^2+3x+2\right|$, $[-15; 10]$.

149. Funkciyanı tekseriń hám grafigin sızıń:

1) $y=3x-x^3$;
2) $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$;
3) $y=(x+1)(x-2)^2$.
4) $y=x+\frac{1}{x}$;
5) $y=\sqrt{16-x^2}$;
6) $y=\sqrt{x^2-9}$;
7) $y=x^2-5|x|+6$;
8) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$.

II BAP INTEGRAL HÁM ONÍŃ QOLLANÍLÍWLARÍ

37–39 DÁSLEPKI FUNKCIYA HÁM ANÍQ EMES INTEGRAL TÚSINIKLERI

Eger noqat qozǵalıs baslanǵannan baslap t waqıt dawamında $s(t)$ aralıqtı ótken bolsa, onıń momentlik tezligi $s(t)$ funkciyanıń tuwındısına teń ekenin bilesiz: $v(t)=s'(t)$. Ámeliyatta *keri másele:* noqattıń berilgen qozǵalıs tezligi $v(t)$ boyınsha onıń basıp ótken jolı $s(t)$ nı tabıw máselesi de ushırasadı. Sonday $s(t)$ funkciyanı tabıw kerek, onıń tuwındısı $v(t)$ bolsın. Eger $s'(t)=v(t)$ bolsa, $s(t)$ funkciya $v(t)$ funkciyanıń *dáslepki funkciyası* delinedi. Ulıwma, mınanday anıqlama kirgiziw múmkin:

Eger $(a;\ b)$ ǵa tiyisli qálegen x ushın $F'(x)=f(x)$ bolsa, $F(x)$ funkciya $(a;\ b)$ aralıqta $f(x)$ tıń *dáslepki funkciyası* delinedi.

1-mısal. a – berilgen qálegen san hám $v(t)=at$ bolsa, $s(t)=\frac{1}{2}at^2$ funkciya $v(t)$ funkciyanıń dáslepkisi boladı, sebebi $s'(t)=(\frac{at^2}{2})'=at=v(t)$.

2-mısal. $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty;\ \infty)$, bolsa, $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ funkciya $f(x)$ tıń $(-\infty;\ \infty)$ degi dáslepki funkciyası boladı, sebebi

$$F'(x)=(\frac{1}{3}x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x).$$

3-mısal. $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, bunda $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$, funkciya ushın $F(x)=\mathrm{tg}x$ dáslepki funkciya boladı, sebebi $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

4-mısal. $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$, bolsa, $F(x)=\ln x$ funkciya $\frac{1}{x}$ tıń dáslepki funkciyası boladı, sebebi $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

1-másele. $F_1(x)=\frac{x^4}{4}$, $F_2(x)=\frac{x^4}{4}+17$, $F_3(x)=\frac{x^4}{4}-25$ funkciyalar bazı-bir $f(x)=x^3$ funkciyanıń dáslepki funkciyaları ekenin dálilleń.

Δ tuwındılar kestesi boyınsha jaza alamız:

1) $F_1'(x)=(\frac{x^4}{4})'=4\cdot\frac{x^3}{4}=x^3=f(x)$.

2) $F_2'(x)=(\frac{x^4}{4}+17)'=(\frac{x^4}{4})'+(17)'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0+x^3=x^3=f(x)$

3) $F_3'(x)=(\frac{x^4}{4}-25)'=(\frac{x^4}{4})'-(25)'=4\cdot\frac{x^3}{4}-0=x^3=f(x)$.

Bul máseleden sonday juwmaqqa keliwimiz múmkin: qálegen $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$ funkciya (C – bazı-bir turaqlı san) hám $f(x)=x^3$ ushın dáslepki funkciya boladı. Shınında da, $F'(x)=(\frac{x^4}{4}+C)'=(\frac{x^4}{4})'+C'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0=x^3=f(x)$. ▲

Bul máseleden jáne sonday juwmaqqa keliwimiz múmkin: berilgen $f(x)$ funkciya ushın onıń dáslepki funkciyası bir mánisli anıqlanbaydı.

Eger $F(x)$ funkciya $f(x)$ tıń bazı-bir aralıqtaǵı dáslepki funkciyası bolsa, $f(x)$ funkciyanıń barlıq dáslepkileri $F(x)+C$ (C – qálegen turaqlı san) kórinisinde jazıladı.

$F(x)+C$ kórinisindegi barlıq funkciyalar kópligi $f(x)$ tıń *anıq emes integralı* delinedi hám $\int f(x)dx$ dep belgilenedi.

Demek, $\int f(x)dx=F(x)+C$.

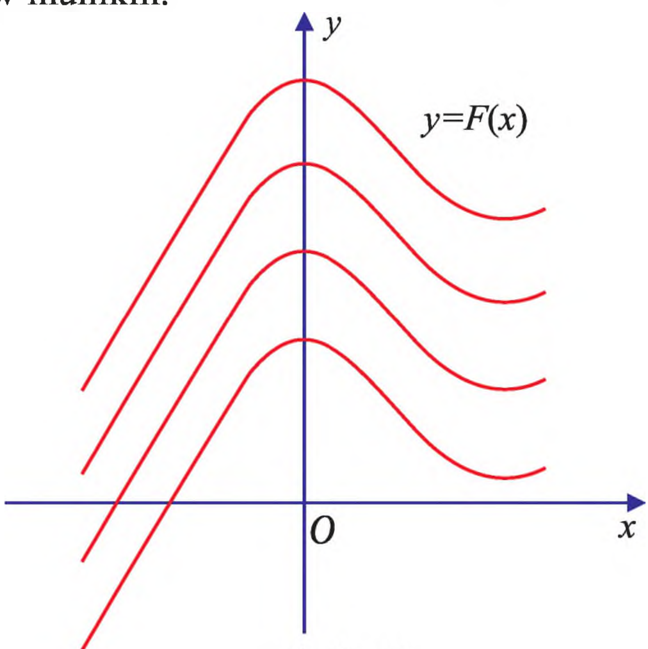
$\int$ – integral belgisi, $f(x)$ – integral astındaǵı funkciya, al $f(x)dx$ integral astındaǵı ańlatpa delinedi.

5-mısal. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, sebebi tuwındılar kestesi boyınsha,

$$(\frac{a^x}{\ln a}+C)'=(a^x)'\cdot\frac{1}{\ln a}+C'=a^x\cdot\ln a\cdot\frac{1}{\ln a}+0=a^x.$$

6-mısal. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1,$ Sebebi $(\frac{x^{k+1}}{k+1} + C)' = \frac{1}{k+1} \cdot (x^{k+1})' + C' =$ $= \frac{k+1}{k+1} \cdot x^k + 0 = x^k$. $k=-1$ bolsa, $x>0$ da 4-mısal boyınsha, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$.

$y=F(x)+C$ funkciyanıń grafigi $y=F(x)$ funkciya grafigin Oy kósher boylap jılıstırıwdan payda etiledi (1-súwret). Turaqlı san C ti tańlaw esabınan dáslepki funkciya grafiginiń berilgen noqat arqalı ótiwine erisiw múmkin.



1-súwret.

2-másele. $f(x)=x^2$ funkciyanıń grafigi $A(3;\ 10)$ noqattan ótetuǵın dáslepki funkciyasın tabıń.

Δ $f(x)=x^2$ funkciyanıń barlıq dáslepki funkciyaları $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ kóriniste boladı, sebebi $F'(x) = (\frac{x^3}{3} + C)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + C' = x^2 + 0 = x^2$.

Turaqlı san C ti $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ funkciyanıń grafigi (3; 10) noqattan ótetuǵın etip tańlaymız: $x=3$ da $F(3)=10$ bolıwı kerek. Bunnan

$10=\frac{3^3}{3}+C$, $C=1$.Demek, izlenip atırǵan dáslepki funkciya $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$ boladı. *Juwabı:* $\frac{x^3}{3}+1$. ▲

3-másele. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funkciyanıń grafigi $A(8;15)$ noqattan ótetuǵın dáslepki funkciyasın tabıń.

△ $f(x)=\sqrt[3]{x}$ tıń barlıq dáslepki funkciyaları $F(x)=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}$ +C kóriniste boladı, sebebi

$$F'(x)=\left(\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C\right)'=\frac{3}{4}(x^{\frac{4}{3}})'+C'=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}+C'=x^{\frac{1}{3}}+0=\sqrt[3]{x}.$$

Turaqlı san C tı sonday etip tańlaymız, $F(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$ funkciyanıń grafigi A(8, 15) noqattan ótsin, yaǵnıy F(8)=15 teńlik orınlansın. $x^{\frac{4}{3}}=x\sqrt[3]{x}$ bolǵanlıqtan $15=\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\sqrt[3]{8}+C$, bunnan C=3. Demek, izlenip atırǵan dáslepki funkciya $F(x)=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$ boladı. *Juwabı:* $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$. ▲

4*-másele. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$ ekenin kórsetiń.

△ $x>0$ de $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$, sebebi $(\ln x+C)'=\frac{1}{x}+0=\frac{1}{x}$;

$x<0$ de $\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$, sebebi $(\ln(-x)+C)'=\frac{(-1)}{(-x)}+0=\frac{1}{x}$. ▲

? Soraw hám tapsırmalar

1. Dáslepki funkciya degenimiz ne? Mısallar keltiriń.
2. Berilgen $f(x)$ funkciya ushın dáslepki funkciya bir mánisli tabıla ma? Ne ushın?
3. Dáslepki funkciya $F(x)$ tıń grafiginiń berilgen noqatınan ótiwine qalayınsha erisiw múmkin? Mısalda túsindiriń.

Shınıǵıwlar

1. Haqıqıy sanlar kópligi $R=(-\infty,\infty)$ da $f(x)$ funkciya ushın $F(x)$ funkciyanıń dáslepki funkciya ekenin dálilleń:

1) $F(x)=x^2-\sin 2x+2018$, $\quad f(x)=2x-2\cos 2x$;

2) $F(x)=-\cos\frac{x}{2}-x^3+28$, $\quad f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

3) $F(x)=2x^4+\cos^2 x+3x$, $\quad f(x)=8x^3-\sin 2x+3$;

4) $F(x)=3x^5+\sin^2 x-7x$, $\quad f(x)=15x^4+\sin 2x-7$.

Tómendegi funkciyalardıń barlıq dáslepki funkciyaların, tuwındılar kestesinen paydalanıp tabıń (**2–6**):

2. 1) $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$; 2) $f(x)=6x^5$; 3) $f(x)=x^{10}$; 4) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x}$;
5) $f(x)=\sin x$; 6) $f(x)=\cos x$; 7) $f(x)=\sin 2x$; 8) $f(x)=\cos 2x$;

3. 1) $f(x)=4^x$; 2) $f(x)=\pi^x$; 3) $f(x)=e^x$; 4) $f(x)=a^x$;
5) $f(x)=a^{2x}$; 6) $f(x)=e^{\pi x}$; 7) $f(x)=10^{3x}$; 8) $f(x)=e^{2x+3}$.

4. 1) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$; 2) $f(x)=\frac{1}{4x-5}$; 3) $f(x)=\frac{1}{2x+7}$;
4) $f(x)=\frac{1}{ax}$; 5) $f(x)=\frac{1}{ax+b}$; 6) $f(x)=\frac{a}{ax-b}$.

5. 1) $f(x)=\sin 3x$; 2) $f(x)=\sin(2x+5)$; 3) $f(x)=\sin(4x+\pi)$;
4) $f(x)=\cos 5x$; 5) $f(x)=\cos(3x-2)$; 6) $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$.

6. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; | 2) $f(x)=\frac{1}{x^5}$; | 3) $f(x)=(3x+2)^2$; | 4) $f(x)=(2x-1)^3$.

7. Berilgen $f(x)$ funkciya ushın onıń berilgen A noqattan ótiwshi dáslepki funkciyasın tabıń:

1) $f(x)=2x+3$, $\quad A(1;5)$; $\quad$ 2) $f(x)=-x^2+2x+5$, $\quad A(0;2)$;

3) $f(x)=\sin x$, $\quad A(0;3)$;4) $\quad f(x)=\cos x$, $\quad A(\frac{\pi}{2};5)$.

Berilgen $f(x)$ funkciya ushın onıń sonday dáslepki funkciyasın tabıń, bul dáslepki funkciyanıń grafigi y tuwrı sızıq penen tek ǵana bir ulıwma noqatqa iye bolsın (**8–9**):

8. 1) $f(x)=4x+8,\ y=3;$ 2) $f(x)=3-x,\ y=7,$

3) $f(x)=4{,}5x+9,\ y=6{,}8;$ 4) $f(x)=2x-6,\ y=1.$

9*. $f(x)=ax+b,\ y=k.$

Kórsetpe: $F(x)=\dfrac{ax^2}{2}+bx+C,$ másele shártinen hám $\dfrac{ax^2}{2}+bx+C=k$ kvadrat teńlemeden C ti tabıń. $C=\dfrac{2ak+b^2}{2a}=k+\dfrac{b^2}{2a}$ boladı.

10*. $f(x)$ ushın onıń sonday dáslepki funkciyasın tabıń, bul dáslepki funkciyanıń grafigi berilgen noqatlardan ótsin:

1) $f'(x)=\dfrac{16}{x^3},$ A (1; 10) hám B (4; –2);

2) $f'(x)=\dfrac{54}{x^4},$ A(–1; 4) hám B (3; 4);

3) $f'(x)=6x,$ A(1;6) hám B(3;30);

4) $f'(x)=20x^3;$ A(1;9) hám B(–1;7).

Kórsetpe: Berilgen $f'(x)$ boyınsha $f(x)+C_1$ tabıladı. Keyin $f(x)+C_1$ ushın dáslepki funkciyası $F(x)=\int f(x)dx+C_1x+C_2$ tabıladı. Berilgen noqatlar koordinataların aqırǵı teńlikke qoyıp, C_1 hám C_2 sanlardı tabıw ushın sızıqlı teńlemeler sistemasına kelinedi.

11*. Berilgen $f(x)$ funkciya ushın onıń sonday dáslepki funkciyasın tabıń, bul dáslepki funkciyanıń grafigi menen $f(x)$ tuwındısınıń grafigi abscissası berilgen noqatta kesilissin:

1) $f(x)=(3x-2)^{\frac{1}{3}},\ x_0=1;$ 2) $f(x)=(4x+5)^{\frac{1}{4}},\ x_0=-1;$

3) $f(x)=(7x-5)^{\frac{1}{7}},\ x_0=1;$ 4) $f(x)=(kx+b)^{\frac{1}{k}},\ x_0=\dfrac{1-b}{k}.$

12. Berilgen $f(x)$ funkciya ushın berilgen noqattan ótiwshi dáslepki funkciyanı tabıń:

1) $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$, $A(3;\ 7)$; 2) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, $A(0;\ 1)$;

3) $f(x)=\cos x$, $A(\dfrac{\pi}{2};8)$; 4) $f(x)=\sin x$, $A(\pi;10)$.

13. $F(x)$ funkciya san kósherine $f(x)$ funkciyanıń dáslepki funkciyası ekenin kórsetiń:

1) $F(x)=k\cdot e^{\frac{x}{k}}$, $f(x)=e^{\frac{x}{k}}$, $k\neq 0$;

2) $F(x)=C+\sin kx$, $f(x)=k\cdot\cos kx$, C – turaqlı san;

3) $F(x)=C+\cos kx$, $f(x)=-k\cdot\sin kx$, C – turaqlı san;

4) $F(x)=\dfrac{1}{5}\sin(5x+12)$, $f(x)=\cos(5x+12)$.

14. $f(x)$ funkciyanıń berilgen noqattan ótiwshi dáslepki funkciyasın tabıń:

1) $f(x)=\sin 3x$, $A(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{1}{3})$; 2) $f(x)=\cos 5x$, $A(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{4}{5})$;

3) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$, $A(\dfrac{\pi}{3};1)$; 4) $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$, $A(\pi;\dfrac{9}{2})$.

15. $f(x)$ funkciya ushın onıń berilgen teńlemeler sistemasınıń sheshimi $(x_0;\ y_0)$ noqattan ótiwshi dáslepki funkciyasın tabıń:

1) $f(x) = 3x^2$; $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=3,\\ 4\log_2 x-\log_2 y=2.\end{cases}$

2) $f(x)=4x^3$; $\begin{cases}5^x+5^y=30,\\ 3\cdot 5^x-2\cdot 5^y=15.\end{cases}$

3) $f(x)=\cos x$; $\begin{cases}x+y=\dfrac{3\pi}{2},\\ 4x-3y=-\pi.\end{cases}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{5x+e;}$; $\begin{cases}2^x+3^y=4,\\ 3\cdot 2^x-3^y=0.\end{cases}$

40–43 INTEGRALLAR KESTESI. INTEGRALLAWDÍŃ EŃ ÁPIWAYI QAǴIYDALARÍ

Integrallar kestesin tuwındılar kestesi járdeminde dúziw múmkin.

№	Funkciya $f(x)$	Dáslepki funkciya $F(x)+C$
1	$x^p,\ p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
2	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert+C$
3	e^x	e^x+C
4	$\sin x$	$-\cos x+C$
5	$\cos x$	$\sin x+C$
6	$(kx+b)^p,\ \ p\neq -1,\ \ k\neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
7	$\frac{1}{kx+b},\ \ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$
8	$e^{kx+b},\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$
9	$\sin(kx+b),\ \ k\neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
10	$\cos(kx+b),\ \ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$
11	$1/\cos^2 x$	$\mathrm{tg}x+C$
12	$1/\sin^2 x$	$-\mathrm{ctg}x+C$
13	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
14	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x+C$
15	$f(kx+b)$	$\frac{1}{k}F(kx+b)+C$
16	$f(g(x))g'(x)$	$F(g(x))+C$

Qálegen bir X aralıqta anıqlanǵan $F(x)$ funkciya $f(x)$ funkciyanıń dáslepki funkciyası bolıwı ushın eki funkciya da – $F(x)$ hám $f(x)$ funkciya da usı X aralıqta anıqlanǵan bolıwı kerek.

Máselen, $\frac{1}{5x-8}$ funkciyanıń $5x–8>0$, yaǵnıy $x>1{,}6$ aralıqtaǵı integralı, keste boyınsha, $\frac{1}{5}\ln(5x-8)+C$ ke teń.

Differenciyallaw qaǵıydalarınan paydalanıp, *integrallaw qaǵıydaların* bayan etiw múmkin.

$F(x)$ hám $G(x)$ funkciyalar qálegen bir aralıqta, sáykes ráwishte, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń dáslepki funkciyaları bolsın. Tómendegi qaǵıydalar orınlı:

1-qaǵıyda: $a{\cdot}F(x)$ funkciya $a{\cdot}f(x)$ funkciyanıń dáslepki funkciyası boladı, yaǵnıy

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot F(x)+C.$$

2-qaǵıyda: $F(x)\pm G(x)$ funkciya $f(x)\pm g(x)$ funkciyanıń dáslepki funkciyası boladı, yaǵnıy:

$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx=F(x)\pm G(x)+C$$

1-mısal. $f(x)=5\sin(3x+2)$ funkciyanıń integralın tabıń.

∆ Bul funkciyanıń integralın 1-qaǵıyda hám integrallar kestesiniń 9-bánti boyınsha tabamız:

$$\int f(x)dx=\int 5\sin(3x+2)dx=5\int\sin(3x+2)dx=$$

$$=5\cdot(-\frac{1}{3}\cos(3x+2))+C=-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C,$$

sebebi integrallar kestesi boyınsha

$$\int\sin(3x+2)dx=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C.$$

Juwabı: $-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C.$ ▲

2-mısal. $f(x)=8x^7+2\cos 2x$ funkciyanıń integralın tabıń.

△ Bul funkciyanıń integralın 1- hám 2-qaǵıydalar hám de integrallar kestesiniń 1- hám 10-bánti boyınsha tabamız:

$$\int f(x)dx=\int(8x^7+2\cos 2x)dx=8\int x^7dx+2\int\cos 2xdx$$

$$=8\cdot\frac{1}{8}x^8+2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C=x^8+\sin 2x+C$$

Juwabı: $x^8+\sin 2x+C.$ ▲

3-mısal. $\int\frac{xdx}{x^2+8}$ integralın esaplań.

△ Bul kórinistegi mısallardı sheshiwde *ózgeriwshini almastırıw* qolaylı.

Eger $x^2+8=u$ delinse, $du=2xdx$, $xdx=\frac{1}{2}du$ boladı. Onda

$$\int\frac{xdx}{x^2+8}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C.$$

Tekseriw: Tabılǵan dáslepki funkciyadan tuwındı alınsa, integral astındaǵı funkciya $\frac{x}{x^2+8}$ payda bolıwı kerek. Shınında da,

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C\right)'=\frac{1}{2}(\ln(x^2+8))'+C'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+8}\cdot(x^2+8)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+8}=\frac{x}{x^2+8}$$

Juwabı: $\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+8)+C.$ ▲

4-mısal. $\int e^{\sin x}\cos xdx$ integraldı esaplań.

△ $\sin x=t$ almastırıwdı orınlaymız. Ol jaǵdayda $dt=\cos xdx$ hám berilgen integral $\int e^t dt$ kóriniste boladı. Integrallar kesteleriniń 3-bánti boyınsha $\int e^t dt=e^t+C$ boladı. Demek, $\int e^{\sin x}\cos xdx=e^{\sin x}+C.$

Tekseriw. $(e^{\sin x}+C)'=(e^{\sin x})'+C'=e^{\sin x}(\sin x)'+0=e^{\sin x}\cos x$ – berilgen integral astındaǵı funkciyanı payda ettik.

Juwabı: $e^{\sin x}+C$. ▲

5-mısal. $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$ integraldı esaplań.

△ Bunda $2\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 8x + \sin 2x$ birdeylik járdem beredi. Ol jaǵdayda

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}(-\cos 8x) + \frac{1}{4}(-\cos 2x) + C = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Juwabı: $-\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C$. ▲

6*-mısal. $\int \cos mx \cos nx dx$ integraldı esaplań.

△ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ birdeylikke hám integrallaw kestesiniń 10-bánti boyınsha:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$$

Juwabı: $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C$. ▲

7-mısal. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ integraldı esaplań.

△ Integral astındaǵı funkciya ushın tómendegi teńlikler orınlı:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

Bunnan

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C,$$

Juwabı: $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$. ▲

8-mısal. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$ integraldı esaplań.

Δ Bul integraldı esaplaw ushın $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ hám $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$ ekenliginen paydalanamız. Onda

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Tekseriw: $(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C)'=(\operatorname{tg}\frac{x}{2})'+C'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot(\frac{x}{2})'+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+\cos x}$

– integral astındaǵı funkciya payda boldı.

Juwabı: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$ ▲

9-mısal. $\int\sin^2 2x dx$ integraldı esaplań.

Δ Integraldı esaplaw ushın $2\sin^2 2x=1-\cos 4x$ birdeylikten paydalanamız.

$$\int\sin^2 2xdx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

Juwabı: $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$ ▲

? Soraw hám tapsırmalar

1. Integrallar kestesindegi óziñiz qálegen 4 mısaldı tanlań hám onı dálilleń.
2. Integrallawdıń ápiwayı qaǵıydaların bayan etiń. Mısallarda túsindiriń.
3. Ózgeriwshi almastırıw usılı degen ne? $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$ integraldı esaplawda usı usıldı qollanıń hám mısaldı sheshiw procesin túsindiriń.

Shınıǵıwlar

Berilgen funkciyanıń dáslepki funkciyalarınan birin tabıń (**16–18**):

16. 1) $3x^5-4x^3$; 2) $8x^7-5x^4$; 3) $\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$; 4) $\frac{5}{x^4}+\frac{3}{x^5}$;

5) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x}$; 6) $7\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x}$; 7) $5x^4+4x^3-2x^2$.

17. 1) $5\cos x-3\sin x$; 2) $7\sin x+4\cos x$; 3) $2\cos x-a^x$;

4) $5e^x+2\cos x+1$; 5) $4+2\cdot e^{-x}-7\sin x$; 6) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x}-e^{-x}$.

18. 1) $(x-2)^3$; 2) $(x+5)^4$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ 4) $\frac{6}{\sqrt[3]{x+7}}$;

5) $4\cos(x+5)+\frac{8}{x-7}$; 6) $2\sin(x-3)-\frac{4}{x-2}$; 7) $(3x+7)^4+\frac{1}{x^5}$.

Berilgen funkciyanıń barlıq dáslepki funkciyaların tabıń (**19–20**):

19. 1) $\cos(5x+3)$; 2) $\sin(7x-6)$; 3) $\cos(\frac{2x}{3}+1)$;

4) $\sin(\frac{5x}{7}-2)$; 5) $e^{\frac{2x+3}{4}}$; 6) e^{3-2x};

7) $\frac{4}{\cos^2 x}$; 8) $\frac{3}{\cos^2 4x}$; 9) $\frac{5}{\sin^2 5x}$.

20. 1) $\frac{4}{x^3}-(1-2x)^3$; 2) $(3x+2)^4-\frac{1}{x^6}$; 3) $x+\frac{2}{\cos^6 x}-1$;

4) $2x-\frac{3}{\sin^2 x}+6$; 5) $(1+3x)(x-1)$; 6) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\sin(3x-1)$.

21. Berilgen $f(x)$ funkciya ushın grafigi $A(x;y)$ noqattan ótetuǵın dáslepki funkciyanı tabıń:

1) $f(x)=\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{4};7)$; 2) $f(x)=\cos 5x,\ A(\frac{\pi}{4};4)$;

3) $f(x)=3x^2+\frac{2}{\sqrt{x+2}},\ A(-1;0)$; 4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\ A(2;0)$;

5) $f(x)=\cos^2 3x+\sin^2 3x+\frac{1}{4}\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8});$

6) $f(x)=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x-2\cos\frac{x}{2},\ A(2\pi;2\pi);$

7) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{5-2x}}+4x,\ A(2;6);$

8) $f(x)=6x^2-\frac{1}{2\sqrt{2-x}},\ A(-2;\ 4).$

Integrallardı tabıń (**22–28**):

22. 1) $\int(x^3-\sin 2x-3)dx;$ 2) $\int(x^4+\cos 3x+4)dx;$

3) $\int(x^2-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx;$ 4) $\int(4x^3+\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{3})dx;$

23*. 1) $\int(\frac{8}{\sin^2 x}+6\cos^2 x+2)dx;$ 2) $\int(\frac{6}{\cos^2 x}-8\sin^2 x+3)dx;$

3) $\int\sin 2x\cos 2xdx;$ 4) $\int(\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x)dx;$

5) $\int(\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 2x\cos x)dx;$ 6) $\int\cos^2 5xdx.$

24*. 1) $\int\sin 5x\cos 3xdx;$ 2) $\int\cos 2x\cos 3xdx;$ 3) $\int\sin 7x\sin 3xdx.$

25*. 1) $\int\frac{x}{x+1}dx;$ 2) $\int\frac{dx}{x^2-7x+12};$ 3) $\int\frac{(x-3)dx}{x^2-4x+3};$ 4) $\frac{(x+4)dx}{x^2-16}.$

26. 1) $\int\frac{x^5+x^3-2}{x^2+1}dx;$ 2) $\frac{x^2-1}{x^2+1}dx;$ 3) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x};$

4) $\frac{dx}{1-\cos 2x};$ 5) $\int\frac{dx}{4(x^2-4)};$ 6) $\int(1-2\sin^2 5x)dx.$

27. 1) $\int(x^3-1)^4x^2dx;$ 2) $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^3};$ 3) $\int\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^3 x}dx;$

4) $\int\frac{\mathrm{ctg}x}{\sin^2 x}dx;$ 5) $\int\sin^3 xdx;$ 6) $\int\cos^3 xdx.$

28*. 1) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}};$ 2) $\int x\cdot\sqrt{x-4}dx;$ 3) $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x+1}};$

4) $\int(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x)dx;$ 5) $\int(\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{ctg}^4x)dx.$

Berilgen $f(x)$ funkciya ushın grafigi $A(x;y)$ noqattan ótetuǵın dáslepki funkciyanı tabıń **(29–30)**:

29. 1) $f(x)=\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}$, $A(\pi; 4)$;

2) $f(x)=\frac{3}{5}\cdot\sin 5x$, $A(\frac{\pi}{2};3)$;

3) $f(x)=2\sin 5x+2\cos\frac{x}{2}$, $A(\frac{\pi}{3};0)$;

30. 1) $f(x)=3x^2-2x+8$, $A(1;9)$;

2) $f(x)=4x^3-3x^2+2x+1$, $A(-1;4)$;

3) $f(x)=5x^4+3x^2+2$, $A(-2; 1)$.

31. Integraldı tabıń:

1) $\int(x^2-1)(x+2)dx$; 2) $\int(x+2)(x^2-9)dx$; 3) $\int(x^2+1)(x^3-1)dx$;

4) $\int\frac{1-4x^2+\sqrt{1-2x}}{1-2x}dx$; 5) $\int\frac{9x^2-4-\sqrt{3x+2}}{3x+2}dx$;

6) $\int(e^{5-2x}-2^x)dx$; 7) $\int(e^{3x+2}+10^x)dx$.

32. Integraldı esaplań:

1) $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2+10x+26}$.

Úlgi: $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$ integraldı esaplań.

Δ $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{1+(x+2)^2}$; $x+2=u$ deyilse, $1+(x+2)^2=1+u^2$ $x'=u'$ hám integrallar kestesiniń 14–15-bántleri boyınsha

$$I=\int\frac{du}{1+u^2}=\mathrm{arctg}u+C=\mathrm{arctg}(x+2)+C.$$

Tekseriw:

$(\mathrm{arctg}(x+2)+C)'=(\mathrm{arctg}(x+2))'+C'=\frac{1}{1+(x+2)^2}+0=$

$=\frac{1}{1+(x+2)^2}=\frac{1}{x^2+4x+5}$.

Juwabı: $\mathrm{arctg}(x+2)+C$. ▲

Integrallaw qaǵıydalarınan jáne biri *bóleklep integrallaw bolıp esaplanadı.*

3-qaǵıyda*. Eger qanday da bir X aralıqta $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar úzliksiz $f'(x)$ hám $g'(x)$ tuwındıǵa iye bolsa, ol jaǵdayda

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \qquad (1)$$

formula orınlı. Bul formula *bóleklep integrallaw formulası* delinedi.

Bul formulanıń dálili $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar kóbeymesin differenciallaw qaǵıydası $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ hám $\int f'(x)dx=f(x)+C$ ekenliginen kelip shıǵadı.

Formuladan *paydalanıw kórsetpesi*: 1) integral astındaǵı ańlatpa $f(x)$ hám $g'(x)$ lar kóbeymesi kórinisinde jazıp alınadı; 2) $g'(x)$ hám $g(x)f'(x)$ ańlatpalardıń integralların ańsat (qolaylı) esaplanatuǵın etip alıw názerde tutıladı.

1-mısal. $\int x \cdot e^x dx$ integraldı esaplań.

∆ Bul jerde $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$ dep alıw qolaylı, sebebi

$g(x) = \int g'(x)dx = \int e^x dx = e^x$, $f'(x)=1$. Ol jaǵdayda (1) ge tiykarlanıp, $\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$

Demek, $\int xe^x dx = e^x \cdot (x-1) + C.$

Juwabı: $e^x(x-1)+C$. ▲

2-mısal. $\int \ln x dx$ integraldı esaplań.

∆ Integral astındaǵı $\ln x$ funkciyanı $f(x)=\ln x$ hám $g'(x)=1$ lardıń kóbeymesi dep esaplaymız: $\ln x=f(x) \cdot g'(x)$.

Ol jaǵdayda $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \int 1 \cdot dx = x + C.$

(1) formula boyınsha,

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C =$$

$$= x(\ln x - 1) + C = x \cdot (\ln x - \ln e) + C = x \cdot \ln\frac{x}{e} + C.$$

Demek, $\int \ln x dx = x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$

Tekseriw:

$$(x \ln \frac{x}{e} + C)' = (x \ln \frac{x}{e})' + C' = x' \cdot \ln \frac{x}{e} + x(\ln \frac{x}{e})' + 0 =$$

$$= \ln \frac{x}{e} + x \cdot \frac{e}{x} \cdot \frac{1}{e} = \ln x - \ln e + 1 = \ln x - 1 + 1 = \ln x.$$

Juwabı: $x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$ ▲

3-mısal. $\int x \cos x dx$ integraldı esaplań.

∆ Integraldı esaplaw ushın $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$ dew qolaylı. Ol jaǵdayda $f'(x)=1$, $g(x)=\int \cos x dx = \sin x$ (bul jerde dáslepki funkciyalardan birewin aldıq, sonıń ushın turaqlı san C nı jazbadıq). Bóleklep integrallaw formulası boyınsha,

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Juwabı: $x \sin x + \cos x + C.$ ▲

Integrallardı esaplań **(33–35)**:

33*. 1) $\int x \sin x dx$; 2) $\int x^2 \cos x dx$; 3) $\int x \ln x dx$; 4) $\int 2x \ln x dx$

34*. 1) $\int x \cos 2x dx$; 2) $\int x \sin 3x dx$; 3) $\int x \sin \frac{x}{3} dx$; 4) $\int x \cos \frac{x}{4} dx.$

35*. 1) $\int 2^x x dx$; 2) $\int 3^x x dx$; 3) $\int 5^x x dx.$ 4) $\int \operatorname{tg}^2 nx dx$;

5) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$; 6) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$; 7) $\int (3^x + 4^x)^2 dx$;

8) $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx$; 9) $\int \frac{e^{4x}-1}{e^{2x}-1} dx$; 10) $\int \frac{e^x dx}{\pi + e^x}$;

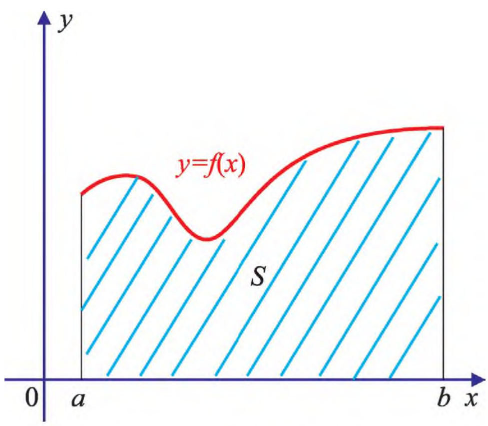
11) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$; 12) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; 13) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

44–46 ANIQ INTEGRAL. NYUTON–LEYBNIC FORMULASÍ

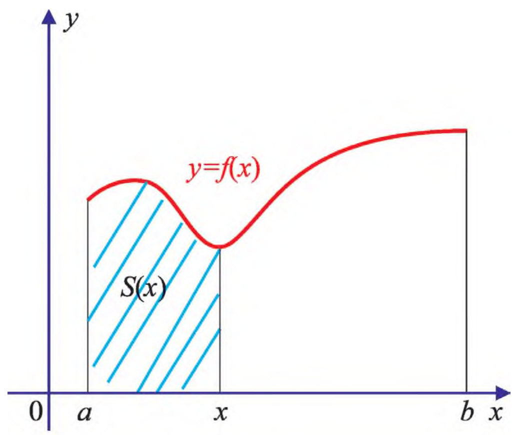
2-súwrette súwretlengen figura *iymek sızıqlı trapeciya* delinedi. Bul figura joqarıdan $y = f(x)$ funkciyanıń grafigi menen, tómennen $[a, b]$ kesindi menen, al qaptal táreplerden $x=a$, $x=b$ tuwrı sızıqlardıń kesindileri menen shegaralanǵan. $[a, b]$ kesindi iymek sızıqlı trapeciyanıń *ultanı* delinedi.

Iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın qaysı formula menen esaplaymız, degen soraw tuwıladı.

Bul maydandı S dep belgileyik. S maydandı $f(x)$ funkciyanıń dáslepki funkciyası járdeminde esaplaw múmkin eken. Usıǵan tiyisli pikirlewlerdi keltiremiz.



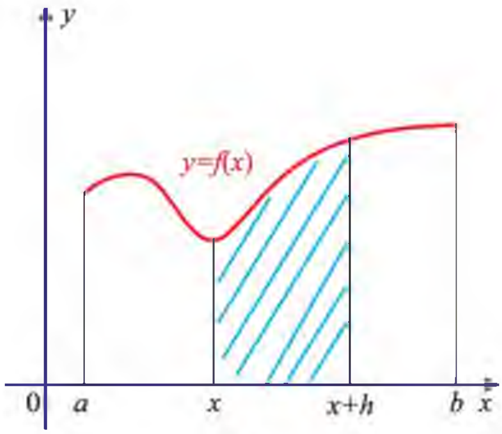
2-súwret.



3-súwret.

$[a; x]$ ultanlı iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın $S(x)$ dep belgileymiz (3-súwret), bunda x usı $[a; b]$ kesindidegi qálegen noqat: $x=a$ bolǵanda $[a; x]$ kesindi noqatqa aylanadı, sonıń ushın $S(a)=0$; $x=b$ da $S(b)=S$.

$S(x)$ ti $f(x)$ funkciyanıń dáslepki funkciyası bolıwın, yaǵnıy $S'(x)=f(x)$ ekenin kórsetemiz.



4-súwret.

▲ $S(x+h)$ – $S(x)$ ayırmanı kóreyik, bunda $h>0$ ($h<0$ hal da tap usılay kóriledi). Bul ayırma ultanı $[x;\ x+h]$ bolǵan iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanına teń (4-súwret). Eger h san kishi bolsa, ol jaǵdayda bul maydan shama menen $f(x)\cdot h$ qa teń, yaǵnıy $S(x+h)-S(x)\approx f(x)\cdot h$.

Demek, $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}\approx f(x).$

Bul juwıq teńliktiń shep bólimi $h\to 0$ da tuwındınıń anıqlaması boyınsha $S'(x)$ qa jaqınlasadı. Sonıń ushın $h\to 0$ da $S'(x)=f(x)$ teńlik payda boladı. Demek $S(x)$ maydan $f(x)$ funkciya ushın dáslepki funkciyası eken.▲

Dáslepki funkciya $S(x)$ tan qálegen basqa dáslepki $F(x)$ funkciya turaqlı sanǵa parıqlanadı, yaǵnıy

$$F(x)=S(x)+C.$$

Bul teńlikten $x=a$ da $F(a)=S(a)+C$ hám $S(a)=0$ bolǵanı ushın $C=F(a)$. Ol jaǵdayda (1) teńlikti tómendegishe jazıw múmkin:

$S(x)=F(x)-F(a)$. Bunnan $x=b$ da $S(b)=F(b)-F(a)$ ekenin tabamız.

Demek, *iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın* (2-súwret) tómendegi formula járdeminde esaplaw múmkin:

$$S=F(b)-F(a), \qquad (2)$$

bunda $F(x)$ – berilgen $f(x)$ funkciyanıń qálegen dáslepki funkciyası.

Solay etip, iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın esaplaw $f(x)$ funkciyanıń $F(x)$ dáslepki funkciyasın tabıwǵa, yaǵnıy $f(x)$ funkciyanı integrallawǵa keltiriledi.

$F(b)-F(a)$ ayırma $f(x)$ funkciyanıń $[a; b]$ kesindidegi *anıq integralı* delinedi hám bılay belgilenedi: $\int_a^b f(x)dx$

(oqılıwı: «*a* dan *b* ǵa shekem integral ef iks de iks»), yaǵnıy

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

(3) formula *Nyuton–Leybnic formulası* dep ataladı.

(2) hám (3) formula boyınsha:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

Integraldı esaplawda, ádette, tómendegishe belgilew kirgiziledi:

$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$. Ol jaǵdayda (3) formulanı bılay jazıw múmkin:

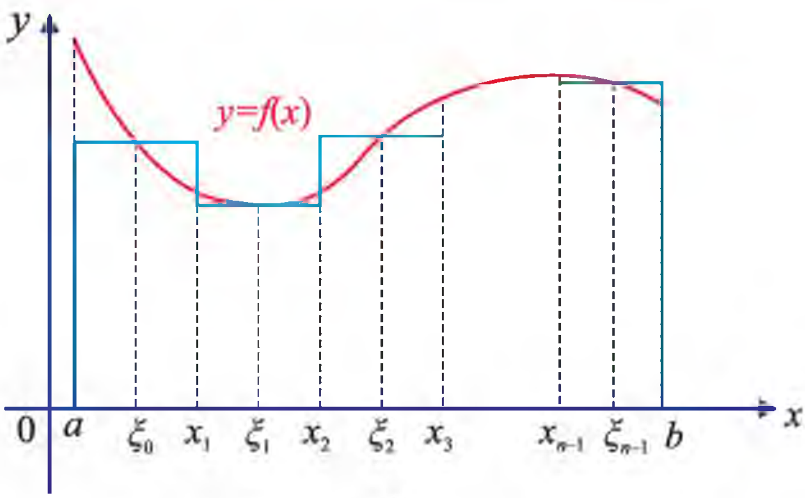
$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{5}$$

Usı jerde qısqasha *tarıyxıy maǵluwmattı* aytıw orınlı.

Iymek sızıqlar menen shegaralanǵan figura maydanın esaplaw máselesi anıq integral túsinigine alıp kelgen. Úzliksiz $f(x)$ funkciya anıqlanǵan $[a, b]$ kesindi $a=x_0, x_1.., x_{n-1}.., x_n=b$ noqatlar járdeminde óz ara teń $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, .., n-1)$ kesindilerge bólingen hám hár bir $[x_k, x_{k+1}]$ kesindiden qálegen ξ_k noqat alınǵan. $[x_k, x_{k+1}]$ kesindi uzınlıǵı $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ berilgen $f(x)$ funkciyanıń ξ_k noqattaǵı mánisi $f(\xi_k)$ ǵa kóbeytilgen hám

$$S_n=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+...+f(\xi_{k-1})\Delta_{n-1} \tag{6}$$

qosındısı dúzilgen, bunda hár bir qosılıwshı ultanı Δx_k hám biyikligi $f(\xi_k)$ bolǵan tuwrımúyeshliktiń maydanı. S_n qosındı iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanı S ke shama menen teń: $S_n \approx S$ (5-súwret).



5-súwret.

(6) qosındı $f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ kesindidegi *integral qosındısı* delinedi. Eger n sheksizlikke umtılǵanda $(n\to\infty)$, Δx_k nolge umtılsa $(\Delta x_k\to 0)$, ol jaǵdayda S_n integral qosındı qanday da bir sanǵa jaqınlasadı. Dál usı san $f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ kesindidegi *integralı* dep ataladı.

1-mısal. 6-súwrette súwretlengen iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın tabıń.

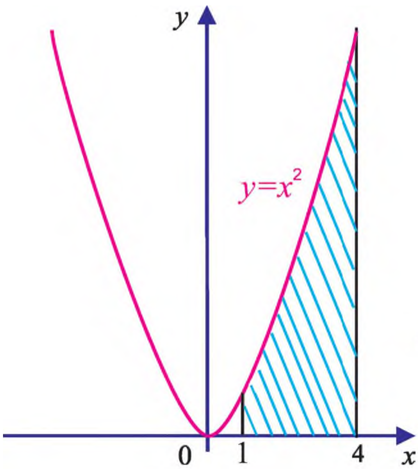
Δ (4) formulaǵa muwapıq $S=\int_1^4 x^2dx$. Bul integraldı Nyuton–Leybnic formulası (3) járdeminde esaplaymız. $f(x)=x^2$ funkciyanıń dáslepki funkciyalarınan biri $F(x)=\frac{x^3}{3}$ ekenligi belgili. Demek,

$$S=\int_1^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{1}{3}(4^3-1^3)=\frac{1}{3}\cdot 63=21 \text{ (kv. birlik).}$$

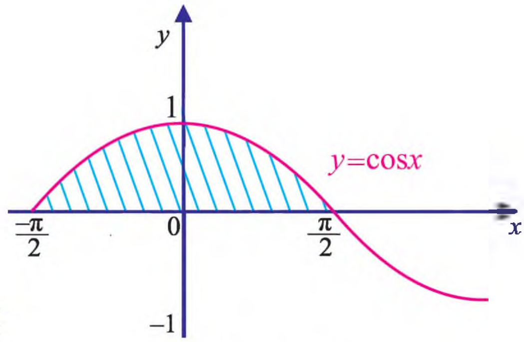
Juwabı: S=21 kv. birlik. ▲

2-mısal. 7-súwrettegi shtrixlanǵan oblasttıń maydanın tabıń.

Δ Shtrixlanǵan oblast iymek sızıqlı trapeciya bolıp, ol joqarıdan y=cosx funkciyanıń grafigi, al tómennen $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesindi menen shegaralanǵan. $y=\cos x$ — jup funkciya, oblast Oy kósherge salıstırǵanda simmetriyalı. Usı maǵlıwmatlar boyınsha, oblasttıń maydanı $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ maydanınıń eki esesine teń dew múmkin.



6-súwret.



7-súwret.

Δ Nyuton–Leybnis formulası hám (5) formulası boyınsha:

$$S=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin(\frac{-\pi}{2})=1-(-1)=1+1=2 \text{ (kv. birlik).}$$

Juwabı. 2 kv.birlik. ▲

3-mısal. $\int_0^{\pi}\cos x dx$ anıq integraldı esaplań.

Δ Nyuton–Leybnic formulası hám (5) formulası boyınsha:

$$\int_0^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0.$$

Juwabı: 0. ▲

4-mısal. $\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx$ anıq integraldı esaplań.

Δ Nyuton–Leybnic formulası hám (5) formula boyınsha:

$$\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx=(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x)\Big|_{-1}^{2}=\frac{22}{3}-(-\frac{37}{6})=\frac{81}{6}=13,5.\text{(kv. birlik)}$$

Juwabı: 13,5 kv. birlik. ▲

5-mısal. $S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2(3x+\frac{\pi}{6})\ dx$ anıq integraldı esaplań.

Δ Aldın anıq emes integraldı tabamız:

$$\int \sin^2(3x+\frac{\pi}{6})dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos(6x+\frac{\pi}{3}))dx=\frac{1}{2}\cdot(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3})).$$

Ol jağdayda $S=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3}))\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}\sin(2\pi+\frac{\pi}{3}))-\frac{1}{2}(0-\frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3})=$

$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.$

Juwabı: $S=\frac{\pi}{6}$. ▲

6-mısal. $\int_2^6\sqrt{2x-3}dx$ anıq integraldı esaplań.

Δ Aldın anıq emes integraldı tabamız:

Integrallar kestesi boyınsha $\int\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$
Ol jağdayda

$$\int_2^6\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^6=\frac{1}{3}\cdot\left((2\cdot6-3)^{\frac{3}{2}}-(2\cdot2-3)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\cdot(27-1)=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Juwabı: $8\frac{2}{3}$. ▲

Anıq integral tómendegi qásiyetlerge iye:

1. $\int_a^a f(x)dx=0.$ Shınında da, $\int_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0.$

2. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$

Δ $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a);\ \int_b^a f(x)dx=F(a)-F(b)=-\big(F(b)-F(a)\big).$

Demek, $-\int_b^a f(x)dx=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$ ▲

3. a, b, c – haqıyqıy sanlar bolsa, $\int_b^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (anıq integraldıń additivlik qásiyeti).

4. $f(x)$, $x \in R$, jup funkciya bolsa, ol jaǵdayda $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$

5. Eger $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ bolsa, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ boladı.

6. $x \in [a,b]$da $f(x) < g(x)$ bolsa, ol jaǵdayda $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ boladı.

? Soraw hám tapsırmalar

1. Anıq integral degen ne?
2. Iymek sızıqlı trapeciya maydanın esaplaw máselesin aytıp beriń. Mısallarda túsindiriń.
3. Nyuton–Leybnic formulası degen ne? Onıń mazmunın aytıp beriń.
4. Anıq integraldıń qásiyetlerin aytıp beriń. Mısallarda túsindiriń.

Shınıǵıwlar

Anıq integrallardı esaplań (**36–41**):

36. 1) $\int_0^2 3x^2dx$;	2) $\int_0^2 2xdx$;	3) $\int_{-1}^4 5xdx$;	4) $\int_1^2 8 \cdot x^3dx$;
5) $\int_1^e \frac{1}{x}dx$;	6) $\int_3^4 \frac{1}{x^2}dx$;	7) $\int_1^2 \frac{1}{x^4}dx$;	8) $\int_0^1 \sqrt{2x}dx$;
9) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$;	10) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;	11) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$;	12) $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$.

37. 1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx$; 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2xdx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cos 3xdx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)dx$.

38. 1) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx$; 2) $\int_0^2 e^{4x}dx$; 3) $\int_1^3 (e^{2x}-e^x)dx$.

39. 1) $\int_{-1}^1 (x^2+3x))(x-1)dx$; 2) $\int_{-1}^0 (x+2)(x^2-3)dx$;

3) $\int_1^3 (x+\frac{1}{x})^2 dx$; 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{x})dx$.

40*. 1) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$; 2) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin^4 2x+\cos^4 2x)dx$.

41*. 1) $\int_1^5 x^2\cdot\sqrt{x-1}dx$; 2) $\int_1^5 \frac{x^2-6x+10}{x-3}dx$; 3) $\int_0^1 \frac{x^2+2x+4}{x+1}dx$.

42*. 1) Sonday a hám b sanlardı tabıń, $f(x)=a\cdot 2^x+b$ funkciya $f'(1)=2$,

$\int_0^3 f(x)dx=7$ shártlerdi qanaatlandırsın.

2) $\int_1^b (b-4x)dx \geq 6-5b$ teńsizlik orınlanatuǵın barlıq $b>1$ sanlardı tabıń.

43*. 1) $\int_1^2 (b^2+(4-4b)x+4x^3)dx \leq 12$ teńsizlik orınlanatuǵın barlıq b sanlardı tabıń.

2) Qanday $a>0$ sanlar ushın $\int_{-a}^a e^x dx > \frac{3}{2}$ teńsizlik orınlanadı?

44. $f(x)$ funkciyanı a nıń qálegen mánisinde teńlikler orınlanatuǵın etip tańlań:

1) $\int_0^a f(x)dx=2a^2-3a$; 2) $\int_0^a f(x)dx=4a-a^2$;

3) $\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2$; 4) $\int_0^a f(x)dx=a^2+a+\sin a$.

Integrallardı esaplań (**45–46**):

45. 1) $\int_0^1 (e^{-x}+1)^2 dx$; 2) $\int_{-2}^{-1} 10^x \cdot 2^{-x} dx$; 3) $\int_0^1 (e^{-x}-1)^2 dx$;

4) $\int_{-3}^{-1} 3^{-x} 6^x dx$; 5) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-3x} dx$; 6) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$.

46*. 1) $\int_0^1 \frac{2^x+3^x}{6^{x+1}} dx$; 2) $\int_0^1 \frac{2^{x-1}+5^{x-1}}{10^x} dx$; 3) $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

4) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{e+2}} \frac{2xdx}{x^2-2}$; 5) $\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{12^x} dx$; 6) $\int_0^2 4^{-x} \cdot 8^x dx$.

47. $x=a$, $x=b$ tuwrı sızıqlar, Ox kósheri hám $y=f(x)$ funkciya grafigi menen shegaralanǵan iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın tabıń.Sáykes súwret sızıń:

1) $a=1$, $b=2$, $f(x)=x^3$; 2) $a=2$, $b=4$, $f(x)=x^2$;

3) $a=-2$, $b=1$, $f(x)=x^2+2$; 4) $a=1$, $b=2$, $f(x)=x^3+2$;

5) $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{2\pi}{3}$, $f(x)=\sin x$; 6) $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\cos x$.

48. Ox kósheri hám berilgen parabola menen shegaralanǵan figuranıń maydanın tabıń:

1) $y=9-x^2$; 2) $y=16-x^2$; 3) $y=-x^2+5x-6$;

4) $y=-x^2+7x-10$; 5) $y=-x^2+4x$; 6) $y=-x^2-3x$.

Tómendegi sızıqlar menen shegaralanǵan figuranıń maydanın tabıń. Sáykes súwret sızıń (**49–50**):

49. 1) $y=-x^2+2x$, $y=0$; 2) $y=-x^2+3x+18$, $y=0$;

3) $y=2x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$; 4) $y=-x^2+2x$, $y=x$.

50. 1) $y=-2x^2+7x$, $y=3{,}5-x$; 2) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$;

3) $y=x^2$, $y=0$, $y=-x+2$; 4) $y=2\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

5) $y=\frac{1}{a}\cdot x^2$, $y=a\cdot\sqrt{x}$; 6) $y=2x$, $y=2$ $x=0$;

7) $y=|\lg x|$, $y=0$, $e=2$, $x=0$.

Qadaǵalaw jumısı úlgisi
I variant

1. $f(x)=\frac{x^3}{2}-\cos 3x$ funkciyanıń barlıq dáslepki funkciyaların tabıń.

2. Eger $F(\frac{3}{2})=1$, bolsa, $f(x)=\frac{6}{(4-3x)^2}$ funkciyanıń dáslepki funkciyası $F(x)$ ti tabıń.

3. Esaplań: $\int_{-1}^{2}(x^2-6x+9)dx$.

4. Esaplań: $\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx$.

5. *Ox* kósheri, $x=-1$, $x=2$ tuwrı sızıqlar hám $y=9-x^2$ parabola menen shegaralanǵan iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın esaplań.

II Variant

1. $f(x)=\frac{x^4}{3}+\sin 4x$ funkciyanıń barlıq dáslepki funkciyaların tabıń.

2. Eger $F\left(\frac{1}{2}\right)=2$ bolsa, $f(x)=\frac{3}{(2-5x)^3}$ funkciyanıń dáslepki funkciyası $F(x)$ ti tabıń.

3. Esaplań: $\int_{-3}^{1}(x^2+7x-8)dx$.

4. Esaplań: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx$.

5. *Ox* kósheri, $x=-2$, $x=3$ tuwrı sızıqlar hám $y=x^2-1$ parabola menen shegaralanǵan iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın esaplań.

JUWAPLAR

I BAP

1. *a*) Puls jiyiligi – Bul júrektiń bir minutta qansha urıwın kórsetetuǵın belgi. Demek, bir minutta Madinanıń júregi 67 márte uradı. *b*) 4020. **2.** *a*) $\approx 0{,}00150\frac{\text{qáte}}{\text{sóz}}$. Sapa arttı. *b*) ≈ 0,15. **3.** Márip ónimlirek islegen. **4.** ***a)*** ≈0,000177 $\frac{\text{mm}}{\text{km}}$. **5.** $89\frac{\text{km}}{\text{h}}$ yaki $89\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **6.** a) 0,1 $\frac{m}{s}$; b) 0,9 $\frac{m}{s}$ c) 0,5 $\frac{m}{s}$. **7.** a) 3,1 $\frac{dana}{g}$; 4,22 $\frac{dana}{g}$; b) Doza 2 grammnan 8 grammǵa shekem arttırılǵanda jánlikler sanı tez kemeyedi, al keyin kemeyiwi páseyedi. **8.** a) 7; b) 7; c) 11; d) 16; e) 0; f) 5. **9.** a) 5; b) 7; c) c. **10.** a) –2; b) 7; c) –1; d) 1. **11.** a) –3; b) –5; c) –1 d) 6; e) –4; f) –8; g) 1; h) 2; i) 5. **13.** a) $3x^2$; b) $-\frac{1}{x^2}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; d) 0. **15.** a) 2; b) $6x+5$; c) $6x^2+8x+6$. **16*.** a) $f'(x)=a$; b) $f'(x)=2ax+b$; c) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. **20.** 1) $4x^3$; 2) $-2x^{-3}$; 3) $-3x^{-4}$. **21.** 2) $-x^{-2}+1$; 4) $4x^3+3x^2+2x-1+x^{-2}+2x^{-3}$. **22.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)}$. **23.** 2) 53,25. **24.** 2) –3; 4) 2. **25.** 2) $-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{4}$; 4) $2x-\frac{2}{x^3}$. **26.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $2x$. **27.** 3) $-\frac{2x^9+4x^3}{(x^6-1)^2}$; 4) $-\frac{1}{(x-1)^2}$; 6) $4x^3-4$; 8) $7x^6+3x^2-3x^{-4}-7x^{-8}$. **28.** 2) 0; 4) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 6) $\frac{1}{x\ln 2}$; 8) $1+\ln x$; 10) $2e^x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. **29.** 2) $2e^x\cos x$; 4) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 6) $5+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 8) $3(2+x)^2$. **30.** 2) 11. **31.** 2) 0. **32.** 2) $-\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $-\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 6) $2x\sin x+x^2\cdot\cos x$; 8) $x\cos x$. **33.** 2) 1. **34.** 2) $n\pi$, $n\in z$; 4) 1. **35.** 1) $\frac{1}{x^2}-1$; 2) $4x^2-1$. **36.** 2) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; 4) $\frac{x+2}{x}$. **37.** 2) x^4; 4) x^2-1. **38.** 2) x^3+3x^2+3x+1; 4) x^6+1. **39.** x^2-2x. **43.** 2) $e^{\sin x}\cos x$; 4) $\sin 2x$; 6) $\frac{4}{4x-1}$; 8) $20(2x-1)^9$. **44.** 3) $-\mathrm{tg}x$; 8) $-30x^2\cos^{29}x\cdot\sin x+2x\cos^{30}x$; 9) $\frac{5\mathrm{ctg}x}{x}-\frac{5\ln x}{\sin^2 x}$. **45.** 2) $y=3x-4$; $y=3x-4$; $y=3x-4$. 4) $y=-x-2$; $y=8x+16$; $y=-4x$. 8) $y=-\sin 1\cdot x+\sin 1+\cos 1$; $y=-x\cdot\sin 2+2\sin 2+\cos 2$;

$y=1$. **46.** 2) $y=7x-6$. **47.** 2) bolmaydı; 4) 0 hám $\frac{2}{3}$; 6) 0 hám $\frac{3}{4}$. **48.** 1) $y=-x$; $y=-x+21$; $y=-x+1$. **49.** 2) 0,1 ; 0,331 . **50.** 2) a) 0,2718; b) 9,06 . 4) a) 0,938127; b) 31,2709. **51.** 2) a) 0; b) 0. 4) a) 0,119401; b) 11,9401 . **52.** 1) 4; 2) –7; 3) 6; 4) 19/28; 5) 0. **53.** 2) 29; 4) $32x-3$; 6) $18-2x$; 8) $48x^2+10x-2$. **54.** 1) a) 15; b) 15; c) 15; d) 15; 4) a) –29; b) 12; c) 5; d) –1. **55.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $1-x^{-2}$. **56.** 1) 12; 2) 3. **57.** 15 m/sek. **58.** 3) $\frac{1}{5\sqrt[3]{x^4}}+\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{1}{x\ln 3}$; 10) $7^x x^7\ln 7+7^x\cdot 7x^6$; 12) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x$; 14) $8-2^x$. **59.** 2) 4; 4) 2. **60.** 2) Ø. **61.** 1 hám 2 . **62.** 2) $-2x^{-3}-1$. **63.** 2) 2,75. **64.** 2) $\frac{x^2+16x-24}{(x+8)^2}$; 4) $6x^2+8x+5$; 6) $14x+12$. **65.** 2) $\frac{-2x^7-4x^5-5x^4+21x^2+7}{(x^5+7)^2}$. **66.** 2) $e^{5x}(4\cos x-6\sin x)$; 4) $\frac{1-2\ln x}{x^3}$. **67.** 2) –4; 4) $-\frac{1}{\sin^2 1}-\frac{1}{20}$.

68. 1) $2x\sin x+x^2\cos x$; 2) $-\frac{\operatorname{tg}x}{\ln 15}$; 4) $\frac{35\operatorname{tg}^{34}x}{\cos^2 x}$; 8) $(2x-10)\ln\cos x-(x^2-10x+7)\operatorname{tg}x$.

69. 3) ósiw: $(-\infty; -3) \cup (3; -\infty)$ kemeyiw: $(-3;3)$.
4) ósiw: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; kemeyiw: Ø.
6) ósiw: $(-\infty; \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$; kemeyiw: $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$.
8) ósiw: $(-\infty; 0)$; kemeyiw: $(0; +\infty)$.
9) ósiw: $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; kemeyiw: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
10) ósiw: $(2; +\infty)$; kemeyiw: $(-\infty; 2)$.
14) ósiw: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi),\ n\in Z$; kemeyiw: Ø.

70. 2) –3; 3 . 4) 0. 6) Ø. 8) 0; –1.

71. 2) lokal minimum $x=4$; lokal maksimumı bolmaydı.
4) lokal minimum $x=5$; lokal maksimum $x=-5$.
6) lokal minimum $x=0{,}75$; lokal maksimumı bolmaydı.
8) lokal minimum $x=2n\pi,\ n\in Z$; lokal maksimum $x=\pi+2n\pi,\ n\in Z$.

72. 2) ósedi $(-1; 1)$; kemeyedi: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
4) ósedi: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi),\ n\in Z$; kemeyedi: $(-\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{3\pi}{2}+2n\pi),\ n\in Z$;

6) ósedi: Ø ; kemeyedi: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi),\ n\in Z$. **73.** 2) eń úlken mánis: 57; eń kishi mánis: –55. 4) eń úlken mánis: 84; eń kishi mánis: $-\frac{28}{9}$.

76. 5625m². **80.** 80 m. **83.** 1) 5 sek; 2) 250 m/sek; 3) $\frac{1875}{4}m$.

87. 1) $4m^3$; 2) $5324\ m^3$; 3) $407\ \frac{m^3}{min}$;
89. 1) 30 ta; 2) 1800000 swm .
91. d) 24,52, –0,1; e) 40,52, 9,86. **93.** g) 2,0004. **94.** e) 0,9302.
95. d) 0,526. **96.** d) 0,1247. **112.** 1) eń úlken 13; eń kishi 13. 3) eń úlken bolmaydı; eń kishi 5. 5) eń úlken bolmaydı; eń kishi $\frac{11}{6}$.

113. 2) $y=13x+4; y=13x+4; y=13x+4$. **114.** 1) joq. **115.** 3) joq.

117. 1) –1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $-\sqrt{2}$.

118. 1) 19; 10; 2) 27;30; 3) 77; 30; 4) 0; –8.

119. 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $\sqrt{2}$; 10) 0.

120. 1) 10; 6. 2) 15; 18. 3) 225; 80.

121. 1) $-2x+1$; 2) $\cos x+\sin x$; 4) $4^x\ln 4-\cos x$; 6) $\frac{1}{x}-20x+1$. **122.** 1) $4x^3$; 3) $1+\frac{20}{x^2}$;
6) $e^x(\sin x+\cos x)$;8) $20\sin x+2(10x-1)\cos x$.

123. 1) $\frac{1}{\sqrt{e^x}}$; 0; 2) 3; 3; 3) $-2\pi+1$; $\pi+1$. 4) $-\pi$; $\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 1; 0; 6) 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
7) $1-\frac{\pi 3}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi 3}{16}$. 8) 3; $-3\sqrt{2}$.

124. 1) 12; 2)72. **126.** 1) 0; 2) 600 000. **127.** 2) $-\sin 2x$.
128. 2) ósiw: $(-\infty; +\infty)$; kemeyiw: Ø.
4) ósiw: Ø; kemeyiw: $(-\infty; 0)$ U $(0; +\infty)$.
6) ósiw: $(-\infty; +\infty)$; kemeyiw: Ø.
8) ósiw: $(0; +\infty)$; kemeyiw: $(-\infty; 0)$.

129. 2) $\sqrt{\frac{133}{3}}$; $-\sqrt{\frac{133}{3}}$. 4) 0; 6) 3; –3; 8) 0; $-\frac{13}{18}$.
130. 2) lokal minimum: $x=9$. lokal maksimum: bolmaydı.
131. 2) eń úlken: 81; eń kishi: –6. **134.** 62 500 m^2.

143. 1) $3e^{3x}$; 2) $e^{\sin x}\cos x$; 3) $3\cos(3x+2)$; 4) $8(2x+1)^3$;
144. 1) e^{8x+4}; 2) e^{8x^2+4x}; 3) $4e^{2x}+2$; 4) $\sqrt{16x+10}$.
145. 1) $10x(x^2+1)^4$; 3) $\frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$; 8) $-e^{\sin(\cos x)}\cdot\cos(\cos x)\cdot\sin x$.
146. 1) ósedi: $(-\infty; 0{,}5)$; kemeyedi: $(0{,}5; -\infty)$;
3) ósedi: $(-1; 1)$; kemeyedi: $(-\infty; -1)$U$(1; +\infty)$.
4) ósedi: $(-\infty; +\infty)$; kemeyedi: Ø.
7) ósedi: $(-\infty; +\infty)$; kemeyedi: Ø.

8) ósedi: $(1; +\infty)$; kemeyedi: $(-\infty; 1)$.

147. 1) stacionar noqatları: 1 hám 3; lokal maksimum: 0; lokal minimum: -4.

II BAP

2. 2) x^6+C; 4) $x^{\frac{3}{2}}+C$; 6) $\sin x+C$; 8) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **3.** 2) $\frac{\pi^x}{\ln\pi}+C$; 4) $\frac{a^x}{\ln a}+C$; 6) $\frac{e^{\pi x}}{\pi}+C$. **4.** 4) $\frac{1}{a}\ln x+C$. **5.** 4) $\frac{1}{5}\sin 5x+C$; 6) $\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

6. 4) $\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$. **7.** 2) $-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x+2$; 4) $\sin x+4$. **8.** 1) $2x^2+8x+11$; 2) $-\frac{x2}{2}+3x+2{,}5$; 3) $\frac{9}{4}x^2+9x+15{,}8$; 4) $x^2-6x+10$. **10.** 1) $\frac{8}{x}-2x+4$; 2) $\frac{9}{x^2}+2x-3$; 3) x^3-x+6; 4) x^5+7x+1. **11.** 1) $\frac{1}{4}\cdot(3x-2)^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{5}\cdot(4x+5)^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{8}\cdot(7x-5)^{\frac{8}{7}}+\frac{7}{8}$; 4) $\frac{1}{k+1}\cdot(kx+b)^{\frac{k+1}{k}}+\frac{k}{k+1}$.

12. 1) $5\ln|x-2|+7$; 2) $3\ln|x+1|+1$; 3) $\sin x+7$; 4) $-\cos x+9$. **14.** 2) $\frac{1}{5}\cdot\sin 5x+\frac{3}{5}$; 4) $-3\cos\frac{x}{3}+6$. **15.** 1) x^3-4; 2) x^4-15. **16.** 2) x^8+x^5; 4) $-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^4}$.

17. 2) $-7\cos x+4\sin x$; 4) $5e^x+2\sin x$. **18.** 2) $\frac{1}{5}(x+5)^5$; 4) $9\cdot(x+1)^{\frac{2}{3}}$; 6) $-2\cos(x-3)-4\ln|x-2|$. **19.** 2) $-\frac{1}{7}\cdot\cos(7x-6)+C$; 4) $-\frac{7}{5}\cos(\frac{5x}{7}-2)+C$; 6) $-\frac{1}{2}\cdot e^{3-2x}+C$. **20.** 2) $\frac{1}{15}\cdot(3x+2)^5+\frac{1}{5}x^{-5}+C$; 4) $x^2+3\operatorname{ctg}x+6x+C$. **21.** 2) $\frac{1}{5}\sin 5x+3\frac{4}{5}$;

4) $x^4-\sqrt{x-1}-15$. **22.** 2) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}\sin 3x+4x+C$; 4) $x^4+3\sin\frac{x}{3}-3\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.

23. 2) $-\frac{1}{4}\cos 4x+C$. **24.** 1) $\frac{-1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 4x$. **25.** 2) $\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C$, 4) $\ln|x-4|+C$.

26. 2) $x-\operatorname{arctg}x+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **27.** 2) $-\frac{1}{4(1+x^2)^2}+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x+C$.

28. 2) $\frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}+C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$. **29.** 2) $-\frac{3}{25}\cos 5x+3$. **31.** 4)

$x+x^2-\sqrt{1-2x}+C$. **33.** 1) $\sin x-x\cos x+C$; 2) $x^2\cdot\sin x-2\sin x+2x\cos x+C$;

3) $\frac{1}{2}\cdot x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$; 4) $x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

34. 1) $\frac{1}{2}\cdot(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+C$; 3) $9\sin\frac{x}{3}-3x\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.

36. 4) 30. **37.** 4) $\frac{1}{4}$. **38.** 2) $\frac{1}{4}\cdot(e^8-1)$. **39.** $\frac{1}{8}$. **40.** 2) 2. **41.** 1,5+ln2. **42.** 1) $a=\frac{1}{\ln 2}$,

$b=\frac{7(\ln^2 2-1)}{3\ln^2 2}$; 2) $b=2$. **43.** 1) $b=3$; 2) $a>\ln 2$. **44.** 1) $f(x)=4x-3$; 2) $f(x)=4-2x$; 3) $f(x)=x^2-3x$; 4) $f(x)=1+2x+\cos x$. **45.** 2) $\frac{4}{5\ln 5}$; 6) 8. **46.** 2) $\frac{0,4}{\ln 5}+\frac{0,1}{\ln 2}$; 4) 1. **47.** 2) $\frac{56}{3}$; 4) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **48.** 2) $85\frac{1}{3}$. **49.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 121,5; 3) $\frac{10}{3}$; 4) $\frac{1}{6}$.

50. 1) 9; 2) 9; 3) 4,5;

Paydalanılgan hám usınıs etiletugın ádebiyatlar

1. Ш.А. Алимов и др. Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10–11 класса. Учебник для базового и профильного образования, Москва, “Просвещение”, 2016.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. А.Н. Колмогоров и др., Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10-11 классов. Москва, “Просвещение”, 2018.
4. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа.
часть 2 учебное пособие, Ташкент, “Ilm ziyo”, 2016.
5. A.U. Abduhamidov hám boshqalar. Algebra hám matematik analiz asoslari, 1-bólim, Toshkent, “ O‘qituvchi”, 2012.
6. Н.П. Филичева. Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань”. 2009.
7. М.И. Исроилов. Ҳисоблаш методлари. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1988.
8. Г.К. Муравин и др. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.
9. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.
10. Г.П. Бевз и др., Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса. Киев, 2011.
11. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).

12. “Математика в школе” jurnali.
13. Fizika, matematika hám informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqa boshlagan).
14. M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov Matematikadan qiziqarli hám olimpiada masalalari. I bólim, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
15. Matematikadan qo‘llanma, I hám II bólimlar. O‘qsherituvchilar ushun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, “ kósherituvchi”, 1979.
16. M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev. O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, “ kósherituvchi”, 1993.
17. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
18. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
19. http://www.problems.ru – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
20. http://matholymp.zn.uz – O‘zbekistonda hám dunyoda matematik olimpiadalar.
21. Силм А.Ш., Математикадан тест саволлари, Тошкент, 1996.
22. Материалы ЕГЭ по математике, М., 2016.
23. Е.П. Кузнецова, Г.А. Муравьева, Сборник задач по алгебре, 11-класс, “Мнемозика”, 2016.
24. А.Г. Мордкович, Сборник задач по алгебре, 10-11 классы, “Мнемозика”, 2016.
25. М.И. Шкиль, З.И. Слепкаль, Алгебра, учебник для 11 класса, Киев, 2016.
26. Е.П. Нелина, О.Е. Долгова, Алгебра, учебник для 11 класса, Киев, 2015.
27. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
28. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
29. http://www.problems.ru – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
30. http://matholymp.zn.uz – O‘zbekistonda va dunyoda matematik olimpiadalar.

MAZMUNİ

GEOMETRIYA

I BAP. KEŃISLIKTE KOORDINATALAR SISTEMASÍ HÁM VEKTORLAR

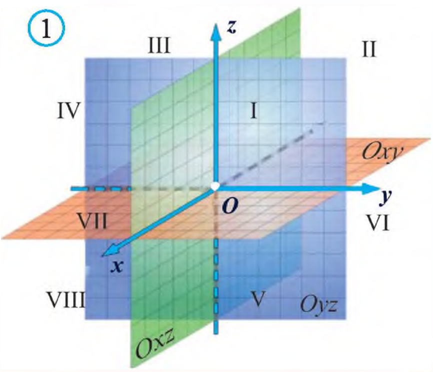
1. KEŃISLIKTE KOORDINATALAR SISTEMASÍ

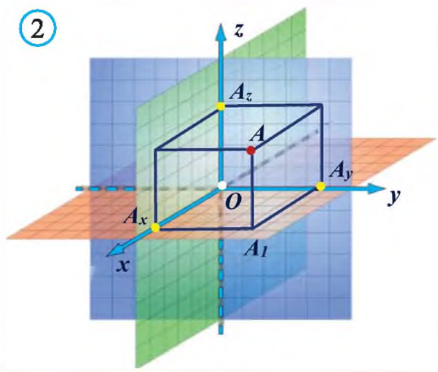
1.1. Keńislikte koordinatalar sisteması

Sizler, tegislikte dekart koordinatalar sisteması menen tómengi klaslarda tanısqan edińiz. Keńisliktegi koordinatalar sisteması da, tegisliktegige uqsas kirgiziledi. *O* noqatta kesilisiwshi hám koordinatalar bası usı noqatta bolǵan óz ara perpendikulyar úsh *Ox, Oy* hám *Oz* koordinata kósherlerin qaraymız.

Bul tuwrı sızıqlardıń hár bir jubı arqalı Oxy, Oxz hám Oyz tegisliklerin júrgizemiz (1-súwret). Keńislikte tuwrı múyeshli dekart koordinatalar sisteması usı táqilette kirgiziledi hám bunda

O noqat– *koordinatalar bası*,
Ox, *Oy* hám *Oz* tuwrı sızıqlar – *koordinata kósherleri*,
Ox – *abscissalar*, *Oy* – *ordinatalar* hám *Oz* kósheri – *applikatalar kósheri*,
Oxy, *Oyz* hám *Oxz* tegislikler– *koordinatalar tegislikleri* dep ataladı.

1


2


Koordinatalar tegislikleri, keńislikti 8 oktantaǵa (yarım sherekke) bóledi (1-súwret).

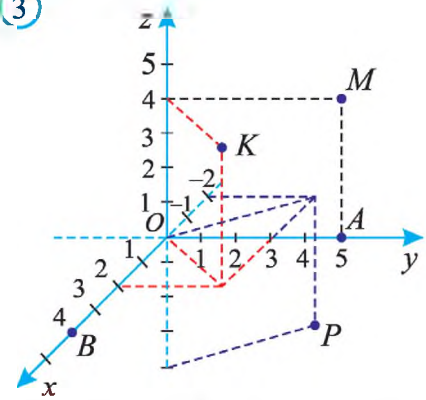
Keńislikte, ıqtıyarlı *A* noqatı berilgen bolsın. Bul noqattan *Oxy*, *Oyz* hám *Oxz* koordinatalar tegisliklerine perpendikulyar bolǵan tegislikler júrgizemiz (2-súwret). Bul tegisliklerdiń biri *Ox* kósherin A_x noqatta kesip ótedi.

A_x noqatat noqatınıń *x* kósherindegi koordinatası *A* noqatınıń *x* – *koordinatası* yamasa *abscissası* dep ataladı.

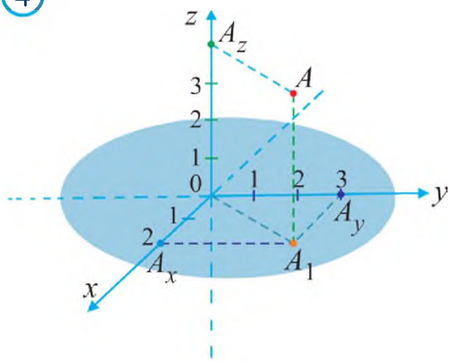
A noqatınıń y – *koordinatası* (*ordinatası*) hám de z – *koordinatası* (*applikatası*) da usı tárizde anıqlanadı.

A noqatınıń koordinataları $A(x;\ y;\ z)$ yamasa qısqasha $(x;\ y;\ z)$ túrinde belgilenedi. 3-súwrette kórsetilgen noqatlar tómendegi koordinatalarǵa iye: $A(0;\ 5;\ 0)$, $B(4;\ 0;\ 0)$, $M(0;\ 5;\ 4)$, $K(2;\ 3;\ 4)$, $P(-2;\ 3;\ -4)$.

3



4



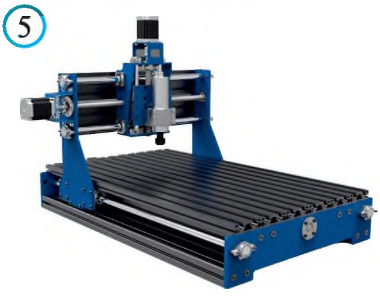
1-másele. Keńislikte dekart koordinatalar sisteması kirgizilgen. Ondaǵı $A(2;\ 3;\ 4)$ noqatınıń ornın anıqlań.

Sheshiliwi. Koordinata basınan Ox hám Oy kósherleriniń oń baǵıtında, sáykes, $OA_x = 2$ hám $OA_y = 3$ kesindilerin júrgizemiz (4-súwret).

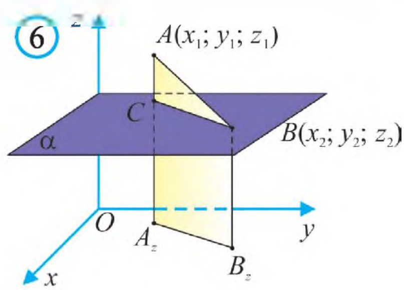
A_x noqatınan Oxy tegisliginde jatqan hám Oy kósherine parallel bolǵan tuwrı sızıq júrgizemiz. A_y noqatınan Oxy tegislikte jatqan hám Ox kósherine parallel tuwrı sızıq júrgizemiz. Bul tuwrı sızıqlardıń kesilisiw noqatın A_1 menen belgileymiz. A_1 noqatınan Oxy tegisligine perpendikulyar júrgizemiz hám bunda Oz kósheriniń oń baǵıtında $AA_1 = 4$ kesindisin júrgizemiz. Payda bolǵan $A(2;\ 3;\ 4)$ noqat izlenip atırǵan noqat boladı. □

Zamanagóy cifrlı-programmalı basqarılatuǵın stanoklar hám avtomatlastırılǵan robotlar ushın koordinatalar sistemasınan paydalanıp programmalar dúziledi hám olar tiykarında metallarǵa islew beriledi (5-súwret).

5



6



1.2. Eki noqat arasındaǵı aralıq

Eki $A(x_1; y_1; z_1)$ hám $B(x_2; y_2; z_2)$ noqatları berilgen bolsın.

1. Dáslep AB tuwrı sızıq Oz kósherine parallel bolmaǵan jaǵdaydı qaraymız (6-súwret). A hám B noqatlar arqalı Oz kósherine parallel sızıqlar júrgizemiz. Olar Oxy tegisligin A_z hám B_z noqatlarında kesip ótsin.

Bul noqatlarda z koordinatası 0 ge teń bolıp, al x hám y koordinataları sáykes túrde A, B noqatlarınıń x hám y koordinatalarına teń.

Endi B noqat arqalı Oxy tegisligine parallel bolǵan α tegisligin júrgizemiz. Ol AA_z tuwrı sızıǵın bazı bir C noqatta kesip ótedi.

Pifagor teoreması boyınsha: $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Biraq, $CB = A_zB_z$, $A_zB_z^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ hám $AC = |z_2 - z_1|$.

Sonlıqtan $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2. AB kesindisi Oz kósherine parallel, yaǵnıy $AB = |z_2 - z_1|$ bolǵanda da joqarıdaǵı formula orınlı boladı, sebebi bul jaǵdayda $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Demek, *A hám B noqatları arasındaǵı aralıq*:

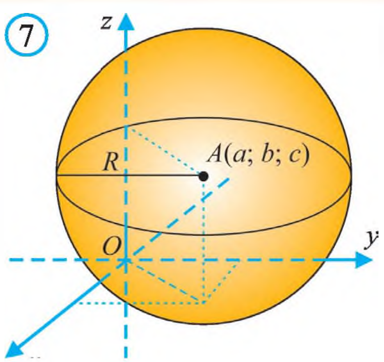
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

Esletpe. (1) formula tuwrı múyeshli parallelepipedtiń ólshemleri $a = |x_2 - x_1|$, $b = |y_2 - y_1|$, $c = |z_2 - z_1|$ bolǵanda, onıń diagonalınıń uzınlıǵın ańlatadı.

Sfera hám shar teńlemesi. Bizge málim, $A(a; b; c)$ noqattan R aralıqta jatqan barlıq $M(x; y; z)$ noqatlar sferanı payda etedi (7-súwret). Onda (1) formula boyınsha, orayı $A(a; b; c)$ noqatta radiusı R ge teń bolǵan sferada jatqan barlıq noqatlar koordinataları $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ teńligin qanaatlandıradı.

Onda, oraylıq $A(a; b; c)$ noqatta, radiusi R ge teń bolǵan shar teńlemesi $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \le R^2$ túrinde ańlatıladı.

7



2- másele. Tóbeleri $A(9;\ 3;\ -5)$, $B(2;\ 10;\ -5)$, $C(2;\ 3;\ 2)$ noqatlarında bolǵan ABC úshmúyeshliktıń perimetrin tabıń.

Sheshiw: ABC úshmúyeshliktiń perimetri $P = AB+AC+BC$. Eki noqat arasındaǵı aralıq formulası $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ten paydalanıp, úshmúyeshliktiń tareplerin tabamız:

$$AB=\sqrt{(2-9)^2+(10-3)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

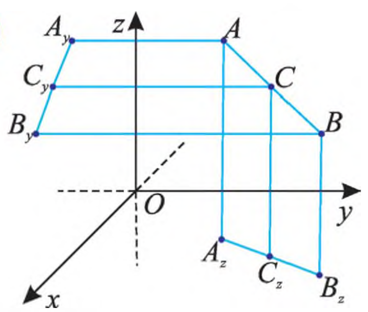
$$AC=\sqrt{(2-9)^2+(3-3)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

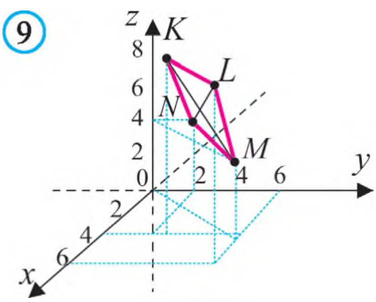
$$BC=\sqrt{(2-2)^2+(3-10)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}.$$

Demek, ABC úshmúyeshlik teń tárepli hám onıń perimetri: $P=3\cdot 7\sqrt{2}=21\sqrt{2}$. *Juwabı:* $21\sqrt{2}$. □

1.3. Kesindi ortasınıń koordinataları

$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ hám $B(x_2;\ y_2;\ z_2;)$ – ıqtıyarlı noqatlar bolıp, AB kesindisiniń ortası $C(x;\ y;\ z)$ bolsın (8-súwret).

8


9


A, B hám C noqatlar arqalı Oz kósherine parallel bolǵan tuwrı sızıqlar júrgizemiz. Olar Oxy tegisligin $A_z(x_1;\ y_1;\ 0)$, $B_z(x_2;\ y_2;\ 0)$ hám $C_z(x;\ y;\ 0)$ noqatlarında kesip ótetuǵın bolsın.

Fales teoreması boyınsha C_z noqat A_zB_z kesindisiniń ortası boladı. Onda tegisliktegi kesindi ortasınıń koordinataların tabıw formulası boyınsha

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

z ti tabıw ushın Oxy tegisliginiń ornına Oxz yamasa Oyz tegisligin alıw jetkilikli.

Bunda z ushın da joqarıdaǵılarǵa uqsas formula kelip shıǵadı.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Soǵan uqsas, berilgen AB kesindisin λ qatnasta ($AP : PB = \lambda$) bóliwshi $P(x_1;\ y_1;\ z_1)$ noqatınıń koordinataları A hám B noqatlarınıń koordinataları arqalı

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

formulalar járdeminde tabıladı. Olardıń durıslıǵın óz betińizshe kórsetiń.

3-másele. Tóbeleri $M(3;6;4), N(0;2;4), K(3;2;8), L(6;6;8)$ noqatlarında bolǵan *MNKL* noqatlarında bolǵan *MNKL* tórtmúyeshliktiń parallelogramm ekenligin dálilleń (9-súwret).

Dálillew: Máseleni sheshiwde, diagonallarınıń kesilisiw noqatında teń ekige bólinetuǵın tórtmúyeshliktiń parallelogramm bolatuǵınlıǵınan paydalanamız.

MK kesindisiniń ortasınıń koordinataları:

$$x=\frac{3+3}{2}=3; \qquad y=\frac{6+2}{2}=4; \qquad z=\frac{4+8}{2}=6.$$

NL kesindisiniń ortasınıń koordinataları:

$$x=\frac{0+6}{2}=3; \qquad y=\frac{2+6}{2}=4; \qquad z=\frac{4+8}{2}=6.$$

MK hám *NL* kesindileriniń ortalarınıń koordinataları birdey ekenligin kóremiz.

Bul, usı kesindilerdiń kesilisetuǵınının hám kesilisiw noqatında olardıń teń ekige bólinetuǵının bildiredi.

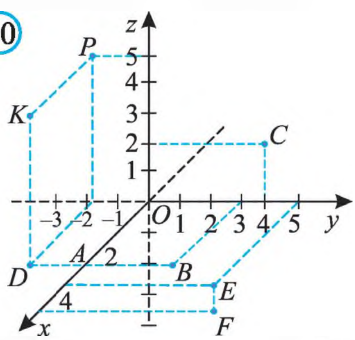
Demek, *MNLK* tórtmúyeshlik – parallelogramm. □

Temaǵa baylanıslı máseleler hám ámeliy tapsırmalar

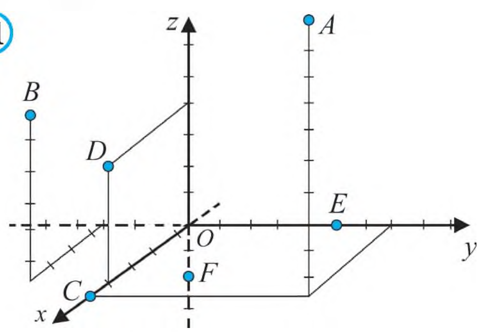
1. 10-súwrette kórsetilgen noqatlardıń koordinataların anıqlań.

2. Keńislikte dekart koordinatalar sisteması kirgizilgen bolıp, onda $A(0;\ 3;\ 1)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 8)$, $D(0;\ -9;\ 0)$, $E(5;\ -1;\ 2)$, $F(-6;\ 2;\ 1)$ noqatları berilgen. Bul noqatlar qaysı *a*) koordinatalar kósherinde; *b*) koordinatalar tegisliginde; *c*) oktantta jatadı?

10



11

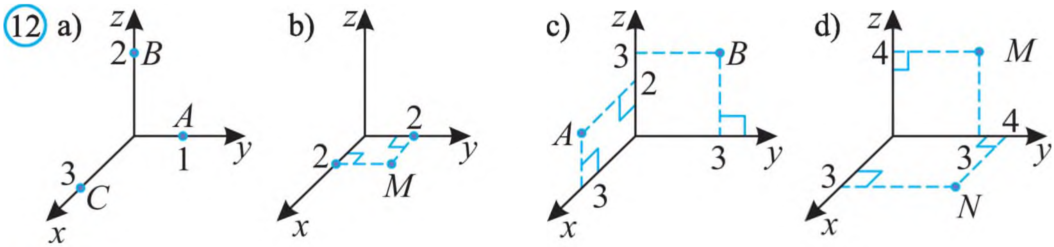


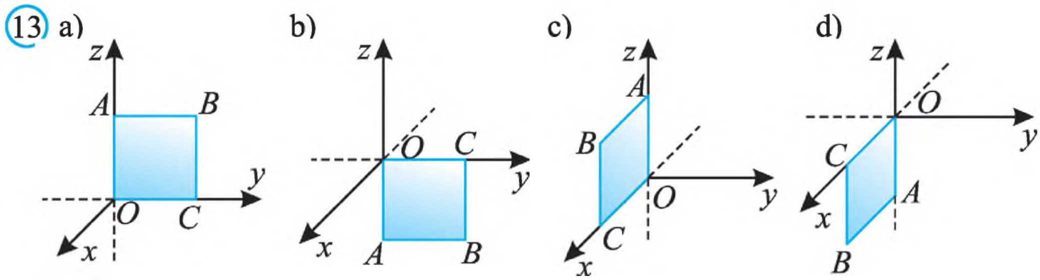
3. 11-súwrettegi noqatlardıń koordinataların tabıń.

4. 12-súwrette belgilengen noqatlardıń koordinataların tabıń.

5. 13-súwrette diagonalı $\sqrt{2}$ ge teń bolǵan kvadrat súwretlengen. Onıń tóbeleriniń koordinataların tabıń.

6. $A\ (3;\ 2;\ 4)$ noqatınıń koordinata tegisligindegi proyekciyasınıń koordinataların tabıń.





7. Keńislikte dekart koordinatalar sisteması kirgizilgen bolıp, bunda $A(-1; 2; -3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 5)$, $D(-2; 2; 0)$, $E(5; -1; 0)$, $F(0; 2; 0)$, $G(9; 0; 0)$, $H(9; 0; 2)$, $I(6; 3; 1)$, $J(-6; 3; 5)$, $K(-6; -2; 3)$, $L(6; -2; 4)$, $M(6; 3; -9)$, $N(-6; 3; -8)$, $O(-6; -3; -6)$, $P(6; -3; -2)$ noqatları berilgen bolsın. Bul noqatlar qaysı koordinatalar kósherinde, koordinatalar tegisliginde hám oktantta jatadı? Tomende berilgen kesteni berilgen úlgilerge qarap toltırıń.

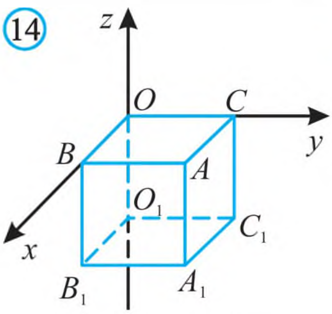
Noqat ornı	Noqat koordinatalarınıń qásiyeti	Nuqat
Ox kósheri	$y=0$, $z=0$ tek x koordinata nolden ózgeshe	$G(9; 0; 0)$
Oy kósheri		
Oz kósheri		
Oxz tegislik	$z=0$, x hám y koordinataları nolden ózgeshe	$D(-2; 2; 0)$
Oyz tegislik		
Oxz tegislik		
1- oktant	$x>0, y>0, z>0$	$I(6; 3; 1)$
2- oktant		
3- oktant		
4- oktant		
5- oktant		
6- oktant		
7- oktant		
8- oktant		

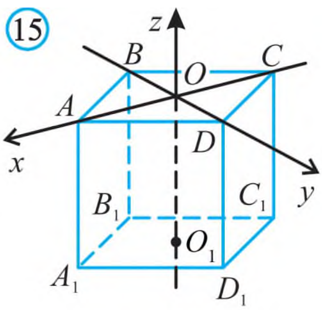
8. $A(2;\ 0;\ -3)$ hám $B(3;\ 4;\ 0)$ noqatları arasındaǵı aralıqtı tabıń.

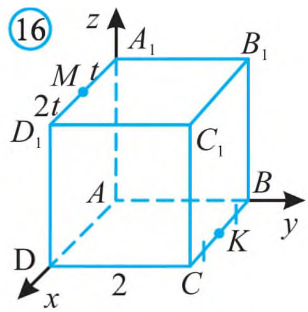
9. $A(3;\ 3;\ 3)$ noqatınan a) koordinata tegisliklerine shekem; b) koordinata kósherlerine shekem; c) koordinata basına shekemgi aralıqlardı tabıń.

10. $M\ (2;\ -3;\ 1)$ noqatınan koordinata tegisliklerine shekemgi aralıqlardı tabıń.

11. Koordinata tegislikleriniń hár birinen 3 birlik aralıqta uzaqlasqan noqattıń ornın anıqlań.







12. Eger $OA = 2\sqrt{2}$ bolsa, 14-súwrette kórsetilgen kubtıń tóbeleriniń koordinataların tabıń.

13. $C(2;\ 5;\ -1)$ hám $D(2;\ 1;\ -6)$ noqatlarınıń qaysı biri koordinata basına jaqın jaylasqan?

14. Tóbeleri $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 1)$, $C(3;\ 1;\ 2)$ noqatlarında bolǵan úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

15. Tóbeleri $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 4)$, $C(3;\ 4;\ 5)$ noqatlarında bolǵan úshmúyeshlik bar bolıwı múmkin be?

16. $A(-2;0;5)$, $B(-1;2;3)$, $C(1;1;-3)$, $D(0;-1;-1)$ noqatları, parallelogrammnıń tóbeleri ekenligin dálilleń.

17. ABC úshmúyeshliginiń túrin anıqlań, onıń perimetri hám maydanın tabıń: a) $A\ (3;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 3;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ 3)$; b) $A\ (2;\ 0;\ 5)$, $B\ (3;\ 4;\ 0)$, $C\ (2;\ 4;\ 0)$; c) $A\ (2;\ 4;\ -1)$, $B\ (-1;\ 1;\ 2)$, $C\ (5;\ 1;\ 2)$.

18. Oxy tegisliginde jatıwshı hám $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ -1)$, $C(0;\ -1;\ 0)$ noqatlarınan birdey aralıqta jatıwshı noqattıń koordinataların tabıń.

19. $A(1;\ 1;1)$, $B(-1;\ 1;\ 1)$, $C(-1;\ -1;\ 1)$, $C_1(-1;\ -1;\ -1)$ noqatları $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń tóbeleri bolsa, onıń qalǵan tóbeleriniń koordinataların tabıń.

20. Tóbeleri S (0; 0; 0), A (2; 0; 0), B (0; 2; 0), C (0; 0; 2) noqatlarında bolǵan ABC piramidanıń durıs piramida ekenligin dálilleń.

21. Orayı koordinatalar basında, radiusı 5 ke teń bolǵan sfera hám shar teńlemelerin jazıń.

22. Orayı A (1; 2; 4) noqatta, radiusi 3 ke teń bolǵan shar teńlemesin jazıń.

23. Diametriniń ushları A (–2; 1; 3), B (0; 2; 1) noqatlarda jatqan sfera teńlemesin jazıń .

24. Qalıń qaǵazdan kub modelin jasań. Onıń bir tóbesin koordinata bası hám onnan shıǵıwshı qabırǵaların birlik ortlar sıpatında alıp, onıń basqa tóbeleriniń koordinataların tabıń.

25. AB kesindisi ortasınıń koordinataların tabıń:
1) $A(-1; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$; 2) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 2; 2)$; 3) $A(-2; 4; 2)$, $B(2; -4; 2)$, 4) $A(1{,}2; -3; 6{,}3)$, $B(-2{,}6; 3{,}2; -5{,}1)$; 5) $A(\sqrt{3}; 2; 1-\sqrt{2})$, $B(3\sqrt{3}; 1; 1+\sqrt{2})$.

26. 15-súwrette kórsetilgen kub qabırǵaları ortalarınıń hám jaqları oraylarınıń koordinataların tabıń.

27. $A(3;-1;4)$, $B(-1;1;-8)$, $C(2;1;-6)$, $D(0;1;2)$ noqatları berilgen. a) AB hám CD; b) AC hám BD kesindileri ortasınıń koordinataların tabıń.

28. $M(1;-1;2)$ hám $N(-3;2;4)$ noqatlar AB kesindini úsh teń bóleklerge ajıratadı. AB kesindi ushlarınıń koordinataların tabıń.

29. $ABCD$ tórtmúyeshliktiń tárepleri hám $A_1B_1C_1D_1$ tuwrı tórtmúyeshliktiń táreplerine sáykes túrde parallel. $ABCD$ – tuwrı tórtmúyeshlik ekenligin dálilleń?

30. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń A tóbesinen onıń tegislikke perpendikulyar AK tuwrı sızıq júrgizilgen. K noqattan tuwrı tórtmúyeshliktiń basqa tóbelerine shekemgi bolǵan aralıqlar 6 cm, 7 cm hám 9 cm. AK kesindiniń uzunlıǵın tabıń.

31*. Keńislikte $A(3; 0; -1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(5; -2; -1)$ noqatları berilgen. Oyz tegisliginde A, B, C noqatlardan birdey aralıqta jaylasqan noqattı tabıń.

32. $ABCD$ parallelogrammnıń tóbeleri: a) $A(-2; -4; 3)$, $B(3; 1; 7)$, $C(4;2;-5)$; b) $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$; c) $A(-1; 7; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$ bolsa, D tóbesiniń koordinataların tabıń.

33. CK kesindini $CK:KM = \lambda$ qatnasta bóliwshi $M(x; y; z)$ noqattıń koordinataların tabıń. a) $C(-5; 4; 2)$, $K(1; 1;-1)$ hám $\lambda=2$; b) $C(1; -1; 2)$, $K(2; -4; 1)$ hám $\lambda=0{,}5$; c) $C(1; 0; -2)$, $K(9; -3; 6)$ hám $\lambda=\frac{1}{3}$.

34. Tóbeleri $A(3; 2; 4)$, $B(1; 3; 2)$, $C(-3; 4; 3)$ noqatlarda jaylasqan úshmúyeshlik medianalarınıń kesilisiw noqatı M niń koordinataların tabıń.

35. Tóbeleri $A(5; 6; 3)$, $B(3; 5; 1)$, $C(0; 1; 1)$ noqatlarda bolǵan úshmúyeshliktiń BL bissektrisasınıń L ushı koordinataların tabıń.

36*. Tóbeleri $A(4; 0; 1)$, $B(5; -2; 1)$, $C(4; 8; 5)$ noqatlarda bolǵan úshmúyeshliktiń AL bissektrisası uzınlıǵın tabıń.

37*. Tóbeleri $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(3; 1; -1)$ noqatlar bolǵan úshmúyeshlik berilgen. Onıń: a) úlken tárepine túsirilgen biyikligin; b) múyeshlerin; c) maydanın tabıń.

38*. 16-súwrette kórsetilgen kub haqqındaǵı maǵlıwmatlardan paydalanıp MK kesindi uzınlıǵın tabıń.

Tariyxıy maǵlıwmatlar

Ábiw Rayxan Beruniy belgili táwip hám matematik Ábiw Áliy ibn Sina menen jazıspalarında oǵan tómendegi sorawdı beredi: «Ne ushın Aristotel hám basqa (filosof)lar tareplerdi altı dana dep ataydı?»

Beruniy altı jaqlı kubtı alıp, «basqa sandaǵı tareplerge iye bolǵan» deneler haqqında aytadı hám «shar tárizli deneniń tárepleri joq ekenligin» qosıp qoyadı.

Al, Ibn Sina «hámme jaǵdaylarda da táreplerdi altı dana dep esaplaw kerek, sebebi hár bir denede, onıń formasına qaramastan úsh ólshem — uzınlıq, tereńlik hám keńlik bar» dep juwap beredi.

Bul jerde Ibn Sino «altı tárep» dep belgileri menen alınǵan úsh koordinatanı názerde tutadı.

Beruniy «Qonuniy Mas'udiy» shıǵarmasında altı táreptiń anıq matematikalıq mánisin keltiredi: «Altı tárep bar, sebebi olar denelerdiń ólshemleri boyınsha háreketleri shegarasız boladı. Úsh ólshem bar, bular uzınlıq, keńlik hám tereńlik, al olardıń ushları ólshewlerden eki ese kóp».

Shıǵarmanıń aldıńǵı kitaplarında avtor jaqtırtqıshlardıń aspandaǵı jaǵdayın aspan sferasına salıstırǵanda eki koordinata – ekliptik keńlik hám boylıq arqalı yaki tap usınday koordinatalar arqalı, lekin aspan ekvatorı yaki gorizontqa salıstırıp anıqlaydı. Biraq, juldızlar hám jaqtırtqıshlardıń óz ara jaylasıwın anıqlaw máselesi de olardıń birin-biri tosıp qalıw jaǵdayların itibarǵa alıwǵa tuwrı keledi. Mine, usınday jaǵdayda úshinshi sferalıq koordinataǵa zárúrlik kelip shıǵadı. Bul zárúrlik Ábiw Rayxan Beruniydi keńisliktegi koordinatalar ideyasın ilgeri súriwge alıp kelgen.

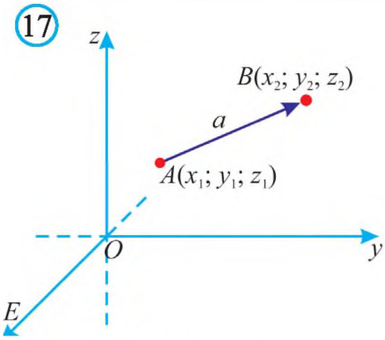
2. KEŃISLIKTEGI VEKTORLAR HÁM OLAR ÚSTINDE ÁMELLER

2.1. Keńisliktegi vektorlar

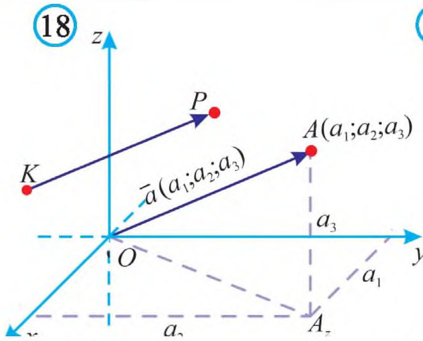
Keńislikte vektor túsinigi tegisliktegi sıyaqlı kirgiziledi.

Keńislikte *vektor* dep baǵıtlanǵan kesindige aytıladı.

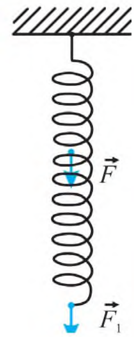
Keńisliktegi vektorlarǵa baylanıslı tiykarǵı túsinikler: vektordıń uzınlıǵı (moduli), vektordıń baǵıtı, vektorlardıń teńligi tegisliktegi sıyaqlı táriyplenedi.

17


$\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$

18


$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

19


Bası A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ noqatında hám aqırı B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ noqatında bolǵan *vektordıń koordinataları* dep $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ sanlarına aytıladı (17-súwret).

Vektorlardıń tegisliktegige uqsas bir qatar qásiyetleri de bar, biz olardı dálillewsiz keltiremiz.

Tegisliktegi sıyaqlı, teń vektorlardıń sáykes koordinataları da teń boladı hám kerisinshe, sáykes koordinataları teń bolǵan vektorlar óz ara teń boladı.

Bul, vektordı onıń koordinataları arqalı ańlatıwǵa tiykar boladı. Vektorlar $\overline{AB}(a_1; a_2; a_3)$ yamasa $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ yamasa qısqasha $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ tárizde belgilenedi(18-súwret).

Vektor koordinatalarsız $\overline{AB}$ (yamasa qısqasha $\bar{a}$) túrinde de belgilenedi. Bunda, vektordıń bası birinshi orında, al aqırı ekinshi orında jazıladı.

Koordinataları nollerden ibarat bolǵan vektor *nollik vektor* dep ataladı hám $\bar{0}(0;0;0)$ yamasa $\bar{0}$ túrinde belgilenedi hám de bul vektordıń baǵıtı bolmaydı.

Eger O koordinata bası hám a_1, a_2 hám a_3 sanlar A noqatınıń koordinataları, yaǵniy $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$ bolsa, bul sanlar $\overline{OA}$ vektorınıń da koordinataları boladı: $\overline{OA}(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Lekin, koordinatalar keńisliginde bası $K(c_1;\ c_2;\ c_3)$ noqatında, aqırı P $(c_1+a_1;\ c_2+a_2;\ c_3+a_3)$ noqatında bolǵan $\overline{KP}$ vektorı da usı koordinatalar menen ańlatıladı: $\overline{KP}(c_1 + a_1 - c_1;\ c_2 + a_2 - c_2;\ c_3 + a_3 - c_3) = \overline{KP}(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Nátiyjede, vektordı koordinatalar keńisliginde qálegen noqatqa qoyılǵan etip súwretlew múmkin. Geometriyada biz usınday *erkin* vektorlar menen shuǵıllanamız. Al, fizikada, ádette, vektorlar bazı bir *noqatqa qoyılǵan* boladı. Máselen, 19-súwrettegi F kúshi prujinanıń qaysı noqatına qoyılǵanı menen áhmiyetli esaplanadı.

Vektordıń uzınlıǵı dep onı súwretlewshi baǵıtlanǵan kesindiniń uzınlıǵına aytıladı (17-súwret). $\bar{a}$ vektordıń uzınlıǵı $|\bar{a}|$ túrinde ańlatıladı.

$\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ vektorınıń uzunlıǵı onıń koordinataları arqalı $|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ formula menen ańlatıladı.

1-másele. $A(2;\ 7;\ -3)$, $B(1;\ 0;\ 3)$, $C(-3;\ -4;\ 5)$ hám $D(-2;\ 3;\ -1)$ noqatları berilgen. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AD}$ hám $\overline{BD}$ vektorlardan qaysıları óz ara teń boladı?

Sheshiliwi: Teń vektorlardıń sáykes koordinataları teń boladı. Sonıń ushın vektorlardıń koordinataların tabamız:

$\overline{AB}=(1-2,\ 0-7,\ 3-(-3))=(-1,\ -7,\ 6);$

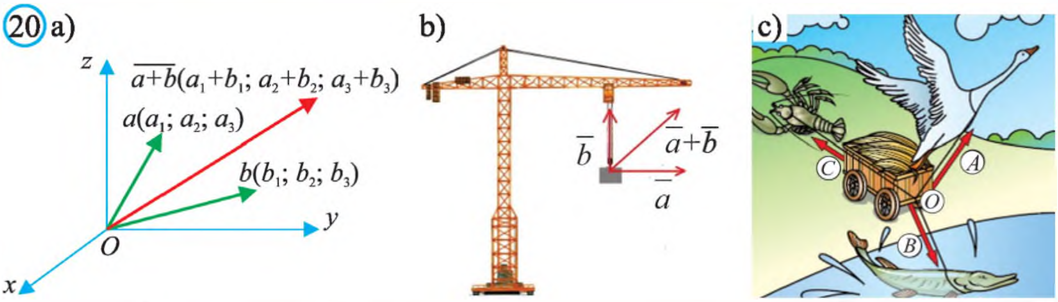
$\overline{DC}=(-3-(-2),\ -4-3,\ 5-(-1))=(-1,\ -7,\ 6).$

Demek, $\overline{AB}=\overline{DC}$. $\overline{BC}=\overline{AD}$ ekenligin ózbetinizshe kórsetiń. □

2.2. Keńisliktegi vektorlar ústide ámeller

Vektorlar ústinde ámeller. Vektorlardı qosıw, sanǵa kóbeytiw hám skalyar kóbeytiw ámelleri tegisliktegi sıyaqlı anıqlanadı.

$\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ hám $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ *vektorlardıń qosındısı* dep $\bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$ vektorına aytıladı (20-súwret).



20.*b*-súwrette kran $\bar{a}$ vektor boyınsha, júk bolsa kranǵa qaraǵanda $\bar{b}$ vektor boyınsha háreketlenip atırǵan bolsın. Nátiyjede júk $\bar{a}+\bar{b}$ vektor boyınsha háreketlenedi. Sonday-aq, 20.*c*-súwrette kórsetilgen rus jazıwshısı Krilov tımsalınıń qaharmanları ne sebepten arbanı ornınan qozǵalta almay atırǵanlıǵın sezgen bolsańız kerek.

Vektorlar qosındısınıń qásiyetleri.

Qálegen $\bar{a}$, $\bar{b}$ hám $\bar{c}$ vektorlar ushın tómendegi qásiyetler orınlı:

a) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ – vektorlardı qosıwdıń orın almastırıw nızamı;
b) $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$ – vektorlardı qosıwdıń túrlendiriw nızamı.

Vektorlardı qosıwdıń úshmúyeshlik qádesi.

Qálegen A, B hám C noqatlar ushın (21-súwret): $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

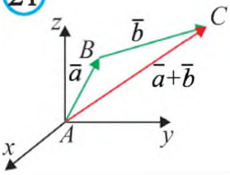
Vektorlardı qosıwdıń parallelogramm qádesi.

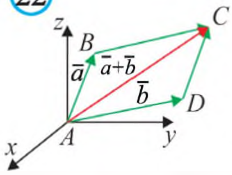
Eger $ABCD$ – parallelogramm (22-súwret) bolsa, $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

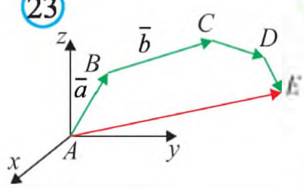
Vektorlardı qosıwdıń kópmúyeshlik qádesi.

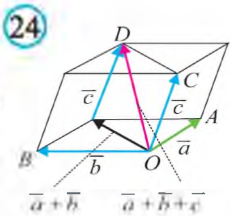
Eger A, B, C, D hám E noqatları kópmúyeshliktiń tóbeleri bolsa (23-súwret),

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE} \quad \text{boladı.}$$

21


22


23


24


Bir tegislikte jatpaytuǵın úsh *vektorlardı qosıwdıń parallelepiped* qádesi. Eger $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped (24-súwret) bolsa,

$$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}=\overline{AC} \quad \text{boladı.}$$

$\bar{a}(a_1;a_2;a_3)$ *vektorınıń* λ *sanǵa kóbeymesi* dep $\lambda\bar{a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$ vektorǵa aytıladı (25-súwret).

Iqtıyarlı $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar jáne λ hám μ sanları ushın

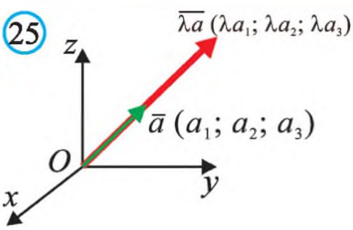
a) $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$;

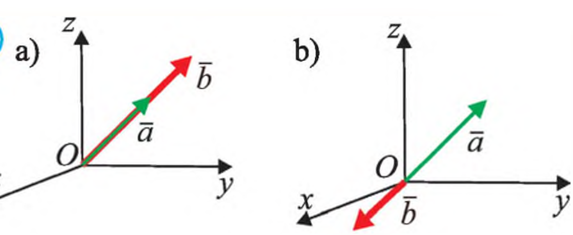
b) $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$;

c) $|\lambda\bar{a}|=|\lambda|\cdot|\bar{a}|$ hám $\lambda\bar{a}$ vektorınıń baǵıtı

$\lambda>0$ bolǵanda, $\bar{a}$ vektor baǵıtı menen birdey hám

$\lambda<0$ bolǵanda, $\bar{a}$ vektor baǵıtına qarama-qarsı boladı.

25


26


2.3. Kollinear hám komplanar vektorlar

Nollik vektordan ózgeshe $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar berilgen bolsın. $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar birdey yamasa qarama-qarsı baǵıtlanǵan bolsa, olar *kollinear vektorlar* dep ataladı (26-súwret).

1-qásiyeti. $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar ushın $\bar{a}=\lambda\bar{b}\ (\lambda\neq 0)$ teńligi orınlı bolsa, olar óz ara kollinear boladı hám kerisinshe.

Eger $\lambda>0$ bolsa, $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar bır tarepke ($\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$), eger $\lambda<0$ bolsa, qarama-qarsı tárepke ($\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$) baǵıtlanǵan boladı.

2-qásiyeti. $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ hám $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ vektorlar óz ara kollinear bolsa, ólarniń koordinatalari óz ara proporcional boladı: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ hám kerisinshe .

2-másele. Bası $A\ (1;\ 1;\ 1)$ noqatta hám aqırı Oxy tegisligindegi B noqatta bolǵan hám $\bar{a}(1;\ 2;\ 3)$ vektorına kollinear vektordı tabıń.

Sheshiliwi: B noqattıń koordinataları $B(x;\ y;\ z)$ bolsın. B noqat Oxy tegisliginde jatqanı ushın $z=0$. Onda $\overline{AB}\ (x-1;\ y-1;\ -1)$ boladı.

Shárt boyınsha, $\overline{AB}\ (x-1;\ y-1;\ -1)$ hám $\bar{a}(1,\ 2,\ 3)$ vektorları kollinear. Demek, olardıń koordinataları óz ara proporcional boladı.

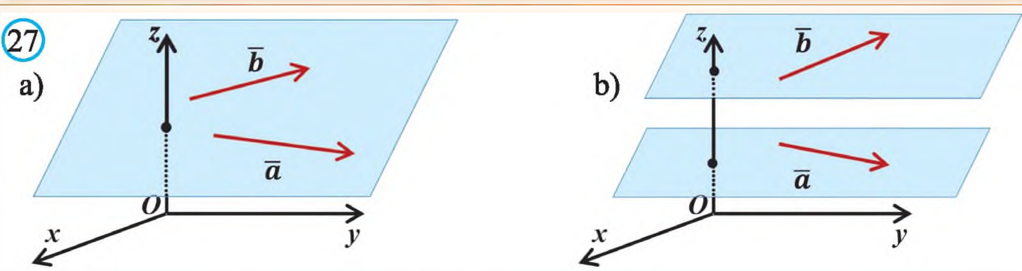
Bunnan $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}$ proporciyalarıń payda etemiz.

Olardan $x=\frac{2}{3},\quad y=\frac{1}{3}$ ekenlıgıń tabamız.

Onda $\overline{AB}\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$ boladı. □

Bir tegislikte yamasa parallel tegisliklerde jatıwshı vektorlar *komplanar vektorlar* dep ataladı (27-súwret).

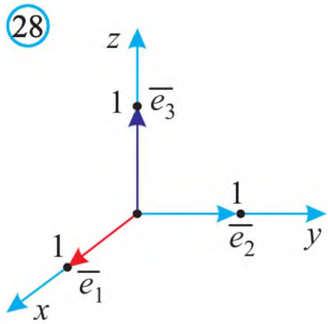
27



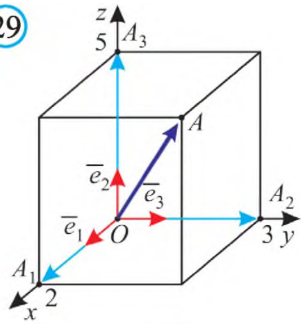
$\bar{e}_1\ (1;\ 0;\ 0)$, $\bar{e}_2(0;\ 1;\ 0)$ hám $\bar{e}_3\ (0;\ 0;\ 1)$ vektorlar *ortlar* dep ataladı (28-súwret).

Íqtıyarlı $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ vektorıń $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3$ kórinisinde, birden bir tárizde *ortlar boyınsha jayıw* múmkin (29-súwret).

28



29



Sonday-aq, úsh komplanar bolmaǵan $\overline{OA}, \overline{OB}$ hám $\overline{OC}$ vektorları berilgen bolsa, ıqtıyarlı $\overline{OD}$ vektorın tómendegi kóriniste, birden-bir tárizde ańlatıw múmkin:

$$\overline{OD} = a_1 \cdot \overline{OA} + a_2 \cdot \overline{OB} + a_3 \cdot \overline{OC}.$$

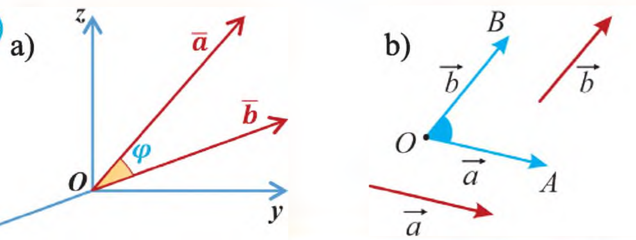
Bul jerde a_1, a_2, a_3 bazı bir haqıyqıy sanlar. Buǵan *vektordı berilgen vektorlar boyınsha jayıw* dep ataladı.

2.4. Vektorlardıń skalyar kóbeymesi

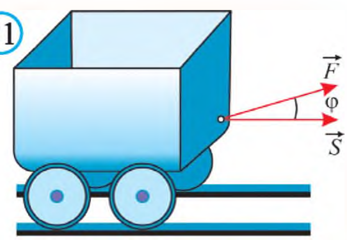
Nollik vektordan ózgeshe $\overline{a}$ hám $\overline{b}$ *vektorlar arasındaǵı múyesh* dep O noqattan shıǵıwshı $\overline{OA}=\overline{a}$ hám $\overline{OB}=\overline{b}$ vektorlarınıń baǵıtlawshı kesindileri arasındaǵı múyeshke aytıladı (30-súwret).

$\overline{a}$ hám $\overline{b}$ vektorlar arasındaǵı múyesh $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$ túrinde de belgilenedi.

30



31



$\overline{a}$ hám $\overline{b}$ *vektorlarınıń skalyar kóbeymesi* dep, bul vektorlar uzınlıqlarınıń olar arasındaǵı múyeshtiń kosinusına kóbeymesine aytıladı.

Eger vektorlardıń biri nollik vektor bolsa, olardıń skalyar kóbeymesi nolge teń boladı.

Skalyar kóbeyme $\overline{a} \cdot \overline{b}$ yamasa $(\overline{a}; \overline{b})$ túrinde belgilenedi. Anıqlama boyınsha

$$(\overline{a}; \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi. \qquad (1)$$

Anıqlamadan kórinip turǵanınday, $\overline{a}$ hám $\overline{b}$ vektorlarınıń skalyar kóbeymesi nolge teń bolsa, olar *perpendikulyar* boladı hám kerisinshe.

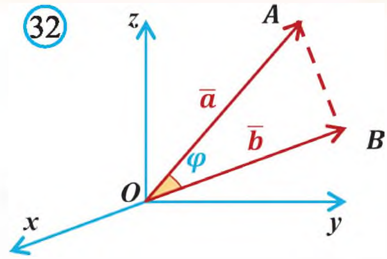
Fizikada deneni $\overline{F}$ kúshi ta'siri astında $\overline{s}$ aralıqqa jıljıtıwda orınlanǵan A jumıs (31-súwret) $\overline{F}$ hám $\overline{s}$ vektorlarınıń skalyar kóbeymesine teń boladı:

$$A = (\overline{F}, \overline{s}) = |\overline{F}| \cdot |\overline{s}| \cos\varphi.$$

Qásiyeti. $\bar{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ hám $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ vektorlar ushın $(\bar{a}\,;\bar{b}\,)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Dálillew. $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlarınıń koordinata bası O noqatqa qoyamız (32-súwret). Onda $\overline{OA}=(a_1; a_2; a_3)$ hám $\overline{OB}=(b_1; b_2; b_3)$ boladı. Eger berilgen vektorlar kollinear bolmasa, ABO úshmúyeshlikten ibarat boladı hám onıń ushın kosinuslar teoreması orınlı boladı:

32



$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\varphi.$$ Onda

$$OA\cdot OB\cdot\cos\varphi=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)$$ boladı. Lekin, $OA^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$,

$OB^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$ hám $AB^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$.

Demek, $$(\bar{a}\,,\bar{b}\,)=|\bar{a}\,|\cdot|\,\bar{b}\,|\cos\varphi=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)=$$

$$=\frac{1}{2}(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2-$$

$$-(b_3-a_3)^2)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Berilgen vektorlar kollinear bolǵan ($\varphi=0°$, $\varphi=180°$) jaǵdayda da bul teńliktiń orınlı bolatuǵının óz betińizshe kórsetiń. □

Vektorlardıń skalyar kóbeymesiniń qásiyetleri

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ – orın almastırıw qásiyeti.

2. $(\bar{a}+\bar{b}\,)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$ – bólistiriw qásiyeti.

3. $\lambda\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\cdot\bar{b})$ – gruppalaw qásiyeti.

4. Eger $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar birdey baǵıttaǵı kollinear vektorlar bolsa, $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|$ boladı, sebebi $\cos 0°=1$.

5. Eger qarama-qarsı baǵıtlanǵan bolsa, $\bar{a}\cdot\bar{b}=-|\bar{a}|\,|\bar{b}|$, sebebi $\cos 180°=-1$.

6. $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}||\bar{a}|\cos 0°=|\bar{a}|^2\Rightarrow\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.

7. $\bar{a}$ vektor $\bar{b}$ vektorǵa perpendikulyar bolsa, $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ boladı.

Nátiyjeler:

a) $\bar{a}=(a_1;a_2;a_3)$ vektorınıń uzınlıǵı: $|\bar{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$; (1)

b) $\bar{a}=(a_1;a_2;a_3)$ hám $\bar{b}=(b_1;b_2;b_3)$ vektorlar arasındaǵı múyesh kosinusı:

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}};\qquad(2)$$

c) $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$ hám $\overline{b}=(b_1;b_2;b_3)$ vektorlarınıń perpendikulyarlıq shárti:
$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \qquad (3)$$

3-másele. $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$, $D(2;\ -3;\ 1)$ noqatları berilgen. $\overline{AB}$ hám $\overline{CD}$ vektorlar arasındaǵı múyeshtiń kosinusın tabıń.

Sheshiliwi: $\overline{AB}$ hám $\overline{CD}$ vektorlarınıń koordinataların, keyin uzınlıqların tabamız: $\overline{AB}=(1-0;\ -1-1;\ 2-(-1))=(1,-2,3)$,
$$\overline{CD}=(2-3;\ -3-1;\ 1-0)=(-1,-4,1).$$
$$|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14},$$
$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Demek, $\cos\varphi=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}=\dfrac{1\cdot(-1)+(-2)(-4)+3\cdot1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\dfrac{5}{\sqrt{63}}.$ □

4-másele. $\overline{a}(1;2;0)$, $\overline{b}(1;-\frac{1}{2};0)$ vektorlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

Sheshiliwi: $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\dfrac{1\cdot1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot0}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2}}=\dfrac{0}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}}=0.$

Demek, $\varphi=90°$. □

5-másele. $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$ hám bul vektorlar arasındaǵı múyesh $\dfrac{2\pi}{3}$ ge teń bolsa, $|\overline{a}+\overline{b}|$ nı tabıń.

Sheshiliwi: $|\overline{a}+\overline{b}|=\sqrt{(\overline{a}+\overline{b})^2}=\sqrt{\overline{a}^2+2(\overline{a}\cdot\overline{b})+\overline{b}^2}=\sqrt{|\overline{a}|^2+2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\phi+|\overline{b}|^2}=$
$$=\sqrt{9+25+2\cdot15\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{34-15}=\sqrt{19}$$

6-másele. Eger $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}$ hám $\overline{b}=-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ bolsa, 1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}$ vektorınıń koordinataların hám uzınlıǵın tabıń.

Sheshiliwi: $\overline{a}$ hám $\overline{b}$ vektorlar jayılmalarınıń koordinataların izlenip atırǵan vektor ańlatpasına qoyamız: 1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}=\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}$.

Demek, $\overline{c}=(1;2;-2)$. Onda $|\overline{c}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$;

2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}=2(2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k})-(-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=4\overline{i}+6\overline{j}-8\overline{k}+\overline{i}+\overline{j}2\overline{k}=$
$=5\overline{i}+7\overline{j}-10\overline{k}$.

Demek, $\overline{d}=(5;7;-10)$. Onda $|\overline{d}|=\sqrt{5^2+7^2(-10)^2}=\sqrt{174}$. □

7-másele. $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar arasındaǵı múyesh 30° qa teń hám $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}|$=2 bolsa, $(2\bar{a} + 3\bar{b})(-2\bar{a}+\bar{b})$ kóbeymesin esaplań.

Sheshiliwi: Dáslep $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlar kóbeymesin esaplaymız:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}| \cos 30° = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Són vektorlar kóbeymesiniń bólistiriw qásiyeti boyınsha, berilgen vektorlar ańlatpaların kóp aǵzalını kóp aǵzalıǵa kóbeytiw sıyaqlı kóbeytemiz:

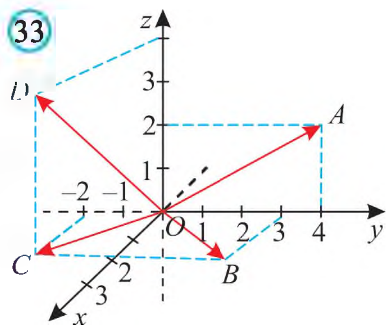
$$(2\bar{a}+3\bar{b})(-2\bar{a}+\bar{b})=-4\bar{a}^2 +2(\bar{a}, \bar{b})-6(\bar{a}, \bar{b})+3\bar{b}^2=-4\bar{b}^2-4(\bar{a}, \bar{b})+3\bar{b}^2.$$

$\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=9$, $\bar{b}=|\bar{b}|^2=4$, $(\bar{a}, \bar{b})=3$ ekenligin esapqa alsaq, izlenip atırǵan kóbeyme $(2\bar{a}+3\bar{b})(-2\bar{a}+\bar{b})=-4\cdot 9-4\cdot 3+3\cdot 4=-36.$ □

Temaǵa baylanıslı máseleler hám ámeliy tapsırmalar

39. 33-súwrettegi vektorlardıń kóbeymesin anıqlań.

40. $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 1; 1)$ hám $O(0; 0; 0)$ noqatları berilgen. $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{BO}, \overline{CO}$ hám $\overline{AB}$ vektorlarınıń koordinataların anıqlań.



41. $\overline{AB}\ (a; b; c)$ bolsa, $\overline{BA}$ vektor koordinataların aytıń.

42. Eger a) $A(1; 2; 3)$, $B(3; 7; 6)$; b) $A(-3; 2; 1)$, $B(1; -4; 3)$ bolsa, $\overline{AB}$ vektor koordinataların tabıń.

43. $\bar{a}(1; -1; 1)$, $\bar{b}(0; 2; -4)$, $\bar{c}(2; 3; -1)$, $\bar{d}(1; 2; 5)$ vektorlarınıń uzınlıǵın tabıń.

44. Eger $\bar{a}(2; 1; 3)$ hám $\bar{b}(-1; x; 2)$ vektorlardıń uzınlıqları teń bolsa, x ti tabıń.

45. Uzınlıǵı $\sqrt{54}$ ke teń bolǵan $\bar{a}(c; 2c; -c)$ vektorınıń koordinataların tabıń.

46. A, B, C, D, E hám F noqatları durıs altımúyeshliktiń tóbeleri bolsa, olar arqalı: a) teńdey eki; b) eki birdey baǵıtlanǵan; c) eki qarama-qarsı baǵıtlanǵan hám teń; d) eki qarama-qarsı baǵıtlanǵan hám teń bolmaǵan vektorlarǵa mısallar keltiriń.

47. k nıń qanday mánislerinde: a) $\bar{a}(4; k; 2)$; b) $\bar{a}(k-1; 1; 4)$; c) $\bar{a}(k; 1; k+2)$; d) $\bar{a}(k-1; k-2; k+1)$ vektorınıń uzınlıǵı $\sqrt{21}$ ge teń boladı?

48. Úsh noqat berilgen: $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 1; 1)$. Sonday $D(x; y; z)$

noqatın tabıń, nátiyjede, $\overline{AB}$ hám $\overline{CD}$ vektorları teń bolsın.

49. Úsh noqat berilgen: $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 2;\ -1)$. Eger a) $\overline{AB}$ hám $\overline{CD}$ vektorları teń; b) $\overline{AB}$ hám $\overline{CD}$ vektorlarınıń qosındısı nollik vektorǵa teń bolsa, $D\ (x;\ y;\ z)$ noqatın tabıń.

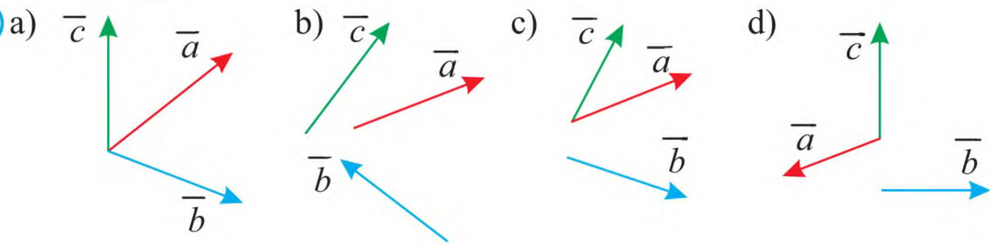
50*. $(2;\ n;\ 3)$ hám $(3;\ 2;\ m)$ vektorları berilgen. m hám n niń qanday mánislerinde bul vektorlar kollinear boladı?

51. Bası $A(1;\ 1;\ 1)$ noqatta hám aqırı Oxy tegisligindegi B noqatında bolǵan hám de $a(1;-2;\ 3)$ vektorǵa kollinear vektordı tabıń.

52*. $ABCD$ parallelogrammnıń tóbeleri a) $A(-2;\ -4;\ 3)$, $B\ (3;\ 1;\ 7)$, $C\ (4;\ 2;\ -5)$; b) $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ -3;\ -2)$, $C(-6;\ 2;\ 1)$; c) $A(-1;\ 7;\ 4)$, $B(1;\ 5;\ 2)$, $C(9;\ -3;\ -8)$; d) $A(-2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ 7)$, $C(4;\ 2;\ -5)$ bolsa, D tóbesiniń koordinataların tabıń.

53. 334-súwrette kórsetilgen vektorlardıń parallelepiped qádesi boyınsha, qosındısın tabıń.

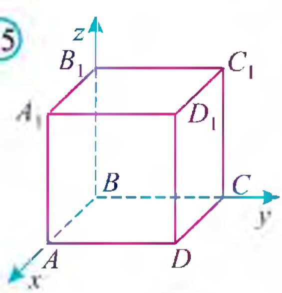
34



54. Eger $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$ hám $M(3;5;2)$, $N(7;1;2)$, $P(3;-3;2)$, $K(-1;1;2)$ bolsa, $ABCD$ hám $MNPK$ tórtmúyeshliktiń qaysı biri romb, qaysısı kvadrat boladı?

55. 35-súwrette kórsetilgen $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubta: a) $\overline{AB}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{AC}$ vektorlarına teń; b) $\overline{A_1D_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{BD}$ vektorlarına qarama-qarsı baǵıtlanǵan; c) $\overline{BA}$, $\overline{AA_1}$ vektorlarına kollinear; d) $\overline{AB}$ hám $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ hám $\overline{A_1C}$ vektorlar jubına komplanar bolǵan vektorlardı anıqlań.

35



56. Eger 1) $\overline{a}(1;-4;0)$, $\overline{b}(-4;0;8)$; 2) $\overline{a}(0;2;5)$, $\overline{b}(4;\ 3;\ 0)$ bolsa, $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$ vektorınıń koordinataların hám uzınlıǵın tabıń.

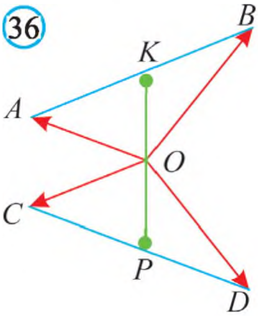
57. Eger 1) $\overline{a}(1;\ -4;\ 0)$, $\overline{b}(-4;\ 8;\ 0)$; 2) $\overline{a}(0;\ -2;\ 7)$, $\overline{b}(0;\ 4;\ -1)$ bolsa, $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ vektorınıń koordinataların hám uzınlıǵın tabıń.

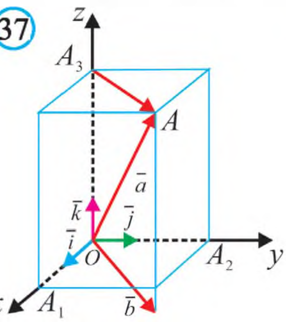
58. Eger $\overline{b}(-4;\ 8;\ 2)$ bo'lsa, a) $2\overline{b}$; b) $-3\,\overline{b}$; c) $-1{,}5\,\overline{c}$; d) $0\cdot\overline{b}$ vektorınıń koordinataların hám uzınlıǵın tabıń.

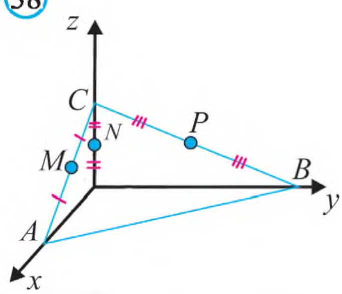
59. $\bar{a}(1; -1; 1)$, $\bar{b}(0; 2; -4)$, $\bar{c}(2; 3; -1)$, $\bar{d}(1; 2; 5)$ vektorların ortlar boyınsha jayıń.

60*. $\bar{a}(1; -1; 1)$, $\bar{b}(0; 2; -4)$, $\bar{c}(2; 3; -1)$, $\bar{d}(1; 2; 5)$ vektorları berilgen. $|\bar{a} + 2\bar{b}|$, $|\bar{a} - 3\bar{b}|$, $|\bar{c} - 2\bar{d}|$, $|3\bar{a} + 4\bar{d}|$ nı tabıń.

61*. K hám P noqatları, ayqısh tuwrı sızıqlarda jatıwshı AB hám CD kesindileriniń ortası hám de O noqat KP kesindisiniń ortası bolsa (36-súwret), $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \bar{0}$ ekenligin dálilleń.

36


37


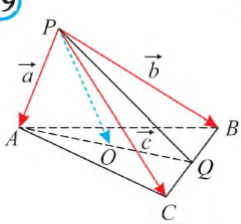
38


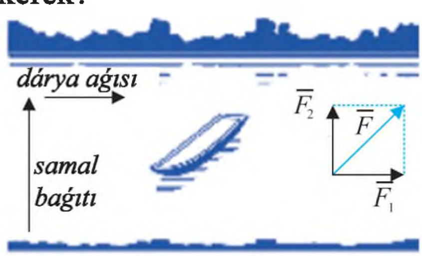
62. 37-súwrette $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 3$. $\bar{a}$, $\bar{b}$ hám $\overline{A_3A}$ vektorlarınıń koordinataların anıqlań.

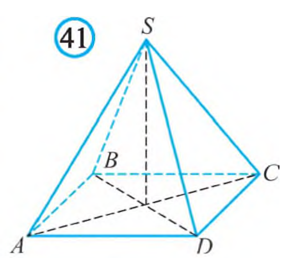
63. 38-súwrette $OA = 4$, $OB = 9$, $OC = 2$, M, N hám P noqatları sáykes, AC, OC hám CB kesindileriniń ortası. $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{PC}$, $\overline{MC}$ hám $\overline{CN}$ vektorlarınıń koordinataların tabıń.

64. Q noqat $PABC$ tetraedrdıń BC qabırǵasınıń ortası hám O noqatı AQ kesindiniń ortası bolsa (39-súwret), $\overline{PO}$ vektorın $\overline{PA} = \bar{a}$, $\overline{PB} = \bar{b}$ hám $\overline{PC} = \bar{c}$ vektorları arqalı ańlatıń.

65*. 40-súwrette kórsetilgen qayıqqa dárya aǵısı $\overline{F_1} = 120\ N$ kúsh penen hám qırǵaqtan esken samal $\overline{F_2} = 100\ N$ kúsh penen tásir qılmaqta. Qayıqtıń dáryada ornınan qozǵalmay turıwı ushın onı qanday kúsh penen uslap turıw kerek?

39


40


41


66. Skalyar kóbeymesi: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) 0; d) $-\frac{1}{2}$; e) b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ge teń bolǵan birlik vektorlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

67. a) $\bar{a}$ (1; –1; 1), $\bar{b}$ (0; 2; –4); b) $\bar{c}$(2; 3; –1), $\bar{d}$ (1; 2; 5); c) $\bar{e}$(1; –1; 1), $\bar{f}$(0; 2; – 4); d) $\bar{g}$(2; 3; –1), $\bar{h}$(1; 2; 5) vektorlarınıń skalyar kóbeymesin tabıń.

68. ABC úshmúyeshlikte $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$. a) $\overline{BA}$ hám $\overline{BC}$; b) $\overline{CA}$ hám $\overline{AB}$; c) $\overline{AB}$ hám $\overline{BA}$ vektorlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

69. $\bar{a}$ hám $\bar{b}$ vektorlarınıń uzınlıqları hám olar arasındaǵı múyesh sáykes a) 5, 12, 50°; b) 3, $\sqrt{2}$, 45°; c) 5, 6, 120°; d) 4, 7, 180° bolsa, olardıń skalyar kóbeymesin tabıń.

70. n niń qanday mánisinde, vektorlar perpendikulyar boladı?
a) $\bar{a}(2; -1; 3)$, $\bar{b}(1; 3; n)$; b) $\bar{a}(n; -2; 1)$, $\bar{b}(n; -n; 1)$;
c) $\bar{a}(n; -2; 1)$, $\bar{b}(n; 2n; 4)$; d) $\bar{a}(4; 2n; -1)$, $\bar{b}(-1; 1; n)$.

71. $\bar{a}(1;-5;2)$, $\bar{b}(3;1;2)$ vektorları berilgen. a) $\bar{a}+\bar{b}$ hám $\bar{a}-\bar{b}$; b) $\bar{a}+2\bar{b}$ hám $3\bar{a}-\bar{b}$; c) $2\bar{a}+\bar{b}$ hám $3\bar{a}-2\bar{b}$ vektorlarınınıń skalyar kóbeymesin tabıń.

72. A (1; 0; 1), B (–1; 1; 2), C (0; 2; –1) noqatları berilgen. Oz koordinatalar kósherinde sonday D noqatın tabıń, $\overline{AB}$ hám $\overline{CD}$ vektorları perpendikulyar bolsın.

73*. $(\bar{a}, \bar{b}) \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$ ekenligin tıykarlań. Bul vektorlar qanday bolǵanda teńlik orınlı boladı?

74*. $SABCD$ piramidanıń barlıq qabırǵaları óz ara teń (41-súwret) hám ultanı kvadrattan ibarat. a) $\overline{SA}$ hám $\overline{SB}$; b) $\overline{SD}$ hám $\overline{AD}$; c) $\overline{SB}$ hám $\overline{SD}$; d) $\overline{AS}$ hám $\overline{AC}$; e) $\overline{AC}$ hám $\overline{AD}$ vektorlar arasındaǵı múyeshlerdi tabıń.

75*. Uzınlıqları birge teń $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlar jup-juptan 60° lı múyesh payda etedi. a) $\bar{a}$ hám $\bar{b}+\bar{a}$; b) $\bar{a}$ hám $\bar{b}-\bar{c}$ vektorlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

76. O noqat $ABCD$ kvadrat diagonallarınıń kesilisiw noqatı. Kvadrattıń B tóbesinen diagonalǵa parallel hám DA tuwrı sızıq penen F noqatta kesilisetuǵın tuwrı sızıq júrgizilgen. $\overline{BF}$ vektorın $\overline{DO}$ hám $\overline{DC}$ vektorları arqalı ańlatıń.

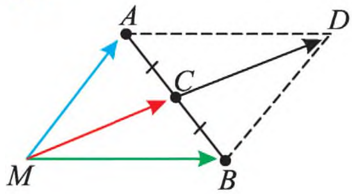
77. O noqat ABC úshmúyeshlik medianalarınıń kesilisiw noqatı bolsa, $\overline{OC}$ vektorın $\overline{AB}$ hám $\overline{AC}$ vektorları boyınsha jayıń.

78*. C noqat AB kesindisiniń ortası bolsa (42-súwret), onda ıqtıyarlı M noqat ushın $\overline{MC}=\frac{1}{2}(\overline{MA}+\overline{MB})$ bolatuǵının dálilleń.

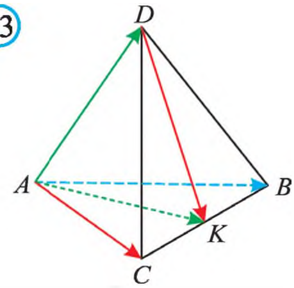
79. K noqat $ABCD$ tetraedr BC qabırǵasınıń ortası bolsa (43-súwret), $\overline{DK}$ vektorın $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ hám $\overline{AC}$ vektorlar boyınsha jayıń.

80*. Deneniń jılısıw baǵıtına salıstırǵanda 30° lı múyesh astında qoyılǵan $\bar{F}=20N$ kúsh ta'sirinde dene 3 m ge jılısadı. Bul jaǵdayda orınlanǵan jumıstı tabıń.

42



43



81*. Denenıń jılısıw bağıtına salıstırǵanda 60° lı múyesh astında qoyılǵan $\overline{F}$ =50 *N* kúsh tásirinde dene 8 m ge jılısadı. Bul jaǵdayda orınlanǵan jumıstı tabıń.

82*. (Koshi – Bulnyakovskiy teńsizligi) Íqtıyarlı a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 sanları ushın $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leq (a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2})(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2})$ teńsizliktiń orınlı bolıwın vektorlardan paydalanıp dálilleń.

3. KEŃISLIKTE ALMASTÍRÍWLAR HÁM UQSASLÍQ

3.1. Keńislikte geometriyalıq almastırıwlar

Keńislikte berilgen *F* denesiniń hár bir noqatı qanday da bir usılda kóshirilse, jańa F_1 denesi payda boladı. Eger bul kóshiriwde (sáwlelendiriwde) birinshi denenıń har túrli noqatları ekinshi denenıń hár túrli noqatlarına kóshse, onda bul kóshiriw *geometriyalıq dene almastırıw* dep ataladı.

Pútkil keńislikti geometriyalıq dene sıpatında qarasaq, keńisliktegi denelerdı almastırıw haqqında da aytıw múmkin.

Kórip turǵanıńızday, keńisliktegi geometriyalıq almastırıwlar túsinigi, tegisliktegi siyaqlı qabıl etiledi. Sonday-aq, onıń tómende kóriletuǵın bir qatar túrleriniń qásiyetleri hám olardıń dálili de tegisliktegige uqsas boladı. Sol sebepli, bul qásiyetlerdıń dáliline toqtamaymız hám olardı óz betinshe orınlawdı usınıs etemiz.

3.2. Háreket hám parallel kóshiriw

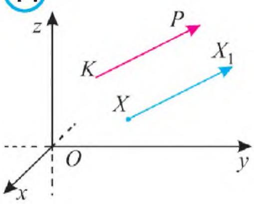
Noqatlar arasındaǵı aralıqtı saqlawshı dene almastırıwlar háreket dep ataladı. Hárekettiń tómendegi qásiyetlerin keltiriw múmkin.

Hárekette tuwrı sızıq tuwrı sızıqqa, nur-nurǵa, kesindi oǵan teń kesindige, múyesh oǵan teń múyeshke, úshmúyeshlik oǵan teń úshmúyeshlikke, tegislik oǵan teń tegislikke hám tetraedr oǵan teń tetraedrge kóshedi (sáwlelenedi).

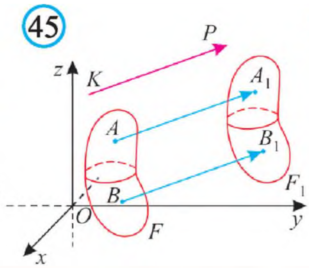
Keńislikte qanday da háreket járdeminde birin ekinshisine kóshiriw múmkin bolǵan deneler *teń deneler* dep ataladı.

Háreketke eń ápiwayı mısal bul parallel kóshiriw bolıp esaplanadı.

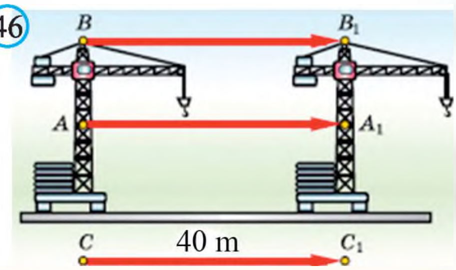
44



45



46



Keńislikte bazı bir $\overline{KP}$ vektorı hám ıqtıyarlı X noqat berilgen bolsın (44-súwret). Eger X_1 noqat $\overline{XX_1} = \overline{KP}$ shártin qanaatlandırsa, X noqat X_1 noqatqa $\overline{KP}$ vektor boylap *parallel kóshirilgen* dep ataladı.

Eger keńislikte berilgen F denesınıń hár bir noqatı $\overline{KP}$ vektor boylap kóshirilse (45-súwret), yaǵnıy F_1 denesi payda boladı. Bul jaǵdayda F denesi F_1 *denesine parallel kóshirilgen* dep ataladı. Parallel kóshiriwde F denesiniń hár bir noqatı birdey baǵıtta birdey aralıqqa kóshirilgen boladı.

46-súwrette kórsetilgen kóteriwshi krannıń hár bir noqatı baslanǵısh jaǵdayına qaraǵanda 40 m ge parallel kóshken.

Kórinip turǵanınday, parallel kóshiriw háreket esaplanadı. Sonıń ushın, parallel kóshiriwde sızıq tuwrı sızıqqa, nur-nurǵa, kesindi oǵan teń kesindige, tegislik oǵan teń tegislikke kóshedi hám taǵı basqa da parallel kóshiriwler ushırasadı.

Aytayıq $\overline{KP} = (a; b; c)$ vektor boylap parallel kóshiriwde F denesiniń $X(x; y; z)$ noqatı F_1 denesiniń $X_1(x_1; y_1; z_1)$ noqatına ótsin. Onda, anıqlama boyınsha, tómendegilerge iye bolamız:

$x_1 - x = a,\ \ y_1 - y = b,\ \ z_1 - z = c$ yaki $x_1 = x + a,\ \ y_1 = y + b,\ \ z_1 = z + c.$

Bul teńlikler *parallel kóshiriw formulaları* dep ataladı.

1-másele. $\overline{p} = (3; 2; 5)$ vektor boylap parallel kóshiriwde $P(-2; 4; 6)$ noqat qaysı noqatqa kóshedi?

Sheshiliwi. Joqarıdaǵı parallel kóshiriw formulalarınan paydalanamız: $x_1 = -2 + 3 = 1,\ \ y_1 = 4 + 2 = 6,\ \ z_1 = 6 + 5 = 11$. *Juwabı:* $P_1(1; 6; 11)$. □

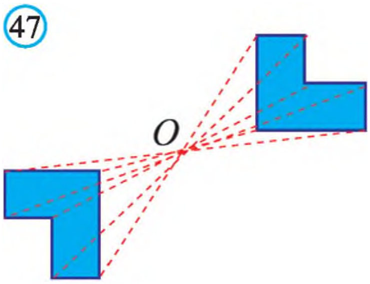
3.3. Keńislikte oraylıq simmetriya

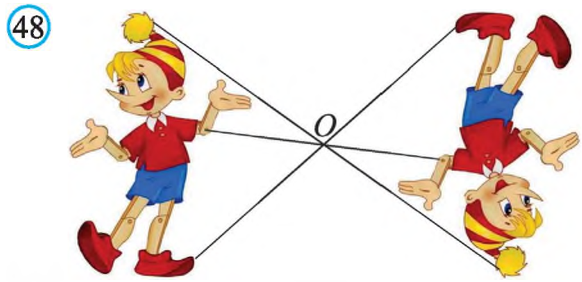
Keńislikte berilgen A hám A_1 noqatları O noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı delinedi, eger $\overline{AO} = \overline{OA_1}$ bolsa, yaǵnıy O noqat AA_1 kesindisiniń ortası bolsa.

Eger keńislikte berilgen F denesiniń hár bir noqatı O noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı noqatqa kóshse (47-súwret), bunday almastırıw *O noqatqa salıstırǵanda simmetriya* dep ataladı. 48, 49-súwretlerde O noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı deneler kórsetilgen.

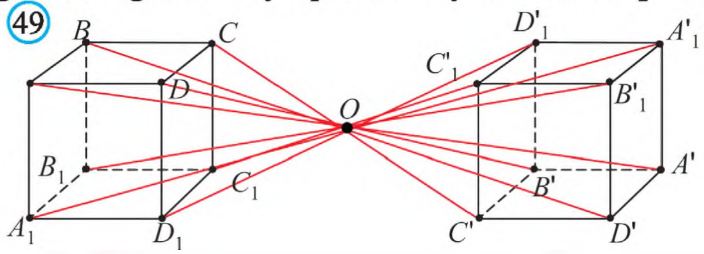
Noqatqa salıstırǵanda simmetriya – háreket bolıp esaplanadı.

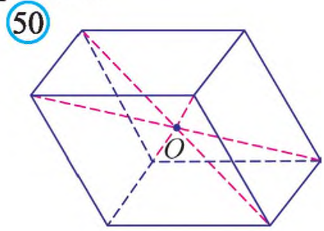
Eger F dene O noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı almastırıwda ózine kóshse, bunday dene *oraylıq simmetriyalı dene* dep ataladı.





Máselen, parallelepiped (50-súwret) diagonallarınıń kesilisiw noqatı O ǵa salıstırǵanda oraylıq simmetriyalı dene bolıp esaplanadı.





2-másele. O (2; 4; 6) noqatqa salıstırǵanda oraylıq simmetriyada $A = (1; 2; 3)$ noqatı qaysı noqatqa ótedi?

Sheshiliwi. $A_1 = (x; y; z)$ izlenip atırǵan noqat bolsın. Anıqlama boyınsha, O noqat AA_1 kesindisiniń ortası. Demek, $2 = \frac{x+1}{2}$, $4 = \frac{y+2}{2}$, $6 = \frac{z+3}{2}$.

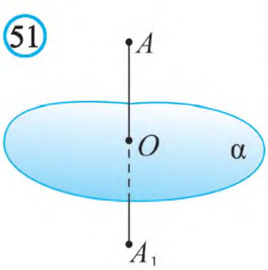
Bul teńliklerden $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$, $z = 12 - 3 = 9$.

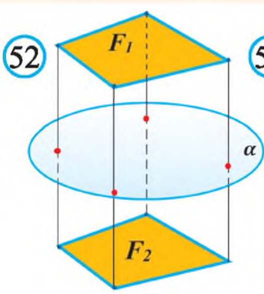
Juwabı: $A_1(3; 6; 9)$. □

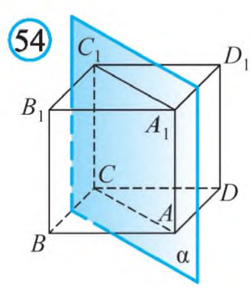
3.4. Tegislikke salıstırǵanda simmetriya

Keńislikte berilgen A hám A_1 noqatlar *tegislikke salıstırǵanda simmetriyalı* delinedi, eger tegislik AA_1 kesindisine perpendikulyar bolıp, onı teń ekige bólse *(51-súwret)*. 52-súwrette tegislikke salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan F_1 hám F_2 deneler keltirilgen. Biz sonı bilemiz, gewdemiz benen sáwlemiz ayna tegisligine salıstırǵanda simmetriyalı boladı (53-súwret).

Tegislikke salıstırǵanda simmetriya – háreket bolıp esaplanadı.







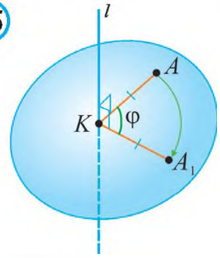
Demek, tegislikke salıstırǵanda simmetriyada kesindi oǵan teń kesindige, tuwrı sızıq – tuwrı sızıqqa hám tegislik – tegislikke sáwlelenedi.

Eger F denesi tegislikke salıstırǵanda simmetriyalı almastırıwda ózine kóshse, bunday dene *tegislikke salıstırǵanda simmetriyalı dene* dep ataladı.

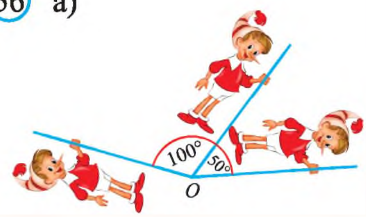
Máselen, 54-súwrette kórsetilgen kub AA_1 hám CC_1 qabırǵalarınan ótiwshi α tegislikke salıstırǵanda simmetriyalı dene boladı.

3.5. Burıw hám kósherge salıstırǵanda simmetriya

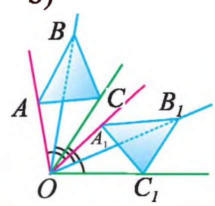
55



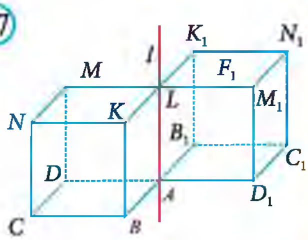
56 a)



b)



57



Aytayıq, keńislikte A hám A_1 noqatlar hám l tuwrı sızıq berilgen bolsın. Eger l tuwrı sızıqqa túsirilgen AK hám A_1K perpendikulyarlar teń hám óz ara φ múyesh payda etse, bul jaǵdayda *l tuwrı sızıqqa salıstırǵanda φ múyeshke burıw* nátiyjesinde A noqat A_1 noqatqa ótedi dep aytıladı (55-súwret).

Eger keńislikte berilgen F denesiniń hár bir noqatın l tuwrı sızıqqa salıstırǵanda φ múyeshke bursaq, ǵańa F_1 dene payda boladı. Bunda F dene l tuwrı sızıqqa salıstırǵanda φ múyeshke burıwda F_1 denege ótti delinedi. 56-súwrette sonday burıwdan payda bolǵan deneler kórsetilgen.

Máselen, 57-súwrette kórsetilgen kubtı l tuwrı sızıqqa salıstırǵanda 180° múyeshke burıwda jańa kubtı payda etemiz.

Tuwrı sızıqqa salıstırǵanda burıw – háreket boladı.

l tuwrı sızıqqa salıstırǵanda 180° múyeshke burıw, *l tuwrı sızıqqa salıstırǵanda simmetriya* dep ataladı.

Deneniń simmetriya orayı, kósheri, tegisligi onıń simmetriya elementleri dep ataladı.

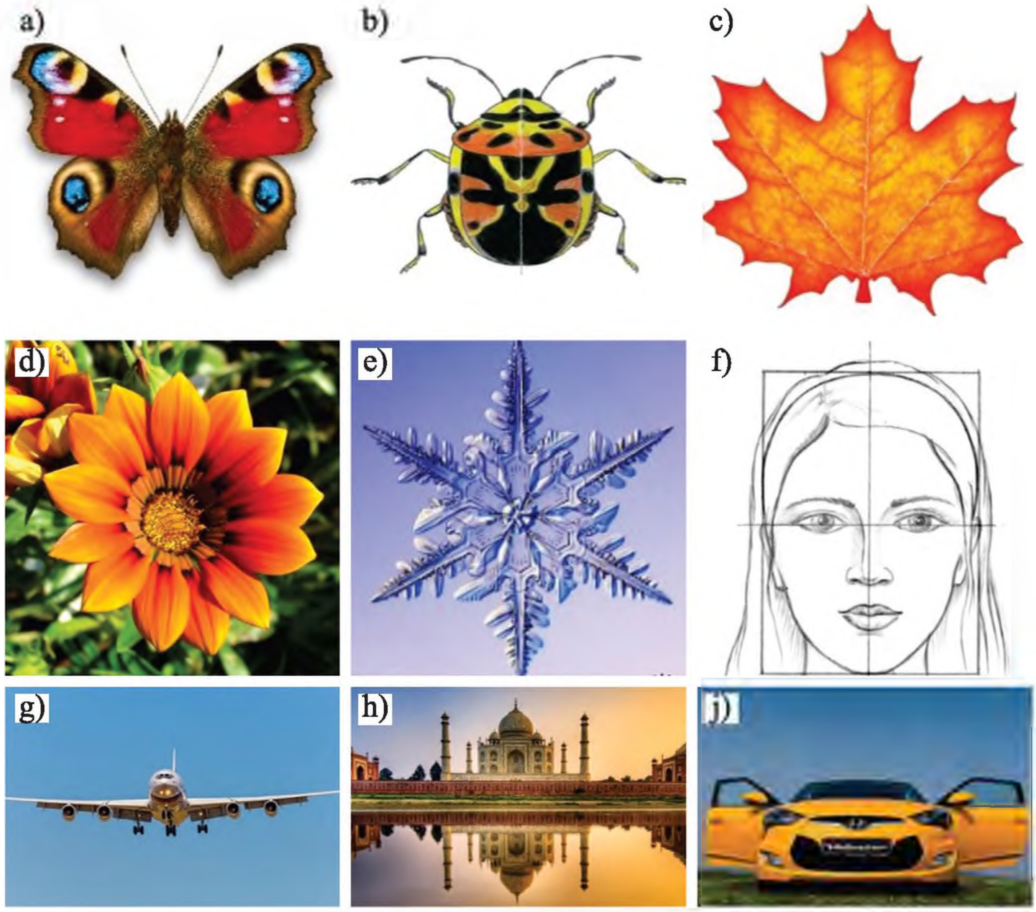
$A(x; y; z)$ noqatqa koordinata tegislikleri, koordinata kósherleri hám koordinata basına salıstırǵanda simmetriyalı noqatlar tómendegi koordinatalarǵa iye boladı:

Simmetriya elementi	Simmetriyalı noqat koordinataları
Oxy tegislik	$(x; y; -z)$
Oxz tegislik	$(x; -y; z)$

Oyz tegislik	$(-x; y; z)$
Ox kósheri	$(x; -y; -z)$
Oy kósheri	$(-x; y; -z)$
Oz kósheri	$(-x; -y; z)$
O noqat	$(-x; -y; -z)$

3.6. Tábiyatta hám texnikada simmetriya

58

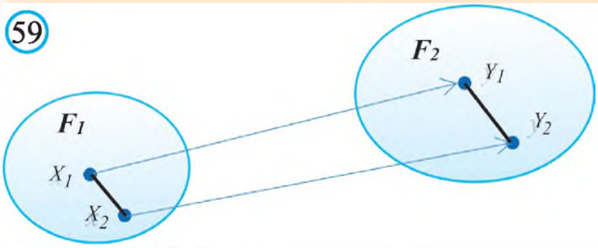


Tábiyatta simmetriyanı hár adımda ushıratıw múmkin. Máselen, tiri janlardıń kópshiligi, atap aytqanda, insan hám haywanlar denesi, ósimliklerdiń japıraqları hám gúlleri simmetyalı jaratılǵan (58-súwret). Sonday jansız tábiyat elementleri de bar, máselen, qar bóleksheleri, duz kristalları, zatlardıń molekulyar dúzilisi de ájayıp simmetriyalıq figuralardan ibarat boladı. Bul, álbette, tegin emes, sebebi simmetriyalı figuralar shıraylı bolıwı menen birge, qaysı bir mániste tolıq maqul bolıp hám anıq mániske iye bolıp esaplanadı. Solay eken, tábiyattaǵı gózzallıq hám anıq mánilik simmetriya tiykarına jaratılǵan, dep aytıwımız múmkin. Tábiyattaǵı bul gózzallıq hám anıq mánilik standartın alǵan qurılısshı, qánige hám arxitektor sıyaqlı dóretiwshiler jaratqan kóplegen jaylar hám qurılıslar, qurılma hám mexanizmler, texnika hám transport quralları da simmetriyalı jaratılǵan. Bul iste olarǵa geometriya pániniń beretuǵın járdemin hesh nárse menen salıstırıp bolmaydı.

3.7. Keńisliktegi denelerdiń uqsaslíǵí

Keńislikte $k \neq 0$ hám F_1 deneni F_2 denege sáwlelendiriwshi almastırıw berilgen bolsın. Bul sáwlelendiriwde F_1 deneniń ıqtıyarlı X_1 hám X_2 noqatları hám olar sáwlelengen F_2 deneniń Y_1 hám Y_2 noqatları ushın $X_1Y_1 = k{\cdot}X_2Y_2$ bolsa, bul almastırıw *uqsaslıq almastırıw* dep ataladı (59-súwret).

59



60

Kórip turǵanıńızday, keńislikte uqsaslıq almastırıw túsinigi tegisliktegi sıyaqlı qabıl etiledi. Sonday-aq, onıń tómende kóriletuǵın bir qatar túrleriniń anıqlaması, olardıń qásiyetleri hám olardıń dálili de tegisliktegige uqsas boladı. Sonlıqtan, bul qásiyetlerdiń dáliline toqtamaymız hám olardı óz betińizshe orınlawdı usınıs etemiz.

Keńisliktegi uqsaslıq almastırıw tuwrı sızıqtı tuwrı sızıqqa, nurdı nurǵa, kesindini kesindige hám múyeshti múyeshke sáwlelendiredi. Sonday-aq, bul almastırıw tegislikti tegislikke sáwlelendiredi.

Keńislikte berilgen eki deneniń biri ekinshisine uqsaslıq almastırıw arqalı sáwlelense, olar *uqsas deneler* dep ataladı.

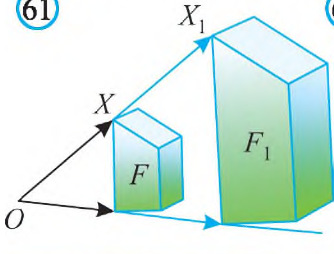
Keńislikte F dene, O noqat hám k nolden ózgeshe ($k \neq 0$) sanı berilgen bolsın.

F deneniń ıqtıyarlı X noqatın $\overline{OX_1} = k\,\overline{OX}$ shártin qanaatlandırıwshı X_1 noqatqa sáwlelendiriwshi almastırıw *O noqatqa salıstırǵanda k koefficientli gomotetiya* dep ataladı (61-súwret). O noqatı *gomotetiya orayı,* al k sanı *gomotetiya koefficienti* dep ataladı.

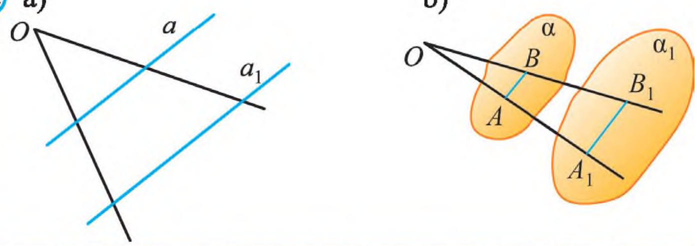
F deneniń hár bir noqatı usı usılda sáwlelense, nátiyjede F_1 dene payda boladı hám bul *gomotetiyada F dene F_1 denege sáwlelenedi* dep aytıladı.

Kórip turǵanıńızday, keńislikte gomotetiya anıqlaması tegisliktegi menen derlik birdey. Sonday-aq, onıń bir qatar qásiyetleri bar bolıp, olar da, olardıń dálilleri de tegisliktegige uqsas boladı. Sonlıqtan bul qásiyetlerdiń dáliline toqtamaymız hám olardı óz betińizshe orınlawdı usınıs etemiz.

61



62 a) b)



O noqatqa salıstırǵanda *k* koefficientli gomotetiya uqsaslıq almastırıw bolıp esaplanadı.

Gomotetiya koefficienti k ıqtıyarlı nolden ózgeshe san bolıp, $k=1$ de F dene ózine ózi sáwlelenedi, al $k=-1$ de F dene O noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı F_1 denege sáwlelenedi. Basqa jaǵdaylarda gomotetiya noqatlar arasındaǵı aralıqtı saqlamaydı, yaǵnıy ol háreket bolmaydı. Gomotetiya nátiyjesinde noqatlar arasındaǵı aralıq birdey k sanına kóbeyedi, yaǵnıy denenıń ólshemleri ózgeredi, lekin onıń forması ózgermeydi.

Gomotetiyada gomotetiya orayınan ótpeytuǵın a) tuwrı sızıq oǵan parallel bolǵan tuwrı sızıqqa (62.a-súwret); b) al, tegislik oǵan parallel tegislikke sáwlelenedi (62.b-súwret).

Gomotetiyada gomotetiya orayınan ótiwshi tuwrı sızıq yamasa tegislik ózine ózi sáwlelenedi.

Temaǵa baylanıslı máseleler hám ámeliy tapsırmalar

83. $\bar{p} = (-2;\ 1;\ 4)$ vektor boylap parallel kóshiriwde, a) (3; –2; 3); b) (0; 2; –3); c) (2; –5; 0) noqatı qaysı noqatqa kóshedi?

84. Parallel kóshiriwde $A(4; 2; -8)$ noqatı (3; 7; –5) noqatına kóshedi. Parallel kóshiriw qaysı vektor boylap ámelge asırılǵan?

85. Parallel kóshiriwde: a) tuwrı sızıq-tuwrı sızıqqa; b) nur-nurǵa; c) tegislik-tegislikke; d) kesindi oǵan teń kesindige kóshiwin dálilleń.

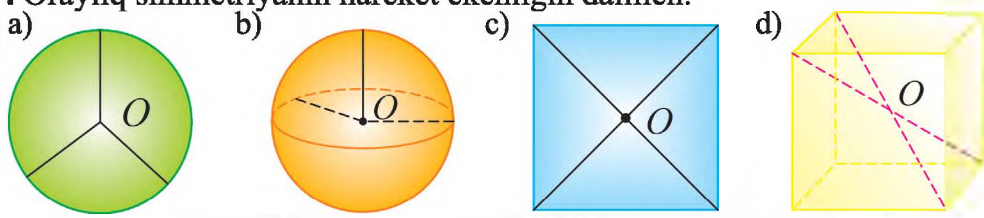
86. O (–2; 3; –1) noqatqa salıstırǵanda oraylıq simmetriyada A (4; 2; –3) noqat qaysı noqatqa ótedi?

87. 63-súwrette kórsetilgen figuralarda O noqat simmetriya orayı ekenligin dálilleń.

88. (–2; 5; –9), (2; 2; –7), (–6; 12; –2) noqatlar koordinata basına salıstırǵanda oraylıq simmetriyada qaysı noqatlarǵa ótedi?

89*. Oraylıq simmetriyanıń háreket ekenligin dálilleń.

63



90*. Tegislikke salıstırǵanda simmetriyanıń háreket ekenligin dálilleń.

91. Parallelepipedtıń (50-súwret) diagonallarınıń kesilisiw noqatı O ǵa salıstırǵanda oraylıq simmetriyalı figura ekenligin dálilleń.

92. (1; 2; –3), (0; 2; –3), (2; 2; –3) noqatları koordinata tegisliklerine salıstırǵandaǵı simmetriyalarda qaysı noqatlarǵa ótedi?

93. (2; 4; –1) noqatı koordinata tegisligine salıstırǵanda simmetriyalı sáwleleniwde (2; –4; –1) noqatına ótti. Sáwleleniw qaysı koordinata tegisligine salıstırılıp ámelge asırılǵan?

94. Tómendegi kestede berilgen 1-úlgi tiykarında bos orınlardı toltırıń.

№	**Berilgen noqat**	**Simmetriyalı noqat**	**Nege salıstırǵanda simmetriyalı?**
1	(1; 2; 3)	(1; 2; –3)	*Oxy* tegislikke salıstırǵanda
2	(2; 4; –1)		*Oxz* tegislikke salıstırǵanda
3		(1; 2; 3)	*Oyz* tegislik
4	(–1; –2; –3)	(–1; 2; 3)	
5	(–1; 6; 3)		*Oy* kósheri
6		(–3; 8; –2)	*Oz* kósheri
7	(4; 1; –2)		*O* nuqat

95. 49-súwrette kórsetilgen denelerde O noqat simmetriya orayı ekenligin dálilleń.

96*. Tuwrı sızıqqa salıstırǵanda burıw háreket ekenligin kórsetiń.

97. O noqatına salıstırǵanda k koefficientli gomotetiya uqsaslıq almastırıw ekenligin kórsetiń.

98. *Oxy* tegislikke salıstırǵanda simmetriyada ıqtıyarlı $(x; y; z)$ noqattıń $(x; y; -z)$ noqatına ótiwin kórsetiń.

99. *Oxz* tegislikke salıstırǵanda simmetriyada ıqtıyarlı $(x; y; z)$ noqattıń $(x; -y; z)$ noqatına ótiwin kórsetiń.

100. Parallel kóshiriwde (1; 2; –1) noqatı (1; –1; 0) noqatına ótti. Koordinata bası bul almastırıwda qaysı noqatqa ótedi?

101. Parallel kóshiriwde (3; 4; –1) noqatı (2; –4; 1) noqatına ótti. Bul almastırıwda koordinata bası qaysı noqatqa ótedi?

102*. $A(2; 1; 0)$ noqatı $B(1; 0; 1)$ noqatına, al $C(3; -2; 1)$ noqatı $D(2; -3; 0)$ noqatına ótetuǵın parallel kóshiriw bar ma?

103*. $A(-2; 3; 5)$ noqatı $B(1; 2; 4)$ noqatına, al $C(4; -3; 6)$ noqatı $D(7; -2; 5)$ noqatına ótetuǵın parallel kóshiriw bar ma?

104. 58-súwrette kórsetilgen janlı hám jansız obyektler keńisliktegi dene sıpatında qanday simmetriyalı figura bolıwı múmkinligin anıqlań. Olardıń (eger bar bolsa) simmetriya orayı, simmetriya kósheri yamasa simmetriya tegisligin sızıp kórsetiń.

105. 60-súwrette kórsetilgen ana-balalar (matreshkalar)dıń úlken ana matreshkaǵa salıstırǵanda uqsaslıq koefficientlerin anıqlań.

106. Durıs tetraedr qabırǵasınıń uzınlıǵı 12 cm ge teń. Bul tetraedrge: a) 3; b) –4; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{3}$; koefficientli gomotetiyalı bolǵan tetraedr qabırǵasınıń uzınlıǵı nege teń?

107. Íqtıyarlı ABC úshmúyeshlik sızıń hám qanday da bir O noqatın belgileń. Orayı O noqatında hám koefficienti : a) 2; b) –3; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$ ge teń bolǵan gomotetiyada ABC úshmúyeslik ótetuǵın úshmúyeshlikti dúziń.

108. Íqtıyarlı $SABC$ tetraedr sızıń. Orayı S noqatında hám koefficienti: a) 1,5; b) –2; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$ ge teń bolǵan gomotetiyada SABC tetraedr ótetuǵın tetraedrdi sızıń.

109. Íqtıyarlı kub sızıń. Orayı kubtıń bir tóbesinde hám koefficienti: a) 2; b) –2; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$ ge teń bolǵan gomotetiyada bul kub ótetuǵın keńisliktegi geometriyalıq figuranı sızıń.

110. Orayı koordinata basında hám koefficienti: a) 2,5; b) –2,5; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{4}$ ge teń bolǵan gomotetiyada $A(-2; 3; 5)$ noqat ótetuǵın noqattıń koordinataların tabıń.

111. Orayı $O(-1; 2; 2)$ noqatında hám koefficienti: a) 0,5; b) –2; c) $\frac{1}{4}$; d) $-\frac{1}{4}$ ge teń bolǵan gomotetiyada $A(2; 4; 0)$ noqat ótetuǵın noqattıń koordinataların tabıń.

112. Tóbeleri $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$ noqatlarda bolǵan tetraedr: a) orayı O noqatta, koefficiyenti –1 ge teń; b) orayı A noqatta, koefficienti 2 ge teń bolǵan gomotetiyada ótetuǵın tetraedr tóbeleriniń koordinataların tabıń.

113*. Gomotetiyada onıń orayınan ótpeytuǵın: a) tuwrı sızıq ózine parallel bolǵan tuwrı sızıqqa, b) al, tegislik ózine parallel bolǵan tegislikke sáwleleniwin kórsetiń.

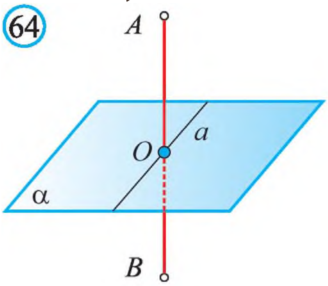
114*. Gomotetiyada onıń orayınan ótiwshi tuwrı sızıq yáki tegisliktiń ózine ózi sáwleleniwin kórsetiń.

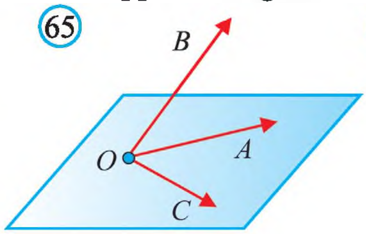
4. BAPTÍ TÁKIRARLAWǴA BAYLANÍSLÍ ÁMELIY SHÍNÍǴÍWLAR

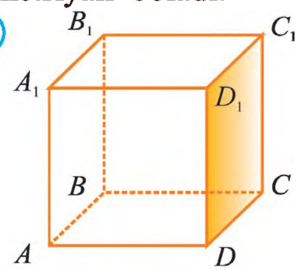
4.1. 1- test jumısı

1. $A(x_1; y_1; z_1)$ hám $B(x_2; y_2; z_2)$ noqatlar berilgen. z_2-z_1 neni ańlatadı?
A) AB kesindi ortasınıń koordinatasın; B) AB kesindi uzınlıǵın;
C) $\overline{AB}$ vektor uzunlıǵın; D) $\overline{AB}$ vektor koordinatalarınan birin.

2. 64-súwrette $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, $AO=OB$ bolsa,
A) A hám B noqatlar O noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı boladı;
B) A hám B noqatlar a tuwrı sızıqqa salıstırǵanda simmetriyalı boladı;
C) A hám B noqatlar α tegislikke salıstırǵanda simmetriyalı boladı;
D) AB kesindi a tuwrı sızıqqa salıstırǵanda simmetriyalı boladı.

64


65


66


3. 65-súwrette B noqat AOC tegislikte jatpaydı. Onda $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ hám $\overline{OC}$ vektorlar …
A) kollinear; B) komplanar;
C) birdey baǵıtlas; D) komplanar emes.

4. $M(-7; 1; 4)$ hám $N(-1; -3; 0)$ noqatlar berilgen. MN kesindi ortasınıń koordinataların tabıń.
A) $(-4; -1; 4)$; B) $(-4; -1; 2)$; C) $(-4; -2; 2)$; D) $(-3; 2; 2)$.

5. $A(0; -3; 2)$ hám $B(4; 0; -2)$ noqatlar berilgen. AB kesindi ortası nege tiyisli?
A) Ox kósherine; B) Oy kósherine; C) Oz kósherine; D) Oxy tegisligine.

6. $A(3; 4; -3)$ noqattan Oz kósherine shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
A) 3; B) 5; C) $2\sqrt{3}$; D) $\sqrt{34}$.

7. $\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}$ vektorlar qosındısın tabıń.
A) $\overline{O}$; B) $\overline{CF}$; C) $\overline{DF}$; D) $\overline{CE}$.

8. m niń qaysı mánisinde $\overline{a}(m; 4; -3)$ hám $\overline{b}(4; 8; -6)$ vektorlar kollinear boladı?
A) 2; B) 5; C) 1; D) 3.

9. O noqat α tegislikte jatpaydı. Orayı O noqatında bolǵan gomotetiyada α tegislik onnan ózgeshe bolǵan β tegislikke ótedi. Eger a tuwrı sızıq α tegislikke tiyisli bolsa, …
A) $\alpha \parallel \beta$ boladı; B) α tegislik β tegislik penen kesilisedi;
C) $a \subset \beta$ boladı; D) $\alpha \perp \beta$ boladı.

10. AB tuwrı sızıq BCD tegislikke perpendikulyar. Qaysı vektorlardıń skalyar kobeymesi nolge teń boladı?

A) $\overline{CA}$ hám $\overline{CB}$; B) $\overline{BD}$ hám $\overline{AD}$; C) $\overline{AC}$ hám $\overline{BC}$; D) $\overline{AB}$ hám $\overline{CD}$.

11. Qabırǵası 1 ge teń bolǵan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgen (66-súwret). $(\overline{AB}+\overline{BC})\cdot\overline{BB}$ nı tabıń.

A) 1; B) 0; C) –1; D) 0,5.

12. p nıń qaysı mánisinde $\overline{a}(1; 1; 0)$ hám $\overline{b}(0; 4; p)$ vektorlar arasındaǵı múyesh 60° ǵa teń boladı?

A) 4; B) 4 yamasa –4; C) 16; D) 16 yamasa –16.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgen. Parallel kóshiriwde A_1D kesindi D_1C kesindige ótedi. Bul kóshiriwde AA_1B_1 tegislik qaysı tegislikke ótedi?

A) DB_1B; B) DCC_1; C) AA_1C_1; D) ABC.

14. α tegislik onda jatpaytuǵın ABC úshmúyeshliktiń simmetriya tegisligi esaplanadı. Qaysı juwap durıs?

A) $(ABC)\perp\alpha$; B) ABC úshmúyeshlik teń qaptallı;

C) ABC úshmúyeshliktiń simmetriya orayı bar;

D) ABC úshmúyeshliktiń simmetriya kósheri bar.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgen. $\overline{A_1B_1}+\overline{BC}-\overline{DD_1}$ ni tabıń.

A) $\overline{A_1C}$; B) $\overline{BD_1}$; c) $\overline{B_1D}$; D) $\overline{AC_1}$.

16. Qaysı geometriyalıq almastırıw eki ayqısh tuwrı sızıqlardan birin ekinshisine ótkizedi?

A) parallel kóshiriw; B) tegislikke salıstırǵanda simmetriya;

C) burılıw; D) gomotetiya.

17. $M(-1; 2; -4)$ noqatqa Oyz tegisligine salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan noqattı tabıń.

A) (1; –2; 4); B) (1; 2; –4); C) (–1; –2; –4); D) (–1; 2; 4).

18. Parallel kóshiriwde $\overline{AB}$ vektor $\overline{DC}$ vektorǵa ótedi. Qaysı tastıyıqlaw nadurıs?

A) $\overline{AB}=\overline{DC}$; B) AC hám BD kesindi ortaları ústpe-úst tusedi;

C) $\overline{AB}, \overline{AC}$ hám $\overline{DC}$ vektorları komplanar; D) $ABCD$ parallelogramm.

19. $B(-3; 2; -5)$ noqatı Oxz tegisliginen qanday aralıqta jatırıptı?

A) 2; B) 5; C) 3; D) $\sqrt{34}$.

20. $A(1; -2; 0)$, $B(1; -4; 2)$, $C(3; 2; 0)$ noqatları ABC úshmúyeshliktiń tóbeleri. CM mediana uzunlıǵın tabıń.

A) $2\sqrt{3}$; B) $3\sqrt{2}$; C) $\sqrt{6}$; D) 18.

21. Eger $\overline{a}(1; m; 2)$ hám $\overline{b}(0{,}5m+1; 3; 1)$ vektorlar kollinear bolsa, $m+n$ di tabıń.

A) 3; B) 5; C) –4; D) 9.

22. $A(-1; -9; -3)$ hám $B(0; -2; 1)$ noqatları berilgen. Vektordı koordinata vektorları (ortlar) boyınsha jayıń.

A) $(\overline{BA}) = \bar{i} + 9\bar{j} - \bar{k}$; B) $(\overline{BA}) = \bar{i} - 9\bar{j} + \bar{k}$;
C) $(\overline{BA}) = -\bar{i} - 9\bar{j} - 4\bar{k}$; D) $(\overline{BA}) = \bar{i} + 9\bar{j} - 4\bar{k}$.

23. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ hám $D(-5; -5; 3)$ noqatları berilgen. AC hám BD vektorları arasındaǵı múyeshti tabıń
A) 150°; B) 30°; C) 45°; D) 90°.

24. $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{a}+\bar{b}| = 11$, $|\bar{a}-\bar{b}| = 7$ ekenligi belgili bolsa, $|\bar{b}|$ nı tabıń.
A) 11; B) 18; C) 20 ; D) 7.

25. Ultanları BC hám AD bolǵan $ABCD$ trapeciya berilgen. Eger $\overline{AB}(-7; 4; 5)$, $\overline{AC}(3; 2; -1)$, $\overline{AD}(20; -4; -12)$, M hám N – sáykes túrde AB hám CD tárepleriniń ortası bolsa, $\overline{MN}$ vektor koordinatalarınıń qosındısın tabıń.
A) 1; B) 2 ; C) 3; D) 4.

4.2. Máseleler

115. Ushları $A(1; -2; 4)$ hám $B(3; -4; 2)$ noqatlarda bolǵan kesindi ortasınıń koordinataların tabıń.

116. $A(x; 0; 0)$ noqatı $B(1; 2; 3)$ hám $C(-1; 3; 4)$ noqatlarınan teńdey uzaqlıqta bolsa, x tı tabıń.

117. Eger kesindiniń bir ushı $A(1; -5; 4)$, ortası $C(4; -2; 3)$ noqatta bolsa, ekinshi ushınıń koordinataları qanday boladı?

118. Oxz tegisligine salıstırǵanda $A(1; 2; 3)$ noqatına simmetriyalı bolǵan noqattı tabıń.

119. Koordinatalar basına salıstırǵanda $A(1; 2; 3)$ noqatına simmetriyalı bolǵan noqattı tabıń.

120. Oxy tegisligine salıstırǵanda $(1; 2; 3)$ noqatına simmetriyalı bolǵan noqattı tabıń.

121. Oy kósherine salıstırǵanda $(2; -3; 5)$ noqatına simmetriyalı bolǵan noqattı tabıń.

122. Tómendegi noqatlardan qaysı biri Oyz tegisliginde jatadı?
$A(2; -3; 0)$; $B(2; 0; -5)$; $C(1; 0; -4)$; $D(0; 9; -7)$; $E(1; 0; 0)$.

123. Tómendegi noqatlardan qaysı biri Oxz tegisliginde jatadı:
$A(-4; 3; 0)$; $B(0; -7; 0)$; $C(2; 0; -8)$; $D(2; -4; 6)$; $E(0; -4; 5)$?

124. $A(-3; 8; 3\sqrt{33})$ noqatınan Ox kósherine shekemgi aralıqtı tabıń.

125. $A(3; -2; 5)$ hám $B(-4; 5; -2)$ noqatları berilgen. $\overline{AB}$ vektorınıń koordinataların tabıń.

126. $\bar{a}(1; -2; 3)$ vektorınıń aqırı $B(2; 0; 4)$ noqatı bolsa, bul vektordıń basınıń koordinataların tabıń.

127. $B(0; 4; 2)$ noqatı $\bar{a}(2; -3; 1)$ vektorınıń aqırı bolsa, bul vektordıń basınıń koordinataların tabıń.

128. $\bar{a}(x; 1; 2)$ vektorınıń uzınlıǵı 3 ke teń bolsa, x tiń mánisin tabıń.

129. $\overline{a}(4; -12; z)$ vektorınıń moduli 13 ke teń bolsa. z tiń mánisin tabıń.

130. Eger $\overline{a}(6; 2; 1)$ hám $\overline{b}(0; -1; 2)$ bolsa, $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$ vektorınıń uzınlıǵın tabıń.

131. Eger $\overline{p}(2; 5; -1)$ hám $\overline{q}(-2; 2)$ bolsa, $\overline{m} = 4\overline{p} + 2\overline{q}$ vektorınıń uzınlıǵın tabıń.

132. $\overline{a}(2; -3; 4)$ hám $\overline{b}(-2; -3; 1)$ vektorlarınıń skalyar kóbeymesin tabıń.

133. $\overline{m}(-1; 5; 3)$ hám $\overline{n}(2; -2; 4)$ vektorlarınıń skalyar kóbeymesin tabıń.

134. m niń qanday mánisinde $\overline{a}(1; m; -2)$ hám $\overline{b}(m; 3; -4)$ vektorları perpendikulyar boladı?

135. n niń qanday mánisinde $\overline{a}(n; -2; 1)$ hám $\overline{b}(n; n; 1)$ vektorları perpendikulyar boladı?

136. m niń qanday mánisinde $\overline{a} = m\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ hám $\overline{b} = 4\overline{i} + m\overline{j} - 7\overline{k}$ vektorları perpendikulyar boladı?

137. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ hám $D(-5; -5; 3)$ noqatları berilgen. $\overline{AC}$ hám $\overline{BD}$ vektorları arasındaǵı múyeshti tabıń.

138. n niń qanday mánisinde $\overline{a}(2; n; 6)$ hám $\overline{b}(1; 2; 3)$ vektorları kollinear boladı?

139. m niń qanday mánisinde $\overline{a}(2; 3; -4)$ hám $\overline{b}(m; -6; 8)$ vektorları parallel boladı?

140. m hám n niń qanday mánisinde $\overline{a}(-1; m; 2)$ hám $\overline{b}(-2; -4; n)$ vektorları kollinear boladı?

141. $A(2; 7; -3)$ hám $B(-6; -2; 1)$ noqatları berilgen. $\overline{BA}$ vektorın koordinatalar vektorları (ortları) boyınsha jayıń.

4.3. 1- baqlaw jumısınıń úlgisi

1. Oxy tegisligine salıstırǵanda $(1; 2; 3)$ noqatına simmetriyalı bolǵan noqattı tabıń.
2. Eger $\overline{a}(6; 3; 2)$ hám $\overline{b}(-3; 1; 5)$ bolsa, $\overline{c} = \overline{a} + 2\overline{b}$ vektorınıń uzınlıǵın tabıń.
3. $A(2; -1; 0)$ hám $B(-2; 3; 2)$ noqatları berilgen. Koordinata basınan AB kesindisiniń ortasına shekemgi aralıqtı tabıń.
4. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ *hám* $D(-5; -5; 3)$ noqatları beril gen. $\overline{AC}$ hám $\overline{BD}$ vektorları arasındaǵı múyeshti tabıń.
5. *(Jaqsı ózlestiretuǵın oqıwshılar ushın qosımsha másele).* Tóbeleri $A(4; 5; 1)$, $B(2; 3; 0)$ hám $C(2; 1; -1)$ noqatlarında bolǵan úshmúyeshliktiń BD medianası uzınlıǵın tabıń.

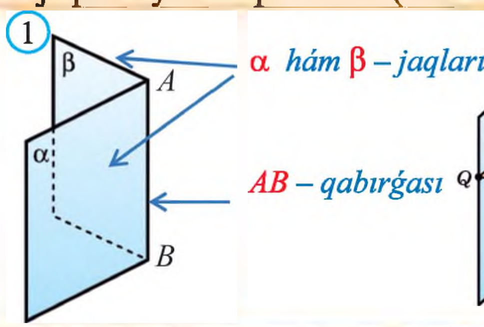
II BAP. PRIZMA HÁM CILINDR

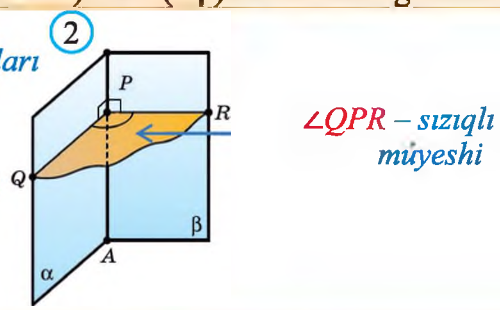
5. KÓPJAQLI MÚYESHLER HÁM KÓPJAQLILAR

5.1. Kópjaqlı múyeshler

Ekijaqlı múyesh penen 10-klasta tanısqansız

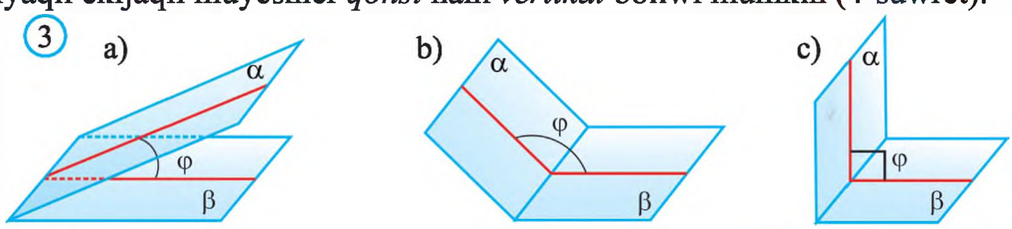
Eki α hám β yarım tegislik (*jaqları*) hám olardı shegaralap turǵan ulıwma AB tuwrı sızıq (*qabırǵası*) tan ibarat bolǵan geometriyalıq figura eki jaqlı múyesh dep ataladı (1-súwret) hám (α β) túrinde belgilenedi.

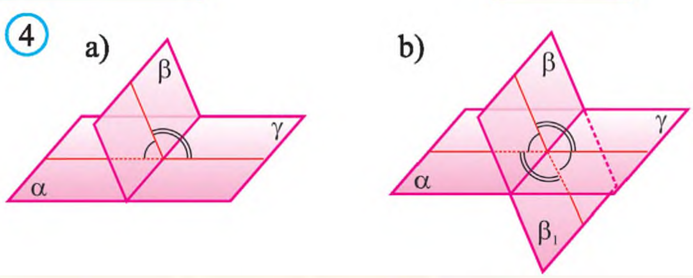


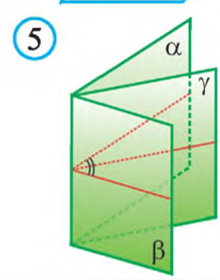


Ekijaqlı múyesh qabırǵasınıń iqtıyarlı P noqatınan onıń jaqlarında jatıwshı hám bul qabırǵaǵa perpendikulyar bolǵan PR hám PQ nurların júrgizemiz. $\angle QPR$ – ekijaqlı múyeshtiń *sızıqlı múyeshi* dep ataladı (2-súwret).

Ekijaqlı múyeshler tegis múyeshler sıyaqlı sızıqlı múyeshiniń ólshemine qarap *súyir, doǵal, tuwrı* hám *jayıq* boladı (3-súwret). Tegis múyeshler sıyaqlı ekijaqlı múyeshler *qońsı* hám *vertikal* bolıwı múmkin (4-súwret).



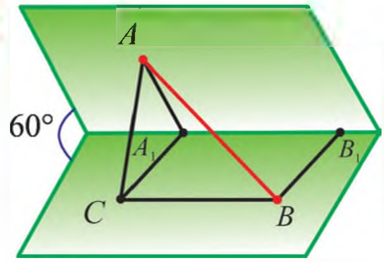




Ekijaqlı múyeshti teń ekige bóliwshi yarımtegislik onıń *bissektorı* dep ataladı (5-súwret).

1-másele. Sızıqlı múyeshi 60° qa teń bolǵan ekijaqlı múyeshtiń jaqlarında jatqan A hám B noqatlarınan (6-súwret) onıń qabırǵasına AA_1 hám BB_1 perpendikulyarları túsirilgen. Eger $AA_1 = 12$, $BB_1 = 10$ hám $A_1B_1 = 13$ bolsa, AB kesindisiniń uzınlıǵın tabıń.

6



Sheshiliwi. $BB_1 || CA_1$ hám $A_1B_1 || CB$ tuwrı sızıqların júrgizemiz. Payda bolǵan A_1B_1BC tórtmúyeshlik parallelogramm boladı. A_1B_1 tuwrı sızıǵı A_1AC úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar boladı, sebebi ol usı tegislikte jatqan eki A_1A hám A_1C tuwrı sızıqlarına perpendikulyar. Onda BC tuwrı sızıǵı da usı tegislikke perpendikulyar boladı.

Demek, ABC úshmúyeshlik tuwrımúyeshli úshmúyeshlik eken.

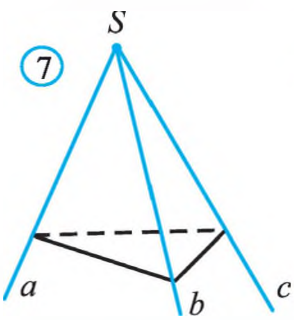
Kosinuslar teoreması boyınsha:

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 124.$$

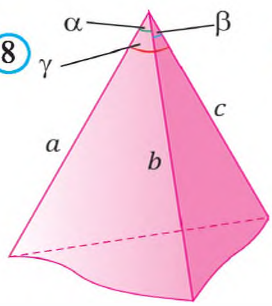
Pifagor teoreması boyınsha: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{124 + 169} = \sqrt{293}$.

Juwabı: $AB = \sqrt{293}$. □

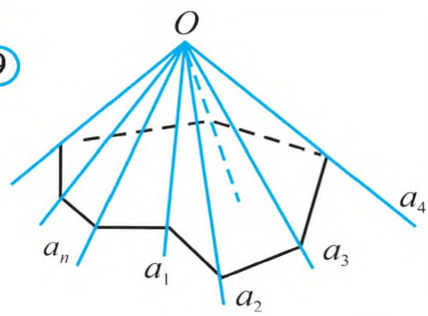
7



8



9



Keńislikte bir noqattan shıǵıwshı a, b hám c nurları úsh *(ab), (bc)* hám *(ac)* tegis múyeshlerin payda etedi (7-súwret). Bul tegis múyeshlerden payda bolǵan *(abc)* figurası *úshjaqlı múyesh* dep ataladı. Tegis múyeshler úshjaqlı múyeshtiń *jaqları* dep, olardıń tárepleri úshjaqlı múyeshtiń *qabırǵaları* dep, ulıwma tóbesi úshjaqlı múyeshtiń *tóbesi* dep ataladı.

Úshjaqlı múyeshtiń jaqlarınan payda bolǵan eki jaqlı múyeshler úshjaqlı múyeshtiń *ekijaqlı múyeshleri* dep ataladı.

Úsh *(ab), (bc)* hám *(ac)* tegis múyeshleri úshjaqlı múyeshtiń *tegis múyeshleri* dep te aytıladı.

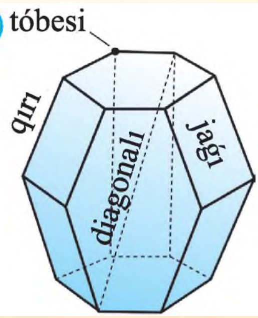
Úshjaqlı múyeshtiń tegis múyeshlerin, sáykes α, β, γ dep belgilesek (8-súwret), olar ushın úshmúyeshlik teńsizligi orınlı boladı, yaǵnıy olardıń qálegen birewi, qalǵan ekewiniń qosındısınan kishi boladı: $\alpha+\beta<\gamma$, $\alpha+\gamma<\beta$, $\beta+\gamma<\alpha$ hám tegis múyeshleriniń qosındısı 360° tan kishi boladı: $\alpha+\beta+\gamma<360°$.

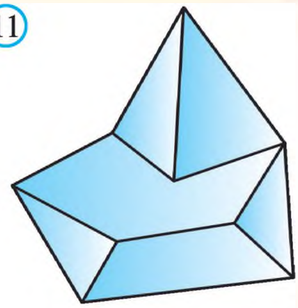
Kóp jaqlı múyesh túsinigi de usıǵan uqsas boladı (9-súwret).

5.2. Kópjaqlılar

Itibar bergen bolsańız, usı waqıtqa shekem keńisliktegi figura retinde bir qatar denelerdiń, atap aytqanda, kópjaqlılardıń qásiyetlerin úyrenip keldik. Bul keńisliktegi figuralardıń *dene* dep atalıwına sebep, olardı keńisliktiń bazı bir materiyallıq denesi iyelegen hám maydan menen shegaralanǵan bólegi retinde súwretlew múmkin. Tómendegi kópjaqlılarǵa tiyisli bazı bir túsiniklerdi esletip ótemiz.

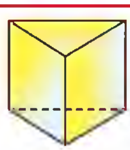
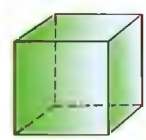
Kópjaqlı dep tegis kópmúyeshler menen shegaralanǵan denege aytıladı. (10-súwret).

10


11


Kópjaqlı, qálegen bir jaǵı jatqan tegisliktiń bir tárepinde jatsa, bunday kópjaqlı *dóńes kópjaqlı* dep ataladı. 10-súwrette dóńes, 11-súwrette dóńes emes kópjaqlılar súwretlengen.

Qálegen dóńes kópjaqlınıń jaqları sanın Y, tóbeleriniń sanın U hám qabırǵalarınıń sanın Q menen belgileyik. Bizge belgili bolǵan kópjaqlılar ushın tómendegi kesteni toltırayıq:

	Kópjaqlınıń atı	Y	U	Q	
	Úsh múyeshli piramida	4	4	6	
	Tórt múyeshli piramida	5	5	8	
	Úsh múyeshli prizma	5	6	9	
	Tórt múyeshli prizma	6	8	12	
	n-múyeshli piramida	$n+1$	$n+1$	$2n$	
	n-múyeshli prizma	$n+2$	$2n$	$3n$	

Kesteden hár bir kópjaqlı ushın $Y + U - Q = 2$ bolatuǵınlıǵın kóriwimizge boladı. Málim bolıwınsha, bul jaǵday barlıq dóńes kópjaqlılar ushın durıs boladı eken. Bunı birinshi ret 1752- jılı shveycariyalı matematik Leonard Eyler anıqlaǵan.

Eyler teoreması. Iqtıyarlı dóńes kópjaqlı ushın: $Y + U - Q = 2$ teńligi orınlı boladı, bul jerde Y – kópjaqlınıń jaqları, U – tóbeleri, Q – qabırǵaları sanı.

Bul teoremanıń dálillewine toqtamaymız. Onnan tómendegi nátiyjeler kelip shıǵadı. Olardı Eyler teoremasınan paydalanıp óz betinshe dálilleń.

1-nátiyje. Kópjaqlınıń tegis múyeshleriniń sanı onıń qabırǵalarınıń sanınan eki ese kóp.

2-nátiyje. Kópjaqlınıń tegis múyeshleriniń sanı hámme waqıt jup boladı.

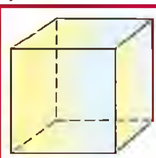
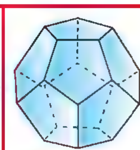
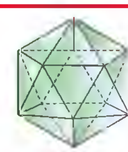
3-nátiyje. Eger kópmúyeshliktiń hár bir tóbesinen birdey k sandaǵı qabırǵalar tutassa, $U \cdot k = 2Q$ teńligi orınlı boladı.

4-nátiyje. Eger kópjaqlınıń barlıq jaqları birdey n-múyeshliklerden turatuǵın bolsa, $Y = 2Q$ teńligi orınlı boladı.

5- nátiyje. Kópjaqlınıń tegis múyeshleriniń qosındısı $360°(Y - Q)$ ga teń.

Jaqları bir-birine teń bolǵan durıs kópmúyeshliklerden ibarat hám hár bir tóbesinen birdey sandaǵı qabırǵalar shıǵatuǵın dóńes kópjaqlı *durıs kópjaqlı* dep ataladı.

Málim bolıwınsha, durıs kópjaqlılar bes túrli boladı eken (bunı ózbetińizshe tekserip kóriń). Bular tómendegiler:

Figurası					
Atı hám onıń sıpatlaması	durıs tetraedr (tórtjaqlı)	Kub, geksaedr (altıjaqlı)	Oktaedr (segizjaqlı)	Dodekaedr (onekijaqlı)	Ikosaedr (jigirmajaqlı)
Jaqları	durıs úshmúyeshlik	durıs tórtmúyeshlik	durıs úshmúyeshlik	durıs besmúyeshlik	durıs úshmúyeshlik
Jaqlar sanı	4	6	8	12	20
Qabırǵalar sanı	6	12	12	30	30
Tóbeler sanı	4	8	6	20	12
Hár bir tóbeden shıǵıwshı qabırǵalar sanı	3	3	4	3	5

Tarıyxıy maǵlıwmatlar

Barlıq durıs kópjaqlılar Áyyemgi Greciyada málim edi. Evklidtiń belgili «Negizler»iniń XIII kitabı durıs kópjaqlılarǵa baǵıshlanǵan. Bul kópjaqlılar kóbinese Platon deneleri dep ataladı. Áyyemgi Greciyanıń ullı alımı Platon (b.e.sh 427–347-jılları) bayan etilgen álemnin idealistlik kórinisinde bul denelerden tórtewi álemniń tórt elementine uqsatılǵan: tetraedr – jalın, geksaedr – Jer, ikosaedr – suw, oktaedr – hawa, al besinshi kópjaqlı – dodekaedr pútkil álem dúzilisiniń belgisi («besinshi negiz») dep ataǵan.

XVIII ásirde kópjaqlılar teoriyasına Leonard Eyler (1707–1783) salmaqlı úles qosqan. 1758-jılı daǵazalanǵan durıs kópjaqlılardıń tóbeleri, qabırǵaları hám jaqlarınıń sanı arasındaǵı baylanısı haqqındaǵı Eyler teoreması hám onıń dálillewi kópjaqlılar dúnyasına tártip ornattı hám onıń gózzal geometriyalıq ózine tartıwshı túsiniklerin algebralıq kózqarastan bayan etti.

Temaǵa baylanıslı máseleler hám ámeliy tapsırmalar

142. Eki tegislik arasındaǵı múyesh 47°. Bul tegislikler kesilisiwinen payda bolǵan ekijaqlı múyeshlerdiń graduslıq ólshemin tabıń.

143. Ekijaqlı múyeshtiń gradus ólshemi 52° qa teń. Bul múyeshke qońsı bolǵan ekijaqlı múyeshtiń gradus ólshemi nege teń?

144. Tegis múyeshi 100° bolǵan ekijaqlı múyeshtiń jaqlarına perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

145. Qońsı ekijaqlı múyeshlerdiń bissektorları arasındaǵı ekijaqlı múyeshtiń gradus óshemi nege teń?

146. *A* noqat, gradus ólshemi 60° bolǵan ekijaqlı múyeshtiń bissektorında jatadı. Eger bul noqat ekijaqlı múyesh qabırǵasınan 10 cm aralıqta jatqan bolsa, onda ekijaqlı múyeshtiń jaqlarına shekemgi aralıqlardı tabıń.

147. *A* noqat, gradus ólshemi 30° bolǵan ekijaqlı múyeshtiń bir jaǵına tiyisli bolıp, ekinshi jaǵınan 6 cm aralıqta jatadı. Bul noqattan ekijaqlı múyeshtiń qabırǵasına shekemgi aralıqtı tabıń.

148*. *A* noqat, tuwrı ekijaqlı múyeshtiń jaqlarınan 3 dm hám 4 dm aralıqta jatadı. Bul noqattan ekijaqlı múyeshtiń qabırǵasına shekemgi aralıqtı tabıń.

149*. Durıs tetraedrdiń barlıq ekijaqlı múyeshleriniń teń ekenligin dálilleń hám olardıń gradus ólshemlerin tabıń.

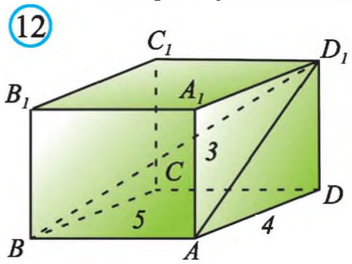
150. Tegis múyeshleri: a) 30°; 60°; 20°; b) 45°; 80°; 130°; c) 30°; 60°; 20°;

d) 20°; 60°; 70°; e) 76°; 34°; 110° bolǵan úshjaqlı múyesh bar ma?

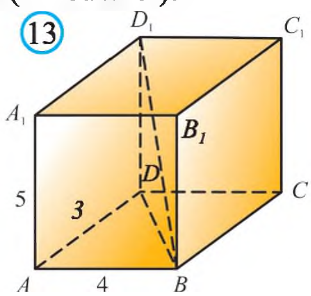
151*. Dóńes kópjaqlı múyeshtiń barlıq tegis múyeshleriniń qosındısı 360° tan kishi ekenligin dálilleń.

152. Tuwrı múyeshli parallelepipedte $AB=5$, $AD=4$ hám $AA_1=3$ bolsa, ABD_1 múyeshin tabıń (12-súwret).

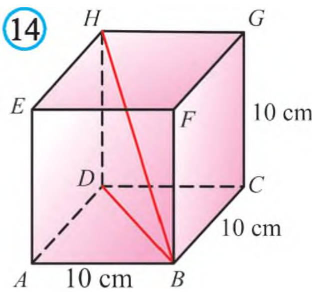
12



13



14



153. Tuwrı múyeshli parallelepipedte $AB=4$, $AD=3$ hám $AA_1=5$ bolsa, DBD_1 múyeshin tabıń(13-súwret).

154. 14-súwrette berilgen kubtaǵı DBH múyeshin tabıń.

155*. n tóbesi bar bolǵan dóńes kópjaqlınıń barlıq tegis múyehsleriniń qosındısı 360° $(n-2)$ qa teń ekenligin dálilleń.

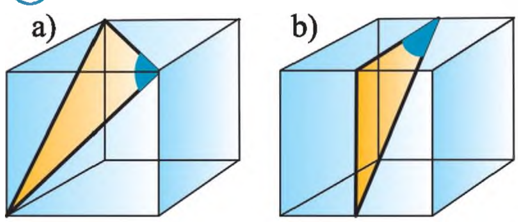
156*. Kópjaqlı tegis múyeshleriniń sanı onıń qabırǵaları sanınan eki ese kóp ekenligin dálilleń.

157*. Kópjaqlınıń tegis múyeshleri sanı hár dayım jup bolıwın dálilleń.

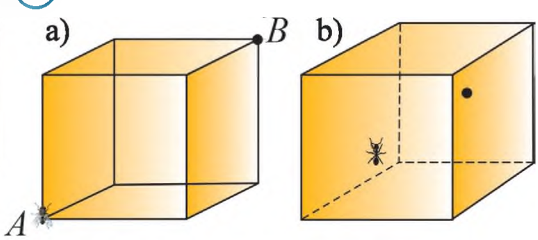
158*. Kópjaqlınıń tegis múyeshleri qosındısı 360° $(Y-Q)$ qa teń bolıwın dálılleń.

159. 15-súwretlerdegi kublarda ajıratıp kórsetilgen múyeshler ólshemin anıqlań.

15



16



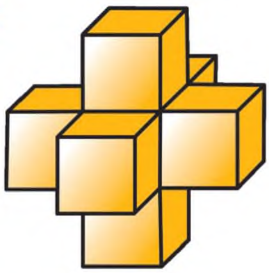
160*. 16-súwretlerdegi kubtıń sırtındaǵi shıbınǵa: a) A tóbesinen B tóbesine; b) kub jaǵınıń orayınan qarama-qarsı jaǵınıń orayına alıp barıwshı eń qısqa joldı kórsetiń (kórsetpe: kubtıń jayılmasınan paydalanıń).

161. 17-súwrette kórsetilgen keńisliktegi figura durıs kópjaqlı bola ma? Onıń beti neshe kvadrattan ibarat? Onıń neshe tóbesi hám qabırǵası bar?

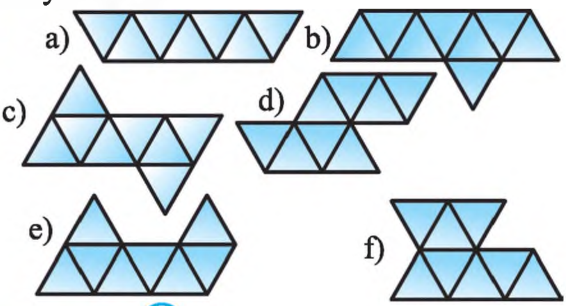
162. 18-súwrette kórsetilgen jayılmalardıń qaysı biri oktaedrge tiyisli?

163. 19-súwrette kórsetilgen, kubqa ishley sızılǵan kópjaqlınıń: a) durıs tetraedr; b) oktaedr ekenligin tiykarlań.

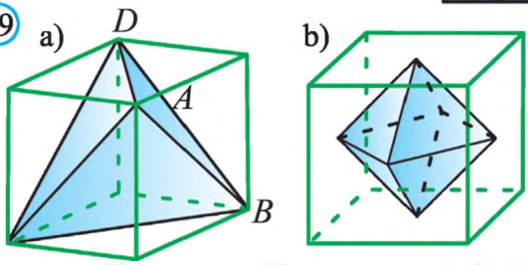
17



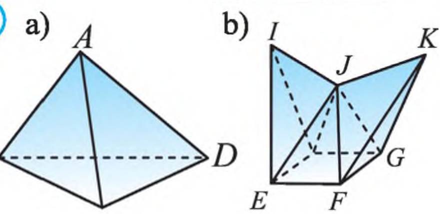
18



19



20



164. 20-súwrette kórsetilgen kópjaqlılardıń tóbeleri, jaqları hám qabırǵalarınıń sanın anıqlap, olardı Eyler teńlemesine qoyıp tekseriń.

165. Dóńes kópjaqlınıń hár bir tóbesinen úsh qabırǵa shıǵadı. Eger bul kópjaqlınıń qabırǵaları sanı: a) 12; b) 15 ke teń bolsa, onıń neshe tóbesi hám jaǵı bar?

166*. 13 jaǵı hám hár bir jaǵı 13 qabırǵadan ibarat bolǵan kópjaqlı bar ma?

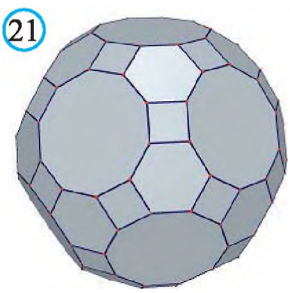
167. Dóńes kópjaqlınıń hár bir tóbesinen tórt qabırǵa shıǵadı. Eger bul kópjaqlınıń qabırǵalar sanı 12 ge teń bolsa, onıń neshe tóbesi hám jaǵı bar?

168. a) Durıs tetraedr; b) kub; c) oktaedr; d) dodekaedr; e) ikosaedrdiń tóbeleri, qabırǵaları hám jaqları sanın tabıń hám bul kópjaqlılar ushın Eyler teńlemesiniń orınlı bolatuǵının tekseriń.

169. Tóbeleriniń sanı 8, qabırǵalarınıń sanı 12 bolǵan durıs kópjaqlınıń jaqlar sanın tabıń hám onıń atın anıqlań.

170. Tóbeleriniń sanı 6, qabırǵalarınıń sanı 12 bolǵan durıs kópjaqlınıń tóbeleri sanın tabıń hám onıń atın anıqlań.

21



171. Tóbeleriniń sanı 10, qabırǵalarınıń sanı 7 bolǵan kópjaqlınıń qabırǵalar sanın tabıń.

172. Tóbeleriniń sanı 14, qabırǵalarınıń sanı 21 bolǵan kópjaqlınıń jaqlar sanın tabıń.

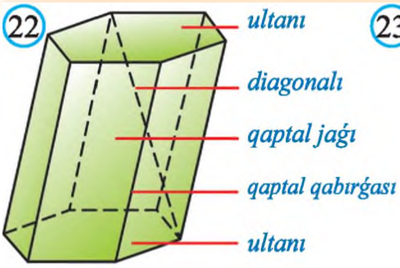
173. 21-súwrettegi kópjaqlınıń 62 jaǵı hám 120 tóbesi bar bolsa, onıń qabırǵalarınıń sanın tabıń.

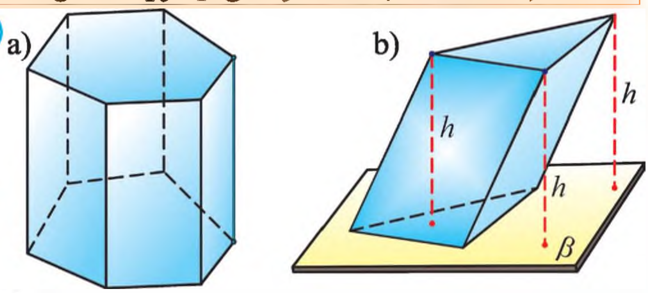
6. PRIZMA HÁM ONÍŃ BETI

6.1. Prizma hám onıń kesimleri

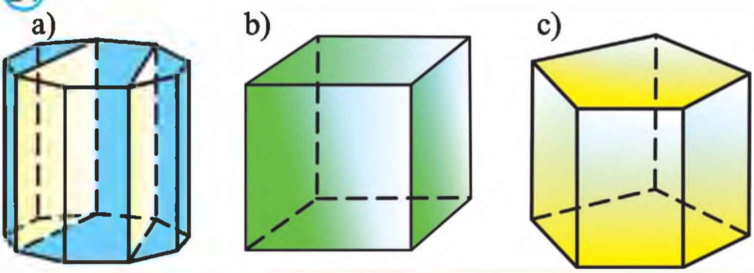
Prizmalar menen tómengi klaslarda tanısqansız. Sonday bolsa da, olarǵa baylanıslı bazı bir túsinikler hám qásiyetlerdi esletip ótemiz.

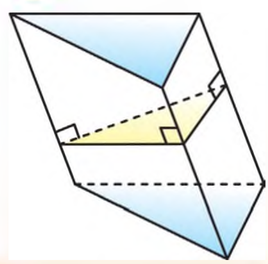
Prizma dep eki jaǵı (ultanı) teń *n* múyeshlikten, qalǵan *n* jaqları parallelogrammlardan ibarat bolǵan kópjaqlıǵa aytıladı (22-súwret).

22


23


Prizmanıń qaptal jaqlarınıń ultanına perpendikulyar yamasa perpendikulyar emesligine qarap *tuwrı* yamasa *qıya* prizmalarǵa ajıratıladı. 23.a-súwrette tuwrı altımúyeshli prizma, 23.b-súwrete qıya ushmúyeshli prizma kórsetilgen. Túsinikli bolǵanınday, tuwrı prizmanıń qaptal jaqları tuwrı tórtmúyeshliklerden ibarat boladı.

24


25


Ultanı durıs kópmúyeshlikten ibarat tuwrı prizma *durıs prizma* dep ataladı (24-súwret). Durıs prizmanıń qaptal jaqları bir-birine teń tuwrı tórtmúyeshliklerden ibarat boladı.

Prizma ultanınıń qanday da bir noqatınan ekinshi ultanına túsirilgen perpendikulyar, prizmanıń *biyikligi* dep ataladı (23.b-súwret).

Prizmanıń *diagonallıq kesimi* dep, prizma ultanlarınıń sáykes diagonalları arqalı júrgizilgen kesindige aytladı (24.a-súwret). Prizmanıń diagonallıq kesimleriniń sani prizmanıń bir ultanınıń diagonallarınıń sanına teń.

Prizmanıń *perpendikulyarlıq kesimi* dep, onıń barlıq qaptal qabırǵalarına perpendikulyar bolǵan kesindige aytıladı (25-súwret).

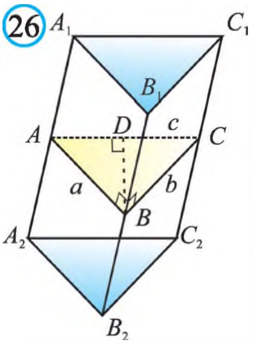
Dóńes n-múyeshliktiń $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonalı bar ekenligin esapqa alsaq, n-múyeshli prizma diagonallıq kesimleri sanı da $\frac{n(n-3)}{2}$ boladı.

Hár bir diagonallıq kesimde prizmanıń eki diagonalın júrgiziw múmkin. Demek, n- múyeshli prizmanıń jámi $n(n-3)$ diagonalı bar.

1-másele. Úshmúyeshli qıya prizmanıń qaptal qabırǵaları arasındaǵı aralıqlar, sáykes túrde 7 cm, 15 cm hám 20 cm. Prizmaniń eń úlken maydanǵa iye bolǵan qaptal jaǵınan onıń qarama-qarsı qaptal qabırǵasına shekemgi aralıqtı tabıń.

Sheshiliwi. Bizge málim, parallel tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıq bul tuwrı sızıqlardıń birewiniń qanday da bir noqatınan ekinshisine júrgizilgen perpendikulyardıń uzınlıǵına teń. Onda berilgen prizmanıń ABC perpendikulyarlıq kesimi tárepleriniń uzınlıǵı, usı aralıqlarǵa teń boladı. (26-súwret). Prizmanıń eń úlken maydanǵa iye bolǵan jaǵında eń úlken AC=20 cm tárep jatadı. B_2B_1 *qabırǵadan* $A_2A_1C_1C_2$ tegisligine shekemgi aralıq ABC úshmúyeshliktiń BD biyikligine teń boladı. Onda Geron formulası boyınsha:

26



$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p=\frac{a+b+c}{2},$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+15+20}{2}=21,$$

$$S_{ABC}=\sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)}=\sqrt{21\cdot 14\cdot 6\cdot 1}=42.$$

Ekinshi tárepten, $S_{ABC}=\frac{AC\cdot BD}{2}$.

Bunnan, $42=\frac{AC\cdot BD}{2}$ yamasa $BD = 4{,}2$ cm.

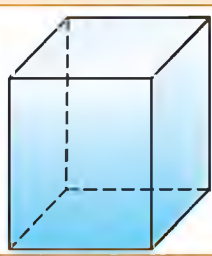
Juwabı: 4,2 cm.

6.2. Parallelepiped hám kub

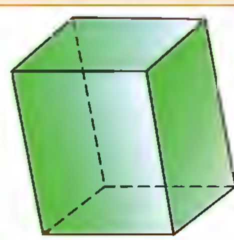
Ultanları parallelogrammnan ibarat bolǵan prizma *parallelepiped* dep ataladı (27-súwret). Parallelepipedler de prizma sıyaqlı tuwrı(27.a-súwret) hám qıya (27.b-súwret) bolıwı múmkin.

27

a)



b)



Parallelepipedtiń ulıwma tóbesine iye bolmaǵan jaqları *qarama-qarsı jaqları* dep ataladı.

Parallelepipedtiń

– 12 qabırǵası bar bolıp, olardiń hár tórtewi teń kesindilerden ibarat (28.a-súwret),

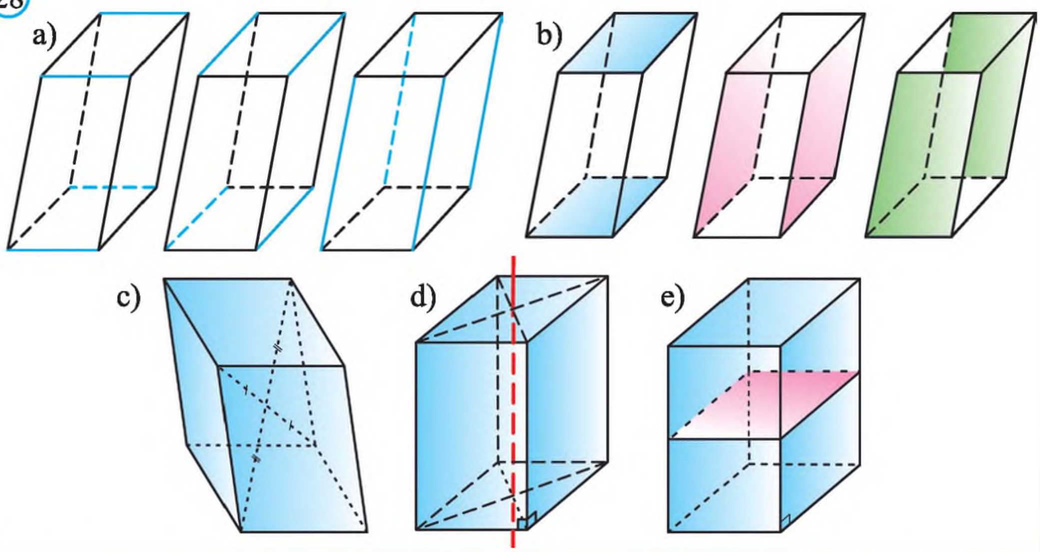
– 6 jaǵı bar bolıp, oniń qarama-qarsı jaqları óz ara parallel hám teń boladı (28.b-súwret),

– 4 diagonalı bar bolıp, olar bir noqatta kesilisedi hám kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi (28.c-súwret),

– diagonallarınıń kesilisiw noqatı, onıń simmetriya orayı boladı (28.c- súwret).

Tuwrı parallelepipedtiń simmetriya kósheri (28.d-súwret) hám simmetriya tegisligi bar (28.e-súwret).

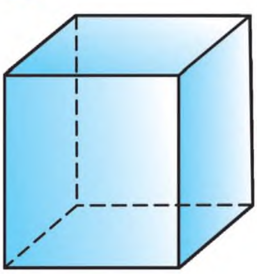
28



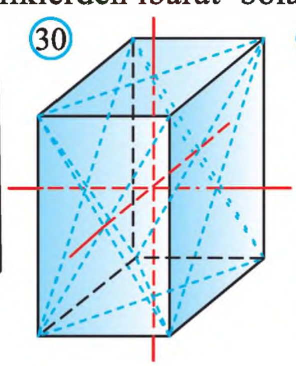
Ultanları tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat bolǵan tuwrı parallelepiped *tuwrı múyeshli parallelepiped* dep ataladı (29-súwret).

Anıq bolǵanınday, tuwrı múyeshli parallelepipedtiń barlıq jaqları tuwrı tórtmúyeshliklerden ibarat boladı.

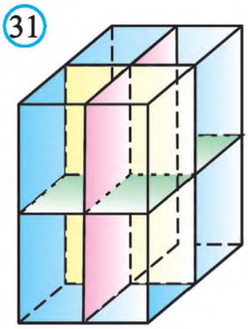
29



30

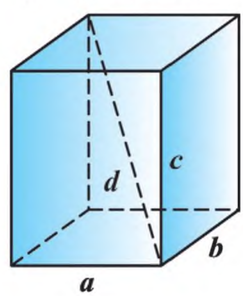


31



32

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$



Tuwrımúyeshli parallelepipedtiń úsh simmetriya kósheri (30-súwret) hám úsh simmetriya tegisligi bar (31-súwret).

Tuwrımúyeshli parallelepipedtiń bir tóbesinen shıǵıwshı úsh qabırǵasınıń uzınlıqları, onıń *ólshemleri* dep ataladı.

Qásiyeti: Tuwrımúyeshli parallelepipedtiń d diagonalınıń kvadratı onıń ólshemleri: a, b hám c nıń kvadratlarınıń qosındısına teń (32-súwret):

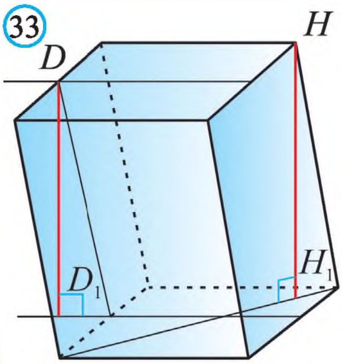
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

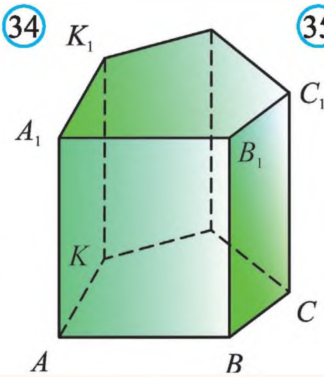
Olshemleri teń bolǵan tuwrımúyeshli parallelepiped *kub* dep ataladı. Bizge málim, kubtıń barlıq jaqları teń kvadratlardan ibarat boladı. Kub bir simmetriya orayına, 9 simmetriya kósherine hám 9 simmetriya tegisligine iye.

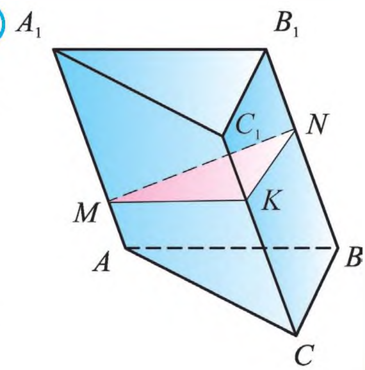
Joqarıda, prizmalardıń bir qatar qásiyetlerin sanap ótken edik. Olardıń bazıların 10-klasta dálillegen edik. Qalǵan qásiyetleriniń dálili salıstırmalı ápiwayı bolǵanlıǵı ushın, olardı óz betińizshe dálillew ushın qaldırdıq.

6.3. Prizmanıń qaptal hám tolıq beti

33-súwrette $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ prizmanıń HH_1 hám DD_1 biyiklikleri kórsetilgen. Bizge málim, durıs prizmanıń biyikligi, onıń qaptal qabırǵasına teń boladı.

33


34


35


Prizmanıń *qaptal beti* (yamasa *qaptal betiniń maydanı*) onıń qaptal jaqları maydanlarınıń qosındısına teń, al *tolıq beti* qaptal beti hám eki ultan maydanlarınıń qosındısına teń. $\boldsymbol{S_{tolıq} = S_{qaptal} + 2S_{ultan}}$.

Teorema. Tuwrı prizmanıń qaptal beti, ultanınıń perimetri menen biyikliginiń kóbeymesine teń:

$$\boldsymbol{S_{qaptal} = P_{ultan} \cdot h.}$$

Dálillew. Berilgen prizmanıń biyikligi h, ultanınıń perimetri $P = AB + BC + ... + KA$ bolsın (34-súwret). Bizge belgili, tuwrı prizmanıń hár bir jaǵı tuwrı tórtmúyeshliklerden ibarat. Bul tuwrı tórtmúyeshliklerdiń ultanı prizmanıń sáykes táreplerine, al biyikligi prizmanıń biyikligine teń. Demek, $S_{qaptal}=AB \cdot h+ BC \cdot h+...+ KA \cdot h=(AB+ BC + \ldots KA)\cdot h = P\cdot h.$ □

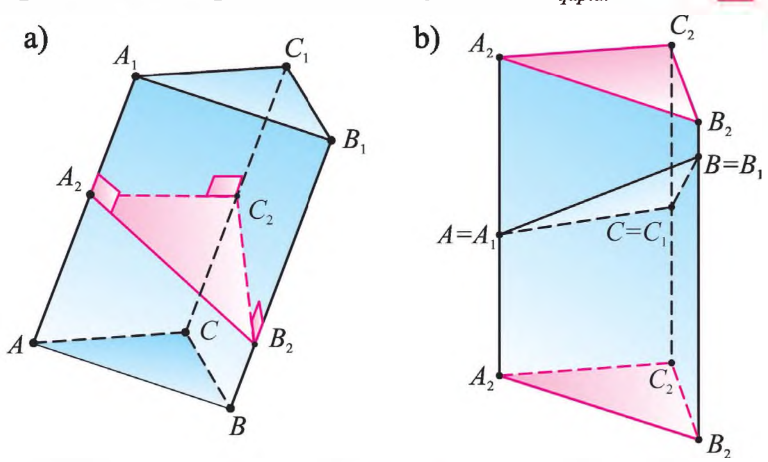
Teorema. Qálegen prizmanıń qaptal beti, onıń perpendikulyar kesiminiń perimetri menen qaptal qabırǵası uzınlıqlarınıń kóbeymesine teń:

$$S_{qaptal} = P \cdot l.$$

Dálillew. Perpendikulyar kesimniń perimetri P ǵa teń bolsın (35-súwret). Kesim prizmanı eki bólekke ajıratadı (36.a-súwret). Bul bóleklerdiń birin alıp, prizma ultanların ústpe-úst túsetuǵın etip parallel kóshiremiz. Nátiyjede jańa tuwrı prizma payda boladı (36.b-súwret). Bizge málim, bul prizmanıń qaptal beti, berilgen prizmanıń qaptal betine teń. Onıń ultanı berilgen perpendikulyar kesimnen ibarat bolıp, qaptal qabırǵası l ge teń boladı.

Demek, joqarıda dálillengen teorema boyınsha: $S_{qaptal} = P \cdot l$ □

36



Temaǵa baylanıslı máseleler hám ámeliy tapsırmalar

174. Tetraedrdiń bir jaǵınıń maydanı 6 cm² bolsa, onıń tolıq betin tabıń.

175. Oktaedrdıń bir jaǵınıń maydanı 5,5 cm² bolsa, onıń tolıq betin tabıń.

176. Dodekaedrdiń bir jaǵınıń maydanı 6,4 cm² bolsa, onıń tolıq betin tabıń.

177. Kubtıń tolıq betiniń maydanı 105,84 cm² bolsa, onıń hár bir jaǵınıń maydanın hám qabırǵasınıń uzınlıǵın tabıń.

178. Oktaedrdiń tolıq betiniń maydanı$32\sqrt{3}$ cm² bolsa, onıń hár bir jaǵınıń maydanın hám qabırǵasınıń uzınlıǵın tabıń.

179. Tuwrımúyeshli parallelepipedtiń ultanınıń tárepleri 7:24 qatnasta, diagonallıq kesiminiń maydanı 50 dm² qa teń. Qaptal betiniń maydanın tabıń.

180*. Tuwrı parallelepipedtiń qaptal qabırǵası 1 m ge, ultanlarınıń tárepleri

23 m hám 11 m ge teń. Ultan diagonallarınıń qatnası 2:3. Diagonallıq kesimleriniń maydanın tabıń.

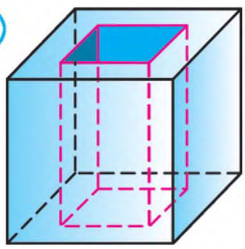
181. Tuwrı parallelepiped ultanınıń tárepleri 3 cm hám 5 cm, ultan diagonallarınıń biri 4 cm ge teń. Parallelepipedtiń kishi diagonallarınıń biri ultan tegisligi menen 60° lı múyesh payda etedi. Onıń diagonallarınıń uzınlıǵın tabıń.

182. Tuwrı parallelepipedtiń qaptal qabırǵası 5 m, ultanınıń tárepleri 6 m hám 8 m, ultan diagonallarınıń biri 12 m ge teń. Parallelepipedtiń diagonalların tabıń.

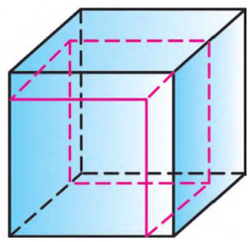
183*. Úshmúyeshli durıs prizmanıń qabırǵası 3 ke teń. Ultanınıń tárepi hám kósherdiń ortası arqalı tegislik júrgizilgen. Kesimniń maydanın tabıń.

184. Úshmúyeshli tuwrı prizmanıń biyikligi 50 cm, ultanınıń tárepleri 40 cm, 13 cm hám 37 cm. Prizmanıń tolıq betin tabıń.

37



38



185*. 37-súwrette kórsetilgen birlik kubtan ultanınıń tárepi 0,5 ke, qaptal qabırǵası 1 ge teń bolǵan durıs tórtmúyeshli prizma oyıp alındı. Kubtıń qalǵan bóleginiń tolıq betiniń maydanın esaplań.

186. Eger kubtıń qabırǵası 1 birlik arttırılsa, onıń tolıq beti 54 birlikke artadı. Kubtıń qabırǵasın tabıń (38-súwret).

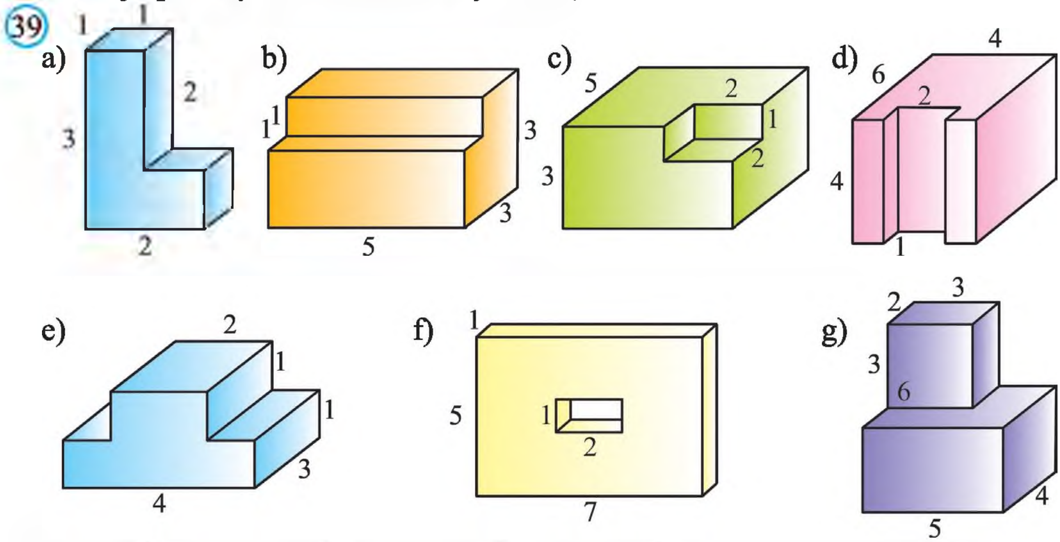
187. $ABCC_1B_1A_1$ qıya prizmanıń ultanı ABC teń qaptallı úshmúyeshlik bolıp, bunda $AB=AC=10$ cm hám $BC=12$ cm. A_1 tóbesi A, B hám C tóbelerinen teńdey aralıqta jatadı hám de AA_1 kesindisi 13 cm ge teń. Prizmanıń tolıq betin tabıń.

188. Durıs tórtmúyeshli prizmanıń qaptal beti 160 qa, tolıq beti 210 ǵa teń. Prizmanıń ultan diagonalın tabıń.

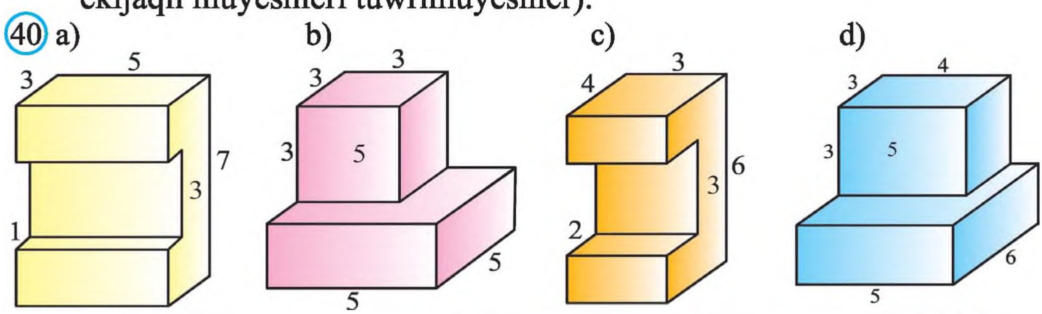
189. Úshmúyeshli qıya prizmanıń qaptal qabırǵaları jatqan parallel tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıq 2 cm, 3 cm hám 4 cm, al qaptal qabırǵası 5 cm ge teń. Prizmanıń qaptal betin tabıń.

190. Kub qabırǵaları uzınlıqlarınıń qosındısı 96 ǵa teń. Onıń qaptal betin tabıń.

191. 39-súwretlerde kórsetilgen kópjaqlılardıń tolıq betin esaplań (barlıq ekijaqlı múyeshleri tuwrımúyeshler).



192. 40-súwretlerde kórsetilgen kópjaqlılardıń tolıq betin esaplań (barlıq ekijaqlı múyeshleri tuwrımúyeshler).



193. Altımúyeshli durıs prizmanıń qaptal qabırǵası 8 cm, ultanınıń tárepi 3 cm. Prizmanıń barlıq qabırǵaları uzınlıqlarınıń qosındısın tabıń.

194. Tórtmúyeshli durıs prizma ultanınıń tárepi 6 cm, prizmanıń biyikligi 5 cm. Onıń diagonallıq kesiminiń maydanın tabıń.

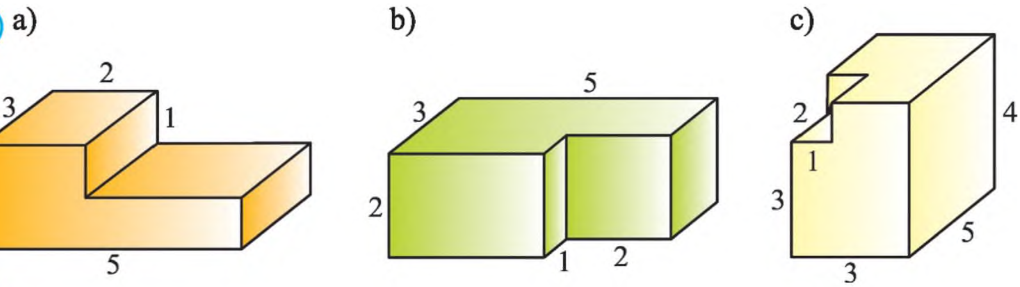
195. Úshmúyeshli durıs prizma ultanınıń tárepi 6 cm, qaptal qabırǵası 12 cm. Prizmanıń qaptal betiniń maydanın tabıń.

196. 41-súwretlerde kórsetilgen kópjaqlılardıń tolıq betin esaplań (barlıq ekijaqlı múyeshleri tuwrımúyeshler).

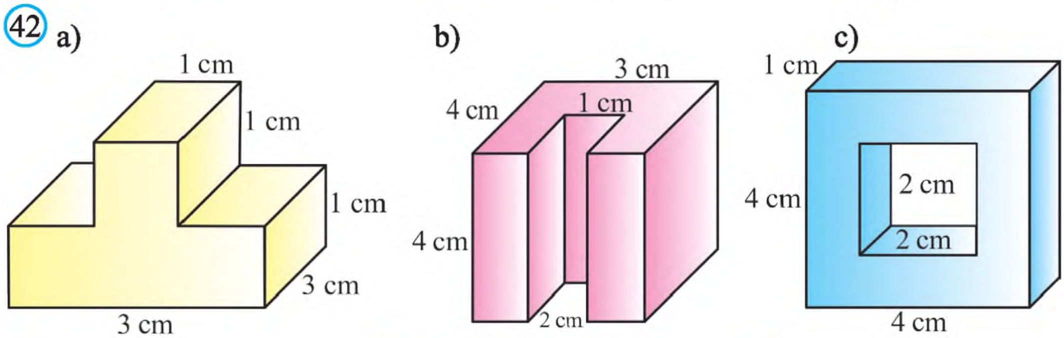
197. 42-súwretlerde kórsetilgen kópjaqlılardıń tolıq betin esaplań (barlıq ekijaqlı múyeshleri tuwrımúyeshler).

198*. 43-súwrettegi úy ultanınıń ólshemleri 6 m hám 8 m. Úydiń bastırma tóbesi ultanına 45° li múyesh astında qıyalanǵan. Úy tóbesi betiniń maydanın tabıń.

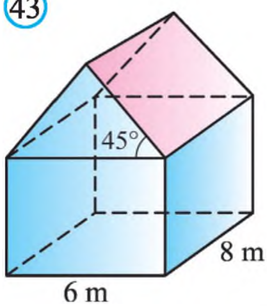
41



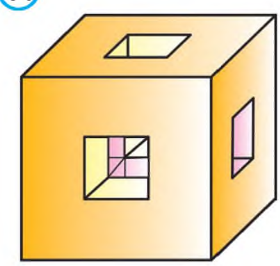
42



43



44



45

199. Parallelepipedtiń bir tóbesinen shıǵıwshı qabırǵaları, sáykes túrde, 6 cm, 8 cm hám 12 cm. Parallelepipedtiń barlıq qabırǵaları uzunlıqlarınıń qosındısın tabıń.

200. Parallelepipedtiń bir ulıwma tóbesine iye jaqlarınıń maydanları 6 cm^2, 12 cm^2 hám 16 cm^2. Parallelepipedtiń tolıq betiniń maydanın tabıń.

201*. Qabirgası 3 cm ge teń bolgan kubtıń hár bir jaǵınan kese kesimi – ultanı 1 cm ge teń kvadrat formasındaǵı tesikler oyılǵan (44- súwret). Kubtiń qalǵan bóleginiń tolıq betiniń maydanın tabıń.

202*. Futbol tobınıń beti qabırǵaları 5 cm ge teń bolgan 12 durıs besmúyeshlik hám 20 durıs altımúyeshlikten ibarat (45-súwret). Futbol tobınıń tolıq betin tabıń. Top kvadrat santimetri 60 swm turatuǵın teriden islengen hám onıń 10 procenti tigiske hám brakqa shıǵıwı belgili bolsa, topqa jumsalǵan teriniń bahasın tabıń.

7. PRIZMANIŃ KÓLEMI

7.1. Kólem túsinigi

Keńislikte geometriyalıq denege tán bolǵan qásiyetlerden biri, bul kólem túsinigi bolıp esaplanadı. Hár qanday predmet (dene) keńisliktiń qanday da bir bólegin iyeleydi. Máselen, gerbish shırpınıń qutısına qaraǵanda úlkenirek orındı iyeleydi. Bul bóleklerdi óz ara salıstırw ushın da kólem túsinigi qabıl etiledi.

Kólem – keńisliktegi deneniń tómendegi qásiyetlerge iye bolǵan muǵdarlı (sanlı) kórsetkishi bolıp esaplanadı:

1. Hár qanday dene oń sanlarda ańlatıwshı turaqlı kólemge iye.

2. Teńdey denelerdiń kólemi de teń.

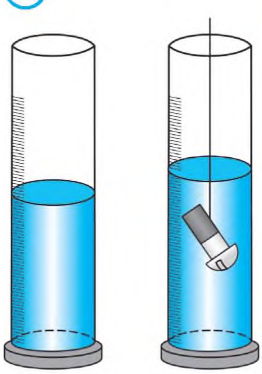
3. Eger dene bir neshe bólekke bólingen bolsa, onıń kólemi bólekleri kólemleriniń qosındısına teń.

4. Qabırǵası bir birlik uzınlıqqa teń kubtıń kólemi birge teń.

Kólem – uzınlıq hám maydan sıyaqlı sanlı ólshemlerdiń biri bolıp esaplanadı. Uzınlıq ólshem birliginiń tańlap alınıwına qarap *birlik* (qabırǵası birlik uzınlıqqa iye) *kub* tıń kólemi 1 cm^3, 1 dm^3, 1 m^3 hám t.b. kólem birlikleri menen ólshenedi.

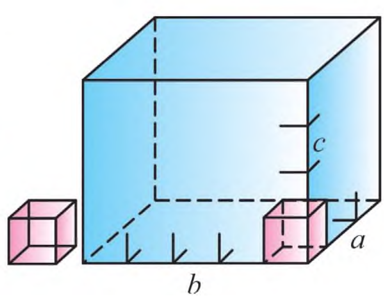
Deneler kólemi túrli usıllar menen ólshenedi yamasa esaplanadı. Máselen, kishirek detaldıń kólemin bólinbelerge (shkalaǵa) iye bolǵan ıdıs (menzurka) járdeminde ólshew múmkin (46-súwret). Al, shelektiń kólemin birlik kólemge iye bolǵan ıdıs járdeminde suw quyıp, toltırıw menen ólshew múmkin (47-súwret). Lekin, barlıq denelerdiń de kólemin bunday usıl menen ólshep bolmaydı. Bunday jaǵdaylarda kólem túrlı usıllar menen esaplanadı. Tómende usı usıllar haqqında toqtap ótemiz hám olardıń bazıların dálillewsiz keltiremiz.

46

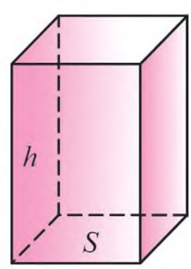


47

48



49



7.2. Parallelepipedtiń kólemi

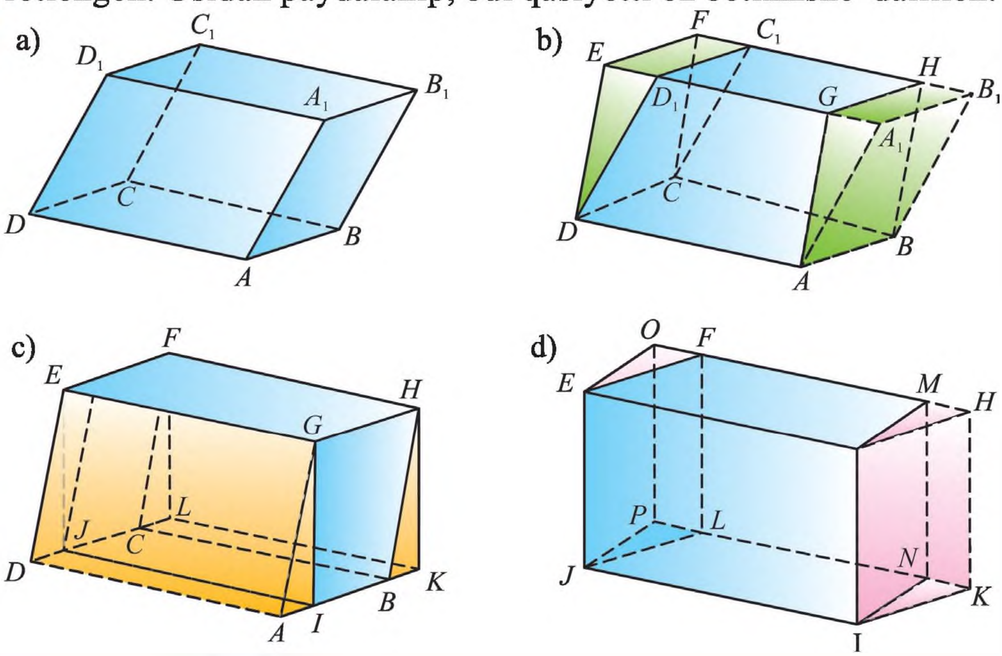
Teorema. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń kólemi, onıń úsh ólshemleri kóbeymesine teń (48- súwret): $V = a \cdot b \cdot c$.

Nátiyje. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń kólemi ultanınıń maydanı menen biyikliginiń kóbeymesine teń.(49-súwret): $V = S \cdot h$.

Teorema. Qálegen parallelepipedtiń kólemi, ultanınıń maydanı menen biyikliginiń kóbeymesine teń (50-súwret): $V = S \cdot h$.

Usı qásiyet joqarıdağı nátiyjeden kelip shığadı. 50-súwrette berilgen parallelepiped qalay etip tuwrı múyeshli parallelepipedke toltırılıwı súwretlengen. Usıdan paydalanıp, bul qasıyetti óz betińizshe dálilleń.

50



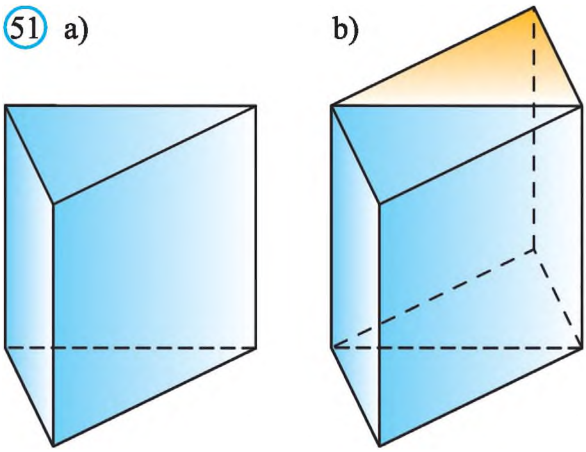
7.3. Prizmanıń kólemi

Teorema. Tuwrı prizmanıń kólemi ultanınıń maydanı menen biyikliginiń kóbeymesine teń (51-súwret): $V = S \cdot h$.

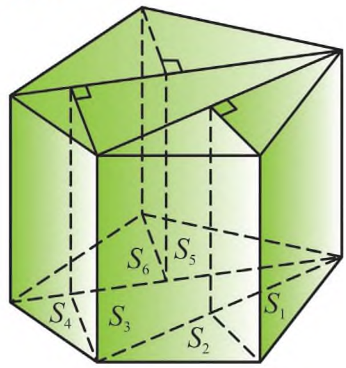
Dálillew. 1-jağday. Ultanı tuwrımúyeshli úshmúyeshlikten ibarat tuwrı prizma berilgen bolsın (51.a-súwret). Bul prizmanı oğan teń bolgan prizma menen tuwrımúyeshli paralelepipedke shekem toltırıw múmkin (51.b- súwret).

Berilgen prizmanıń kólemi, ultanınıń maydanı hám biyikligi, sáykes túrde V, S hám h bolsa, payda bolgan tuwrımúyeshli parallelepipedtiń kólemi, ultanınıń maydanı hám biyikligi, sáykes túrde $2V$, $2S$ hám h boladı.

51 a) b)



52



Demek, $2V=2S\cdot h$ yamasa $V=S\cdot h$ boladı.

2-jaǵday. Qálegen tuwrı n-múyeshli prizma berilgen bolıp, onıń ultanınıń maydanı S, biyikligi h qa teń bolsın. Prizmanıń ultanı – n-múyeshliktiń diagonalları menen úshmúyeshliklerge, al úshmúyeshliklerdiń hár qaysısın tuwrımúyeshli úshmúyeshliklerge bóliw múmkin (52-súwret). Nátiyjede, berilgen prizmanı shekli sandaǵı ultanı tuwrımúyeshli úshmúyeshliklerden ibarat tuwrı prizmalarǵa ajıratıw múmkinligin anıqlaymız. Bul prizmalardıń biyikligi h qa teń bolıp, olardıń ultanlarınıń qosındısı berilgen prizma maydanına teń boladı: $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$.

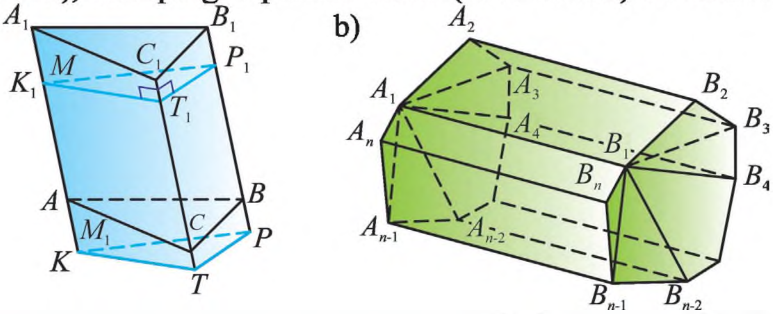
Berilgen prizmanıń kólemi, onı payda etiwshi úshmúyeshli prizmalar kólemleriniń qosındısınan ibarat boladı:

$$V = S_1h + S_2h + \ldots + S_kh = (S_1 + S_2 + \ldots + S_k)\,h = S\cdot h, \text{ yamasa } V = S\cdot h. \square$$

Teorema. Íqtıyarlı prizmanıń kólemi, ultanınıń maydanı menen biyikliginiń kóbeymesine teń: $\boldsymbol{V = S\cdot h}$.

Bul teoremanı 5.3-súwretten paydalanıp, aldın úshmúyeshli prizma ushın (5.3.a-súwret), soń qálegen prizma ushın (5.3.b-súwret) óz betińizshe dálilleń.

53 a) b)



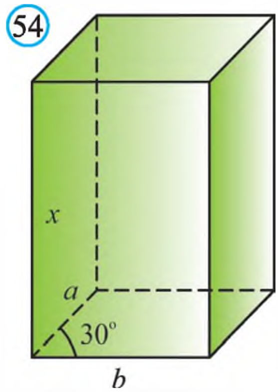
1- másele. Tuwrı parallelepiped ultanınıń tárepleri a hám b ǵa teń bolıp, olar óz ara 30° lı múyesh payda etedi. Eger parallelepipedtiń qaptal betiniń maydanı S ke teń bolsa, onıń kólemin tabıń.

Sheshiliwi: Parallelepipedtiń biyikligin h penen belgileymiz (54-súwret). Onda shárt boyınsha:

$S=(2a+2b)\,h$ yamasa $h=\dfrac{S}{2(a+b)}$.

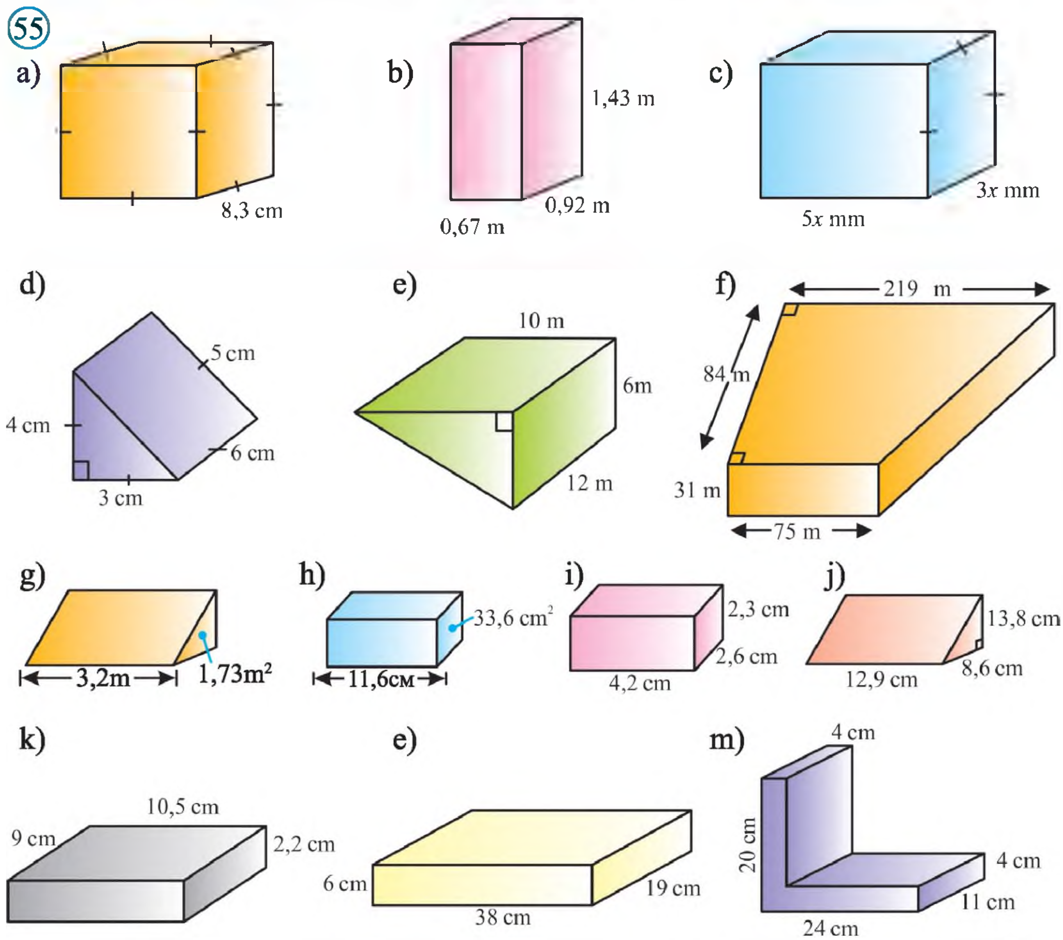
$S_{asos}=ab\sin 30^\circ=\dfrac{ab}{2}$.

$V=S_{asos}\cdot h=\dfrac{ab}{2}\cdot\dfrac{S}{2(a+b)}=\dfrac{abS}{4(a+b)}$.



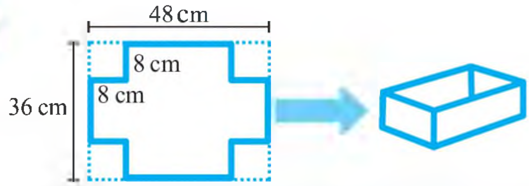
Temaǵa baylanıslı máseleler hám ámeliy tapsırmalar

203. 55-súwrette kórsetilgen kópjaqlılardıń kólemin tabıń.

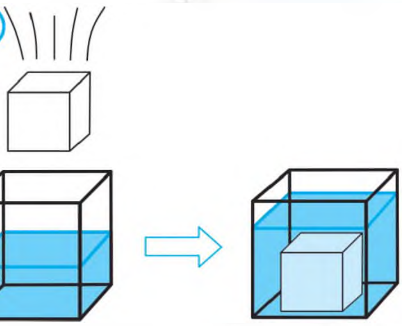


204. 56-súwrette berilgen jayılmaǵa qarap jasalǵan ıdıstıń kólemin tabıń.

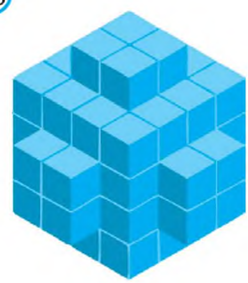
56



57



58



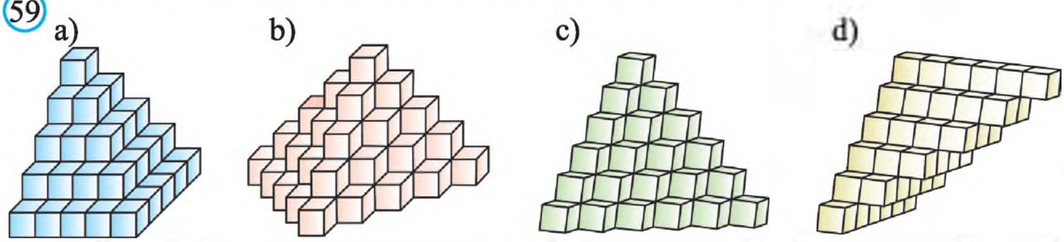
205*. 57-súwret boyınsha másele dúziń hám onı sheshiń.

206. 58-súwrette keltirilgen dene 88 birlik kishi kublardan jasalǵan. Deneniń tolıq betin tabıń.

207. Tuwrımúyeshli parallelepipedtiń jaǵınıń maydanı 12 ge hám oǵan perpendikulyar bolǵan qabırǵa uzınlıǵı 12 ge teń. Parallelepipedtiń kólemin tabıń.

208. 59-súwrette kórsetilgen keńisliktegi figuralardan qaysılarınıń kólemi úlken, yaǵnıy kóbirek kishi kublardan jasalǵan?

59



209. Tuwrımúyeshli parallelepipedtiń kólemi 24 ge teń hám bir qabırǵasınıń uzınlıǵı 3 ke teń. Parallelepipedtiń bul qabırǵasına perpendikulyar jaǵınıń maydanın tabıń.

210. Tuwrımúyeshli parallelepipedtiń kólemi 60 qa teń hám jaqlarınan biriniń maydanı 12 ge teń. Parallelepipedtiń bul jaǵına perpendikulyar bolǵan qabırǵasınıń uzınlıǵın tabıń.

211. Tuwrımúyeshli parallelepipedtiń bir tóbesinen shıǵıwshı úsh qabırǵasınıń uzınlıqları 4, 6 hám 9 ǵa teń. Oǵan teń bolǵan kubtıń qabırǵasın tabıń.

212. Kubtıń tolıq betiniń maydanı 18 ge teń bolsa, onıń diagonalın tabıń.

213. Kubtıń kólemi 8 ge teń bolsa, onıń tolıq betiniń maydanın tabıń.

214. Eger kubtıń qabırǵaları 1 birlik arttırılsa, onıń kólemi 19 birlikke artadı. Kubtıń qabırǵasın tabıń.

215. Kubtıń tolıq betiniń maydanı 24 ke teń. Onıń kólemin tabıń.

216. Kubtiń diagonalı $\sqrt{12}$ ge teń bolsa, onıń kólemin tabıń.

217. Kubtıń kólemi $24\sqrt{3}$ ke teń bolsa, onıń diagonalın tabıń.

218. Birinshi kubtıń kólemi ekinshisinen 8 ese úlken. Birinshi kubtıń tolıq betiniń maydanı ekinshisinen neshe ese úlken?

219. Qabırǵası 30 cm bolǵan kub formasındaǵı ıdısqa (sisternaǵa) neshe litr suw ketedi?

220. Tuwrımúyeshli parallelepipedtiń bir tóbesinen shıǵıwshı qabırǵaları 2 hám 6 ǵa teń. Túwrımúyeshli parallelepipedtiń kólemi 48 ge teń. Parallelepipedtiń usı tóbesinen shıǵıwshı úshinshi qabırǵasın tabıń.

221. Túwrı parallelepiped ultanınıń tárepleriniń uzınlıǵı $2\sqrt{2}$ cm hám 5 cm, olar arasındaǵı múyesh 45° qa teń. Eger parallelepipedtiń kishi diagonalı 7 cm ge teń bolsa, onıń kólemin tabıń.

222*. Tuwrı parallelepiped ultanınıń a hám b tárepleri óz ara 30° lı múyesh payda etedi. Tolıq beti S ke teń. Onıń kólemin tabıń.

223. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń ólshemleri 15 m, 50 m hám 36 m. Oǵan teń bolǵan kubtıń qabırǵasın tabıń.

224. Úshmúyeshli tuwrı prizma ultanınıń tárepleri 29, 25 hám 6 ǵa, al qabırǵası ultanınıń úlken biyikligine teń. Prizmanıń kólemin tabıń.

225. 39-súwretlerde kórsetilgen kópjaqlılardıń kólemin esaplań (barlıq eki jaqlı múyeshler tuwrı múyeshler).

226. 40-súwretlerde kórsetilgen kópjaqlılardıń kólemin esaplań (barlıq eki jaqlı múyeshler tuwrı múyeshler).

227. Tuwrı parallelepipedtiń ultanınıń maydanı 1 m^2 bolǵan rombtan ibarat. Diagonallıq kesimleriniń maydanı sáykes túrde, 3 m^2 hám 6 m^2. Parallelepipedtiń kólemin tabıń.

228. 41-súwretlerde kórsetilgen kópjaqlılardıń kólemin esaplań (barlıq eki jaqlı múyeshler tuwrı múyeshler).

229. 42-súwretlerde kórsetilgen kópjaqlılardıń kólemin esaplań (barlıq eki jaqlı múyeshler tuwrı múyeshler).

230. Keńligi 3 m hám uzınlıǵı 20 m bolǵan jolǵa qalınlıǵı 10 cm bolǵan asfalt qatlamı jatqızıldı. Jol ushın qansha kólemdegi asfalt jumsaldı?

231*. Qıya parallelepipedtiń ultanı – tárepi 1 m ge teń bolǵan kvadrattan ibarat. Qaptal qabırǵalarınıń biri 2 m ge teń hám ol ózi menen tutasqan ultan tárepleri menen 60° lı múyesh payda etedi. Parallelepipedtiń kólemin tabıń.

232*. Parallelepipedtiń qabırǵaları – tárepi a ǵa teń hám súyir múyeshi 60° bolǵan romblardan ibarat. Parallelepipedtiń kólemin tabıń.

233. Parallelepipedtiń hár bir qabırǵası 1 cm ge teń. Parallelepipedtiń bir tóbesindegi úsh tegis múyeshi súyir bolıp, hár biri $2a$ ǵa teń. Parallelepipedtiń kólemin tabıń.

234*. Parallelepipedtiń bir tóbesinen shıǵıwshı úsh qabırǵasınıń uzınlıqları a, b, c ǵa teń. a hám b qabırǵaları óz ara perpendikulyar, c qabırǵası olardıń hár biri menen α múyesh jasaydı. Parallelepipedtiń kólemin tabıń (60-súwret).

235. a) Úshmúyeshli; b) tórtmúyeshli; c) altımúyeshli durıs prizma ultanınıń tárepi a hám qaptal qabırǵası b boyınsha kólemin tabıń.

236. Tuwrı parallelepiped ultanınıń tárepleri a cm hám b cm ge teń bolıp, olar óz ara α múyesh jasaydı. Parallelepipedtiń kishi diagonalı d ǵa teń bolsa, onıń kólemin tabıń.

237. Úshmúyeshli qıya prizmanıń qaptal qabırǵaları 15 m ge, olar arasındaǵı aralıq 26 m, 25 hám1 7 m ge teń. Prizmanıń kólemin tabıń.

238. Tórtmúyeshli durıs prizmanıń diagonalı 3,5 cm ge, qaptal jaǵınıń diagonalı 2,5 cm ge teń. Prizmanıń kólemin tabıń.

239. Úshmúyeshli durıs prizma ultanınıń tárepi a ǵa, al qaptal beti ultanları maydanlarınıń qosındısına teń. Onıń kólemin tabıń.

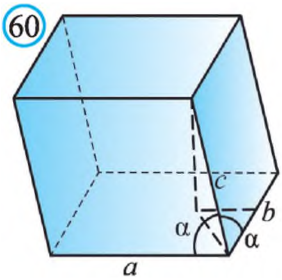
240. Altımúyeshli durıs prizmada eń úlken diagonallıq kesimniń maydanı 4 m^2 ǵa, eki qarama-qarsı qaptal qabırǵaları arasındaǵı aralıq 2 m ge teń. Prizmanıń kólemin tabıń.

241*. Jeti márte kir juwılǵannan keyin sabınnıń ólshemleri eki ese kemeydi (61-súwret). Eger hár kir juwǵanda birdey kólemdegi sabın sarıp etilgeni málim bolsa, sabın jáne neshe márte kir juwıwǵa jetedi?

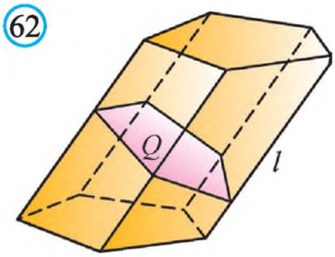
242*. Qıya prizmada qaptal qabırǵalarına perpendikulyar hám barlıq qaptal qabırǵaların kesip ótetuǵın tegislik júrgizilgen. Payda bolǵan kesimniń maydanı Q, qaptal qabırǵası l ge teń bolsa, prizmanıń kólemin tabıń (62-súwret).

243. Úshmúyeshli tuwrı prizma ultanınıń tárepleri 4 cm, 5 cm, 7 cm ge, al qaptal qabırǵası ultanınıń úlken biyikligine teń. Prizmanıń kólemin tabıń.

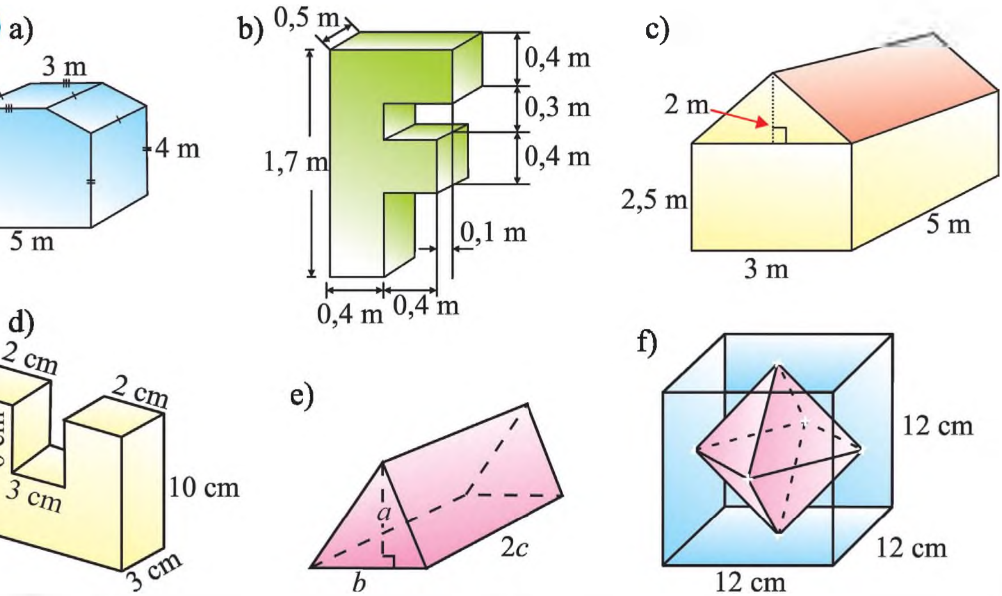
244. 63-súwretlerde kórsetilgen kópjaqlılardıń kólemin esaplań.

60


61


62


63



245. Úshmúyeshli tuwrı prizma ultanınıń maydanı 4 cm^2 qa, qaptal jaqlarınıń maydanları 9 cm^2, 10 cm^2, 17 cm^2 qa teń bolsa, onıń kólemin tabıń.

246*. Prizmanıń ultanı teń qaptallı úshmúyeshlik bolıp, onıń bir tárepi 2 cm, qalǵan eki tárepi 3 cm ge teń. Prizmanıń qaptal qabırǵası 4 cm ge teń hám ol ultan tegisligi menen 45° múyesh jasaydı. Bul prizmaǵa teń bolǵan kubtıń qabırǵasın tabıń.

247. Qıya prizma ultanınıń tárepi a ǵa teń bolǵan teń tárepli úshmúyeshlik. Qaptal qabırǵalardan biri ultanına perpendikulyar hám kishi diagonalı s ge teń bolǵan rombdan ibarat. Prizmanıń kólemin tabıń.

248. Eger tórtmúyeshli tuwrı prizmanıń biyikligi h, diagonalları ultan tegisligi menen α hám β múyeshler payda etedi. Eger ultanınıń diagonalları arasındaǵı múyesh γ ǵa teń bolsa, prizmanıń kólemin tabıń.

249*. Kesimi ultanı 1,4 m hám biyikligi 1,2 m bolǵan teń qaptallı úshmúyeshlik formasındaǵı suw shıǵarıwshı trubanıń suw ótkizgish quwatın (1saatta aǵıp ótetuǵın suw kólemi) esaplań. Suwdıń aǵıs tezligi 2 m/s.

250*. Temir jol astındaǵı topıraq úyindisi trapeciya formasında bolıp, onıń tómengi ultanı 14 m, joqarǵı ultanı 8 m hám biyikligi 3,2 m. 1 km topıraq úyindisin qurıw ushın, qansha kub metr topıraq kerek boladı?

251*. Tárepi 3,2 cm hám qalıńlıǵı 0,7 cm bolǵan durıs segizmúyeshlik formasındaǵı aǵash plitkasınıń massası 17,3 g. Aǵashtıń tıǵızlıǵın tabıń.

252. Ólshemleri 30×40×50 (cm) bolǵan tuwrımúyeshli parallelepiped formasındaǵı qutıdan qanshasın, ólshemleri 2×3×1,5 m bolǵan mashina kuzovına jaylastırıw múmkin?

253*. Ólshemleri 420 mm × 240 mm × 90 mm bolǵan tuwrımúyeshli parallelepiped formasındaǵı, tıǵızlıǵı 7,8 g/cm^3 bolǵan polat plitalardıń qanshasın, júk kóteriw quwatı 3 t bolǵan júk mashinasında tasıw múmkin?

254. Ólshemleri 250 mm × 120 mm × 65 mm bolǵan tuwrımúyeshli parallelepiped formasındaǵı, tıǵızlıǵı 1,6 g/cm^3 bolǵan gerbishtiń qanshasın, júk kóteriw quwatı 3 t bolǵan júk mashinasına júklew múmkin?

255*. Ólshemleri 820 mm × 210 mm × 120 mm bolǵan tuwrımúyeshli parallelepiped formasındaǵı, tıǵızlıǵı 7,3 g/cm^3 bolǵan shoyın plitanı júk kóteriw quwatı 2 t bolǵan kóterme kran járdeminde kóteriw múmkin be?

256. Boyı 105 m hám kese kesimi ólshemleri 30 cm × 40 cm bolǵan tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat aǵashtan, boyı 3,5 m, eni 20 cm hám qalınlıǵı 20 mm bolǵan qansha taxtay bólegi shıǵadı?

257. Gerbishtiń ólshemleri 25 × 12 × 6,5 (cm). Eger 1 m^3 kólemdegi gerbishtiń massası 1700 kg bolsa, bir dana gerbishtiń massasın grammlarda anıqlań.

258. Sanitariya normaları boyınsha, klastaǵı hár bir oqıwshıǵa 7,5 m^3 hawa tuwrı keledi. Eger klass bólmesiniń biyikligi 3,5 m hám ol 28 oqıwshıǵa mólsherlengen bolsa, klass bólmesiniń maydanın tabıń.

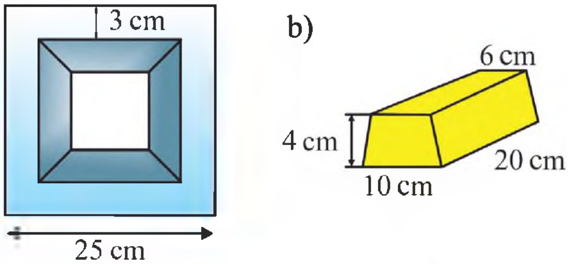
259*. Boyı 100 m, eni 10 m bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı jerdiń qalınlıǵı 5 cm bolǵan asfalt penen qaplaw kerek. Eger 1 m^3 kólemdegi asfalttıń massası 2,4 tonna hám bir júk mashinasınıń júk kóteriw quwatı 5 tonna bolsa, bul jerdi asfaltlaw ushın neshe mashina asfalt kerek boladı?

260*. Ólshemleri 3 cm, 4 cm, 5 cm bolǵan, tuwrımúyeshli parallelepiped formasındaǵı temir bólegine stanokta islew berildi. Bul jaǵdayda onıń hár bir qabırǵası birdey kemeyip, tolıq beti 42 cm^2 qa kemeygeni málim boldı. Bul temir bóleginiń kólemi islew berilgeninen keyin qansha boladi?

261*. 64.a-súwrette shoyın truba kesimi kórsetilgen. Súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında, bir metr uzınlıqtaǵı bunday trubanıń massasın anıqlań (shoyınnıń tıǵızlıǵı – 7,3 g/cm^3).

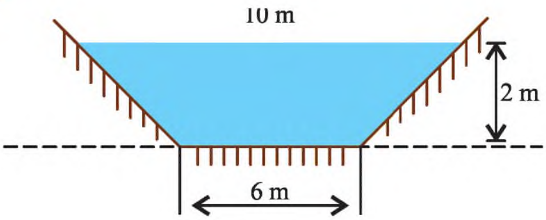
262. Ólshemleri 64.b-súwrette berilgen altın plitkanıń massası 12,36 kg bolsa, onıń tıǵızlıǵın anıqlań.

64 a) b)

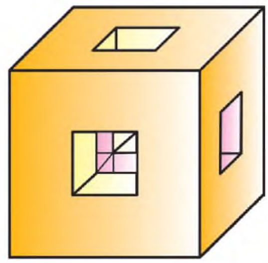


263*. Kanaldıń kese kesimi ultanları 10 m, 6 m hám biyikligi 2 m bolǵan teń qaptallı trapeciyadan ibarat (65-súwret). Suwdiń aǵıs tezligi 1 m/s bolsa, bir minutta bul kanaldan qansha kólemdegi suw aǵıp ótedi?

65



66

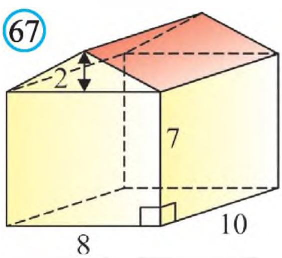


264*. Qabırǵası 6 cm ge teń bolǵan, mıstan islengen kubtıń hár bir jaǵınan kese kesimi – ultanı 2 cm ge teń kvadrat formasındaǵı tesikler oyılǵan (66-súwret). Eger mıstıń salıstırma tıǵızlıǵı 0,9 g/cm^3 bolsa, kubtıń qalǵan bóleginiń massasın tabıń.

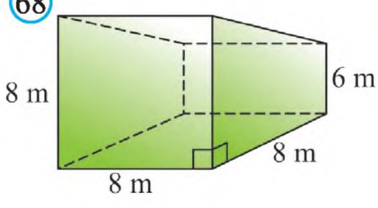
265. Tuwrı múyeshli parallelepiped formasındaǵı metall blok ultanınıń ólshemleri 7 cm hám 5 cm. Bloktıń massası 1285 g hám metaldıń tıǵızlıǵı 7,5 g/cm^3 bolsa, bloktıń biyikligin tabıń.

266. 67-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında garajdıń kólemin tabıń.

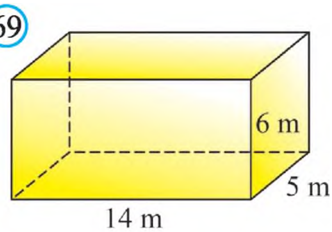
67



68



69



267. Gúl ósiriletuǵın úlken túbek tereńligi 2 fut, keńligi 12 fut hám uzınlıǵı 15 fut bolǵan tuwrımúyeshli parallelepiped formasında. Túbektiń kólemin tabıń hám kub metrlerde ańlatıń (1 fut = 30,48 cm).

268. Júk saqlanatuǵın qoyma 68-súwrette kórsetilgen trapeciyalı prizma formasında. Súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında qoymanıń sıyımlılıǵın tabıń.

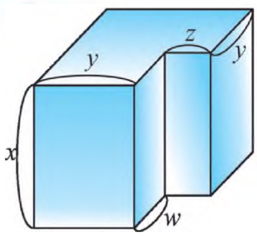
269*. 69-súwrette qutınıń ólshemleri berilgen. Qutınıń ultanlarınıń 1 kvadrat metri 1000 swm, qaptal qabırǵalarınıń 1 kvadrat metri 2000 swm bolǵan materialdan islengen. Qutını jasawda neshe swmlıq material ketken?

270. Kubtıń kólemi V ǵa teń bolsa, onıń diagonalın tabıń.

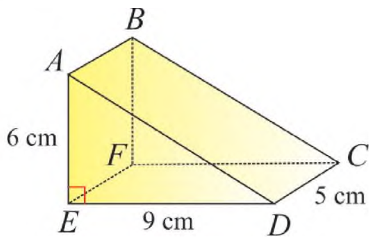
271. Úlken tuwrımúyeshli parallelepipedten 70-súwrette kórsetilgendey etip kishi tuwrı múyeshli parallelepiped qırqıp alınǵan. Berilgen maǵlıwmatlar tiykarında, payda bolǵan denenıń kólemin tabıń.

272. 71-súwrette kórsetilgen piramida kólemin tabıń.

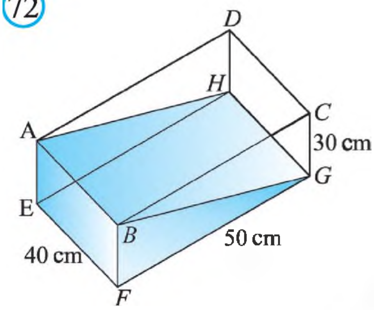
70



71



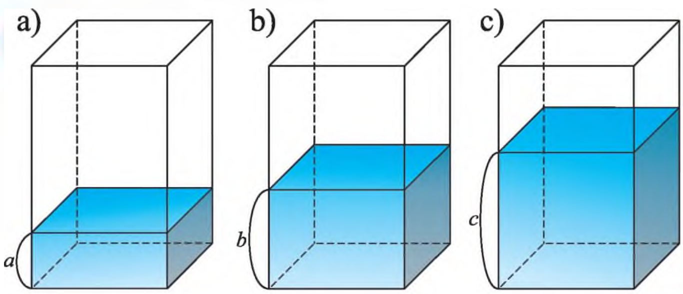
72



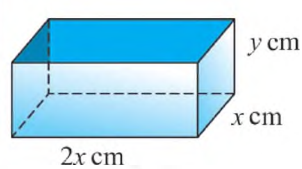
273*. 72-súwrette kórsetilgen tuwrımúyeshli parallelepiped formasındaǵı akvariumda qansha suw bar?

274*. Tuwrımúyeshli parallelipiped formasındaǵı birdey akvariumlarǵa 73-súwrette kórsetilgendey, hár qıylı qáddide suw quyılǵan. Bul akvariumlarǵa quyılǵan suw kólemleriniń qatnası qanday boladı?

73



74



275*. Izertlew. Kárxana sıyımlılıǵı 1 litr, ultan ólshemleriniń qatnası 1:2 bolǵan tuwrımúyeshli parallelepiped formasındaǵı ústi ashıq qutılardı islep shıǵarmaqshı (74-súwret). Qutını únemli islep shıǵarıw, yaǵnıy oǵan ketetuǵın material eń az bolıwı ushın onıń ólshemleri qanday bolıwı kerek? (x ke túrli mánisler berip, qutınıń kólemin tabıń hám olardı salıstırıw menen sheshiwge urınıp kóriń yamasa differencial esap imkaniyatlarınan paydalanıń.)

276*. **Mashqalalı jağday.** Geologlar tas tawıp aldı hám onıń kólemin shama menen bolsa da anıqlamaqshı boldı. Olar kól janında turıptı hám olardıń ıqtıyarında tas sıyatuğın úlken metall bak, bir neshe sıyımlılığı belgisiz shelekler hám sıyımlılığı 1 litr ıdıs bar. Geologlar bul jumıstı qalay orınlay aladı?

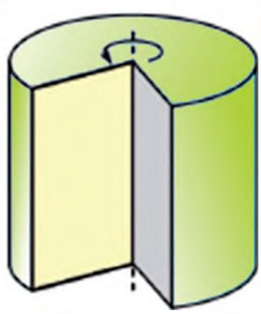
8. CILINDRDIŃ BETI HÁM KÓLEMI

8.1. Cilindrdiń beti

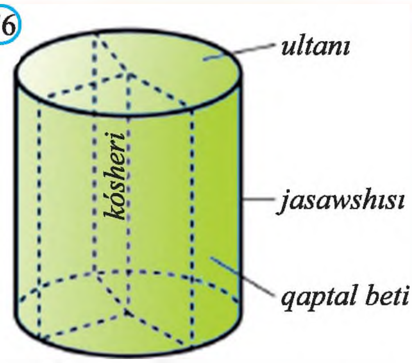
Keńisliktegi figuralardıń jáne áhmiyetli tárepleriniń biri – bul aylanıw deneleri bolıp esaplanadı. Cilindr aylanıw denelerinen biri bolıp, onıń menen tómengi klaslarda tanısqansız. Cilindrdiń qásiyetleri prizmanıń qásiyetlerine uqsas bolğanlığı ushın, olardı izbe-iz úyrenemiz.

Tuwrı tórtmúyeshlikti bir tárepi dógereginde aylandırıwdan kelip shıqqan dene *cilindr* (tuwrı dóngelekli cilindr) dep ataladı (75-súwret). Bul aylanıwda tuwrı túrtmúyeshliktiń bir tárepi qozğalıwsız qaladı. Onı *cilindrdiń kósheri* dep ataymız. Tórtmúyeshliktiń bul tárepine qarama qarsı jatqan tárepiniń aylanıwınan payda bolğan bet – *cilindrdiń qaptal beti*, al táreptiń ózi *cilindrdiń jasawshısı* dep ataladı. Tuwrı tórtmúyeshliktiń qalğan tárepleri bul aylanıwda teńdey eki dóngelek payda etedi, olardı *cilindrdiń ultanları* dep ataymız (76-súwret).

75



76



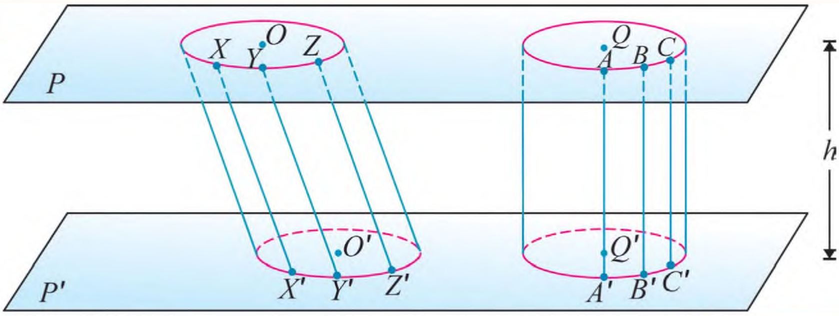
Esletpe. Tuwrı tórtmúyeshlikti bir tárepi dógereginde aylandırıwdan kelip shıqqan dene, negizinde *tuwrı dóngelekli cilindr* dep júritiledi. Al, cilindr túsinigi keń mániste tómendegishe kirgiziledi.

Aytayıq, keńislikte tegis F_1 figurası bazı bir parallel kóshiriwde F_2 figurağa ótsin. Bul eki figura hám usı parallel kóshiriwde bir-birine ótken noqatların tutastırıwshı kesindilerden ibarat dene *cilindr* dep ataladı (77-súwret).

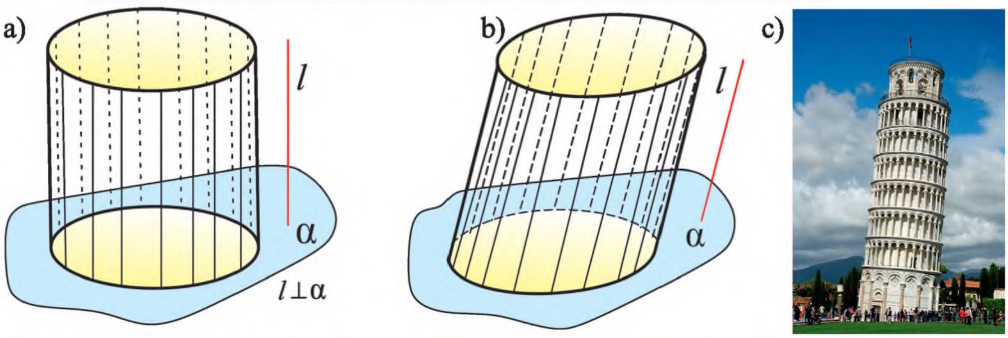
Eger parallel kóshiriw, tegis F_1 figura tegisligine perpendikulyar bolsa, cilindr *tuwrı cilindr* (78.a-súwret) dep, keri jaǵdayda *qıya cilindr* (78.b-súwret) dep júritiledi.

78.c-súwrette kórsetilgen Piza minarası qıya cilindr formasında.

77



78 a) b) c)



Eger F_1 figurası dóńgelekten ibarat bolsa, cilindr *dóńgelekli cilindr* dep ataladı.

Tuwrı dóńgelekli cilindr ǵana aylanıw denesi boladı. Endi tuwrı dóńgelekli cilindrler menen tanısıp baramız hám olardı qısqasha cilindrler dep ataymız.

Cilindrdiń ultanları óz ara teń dóńgeleklerden ibarat bolıp, olar parallel tegisliklerde jatadı. Cilindrdiń bir ultanı noqatınan ekinshi ultan tegisligine túsirilgen perpendikulyar onıń *biyikligi* dep ataladı.

Bul parallel tegislikler arasındaǵı aralıq cilindrdiń biyikligine teń boladı. Cilindrdiń kósheri, onıń biyikligi bolıp esaplanadı.

Cilindrdiń jasawshıları óz ara parallel hám teń boladı. Sonday-aq, cilindr kósheri, jasawshıları hám biyikliginiń uzınlıqları óz ara teń boladı.

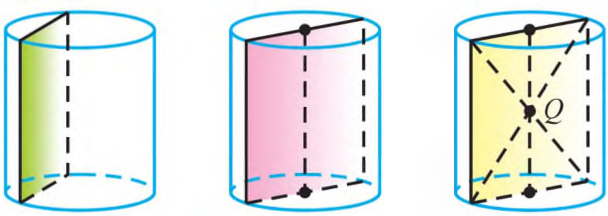
Cilindrdi onıń kósherine parallel tegislik penen keskende, payda bolǵan kesim tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat boladı (79.a-súwret). Onıń eki tárepi cilindrdiń jasawshıları, qalǵan eki tárepi sáykes túrde ultanlarınıń parallel xordaları boladı.

Atap aytqanda, *kósherlik kesimi* de tuwrı tórtmúyeshlik boladı. Ol cilindrdiń kósheri arqalı ótken tegislik penen keskende payda bolatuǵın kesim esaplanadı (79.b-súwret).

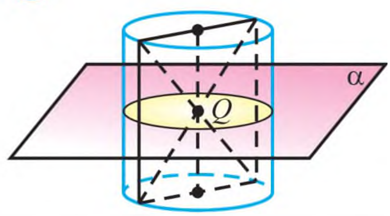
Kósherlik kesimleriniń diagonalları, ultanlarınıń oraylarınıń tutastırıwshı kesindiniń ortası Q noqattan ótedi. Sonıń ushın, bul Q noqat cilindrdiń simmetriya orayınan ibarat boladı (79.c-súwret).

Q noqattan ótıwshi hám cilindr kósherine perpendikulyar bolǵan tegislik, cilindrdiń simmetriya tegisliginen ibarat boladı (80-súwret). Cilindrdiń kósherinen ótiwshi tegislikler de onıń simmetriya tegislikleri boladı (81-súwret).

79 a) b) c)



80



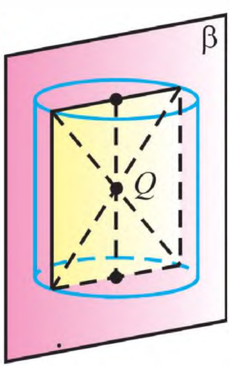
1-másele. Cilindr kósherlik kesiminiń maydanı Q ǵa teń bolǵan kvadrattan ibarat. Cilindr ultanınıń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. Kvadrattıń tárepi $\sqrt{Q}$ ǵa teń. Ol cilindr ultanınıń diametrine teń. Onda cilindr ultanınıń maydanı: $S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$ ǵa teń. □

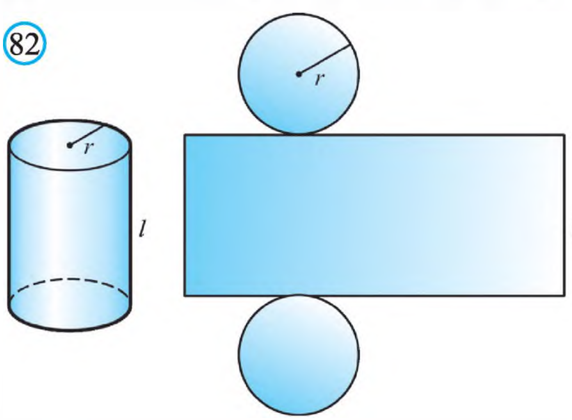
Teorema. Cilindrdiń qaptal beti, ultan sheńberiniń uzınlıǵı menen jasawshısınıń kóbeymesine teń: $S_{yon} = 2\pi rl.$

Usı teoremanı tómendegi 82-súwret tiykarında óz betińizshe dálilleń.

81



82



Nátiyje. Cilindrdiń tolıq beti, onıń qaptal beti menen eki ultan maydanlarınıń qosındısına teń: $S_{tolıq} = S_{qaptal} + 2S_{ultan}$ yamasa

$$S_{tolıq} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(l + r).$$

Íqtıyarlı cilindr berilgen bolsın. Onıń ultanlarınıń birine ishley $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ kópmúyeshligin sızamız (83-súwret). Kópmúyeshliktiń A_1, A_2, ..., A_{n-1} hám A_n tóbeleri arqalı, cilindrdiń A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$ hám A_nB_n jasawshıların júrgizemiz hám de jasawshınıń basqa $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ hám B_n tóbelerin izbe-iz kesindiler menen tutastırıp shıǵamız. Nátiyjede $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n B_1B_2 \dots B_{n-1}B_n$ prizmanı payda etemiz. Bul prizma berilgen *cilindrge ishley sızılǵan prizma* dep ataladı. Al, cilindr *prizmaǵa sırtlay sızılǵan cilindr* dep júritiledi. Eger prizma cilindrge ishley sızılǵan bolsa, onda prizmanıń ultanı cilindr ultanına ishley sızılǵan boladı hám prizmanıń qaptal qabırǵaları cilindr qaptal jaǵında jatadı.

Bizge málim, eger prizma ultanına sırtlay sızıw múmkin bolsa, prizmaǵa sırtlay cilindr sızıwǵa da boladı.

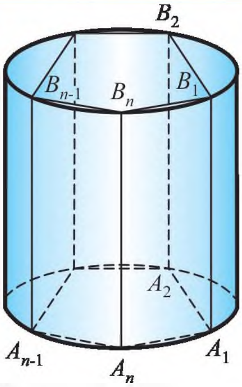
Usıǵan uqsas *cilindrge sırtlay sızılǵan prizma* hám *prizmaǵa ishley sızılǵan cilindr* túsinikleri de kiritiledi (84-súwret). Eger prizma cilindrge sırtlay sızılǵan bolsa, onda prizmanıń ultanı cilindr ultanına sırtlay sızılǵan boladı hám prizmanıń qaptal jaqları cilindrdiń qaptal betine urınadı.

Belgili bolǵanınday, eger prizma ultanına sırtlay sheńber sızıw múmkin bolsa, prizmaǵa sırtlay cilindr sızıw da múmkin.

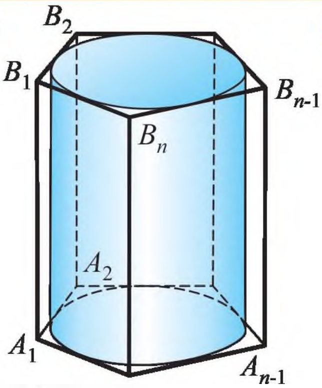
8.2. Cilindrdiń kólemi

Teorema. Cilindrdiń kólemi ultanınıń maydanı menen jasawshısınıń kóbeymesine teń: $V = S_{ultan} \cdot l.$

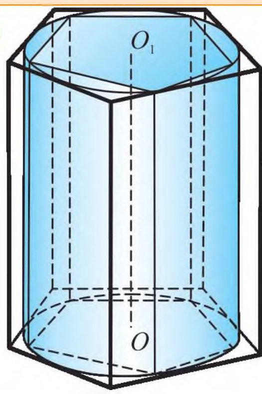
83



84



85



Dálillew. Kósheri OO_1 bolǵan cilindr berilgen bolsın (85-súwret). Oǵan ishley $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n\, B_1B_2 \dots B_{n-1}B_n$ hám sırtlay $C_1C_2 \dots C_{n-1}C_n$

$D_1 D_2 \ldots D_{n-1} D_n$ prizmalardı sızamız. Cilindr kólemin V, ishley hám sırtlay sızılǵan prizmalar kólemin V_1 hám V_2 menen belgilesek, onda $V_1 < V < V_2$ qosteńsizligi orınlı boladı. Prizmalar kólemi tómendegi formulalar boyınsha tabıladı:

$$V_1 = S_{A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n} \cdot l \qquad \text{hám} \qquad V_2 = S_{C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n} \cdot l$$

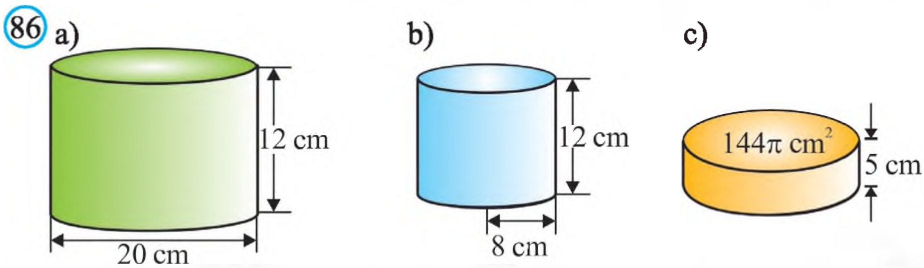
Prizmalar ultan tárepleriniń sanı n di barǵan sayın arttırıp baramız. Onda ishley sızılǵan prizma kólemi asıp baradı, al sırtlay sızılǵan prizmaniń kólemi kemeyip baradı. Eger tárepler sanı n sheksiz artıp barsa, bul kólemler arasındaǵı parıq nolge umtıladı. Cilindrge ishley hám sırtlay sızılǵan prizmalar kólemi jaqınlaǵannan soń berilgen cilindrdiń kólemi sıpatında alınadı.

Bul jaǵdayda $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ hám $C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n$ kópmúyeshliklerdiń maydanı, cilindr ultanında jatqan dóngelek maydanı S ke jaqınlasadı.

Demek, $V = S_{\text{ultan}} \cdot l.$ $\square$

Temaǵa baylanıslı máseleler hám ámeliy tapsırmalar

277. 86-súwrette keltirilgen cilindrlerdiń qaptal hám tolıq betin tabıń.



278. Cilindr ultanınıń radiusı 6 cm, onıń biyikligi 4 cm. Cilindr kósherlik kesiminiń maydanın esaplań.

279. Cilindr ultanınıń radiusı 2 m, biyikligi 3 m. Kósherlik kesiminiń diagonalın tabıń.

280. Cilindr ultanınıń maydanı 64 π cm^2, onıń biyikligi 8 cm. Cilindr kósherlik kesiminiń maydanın esaplań.

281. Cilindrdiń kósherlik kesimi – maydanı Q ǵa teń bolǵan kvadrat. Cilindr ultanınıń maydanın tabıń.

282. Cilindrdiń kósherlik kesimi maydanı 36 cm^2 bolǵan kvadrattan ibarat. Cilindr qaptal betiniń maydanın esaplań.

283. Cilindr kósherlik kesiminiń maydanı 4 ke teń. Onıń qaptal betiniń maydanın tabıń.

284. Cilindrdiń biyikligi 6 cm, ultanınıń radiusı 5 cm. Cilindrdiń kósherine parallel bolǵan hám onnan 4 cm aralıqta júrgizilgen kesimniń maydanın tabıń.

285. Cilindr ultanınıń radiusı 2 ge, biyikligi 3 ke teń. Cilindrdiń qaptal betiniń maydanın tabıń.

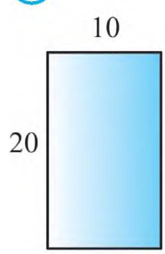
286. Cilindr ultanınıń sheńberi uzınlıǵı 3π ge, biykligi 2 ge teń. Cilindrdiń qaptal betiniń maydanın tabıń.

287. Cilindr jayılmasınıń maydanı 24π dm^2, cilindrdiń biyikligi 4 dm. Onıń ultanınıń radiusın tabıń.

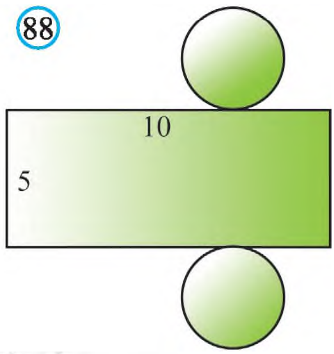
288. Cilindr ultanınıń radiusı 5 cm, onıń biyikligi 6 cm. Cilindrdiń kósherlik kesiminiń diagonalın tabıń.

289. Cilindrdiń biyikligi 8 dm, ultanınıń radiusı 5 dm. Cilindr tegislik penen sonday kesilgen, payda bolǵan kesindi kvadrattan ibarat. Bul kesimnen cilindr kósherine shekemgi aralıqtı tabıń.

87



88



290*. 87-súwrette berilgen cilindrdiń kósherlik kesimine qarap, onıń qaptal hám tolıq betiniń maydanın tabıń.

291*. 88-súwrette berilgen cilindrdiń jayılmasına qarap, onıń qaptal hám tolıq betiniń maydanın tabıń.

292. Cilindr ultanınıń radiusı 3 cm, al biyikligi ultan radiusınan 2 cm artıq. Cilindrdiń kólemin esaplań.

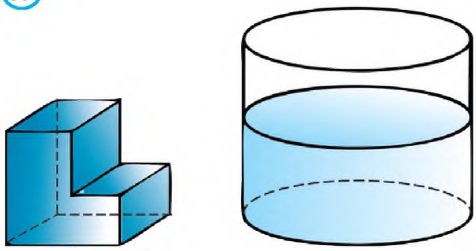
293. Cilindrdiń kólemi 64π cm^3, biyikligi 4 cm. Cilindr ultanınıń maydanın esaplań.

294*. Cilindr formasındaǵı idısqa 2000 cm^3 suw quyılǵanda, suwdıń qáddi 12 cm di payda etti. Idısqa detal batırılǵanda, suw qáddi jáne 9 cm ge kóterildi. Detal kólemin anıqlań hám juwaptı cm^3 larda ańlatıń.

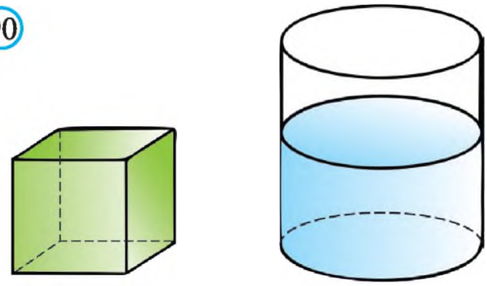
295. Cilindr formasındaǵı ıdısqa 3 litr suw quyılǵanda, suwdıń qáddi 15 cmdi payda etti (89-súwret). Idısqa detal batırılǵanda, suw qáddi jáne 4 cm ge kóterildi. Detal kólemin anıqlań hám juwaptı cm^3 larda ańlatıń.

296*. Cilindr formasındaǵı idısqa 4 litr suw quyılǵanda, suwdıń qáddi 20 cm di payda etti (90-súwret). Idısqa detal batırılǵanda, suw qáddi jáne 5 cm ge kóterildi. Detal kólemin anıqlań hám juwaptı cm^3 larda ańlatıń.

89



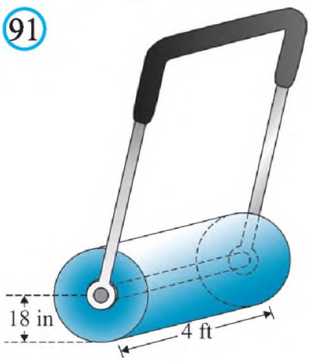
90



297*. 91-súwrette cilindr formasındaǵı jol tegislewshi qurılması kórsetilgen. Súwrette berilgenlerden paydalanıp, ol bir márte aylanǵanda qansha maydandaǵı joldı tegisleytuǵının anıqlań.
(Esletpe: 1 ft (fut) = 12 in. (dyuym) = 30,48 cm).

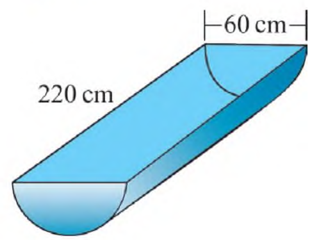
298*. 92-súwrettegi suw sebiwge mólsherlengen rezina trubanıń ishki diametri 3 cm, sırtqı diamertı 3,5 cm, uzınlıǵı 20 m bolsa, oǵan neshe lirt suw ketetuǵının tabıń. Eger rezinanıń tıǵızlıǵı 7 g/cm^3 ekenligi málim bolsa, bul rezina truba oramınıń massasın tabıń.

91



92

93



299*. 93-súwrette qaptal beti yarım cilindr formasında bolǵan ıdıs berilgen. Eger 1 cm^2 maydannıń betin boyaw ushın 6 g boyaw talap etilse, bul ıdıstıń hám ishki, hám sırtqı bólegin boyaw ushın qansha boyaw kerek boladı? İdısqa neshe litr suw ketedi?

94

95

96

300*. Cilindr formasındaǵı ıdıslardan biri ekinshisinen eki ese keńirek, lekin úsh ese tómenirek (94-súwret). Bul ıdıslardıń qaysı biriniń sıyımlılıǵı úlken?

301*. Ultanınıń radiusı 5 cm, biyikligi 20 cm bolǵan cilindr formasındaǵı apelsin sherbeti ıdısınıń ultanları metalldan, al qaptal beti kartonnan islengen (95-súwret). Eger 1 cm^2 metall bahası 5 swm, 1 cm^2 karton bahası 2 swm bolsa, bul ıdıstı tayarlaw ushın neshe swmlıq material kerek boladı? Ídısqa qansha apelsin sherbeti ketedi?

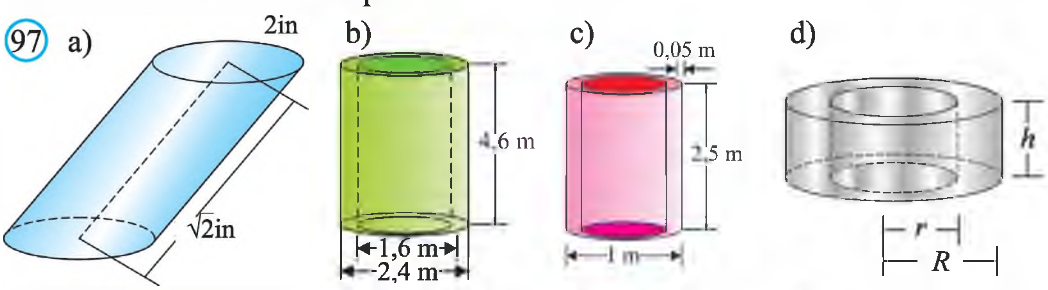
302*. Ultanınıń radiusı 1,5 dyuym, biyikligi 4,25 dyuym bolǵan cilindr formasındaǵı konserva bankası berilgen (96-súwret). Bankanıń tolıq beti hám kólemin tabıń. Eger 1 cm^2 metall bahası 5 swm bolsa, bul ıdıstı tayarlaw ushın neshe swmlıq material kerek boladı? (Esletpe: 1 in. (dyuym) = 2,54 cm.)

303*. Neft saqlanatuǵın ıdıs (cisterna) biyikligi 16 fut, ultanınıń radiusı 10 fut bolǵan cilindr formasında. Eger 1 kub fut 7,5 gallonǵa teń bolsa, bul cisternanıń gallonlardaǵı sıyımlılıǵın anıqlań. (Esletpe: 1 amerika gallonı = 3,785 litr. 1 amerika barelli = 42 amerika gallonı = 159 litr.)

304*. Fermerdiń janılǵı baǵı cilindr formasında. Baktıń biyikligi 6 fut, ultanınıń radiusı 1,5 fut. Baktiń gellonlardaǵı sıyımlılıǵın anıqlań.

305. 97-súwrettegi maǵlıwmatlardan paydalanıp, kórsetilgen keńisliktegi deneler kólemin anıqlań.

97

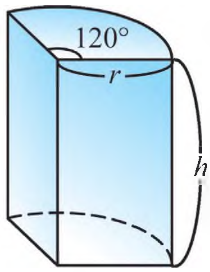


306*. Cilindr formasındaǵı ıdısqa 6 cm^3 suw quyıldı. Ídısqa detall tolıq batırılǵanda, suw qáddi 1,5 ese kóteriledi. Detall kólemin anıqlań hám juwabın cm^3 larda kórsetiń.

307*. Cilindr formasındaǵı ıdıstaǵı suwdıń qáddi 16 cm. Ídısqa ultanınıń diametrı bul ıdısqa qaraǵanda 2 ese kishi bolǵan cilindr formasındaǵı ekinshi ıdıs batırılǵanda ondaǵı suwdıń qáddi qansha boladı?

308. Birinshi cilindr kólemi 12 m^3. Ekinshi cilindrdiń biyikligi birinshi

98



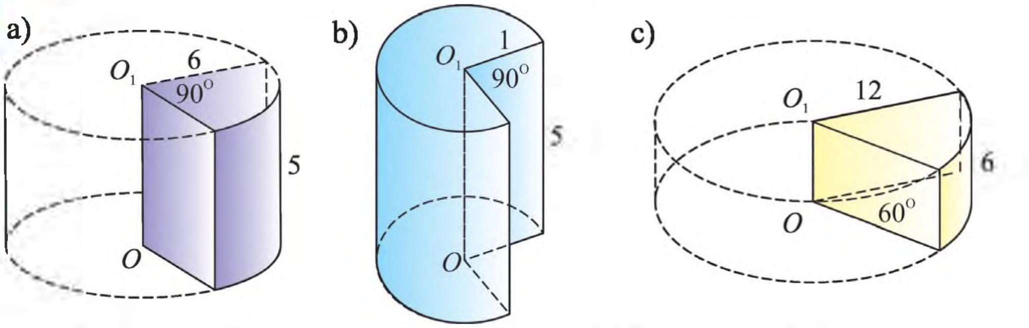
cilindrge qaraǵanda 3 ese úlken, al ultanınıń radiusı 2 ese kishi. Ekinshi cilindrdiń kólemin tabıń.

309*.Cilindr formasındaǵı ıdıs ekinshisinen 2 ese biyik, lekin 1,5 ese keńirek. Bul ıdıslar kólemleriniń qatnasın esaplań.

310. 98-súwrette kórsetilgen keńisliktegi figuranıń kólemin tabıń.

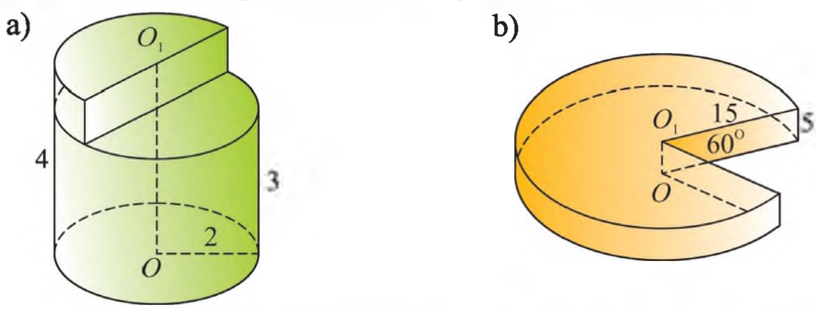
311. 99-súwrette kórsetilgen cilindr bóleginiń kólemin tabıń.

99



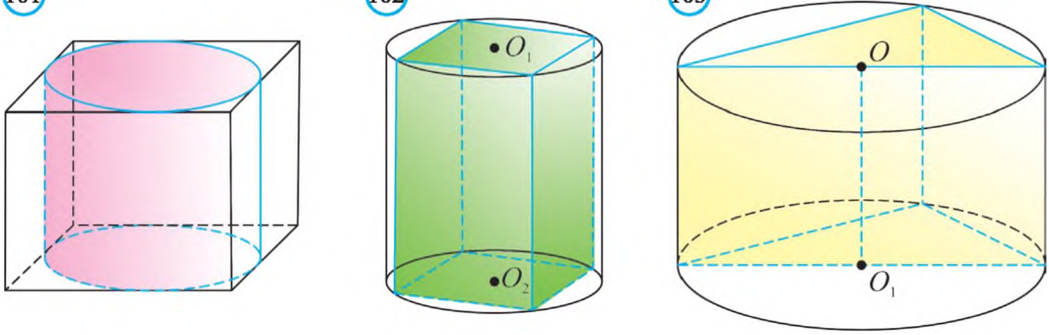
312. 100-súwrette kórsetilgen cilindr bóleginiń kólemin tabıń.

100



313. Tuwrı múyeshli parallelepiped ultanınıń radiusı hám biyikligi 1 ge teń bolgan cilindrge sırtlay sızılǵan (101-súwret).Parallelepipedtiń kólemin tabıń.

101 102 103



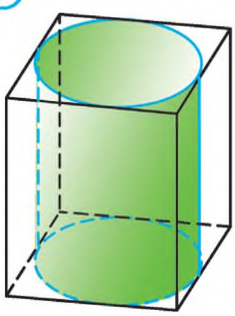
314. Tuwrımúyeshli parallelepiped ultanınıń radiusı 4 ke teń bolǵan cilindrge sırtlay sızılǵan (102-súwret). Parallelepipedtiń kólemi 16 ǵa teń bolsa, cilindrdiń biyikligin tabıń.

315. Tuwrı prizmanıń ultanı katetleri 6 hám 8 bolǵan tuwrımúyeshli úshmúyeshlikten ibarat, al qaptal qabırǵaları 5 ke teń (103-súwret). Bul prizmaǵa sırtlay sızılǵan cilindrdiń kólemin tabıń.

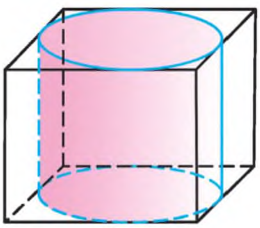
316. Tuwrı prizmanıń ultanı – tárepi 2 ge teń bolǵan kvadrattan ibarat, qaptal qabırǵaları 2 ge teń. Bul prizmaǵa sırtlay sızılǵan cilindr kólemin tabıń.

317. Tórtmúyeshli tuwrı prizma ultanınıń radiusı 2 ge teń bolǵan cilindrge sırtlay sızılǵan (104-súwret). Prizma qaptal betiniń maydanı 48 ge teń bolsa, cilindrdiń biyikligin tabıń.

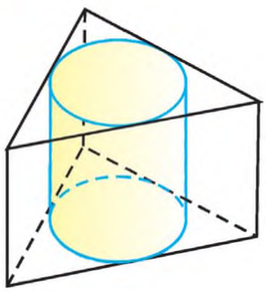
104



105



106

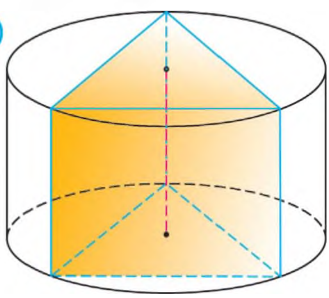


318. Durıs tórtmúyeshli prizma, ultanınıń radiusı hám biyikligi 1 ge teń bolǵan cilindrge sırtlay sızılǵan (105-súwret). Prizma qaptal betiniń maydanın tabıń.

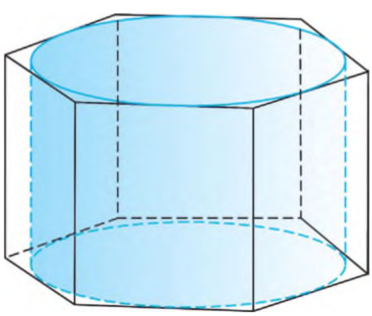
319. Úshmúyeshli durıs prizma, ultanınıń radiusı $\sqrt{3}$ ke hám biyikligi 2 ge teń bolǵan cilindrge sırtlay sızılǵan (106-súwret).Prizma qaptal betiniń maydanın tabıń.

320. Úshmúyeshli durıs prizma, ultanınıń radiusı $2\sqrt{3}$ ke hám biyikligi 2 ge teń bolǵan cilindrge ishley sızılǵan (107-súwret). Prizma qaptal betiniń maydanın tabıń.

107



108



321. Altımúyeshli durıs prizma, ultanınıń radiusı $\sqrt{3}$ ke hám biyikligi 2 ge teń bolǵan cilindrge sırtlay sızılǵan (108-súwret). Prizma qaptal betiniń maydanın tabıń.

322*. 109-súwrette kórsetilgen detaldıń kólemin tabıń.

323*. Uzınlıǵı 10 m, ultanınıń diametri 1 m bolǵan cilindr formasındaǵı trubanıń sırtqı betin 1 mm qalıńlıqtaǵı boyaw menen boyaw ushın qansha boyaw kerek boladı?

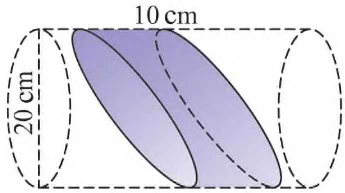
324*. 110-súwrette kórsetilgen shıǵanaqlı trubanıń: a) qaptal beti maydanın; b) kólemin tabıń ($\pi \approx 3$ dep alıń).

325*. Shoyın trubanıń uzınlıǵı 2 m, sırtqı diametri 20 cm. Truba diywalınıń qalıńlıǵı 2 cm hám shoyınnıń salıstırmalı tıǵızlıǵı 7,5 g/cm^3 bolsa, onıń massasın tabıń.

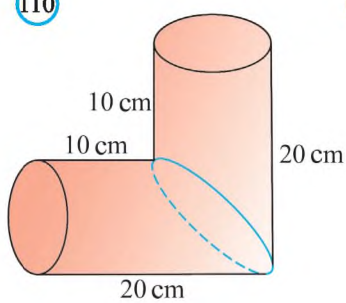
326*. 111-súwretten paydalanıp, qıya cilindr ushın $S \cdot h = Q \cdot l$ teńlik orınlı bolıwın tiykarlań.

327*. 112-súwrette kórsetilgen cilindr betiniń A noqatınan B noqatına alıp barıwshı eń qısqa joldıń uzınlıǵın tabıń. (Kórsetpe: cilindr jayılmasınan paydalanıń.)

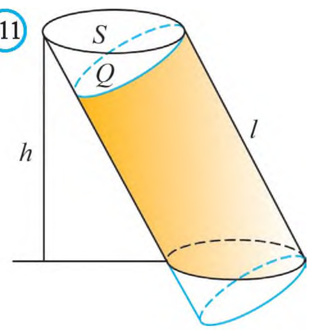
109



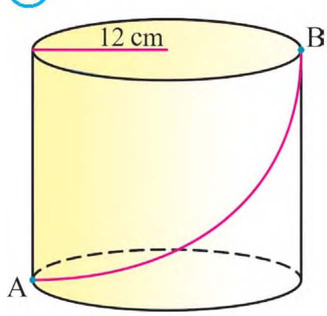
110



111

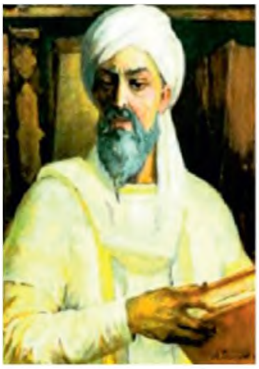


112



Tarıyxıy maǵlıwmatlar

Ábiw Rayxan Beruniydiń «Astronomiya ónerinen baslanǵısh maǵlıwmat beriwshi kitap» (qısqasha «Astronomiya») atlı shıǵarmasınıń geometriyaǵa tiyisli bóliminde stereometriyaǵa kirisiw ushın keńisliktegi figuralardıń tómendegi táriypleri keltiriledi.



Ábiw Áliy ibn Sina

Kub – denelik forma bolıp, nardanıń zarigine uqsaydı, altı tárepinen altı kvadrat penen shegaralanǵan.

Prizma – tolıq figura bolıp, qaptal tárepinen kvadrat yamasa tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı tegislikler menen, tómeni hám ústinen eki úshmúyeshlik penen shegaralanǵan.

Beruniy bergen bul táriypinde prizmanıń jeke jaǵdayı, yaǵnıy úshmúyeshli prizmanıń táriypi keltirilgen.

Ǵiyosiddin al-Koshiy

Ábiw Rayxan Beruniydiń «Qonuni Ma'sudiy» kitabı 1037- jılı jazılǵan bolıp, onda parallelepiped, prizmanıń kólemlerin tabıw qaǵıydaları: «Eger dene tórtmúyeshli bolmasa yamasa basqa túrde bolsa, onıń ólshemi tómendegishe: onıń maydanın bilip al, onı tereńlikke kóbeyt, nátiyjede kólem payda boladı» tárizinde berilgen.

Ábiw Áliy ibn Sina «Donishnoma» atlı shıǵarmasınıń «Geometryalıq denelerge baylanıslı tiykarlar» babında deneniń hám úshmúyeshli prizmanıń táriypin beredi hám de eki prizmanıń óz ara teń bolıw shártlerin bayan etedi. Ibn Sina prizmanı tómendegishe táriypleydi: «Prizma eki úshmúyeshli tegis figuralar hám tárepleri óz ara parallel úsh tegis figuralar menen shegaralanǵan dene esaplanadı».

Ǵiyosiddin Jamshid ibn Masud al-Koshiydiń «Hisob kitobi» atlı shıǵarmasında betlerdiń maydanların hám denelerdiń kólemlerin esaplawdıń kóplegen qaǵıydaları keltirilgen. Ol matematika, geometriya, trigonometriya, mexanika hám astronomiya sıyaqlı pánlerdi tereń bilgenligi ushın, Ulıǵbektiń itibarın hám húrmetine erisken. Al-Koshiy kópmúyeshlikler menen bir qatarda prizmalar, piramidalar, cilindrler, konuslar, kesik konuslardı da izertlegen.

9. BAPTÍ TÁKIRARLAWǴA BAYLANÍSLÍ ÁMELIY SHÍNÍǴÍWLAR

9.1. 2- test jumısı

1. Kubtıń neshe simmetriya tegisligi bar?

A) 8; B) 9; C) 7; D) 10.

2. Eger kub diagonallıq kesiminiń maydanı $2\sqrt{2}$ ge teń bolsa, onıń kólemin tabıń.

A) $2\sqrt{2}$; B) $\sqrt{7}$; C) $4\sqrt{2}$; D) $5\sqrt{2}$.

3. Tuwrımúyeshli parallelepiped ultanınıń tárepleri 7 hám 24. Parallelepipedtiń biyikligi 8. Diagonallıq kesimniń maydanın tabıń.

A) 168; B) 1344; C) 100; D) 200.

4. Durıs tórtmúyeshli prizmanıń diagonalı 4 ke teń bolıp, qaptal jaǵı menen 30 múyesh payda etedi. Prizmanıń qaptal betin tabıń.

A) $16\sqrt{2}$; B) 16; C) 18; D) $18\sqrt{2}$.

5. Durıs tórtmúyeshli prizma ultanınıń tárepi $\sqrt{2}$ ge, diagonalı menen qaptal jaǵı arasındaǵı múyesh $30°$ qa teń. Prizmanıń kólemin tabıń.

A) $8\sqrt{2}$; B) 4; C) 16; D) $4\sqrt{2}$.

6. Prizmanıń barlıq qabırǵalarınıń sanı 36 bolsa, onıń neshe qaptal jaǵı bar?

A) 12; B) 16; C) 9; D) 10.

7. Qıya prizmanıń qaptal qabırǵası 20 ǵa teń hám ultan tegisligi menen $30°$ múyesh payda etedi. Prizmanıń biyikligin tabıń.

A) 12; B) $10\sqrt{3}$; C) 10; D) $10\sqrt{2}$.

8. Úsh múyeshli tuwrı prizma ultanınıń tárepleri 15, 20 hám 25 ke, qaptal qabırǵası ultanınıń biyikligine teń. Prizmanıń kólemin tabıń.

A) 600; B) 750; C) 1800; D) 1200.

9. Durıs altımúyeshli prizmanıń eń úlken diagonalı 8 ge teń hám ol qaptal qabırǵası menen $30°$ múyesh jasaydı. Prizmanıń kólemin tabıń.

A) 72; B) 64; C) 76; D) 80.

10. Kósherlik kesiminiń maydanı 10 ǵa teń bolǵan cilindrdiń qaptal betiniń maydanın tabıń.

A) 10π; B) 20π; C) 30π; D) 15π.

11. Cilindrdiń biyikligi 8 ge, qaptal beti jayılmasınıń diagonalı 10 ǵa teń. Cilindrdiń qaptal betiniń maydanın tabıń.

A) 48; B) 48π; C) 24; D) 48π.

12. Tárepleri 2 hám 4 ke teń bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik, óziniń úlken tárepi dógereginde aylanadı. Payda bolǵan deneniń tolıq betin tabıń.

A) 22π; B) 23π; C) 24π; D) 20π.

13. Cilindrdiń qaptal betiniń maydanı 72π ge teń hám ol jayılǵanda payda bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik diagonalı ultanı menen 45° múyesh payda etedi. Cilindrdiń ultanınıń radiusın tabıń.

A) 5; B) 4; C) 6; D) 8.

14. Cilindr ultanınıń radiusı eki ese arttırılsa, onıń kólemi neshe ese artadı?

A) 4; B) 2; C) 3; D) 6.

15. Cilindrdiń kólemi 120π ge, qaptal beti 60π ge teń. Cilindrdiń ultanınıń radiusın tabıń.

A) 4; B) 5; C) 6; D) 4; 2.

16. Cilindrdiń biyikligi 5 ke, ultanına ishley sızılǵan durıs úshmúyeshliktiń tárepi $3\sqrt{3}$ ke teń. Cilindrdiń kólemin tabıń.

A) 25π; B) 35π; C) 45π; D) 40π.

17. Cilindrdiń kósherlik kesimi, diagonalı 12 ge teń bolǵan kvadrattan ibarat. Onıń kolemin tabıń.

A) $108\sqrt{2}\pi$; B) $54\sqrt{2}\pi$; C) $36\sqrt{2}\pi$; D) $216\sqrt{2}\pi$.

18. Cilindrdiń tolıq beti 24π ge, al qaptal beti 6π ge teń. Usı cilindrdiń kólemin tabıń.

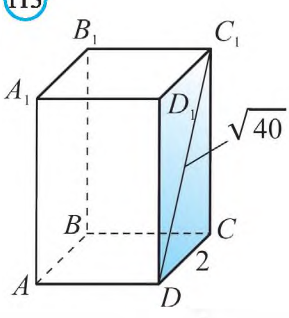
A) 7π; B) 11π; C) 8π; D) 9π.

9.2. Máseleler

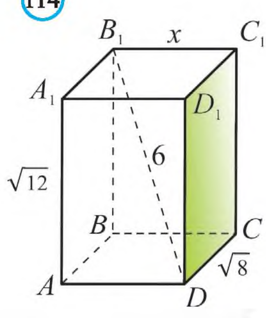
328. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedte (113-súwret) $DC_1=\sqrt{40}$, $DC=2$, $P_{ABCD}=10$. Parallelepipedtiń diagonalın tabıń.

329. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped. 114-súwrette berilgen maǵlıwmatlar boyınsha, B_1C_1 qabırǵasınıń uzınlıǵın tabıń.

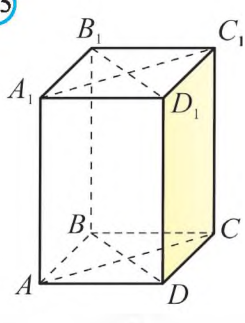
113



114



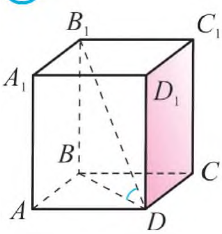
115



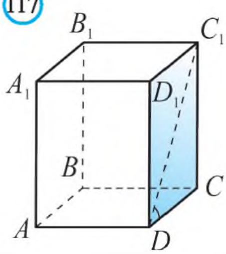
330. Tuwrı prizmanıń ultanı $ABCD$ romb (115-súwret). Prizmanıń diagonallıq kesimleriniń maydanı 60 hám 80 ge, biyikligi 10 ǵa teń. Prizmanıń qaptal betin tabıń.

331. Tuwrı prizmaniń ultanı $ABCD$ romb. Prizmanıń diagonallıq kesimleriniń maydanı 24 hám 32 ge, biyikligi 4 ke teń. Prizmanıń qaptal betin tabıń.

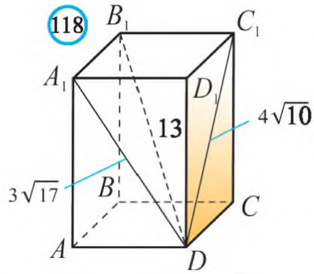
116



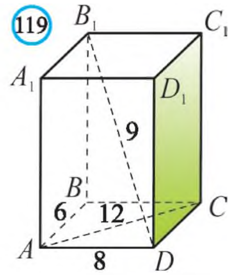
117



118



119



332. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ durıs prizmada (116-súwret) $\angle B_1DB = 45°$, $S_{\text{tolıq}} = 32(2\sqrt{2}+1)$. AD nı tabıń.

333. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ durıs prizma (117-súwret) $\angle C_1DC = 60°$, $S_{\text{tolıq}} = 128(2\sqrt{3}+1)$. AD nı tabıń.

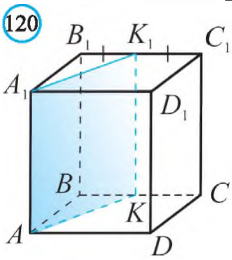
334. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped (118-súwret) $DB_1 = 13$, $DA_1 = 3\sqrt{17}$, $DC_1 = 4\sqrt{10}$. Parallelepipedtiń qaptal betiniń maydanın tabıń.

335. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped (119-súwret) $AB = 6$, $AD = 8$, $DB_1 = 9$. Parallelepipedtiń qaptal betiniń maydanın tabıń.

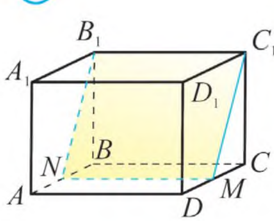
336. K noqatı BC qabırǵasınıń ortası (120-súwret). $ABKA_1B_1K_1$ prizma kóleminiń $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped kólemine qatnasın tabıń.

337. N hám M noqatları parallelepiped qabırǵalarınıń ortaları (121-súwret). $AA_1B_1NDD_1C_1M$ prizma kóleminiń $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped kólemine qatnasın tabıń.

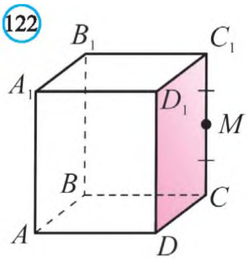
120



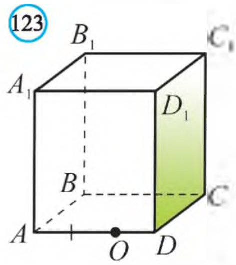
121



122



123



338. Tórt múyeshli durıs prizma qaptal betiniń maydanı 72 cm^2 qa, ultanınıń maydanı 64 cm^2 qa teń. Prizmanıń kólemin tabıń.

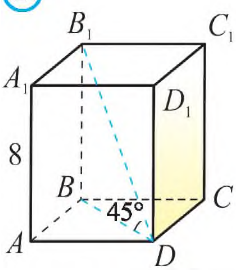
339. Tórt múyeshli durıs prizma ultanınıń perimetri 12 cm, qaptal jaǵınıń perimetri 18 cm ge teń. Prizmanıń kólemin tabıń.

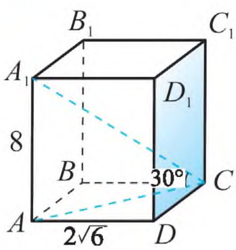
340. Kub berilgen (122-súwret). $CM = MC_1$ hám ADM tegislik kubtı eki bólekke ajıratadı. Kubtıń úlken bólegi kóleminiń kishi bólegi kólemine qatnasın tabıń.

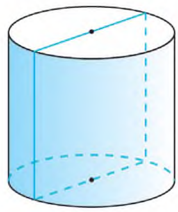
341*. Kub berilgen (123-súwret). $AO : OD = 2 : 1$ hám BB_1O tegislik kubtı eki bólekke ajıratadı. Eger kubtıń kishi bóleginiń kólemi 6 ǵa teń bolsa, kubtıń kólemin tabıń.

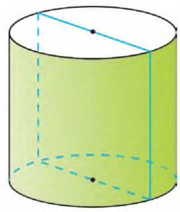
342*. Tórtmúyeshli durıs prizmanıń biyikligi 8 ge teń, diagonalı ultan tegisligine 45° múyesh jasap qıyalanǵan (124-súwret). Prizmanıń kólemin tabıń.

343*. Tórtmúyeshli durıs prizmanıń ultanınıń tárepi $2\sqrt{6}$ ǵa, diagonalı ultan tegisligi menen 30° múyesh jasaydı (125-súwret). Prizmanıń kólemin tabıń.

124


125


126


127


344. Cilindrdiń qaptal betiniń maydanı 91π ge teń (126-súwret). Cilindr kósherlik kesiminiń maydanın tabıń.

345. Cilindrdiń kósherlik kesimi, maydanı 173 ke teń bolǵan kvadrattan ibarat (127-súwret). Cilindrdiń qaptal betiniń maydanın tabıń.

346. Cilindrdiń biyikligi 24 ke, kósherlik kesiminiń diagonalı 26 ǵa teń. Cilindrdiń kólemin tabıń.

347. Cilindr kósherlik kesiminiń maydanı 10 ǵa teń. Ultan sheńberiniń uzınlıǵı 8 ge teń. Cilindrdiń kólemin tabıń.

348. Cilindrdiń radiusı 3 ke, qaptal betiniń maydanı 200 ge teń. Cilindrdiń kólemin tabıń.

9.3. 2-qadaǵalaw jumısınıń úlgisi

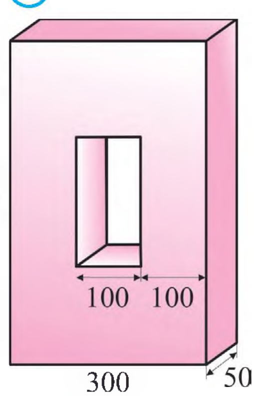
1. Ekijaqlı múyeshtiń A noqatı onıń qabırǵasınan 10 cm, jaǵınan 5 cm aralıqta jaylasqan. Ekijaqlı múyeshtiń gradus ólshemin tabıń.

2. Altımúyeshli durıs prizmanıń barlıq qabırǵaları 2 ge teń bolsa, onıń tolıq betiniń maydanın tabıń.

3. Ultanınıń diamerti 18 m hám biyikligi 7 m bolǵan cilindr formasındaǵı cisterna neft penen toltırılǵan. Eger nefttiń tıǵızlıǵı 0,85 g/cm^3 bolsa, bul cisternadaǵı nefttiń massası neshe tonna?

4. Hár bir qabırǵasınıń uzınlıǵı 4 cm ge teń bolǵan durıs altımúyeshli prizmaǵa ishley sızılǵan cilindrdiń kólemin tabıń.

5. (*Jaqsı ózlestiretuǵın oqıwshılar ushın qosımsha másele.*) 128-súwrette ólshemler mm lerde berilgen detaldıń tolıq betin hám kólemin tabıń.

128


Trigonometriyalıq funkciyalardıń juwıq mánisleriniń kestesi

A	sin A	tg A	A	sin A	tg A	A	sin A	tg A
0°	0	0	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

JUWAPLAR

1- bap juwapları

3. $A(5; 7; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(5; 0; 0)$, $D(4; 0; 4)$, $E(0; 5; 0)$, $F(0; 0; -2)$. **6.** $(3; 2; 0)$, $(3; 0; 4)$, $(0; 2; 4)$. **8.** $\sqrt{26}$. **9.** a) 3, 3, 3; b) $3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{2}$. **10.** 2, 3, 1. **11.** $(3; 3; 3)$, $(-3; 3; 3)$, $(3; -3; 3)$, $(3; 3; -3)$, $(-3; -3; 3)$, $(-3; 3; -3)$, $(3; -3; -3)$, $(-3; -3; -3)$. **12.** $O(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $A(2; 2; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $O_1(0; 0; -2)$, $B_1(2; 0; -2)$, $A_1(2; 2; -2)$, $C_1(0; 2; -2)$. **13.** D noqatı. **14.** $3\sqrt{6}$. **15.** joq. **17.** *c)* teń qaptallı, $P=6\ (1+\sqrt{3})$, $S = 9\sqrt{2}$. **18.** $(-0{,}25; 0{,}25; 0)$. **19.** $D_1(1; -1; 1)$, $A_1(1; 1; -1)$, $B_1(-1; 1; -1)$, $D_1(1; -1; -1)$. **21.** $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2\leq 25$. **22.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$; $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2\leq 9$. **23.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$. **25.** 1)$(0; 1; 0)$; 2) $(1; 1; 1)$; 3) $(0; 0; 2)$, 4) $(-0{,}7; 0{,}1; 0{,}6)$; 5) $(2\sqrt{3}; 1{,}5; 1)$. **28.** $A(5;-4;0)$, $B(-7;5;6)$, **31.** $K\left(0;-5;\dfrac{17}{2}\right)$. **32.** a) $D(-1; -3; -9)$.

33. *a)* $M(-1; 2; 0)$; *c)* $M(3;\frac{3}{4}; 0)$. **35.** $L(\frac{25}{8};\frac{33}{8};\frac{9}{4})$. **36.** $\frac{4\sqrt{2}}{5}$. **37.** a) $\sqrt{2}$; b) 30°; 30°; 120°; c) $2\sqrt{3}$. **38.** $MK=\frac{\sqrt{73}}{3}$. **39.** $A(5; 4; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(5; 0; 0)$, $D(4; 0; 4)$. **40.** $\overline{OA}=(1; 1; 1)$, $\overline{OB}=(-1; 0; 1)$, $\overline{OC}=(0; 1; 1)$, $\overline{BO}=(1; 0; -1)$, $\overline{CO}=(0; -1; -1)$, $\overline{AB}=(-2; -1; 0)$. **42.** a) $\overline{AB}=(2; 5; 3)$, b) $\overline{AB}=(4; -6; 2)$. **43.** $|\bar{a}|=\sqrt{3}$; $|\bar{b}|=2\sqrt{5}$, $|\bar{c}|=\sqrt{14}$, $|\bar{d}|=\sqrt{30}$. **44.** ± 3. **45.** a) $\bar{a}(3; 6; -3)$, b) $\bar{a}(-3; -6; 3)$. **46.** a) 1 yamasa -1; b) 3 yamasa -1; c) 2 yamasa -4; d) 3 yamasa 5/3. **48.** $D(-2;0;1)$. **50.** $n=\frac{4}{3}$; $m=\frac{3}{2}$. **52.** a) $D(3;0;0)$. **56.** $\bar{c}(-3;-4;8)$, $|\bar{c}|=\sqrt{89}$; 2) $\bar{c}(4;5;5)$, $|\bar{c}|=\sqrt{66}$. **57.** $\bar{c}(-3; 4; 0)$, $|\bar{c}|=5$; 2) $\bar{c}(0; 2; 6)$, $|\bar{c}|=2\sqrt{10}$. **59.** $\bar{a}=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{d}=\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$. **60.** $\sqrt{59}$, $\sqrt{219}$, $\sqrt{122}$, $\sqrt{918}$. **63.** $AC = AO + OC = 4i + 2k$, $AC(-4; 0; 2)$; $CB = CO + OB = 2k + 9j$, $CB\ (0; 9; 2)$; $AB = AO + OB = -4i + 9j$, $AB(-4; 7; 0)$. **65.** $\approx 180N$. **66.** a) 60°; b) 30°; c) 90°; d) 60°; e) 45°. **67.** a) -6; b) 3; c) -6; d) 3. **68.** a) 40°; b) 140°; c) 150°. **69.** a) 30; b) 3; c) 15; d) -28. **70.** a) 1/3; b) -1; c) 2; d) 4. **71.** a) 16. **75.** a) 1; b) 0. **76.** $\overline{BF}=2(\overline{DO}-\overline{DC})$. **77.** $\frac{1}{3}(2\overline{AC}-\overline{AB})$. **78.** $\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC})-\overline{AD}$.

83. a) $(1; -1; 7)$; b) $(-2; 3; 1)$; c) $(0; -4; 4)$. **84.** $\bar{p}(-1; 5; 3)$. **86.** $B(-8; 4; 1)$. **88.** $(2; -5; 9)$; $(-2;-2;7)$; $(6;-12;2)$. **93.** Oxz tegisligine salıstırǵanda. **100.** $(0;-3;1)$. **106.** a) 36 cm; b) 48 cm; c) 6 cm; d) 4 cm. **110.** a) $B(-5; 7{,}5; 12{,}5)$; b) $B(5; -7{,}5; -12{,}5)$; c) $B(-0{,}5; 0{,}75; 1{,}25)$; d) $B(0{,}5; -0{,}75; -1{,}25)$. **111.** a) $B(-2{,}5; 1; 3)$; b) $B(-7; 2; 6)$. **112.** a) $O_1(0; 0; 0)$, $A_1(-4; 0; 0)$, $B_1(0; -4; 0)$, $C_1(0; 0; -4)$; b) $O_1(-4; 0; 0)$, $A_1(4; 0; 0)$, $B_1(-4; 8; 0)$, $C_1(-4; 0; 8)$. **115.** $(2;-3; 3)$. **116.** -3. **117.** $(7; 1; 2)$. **118.** $(1; -2; 3)$. **119.** $(-1; -2; -3)$. **120.** $(1; 2; -3)$. **121.** $(-2; -3; -5)$. **122.** $D(0; 9;-7)$. **123.** $C(2; 0;-8)$. **124.** 19. **125.** $(-7; 7; -7)$. **126.** $(1; 2; 1)$. **127.** $(-2; 7; 1)$. **128.** ± 2. **129.** ± 3. **130.** 13. **131.** 10. **132.** 9. **133.** 0. **134.** -2. **135.** 1. **136.** 4. **137.** 90°. **138.** 4. **139.** -4. **140.** -2; 4. **141.** $8\vec{i}+9\vec{j}-4\vec{k}$.

1- test jumısınıń juwapları

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	D	D	B	D	B	B	A	A	D	B	B	B	C	A	C	B	D	A	C	B	C	D	D	C

1-qadaǵalaw jumısınıń juwapları

1) $(1; 2; -3)$; 2) 13; 3) $\sqrt{2}$; 4) 90°; 5) 1.

2- bap juwapları

142. 47°, 133°, 47°, 133°. **143.** 128°. **144.** 80°. **145.** 90°. **146.** 5 cm, 5 cm. **147.** 12 cm. **148.** 5 cm. **152.** 45°. **153.** 45°. **154.** 80°. **159.** 60°, 45°. **165.** a) 4, 10; b) 5, 12. **166.** Yo'q. **170.** 6, kub. **171.** 15 ta. **172.** 9 ta. **173.** 180 ta. **174.** 24 cm^2. **175.** 44 cm^2. **176.** 76,8 cm^2. **177.** 17,64 cm. **178.** $4\sqrt{3}cm^2$, 4 cm. **179.** 124 dm^2. **180.** 20 m^2, 30 m^2. **181.** 8 cm, 8 cm. **182.** 13 cm, 9 cm. **184.** 4500 cm^2. **185.** 7,5. **186.** 4. **187.** 480 cm^2. **188.** $5\sqrt{2}$. **189.** 45 cm^2. **190.** 144. **191.** a)18; b)76; c) 110; d) 132; e) 48; f) 96; g) 124. **192.** a) 146; b) 126; c) 108; d) 146. **193.** 84 cm. **194.**$3\sqrt{2}$ cm^2. **195.** 216 cm^2. **196.** a) 58; b) 62; c) 94. **197.** a) 38; b) 92; c) 48. **198.** ≈68 m^2. **199.** 104 cm. **200.** 68 cm^2. **201.** 78 cm^2. **204.** 5120 cm^3. **207.** 144. **209.** 8. **210.** 5. **211.** 6. **212.** 3. **213.** 24. **214.** 2. **215.** 8. **216.** 8. **217.** 72. **218.** 4. **219.** 27 litr. **220.** 4. **221.** 60 cm^2. **222.** $\frac{(S-ab)ab}{4(a+b)}$. **223.** 30 m. **224.** 1200. **225.** a) 4; b) 40; c) 71; d) 88; e) 18; f) 33; g) 78. **226.** a) 90; b) 77; c) 54; d) 96. **227.** 6 m^3. **228.** a) 21; b) 26; c) 58. **230.** 6 m^3. **231.** $\sqrt{2}$ m^3. **232.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **233.** $2\sqrt{\sin 3\alpha \sin^3\alpha}$. **234.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **235.** a) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$; b) a^2b; c) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{4}$. **237.** 3060 m^3. **238.** 3 cm^3. **239.** $\frac{a^3}{8}$. **240.** $3\sqrt{3}$ m^3. **241.** 1 márte. **243.** 24 cm^3. **245.** 12 cm^3. **246.** 2 cm. **247.** $\frac{ac\sqrt{12a^2-3c^2}}{8}$. **248.** $\frac{h^3 \sin}{2t\, \gamma ctg\beta}$. **249.** 6048 m^3/saat. **250.** 35200 m^3. **251.** 0,5 g/cm^3. **252.** 150. **253.** 42. **254.** 961. **255.** 13. **256.** 90. **257.** 3315 g. **258.** 60 m^2. **259.** 24. **260.** 24 cm^3. **261.** 1927,2 g. **262.** 1927,2 g. **263.** 960 m^3. **264.** 144 g. **265.** 19,3125 g/cm^3. **266.** 440 m^3. **267.** 0,0127 m^3. **271.** $(y+w+z)yx$. **274.** $a:b:c$. **277.** 240π cm^2 , 280π cm^2. **278.** 48 cm^2. **279.** 5 cm. **280.** 128 cm^2. **281.** $\pi Q/4$. **282.** 36π cm^2. **283.** 4π. **284.** 36 cm^2. **285.** 12π. **286.** 64. 6. **287.** 3 dm. **288.** $2\sqrt{34}$ cm. **289.** 3 dm. **290.** 200π, 250π. **291.** 50, 50 +50/π. **292.** 45π cm^3. **293.** 16π cm^2. **294.** 1500 cm^3. **295.** 800 cm^2. **296.** 1000 cm^2. **297.** 5574 cm^2, 1824 cm^2. **298.** 1375π cm^3, 11,375 kg. **299.** 141900 g, 310860 cm^2. **300.** Birinshisinin. **301.** 2041 so'm, 15700 cm^2. **302.** 349,45 cm^2, 492 cm^3, 1747 so'm. **303.** 37680 gellon. **304.** 318 gellon. **306.** 3 cm^3. **307.** 4 cm . **308.** 9 m^3. **309.** 1,125. **311.** a) 45π; b) 3,75π; c) 144π. **312.** a) 14π; b) 937,5π. **313.** 4. **314.** 0,25. **315.** 125π. **316.** 4π. **317.** 3. **318.** 8. **319.** 36. **320.** 36. **321.** 24. **322.** ≈30 m^3. **323.** ≈3000 cm^3. **324.** a) ≈1050 cm^2; b) ≈2250 cm^3. **325.** ≈162 kg. **328.** 7. **329.** 4. **330.** 200. **331.** 160. **332.** 4. **333.** 8. **334.** 168. **336.** 1/3. **337.** 1/3. **338.** 144 m^3. **339.** 56 cm^3. **340.** 6. **341.** 2. **342.** 256. **343.** 96. **344.** 91. **345.** 173 π. **346.** 600π. **347.** 20. **348.** 300.

2- test jumısınıń juwapları

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
B	A	D	A	B	A	C	C	A	A	A	C	C	A	A	C	A	D

2- qadaǵalaw jumısınıń juwapları

1) 30^0; 2) $2\sqrt{3}$ +24; 3) 1513 *l*; 4) 64π cm^3; 5) 35 dm^2, 6,5 dm^3.

Esletpe. *Geometriyaǵa baylanıslı qıyınıraq máselelerdiń tártip nomeri juldızsha menen, úyde orınlaw máslahát etilgen máseleler qızıl reńde berilgen.*

Sabaqlıqtı dúziwde paydalanılǵan hám qosımsha úyreniwge usınıs etilgen oqıw-metodikalıq ádebiyatlar hám elektron resurslar

1. *А.В. Погорелов* “Геометрия 10–11”, учебник, Москва. “Просвещение”, 2009.
2. *Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский.* “Математика 11”, учебник, Минск, 2013.
3. *И.М. Смирнова, В.А. Смирнов* Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
4. *О.Я. Билянина и др.* “Геометрия 11” учебник, Киев, “Генеза”, 2010.
5. *Daniel C.Alexander,* Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Ceńage Learniń, 2011.
6. *Mal Coad and others,* Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
7. *Norjigitov X., Mirzayev Ch.* Stereometrik masallarni yechish. Akademik litseylar ushıno‘quv qo‘llanma. –T., 2004.
8. *Israilov I., Pashayev Z.* Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism. –T.: O‘qituvchi, 2005.
9. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirliginiń axborot ta’lim portali.
10. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot tálimi portalı.
11. http://www.ixl.com – Aralıqtan turıp oqıtıw saytı (inglis tilinde).
12. http://www.mathkań.ru – «Kenguru» xalıqaralıq matematikler tańlawı saytı (rus tilinde).
13. http://www.khanakademy.org – «Xon akademiyası» aralıqtan tálim saytı (inglis tilinde).
14. http://www.brilliant.org – Matematikadan aralıq tálim saytı (ingliz tilinde).

MAZMUNÍ

I BAP. KEŃISLIKTE KOORDINATALAR SISTEMASI HÁM VEKTORLAR

II BAP. PRIZMA HÁM CILINDR

Algebra hám analiz asoslari: M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov.

Geometriya: B.Q. Xaydarov.

MATEMATIKA 11

ALGEBRA HÁM ANALIZ ASOSLARI, GEOMETRIYA

I QISM

O'rta ta'lim muassasalarinıń 11-sinfi hám o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi muassasalari o'quvchilari uchun darslik

1- nashr

Redaktor: R. Abbazov

Ózbek tilinen awdarǵanlar: K. Sagidullaev, M. Berdiev

Texnikalıq redaktor: A. Abdusalomov

Kompyuter operatorı: A. Abdusalomov

Licenziya AI № 296 22.05.2017.

Basıwǵa ruqsat etildi 31.07.2018 Formatı 70x100 1/16.

"TimesNewRoman" garniturası. Kólemi: 12,0 baspa tab.

15,48 shártli baspa tab. 11,0 esap baspa tab

Nusqası 10452 dana

«Credo Print Group» JSHJ baspaxanasında basıldı.

Original-maket «Zamin Nashr» JSHJ da tayarlandı. 100053, Tashkent q.

Boǵishamol kóshesi, 160. Tel: 235-44-82

Buyırtpa № 1953.