MATEMATIKA 10

ALGEBRA WE ANALIZIŇ ESASLARY
GEOMETRIÝA
II BÖLÜM

Orta bilim berýän mekdepleriň 10-njy synp okuwçylary üçin derslik

1-nji neşir

Özbegistan Respublikasynyň Halk bilimi ministrligi
tarapyndan tassyklanan

EXTREMUM PRESS
DAŞKENT – 2017

UO‘K 51(075.3)
KBK 22.1ya721
M 51

Algebra we analiziň esaslary bölüminiň awtorlary:

M.A. Mirzaahmedow, Ş.N. Ismailow, A.K. Amanow.

Geometriýa bölüminiň awtory:

B.K. Haýdarow

Syn ýazanlar:

B.K. Beşimow – Mürze Ulugbek adyndaky Özbegistan Milli Uniwersitetiniň "Geometriýa we topologiýa" kafedrasynyň müdiri, fizika-matematika ylymlarynyň doktory.

M.D. Pardaýewa – Respublikan Tälim merkeziniň direktorynyň orunbasary.

D.E. Dawletow – Nyzamy adyndaky DDPU "Matematikany okatmagyň metodikasy" kafedrasynyň müdiri, fizika-matematika ylymlarynyň kandidaty.

G.M. Rahimow – DIOHMII ýanyndaky akademik liseýiň mugallymy, fizika-matematika ylymlarynyň kandidaty, dosent.

A.A. Akmalow – Daşkent şäher HTIGTHKI prorektory, pedagogika ylymlarynyň kandidaty, dosent.

Dersligiň "Algebra we analiziň esaslary" bölüminde ulanylan belgiler we olaryň düşündirişi:

△	– meseläni çözmek (subut etmek) başlandy	▲	– meseläni çözmek (subut etmek) gutardy
(!)	– barlag işleri we test (synag) gönükmeleri	(?)	– soraglar we ýumuşlar
	– esasy maglumat		– çylşyrymlyrak gönükmeler

Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan çap edildi.

ISBN 978-9943-5057-1-1

III BAP

ELEMENTAR FUNKSIÝALAR WE DEŇLEMELER

47-49 GATNAŞYKLAR WE ŞÖHLELENDIRMELER. FUNKSIÝA

Aşakdaky jedwelde Nýu Ýork şäheriniň aeroportynda awtomaşynlar duralgasynda wagta garap tölenmeli bolan serişde mukdarlary getirilen:

Görnüşi ýaly, tölegiň bahasy wagtyň dowamlylygyna gönüden-göni bagly.

Wagt (t)	Bahasy
0 – 1 sagat	\$5,00
1 – 2 sagat	\$9,00
2 – 3 sagat	\$11,00
3 – 6 sagat	\$13,00
6 – 9 sagat	\$18,00
9 – 12 sagat	\$22,00
12 – 24 sagat	\$28,00

Bu jedwele garap aşakdaky soraga jogap bereliň:

Awtomaşynyň hut bir sagat durmagy üçin näçe pul sarp edilýär?

5 ABŞ dollarymy, 9 ABŞ dollarymy ýa-da 11 ABŞ dollarymy?

Amatsyz ýagdaýa düşmez ýaly meseläni aýdyňlaşdyrmak üçin biz jedweldäki maglumatlary grafik görnüşine getirýäris. Jedweldäki "2–3 sagat" ýazuw "2 sagatdan artyk emma 3 sagatdan artyk däl wagt", ýagny $2 < t \leqslant 3$ aralyk diýip düşünilýär. Onda aşakdaky jedweli alarys:

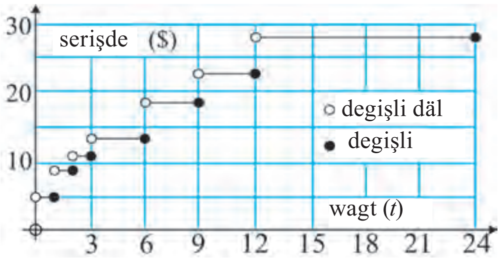
Wagt (t)	**Bahasy**
$0 < t \leqslant 1$ sagat	\$5,00
$1 < t \leqslant 2$ sagat	\$9,00
$2 < t \leqslant 3$ sagat	\$11,00
$3 < t \leqslant 6$ sagat	\$13,00
$6 < t \leqslant 9$ sagat	\$18,00
$9 < t \leqslant 12$ sagat	\$22,00
$12 < t \leqslant 24$ sagat	\$28,00

Matematika dilinde bu jedwel iki üýtgeýjiniň (*wagt* we tölenýän *serişde mukdary*) arasyndaky **gatnaşyga** mysal bolup biler.

Gatnaşyk tertiplenen jübütlikler toplumy hökmünde düşündirilmegi mümkin, meselem

$\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$.

Awtoduralgada $0 < t \leqslant 24$ aralykdaky t wagta garap tölenmeli serişdäniň üýtgeýşi aşakdaky ýaly bolýar:



Gorizontal okdaky üýtgeýjiniň kabul edýän bahalar toplumyna gatnaşygyň *kesgitleniş oblasty* diýilýär.

Meselem, $\{t|0<t\leqslant 24\}$ toplum ýokardaky *wagt* bilen tölenýän *serişde mukdarynyň* arasyndaky gatnaşygyň, $\{-2, 1, 4\}$ toplum bolsa $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$ gatnaşygyň kesgitleniş oblastlary bolýar.

Wertikal okdaky üýtgeýjiniň kabul edýän bahalar toplumyna gatnaşygyň *bahalar toplumy* diýilýär.

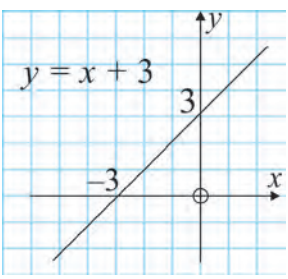
Meselem, $\{5, 9, 11, 13, 18, 22, 28\}$ toplum ýokardaky *wagt* bilen tölenýän serişde *mukdary* arasyndaky gatnaşygyň, $\{3, 5, 6\}$ toplum bolsa
$\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$ gatnaşygyň bahalar toplumlary bolýar.

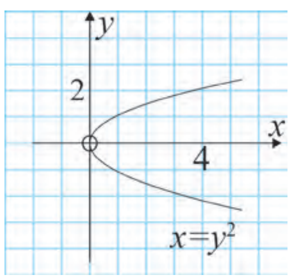
Indi gatnaşyga anygrak kesgitleme bereliň.

Dekart koordinatalar tekizliginde berlen nokatlar toplumyna **gatnaşyk** diýilýär. Köplenç gatnaşyk *x, y* **üýtgeýjiler** gatnaşýan deňleme görnüşinde berilýär.

Meselem, $y=x+3$, $x=y^2$ deňlemeleriň her biri gatnaşygy kesgitleýär.

Bu deňlemeleriň her biri Dekart koordinatalar tekizliginde nokatlar toplumyny emele getirýär.

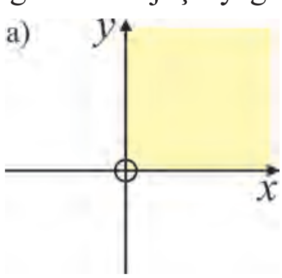




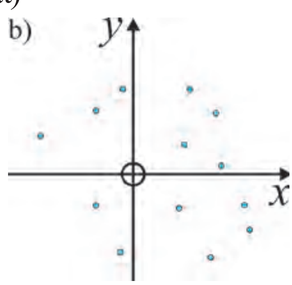
Käbir gatnaşyklary deňlemeleriň kömeginde ýazyp bolmaýar.

Meselem, $x > 0$, $y > 0$ şerti kanagatlandyrýan (x, y) nokatlar toplumy (koordinatalar tekizliginiň birinji çärýegi *a* surat)

a)



b)



ýa-da şu nokatlar toplumyny (*b* surat) deňlemeler kömeginde ýazyp bolmaýar.

Eger gatnaşykda birinji koordinatasy deň bolan iki dürli nokat bar bolmasa, bu gatnaşyk **şöhlelendirme** ýa-da **funksiýa** diýilýär.

Diýmek, funksiýa – gatnaşygyň mahsus görnüşi eken.

Berlen gatnaşygyň funksiýadygyny barlamagyň iki usulyny getirýäris.

Algebraik usul

Bu usul gatnaşyk deňlemäniň kömeginde berlen ýagdaýlarda ulanylýar. Munda berlen deňlemä x we y-iň islendik bahasyny goýanda x-iň her bir bahasy üçin y-iň bahasy alynsa, beýle gatnaşyk funksiýa bolýar.

Meselem, $y = 3x–2$ deňlemä x-iň islendik bahasyny goýsak, y-iň ýeke-täk bahasy alynýar. Diýmek, bu deňlemäniň kömeginde kesgitlenen gatnaşyk funksiýa bolýar.

Şunuň bilen birlikde $x = y^2$ deňleme bilen kesgitlenen gatnaşyk funksiýa bolmaýar, çünki, meselem, $x = 4$ bahasyny goýsak, iki $y = \pm 2$ baha alynýar.

Grafiki usul

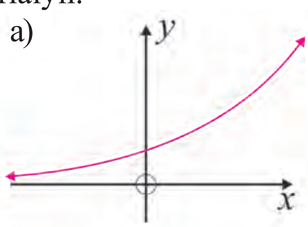
Gatnaşyk Dekart koordinatalar sistemasynda toplum görnüşinde berlen bolsun.

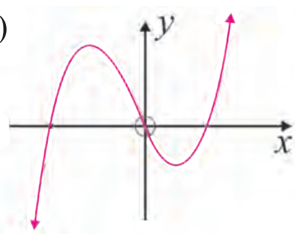
Eger biz ähli mümkin bolan wertikal göni çyzyklary çyzsak, bu göni çyzyklardan islendiginiň berlen gatnaşyk bilen kesişme nokatlarynyň sany birden geçmese, onda bu gatnaşyk funksiýa bolýar. Tersine, eger nähilidir wertikal göni çyzygyň berlen gatnaşyk bilen kesişme nokatlaryň sany birden köp bolsa, onda gatnaşyk funksiýa bolmaýar.

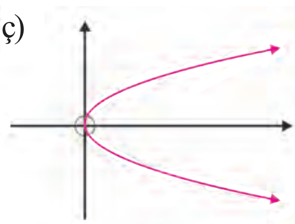
Munda biz aşakdakylara şertli ýagdaýda ylalaşýarys:

- Eger çyzykda kiçi ak reňkdäki tegelejik belgilenen bolsa, (—○—), beýle nokat çyzyga degişli däl.
- Eger çyzykda kiçi gara reňkdäki tegelejik belgilenen bolsa, (——●), bu nokat çyzyga degişli.
- ——→ görnüşdäki (strelka) ok çyzyk şu ugurda çäksiz dowam etdirilmegi mümkinligini aňladýar.

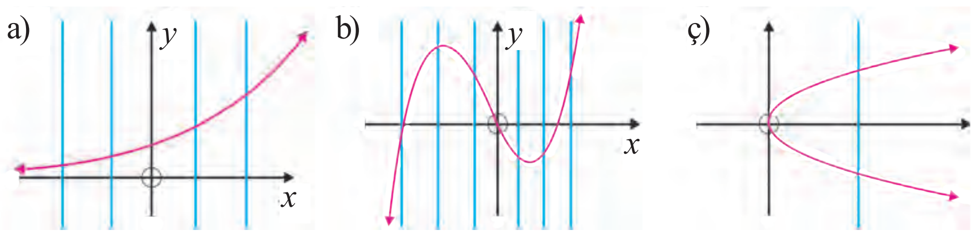
1-nji mysal. Aşakdaky gatnaşyklardan haýsy biri funksiýa bolýandygyny barlalyň:

a)


b)


ç)


△ Wertikal göni çyzyklary çyzyp,



aşakdaky netijä gelýäris:

a) we b) gatnaşyklardan her biri funksiýa bolýar (çünki islendik wertikal göni çyzyk onuň bilen iň köpi bir nokatda kesişýär), ç) gatnaşyk bolsa funksiýa däl, çünki ony iki nokatda kesýän wertikal göni çyzyk bar.

Hasaplama enjamy (gurluşy) aşakdaky algoritm boýunça işlesin:

1-nji ädim. Haýsy-da bolsa bir san girizilýär.

2-nji ädim. Girizilen san 2-ä köpeldilýär.

3-nji ädim. Netijä 3 goşulýar.

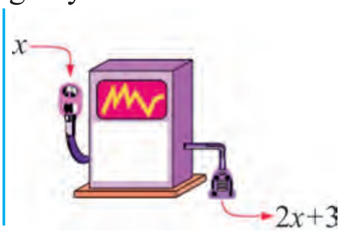
Meselem, enjama 4 sany girizilse, netijede $4 \cdot 2 + 3 = 11$ sany alynýar.

Edil şeýle enjama (-4) sany girizilse, netijede $2 \cdot (-4) + 3 = -5$ sany alynýar.

Umumy ýagdaýda, enjama x sany girizilse, netijede ýeke-täk $2x + 3$ sany alynýar.

Görnüşi ýaly, enjama nähilidir x san girizilse, netijede ýeke-täk $2x + 3$ baha, alynýar.

Diýmek, bu enjam işleýän algoritm funksiýany kesgitleýär.



Bu ýagdaý $f\colon x \mapsto 2x+3$, $f(x) = 2x+3$ ýa-da $y = 2x+3$ ýaly ýazylýar.

Eger $f(x) = 2x+3$ bolsa, onuň -4 sanyna laýyk bahasy $f(-4)=2(-4)+3=-5$ ýaly tapylýar.

Umumy ýagdaýda, $f(x)$ − funksiýanyň berlen x daky *bahasy* diýlip aýdylýar we bu gatnaşyk $y=f(x)$ ýaly ýazylýar.

2-nji mysal. Eger $f\colon x \mapsto 2x^2-3x$ bolsa: a) $f(5)$; b) $f(-4)$ bahalary tapyň.

$f(x) = 2x^2-3x$ gatnaşyga $x = 5$ we $x = -4$ sanlary goýup olara laýyk bahalary tapýarys:

a) $f(5)=2\cdot(5)^2-3\cdot(5)=2\cdot 25-15=35$; b) $f(-4)=2\cdot(-4)^2-3\cdot(-4)=2\cdot 16+12=44$.

3-nji mysal. Eger $f(x) = 5-x-x^2$ bolsa: a) $f(-x)$; b) $f(x+2)$ bahalary tapyň we netijeleri ýönekeýleşdiriň.

$f(x)=5-x-x^2$ funksiýa x ýerine $-x$ we $x+2$ bahalary goýup, olara laýyk bahalary tapýarys :

a) $f(-x)=5-(-x)-(-x)^2=5+x-x^2$; b) $f(x+2)=5-(x+2)-(x+2)^2=5-x-2-[x^2+4x+4]=$
$=3-x-x^2-4x-4=-x^2-5x-1$.

Soraglar we ýumuşlar

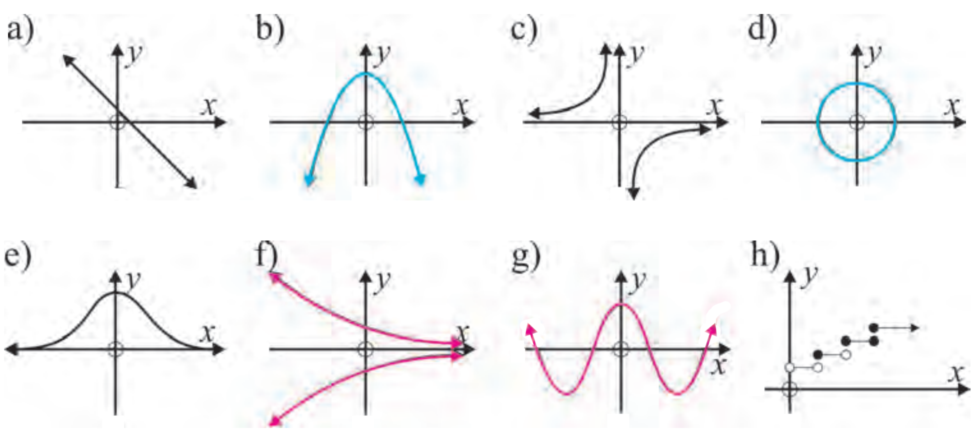
1. Gatnaşyga mysallar getiriň.
2. Şöhlelendirmä ýa-da funksiýa kesgitleme beriň.
3. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny düşündiriň.
4. Funksiýanyň bahalar oblastyny düşündiriň.

Gönükmeler

73. Aşakdaky gatnaşyklardan haýsylary funksiýa bolýar:

a) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 6)\}$;
b) $\{(1, 3), (3, 2), (1, 7), (-1, 4)\}$;
ç) $\{(2, -1), (2, 0), (2, 3), (2, 11)\}$;
d) $\{(7, 6), (5, 6), (3, 6), (-4, 6)\}$;
e) $\{(0, 0), (1, 0), (3, 0), (5, 0)\}$;
f) $\{(0, 0), (0, -2), (0, 2), (0, 4)\}$?

74. Aşakdaky gatnaşyklardan haýsylary funksiýa bolýar?



75. Dekart koordinatalar tekizliginde berlen islendik göni çyzyk funksiýa bolarmy? Jogabyňyzy esaslandyryň.

76. $x^2+y^2=9$ deňleme kömeginde berlen gatnaşyk funksiýa bolarmy?

77. Eger $f: x \mapsto 3x + 2$ bolsa, aşakdaky bahalary tapyň:

A) $f(0)$; B) $f(2)$; Ç) $f(-1)$; D) $f(-5)$; E) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

78. Eger $f: x \mapsto 3x - x^2 + 2$ bolsa, aşakdaky bahalary tapyň:

A) $f(0)$; B) $f(3)$; Ç) $f(-3)$; D) $f(-7)$; E) $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

79. Eger $g: x \mapsto x - \frac{4}{x}$ bolsa, aşakdaky bahalary tapyň:

A) $g(1)$; B) $g(4)$; Ç) $g(-1)$; D) $g(-4)$; E) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

80. Eger $f(x) = 7 - 3x$ bolsa, aşakdaky bahalary tapyň we netijäni ýönekeýleşdiriň.

A) $f(a)$; | B) $f(-a)$; | Ç) $f(a+3)$; | D) $f(b-1)$; | E) $f(x+2)$; | F) $f(x+h)$.

81. Eger $F(x) = 2x^2 + 3x - 1$ bolsa, aşakdaky bahalary tapyň we netijäni ýönekeýleşdiriň.

A) $F(x+4)$; | B) $F(2-x)$; | Ç) $F(-x)$; | D) $F(x^2)$; | E) $F(x^2-1)$; | F) $F(x+h)$.

82. $G(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$ funksiýa üçin:

A) **I** $G(2)$ **II** $G(0)$ **III** $G\left(-\frac{1}{2}\right)$ lary tapyň;

B) Nähili x -larda $G(x)$ bolmaýar?

Ç) $G(x+2)$ -ni tapyň we ýönekeýleşdiriň;

D) x-iň $G(x) = -3$ bolýan x bahasyny tapyň.

83. Funksiýa f harpy bilen belgilenen bolsun. f we $f(x)$ belgileriň manylarynyň arasynda nähili tapawut bar?

84. Könelmek netijesinde nusga köpeldýän enjamyň t ýyldan soň nyrhy $V(t)=9650-860t$ kanunalaýyklyk boýunça üýtgeýär.

A) $V(4)$-i tapyň we onuň manysyny düşündiriň.

B) $V(t)=5780$ bolanda t-ni tapyň. Ýagdaýy düşündiriň.

Ç) Enjam haýsy bahada satyn alnypdyr?

85. Bir koordinatalar tekizliginde $f(2)=1$, $f(5)=3$ bolýan üç dürli funksiýanyň grafiklerini çyzyň.

86. $f(2)=1$ we $f(-3)=11$ bolýan $f(x)=ax+b$ çyzykly funksiýany tapyň.

87. $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$, $f(1)=1$, $f(2)=5$ bolsa, a, b-leri tapyň.

88. $T(0)=-4$, $T(1)=-2$, $T(2)=6$ bolýan $T(x)=ax^2+bx+c$ kwadrat funksiýany tapyň.

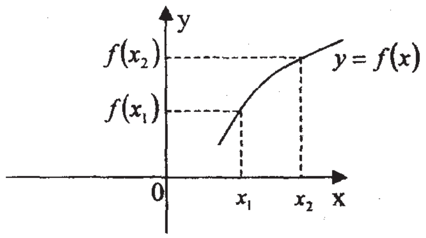
89. $f(x)=2^x$ bolsa, $f(a)\,f(b) = f(a+b)$ deňligi subut ediň.

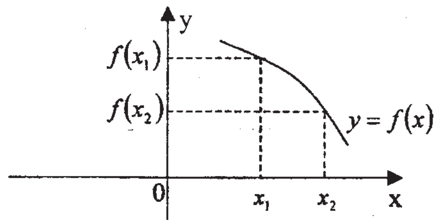
50-51 ELEMENTAR FUNKSIÝALARYŇ MONOTONLUGY, IŇ ULY WE IŇ KIÇI BAHALARY BARADA DÜŞÜNJE

Funksiýanyň monotonlugy

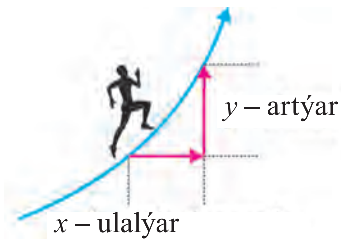
Eger $x_1 < x_2$ deňsizligi kanagatlandyrýan ähli $x_1, x_2 \in I$ üçin $f(x_1) < f(x_2)$ deňsizlik ýerlikli bolsa, I aralykda $y = f(x)$ funksiýa *artýan* diýilýär.

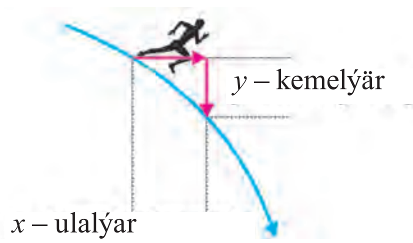
Eger $x_1 < x_2$ deňsizligi kanagatlandyrýan ähli $x_1, x_2 \in I$ üçin $f(x_2) < f(x_1)$ deňsizlik ýerlikli bolsa, I aralykda $y = f(x)$ funksiýa *kemelýän* diýilýär.



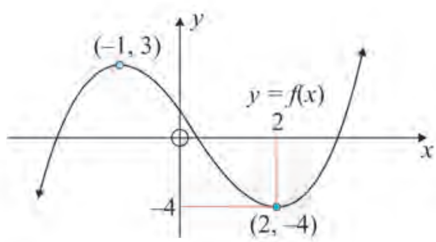


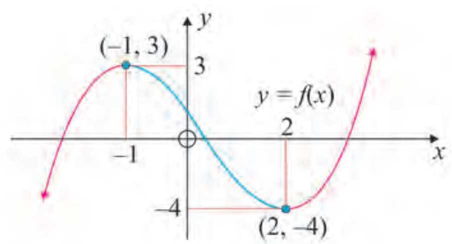
Eger funksiýa artýan bolsa, grafik boýunça çepden saga "hereket" etsek, ordinatalar artýar; funksiýa kemelýän bolsa, ordinatalar kemelýär.





1-nji mysal. Funksiýanyň artyş we kemeliş aralyklaryny tapyň:





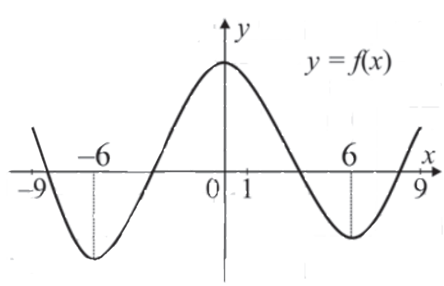
△Eger funksiýa artýan bolsa, grafik boýunça çepden saga hereket etsek, ordinatalar artýar (grafikde gyzyl reňkde berlen). Diýmek, funksiýa $x \leqslant -1$ we $x \geqslant 2$ aralyklarda artýar. Jogaby $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ görnüşde-de ýazmak bolýar.

Edil şeýle, eger funksiýa kemelýän bolsa, grafik boýunça çepden saga hereket etsek, ordinatalar kemelýär (grafikde gök reňkde berlen). Diýmek funksiýa $-1 \leqslant x \leqslant 2$ aralyklarda kemelýär. ▲

2-nji mysal. Funksiýa haýsy aralyklarda artýar?

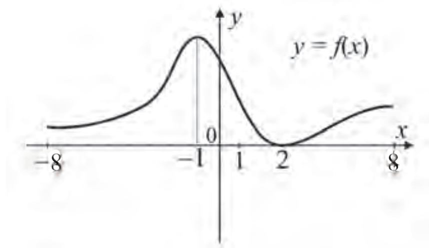
△Bu funksiýa $[-9; 9]$ aralykda berlen.

Eger funksiýa artýan bolsa, grafik boýunça çepden-saga hereket etsek, ordinatalar ulalýar. Diýmek funksiýa $[-6; 0]$ we $[6; 9]$ aralyklarda artýar. Jogaby $[-6; 0] \cup [6; 9]$ görnüşde-de ýazmak bolýar. ▲

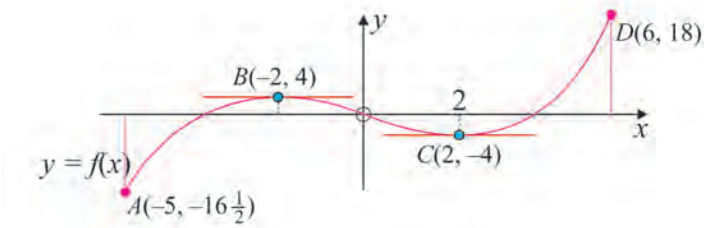


3-nji mysal. Funksiýa haýsy aralyklarda kemelýär?

Eger funksiýa kemelýän bolsa, grafik boýunça çepden-saga hereket etsek, ordinatalar kiçelýär. Diýmek funksiýa [− 1; 2] *aralykda kemelýär*.



Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalary barada düşünje berýäris.
$-5 \leqslant x \leqslant 6$ aralykda kesgitlenen funksiýanyň grafigine garalyň.



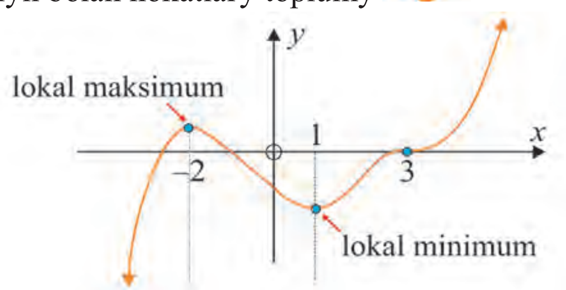
A nokadyň ordinatasy başga nokatlaryň ordinatalaryndan kiçi bolany sebäpli şu nokada **global minimum** nokady diýilýär. Funksiýanyň oňa laýyk bolan bahasyna **funksiýanyň iň kiçi bahasy** diýilýär. Biziň mysalymyzda funksiýanyň iň kiçi bahasy − 16,5-e deň.

Edil şeýle, *D* nokadyň ordinatasy başga nokatlaryň ordinatalaryndan uly bolany sebäpli şu nokada **global maksimum** nokady diýilýär. Funksiýanyň oňa laýyk bolan bahasyna **funksiýanyň iň uly bahasy** diýilýär. Biziň mysalymyzda funksiýanyň iň uly bahasy 18-e deň.

Indi *B* nokada üns bereliň. Grafigiň oňa ýakyn bolan nokatlary toplumy  görnüşe eýe. Beýle häsiýete eýe bolan nokada **lokal maksimum** nokady diýilýär.

Edil şeýle, grafigiň *C* nokada ýakyn bolan nokatlary toplumy  görnüşe eýe. Beýle häsiýete eýe bolan nokada **lokal minimum** nokady diýilýär.

Diňe lokal minimuma we lokal maksimuma eýe bolan funksiýa mysal getireliň:



Soraglar we ýumuşlar

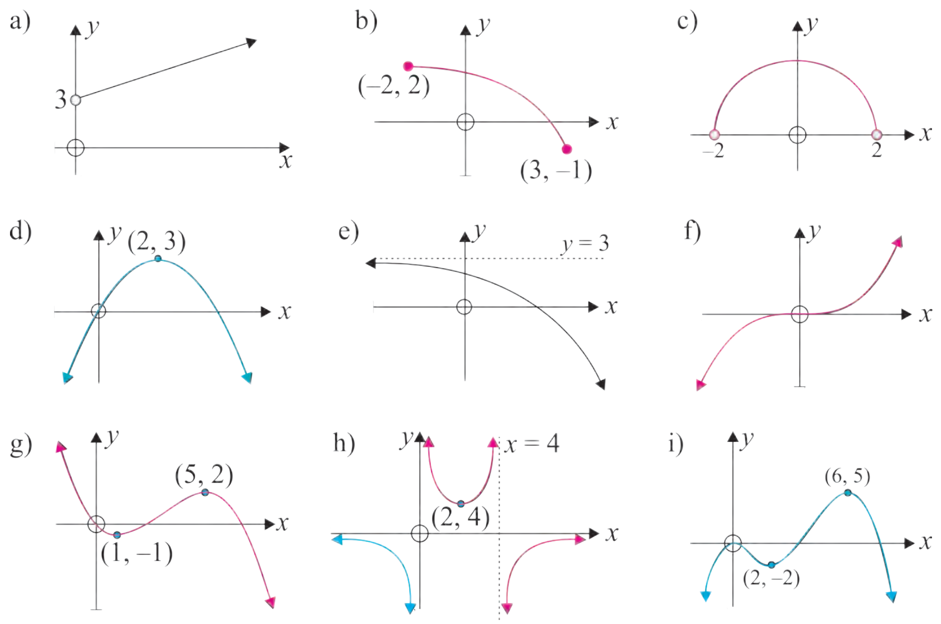
1. Aralykda artýan funksiýa kesgitleme beriň.
2. Aralykda kemelýän funksiýa kesgitleme beriň.
3. Çyzga garap funksiýanyň artýandygy nähili anyklanýar?
4. Çyzga garap funksiýanyň kemelýändigi nähili anyklanýar?

Gönükmeler

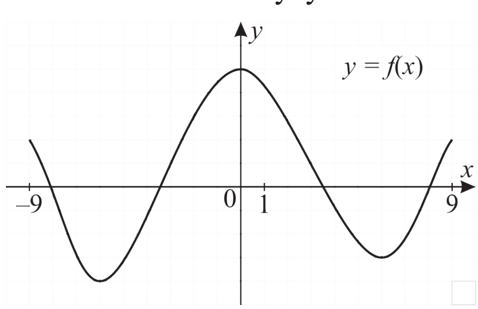
90. Funksiýa üçin aşakdaky aralyklary tapyň:

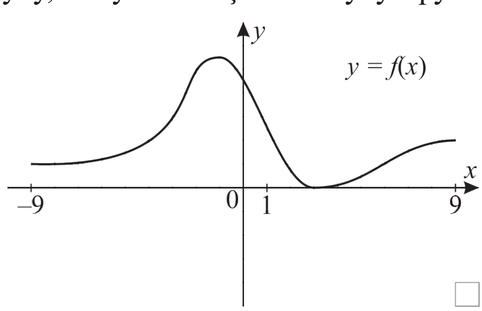
1) artyş; 2) kemeliş.

Eger mümkin bolsa, olaryň lokal maksimumyny we minimumyny, iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň.



91. [–9; 9] aralykda berlen funksiýa haýsy aralyklarda artýar? Haýsy aralyklarda kemelýär? Onuň lokal maksimumyny we minimumyny, iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň.





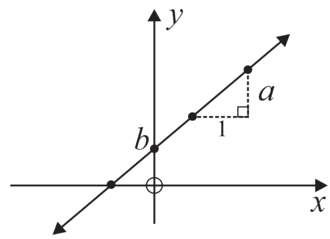
52-54 ÇYZYKLY WE KWADRATIK MODELLER

Çyzykly funksiýa

$f(x) = ax + b$ görnüşdäki funksiýa çyzykly diýilýär, bu ýerde x, y – üýtgeýjiler, a, b – berlen sanlar, $a \neq 0$.

Çyzykly funksiýanyň grafigi koordinata tekizliginde göni çyzyk bolup, munda a sana burç koeffisiýenti diýilýär.

Aşakda biz çyzykly funksiýanyň ulanylyşyny getirýäris.



1-nji mysal. Tennis kortuny kärendä almak nyrhy $C(h)=5h+8$ (ABŞ dollary) formula bilen kesgitlenen, bu ýerde h – kärende wagty (sagatda). 4 sagat we 10 sagat üçin kärendä näçe serişde sarp edilýär?

△ $C(h) = 5h + 8$ formuladan peýdalanyp, $C(4) = 5 \cdot 4 + 8 = 20 + 8 = 28$ we $C(10)= =5\cdot10+8=50+8=58$ bolýandygyny tapýarys. Diýmek, 4 sagada 28 ABŞ dollary, 10 sagada bolsa 58 ABŞ dollary serişde sarp edilýär. ▲

2-nji mysal. Nýu Ýorkda taksi ýolagçy almak üçin saklamaga 3 ABŞ dollary 30 sent, her kilometre bolsa 1 ABŞ dollary 75 sent alýar.

a) Jedweli depderiňize göçüriň we ony dolduryň:

d – aralyk (km)	0	2	4	6	8	10
C – serişde ($)						

b) C we d arasyndaky baglanyşygy grafik görnüşde aňladyň;

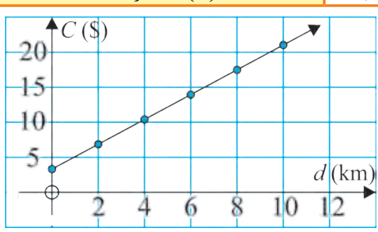
ç) C (d) funksiýanyň algebraik görnüşini–formulasyny ýazyň;

d) 9, 4 km ýöremek üçin näçe serişde sarp edilýär?

△ a) 3,3 ABŞ dollaryna yzygider $2 \cdot 1{,}75 = 3{,}5$ ABŞ dollaryny goşup, gözenekleri doldurýarys:

d – aralyk (km)	0	2	4	6	8	10
C – serişde ($)	3,30	6,80	10,30	13,80	17,30	20,80

b)



Bu – çyzykly funksiýa.

ç) Burç koeffisiýentini tapýarys:

$$a = \frac{20,80 - 17.30}{10 - 8} = 1,75.$$

Diýmek, $C(d) = 1{,}75d + 3{,}3$.

d) $C(9{,}4) = 1{,}75 \cdot 9{,}4 + 3{,}3 = 19{,}75$.

Diýmek, 19,75 ABŞ dollary sarp edilýär. ▲

Kwadrat funksiýa

$y = ax^2 + bx + c$ görnüşdäki funksiýa kwadrat funksiýa diýilýär, bu ýerde x, y – üýtgeýjiler, a, b, c – berlen sanlar, $a \neq 0$.

$y = 2x^2 + 4x - 5$ funksiýanyň a) $x = 0$; b) $x = 3$ nokatlardaky bahasyny tapalyň.

a) $x = 0$ bolsun. Onda $y = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 5 = 0 + 0 - 5 = -5$.

b) $x = 3$ bolsun. Onda $y = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 5 = 18 + 12 - 5 = 25$.

3-nji mysal. Daş zyňlanda t sekuntda onuň ýere görä beýikligi $h(t) = -5t^2 + 30t + 2$ funksiýanyň kömeginde anyklanýar.

a) $t = 3$ bolanda daş ýerden näçe beýikde bolýar?

b) Daş nähili beýiklikden durup zyňyldy?

ç) Haýsy wagtda daşyň beýikligi 27 metr bolar?

△ a) $h(3) = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 + 2 = -45 + 90 + 2 = 47$.

Diýmek, zyňlan daş $t = 3$ sekuntdan soň 47 m beýiklikde bolýar.

b) daş $t = 0$ bolanda zyňlandygy sebäpli, $h(0) = -5 \cdot 0^2 + 30 \cdot 0 + 2 = 2$.

Diýmek, daş 2 metr beýiklikden zyňlan.

ç) Daş ýerden 27 metr beýiklikde bolsa, $h(t) = 27$ bolýar, ýagny $-5t^2 + 30t + 2 = 27$.

Bu deňlemäni çözýäris: $-5t^2 + 30t - 25 = 0$, $t^2 - 6t + 5 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$.

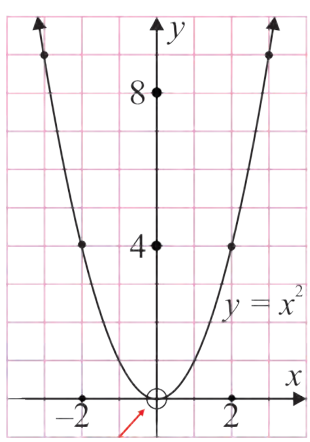
Diýmek, daş 27 metr beýiklikde 1 sekuntdan soň (ýokary göterilende) we 5 sekuntdan soň (aşak gaçanda) bolýar. ▲

Kwadrat funksiýanyň grafigi

$f(x) = x^2$ funksiýany garalyň. Onuň käbir nokatlardaky bahalary jedwelini düzýäris:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Şu jedweldäki (x, y) nokatlary koordinata tekizliginde gurup, olary tekiz çyzyk bilen utgaşdyryp, şu grafigi alarys:



Alnan şekil **parabola** diýip atlandyrylýar. Görnüşi ýaly, parabolanyň şahalary ýokary ugrugan bolup, ol ordinata okuna görä simmetrik bolan egri çyzykdyr.

(0, 0) nokada $y = x^2$ **parabolanyň depesi** diýilýär.

4-nji mysal. $y = x^2 - 2x - 5$ kwadrat funksiýanyň grafigini guruň.

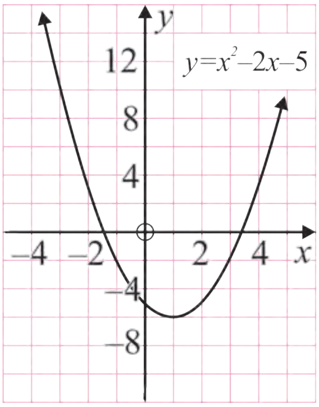
△ Funksiýanyň bir nokatdaky, meselem $x = -3$ nokadyndaky bahasyny tapalyň:

$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 5 = 9 + 6 - 5 = 10$.

Funksiýanyň birnäçe nokatlardaky bahasyny tapyp, jedweli düzýäris:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2

(x, y) nokatlary koordinata tekizliginde gurup, olary tekiz çyzyk bilen utgaşdyryp, berlen kwadrat funksiýanyň grafigini alarys:



Alnan grafik hem parabola şeklinde. Onuň şahalary bolsa ýokary ugrukdyrylan. ▲

Erkin $y = ax^2 + bx + c$ parabolanyň ordinatalar oky – Oy oky bilen kesişme nokadyny tapýarys:

$x = 0, y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 + 0 + c = c.$

Diýmek, parabola $(0, c)$ nokatda ordinatalar oky bilen kesişýär.

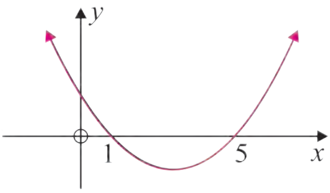
$y = ax^2 + bx + c$ parabolanyň abssissalar oky bilen kesişme nokatlaryny tapmak üçin $ax^2 + bx + c = 0$ kwadrat deňlemäniň çözüwlerini tapmak ýeterli.

Meselem, $y = x^2 - 2x - 15$ parabolanyň abssissalar oky bilen kesişme nokatlaryny tapýarys. $x^2 - 2x - 15 = 0$ diýip, bu kwadrat deňlemäni çözýäris. Onuň çözüwleri $x = -3$ we $x = 5$ bolýar. Diýmek, $y = x^2 - 2x - 15$ parabola abssissalar oky bilen $(-3, 0)$, $(5, 0)$ nokatlarda kesişýär.

$y = ax^2 + bx + c$ parabola üçin $x = h$ görnüşdäki wertikal göni çyzyk onuň simmetriýa oky bolýar.

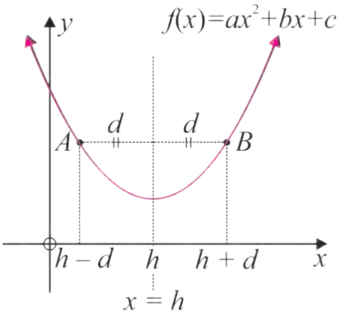
Eger $y = ax^2 + bx + c$ parabola abssissa oky bilen kesişse, h san parabolanyň Ox oky bilen kesişme nokatlary abssissalarynyň orta arifmetigine deň bolýar.

5-nji mysal. Suratdaky parabolanyň simmetriýa okuny tapyň.



△ Eger parabola abssissalary oky bilen (1, 0) we (5, 0) nokatlarda kesişse, $x = \frac{5+1}{2} = 3$ – simmetriýa oky bolýar. ▲

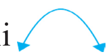
Eger $y = ax^2 + bx + c$ parabola abssissalar oky bilen kesişmese, h sany başga usulda-da tapmak bolýar.

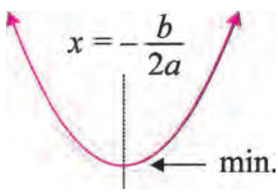


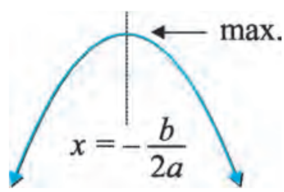
Görnüşi ýaly, abssissalary $h - d$ we $h + d$ bolan A, B nokatlar birmeňzeş ordinatalara eýe, ýagny $f(h - d) = f(h + d)$, diýmek, A we B $x = h$ oka görä simmetrik nokatlardyr.

Bu şertden peýdalanyp aşakdaky deňlikden h -y tapýarys:
$a(h-d)^2+b(h-d)+\cancel{c}=a(h+d)^2+b(h+d)+\cancel{c}$ ýa-da
$a(\cancel{h^2}-2hd+\cancel{d^2})+\cancel{bh}-bd=a(\cancel{h^2}+2hd+\cancel{d^2})+\cancel{bh}+bd$ ýa-da $-\cancel{4}ah\cancel{d}=\cancel{2}b\cancel{d}$.
Diýmek, simmetriýa oky $h=\frac{-b}{2a}$ eken.

Netije. $y=ax^2+bx+c$ parabolanyň simmetriýa oky $x=\frac{-b}{2a}$ görnüşde bolýar. Parabolanyň öz-ösüne simmetrik bolan nokady parabolanyň depesi diýilýär. Parabolanyň depesiniň koordinatalary $x=\frac{-b}{2a}$, $y=0$. Parabolanyň oky $(-\frac{b}{2a},0)$ nokatdan Oy okuna parallel bolup geçýär. Parabolanyň depesi simmetriýa okuna degişli bolany sebäpli, onuň abssissasyna $\frac{-b}{2a}$ deň.

Görnüşi ýaly, $a<0$ bolanda parabola şekli  ýaly bolup, onuň depesi $y=ax^2+bx+c$ kwadrat funksiýanyň maksimum nokady, $a>0$ bolanda parabola şekli  ýaly bolup, onuň depesi kwadrat funksiýanyň minimum nokady bolýar.

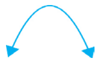




6-njy mysal. $y=3x^2+4x-5$ parabolanyň simmetriýa okuny tapyň.
△ $y=3x^2+4x-5$ üçin $a=3$, $b=4$.
Diýmek, $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot 3}=-\frac{2}{3}$, ýagny $x=-\frac{2}{3}$ −simmetriýa oky. ▲

7-nji mysal. $f(x)=x^2+6x+4$ parabolanyň depesini tapyň.
△ $a=1$, $b=6$. $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2\cdot 1}=-3$.
Diýmek, parabolanyň depesiniň abssissasy $x=-3$,
ordinatasy bolsa: $y=f(-3)=(-3)^2+6(-3)+4=9-18+4=-5$.
Şonuň üçin, parabolanyň depesi $(-3,-5)$ koordinatalara eýe. ▲

8-nji mysal. Sportçy pökgini ýokary zyňdy, munda pökginiň t sekuntdan soňky beýikligi $H(t)=30t-5t^2$ metr boldy, $t\geqslant 0$.
a) Iň ýokary nokada pökgi näçe sekuntda ýetýär?
b) Iň ýokary nokat ýerden näçe beýiklikde bolar?
ç) Pökgi näçe sekuntdan soň ýere gaçar?

a) $H(t) = 30t - 5t^2$ üçin $a < 0$, $a = -5$. Şonuň üçin bu parabola aşakdaky görnüşde bolýar: . $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \cdot (-5)} = 3$ sekuntda maksimuma ýetýär.

Ýagny iň ýokary nokada pökgi 3 sekuntda göterilýär.

b) Maksimal beýikligi tapýarys:

$H(3) = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 90 - 45 = 45$, ýagny iň ýokary nokat ýerden 45 metr beýiklikde bolýar.

ç) $H(t) = 0$ bolsa, pökgi ýere gaçýar. Şu deňlemäni çözýäris:

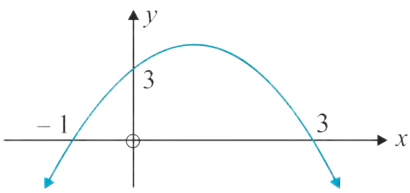
$30t - 5t^2 = 0$, $5t^2 - 30t = 0$, $5t(t - 6) = 0$. Mundan $t_1 = 0$ ýa-da $t_2 = 6$.

Diýmek, 6 sekuntdan soň pökgi ýere gaçýar.

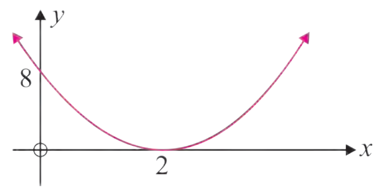
Aşakda biz parabolanyň şekline garap kwadrat funksiýanyň formulasyny tapmaga mysallary getirýäris.

9-njy mysal. Berlen parabolalara garap kwadrat funksiýa formulasyny ýazyň.

a)



b)

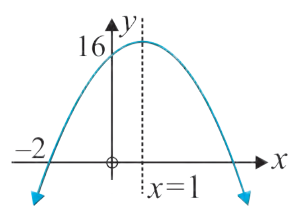


a) Parabolanyň şahalary aşak garan, ol abssissalar oky bilen -1 we 3 nokatlarda kesişýär. Şonuň üçin $y = a(x + 1)(x - 3)$, $a < 0$. $x = 0$ bolanda $y = 3$ şertden $a = -1$ -i tapýarys.

Diýmek, kwadrat funksiýa $y = -(x + 1)(x - 3) = -x^2+2x+3$ formula bilen aňladylýar.

b) Parabola şahalary ýokary garan, ol abssissalar okuna $x = 2$ nokatda galtaşýar. Şonuň üçin $y = a(x - 2)^2$, $a > 0$. $x = 0$ bolanda $y = 8$ şertden $a = 2$ -ni tapýarys. Diýmek, kwadrat funksiýa $y = 2(x - 2)^2$ formula bilen berilýär.

10-njy mysal. Berlen parabola garap kwadrat funksiýa formulasyny ýazyň.



$x = 1$ – simmetriýa oky bolany üçin, abssissalar oky bilen ikinji kesişme nokady $x = 4$ bolýar. Diýmek, $y = a(x + 2)(x - 4)$. Mundan $x = 0$, $y = 16$. Şonuň üçin $16 = a(0 + 2)(0 - 4)$. Bu ýerden $a = -2$ ýa-da

$y = -2(x + 2) \cdot (x - 4) = -2x^2 + 4x + 16$.

Soraglar we ýumuşlar.

1. Çyzykly funksiýa näme?
2. Çyzykly funksiýanyň burç koeffisiýenti näme?
3. Kwadrat funksiýa näme?

4. Kwadrat funksiýanyň depesi nähili tapylýar?
5. Haçan kwadrat funksiýa maksimuma eýe bolýar?
6. Haçan kwadrat funksiýa minimuma eýe bolýar?

Gönükmeler

92. Könelmegi netijesinde awtomaşynyň nyrhy t ýyldan soň $V(t) = 25000 - 3000t$ ýewro kanunalaýyklyk bilen üýtgeýär.

a) $V(0)$ bahany tapyň. Bu baha manysyny düşündiriň;

b) $V(3)$ bahany tapyň. Bu baha manysyny düşündiriň;

ç) $V(t) = 10000$ baha näçe ýyldan soň gazanylýar?

93. ABŞ-da elektrik montažçy çagyrylandygy üçin \$60 we her bir sagat üçin \$45 hyzmat hakyny alýar.

a) $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ bolanda laýyk jedweli düzüň. C hyzmat hakynyň t wagta nähili baglylygyny grafiki görnüşde aňladyň.

b) $C(t)$ funksiýanyň formulasyny (algebraik görnüşini) ýazyň.

ç) $6\frac{1}{2}$ sagat wagt üçin näçe serişde tölenýär?

94. Sisterna 265 litr suw bilen doldurylan. Ondan her bir minutda 11 litr suw alynýar.

a) $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ bolanda akyp çykýan suwuň V litr göwrüminiň t (minut) wagta nähili baglylygyny aňladýan jedwel düzüň.

b) $V(t)$ baglanyşygy grafiki görnüşde aňladyň;

ç) $V(t)$ funksiýanyň formulasyny (algebraik görnüşini) ýazyň.

d) 15 minutdan soň sisternada näçe suw galýar?

e) Sisterna näçe wagtdan soň boşar?

95. Aşakdakylardan haýsy biri kwadrat funksiýa bolýar:

a) $y = 2x^2 - 4x + 10$; ç) $y = -2x^2$; e) $3y + 2x^2 - 7 = 0$;

b) $y = 15x - 8$; d) $y = \frac{1}{3}x^2 + 6$; f) $y = 15x^3 + 2x - 16$?

96. (x, y) jübütlik görkezilen $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýa bilen aňladylan gatnaşykda bolarmy?

a) $f(x) = 6x^2 - 10$, $(0, 4)$; d) $y = -7x^2 + 9x + 11$, $(-1, -6)$;

b) $y = 2x^2 - 5x - 3$, $(4, 9)$; e) $f(x) = 3x^2 - 11x + 20$, $(2, -10)$;

ç) $y = -4x^2 + 6x$, $(-\frac{1}{2}, -4)$; f) $f(x) = -3x^2 + x + 6$, $(\frac{1}{3}, 4)$?

97. $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýa üçin y-iň berlen bahasyna laýyk bolan x-iň bahasyny tapyň:

a) $y = x^2 + 6x + 10$, $y = 1$; ç) $y = x^2 - 5x + 1$, $y = -3$;
b) $y = x^2 + 5x + 8$, $y = 2$; d) $y = 3x^2$, $y = -3$.

98. Maddy jism 80 m/s tizlikde ýokary zyňlan. Onuň t sekuntda ýere görä beýikligi $h(t) = 80t - 5t^2$ funksiýanyň kömeginde anyklanýar.

a) 1 sekunt, 3 sekunt, 4 sekuntdan soň jisimiň beýikligini tapyň;

b) Haýsy wagtda jisimiň beýikligi 140 metr bolar? Haçan 0 metr? Jogaplara laýyk ýagdaýlary düşündiriň;

99. Önüm öndürýän telekeçiniň alýan girdejisi aşakdaky formula bilen hasaplanýar:

$P(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 36x - 40$ (müň som), bu ýerde x – önümleriň sany.

a) 0 sany önüm, 20 sany önüm öndürilende telekeçi nähili girdejä eýe bolar? b) 270 müň som girdeji almak üçin telekeçi näçe önüm öndürmeli?

100. Funksiýalaryň $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ bahalara laýyk bahalaryny tapyň. Netijeleri jedwel görnüşinde beriň we grafikleri guruň.

a) $y = x^2 + 2x - 2$; d) $f(x) = -x^2 + x + 2$; g) $y = x^2 - 5x + 6$;
b) $y = x^2 - 3$; e) $y = x^2 - 4x + 4$; h) $y = x^2 + x + 1$;
ç) $y = x^2 - 2x$; f) $f(x) = -2x^2 + 3x + 10$; i) $y = -x^2 + x - 1$.

Bu grafikler nähili görnüşde bolýar?

101. a) $y = x^2 + 2x + 3$; d) $f(x) = 3x^2 - 10x + 1$; g) $y = 8 - x - 2x^2$;
b) $y = 2x^2 + 5x - 1$; e) $y = 3x^2 + 5$; h) $f(x) = 2x^2 - x^2 - 5$;
ç) $y = -x^2 - 3x - 4$; f) $y = 4x^2 - x$; i) $y = 6x^2 + 2 - 5x$.

parabolalaryň ordinatalar oky bilen kesişme nokadyny tapyň.

102. Funksiýalar grafikleri ordinatalar oky bilen nähili nokatlarda kesişýär?

a) $y = (x + 1)(x + 3)$; d) $y = (2x + 5)(3 - x)$; g) $y = (x - 1)(x - 6)$;
b) $y = (x - 2)(x + 3)$; e) $y = x(x - 4)$; h) $y = -(x + 2)(x + 4)$;
ç) $y = (x - 7)^2$; f) $y = -(x + 4)(x - 5)$; i) $y = -(x - 3)(x - 4)$.

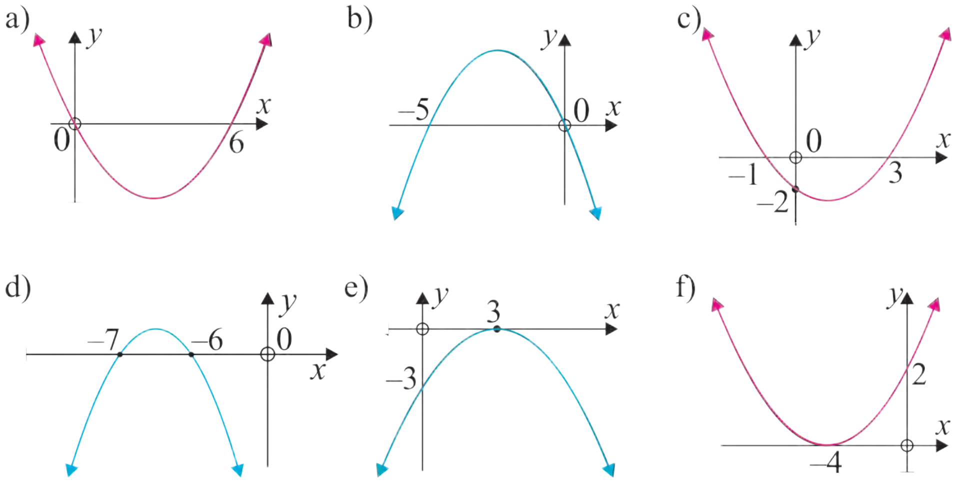
103. a) $y = x^2 - x - 6$; d) $y = 3x - x^2$; g) $y = -x^2 - 4x + 21$; j) $y = -2x^2 + x - 5$;
b) $y = x^2 - 16$; e) $y = x^2 - 12x + 36$; h) $y = 2x^2 - 20x + 50$; k) $y = -6x^2 + x + 5$;
ç) $y = x^2 + 5$; f) $y = x^2 + x - 7$; i) $y = 2x^2 - 7x - 15$; l) $y = 3x^2 + x - 1$.

parabolalaryň abssissalar oky bilen kesişme nokatlaryny tapyň.

104. a) $y = x^2 + x - 2$; d) $y = x^2 + x + 4$; g) $y = -x^2 - 7x$; j) $y = -x^2 + 2x - 9$;
b) $y = (x + 3)^2$; e) $y = 3x^2 - 3x - 36$; h) $y = -2x^2 + 3x + 7$; k) $y = 4x^2 - 4x - 3$;
ç) $y = (x + 5)(x - 2)$; f) $y = -x^2 - 8x - 16$; i) $y = 2x^2 - 18$; l) $y = 6x^2 - 11x - 10$.

parabolalaryň koordinatlar oklary bilen kesişme nokatlaryny tapyň.

105. Parabolanyň simmetriýa okuny tapyň:



106. Parabolanyň simmetriýa okuny tapyň:

a) $y = (x - 2)(x - 6)$;

b) $y = x(x + 4)$;

ç) $y = -(x + 3)(x - 5)$;

d) $y = (x - 3)(x - 8)$;

e) $y = 2(x - 5)^2$;

f) $y = 3(x + 2)^2$.

107. Parabolanyň simmetriýa okuny tapyň:

a) $y = x^2 + 6x + 2$;

b) $y = x^2 - 8x - 1$;

ç) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$;

d) $y = -x^2 + 3x - 7$;

e) $y = 2x^2 - 5$;

f) $y = -5x^2 + 7x$;

g) $f(x) = x^2 - 6x + 9$;

h) $y = 10x - 3x^2$;

i) $y = \frac{1}{8}x^2 + x - 1$.

108. Parabolanyň depesini tapyň:

a) $y = x^2 - 4x + 7$;

b) $y = x^2 + 2x + 5$;

ç) $f(x) = -x^2 + 6x - 1$;

d) $y = x^2 + 3$;

e) $f(x) = 2x^2 + 12x$;

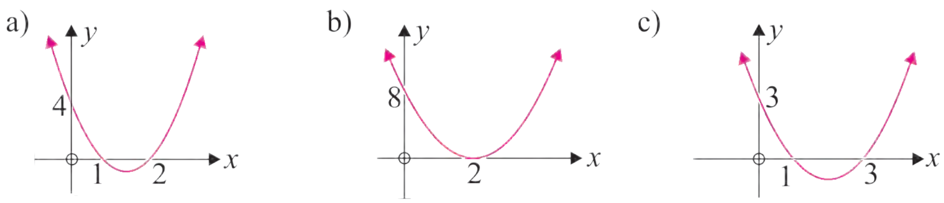
f) $y = -3x^2 + 6x - 4$;

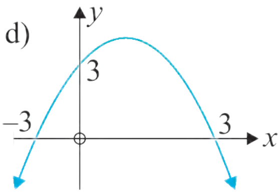
g) $y = x^2 - x - 1$;

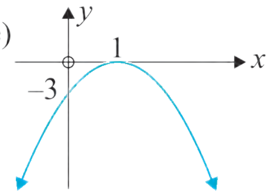
h) $y = -2x^2 + 3x - 2$;

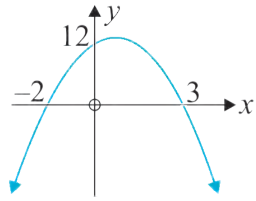
i) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 2$.

109. Parabola garap, oňa laýyk kwadrat funksiýa formulasyny tapyň:

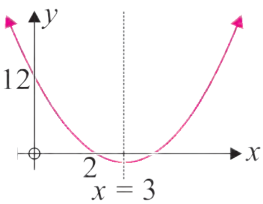


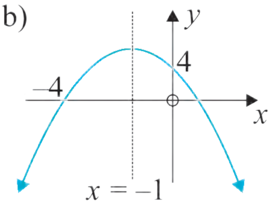
d)


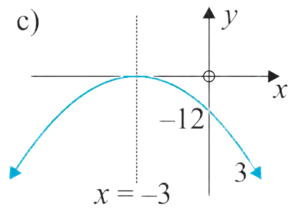
e)


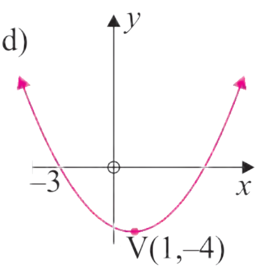
f)


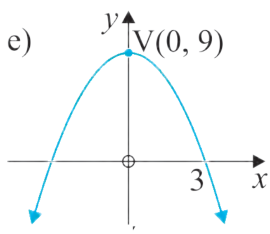
110. Parabola garap, kwadrat funksiýany tapyň:

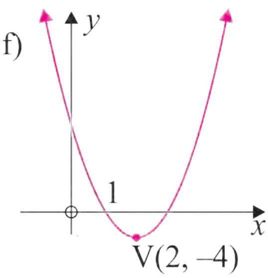
a)


b)


c)


d)


e)


f)


111. Aman deňze düri almak üçin çümdi. Onuň t sekuntdan soňky çümen çuňlugy $H(t) = -4t^2 + 4t + 3$ metr boldy, $t \geqslant 0$.

a) dürler nähili çuňlukda ýerleşýär?

b) Aman düri almak üçin näçe wagt sarp edýär?

ç) Aman nähili beýiklikden suwa çümdi?

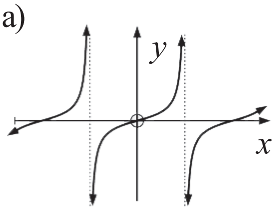
112. Jeren köýnek tikmek üçin buýurma aldy. Ol bir günde x sany köýnek tikse, ol $P(x) = -x^2 + 20x$ ABŞ dollary girdeji alýar.

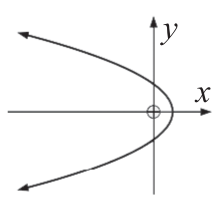
a) iň uly almak üçin ol näçe köýnek tikmeli?

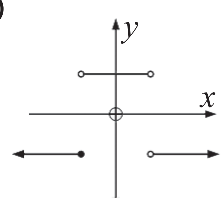
b) iň uly girdeji näçe dollara deň?

Barlag işiniň nusgasy

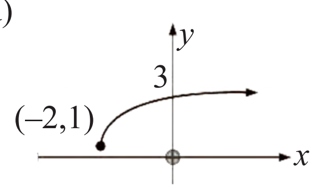
1. Aşakdaky gatnaşyklardan haýsylary funksiýalardyr?

a)


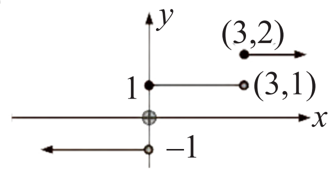
b)


c)


d)



e)

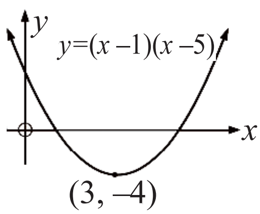


2. Aşakdaky tertiplenen jübütlikler toplumlaryndan haýsylary şöhlelendirme bolýar? Jogabyňyzy esaslandyryň.

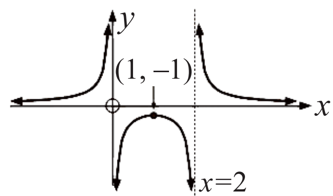
a) $\{(1, 2),(-1, 2),(0, 5),(2, -7)\}$; b) $\{(0, 1),(1, 3),(2, 5),(0, 7)\}$; c) $\{(6, 1),(6, 2),(6, 3),(6, 4)\}$.

3. Grafiki görnüşde berlen funksiýalaryň kesgitleniş oblastyny we bahalar toplumyny tapyň:

a)

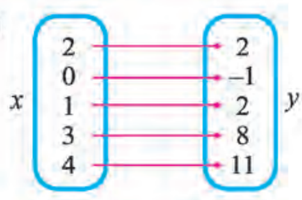


b)

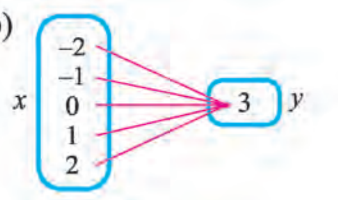


4. Aşakdaky diagrama $y = f(x)$ şöhlelendirmäni berýär.

a)



b)



1) $y = f(x)$ şöhlelendirmäniň kesgitleniş oblastyny we bahalar toplumyny ýazyň.

2) $y = f(x)$ şöhlelendirme tekizlikdäki koordinatalar sistemasynda nähili şekillendirilýär?

3) $y = f(x)$ üçin anyk aňlatmany ýazyň.

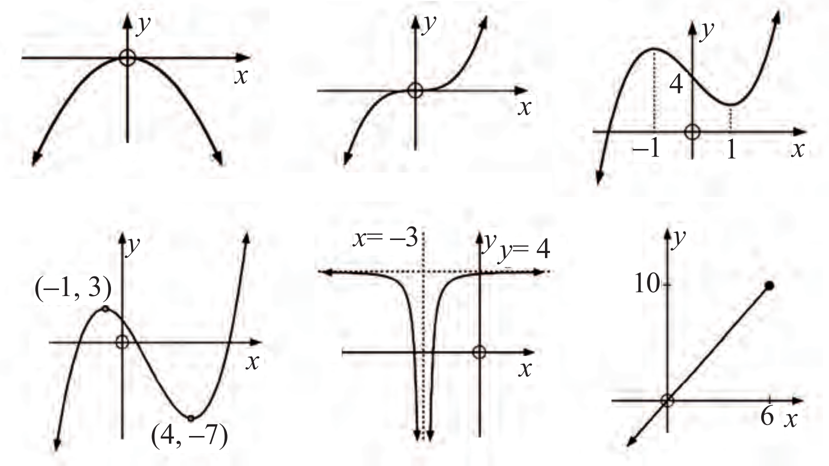
5. $f(x) = 2x - x^2$ funksiýa üçin:

a) $f(2)$; b) $f(-3)$; ç) $f(-\frac{1}{2})$ bahalary tapyň.

6. $g(x) = x^2 - 3x$ funksiýa üçin aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:

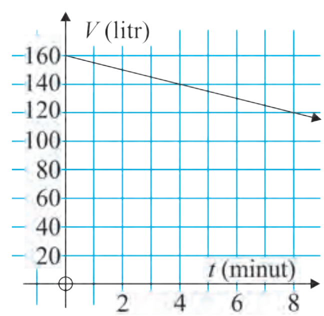
a) $g(x + 1)$; b) $g(x^2 - 2)$.

7. Grafiki görnüşde berlen funksiýalaryň kemeliş we artyş aralyklaryny tapyň.



8. a) $f(x) = 2x + 1$; b) $f(x) = - 3x + 2$;
ç) $f(x) = x^2$; d) $f(x) = - x^3$ funksiýalar üçin:
1) funksiýalaryň oklary bilen kesişme nokatlaryny tapyň.
2) lokal maksimum, lokal minimum nokatlary ýa-da egilme nokatlary bar bolsa, olaryň koordinatalaryny tapyň.
3) funksiýalaryň grafigini takmyny çyzyň

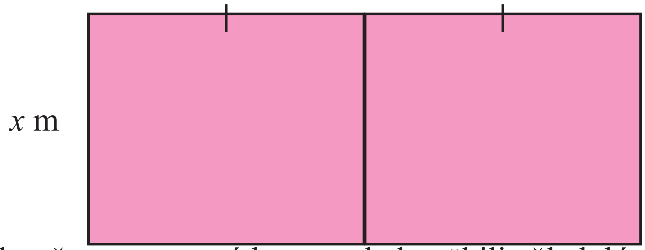
9. Aşakdaky grafikde minutlarda aňladylan t wagtda sisternadan syzyp çykýan nebit önüminiň V göwrümi şekillendirilen.



1) Syzyp çykýan nebit önüminiň göwrümi wagta baglylygynyň formulasyny tapyň.
2) 15 minutda näçe nebit syzyp çykýar?
3) 50 litr nebit näçe minutda syzyp çykýar?
4) Sisterna näçe wagtdan soň boşaýar?

10. Daş deňiz derejesinden 60 metr beýiklikden ýokary zyňlan. t sekuntdan soň daşyň deňiz derejesine görä beýikligi
$H(t) = - 5t^2 + 20t + 60$ metre deň bolsa:
1) Näçe sekuntdan soň daşyň beýikligi iň uly bolýar?
2) Daşyň deňiz derejesine görä beýikligi näçä deň?
3) Näçe sekuntdan soň daş suwa gaçýar?

11. Fermer suratda görkezilen iki ýanaşyk duran birmeňzeş meýdana eýe bolan bugdaý atyzyny 2000 metr diwar bilen gurşady.



1) Atyzlaryň umumy meýdany x arkaly nähili aňladylýar?
2) Iki atyzyň umumy meýdany iň köpi bilen kwadrat metre deň bolmagy mümkin? Şeýle atyzlaryň ölçeglerini anyklaň.

55 PERIODIK HADYSALAR WE OLARA GÖZEGÇILIK

Periodik hadysalar tebigatda we tehnikada giň ýaýran. Olara mysallar getireliň:

- ýylyň pasyllary boýunça howa ýagdaýynyň üýtgemegi;
- aýlardaky ortaça temperaturanyň üýtgemegi;
- gündiziň we gijäniň dowamlylygy;
- deňiz kenarynyň ýanyndaky suwuň çuňlugy;
- haýwanlar sany;
- günüň aktiwliginiň üýtgemegi;
- mehanikada, elektrotehnikada periodik yrgyldylar.

Bu hadysalarda belli bir wagt aralyklarynda gaýtalanyp duryan ýagdaýlar bolýar. Olary ýagdaýa garap periodik, yrgyldaýan ýa-da siklik diýilýär.

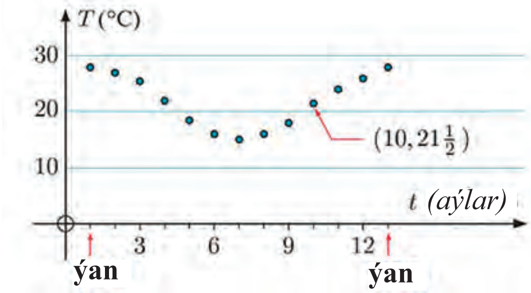
Meselem, Günorta Afrikadaky Keýptaun şäherinde aýlyk maksimal temperaturanyň üýtgemegini aňladýan jedweli garalyň:

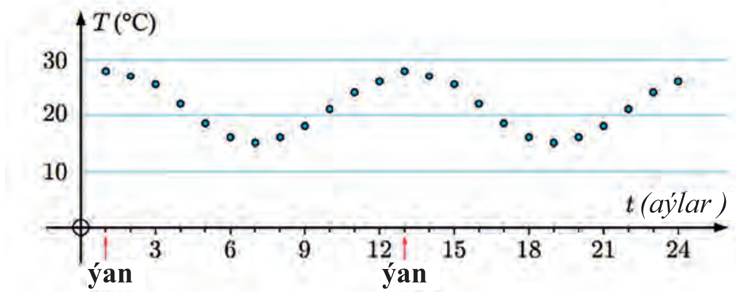
Aý	Ýan	Few	Mar	Apr	Maý	Iýun	Iýul	Awg	Sen	Okt	Noý	Dek
Temp (0°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Bu maglumatlary grafiki görnüşde aňladalyň. Munuň üçin ordinata oky temperaturalary, abssissalar oky bolsa aýyň tertip nomerlerini (meselem, fewral üçin t=2) aňlatsyn.

Bu grafikde ýanwarda ortaça 28°C temperatura bolýar. Beýle baha her ýylyň ýanwarynda, ýagny her 12 aýda gaýtalanýandygy tebigydyr.

Başga aýlar üçin hem ortaça temperaturanyň üýtgemegini takmyny görkezýän grafigi dowam etdirip çyzmak bolýar:





Eger $y = f(t)$ funksiýa t −aýda ortaça temperaturany aňlatsa,

$f(0) = f(12) = f(24) = ...,$ $f(1) = f(13) = f(25) = ...$ we ş.m. ýaly kanunalaýyklyk, umumy ýagdaýda islendik t üçin $f(t + 12)$ bolýandygyny görmek mümkin.

Munda gaýtalanma bolýan 12 aý möhlete period diýýäris.

X toplumda kesgitlenen $f(x)$ funksiýa üçin islendik x -da $f(x + T) = f(x)$ deňligi kanagatlandyrýan $T > 0$ bar bolsa, $f(x)$ funksiýa periodik diýilýär, munda $x + T \in X$.

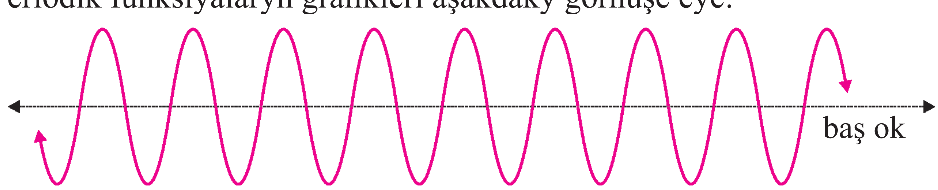
Görnüşi ýaly, $f(x + T) = f(x)$ bolsa, onda $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T)=...$

Beýle $T > 0$ sanlar iň kiçi bahany funksiýanyň periody diýip atlandyrýarys.

Tigir göni çyzyk boýunça aýlanyp hereket etse, ondaky kesgitli bir nokat *sikloida* diýip atlandyrylýan egri çyzyk boýunça periodik hereket edýär.

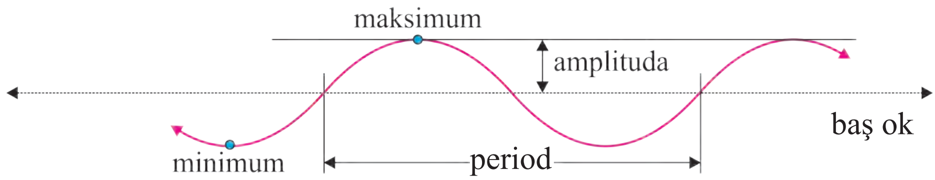
Sikloida $y=f(x)$ görnüşdäki deňlemä eýe däldigini bellemek gerek.

Periodik funksiýalaryň grafikleri aşakdaky görnüşe eýe:



Baş ok deňlemesi aşakdaky ýaly tapylýar: $y = \dfrac{\max + \min}{2}$, munda max – funksiýanyň iň uly, min bolsa iň kiçi bahasy.

Periodik funksiýanyň grafigi aşakdaky düzüm böleklere eýe:



Amplituda funksiýanyň maksimumy bilen ok (ýa-da ok bilen minimum) arasyndaky aralyk bolup, ol aşakdaky ýaly tapylýar:

$$\text{amplituda} = \frac{\max - \min}{2}$$

Soraglar we ýumuşlar

1. Periodik hadysa mysal getiriň.
2. Funksiýanyň periodyna kesgitleme beriň.
3. Periodik funksiýanyň amplitudasy nähili hasaplanýar?
4. Sikloidanyň nämedigini düşündiriň.
5. Haçan kwadrat funksiýa maksimuma (minimuma) eýe?

Gönükmeler

113. Her bir ýagdaý üçin maglumatlary grafiki görnüşde şekillendiriň we olaryň periodik–periodik dälligi barada netije çykaryň:

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	1	1,4	1	0	–1	–1,4	–1	0	1	1,4	1	0

b)

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

ç)

x	0	0.5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
y	0	1,9	3,5	4,5	4,7	4,3	3,4	2,4

d)

x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
y	0	4,7	3,4	1,7	2,1	5,2	8,9	10,9	10,2	8,4	10,4

114. Aşakdaky jedwelde tigir göni çyzyk boýunça aýlanyp hereket etse, onda belgilenen nokadyň hereketini aňladýan ululyklar getirilen:

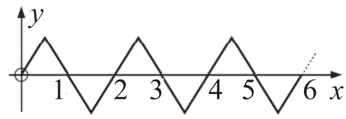
Aralyk (sm)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Beýiklik (sm)	0	6	23	42	57	64	59	43	23	7	1

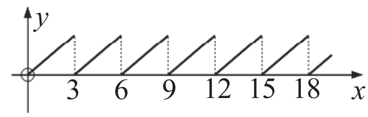
Aralyk (sm)	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400
Beýiklik (sm)	5	27	40	55	63	60	44	24	9	3

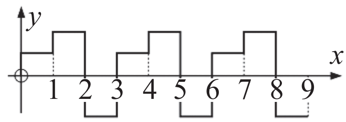
a) Beýikligiň aralyga baglylygyny grafiki görnüşde aňladyň.

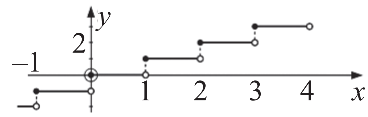
b) Bu hadysa periodikmi? Eger periodik bolsa, ok deňlemesini, funksiýanyň maksimumyny, periodyny, amplitudasyny tapyň.

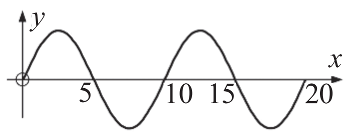
115. Aşakdakylardan haýsy biri periodik hadysany aňladýar?

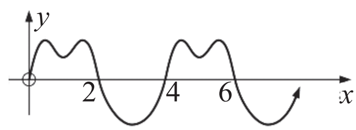
a)


b)


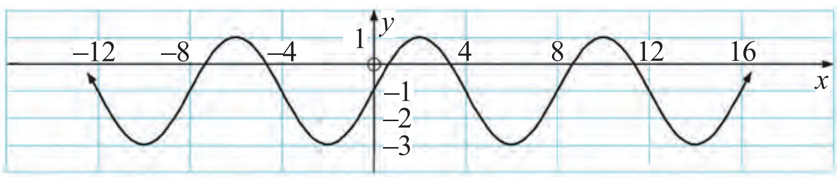
ç)


d)


e)


f)


116.



Berlen periodik funksiýa üçin:

a) amplitudany tapyň; b) periody tapyň;

ç) birinji maksimum nokadyny tapyň;

d) iki maksimum arasyndaky aralygy anyklaň;

e) baş okuň deňlemesini düzüň.

56-58 $y = \sin x$, $y = \cos x$ FUNKSIÝALAR WE OLARYŇ KÖMEGINDE MODELIRLEMEK

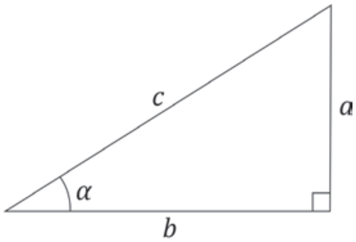
Gönüburçly üçburçlukda a, b – katetler, c – gipotenuza bolsun. α diýip a katete garşylykly burçy belgileýäris (1-nji surata garaň).

Geometriýa kursundan α burçuň sinusy we kosinusy aşakdaky deňlikleriň kömeginde girizilýär:

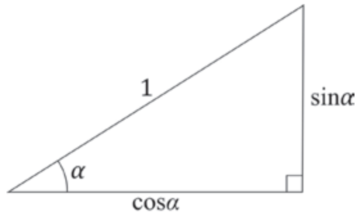
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Gipotenuzany 1 diýip alsak, 1-nji surat 2-nji suratdaky görnüşi alýar.

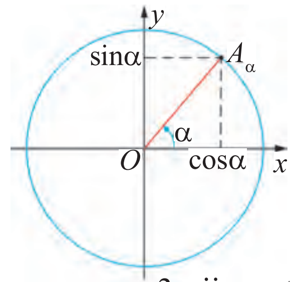
Tekizlikde koordinatalar sistemasyny girizip, onda radiusy 1-e deň bolan birlik töwerege garaýarys we şu töwerekde α burça laýyk bolan nokady belgileýäris (3-nji surat).



1-nji surat.



2-nji surat.

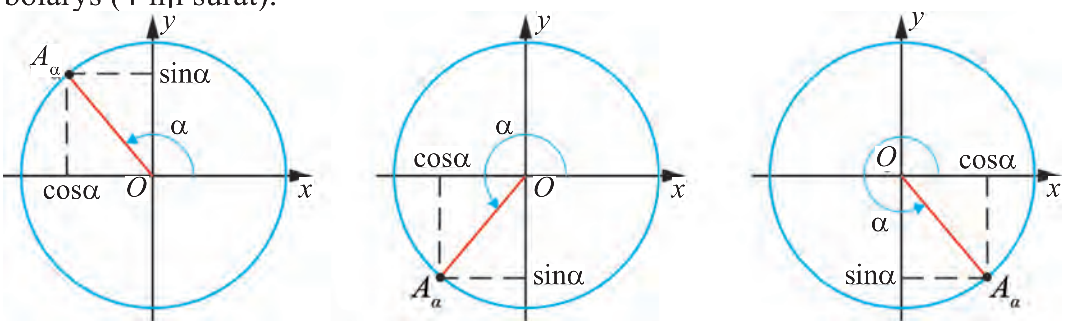


3-nji surat.

α burçuň sinusy diýip (1;0) nokady koordinatalar başlangyjy daşynda α burça öwürmek netijesinde alnan A_α nokadyň ordinatasyna aýdylýar (sinα ýaly belgilenýär).

Edil şeýle, α burçuň kosinusy diýip (1; 0) nokady koordinatalar başlangyjynyň daşynda α burça öwürmek netijesinde alnan A_α nokadyň abssissasyna aýdylýar (cosα ýaly belgilenýär).

α burça laýyk nokat başga çärýeklerde ýatsa, aşakdaky ýaly şekillere eýe bolarys (4-nji surat):



4-nji surat.

Pifagoryň teoremasyna görä, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ – *esasy trigonometrik toždestwo ýerlikli, munda* $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$.

Trigonometriýada garalýan burç (duga) lar graduslarda ýa-da radianlarda ölçelmegi mümkin.

α merkezi burça laýyk duganyň uzynlygynyň şol duganyň radiusyna gatnaşygyna şu burçuň radian ölçegi diýilýär.

Graduslarda berlen α burçuň radian ölçegi $\frac{\pi}{180^\circ}\alpha$ deň.

Köp duşýan burçlaryň radian ölçegleriniň jedwelini berýäris:

Gradus	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

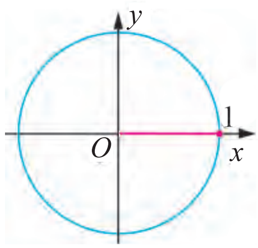
Käbir α burçlaryň sinusynyň we kosinusynyň bahalaryny tapalyň.

1. $\alpha = 0°$ bolsun (5-nji surat). Bu ýagdaýa laýyk nokadyň abssissasy 1-e, ordinatasy bolsa 0-a deň, diýmek, $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$.

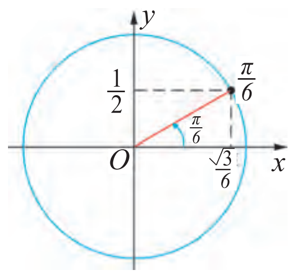
2. $\alpha = \pi/6 = 30°$ bolsun (6-njy surat). Gönüburçly üçburçlukda 30° ly burçuň garşysyndaky katet gipotenuzanyň ýarysyna deň bolany sebäpli, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ bolýar. Esasy trigonometrik toždestwo görä $\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\alpha = \pi/4 = 45°$ bolsun (7-nji surat). Munda deňýanly gönüburçly üçburçluk alynýar.

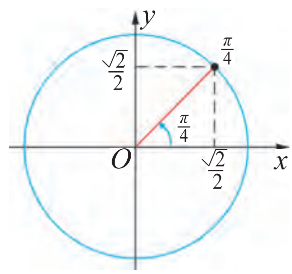
Beýle üçburçlukda α burçuň sinusy we kosinusy özara deňdir. Olary x diýeliň. Esasy trigonometrik toždestwodan $x^2 + x^2 = 1$, ýagny $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bolýar. Diýmek, $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



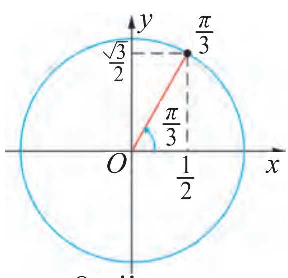
5-nji surat.



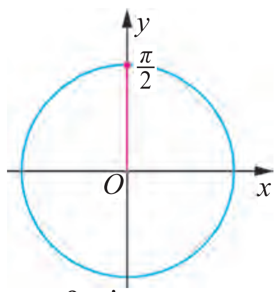
6-njy surat.



7-nji surat.



8-nji surat.

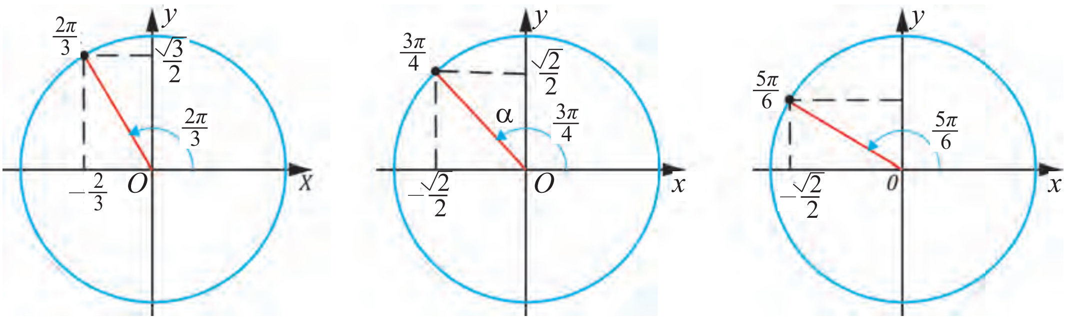


9-njy surat.

4. $\alpha = \pi/3 = 60°$ bolsun (8-nji surat). Munda edil $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ýagdaýa meňzeş pikir ýöredip, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ deňliklere eýe bolarys.

5. $\alpha = \pi/2 = 90°$ bolsun (9-njy surat). Bu ýagdaýa laýyk nokadyň abssissasy

0-a, ordinatasy bolsa 1-e deň. Diýmek, $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.



10-njy surat.

6. $2\pi/3 = 120°$, $3\pi/4 = 135°$, $5\pi/6 = 150°$ bolan ýagdaýlara garalyň. (10-njy surat). $2\pi/3$ nokat üçin $2\pi/3 = \pi - \pi/3$. Onda, bu nokat $\pi/3$ nokada OY okuna görä simmetrik. Diýmek, $\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$3\pi/4$ nokat üçin $3\pi/4 = \pi - \pi/4$. Onda, bu nokat $\pi/4$ nokada OY okuna görä simmetrik. Diýmek, $\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

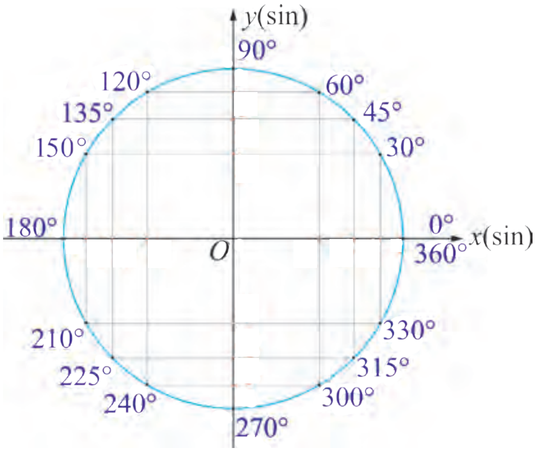
$5\pi/6$ nokat üçin $5\pi/6 = \pi - \pi/6$. Onda, bu nokat $\pi/6$ nokada OY okuna görä simmetrik. Diýmek, $\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$.

7. $\alpha = \pi = 180°$ ýagdaýda $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ bolýandygyny subut etmek we degişli surat çyzmagy okuwça hödürleýäris.

Ýokarda biz $[0; \pi]$ aralykda käbir burçlar üçin sinusyň we kosinusyň bahalaryny anykladyk. Bu burçlaryň her birine π-ni goşup $[\pi; 2\pi]$ aralykdaky burçlar üçin hem sinusyň we kosinusyň bahalaryny anyklamak mümkin.

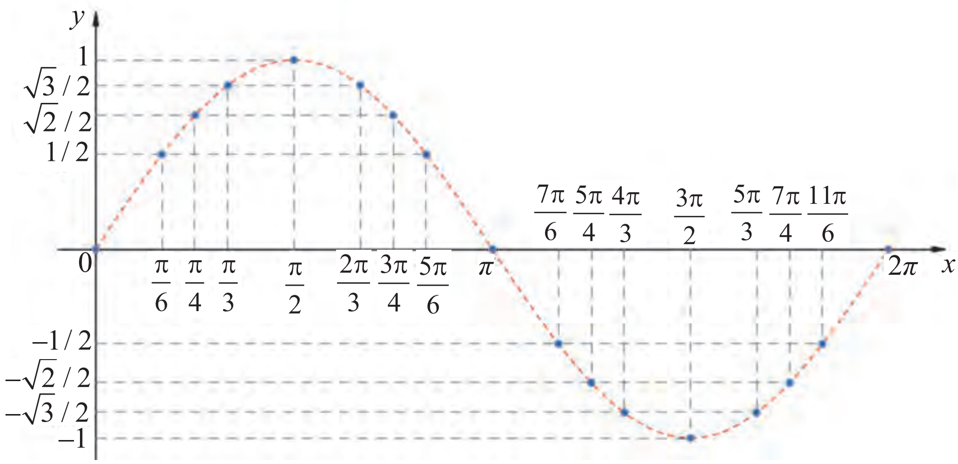
Netijeleri trigonometrik tözerek diýip atlandyrylýan 11-nji suratda aňladýarys:

Ýokardaky bahalardan peýdalanyp $y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiýalar grafiklerini gurmak bolýar. Munuň üçin abssissalar okunda α burçuň bahalaryny, ordinatalar okunda bolsa sinusyň degişli bahalaryny alyp, alnan nokatlary belgileýäris. Soň belgilenen nokatlary tekiz çyzyk bilen utgaşdyryp, $[0;2\pi]$ aralykdaky $y = \sin x$ (12-nji surat), funksiýanyň grafigini alarys. $y = \cos x$ (13-nji surat) grafigi hem şunuň ýaly gurulýar.

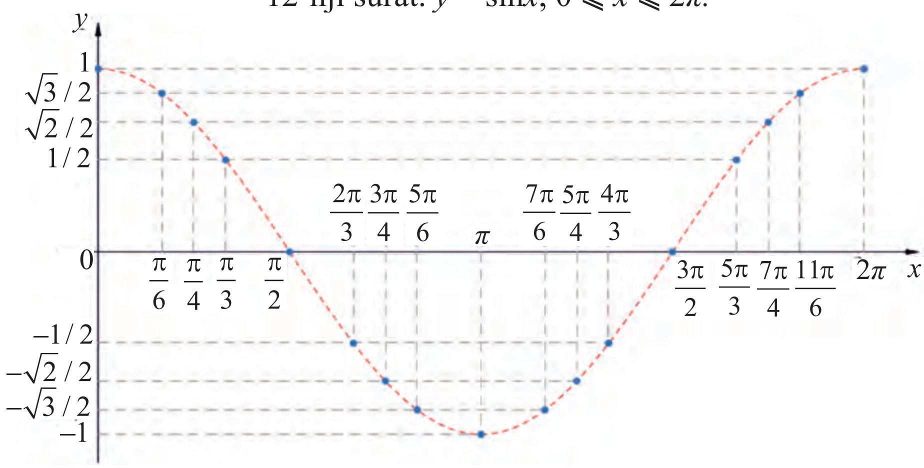


$30° = \dfrac{\pi}{6}$;	$45° = \dfrac{\pi}{4}$;	$60° = \dfrac{\pi}{6}$;
$90° = \dfrac{\pi}{2}$;	$120° = \dfrac{2\pi}{3}$;	$135° = \dfrac{3\pi}{6}$;
$180° = \pi$;	$210° = \dfrac{7\pi}{6}$;	$225° = \dfrac{5\pi}{4}$;
$240° = \dfrac{4\pi}{3}$;	$270° = \dfrac{3\pi}{2}$;	$300° = \dfrac{5\pi}{3}$;
$315° = \dfrac{7\pi}{4}$;	$45° = \dfrac{11\pi}{6}$.	

11-nji surat. Trigonometrik tӧwerek. Sinusyň we kosinusyň käbir bahalary.

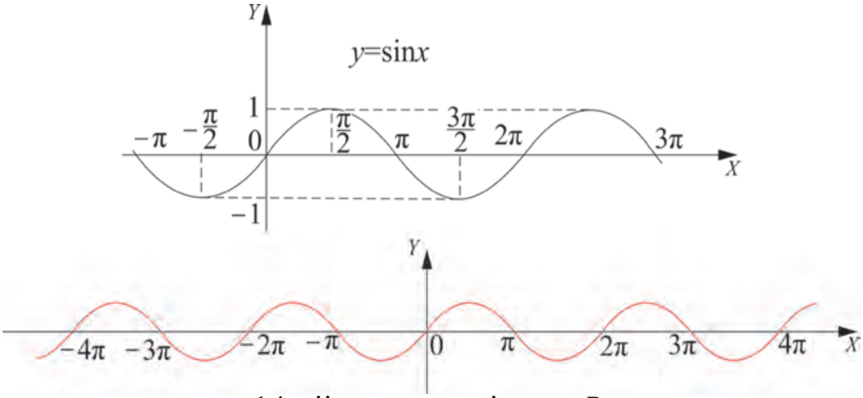


12-nji surat. $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

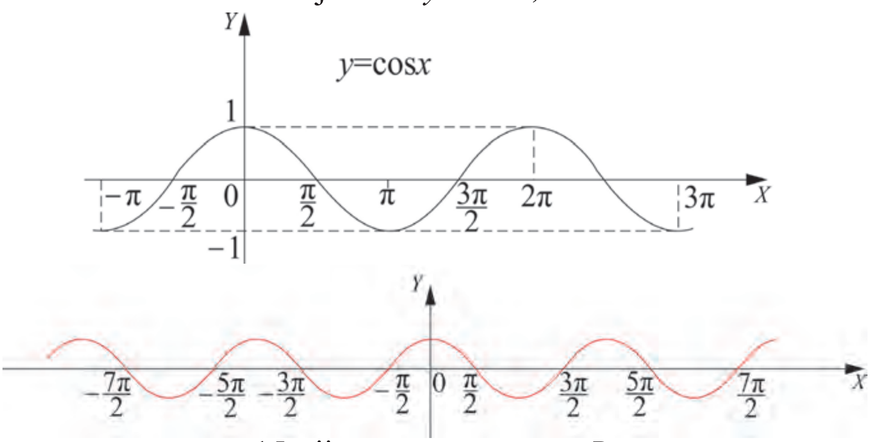


13-nji surat. $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Bu grafikleri periodik ýagdaýda dowam etdirip, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiýalaryň grafiklerini alarys (14 we 15-nji suratlar).



14-nji surat. $y = \sin x,\ x \in R$.



15-nji surat. $y = \cos x,\ x \in R$.

Grafikleri okap şeýle netijä gelýäris: $y=\sin x$ ($y=\cos x$) funksiýanyň periody 2π-ge, amplitudasy 1-e, iň uly bahasy 1-e, iň kiçi bahasy bolsa -1-e deň.

Ulanylyşda köp duşýan $y=a\sin x$ we $y=\sin bx$, $b\neq0$ funksiýalar barada käbir pikir ýöretmeleri getirýäris.

$y = a\sin x$ funksiýanyň amplitudasy $|a|$-ga deň. Onuň grafigi $y = \sin x$ funksiýanyň grafigini $|a| > 1$ bolanda ordinatalar oky boýunça uzaltmak, $|a| < 1$ bolanda bolsa gysmak netijesinde alynýar. $y = \sin bx$ funksiýanyň periody $\dfrac{360°}{|b|}$ -e deň. Bu funksiýanyň grafigi $y = \sin x$ funksiýanyň grafigini $0 < |b| < 1$ bolanda abssissalar oky boýunça uzaltmak, $|b|>1$ bolanda gysmak netijesinde alynýar.

$y = \sin x + c$ görnüşdäki funksiýanyň grafigi $y=\sin x$ funksiýanyň grafigini c birlige parallel göçürmek netijesinde alynýar we munda $y=\sin x+c$ funksiýanyň baş oky $y = c$ deňlemä eýe.

Ýokardakylary hasaba alyp, $y = a\sin bx + c$ görnüşdäki funksiýanyň grafigini almak mümkin.

Meselem, $y = 2\sin 3x + 1$ funksiýa garalyň.

Bu funksiýanyň grafigi $y = \sin x$ funksiýanyň grafiginden aşakdaky ýaly alynýar:

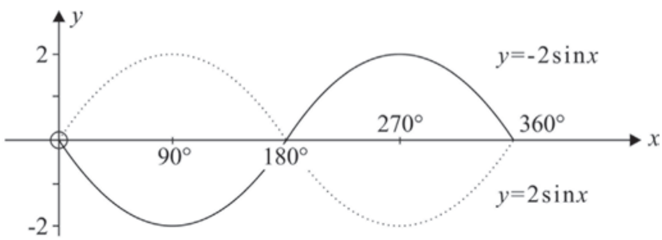
1. Amplitudany ikä köpeldip $y = 2\sin x$-i alarys
2. Periody üçe bölüp, $y = 2\sin 3x$-i alarys
3. Berlen 1 birlige parallel göçürýäris. $y = 2\sin 3x + 1$ funksiýanyň baş oky $y = 1$ deňlemä eýe.
4. Netijede $y = 2\sin 3x +1$ funksiýanyň grafigini alarys.

Şoňa meňzeş pikir ýöretmeleri $y = \cos x$ funksiýa barada hem getirmek bolýar.

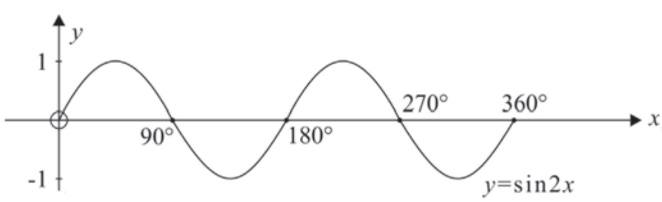
1-nji mysal. $y = 2\sin x$, $y = -2\sin x$, $y = \sin 2x$ funksiýalaryň grafiklerini guruň, $0° \leq x \leq 360°$

△ Ilki $y = 2\sin x$ funksiýanyň grafigini gurýarys. Bu funksiýanyň amplitudasy 2-ä deň we onuň grafigi $y=\sin x$ funksiýanyň grafiginden ordinata oky boýunça uzaltmak netijesinde alynýar:

$y = -2\sin x$ funksiýanyň grafigi $y = 2\sin x$ funksiýanyň grafigine abssissalar okuna görä simmetrik. Mundan peýdalanyp, $y = -2\sin x$ funksiýanyň grafigini gurýarys.

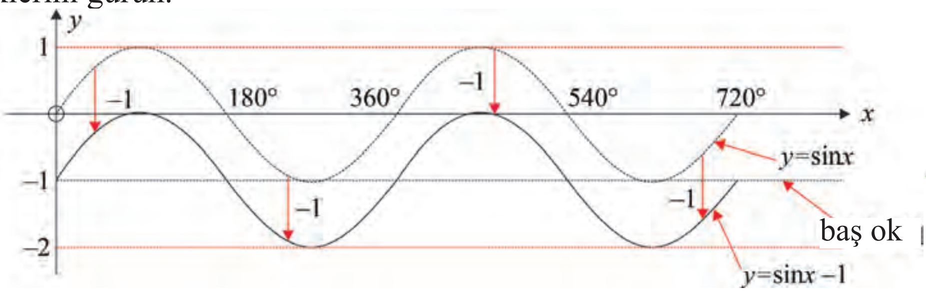


$y = \sin 2x$ funksiýanyň periody $\dfrac{360°}{2} = 180°$. Bu funksiýanyň grafigi aşakdaky ýaly bolýar:



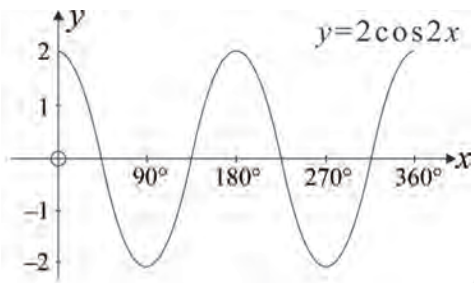
▲

2-nji mysal. $0° \leqslant x \leqslant 720°$ bolanda $y = \sin x$ we $y = \sin x - 1$ funksiýalaryň grafiklerini guruň.



3-nji mysal. $0° \leqslant x \leqslant 360°$ kesimde $y = 2\cos 2x$ funksiýanyň grafigini guralyň.

$a=2$. Diýmek, funksiýa amplitudasy $|2| = 2$ bolýar, $b = 2$ bolany üçin funksiýanyň periody bolsa $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{2} = 180°$ bolýar. Mundan şu grafige eýe bolarys:



Soraglar we ýumuşlar

1. Birlik tegelekde burçuň sinusyna kesgitleme beriň.
2. Birlik tegelekde burçuň kosinusyna kesgitleme beriň.
3. 30°-ly burç üçin sinusy we kosinusy hasaplaň.
4. $y = \sin x$ funksiýanyň grafigini çyzyň.
5. $y = \cos x$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

Gönükmeler

117. Grafikleri $0° \leqslant x \leqslant 360°$ kesimde guruň:

a) $y = 3\sin x$; b) $y = -3\sin x$; ç) $y = \frac{3}{2}\sin x$; d) $y = -\frac{3}{2}\sin x$.

118. Grafikleri $0° \leqslant x \leqslant 540°$ kesimde guruň:

a) $y = \sin 3x$; b) $y = \sin(\frac{x}{2})$; ç) $y = \sin(-2x)$; d) $y = -\sin\frac{x}{3}$.

119. Funksiýanyň periodyny anyklaň:

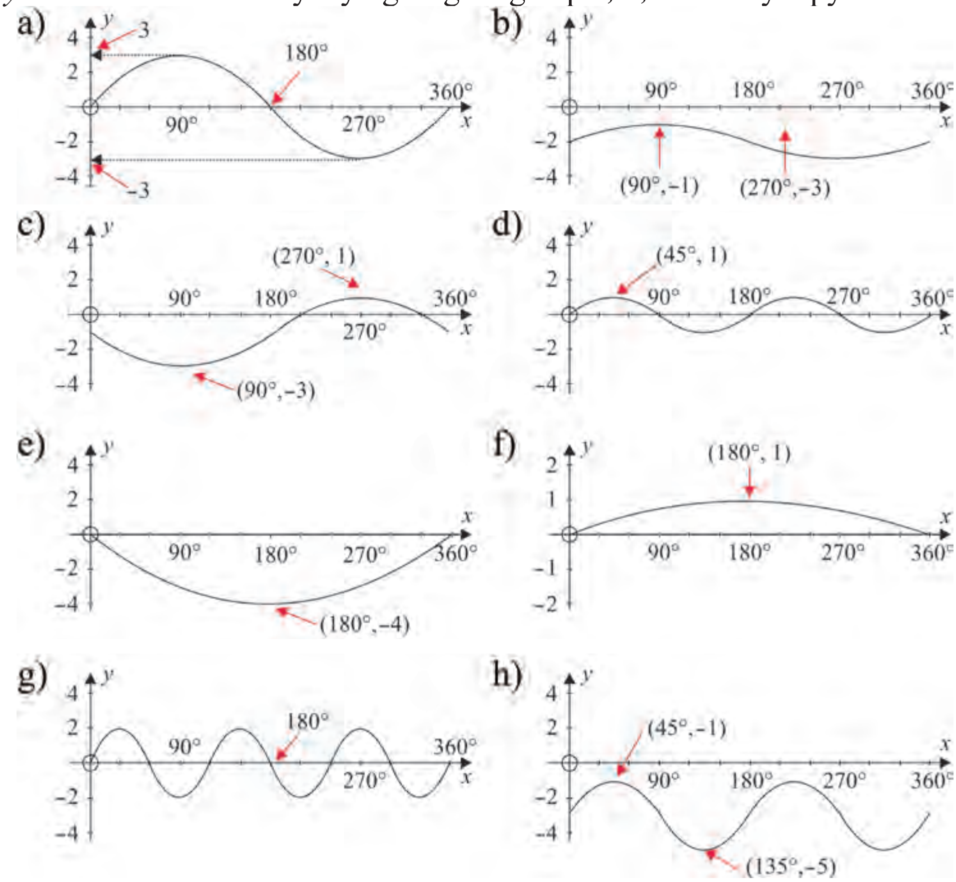
a) $y = \sin 4x$; b) $y = \sin(-4x)$; ç) $y = \sin(\frac{x}{3})$; d) $y = \sin(0,6x)$.

120. Eger $y = \sin bx$, $b>0$ üçin funksiýanyň periody

a) 900°; b) 120°; ç) 2160°; d) 720°.

-a deň bolsa, b-ni tapyň.

121. $y = a\sin bx + c$ funksiýanyň grafigine garap a, b, c sanlary tapyň:

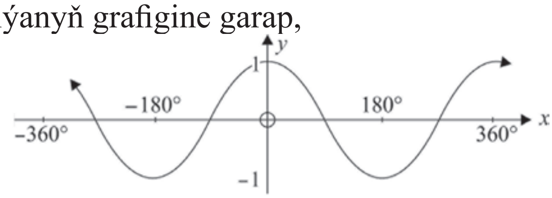


122. Grafikleri $0° \leqslant x \leqslant 360°$ kesimde guruň:

a) $y = \sin x + 1$; b) $y = \sin x - 2$; ç) $y = 1 - \sin x$;

d) $y = 2\sin x - 1$; e) $y = \sin 3x + 1$; f) $y = 1 - \sin 2x$.

123. $y = \cos x$ funksiýanyň grafigine garap,



a) $y = \cos x + 2$; b) $y = \cos x - 1$; ç) $y = \dfrac{2}{3}\cos x$;

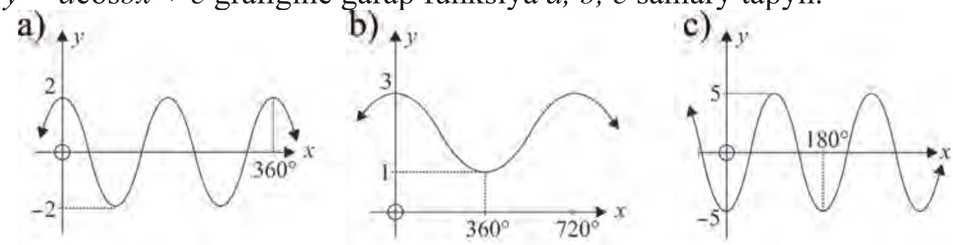
d) $y = \dfrac{3}{2}\cos x$; e) $y = -\cos x$; f) $y = \cos 2x$;

g) $y = \cos(\dfrac{x}{2})$; h) $y = 3\cos 2x$ funksiýalaryň grafiklerini guruň.

124	Funksiýanyň periodyny anyklaň:
	a) $y = \cos 3x$; b) $y=\cos(\frac{x}{3})$; ç) $y=\cos(\frac{x}{2})$; d) $y = \cos 4x$.

125. $y = a\cos bx + c$ funksiýa berlen bolsun. a, b, c sanlaryň geometrik manysyny anyklaň.

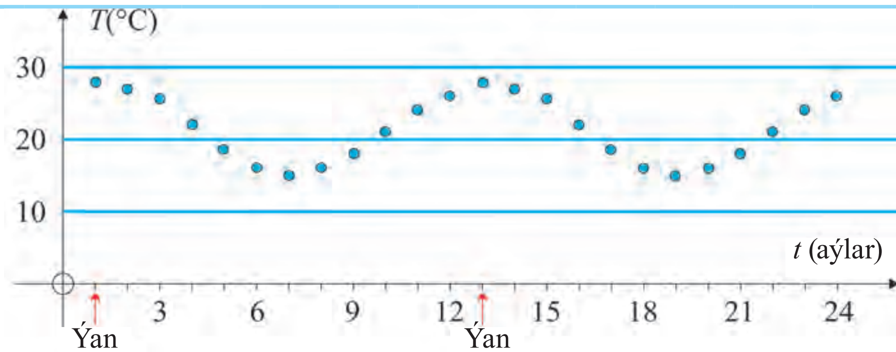
126. $y = a\cos bx + c$ grafigine garap funksiýa $a,\ b,\ c$ sanlary tapyň.



4-nji mysal. Aşakda Günorta Afrikadaky Keýptaun şäherinde howanyň aýlyk maksimal temperaturasynyň üýtgeýşini aňladýan jedwel berlen:

Aý	*Ýan*	*Few*	*Mar*	*Apr*	*Maý*	*Iýun*	*Iýul*	*Awg*	*Sen*	*Okt*	*Noý*	*Dek*
T(°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Maksimal temperaturanyň üýtgeýşini takmyny görkezýän grafigi getirýäris:



Bu hadysanyň modeli $T = a\cos bt + c$ görnüşde bolsun diýip çak edip, parametrler – $a,\ b,\ c$-leri tapýarys. Period 12 aý bolany üçin

$$\frac{360°}{|b|}=12\text{, ýagny } b=\frac{360°}{12}=30°.$$

Amplitudany hasaplaýarys: $\frac{\max-\min}{2}\approx\frac{28-15}{2}=6{,}5$. Mundan $\alpha \approx 6{,}5$.

Baş ok maksimal we minimal bahalar göni çyzyklaryň arasynda bolany sebäpli $c\approx\frac{28+15}{2}\approx 21{,}5$.

Diýmek, maksimal aýlyk temperatura wagtyň geçmegi bilen üýtgemeginiň matematik modeli $T \approx 6,5 \cos 30t + 21,5$ funksiýadyr.

Gönükmeler

127. Antarktidadaky Polýar bazada 30 ýylyň dowamynda ortaça temperaturanyň aşakdaky ýaly bolanlygy mälim:

Aýyň tertip nomeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatura (°C)	0	–4	–10	–15	–16	–17	–18	–19	–17	–13	–6	–1

Ortaça temperaturanyň üýtgeýşiniň matematiki modelini düzüň.

128. Deňziň kenarynda deňiz suwunyň göterilmegi we yza gaýtma hadysasy bolanda aşakdakylar anyklandy: 1) Suw çuňlugynyň iň uly we iň kiçi bahalarynyň arasyndaky tapawut 14 metr. 2) Suwuň çuňlugy iň uly bahalara ortaça her 12,4 sagatda ýetýär.3) Suw çuňlugynyň wagta görä üýtgemeginiň matematiki modelini düzüň we ony grafiki görnüşde aňladyň.

129. Welosiped tigirinde sary reňkli şöhle serpiji ornaşdyrylan. Welosiped gijesine tekiz ýol boýunça hereketlenende ol wideoteswire alyndy. Wideoteswir esasynda şöhle serpijiniň ýola görä beýikligi wagtyň geçmegi bilen nähili üýtgänligi anyklanyp, aşakdaky jedwel dolduryldy:

Wagt (t sek)	0,1	0.2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Beýiklik (H, sm)	19	17	38	62	68	50	24	15	31

a) Sinus funksiýasyndan peýdalanyp, hadysanyň matematiki modelini düzüň.

b) Hadysanyň grafiki görnüşini getiriň.

ç) Tigiriň radiusyny tapyň.

d) Welosiped nähili tizlikde hereketlenýär?

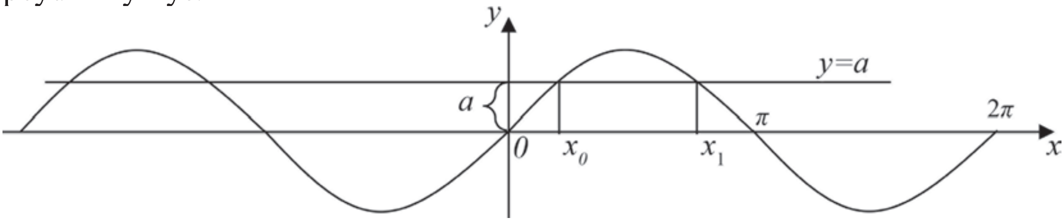
59-61 IŇ ÝÖNEKEÝ TRIGONOMETRIK DEŇLEMELER

$\sin x = a$ deňleme

Bize mälim bolşy ýaly, $-1 \leq \sin x \leq 1$, şonuň üçin bu deňleme $|a|>1$ bolanda çözüwe eýe däl. $-1 \leq a \leq 1$ aralykda deňlemäniň çözüwini tapmak üçin aşakdaky kesgitlemäni girizýäris.

$a \in [-1;1]$ sanyň *arksinusy* diýip sinusy a-ga deň bolan $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ sana aýdylýar: eger $\sin x = a$ we $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ bolsa, $\arcsin a = x$.

Deňlemäni çözmek üçin 16-njy suratdaky $y=\sin x$ funksiýanyň grafiginden peýdalanýarys.



16-njy surat.

Grafikden görnüşi ýaly, $a \in [-1;1]$ bolanda $y = a$ funksiýa $[0;2\pi]$ aralykda $y = \sin x$ funksiýanyň grafigini abssissalary x_0 we $x_1 = \pi - x_0$ bolan nokatlarda kesýär. Bu iki nokady bir formula arkaly ýazmak mümkin:

$$x = (-1)^n \arcsin a,\ n = 0,\ 1.$$

$y = \sin x$ funksiýanyň periodikliginden peýdalanyp, deňlemäni çözmek üçin şu formulany alarys:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z. \qquad (1)$$

1-nji mysal. Hasaplaň: 1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

△Kesgitlemä görä $-1 \le \frac{\sqrt{3}}{2} \le 1$, $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ we $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bolany üçin $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Edil şonuň ýaly, $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$ bolýar.▲

2-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\sin x = \frac{1}{2}$.

△(1) Formula görä deňlemäniň çözüwi

$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$ bolýar.▲

3-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

△$y = \sin x$ funksiýa täk bolany üçin $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ bolýar.

(1) formulany ulanyp, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k,\ \ k \in Z$ deňli-

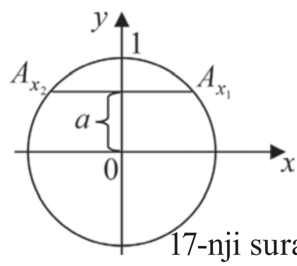
gi alarys. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ bolany üçin $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$, $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$, yoki $x=\frac{\pi}{6}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$ çözüwleri alarys. ▲

sin$x$ = a deňlemäniň möhüm ýagdaýlardaky çözüwlerini getirýäris:
$a=1$ bolanda $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; $a=-1$ bolanda $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi k$, $k\in Z$;
a=0 bolanda $x=\pi k$, $k\in Z$.

4-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=0$.

△ a=0 bolýanlygyndan $-\frac{\pi}{10}+\frac{x}{2}=\pi k$, $\frac{x}{2}=\pi k+\frac{\pi}{10}$, ýagny $x=\frac{\pi}{5}+2\pi k$, $k\in Z$ çözüwleri tapýarys. ▲

sin$x$ = a deňlemäni çözmegi birlik tegelekde düşündirmek aňsat. sin$x$-iň kesgitlemesine görä, onuň bahasy birlik tegelekdäki A_x nokadyň ordinatasydyr. $|a|<1$ bolanda beýle nokatlar 2 sany, ýagny A_{x_1} we A_{x_2}. $a=\pm1$ bolanda bolsa 1 sany (17-nji surat).



17-nji surat.

cos$x$=a deňleme

$-1\le\cos x\le1$ bolany üçin bu deňleme $|a|>1$ bolanda çözüwe eýe däl. $-1\le a\le1$ aralykda deňleme çözüwini tapmak üçin aşakdaky kesgitlemäni girizýäris.

$a\in[-1;1]$ sanyň ***arkkosinusy*** diýip kosinusy a ga deň bolan $x\in[0;\pi]$ sana aýdylýar: eger cos$x$=a we $x\in[0;\pi]$ bolsa, arccos a=x.

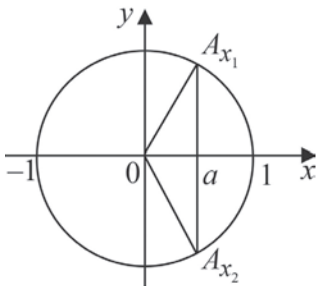
Kesgitlemä görä, $[0;\pi]$ aralykda cos$x$=a deňleme bir x=arccos$a$ köke eýe. y=cos$x$ funksiýa jübüt bolanlygy üçin $[-\pi;0]$ aralykda-da bir x=−arccos$a$ çözüwe eýe. Funksiýanyň periody 2π. Onda cos$x$=a deňlemäni çözmek üçin
$x=\pm\arccos a+2\pi k$, $k\in Z$ (2) formulany alarys.

5-nji mysal. Hasaplaň: 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

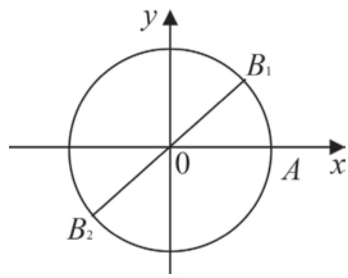
△ Kesgitlemä görä, $-1\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le1$, $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$ we $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bolany üçin $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$ bolýar. Edil şonuň ýaly, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$ bolýar. ▲

6-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

△(2) formula görä deňlemäniň çözüwini $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$emma $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$. Diýmek, çözüw şu görnüşde bolýar: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$ ▲



18-nji surat.



19-njy surat.

$\cos x = a$ deňleme çözülişini birlik tegelekde düşündirýäris (18-nji surat). $\cos x$ funksiýanyň kesgitlemesine görä onuň bahasy birlik tegelekdäki A_x nokadyň abssissasy bolýar. $|a| < 1$ bolanda beýle nokatlar 2 sany, ýagny A_{x_1} we A_{x_2}; $a = 1$ we $a = -1$ bolanda beýle nokat bir sany.

$\cos x = a$ deňlemäniň möhüm ýagdaýlardaky çözüwlerini getirýäris:
$a = 1$ bolanda $x = 2\pi k,\ k \in Z$; $a = -1$ bolanda $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$;
$a = 0$ bolanda $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

7-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

△$\cos x = 0$ deňlemäniň çözüwiniň formulasyndan $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ni alarys. Mundan, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$. ▲

tg*x*=*a* deňleme

Bu deňlemäni çözmek üçin aşakdaky kesgitlemäni girizýäris. $a \in R$ sanyň *arktangensi* diýip, tangensi a sana deň bolan $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ sana aýdylýar: eger $\operatorname{tg} x = a$ we $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ bolsa, $\operatorname{arctg} a = x$.

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ bolany üçin $\operatorname{tg} x$ birlik tegelekdäki $B\ (x;\ y)$ nokat ordinatasynyň abssissasyna gatnaşygyna deň (19-njy surat), ýagny bu nokat $\frac{y}{x} = a$ göni çyzyk bilen birlik tegelegiň kesişme nokadydyr. 19-njy surata görä beýle nokatlar 2 sany: B_1 we B_2 nokatlar. Şonuň üçin deňlemäniň çözüwi aşakdaky ýaly bolýar:

$$x = \text{arctg}a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (3)$$

8-nji mysal. Hasaplaň: 1) arctg1; 2) $\text{arctg}(-\sqrt{3})$.

△ 1) $\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ we $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bolany üçin $\text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$;

2) $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ we $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bolany üçin $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ ▲

9-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$

△ (3)-e görä, deňlemäniň çözüwleri aşakdaky ýaly bolýar:

$x - \frac{\pi}{6} = \text{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n$. $\text{arctg}(-\sqrt{3}) = -\text{arctg}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ bolany üçin deňlemäniň çözüwleri $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, ýa-da $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$. ▲

Iň ýönekeý trigonometrik deňlemeler üçin jedweli getirýäris:

Deňleme	Çözüwleri	Käbir häsiýetler
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z.$	$\arcsin(-a) = -\arcsin a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1.$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1.$
$\text{tg}x = a$	$x = \text{arctg}\ a + \pi k,\ k \in Z.$	$\text{arctg}(-a) = -\text{arctg}\ a,\ a \in R.$

Üçünji sütünde getirilen häsiýetler otrisatel sanlar arksinuslary (arkkosinuslary, arktangensleri) bahalaryny položitel sanlaryň arksinuslarynyň bahalary arkaly tapmaga mümkinçilik berýär. Meselem, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$,

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

10-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $\cos(10x + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$.

△ $10x + \frac{\pi}{8} = z$ belgileme girizip, $\cos z = \frac{1}{2}$ deňlemäni alarys. Mundan (2) formula görä $z = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$, ýagny $10x + \frac{\pi}{8} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ýa-da $x = \frac{1}{10}\left(-\frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right),\ k \in Z$. ▲

$\sin x=\sin a$, $\cos x=\cos b$, $\mathrm{tg}\, x=\mathrm{tg}\, c$ görnüşdäki deňlemeler

Beýle deňlemeleriň çözüwi, degişlilikde, aşakdaky ýaly bolýar:

$$x=(-1)^k a+\pi k;\quad k\in Z;\quad x=\pm b+2\pi n,\ n\in Z;\quad x=c+\pi m,\ m\in Z. \qquad (4)$$

11-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\cos(3x-40°)=\cos(2x+60°)$.

△(4) formula görä, $3x-40° = \pm(2x+60°)+360°n,\ n\in Z$ deňlemäni alarys. Mundan näbelli x tapylýar:

$$3x-40°=2x+60°+360°n \iff x=100°+360°n,\ n\in Z;$$

$$3x-40°=-2x-60°+360°n,\ 5x=-20°+360°n \iff x=-4°+72°n,\ n\in Z.▲$$

12-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\sin^2 x+3\sin x+2=0$.

△$\sin x=z$ belgilemek girizip, $z^2+3z+2=0$ kwadrat deňlemä gelýäris. Bu deňlemäni çözüp $z_1=-2$, $z_2=-1$-ler tapylýar. Belgilemä görä $\sin z=-2$ we $\sin x=-1$ deňlemeleri alarys. $\sin z=-2$ çözüwe eýe däl. $\sin x=-1$ deňleme $x=270°+360°k,\ k\in Z$ çözüwe eýe. Diýmek, deňlemäniň çözüwi $x=270°+360°k$, $k\in Z$ bolýar.▲

Soraglar we ýumuşlar

1. $\sin x=a$ deňleme nähili çözülýär? Mysalda düşündiriň.
2. $\cos x=a$ deňleme nähili çözülýär? Mysal getiriň.
3. $\mathrm{tg}\, x=a$ deňleme nähili çözülýär? Mysal kömeginde düşündiriň.
4. $\arcsin a$ sanyna kesgitleme beriň. Mysalda düşündiriň.
5. $\arccos a$ sanyna kesgitleme beriň. Mysalda düşündiriň.
6. $\mathrm{arctg}\, a$ sanyna kesgitleme beriň. Mysalda düşündiriň.

Gönükmeler

Hasaplaň (**130-141**):

130. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin\frac{1}{2}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

131. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\arcsin 1$; 4) $\arcsin(-1)$.

132. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos(-1)$.

133. 1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos\frac{1}{2}$; 3) $\arccos 1$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

134. 1) $\mathrm{arctg}\, 1$; 2) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 3) $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3\cdot\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

135. 1) $\operatorname{arctg} 0$; | 2) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; | 3) $\operatorname{arctg}(-1)$; | 4) $7\cdot\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

136. 1) $\arcsin 1+\arcsin(-1)$; 2) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+4\arcsin\frac{1}{2}$.

137. 1) $4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; | 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

138. 1) $2\arccos 1+3\arccos 0$; 2) $6\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

139. 1) $2\arccos(-1)-3\arccos 0$; 2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

140. 1) $3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+3\arccos\frac{1}{2}$; 2) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

141. 1) $2\operatorname{arctg} 1+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Aňlatmalar mana eýe ýa-da eýe dälligini anyklaň (**142-143**):

142. 1) $\arccos(\sqrt{8}-3)$; | 2) $\arcsin(2-\sqrt{15})$; | 3) $\arccos(3-\sqrt{18})$.

143. 1) $\operatorname{tg}(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; | 2) $\arcsin(\sqrt{6}-2)$; | 3) $\operatorname{tg}(3\arccos\frac{1}{2})$.

Deňlemäni çözüň (**144-161**):

144. 1) $\sin x=-\frac{1}{2}$; | 2) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 4) $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

145. 1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 2) $\sin x=1$; | 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 4) $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

146. 1) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 2) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 3) $\cos 2x=-1$; | 4) $\cos 3x=1$.

147. 1) $\cos x=\frac{1}{2}$; | 2) $\cos x=-1$; | 3) $\cos 5x=-\frac{1}{2}$; | 4) $\cos 3x=-1$.

148. 1) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$; | 2) $\operatorname{tg}x=1$; | 3) $\operatorname{tg}9x=-1$; | 4) $\operatorname{tg}3x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

149. 1) $\mathrm{tg}x=0$; 2) $\mathrm{tg}x=2$; 3) $\mathrm{tg}6x=-3$; 4) $\mathrm{tg}5x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

150. 1) $2\cos x+1=0$; | 2) $2\cos x-\sqrt{3}=0$; | 3) $2\cos x-\sqrt{2}=0$.

151. 1) $\sqrt{2}\sin x-1=0$; | 2) $2\sin x+\sqrt{3}=0$; | 3) $2\sin x+\sqrt{2}=0$.

152. 1) $\sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\mathrm{tg}\,4x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; | 3) $\cos(-3x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

153. 1) $2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; | 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$; | 3) $2\cos(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{6})=\sqrt{3}$.

154. 1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=-1$; | 2) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{3}\right)=1$; | 3) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$.

155. 1) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$; | 2) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$; | 3) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

156. 1) $(2\sin x+\sqrt{2})(\sin 4x+1)=0$; | 2) $(2-\cos x)(1+3\cos x)=0$.

157. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; | 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
3) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; | 4) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$.

158. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; | 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
3) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; | 4) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$.

159. 1) $2\cos^2 x-\sin x+1=0$; | 2) $\mathrm{tg}^2 x-3\,\mathrm{tg}\,x-4=0$;
3) $4\sin^2 x-\cos x-1=0$; | 4) $\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x+1=\sqrt{3}$.

160. 1) $\cos x=\cos 2x$; | 2) $\mathrm{tg}2x=\mathrm{tg}3x$; | 3) $\sin 7x=\sin 3x$; | 4) $\cos 4x=\cos 5x$.

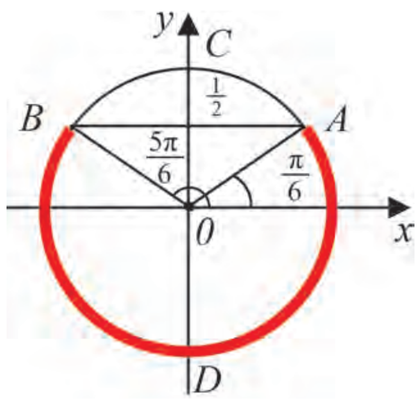
161. 1) $\sin 4x=\sin x$; | 2) $\sin 2x=\cos 3x$; | 3) $\mathrm{tg}10x=\mathrm{tg}8x$; | 4) $\sin 5x=\sin 7x$.

62-64 IŇ ÝÖNEKEÝ TRIGONOMETRIK DEŇSIZLIKLER

$a_1 < \sin x < b_1$, $a_2 < \cos x < b_2$, $a_3 < \mathrm{tg}x < b_3$ görnüşdäki deňsizliklere iň ýönekeý trigonometrik deňsizlikler diýilýär. Bu ýerde a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 – berlen hakyky sanlar. Beýle deňsizlikleri çözende birlik tegelekden, funksiýanyň grafiginden peýdalanmak amatly.

1-nji mysal. $\sin x \le 0{,}5$ deňsizligi $[0{,}2\pi]$ kesimde çözüň.

△Birlik tegelegi garaýarys. Bu tegelekde ordinatalary 0,5-e deň we ondan kiçi nokatlary tapýarys. 20-nji suratdan görnüşi ýaly, *BDA* duganyň ähli nokatlary ýokardaky şerti kanagatlandyrýar. Şonuň üçin x sanlaryň $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ toplumy deňsizligiň çözüwi bolýar. *Jogaby*: $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ ▲

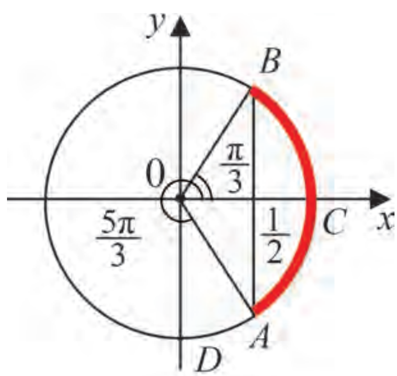


20-nji surat.

2-nji mysal. $\cos x > \frac{1}{2}$ deňsizligi $[0{,}2\pi]$ kesimde çözüň.

△Birlik tegelekde abssissalary $\frac{1}{2}$ -a deň we ondan uly nokatlary tapýarys. 21-nji suratdan görnüşi ýaly, *ACB* duganyň ähli nokatlary ýokardaky şerti kanagatlandyrýar. Şonuň üçin x laryň $\left[0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$ toplumy deňsizligiň çözüwi bolýar.

Jogaby: $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$ ▲



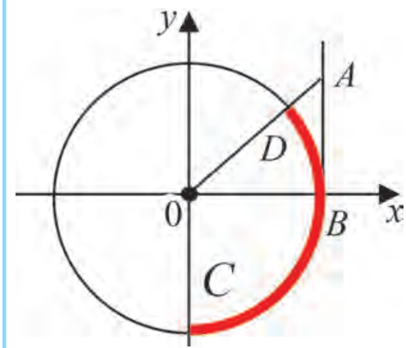
21-nji surat.

3-nji mysal. $\mathrm{tg}x \le 1$ deňsizligi $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ aralykda çözüň.

△Birlik tegelegiň *B* nokadyndan *OY* okuna parallel *AB* göni çyzyk geçirýäris (22-nji surat).

Onda A nokady şeýle saýlaýarys, munda $OB=AB$ bolsun. $\triangle AOB$ deňýanly we gönüburçlydyr. OA gipotenuzanyň töwerek bilen kesişme nokady D bolsun.
Suratdan görnüşi ýaly, DBC duganyň ähli nokatlary berlen deňsizligi kanagatlandyrýar.

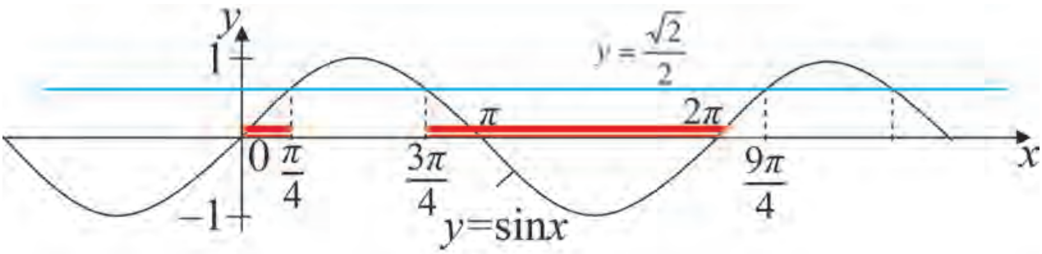
Jogaby: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$. ▲



22-nji surat.

4-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ Bir koordinatalar sistemasyna $y = \sin x$ we $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (23-nji surat) funksiýa-



23-nji surat.

laryň grafiklerini çyzyp, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ deňlemäniň [0; 2π] kesimdäki çözüwini tapýarys. Suratdan görnüşi ýaly, $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ deňsizligiň [0; 2π] kesimdäki çözüwi $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ we $\left(\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right]$ aralyklar bolýar. Funksiýanyň periodikliginden x-iň $\left[2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; 2\pi(n+1)\right]$, $n \in Z$ toplum deňsizligiň çözüwi. ▲

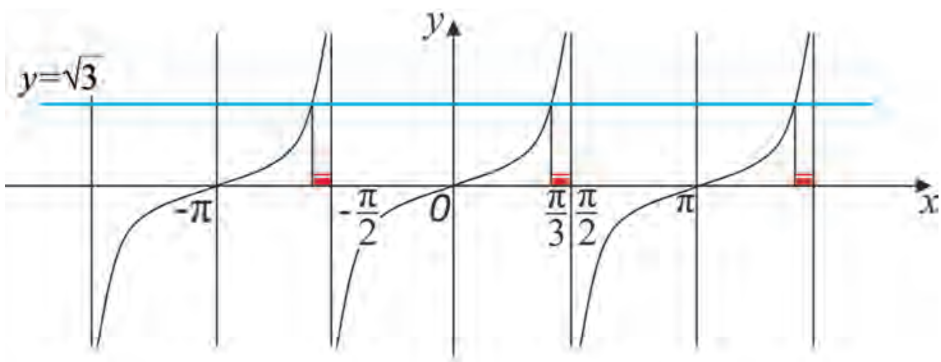
5-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $-2\cos x \geq 1$.

△ Ilki $y = \cos x$ we $y = -\frac{1}{2}$ funksiýalaryň grafigini bir koordinatalar sistemasyna çyzýarys. Soň $\cos x = -\frac{1}{2}$ deňlemäniň [0; 2π] kesimdäki çözüwleri $\dfrac{2\pi}{3}$ va $\dfrac{4\pi}{3}$ bolýandygyny anyklaýarys. Diýmek, deňsizligiň çözüwleri $\left[\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;\dfrac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$ kesimlerden ybarat eken.▲

6-njy mysal. Deňsizligi çözüň: $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

△ $y=\operatorname{tg} x$ va $y=\sqrt{3}$ funksiýalaryň grafigini bir koordinatalar sistemasyna çyzýarys (24-nji surat). $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ deňlemäni [0, π] kesimdäki çözüwini tapýarys. Bu deňlemäniň çözüwi $x=\dfrac{\pi}{3}$. Şonuň üçin deňsizligiň [0, π] kesimdäki çözüwleri toplumy $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$ aralykdyr. y=tg$x$ funksiýanyň periody π bolýanlygyndan peýdalanyp, deňsizligiň ähli çözüwlerini tapýarys:

$$\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z.$$ ▲



24-nji surat

Soraglar we ýumuşlar

$\sin x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, tg$x$ > – 1 deňsizlikler nähili çözülýär?

Gönükmeler

162. Deňsizligi berlen aralykda çözüň:

1) $\sin x>\dfrac{1}{2},\ x\in[0;\pi]$;

2) $\cos x>\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{tg} x>-\sqrt{3}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

4) $\cos x>\dfrac{1}{2},\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

5) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2},\ x\in[-\pi;0]$; 6 6) $\mathrm{tg}\, x < \frac{1}{\sqrt{3}},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

7) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; 8) $\cos 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Deňsizligi çözüň (**163–169**):

163. 1) $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\, x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

164. 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\, x > -1$; 3) $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x \le \frac{1}{2}$.

165. 1) $\sin 3x < \frac{1}{2}$; 2) $\sin\frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\mathrm{tg}\, 3x > 1$.

166. 1) $2\cos(2x+\frac{\pi}{3}) \le \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \ge 1$; 3) $2\cos(2x-\frac{\pi}{3}) > \sqrt{3}$.

167. 1) $\sin 2x\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\sin\frac{\pi}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $2\sin 2x\cos 2x \ge \frac{1}{2}$.

168. 1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin 2x\sin\frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

169. 1) $\cos\left(\frac{x}{2}+1\right) \ge \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4}-2\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(1-\frac{x}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Barlag işiniň nusgasy

Deňlemeleri çözüň (**1-4**):

1.	$\sin 3x = 0.$	2.	$4\cos 6x = -2\sqrt{3}.$
3.	$5\cdot\mathrm{tg}\, 4x = 3.$	4.	$5\mathrm{tg}^2 x - 4\mathrm{tg}\, x - 1 = 0.$

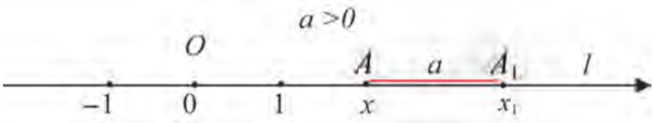
Deňsizlikleri $x\in[0;\pi]$ aralykda çözüň (**5-6**):

5.	$\sin x > \frac{1}{2}.$	6.	$\mathrm{tg}\, x \le -1.$

68 GRAFIKLERI ÇALŞYRMAK

Süýşürmek

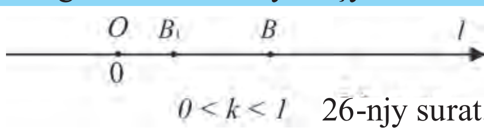
l san oky we O nokat ondaky hasap başlangyjy bolsun (25-nji surat). l -iň her haýsy nokady a birlik süýşürilsin. Eger $a > 0$ bolsa, süýşürmek položitel ugurda (okuň ugrunda) bolýar. Eger $a < 0$ bolsa, süýşürmek garşylykly ugurda ýerine ýetirilýär, $a = 0$ bolanda nokatlar öz ýerinden süýşmeýär. Eger x koordinataly $A = A(x)$ nokat a birlige süýşürilende $A_1(x_1)$ nokada geçen bolsa, A_1 nokadyň koordinatasy $x_1 = x + a$ formula boýunça anyklanýar. A nokat A_1 nokadyň asly (proobrazy), A_1 bolsa A-nyň nusgasy (obrazy) diýilýär.



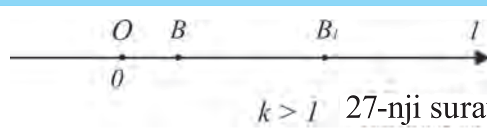
25-nji surat.

Uzaltmak

l göni çyzykda $B(x)$ nokat O koordinata başlangyjyndan k esse uzaklaşdyrylyp (ýa-da O ga ýakynlaşdyrylyp), $B_1(x)$ nokada geçirilen bolsun. B_1 nokadyň koordinatasy $x_1 = kx$ formula boýunça hasaplanýar. Eger $k > 0$ bolsa, B_1 we B nokatlar O nokadyň bir tarapynda; eger $k < 0$ bolanda B_1 we B nokatlar O-nuň dürli tarapynda ýerleşýär. Eger $|k| < 1$ bolsa, (26-njy surat) $x = OB$ kesim k esse gysgalýar; eger $|k| > 1$ bolsa, (27-nji surat) OB kesim k esse uzalýar, $k = 1$ bolanda B we B_1 nokatlar üstme-üst düşýär, $k = -1$ bolanda olar O nokada görä simmetrik ýerleşýär.



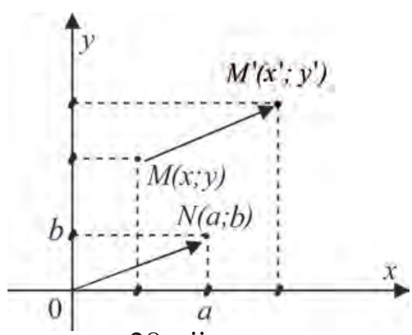
26-njy surat.



27-nji surat.

Parallel göçürmek

Parallel göçürende xOy koordinata tekizligindäki ähli nokatlar birmeňzeş ugurda birmeňzeş aralyga göçýär (28-nji surat). Meselem, $O(0;0)$ koordinata başlangyjy $N(a; b)$ nokada göçürlen bolsa, $M(x; y)$ nokat $M'(x'; y')$ -a göçýär. $M'(x'; y')$ nokadyň koordinatalary üçin aşakdaky formula ýerlikli:
$x' = x + a, y' = y + b.$



28-nji surat.

Funksiýanyň grafigini çalşyrmak

Ýokardaky çalşyrmalar (süýşürmek, uzaltmak, parallel göçürmek) $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde $y = f(x - a) + b$, $y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ (munda a, b, m, k – hemişelik sanlar we $m \neq 0$, $k \neq 0$) funksiýalaryň grafigini gurmak mümkin.

Meselem, $y = f(x - a) + b$, funksiýanyň grafigini $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde çyzmak üçin $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň her bir nokady a birlik saga süýşürilýär we b birlik ýokary göterilýär, ýagny $(a; b)$ wektor boýunça parallel göçürilýär.

$y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde $y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ funksiýanyň grafigini çyzmak üçin $y = f(x)$ grafiginiň her bir nokadynyň abssissasy Ox boýunça k esse gysylýar ($k > 0$ bolsa – saga, $k < 0$ bolsa – çepe) we ordinatasy Oy ok boýunça m birlik uzalýar ($m > 0$ bolsa – ýokary, $m < 0$ bolsa – pese).

1-nji mysal. $y = 3x$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde $y = 3(x – 1) + 4$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

△ $y = 3(x – 1) + 4$ grafigini çyzmak üçin $y = 3x$ funksiýanyň grafigi $(1; 4)$ wektor boýunça parallel göçürilýär. ▲

2-nji mysal. $y = – 2x + 4$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde $y = – 2(x + 3) + 5$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

△ $y = – 2(x + 3) + 5$ grafigini çyzmak üçin $y = –2x + 4$ funksiýanyň grafigi $(3;1)$ wektor boýunça parallel göçürilýär. ▲

3-nji mysal. $y = x^2$ parabola grafiginden peýdalanyp $y = 2 – (x + 3)^2$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

△ $y = 2 – (x + 3)^2$ funksiýanyň grafigini çyzmak üçin $y=x^2$ funksiýanyň grafigi ilki 3 birlik çepe süýşürilýär we Ox okuna görä simmetrik göçürilýär. Soňra alnan grafik Oy oky boýunça 2 birlik ýokary göterilýär. ▲

4-nji mysal. $y = \sin x$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde $y = \sin 2x$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

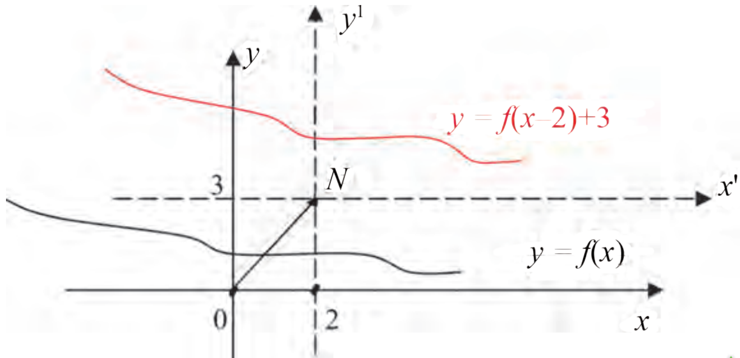
△ $y = \sin 2x$ funksiýanyň grafigini çyzmak üçin $y = \sin x$ funksiýanyň grafiginiň her bir nokadynyň abssissasy Ox oky boýunça iki gezek saga gysylýar. ▲

5-nji mysal. $y = \cos x$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

△ $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ýa-da $y = -2\cos 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ funksiýanyň grafigini çyzmak üçin ilki $y=\cos x$ funksiýanyň grafigi saga $\frac{\pi}{8}$ ga süýşürilýär, soň abssissasy saga iki esse gysylýar, ordinatasy iki esse ýokary uzalýar. Soňra ahyrky grafik Ox oky boýunça simmetrik göçürilýär. ▲

6-njy mysal. $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde $y = f(x - 2) + 3$, funksiýanyň grafigini çyzyň.

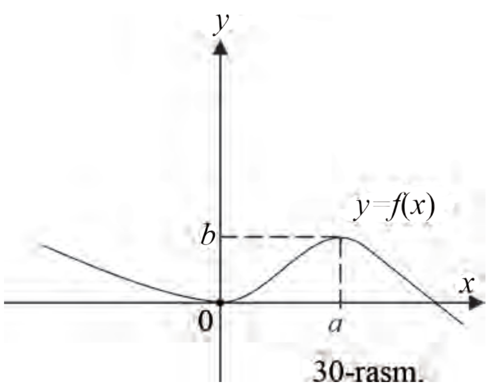
△ $y = f(x - 2) + 3$ funksiýanyň grafigini çyzmak üçin $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň her bir nokady (2;3) wektor boýunça parallel göçürilýär (29-njy surat). ▲



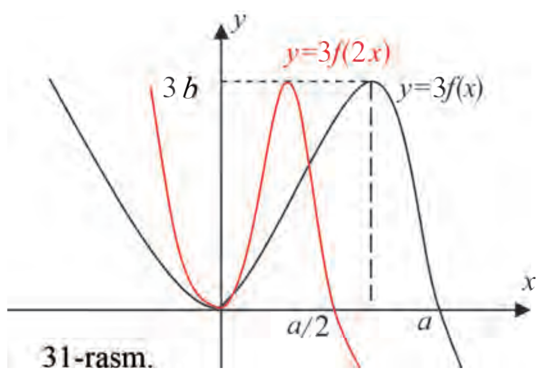
29-njy surat. ▲

7-nji mysal. $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde (30-njy surat) $y = 3f(2x)$ funksiýanyň grafigini çyzyň ($m = 3,\quad k = \frac{1}{2}$ bolan ýagdaý).

△ $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi Ox ok boýunça saga 2 esse gysylýar we Oy ok boýunça ýokary 3 esse uzalýar (31-nji surat). ▲



30-rasm.



31-rasm.

Soraglar we ýumuşlar

1. Süýşürmek näme? Uzaltmak näme? Parallel göçürmek näme? Mysallar getiriň.

4. $y = \sin x$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ funksiýanyň grafigini çyzyň.

Gönükmeler

170. $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde görkezilen funksiýalaryň grafigini çyzyň:

1) $y = f(x) + 1$; 2) $y = 3f(x)$; 3) $y = 3f(x) - 2$;

4) $y = f(x-1) + 1$; 5) $y = 2f(x-1) + 1$; 6) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$;

7) $y = \frac{1}{2}f(2x)$; 8) $y = f(2x) - 3$; 9) $y = 2f(2x) - 5$.

171. $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde görkezilen funksiýalaryň grafigini çyzyň:

1) $y = f(x-1)$; 2) $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$; 3) $y = f(2x)$; 4) $y = 3f\left(\frac{x}{3}\right) + 1$;

5) $y = -f(x)$; 6) $y = 2f(x) - 3$; 7) $y = -f(-x)$; 8) $y = 2f(x-1) + 5$.

172. $y = \cos x$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde görkezilen funksiýalaryň grafigini çyzyň:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = 2\cos x + 1$;

3) $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

69-70 PARAMETRIK GÖRNÜŞDE BERLEN ÝÖNEKEÝ FUNKSIÝALARYŇ GRAFIKLERI

Maddy nokadyň (x,y) koordinatlary t parametre bagly bolsun: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. t käbir T aralykda üýtgände $(\varphi(t), \psi(t))$ nokatlar toplumy nähili bolýar? Bu toplumy *parametrik görnüşde berlen funksiýanyň grafigi* diýlip atlandyrýarys.

1-nji mysal. Maddy nokadyň koordinatalary parametrik görnüşde $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 5t + 8 \end{cases}$ berlen. Bu maddy nokat hereketi dowamynda çyzan çyzygy (maddy nokat traýektoriýasyny) tapyň.

△ Deňlemelerden t parametri tapýarys: $t = \frac{x-1}{3}$ we $t = \frac{y-8}{5}$.

Alnan aňlatmalardan $\frac{x-1}{3}=\frac{y-8}{5}$ deňlemä gelýäris. Mundan $5x - 5 = 3y - 24$, ýa-da $5x - 3y + 19 = 0$. Bu göni çyzygyň deňlemesidir.

Diýmek, gözlenýän funksiýa $3y = 5x + 19$, ýa-da $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$ eken.

Jogaby: $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$. ▲

2-nji mysal. $\begin{cases} x=3+5\sin t, \\ y=-7+5\cos t \end{cases}$ parametrik görnüşde berlen funksiýanyň grafigi nähili çyzyk bolýar?

△Berlen deňliklerden $\sin t=\frac{x-3}{5}$, $\cos t=\frac{y+7}{5}$ bolýandygyny tapýarys.

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ toždestwodan peýdalanyp, $\left(\frac{x-3}{5}\right)^2+\left(\frac{y+7}{5}\right)^2=1$ deňlemä gelýäris. Mundan $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 25$. Bu deňleme merkezi $(3; -7)$ we radiusy $r = 5$ bolan töwerek deňlemesidir.▲

3-nji mysal. Maddy nokat koordinatalary $x = 7t^2 + 1$, we $y = 3t$ kanunalaýyklyk bilen özgerse, x we y arasyndaky baglanyşygy anyklaň, ýagny $t \geq 0$

△Berlen düzgünlerden t-ni tapýarys: $t=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$, $t=\frac{y}{3}$. Bu aňlatmalardan $\frac{y}{3}=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ deňlemä gelýäris. Mundan ahyrynda $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ funksiýany tapýarys. Diýmek, gözlenýän funksiýa $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ eken. ▲

4-nji mysal. $\begin{cases} x=4\sin t, \\ y=3\cos t \end{cases}$ parametrik görnüşde berlen funksiýanyň grafigi nähili çyzyk bolýar, bu ýerde $0 \leq t \leq 2\pi$?

△Berlen deňliklerden $\sin t=\frac{x}{4}$ va $\cos t=\frac{y}{3}$ bolýandygyny tapýarys. $\sin^2 t$ + $+\cos^2 t = 1$ toždestwodan peýdalanyp, $(\frac{x}{4})^2+(\frac{y}{3})^2=1$, ýa-da $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ deňlemäni alarys. Bu deňleme bilen berlen nokatlar toplumy merkezi koordinata başlangyjynda we ýarym oklary $a = 4$, $b = 3$ bolan *ellips* diýip atlandyrylýar. ▲

Soraglar we ýumuşlar

Parametrik görnüşde berlen funksiýalara mysallar getiriň.

Gönükmeler

173. Maddy nokadyň koordinatalary parametrik görnüşde berlen. Bu maddy nokat hereketi dowamynda çyzan çyzygyň (maddy nokat traýektoriýasynyň) formulasyny tapyň. Degişli surat çekiň:

1) $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 4t + 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 6t + 4, \\ y = 9t + 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4t + 9, \\ y = 7t + 18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 12t + 11, \\ y = 15t + 18. \end{cases}$

174. Maddy nokat koordinatalary parametrik görnüşde berlen. x we y koordinatalar arasyndaky baglanyşygy anyklaň:

1) $\begin{cases} x = 17t^2 + 1, \\ y = 13t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 27t^2 + 21, \\ y = 23t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 37t^2 + 31, \\ y = 33t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 47t^2 + 41, \\ y = 43t. \end{cases}$

175. Parametrik görnüşde berlen funksiýanyň grafigi nähili çyzykdan ybarat? Degişli surat çekiň:

1) $\begin{cases} x = 7\sin t, \\ y = 7\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 5\sin t, \\ y = 5\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 9\sin t, \\ y = 9\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

176. Parametrik görnüşde berlen funksiýanyň grafigi nähili çyzykdan ybarat? Degişli surat çekiň:

1) $\begin{cases} x = 6\sin t + 3, \\ y = 6\cos t + 7, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3\sin t, \\ y = 3\cos t - 1, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2\sin t - 3, \\ y = 2\cos t + 7, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

71 GÖRKEZIJILI FUNKSIÝA WE ONUŇ GRAFIGI

Dereje we onuň häsiýetleri

Hakyky san görkezijili dereje aşakdaky häsiýetlere eýe ($a > 0,\ a \ne 1$):

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;

4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

6) eger $0 < a < b$ we $x > 0$ bolsa, $a^x < b^x$; 7) eger $0 < a < b$ we $x < 0$ bolsa, $a^x > b^x$; 8) eger $x < y$ we $a > 1$ bolsa, $a^x < a^y$; 9) eger $x < y$ we $0 < a < 1$ bolsa, $a^x > a^y$ bolýar.

1-nji mysal. Deňeşdiriň: $2^{-\sqrt{3}}$ we $3^{-\sqrt{3}}$.

△ 7-nji häsiýete görä $0 < 2 < 3$ we $-\sqrt{3} < 0$ bolany üçin $2^{-\sqrt{3}} > 3^{-\sqrt{3}}$. ▲

2-nji mysal. Deňeşdiriň: $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}$ we $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$.

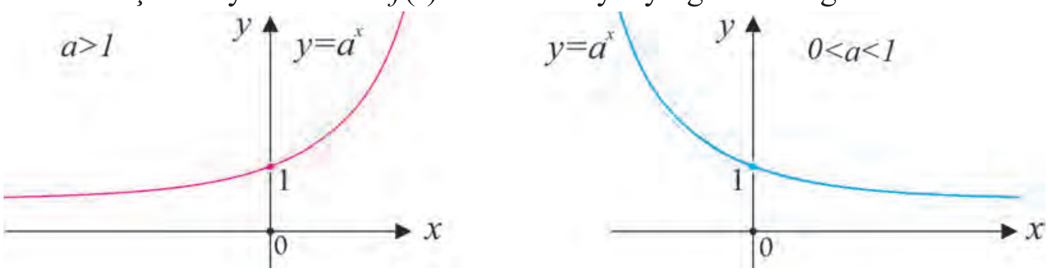
△ 9-njy häsiýete görä 0,2 < 0,3 we $0<\frac{1}{2}<1$ bolany üçin $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$. ▲

Görkezijili funksiýa we onuň häsiýetleri

$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ görnüşdäki funksiýa görkezijili funksiýa diýilýär. Beýle funksiýa aşakdaky häsiýetlere eýe:

1) kesgitleniş oblasty $(-\infty; +\infty)$ aralykdan ybarat;
2) bahalar oblasty $(0; +\infty)$ aralykdan ybarat;
3) ähli $a(a > 0,\ a \neq 1)$ üçin $a^0 = 1$;
4) $a > 1$ bolsa, funksiýa artýan;
5) $0 < a < 1$ bolsa, funksiýa kemelýändir.

Aşakdaky suratlarda $f(x) = a^x$ funksiýanyň grafikleri getirilen.



Soraglar we ýumuşlar

1. Hakyky san görkezijili derejäniň häsiýetlerini aýdyň. Mysallar getiriň.
2. Görkezijili funksiýanyň häsiýetlerini aýdyň.

Gönükmeler

177. Hasaplaň:

1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $9^{\sqrt{3}} : 3^{2\sqrt{3}}$; 3) $\left(2^{\sqrt[3]{4}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $4^{6\sqrt{2}-1} \cdot 16^{1-3\sqrt{2}}$.

Deňeşdiriň (**178-179**):

178. 1) $2^{-\sqrt{3}}$ we 1; 2) $4^{-\sqrt{6}}$ we $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ we 1.

179. 1) $-3^{\sqrt{2}}$ we 1; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ we $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ we $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

180. Funksiýalaryň artýan ýa-da kemelýändigini anyklaň (**180-182**):

1) $y = 4^x$; 2) $y = -3^x$; 3) $y = 5^x - 2$; 4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

181. 1) $y=\sqrt{3}^x$; 2) $y=(\frac{1}{\sqrt{3}})^x$; 3) $y=(\frac{\pi}{3})^x$; 4) $y=(\sqrt{3}-1)^x$.

182. 1) $y=(\sqrt{3}-1)^{-x}$; 2) $y=(\sqrt{10}-2)^x$; 3) $y=\left(\pi-\sqrt{2}\right)^x-3$.

72-74 GÖNÜDEN-GÖNI ÇÖZÜLÝÄN GÖRKEZIJILI DEŇSIZLIKLER

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ görnüşdäki deňsizlik

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ deňsizlik görkezijili deňsizlige mysal bolup biler. Bu deňsizlik $a > 1$ bolanda $f(x) > g(x)$ deňsizlige, $0 < a < 1$ bolanda bolsa $f(x) < g(x)$ deňsizlige deň güýçlüdir.

1-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $3^{x+5} > 3^{2-5x}$.

△ $a = 3 > 1$ bolany üçin berlen deňsizlik $x + 5 > 2 - 5x$ deňsizlige deň güýçli. Mundan $6x > -3$, ýa-da $x > -0,5$ bolýandygyny tapýarys. Diýmek, deňsizligiň çözüwi $(-0,5;\infty)$ aralykdan ybarat. *Jogaby*: $x \in (-0,5;\infty)$. ▲

2-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $2 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 3^x < 63$.

△ 3^x -i ýaýdan daşary çykarýarys: $3^x(2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1) < 63$. Ýönekeýleşdirip, $3^x < 9$ deňsizligi alarys, Mundan $x < 2$. *Jogaby*: $x \in (-\infty; 2)$. ▲

3-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $8^{5x^2-46} \geq 8^{2(x^2+1)}$.

△ $a = 8 > 1$ bolany üçin deňsizlik $5x^2 - 46 \geq 2(x^2 + 1)$ deňsizlige deň güýçli. Şu deňsizligi çözýäris: $3x^2 \geq 48$, mundan $x^2 \geq 16$. Diýmek, berlen deňsizligiň çözüwi $x \in (-\infty;-4] \cup [4;+\infty)$ bolýar. ▲

$a^x < b$ deňsizligiň ($a > 0$, $a \neq 1$) $b < 0$ bolanda çözüwi ýoklugyny we $a^x > b$ deňsizligiň $b < 0$ bolanda çözüwi $(-\infty;+\infty;)$ aralykdan ybaratdygyny aýdyň.

4-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $4^x + 2^x - 6 \geq 0$.

△ $2^x = t$ çalşyrma girizýäris, netijede $t^2 + t - 6 \geq 0$ kwadrat deňsizlik alynýar. Mundan $t \leq -3$, $t \geq 2$ bolýandygyny tapýarys. Ondan $2^x \geq 2$ we $2^x \leq -3$ deňsizliklere gelýäris. 1-nji deňsizlikden $x \geq 1$ çözüw tapylýar, 2-nji deňsizligiň bolsa çözüwi ýok. Diýmek berlen deňsizligiň çözüwi $[1; +\infty;)$ aralykdan ybarat. *Jogaby*: $x \in [1;+\infty;)$. ▲

Soraglar we ýumuşlar

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ deňsizlik barada maglumat beriň. Mysal getiriň.

Gönükmeler

Deňsizligi çözüň (**183–184**):

183. 1) $4^{3x+5} \le 4^{3-5x}$; 2) $7^{4x+5} < 7^{9-5x}$; 3) $6^{x+5} > 6^{3x}$, 4) $8^{x+5} \le 8^{2-5x}$;
5) $11^{x} < 11^{2+5x}$; 6) $2^{x-5} > 2^{25x}$; 7) $2 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+1} - 5 \cdot 2^{x} \le -6$;
8) $3 \cdot 5^{x+3} - 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} < 68$; 9) $2 \cdot 4^{x+2} + 4^{x+1} - 5 \cdot 4^{x} \le 31$;
10) $2 \cdot 7^{x+2} - 2 \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x} < 10$. 11) $13^{x^2+46} \le 13^{x^2+25x}$;
12) $3^{x^2-4x} < 3^{2(x^2-15)}$; 13) $7^{2x^2-4} \le 7^{3(x^2-x)}$;

184. 1) $9^{x} + 3^{x} - 6 \le 84$; 2) $25^{x} + 5^{x} - 30 > 0$;
3) $5 \cdot 4^{x} + 2^{x} - 6 \le 0$; 4) $9^{x} + 3^{x} - 12 > 0$;

Barlag işiniň nusgasy

1. $\begin{cases} x = 7\sin 5t \\ y = 7\cos 5t \end{cases}$ görnüşindäki funksiýanyň grafigini guruň.
2. $y = 11^{x} + 7$ funksiýanyň häsiýetlerini ýazyň.

Deňsizlikleri çözüň (**3–5**):

3. $6^{x^2-7x-1} < 6^{7}$.
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{17x} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{54-x}$.
5. $0,7^{-3x} \le 1$.

75-78 LOGARIFM BARADA DÜŞÜNJE. LOGARIFMIK FUNKSIÝA. IŇ ÝÖNEKEÝ LOGARIFMIK DEŇLEMELER WE DEŇSIZLIKLER

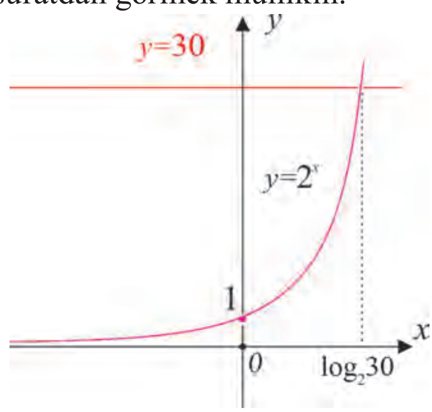
Logarifm barada düşünje

$2^{x} = 32$ deňlemäniň köki $x = 5$, emma $2^{x} = 30$ deňlemäniň köki nähili tapylýar? Bular ýaly deňlemeleri çözmek üçin sanyň logarifmi düşünjesi girizilýär. $2^{x} = 30$ *deňleme ýeke-täk köke eýe*. Ony 32-nji suratdan görmek mümkin.

Bu kök 30 sanynyň 2 esasa görä logarifmi diýilýär we $\log_2 30$ ýaly belgilenýär. Diýmek, $2^{x} = 30$ deňlemäniň köki $x = \log_2 30$ sandyr.

Şu kesgitlemäni girizýäris:

b položitel sanyň *a* esasa görä logarifmi diýip, *b* sany almak üçin esas *a*-ny götermek gerek bolan dereje görkezijisine aýdylýar we $\log_a b$ ýaly belgilenýär. Esas $a > 0$ we $a \ne 1$ şerti kanagatlandyrmaly.



32-nji surat

Meselem, $\log_3 9 = 2$, çünki $9 = 3^2$. Şonuň ýaly, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; $\log_5 5=1$; $\log_7 1=0$.

1-nji mysal. Hasaplaň: $\log_3 81$.

△ Logarifmiň kesgitlemesine görä, $3^4 = 81$ bolany üçin $\log_3 81 = 4$. ▲

Logarifmiň häsiýetleri

- esasy logarifmik toždestwo: eger $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ bolsa, $a^{\log_a b} = b$ deňlik ýerliklidir;
- eger $a > 0$, $a \neq 1$ bolsa, $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$;
- eger $a > 0$, $a \neq 1$ we $x > 0$, $y > 0$ bolsa, $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;
- eger $a > 0$, $a \neq 1$ we $x > 0$, $y > 0$ bolsa, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- eger $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ bolsa $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$;
- täze esasa (bir esasdan başga esasa) geçiş formulasy: eger $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ bolsa, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;
- eger $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ bolsa, $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

$\log_{10} x = \lg x$ we $\log_e x = \ln x$ ýaly belgilemek kabul edilen. ($e = 2{,}718281...$)
Munda $\lg x$ – x-iň onluk logarifmi, $\ln x$ bolsa x-iň natural logarifm diýilýär.
$f(x) = \log_a x$ funksiýa (bu ýerde x –argument, $a > 0$, $a \neq 1$) a – esasly *logarifmik funksiýa* diýilýär.

Logarifmik funksiýanyň häsiýetleri:

- kesgitleniş oblasty $(0; +\infty)$ aralyk;
- bahalar oblasty $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$;
- noly: $x = 1$, ýagny $\log_a 1 = 0$.
- $a > 1$ bolsa, logarifmik funksiýa $(0; +\infty)$ bolanda artýan;
- $0 < a < 1$ bolsa, logarifmik funksiýa $(0;+\infty)$ aralykda kemelýän.

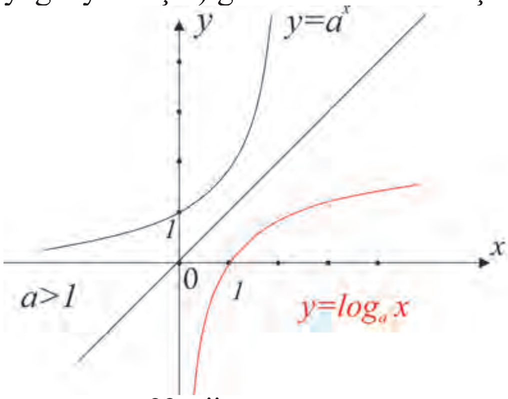
2-nji mysal. Deňeşdiriň: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ we 0.

△ $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, esas $a = \frac{1}{2}$, ýagny funksiýa kemelýän $0 < \frac{1}{2} < 1$ we $0 < \frac{1}{3} < 1$ bolanyndan $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{2}} 1$ bolýar. Diýmek, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$ eken. ▲

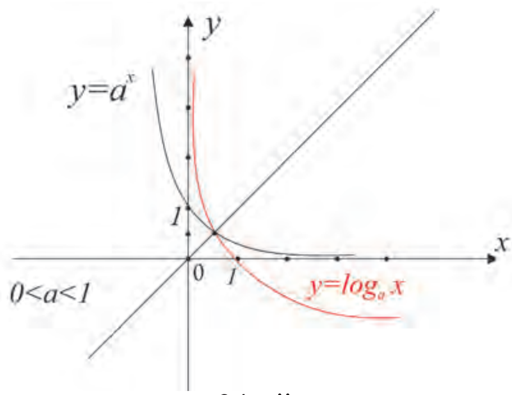
3-nji mysal. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny tapyň: $f(x) = \log_2 \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

△ Bu logarifmik funksiýanyň kesgitleniş oblasty x-iň $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} > 0$ deňsizligi kanagatlandyrýan ähli bahalary toplumyndan ybarat. Bu deňsizligi çözüp, funksiýanyň kesgitleniş oblasty $x \in (1;2) \cup (3;+\infty)$ bolýandygyny tapýarys. ▲

33 we 34-nji suratlarda $y = a^x$ we $y = \log_a x$ funksiýalaryň ($a > 1$ we $0 < a < 1$ ýagdaýlar üçin) grafikleri bilelikde şekillendirilen.



33-nji surat.



34-nji surat.

4-nji mysal. Deňeşdiriň: $\log_3 2 + \log_3 8$ we $\log_3(2+8)$.

△ Logarifmiň häsiýetlerinden peýdalanýarys:

$\log_3 2 + \log_3 8 = \log_3(2 \cdot 8) = \log_3 16 \; \log_3(2+8) = \log_3 10$. Logarifmiň esasy $3 > 1$ bolany üçin $\log_3 16 > \log_3 10$.

Mundan: $\log_3 2 + \log_3 8 > \log_3(2+8)$. ▲

5-nji mysal. Hasaplaň: $A = 4^{\log_8 125} + 27^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log_3 4}$.

△ Logarifmiň häsiýetlerinden peýdalanýarys: $\frac{1}{2}\log_3 4 = \log_3 2;$

$\log_8 125 = \frac{\log_2 125}{\log_2 8} = \frac{3\log_2 5}{3} = \log_2 5..$ $\quad 4^{\log_8 125} = 4^{\log_2 5} = 2^{2\log_2 5} = 2^{\log_2 25} = 25.$

şonuň ýaly, $27^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log_3 4} = 27^{\frac{1}{3} - \log_3 2} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{-\log_3 2} =$

$= 3 \cdot 3^{-3\log_3 2} = 3 \cdot 3^{\log_3 \frac{1}{8}} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Diýmek, $A = 25 + \frac{3}{8} = 25\frac{3}{8}$. ▲

6-njy mysal. Hasaplaň: $\dfrac{\lg 54 + \lg \frac{1}{2}}{\lg 72 - \lg 8}$.

△ Logarifmiň häsiýetlerinden peýdalanýarys:

$$\lg 54 + \lg\frac{1}{2} = \lg(54 \cdot \frac{1}{2}) = \lg 27 = \lg 3^3 = 3\lg 3,$$

$$\lg 72 - \lg 8 = \lg\frac{72}{8} = \lg 9 = \lg 3^2 = 2\lg 3.$$

Onda: $\dfrac{\lg 54+\lg\dfrac{1}{2}}{\lg 72-\lg 8}=\dfrac{3\lg 3}{2\lg 3}=\dfrac{3}{2}$. *Jogaby*: $\dfrac{3}{2}$. ▲

Iň ýönekeý logarifmik deňleme

$\log_a x = b$ görnüşdäki deňlemäni ($a > 0$, $a \neq 1$, b – hakyky san) iň ýönekeý logarifmik deňleme diýmek mümkin. Deňlemäniň ýeke-täk çözüwi: $x = a^b$.

7-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\log_3 x = \dfrac{1}{2}$.

△Logarifm kesgitlemesine görä, çözüwi $x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. *Jogaby*: $x = \sqrt{3}$. ▲

8-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\log_x 16 = 2$.

△Logarifmiň kesgitlemesine görä, $x^2 = 16$ we $x > 0, x \neq 1$ Diýmek, deňlemäniň çözüwi $x = 4$ eken. *Jogaby*: x=4. ▲

9-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $\log_2(x^2 - 5x + 10) = 4$.

△Logarifmiň kesgitlemesine görä, $x^2 - 5x + 10 = 2^4$ deňlemäni alarys. Kwadrat deňlemäni çözüp $x_1 = -1$, $x_2 = 6$ kökleri tapýarys. Diýmek, deňlemäniň çözüwi $\{-1; 6\}$ eken. *Jogaby*: $x = -1$, $x = 6$. ▲

10-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $\lg(2x-3) = \lg(x-1)$.

△Logarifmiň kesgitlemesine görä, $2x - 3 > 0$, $x > 1$ bolmaly. Deňlemäniň kesgitleniş oblasty $x > \dfrac{3}{2}$ aralykdan ybarat. Logarifmiň häsiýetine görä, $2x - 3 = x - 1$ deňlemä gelýäris, mundan $x = 2$. Bu kök bolsa kesgitleniş oblastyna degişli.
Jogaby: $x = 2$. ▲

11-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\log_x(x+2) = 2$.

△Deňlemäniň kesgitleniş oblastyny tapýarys: $x + 2 > 0$ $x > 0$, $x \neq 1$, ýagny deňleme $(0,1) \cup (1; \infty)$ toplumda kesgitlenen. Logarifmiň kesgitlemesine görä, $x + 2 = x^2$ deňlemäni alarys. Bu kwadrat deňlemäni çözüp $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ kökleri tapýarys. Bu köklerden diňe $x = 2$ kesgitleniş oblastyna degişli. Şonuň üçin hem ol berlen deňlemäniň çözüwi bolýar.
Jogaby: $x = 2$. ▲

12-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0$.

△$t = \log_3 x$ belgileme girizip, $t^2 - 5t + 6 = 0$ kwadrat deňlemäni alarys. Ony çözüp $t = 2$ we $t = 3$ kökleri tapýarys. Tapylan kökleri $t = \log_3 x$-a goýup, $\log_3 x = 2$ we $\log_3 x = 3$ deňlikleri alýarys. Bu deňlemeleriň çözüwleri, degişlilikde, 9 we 27 bolýar. *Jogaby*: $x = 9$, $x = 27$. ▲

Iň ýönekeý logarifmik deňsizlik

$\log_a x > b$ görnüşdäki deňsizligi ($a > 0,\ a \neq 1,\ b$ – hakyky san) iň ýönekeý logarifmik deňsizlik diýmek mümkin.

13-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -3$.

△ $3 - x > 0$ bolmaly, $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$ bolýanlygyndan $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > \log_{\frac{1}{2}} 8$. Esas $a = \frac{1}{2} < 1$ bolany üçin logarifmik funksiýa kemelýän, diýmek $3 - x < 8$, we $0 < 3 - x < 8$. Mundan $-3 < -x < 5$ ýa-da $-5 < x < 3$ deňsizliklere gelýäris.
Jogaby: $x \in (-5;\ 3)$. ▲

14-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\lg(x+1) < \lg(2x-3)$.

△ Logarifmik funksiýanyň häsiýetlerinden aşakdaky deňsizlikler sistemasyny alýarys:

$$\begin{cases} x+1 < 2x-3, \\ x+1 > 0, \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x > -1, \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Bu sistemanyň çözüwi $(4;\ +\infty)$ aralykdan ybarat. *Jogaby*: $x \in (4;\ +\infty)$. ▲

15-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$.

△ Logarifmik funksiýa kesgitlemesine görä, $x > 0$ bolmaly. $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ belgini girizýäris. Onda $t^2 - 9 \leq 0$ deňsizligi alarys. Muny çözüp $-3 \leq t \leq 3$, ýagny $-3 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 3$ deňsizliklere gelýäris. $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8;\ 3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ bolýanlygyndan $\log_{\frac{1}{2}} 8 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$. Esas $a = \frac{1}{2} < 1$ bolany üçin $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ funksiýa kemelýän, diýmek, $\frac{1}{8} \leq x \leq 8$ bolmaly. *Jogaby*: $x \in [\frac{1}{8};\ 8]$. ▲

Soraglar we ýumuşlar

1. Logarifme kesgitleme beriň. Mysal getiriň.
2. Logarifmiň häsiýetlerini aýdyň. Mysalda düşündiriň.
3. Logarifmik funksiýalaryň häsiýetlerini aýdyň.
4. Iň ýönekeý logarifmik deňleme näme we ol nähili çözülýär?

5. Iň ýönekeý logarifmik deňsizlik näme we ol nähili çözülýär? Mysal getiriň.

Gönükmeler

185. Hasaplaň:

1) $\log_5 125$; | 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; | 3) $\log_5 0,04$; | 4) $\log_{0,1} 1000$; | 5) $\log_3 \frac{1}{27}$.

186. Deňeşdiriň:

1) $\log_2 3$ we $\log_2 5$; | 2) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$ we $\log_5 4$; | 3) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ we $\log_{\frac{1}{2}} 5$;

4) $\log_2 3$ we 1; | 5) $\log_3 2 + \log_3 5$ we $\log_3(2+5)$; | 6) $\log_7 \frac{1}{2}$ we 0.

187. Hasaplaň:

1) $1,5^{\log_{1,5} 2}$; | 2) $e^{\ln 5}$; | 3) $2^{3\log_2 5}$; | 4) $3^{2+\log_3 5}$; | 5) $7^{-2\log_7 6}$;

6) $3^{3-\log_3 54}$; | 7) $\log_6 2 + \log_6 18$; | 8) $\lg 25 + \lg 4$; | 9) $\log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{5}$;

10) $\frac{\lg 2 + \lg 162}{2\lg 3 + \lg 2}$; 11) $\log_4 7 - \log_4 \frac{7}{16}$; 12) $\frac{\ln 64}{\ln 4}$.

188. Funksiýalaryň kesgitleniş oblastyny tapyň:

1) $y = \log_3(2x-5)$; | 2) $y = \log_7(x^2 - 2x - 3)$; | 3) $y = \log_5(4 - x^2)$.

4) $y = \log_2(x^2 - 2x + 1)$; | 5) $y = \log_{\sqrt{2}}(3-x)$; | 6) $y = \log_2 \frac{x-1}{x+2}$.

189. Funksiýanyň grafigini çyzyň:

1) $y = \log_2 x$; | 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; | 3) $y = \log_4(x-1)$; | 4) $y = -\log_3 x$.

190. Deňlemäni çözüň:

1) $\log_2 x = -5$; | 2) $\log_{\sqrt{3}} x = 0$; | 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; | 4) $\log_x 128 = 7$;

5) $\log_9 x = \frac{1}{2}$; | 6) $\log_{\sqrt{x}} 27 = 3$; | 7) $\log_3 x = 5$;

8) $\log_2(x-5) = \log_2(4x+1)$; | 9) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; | 10) $\log_5(3-2x) = \log_{\frac{1}{5}} x$;

11) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-6) = -2$; | 12) $\log_2(x+1) + \log_2(8-x) = 3$; | 13) $\log_x 5 = 2$;

14) $\lg(x^2+x-10)-\lg(x-3)=1$; 15) $\log_7^2 x - \log_7 x = 2$;

16) $5^{4-x}=6$; 17) $\log_x 3+\log_3 x=2$; 18) $5^{x^2}=6$; 19) $5^{x^2}=\frac{1}{2}$;

20) $\lg(x^2-6x+19)=1$; 21) $\log_5(5^x-4)=1-x$.

191. Deňsizligi çözüň:

1) $\log_8 x>2$; | 2) $\log_3^2 x-3>2\cdot\log_3 x$; | 3) $\log_8 x<2$; | 4) $\log_{\frac{1}{2}} x>1$;

5) $\lg(3-2x)>1$; | 6) $2^{x+1}<3$; | 7) $\log_3(2x-4)<\log_3(x+1)$; | 8) $2^{|x+1|}>3$.

79-81 GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK FUNKSIÝALARYŇ KÖMEGINDE MODELIRLEMEK

1-nji mysal. Bakteriýa mälim wagtdan (birnäçe sagat, ýa-da, minutlardan) soň ikä bölünýär we bakteriýalaryň sany iki esse artýar. Nobatdaky wagtdan soň bu iki bakteriýa hem ikä bölünýär we populýasiýa mukdary (bakteriýalaryň umumy sany) ýene iki esse artýar; indi, bakteriýalaryň sany dört boldy. Bu köpeliş hadysasy amatly şertlerde (populýasiýa üçin zerur resurslar: ýer, iýmit, suw, energiýa we başgalar bar bolanda-da) dowam ediberýär.

Çak edeliň, ilki 10 million sany bakteriýanyň barlygy, şeýle bakteriýalaryň bir sagatdan soň ikä bölünendigi mälim bolsun. Aşakdaky jedwel $t = 1, 2, 3, 4$ sagat geçende b populýasiýa mukdary nähili üýtgändigini aňladýar:

t (sagat)	0	1	2	3	4
b_t (million)	10	20	40	80	160

Şunuň bilen birlikde, ähli bakteriýalar hem har sagatda bir wagtda ikä sinhron bölünmeýändigini mälim. Beýle ýagdaýda t bitin san bolmanda (meselem, $t=1\frac{1}{2}$ sagat) bakteriýalar populýasiýasy mukdaryny tapmak meselesi dur.

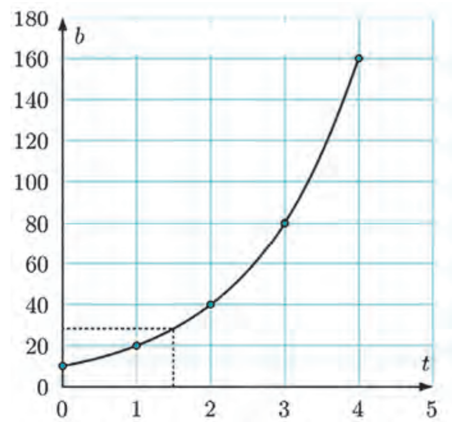
a) $b_1, b_2, \ldots$ yzygiderlik nähili yzygiderlik?

b) Tekizlikdäki gönüburçly koordinatalar sistemasynda jedwel boýunça laýyk nokatlary belgiläp, soň alnan nokatlary tekiz çyzyk bilen utgaşdyryň.

ç) $t=1\frac{1}{2}$ sagat geçende bakteriýalaryň populýasiýasy nähili bolýar?

d) Bakteriýalaryň populýasiýasynyň islendik t wagta görä üýtgeýşini nähili funksiýanyň kömeginde modelirlemek bolýar?

△ Ikinji hatardaky $b_1, b_2, \ldots$ sanlar yzygiderligi maýdalawjysy 2-ä deň bolan geometrik progressiýadygy aýdyň. Onuň umumy görnüşi aşakdaky ýaly bolýar: $b_t = 20 \cdot 2^{t-1}$, bu ýerde $t = 1, 2, 3, 4$.



Tekizlikdäki koordinatalar sistemasynda jedwel boýunça degişli nokatlary belgiläp, soň alnan nokatlary tekiz çyzyk bilen utgaşdyralyň:

$t = 1\frac{1}{2}$ sagat geçende bakteriýalar populýasiýasy takmynan 28 milliondygyny görmek bolýar.

Alnan egri çyzyk şekiliň görkezijili funksiýanyň grafigine meňzeşligi görnüp dur. Bu funksiýany $b(t)$ diýip belgiläp, (bu ýerde $t \geq 0$), ýazýarys: $b(t) = 20 \cdot 2^{t-1} = 10 \cdot 2^t$.

Umumy ýagdaýda, $b(t) = b_0 a^t$ kanunalaýyklyk bilen üýtgeýän mukdar (bu ýerde $b_0 > 0,\ a > 1,\ t \geq 0$) eksponensial artýan mukdar diýilýär.

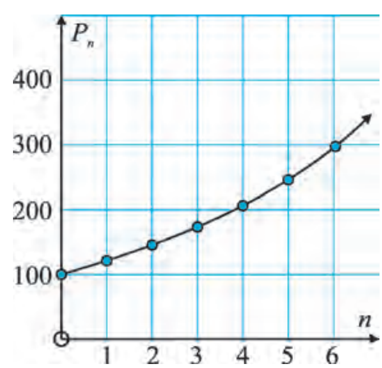
Aşakdaky netijä eýe bolarys:

Eger populýasiýanyň mukdar taýdan ösüşi onuň başlangyç (deslapky) sanyna proporsional bolsa, beýle populýasiýa eksponensial köpelýär.

“Eksponensial ösüş” jümlesi adatda nähilidir çalt, dyngysyz ösüş hadysasyny aňladýar. Meselem, jandarlar populýasiýasy, käbir ýurduň ilatynyň çalt ösüşini metbugatda şeýle häsiýetlendirýärler.

2-nji mysal. Epidemiologiýa gullugynyň maglumatyna görä, syçanlar populýasiýasy mukdary amatly şertlerde her hepdede 20% artýan eken. Ilki 100 syçan bolsa olaryň populýasiýasy mukdary nähili kanunalaýyklyk bilen artýandygyny tapyň.

Eger P_n diýip n hepdede populýasiýa mukdaryny belgilesek, aşakdakylara eýe bolarys: $P_0 = 100$ (deslapky mukdar) $P_1 = P_0 \cdot 1{,}2 = 100 \cdot 1{,}2$
$P_2 = P_1 \cdot 1{,}2 = 100 \cdot (1{,}2)^2$ $P_3 = P_2 \cdot 1{,}2 = 100 \cdot (1{,}2)^3$ we ş.m. n hepdede populýasiýa mukdary $P_n = 100 \cdot (1{,}2)^n$ bolýar.



Kalkulyatordan peýdalanyp, degişli bahalary hasaplasak, aşakdaky grafige eýe bolarys:

Görnüşi ýaly, 6 hepdede populýasiýa mukdary baryp 3 esse artýan eken.

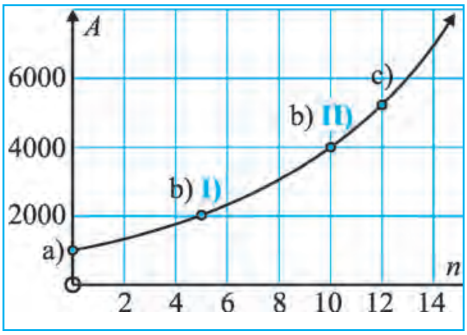
3-nji mysal. Entomolog alym çekirtgeleriň populýasiýasynyň oba hojalyk meýdanlaryna zyýan edýändigini öwrenende zyýan çeken uçastoklaryň meýdany $A_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$ (gektar) kanunalaýyklyk bilen üýtgeýşini anyklady, bu ýerde n hepdeler sany.

a) Ilki nähili meýdana zyýan ýetirilipdir?

b) **I)** 5, **II)** 10 hepdede nähili meýdana zyýan ýetirilýär?

ç) Kalkulyatordan peýdalanyp, 12 hepdede nähili meýdana zyýan ýetirilýändigini tapyň.

d) Zyýan çeken uçastoguň meýdanynyň hepdeler sanyna baglylyk kanunalaýyklygynyň grafigini çyzyň.



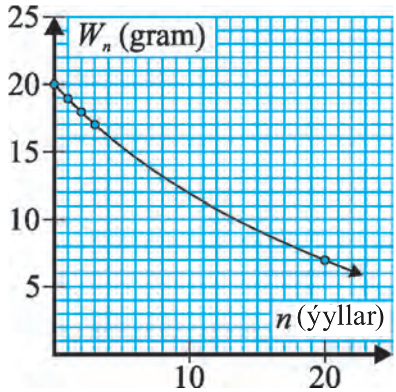
a) $A_0 = 1000 \cdot 2^{0,2\cdot 0} = 1000$ (gektar). Diýmek, ilki 1000 ga meýdana zyýan ýetirilen.

b) **I)** $A_3 = 1000 \cdot 2^{0,2\cdot 5} = 2000$ zyýan çeken uçastoguň meýdany 2000 (ga) deň.

II) $A_{10} = 1000 \cdot 2^{0,2\cdot 10} = 4000$ zyýan çeken uçastoguň meýdany 4000 (ga) deň.

ç) $A_{12} = 1000 \cdot 2^{0,2\cdot 12} = 1000 \cdot 2^{2,4} \approx 5280$ zyýan çeken uçastoguň meýdany takmynan 5280 gektara deň.

4-nji mysal. Radioaktiw dargama netijesinde massasy 20 gram bolan radioaktiw madda her ýylda 5%-e kemelýär. W_n diýip maddanyň n ýyldaky massasyny belgilesek,



$W_0 = 20$ g;
$W_1 = W_0 \cdot 0,95 = 20 \cdot 0,95$ g;
$W_2 = W_1 \cdot 0,95 = 20 \cdot (0,95)^2$ g;
$W_3 = W_2 \cdot 0,95 = 20 \cdot (0,95)^3$ g;
$W_{20} = 20 \cdot (0,95)^{20} \approx 7,2$ g;
$W_{100} = 20 \cdot (0,95)^{100} \approx 0,1$g

deňliklere eýe bolarys.

Mundan $W_n = 20 \cdot (0,95)^n$.

$b(t) = b_0 a^t$ kanunalaýyklyk bilen üýtgeýän mukdar (bu ýerde $b_0 > 0$, $0 < a < 1$, $t \geq 0$) eksponensial kemelýän mukdar diýilýär.

5-nji mysal. Ulanylan derman keseliň bedenine ýuwaş-ýuwaşdan siňip, onuň t sagatdan soň galýan mukdary (dozasy) $D(t) = 120 \cdot (0.9)^t$ (mg) kanunalaýyklyk bilen üýtgeýär.

a) t=0, 4, 12, 24 sagat bolanda $D(t)$-ni tapyň

b) Ilki adam bedenine nähili doza girizilen?

c) *a)*-daky maglumatdan peýdalanyp, $D(t)$ grafigini şekillendiriň, bu ýerde $t \geq 0$.

d) Grafikden peýdalanyp, 25 mg mukdardaky derman adam bedeninde näçe wagt galýandygyny bahalaň.

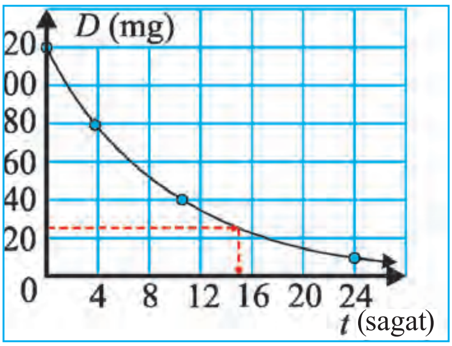
△ a) $D(t) = 120 \cdot (0{,}9)^t$ mg

$D(0) = 120 \cdot (0{,}9)^0 = 120$ mg;
$D(12) = 120 \cdot (0{,}9)^{12} \approx 33{,}9$ mg;

$D(4) = 120 \cdot (0{,}9)^4 \approx 78{,}7$ mg;
$D(24) = 120 \cdot (0{,}9)^{24} \approx 9{,}57$ mg;

b) $D(0) = 120$ bolany üçin, ilki 120 (mg) derman girizilen.

ç)



Şu grafikden peýdalanyp, adam bedenine girizilen 120 mg dermanyň takmynan 15 sagatdan soň 25 mg galýandygyny anyklaýarys. ▲

6-njy mysal. Radioaktiw dargama netijesinde radioaktiw maddanyň massasy $W_t = W_0 \cdot 2^{-0{,}001t}$ gram kanunalaýyklyk boýunça üýtgeýär, bu ýerde t ýyllar.

a) Ilki madda nähili massa eýe bolupdyr?

b) 200 ýyldan soň maddanyň näçe göterimi galýar?

△ $t = 0$ bolanda $W_t = W_0 \cdot 2^0 = W_0$ bolýar. Diýmek, maddanyň deslapky massasy W_0 eken. $t = 200$ bolanda $W_{200} = W_0 \cdot 2^{-0{,}001 \cdot 200} = W_0 \cdot 2^{-0{,}2} \approx W_0 \cdot 0{,}8706$. Diýmek, 200 ýyldan soň maddanyň takmynan 87,1 göterimi galýar. ▲

7-nji mysal. Deňiz derejesinden h km beýiklige göterilenimizde, atmosfera basyşy $p = 76 \cdot 2{,}7^{-\frac{h}{8}}$ (sm simap sütüni) kanunalaýyklyk bilen üýtgeýän eken. 5,6 km beýiklikde atmosfera basyşy nähili bolýar?

8-nji mysal. Deňiz derejesinden beýiklik $h = \dfrac{8000}{0{,}4343} \lg \dfrac{p_0}{p}$ formula bilen hasaplanýar, bu ýerde $p_0 = 760$ mm simap sütüni - deňiz derejesindäki atmosfera basyşy, p bolsa h (m) beýiklikdäki atmosfera basyşy. Alpinistler daga göterilende 304 (mm simap sütüni) basyş bolandygyny anykladylar. Alpinistler nähili beýiklige çykypdyrlar?

$$h = \frac{8000}{0{,}4343} \lg \frac{760}{304} \approx 7330{,}2 \text{ m}$$

9-njy mysal. Radioaktiw madda massasy wagtyň geçmegi bilen $m(t)=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ düzgün bilen kemelýär, bu ýerde m_0 – başlangyç wagtdaky massa, m – t wagtdaky massa, T – radioaktiw dargama tizligini aňladýan koeffisiýent (ýarym dargama döwri).

Häzirki günde saklanyp galan maddanyň m massasyny bilsek, näçe ýylda massa m_0 dan m çenli kemelendigini tapyp bileris:

$$t=-T\log_2\left(\frac{m(t)}{m_0}\right).$$

Beýle gatnaşyk taryhy barlaglarda hem ulanylýandygyny bellemeli.

10-njy mysal. Tebigy dil sözlügindäki sözler sany wagtyň geçmegi bilen $N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}$ kanunalaýyklyk bilen kemelýändigi anyklanan, bu ýerde N_0 – başlangyç wagtdaky sözler sany, $N(t)$ - t (müň ýyllar) wagtdaky saklanyp galan sözler sany, λ - dildäki sözleriň saklanyp galýandygyny aňladýan koeffisiýent. Häzirki günde saklanyp galan sözler $N(t)$ mukdaryny bilsek, näçe ýylda sözler göwrümi N_0 dan $N(t)$ çenli kemelendigini tapyp bileris:

$$t=-\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right).$$

11-nji mesele. Ilki şäher ilaty a adam bolup, ilat sany her ýylda 10% -e artsa, ilatyň x ýyldan soň näçe bolýandygyny anyklaýan formulany tapyň.

△ Çylşyrymly göterim formulasyna görä, şäher ilaty sany x ýyldan soň $y=a\cdot\left(\frac{100+10}{100}\right)^x=a\cdot(1{,}1)^x$ bolýar: Diýmek, $y=a\cdot(1{,}1)^x$ formulanyň kömeginde a berlende x ýyldan soň ilat sanyny anyklamak mümkin bolýar. a=1000000 we ýyllar sany x boýunça ilat sanyny anyklaýan jedweli getirýäris:

x	y	x	y
1	1 100 000	11	2 853 117
2	1 210 000	12	3 138 428
3	1 331 000	13	3 452 271
4	1 464 100	14	3 797 498
5	1 610 510	15	4 177 248
6	1 771 561	16	4 594 973
7	1 948 717	17	5 054 470
8	2 143 589	18	5 559 917
9	2 357 948	19	6 115 909
10	2 593 742	20	6 727 500

Jedwele görä ilat sany 5 ýyldan soň 1 610 510,
10 ýyldan soň 2 593 742,
20 ýyldan soň 6 727 500 adam bolar eken.

12-nji mesele. Ilki şäher ilaty a adam bolup, ilat sany her ýylda 2%-e kemelse, ilatyň x ýyldan soň näçe bolýandygyny anyklaýan formulany tapyň.

Çylşyrymly göterim formulasyna görä şäher ilaty sany x ýyldan soň $y = a \cdot \left(\frac{100-2}{100}\right)^x = a \cdot 0,98^x$ bolýar. Diýmek, $y = a \cdot 0,98^x$ formulanyň kömeginde a berlende x ýyldan soň ilat sanyny anyklamak mümkin. a=2000000 we ýyllar sany x boýunça ilat sanyny anyklaýan jedwelini getirýäris:
Jedwele görä ilat sany 5 ýyldan soň 1 807 842, 10 ýyldan soň 1 634 146,
20 ýyldan soň 1 335 216 adam bolar eken.

x	y	x	y
1	1 960 000	11	1 601 463
2	1 920 800	12	1 569 433
3	1 882 384	13	1 538 045
4	1 844 736	14	1 507 284
5	1 807 842	15	1 477 138
6	1 771 685	16	1 447 595
7	1 736 251	17	1 418 644
8	1 701 526	18	1 390 271
9	1 667 496	19	1 362 465
10	1 634 146	20	1 335 216

13-nji mesele. Şäher ilaty ilki a adamdy. Eger ilat sany her ýylda 10%-e artsa, ilatyň x ýyldan soň näçe bolýandygyny we näçe ýyldan soň k esse artýandygyny anyklaýan formulany tapyň.

Mälim bolşy ýaly, $y = a \cdot 1,1^x$ we meseläniň şertinden $y = k \cdot a$ bolýandygyny hasaba alyp $k = 1,1^x$ ýa-da $x = \log_{1,1}k$ formula tapylýar. Aşakda ilat sany k esse artmagy üçin gerekli ýyllar sanyny anyklaýan jedwel getirilen:

k	y	k	y	k	y
1	0	6	19	11	25
2	7	7	20	12	26
3	12	8	22	13	27
4	15	9	23	14	28
5	17	10	24	15	28

Jedwelden mälim bolşy ýaly, ilat sany 2 esse artmagy üçin 7 ýyl;
5 esse artmagy üçin 17 ýyl;
10 esse artmagy üçin 24 ýyl gerek eken.

14-nji mesele. Şäher ilaty her ýylda 2% ga kemelse hem-de ilatyň başlangyç sany a sany bolsa, ilatyň x ýyldan soň näçe bolýandygyny we näçe ýyldan soň k esse kemelýändigini anyklaýan formulany tapyň.

Mälim bolşy ýaly, $y = a \cdot 0{,}98^x$ we meseläniň şertinden $y = \frac{a}{k}$ bolýandygyny hasaba alyp $1/k = 0{,}98^x$ ýa-da $x = \log_{0{,}98}(1/k)$ formula tapylýar. Aşakda ilat sany k esse kemelýändigi üçin gerekli ýyllar sanyny anyklaýan jedwel getirilen:

k	$1/k$	x	k	$1/k$	x
1	1	0	11	0,090909	119
2	0,5	34	12	0,083333	123
3	0,333333	54	13	0,076923	127
4	0,25	69	14	0,071429	131
5	0,2	80	15	0,066667	134
6	0,166667	89	16	0,0625	137
7	0,142857	96	17	0,058824	140
8	0,125	103	18	0,055556	143
9	0,111111	109	19	0,052632	146
10	0,1	114	20	0,05	148

Jedwelden görnüşi ýaly, ilat sany: 2 esse kemelýändigi üçin 34 ýyl;
5 esse kemelýändigi üçin 80 ýyl;
10 esse kemelýändigi üçin 114 ýyl gerek eken.

14-nji mesele. 1935-nji ýylda amerikan seýsmology Ç. Rihter ýer titremeleri häsiýetlendirmek üçin 1-9,5 bally magnitudalar şkalasyny hödürläpdir. Munda ýer titreme wagtynda ýüze çykýan seýsmik tolkun energiýasy intensiwlik diýip atlandyrylýan ululyk arkaly bahalandy. Rihter şkalasynda intensiwligi I bolan ýer titremäniň R magnitudasy $R=\lg I$ formulanyň kömeginde tapylýan eken.

1966-njy ýylda Daşkentde 5,2 magnitudaly, 2010-njy ýylda Gaitide bolsa 7 magnitudaly ýer titredi. Şu ýer titremeleri intensiwlik boýunça deňeşdireliň.

Gaiti ýer titremesi: $7=\lg I_1$, mundan $I_1=10^7=10\,000\,000$;
Daşkent ýer titremesi: $5{,}2=\lg I_2$, mundan $I_2=10^{5{,}2}\approx 158\,489{,}3$;

Mundan $\frac{I_1}{I_2} \approx 63{,}1.$ Diýmek, Gaitide Daşkende görä takmynan 63 esse güýçlüräk ýer titremesi bolupdyr.

Soraglar we ýumuşlar

1. Görkezijili modele mysal getiriň;
2. Logarifmik modele mysal getiriň.

Gönükmeler

192. Mellek işläp bejerilmese, t günden soň haşal otlar meýdany $A(t)=3\cdot 2^{0,1t}$ (kw.m) bolan ýeri örtüp, medeni ösümliklere zyýan ýetirýär.

a) Ilki nähili meýdana zyýan ýetirilipdir?

b) **I)** 2, **II)** 10, **III)** 30 günde nähili meýdana zyýan ýetirilýär?

ç) *a), b)*-da alnan maglumatlardan peýdalanyp, zyýan çeken uçastoguň meýdanynyň günler sanyna baglylyk kanunynyň grafigini çyzyň.

193. Aralýaka ekologik ulgamyny dikeltmek maksadynda seýrek haýwanlar populýasiýasyny köpeltmek taslamasynda ekologlar 25 jübüt haýwanlary köpeltmekçi. Barlaglara görä, berlen şertlerde bu haýwanlar populýasiýasynyň mukdary $P_n = P_0 \cdot 1{,}23^n$ kanunalaýyklyk bilen üýtgeýär, bu ýerde P_n - n ýyldaky haýwanlar sany.

a) P_0 sany nämäni aňladýar?

b) **I)** 2, **II)** 5, **III)** 10 ýylda nähili populýasiýa eýe bolarys?

ç) *a), b)*-da alnan maglumatlardan peýdalanyp populýasiýa mukdary ýyllar sanyna baglylyk kanunalaýyklygynyň grafigini çyzyň.

194. Himiki reaksiýanyň tizligi $V_t = V_0 \cdot 2^{0,05t}$ kanunalaýyklyk bilen üýtgeýän bolsa, bu ýerde t(C°) – temperatura.

a) 0 C°, b) 20 C° temperaturada reaksiýanyň tizligi nähili bolar?

ç) 20 C° temperaturadaky reaksiýanyň tizligi 0 C° temperaturadaky reaksiýa tizligine görä näçe göterim artýar?

d) $\left(\dfrac{V_{50} - V_{20}}{V_{20}}\right)\cdot 100\%$ bahany hasaplaň we manysyny düşündiriň.

195. 2017-nji ýylda Alýaska ýarymadasynyň ýanyndaky ada aýylaryň 6 jübüti goýberildi. Ilki adada aýylar ýokdy. Aýylar populýasiýasy $B_t = B_0 \cdot 2^{0,18t}$ kanunalaýyklyk (bu ýerde t - ýyllar) bilen üýtgese, hasaplama serişdelerinden peýdalanyp aşakdakylara jogap beriň:

a) B_0 sany nämäni aňladýar? Ol näçä deň?

b) 2037-nji ýylda nähili populýasiýa eýe bolarys?

ç) 2037-nji ýyldaky aýylar sany 2027-nji ýyldaky aýylar sanyna görä näçe göterim artýar?

196. Radioaktiw dargama netijesinde radioaktiw maddanyň massasy $W(t) = 250 \cdot (0,998)^t$ (g) kanunalaýyklyk boýunça üýtgeýär, bu ýerde t - ýyllar.
a) Ilki madda nähili massa eýe bolupdyr?
b) **I)** 400, **II)** 800, **III)** 1200 ýylda maddanyň näçe gramy galýar?
ç) Ýokardaky maglumatlardan peýdalanyp, $W(t)$-niň grafigini guruň.
d) Grafikden peýdalanyp, madda haçan 125 mg mukdarda galýandygyny bahalaň.

197. Gyzgyn suw sowadylanda onuň T temperaturasy $T(t) = 100 \cdot 2^{-0,02t}$ °C kanunalaýyklyk bilen üýtgeýän eken, bu ýerde t - minutlar.
a) Ilki nähili temperatura bolupdyr?
b) **I)** 15 **II)** 20 minutdan soň temperatura näçä deň bolar?
ç) Ýokardaky maglumatlardan peýdalanyp, $W(t)$-niň grafigini guruň.
d) Grafikden peýdalanyp, 78 minutdan soň temperatura näçä deň bolýandygyny bahalaň.

198. Elektrik zynjyryndaky tok güýçi $I_t = 0,6 \cdot 2^{-5t}$ (A) kanunalaýyklyk bilen üýtgäp, bu ýerde t – sekuntlar.
a) Ilki nähili tok güýji bolupdyr?
b) **I)** 0,1, **II)** 0,5 **III)** 1 sekuntdan soň tok güýçi näçä deň bolýar?
ç) Ýokardaky maglumatlardan peýdalanyp, $W(t)$-niň grafigini guruň.

199. Deňizde d metr çuňluga görä ýagtylyk $L(d) = L_0 \cdot (0.9954)^d$ (kandela) kanunalaýyklyk bilen üýtgeýän eken.
a) Deňziň düýbünde nähili ýagtylyk bolupdyr?
b) 1000 metr çuňlukdaky ýagtylyk näçe göterime kemelýär?

200. 8 sany bakteriýa populýasiýasy 2 sagatdan soň 100 çenli ösdi. Şu şertlerde haçan populýasiýa 500 -e ýetýär?

201. Öýjükli aragatnaşyk kompaniýasynyň maglumatlaryna görä, kompaniýa öýjükli aragatnaşygyndan peýdalanyjylar sany $N(t) = 100000e^{0,09t}$ formula kömeginde aňladylyp, bu ýerde t - aýlar. Häzirki günde 3 mln peýdalanyjylar bardygy mälim bolsa, kompaniýa haçan işe başlapdyr?

202. Iýmit mikrotolkunly peçden alnanda, ol $T(t) = 80e^{-0,12t}$ kanunalaýyklyga esasan sowaýar, bu ýerde t - minutlar. Häzir otag temperaturasy 22° C bolsa, näçe minutdan soň iýmit şu temperatura çenli sowar?

203. Emeli hemra beýikligi t (ýyllar) wagtyň geçmegi bilen $H(t) = 30000e^{-0,2t}$ kanunalaýyklyk bilen üýtgeýän eken.
a) 2 ýyldan soň beýikligiň nähili bolýandygyny hasaplaň.
b) Hemra 320 km beýiklikde bolsa, ol atmosferanyň ýokarky gatlaklarynda ýanyp gidýär. Şu wagta çenli näçe wagt geçer?

III BABA DEGIŞLI GÖNÜKMELER

Deňlemeleri çözüň (**204-205**):

204. a) $x^4 - 1 = 0$; b) $5x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$; ç) $3x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 5 = 0$.

205. a) $(x-3)(x+14)(x-15) = 0$; b) $(4x+11)(3x-5) = 0$;
ç) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$; d) $x^4 + 24x^2 - 25 = 0$.

Deňsizlikleri çözüň (**206-208**):

206. a) $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$; b) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4 > 0$.

207. a) $x^4 + 8x^3 + 12x^2 \geq 0$; b) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-x) \leq 0$.

208. a) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1} < 0$; b) $\dfrac{3x-2}{2x-3} < 3$; c) $\dfrac{7x-4}{x+2} \geq 1$; d) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} < \dfrac{3}{x+2}$.

209. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 113, \\ xy = 56; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 84, \\ x^3 + y^3 = 91; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} x^2 + 9xy + 2y^2 = 12, \\ 2x^2 + 3xy - 4y^2 = 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 2, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$

Deňsizlikler sistemasyny çözüň (**210-211**) :

210. a) $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7} + \dfrac{10-3x}{5} > \dfrac{2x+7}{3} - 7\dfrac{3}{21}, \\ \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+1)}{6} > \dfrac{3x-1}{3} - \dfrac{13-x}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4} + \dfrac{19-2x}{2} < 2x, \\ \dfrac{2x+15}{9} > \dfrac{x-1}{5} + \dfrac{x}{3}. \end{cases}$

211. a) $\begin{cases} 2x^2 + 2 < 5x, \\ x^2 \geq x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + 2 < 5x, \\ x^2 \geq x; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9} \leq 0, \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8} \geq 0. \end{cases}$

212. Irrasional deňlemäni çözüň:

a) $\sqrt{8x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{2x-2}$;

b) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{3x}$;

ç) $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1} > 0$; d) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}$

Sanlary deňeşdiriň (**213-215**):

213. a) $4,2^{-\sqrt{2}}$ we 1; b) $0,2^{\frac{3}{5}}$ we $0,2^{-\frac{3}{5}}$; ç) $(0,4)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ we 1.

214. a) $4^{0,5}$ we $4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$; b) $\sqrt{3}^{\,0,2}$ we $3^{0,2}$; ç) $2^{-\frac{3}{4}}$ we $8^{-\frac{4}{9}}$.

215. a) $2^{-\sqrt{3}}$ we $2^{-\sqrt{5}}$; b) $7^{-0,3}$ we $7^{-\frac{1}{3}}$; ç) $(\frac{1}{3})^{\sqrt{5}}$ we $3^{-\sqrt{3}}$.

216. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny tapyň:

a) $y=5^{\sqrt{x^2-1}}$; b) $y=\dfrac{1}{3^x+1}$; ç) $y=\dfrac{1}{3^{x^2}-9}$; d) $y=3^{\frac{1}{2-x}}$.

217. Funksiýanyň bahalar oblastyny tapyň:

a) $y=2^{-|x|}$; b) $y=3+4^{x+1}$; ç) $y=-6^x$; d) $y=5^{|x|}+1$.

Deňlemeleri çözüň (**218-219**):

218. a) $8^x=2^{\frac{1}{5}}$; b) $121^x-7\cdot 11^x=5\cdot 11^x-11$; ç) $0,5^{x^{\,}+x-3,5}=2\sqrt{2}$.

219. a) $6^{2x}-5^{2x-1}=6^{2x-1}+5^{2x}$; b) $4^{x+3}+4^x=130$; ç) $125^x+20^x=2^{3x+1}$.

220. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

a) $\begin{cases} x+y=5, \\ 5^{\,y-x^2}=0,2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x-1}=2^y, \\ 0,1^{2x-y}=0,01; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 5^{x-y}=25, \\ 3^{x+y}=27. \end{cases}$

221. Deňsizligi çözüň:

a) $4^x\le 3^x$; b) $16^x-7\cdot 4^x-8<0$; ç) $4^x\cdot 5^{1-x}<\dfrac{25}{4}$; d) $6^{\frac{x-3}{x+8}}\ge 1$.

222. Sanlary deňeşdiriň:

a) $\log_3 2$ we 2; | b) $\log_3 5$ we $2\cdot\log_3 2$; | e) $\log_2 5$ we $\log_5 2$

ç) $\log_{0,2} 5$ we $\log_{0,2} 6$; | d) $\log_4 3$ we $\log_3 4$; | f) lg18,8 we lg6π.

223. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny tapyň:

a) $y=\log_2(2x+7)$; | b) $y=\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2)$; | c) $y=\log_5(-8x)$; | d) $y=\lg\dfrac{x-3}{x+8}$.

Deňlemeleri çözüň:

224. a) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$; b) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{x+3}=2$.

Deňlemeler sistemasyny çözüň (**225–226**):

225. a) $\begin{cases} 5^{x-y}=1, \\ 2^{\log_2(x+y)}=6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x+\lg y=4, \\ \lg x-\lg y=6; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} \log_{17}(3^x+2^y)=1, \\ 3^{\,x+1}-4\cdot 2^y=-5; \end{cases}$

226. a) $\begin{cases} 2^x\cdot 5^y=40, \\ 5^x\cdot 2^y=250; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x+5^{\log_5 y}=4, \\ x^y=16; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 3^x\cdot 3^y=81, \\ 3^x-3^y=24. \end{cases}$

227. Deňsizligi çözüň:

a) $\log_3(x^2+x+1)\ge 1$; | b) $\log_2(x^2+x-6)-\log_2(x+3)\le 1$;

ç) $\lg^2 x<\lg x^5-6$; | d) $\log_3(4^x-5\cdot 2^x+13)>2$; | e) $5^{x+7}>2$.

228. Funksiýanyň grafigini çyzyň:

a) $y=1,5\sin(2x-1)$; | b) $y=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$; | ç) $y=\log_3(1-x)$.

229. Deňeşdiriň:

a) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ we $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; | b) $\arccos\frac{1}{2}$ we $\mathrm{arctg}(-1)$;

ç) $\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}$ we $\mathrm{arctg}1$; d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ va $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

230. Hasaplaň:

a) $2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\mathrm{arctg}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

Deňlemäni çözüň (**231-233**):

231. a) $2\cos^2x+5\sin x-4=0$; b) $3\sin^2 2x+7\cos^2x-3=0$;

ç) $4\mathrm{tg}^2x-5\mathrm{tg}x+1=0$.

232. a) $3\sin^2x+7\sin x-10=0$; | b) $2\cos^2x-5\cos x+3=0$; | ç) $\sin 6x=\sin 3x$.

233. a) $\cos 7x=\cos 2x$; b) $\mathrm{tg}8x=\mathrm{tg}11x$.

Deňsizligi çözüň (**234–235**):

234. a) $\sin x>-\frac{1}{2}$; | b) $\cos 2x\le\frac{1}{2}$; | ç) $\mathrm{tg}3x\ge 1$; | d) $\sin 2x\le\frac{1}{2}$.

235. a) $\sin 4x\le\frac{1}{2}$; | b) $\cos 10x\ge 0$; | ç) $\mathrm{tg}9x\le\sqrt{3}$; | d) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le 0$.

Barlag test ýumuşlary

1. Deňlemäni çözüň: $\sin 6x=0$.

A) $x=\frac{\pi}{6}n,\ n\in Z$; B) $x=\frac{\pi}{5}n,\ n\in Z$;

C) $x=\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z$; D) $x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z$.

2. Deňlemäni çözüň: $\cos 2x = 0$.

$A)\ x = 2\pi n,\ n \in Z;$ $B)\ x = \pi n,\ n \in Z;$

$C)\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z;$ $D)\ x = \frac{\pi}{3}n,\ n \in Z.$

3. Deňlemäni çözüň: $\mathrm{tg}4x = \sqrt{3}$.

$A)\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z;$ $B)\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z;$

$C)\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z;$ $D)\ x = \frac{\pi n}{4},\ n \in Z.$

4. Deňsizligi çözüň: $\sin 2x > 3$.

$A)\ x = \pi n,\ n \in Z;$ | $B)\ \varnothing;$ | $C)\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$ | $D)\ x = 2\pi n,\ n \in Z.$

5. Deňsizligi çözüň: $\cos 2x < 3$.

$A)\ (-\infty; +\infty);$ $B)\ \varnothing;$ $C)\ (-\infty; 0);$ $D)\ (0; +\infty).$

6. Kesgitleniş oblastyny tapyň: $y = 12^x$.

$A)\ (-\infty; +\infty);$ $B)\ (0; +\infty);$ $C)\ (-\infty; 0);$ $D)\ \varnothing.$

7. Kesgitleniş oblastyny tapyň: $y = \log_2(3 - x)$.

$A)\ (3; +\infty);$ $B)\ [3; +\infty);$ $C)\ (-\infty; 3);$ $D)\ (-\infty; 3].$

8. Hasaplaň: $\arcsin\frac{1}{2}$.

$A)\ \frac{\pi}{2};$ $B)\ \pi;$ $C)\ \frac{\pi}{4};$ $D)\ \frac{\pi}{6}.$

9. Hasaplaň: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$A)\ \frac{\pi}{3};$ $B)\ \frac{\pi}{2};$ $C)\ \frac{\pi}{6};$ $D)\ \frac{\pi}{4}.$

10. Hasaplaň: $\mathrm{arctg}1$.

$A)\ \frac{\pi}{3};$ $B)\ \frac{\pi}{2};$ $C)\ \frac{\pi}{6};$ $D)\ \frac{\pi}{4}.$

IV BAP

KOMPLEKS SANLAR

86-87 KOMPLEKS SANLAR WE OLARYŇ ÜSTÜNDE AMALLAR. KOMPLEKS SANY ŞEKILLENDIRMEK

Kompleks sanlar

Kompleks sanlar baradaky taglymat ylym-bilimde, hususan-da, matematikada aýratyn orun tutýar. Çalt ösýän bu ugur tehnikada, şonuň ýaly-da, önümçiligiň köp ugurlarynda giňden ulanylýar. Şu sanlar barada käbir maglumatlary getirýäris. Hususy bir mysaldan başlalyň.

$x^2 + 4 = 0$ deňlemäni çözende $x_1 = 2\sqrt{-1}$ we $x_2 = -2\sqrt{-1}$ "sanlar" alynýar. Hakyky sanlaryň arasynda bolsa beýle "sanlar" ýok. Şeýle ýagdaýdan gutulmak üçin $\sqrt{-1}$ -a san diýip garamak zerurlygy peýda bolýar.

Bu täze san hiç hili real ululygyň ölçegini, ýa-da onuň üýtgeýşini aňlatmaýar. Şu sebäpli $\sqrt{-1}$ -ni ***hyýaly*** (hakykatda bar bolmadyk) ***birlik*** diýip atlandyrmak we mahsus belgilemek kabul edilen: $\sqrt{-1} = i$. Hyýaly birlik üçin $i^2 = -1$ deňlik ýerliklidir.

$a + bi$ görnüşdäki aňlatma garaýarys. Bu ýerde a we b-ler islendik hakyky sanlar, i bolsa hyýaly birlik.

$a + bi$ aňlatma hakyky san a we hyýaly san bi-ler "kompleksinden" ybarat bolany üçin ony kompleks san diýip atlandyrmak kabul edilen.

$a + bi$ aňlatma algebraik görnüşdäki kompleks san diýip atlandyrylýar.

$a + bi$ -ni "algebraik görnüşdäki kompleks san" diýmegiň ýerine gysgaça "kompleks san" diýip atlandyrýarys. Kompleks sanlary bir harp bilen belgilemek amatly. Meselem, $a + bi$ -ni z bilen belgiläliň. $z = a + bi$ kompleks sanyň hakyky bölegi a-ny Re(z) (fransuzça réelle – hakyky) ýaly, hyýaly bölegi b -ni bolsa Im(z) (fransuzça *imaginaire* – hyýaly) ýaly belgilemek kabul edilen: $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

Eger $z = a + bi$ kompleks san üçin $b = 0$ bolsa, hakyky san $z = a$ alynýar.

Diýmek, hakyky sanlar toplumy R ähli kompleks sanlar toplumy C-niň bölek toplumy bolýar: $R \subset C$.

1-nji mysal. $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 2.1$, $z_4 = 2i$, $z_5 = 0$ kompleks sanlaryň hakyky we hyýaly böleklerini tapyň.

Kompleks sanlaryň hakyky we hyýaly bölekleriniň kesgitlemelerine görä, tapýarys:

$\mathrm{Re}(z_1) = 1$; $\mathrm{Re}(z_2) = 2$; $\mathrm{Re}(z_3) = 2{,}1$; $\mathrm{Re}(z_4) = 0$; $\mathrm{Re}(z_s) = 0$;

$\mathrm{Im}(z_1) = 2$; $\mathrm{Im}(z_2) = -1$; $\mathrm{Im}(z_3) = 0$; $\mathrm{Im}(z_4) = 2$; $\mathrm{Im}(z_s) = 0$.

Kompleks sanlar üçin " < ", " > " gatnaşyklary anyklanmadyk, ýöne deň kompleks sanlar düşünjesi girizilýär.

Hakyky we hyýaly bölekleri, degişlilikde, deň bolan kompleks sanlar özara deň kompleks sanlar diýip atlandyrylýar.

Meselem, $z_1 = 1{,}5 + \frac{4}{5}i$ we $z_2 = \frac{3}{2} + 0{,}8i$ sanlary üçin

$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = 1{,}5$; $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) = 0{,}8$. Diýmek, $z_1 = z_2$.

Bir-birinden diňe hyýaly bölekleriniň alamaty bilen tapawutlanýan iki kompleks san özara birleşen kompleks sanlar diýilýär. $z = a + bi$ kompleks sana birleşen kompleks san $\overline{z} = a - bi$ görnüşde ýazylýar.

Meselem, $6 + 7i$ we $6 - 7i$-lar birleşen kompleks sanlardyr: $\overline{6+7i} = 6-7i$. Şunuň ýaly $\overline{z}$ sanyna birleşen san $\overline{\overline{z}} = z$ bolýar. Meselem, $\overline{\overline{6+7i}} = \overline{6-7i} = 6 + 7i$. a hakyky sana birleşen san a-nyň özüne deň: $\overline{a} = \overline{a + 0 \cdot i} = a - 0 \cdot i = a$. Ýöne, bi hyýaly sana birleşen san $\overline{bi} = -bi$ dir. Çünki $\overline{bi} = \overline{0 + bi} = 0 - bi = -bi$.

Kompleks sanlaryň üstünde arifmetik amallar

Kompleks sanlaryň üstünde arifmetik amallar aşakdaky ýaly anyklanýar:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i; \qquad (1)$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i; \qquad (2)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i; \qquad (3)$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \qquad (4)$$

(1) we (2) deňlikleri gönüden-göni ulanmak kyn däl. Kompleks sanlary köpeltmek amalyny $i^2=-1$ bolýandygyny hasaba alyp, köpagzalary köpeltmek ýaly ýerine ýetirmek mümkin.

2-nji mysal. Jemi tapyň: $(3 + 7i) + (-5 + 4i)$.

Jemi tapmak üçin (1) formuladan peýdalanýarys:

$(3 + 7i) + (-5 + 4i) = (3 + (-5)) + (7 + 4)i = -2 + 11i$.

3-nji mysal. Tapawudy tapyň: $(13-7i)-(-5+4i)$.

△Tapawudy tapmak üçin (2) formuladan peýdalanýarys:
$(13-7i)-(-5+4i)=(13-(-5))+(-7-4)i=18-11i$. ▲

4-nji mysal. Köpeltmek hasylyny tapyň: $(2-i)\cdot(\frac{3}{4}+2i)$.

△Köpeltmek hasylyny tapmak üçin ýaýlary açýarys.

$$(2-i)\cdot\left(\frac{3}{4}+2i\right)=2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot 2i-i\cdot\frac{3}{4}-2i^2=\frac{3}{2}+4i-\frac{3}{4}i+2=\frac{7}{2}+\frac{13}{4}i. ▲$$

$\frac{a+bi}{c+di}$ paýy hasaplama üçin, onuň sanawjysy we maýdalawjysyny maýdalawjynyň "birleşeni" $c-di$-ge köpeldip, degişli amallary ýerine ýetirmeli.

5-nji mysal. Bölmek amalyny ýerine ýetiriň: $\frac{2-i}{-3+2i}$.

$$△\ \frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-6-4i+3i-2}{(-3)^2-(2i)^2}=\frac{-8-i}{13}=\frac{-8}{13}-\frac{1}{13}i. ▲$$

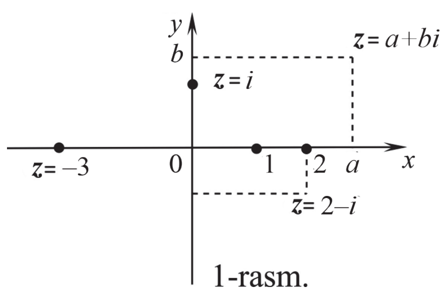
$z+w=0$ deňligi kanagatlandyrýan z, w kompleks sanlar özara garşylykly sanlar diýilýär. z kompleks sanyna garşylykly sany $-z$ bilen belgilemek kabul edilen. $z=a+bi$ kompleks sana garşylykly bolan ýeke-täk kompleks san bar we bu san $-z=-a-bi$ kompleks sandan ybarat.

$zw=1$ deňligi kanagatlandyrýan z we w kompleks sanlar özara ters kompleks sanlar diýilýär. $z=0$ sana ters san ýok. Islendik $z\neq 0$ kompleks sana ters kompleks san bar. Bu san $\frac{1}{z}$ sanyndan ybarat.

Kompleks sany tekizlikde şekillendirmek

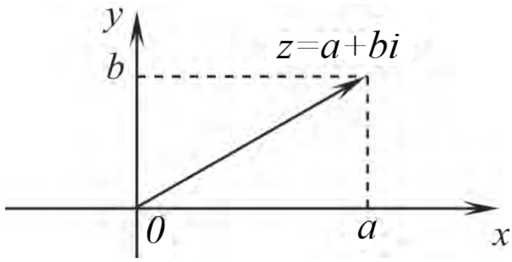
Çak edeliň, tekizlikde gönüburçly Dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsun. Onda $z=a+bi$ kompleks sana tekizlikde koordinatalary $(a;\ b)$ bolan nokat laýyk gelýär.

Bu usul bilen şekillendirende $a+0i$ kompleks sana $(a;\ 0)$ koordinataly nokat, $0+bi$ kompleks sana bolsa $(0;\ b)$ nokat laýyk gelýär. Şonuň üçin hem x okuna hakyky ok we y okuna hyýaly ok diýilýär (1-nji surat).

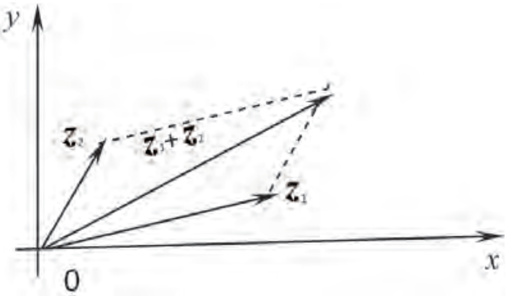


1-rasm.

$a+bi$ kompleks sany tekizlikde a we b koordinataly wektor ýaly hem şekillendirmek mümkin (2-nji surat). Bu bolsa kompleks sanlary goşmakda wektorlary goşmagyň parallelogram düzgünini ulanmaga mümkinçilik berýär (3-nji surat).



2-nji surat.



3-nji surat.

Soraglar we ýumuşlar

1. Hyýaly birlik näme? Näme üçin ony girizmek zerurlygy döredi?
2. Kompleks sanyň algebraik görnüşini ýazyň, mysal getiriň
3. Iki kompleks san haçan deň diýilýär? Mysal getiriň.
4. Iki kompleks sanyň jemi, tapawudy, köpeltmek hasyly, paýy nähili anyklanýar? Mysallarda düşündiriň.
5. Garşylykly kompleks san näme?
6. Birleşen kompleks san näme?
7. Özara ters kompleks sanlar näme? Mysallar getiriň.
8. Kompleks sany wektor ýaly şekillendirmek näme? Mysal getiriň.

Gönükmeler

1. Kompleks sanlaryň hakyky we hyýaly böleklerini ýatdan aýdyň:

1) $z=-3+7i$; 2) $z=4-\frac{1}{2}i$; 3) $z=-2-5i$;

4) $z=-5,7+5i$; 5) $z=5i$; 6) $z=9$;

7) $z=-7+3i$; 8) $z=8-\frac{1}{2}i$; 9) $z=-5-6i$;

10) $z=-5,7-5i$; 11) $z=-5i$; 12) $z=90$.

2. Kompleks sanlary algebraik görnüşde ýazyň:

1) $\operatorname{Re}(z)=4,\quad \operatorname{Im}(z)=-5$; 2) $\operatorname{Re}(z)=-2,\quad \operatorname{Im}(z)=3$;

3) $\operatorname{Re}(z)=0,\quad \operatorname{Im}(z)=8$; 4) $\operatorname{Re}(z)=7,\quad \operatorname{Im}(z)=0$;

5) $\operatorname{Re}(z)=6,\quad \operatorname{Im}(z)=-7$; 6) $\operatorname{Re}(z)=-3,\quad \operatorname{Im}(z)=4$;

7) $\operatorname{Re}(z)=0,\quad \operatorname{Im}(z)=9$; 8) $\operatorname{Re}(z)=2,\quad \operatorname{Im}(z)=0$;

9) $\operatorname{Re}(z)=12,\quad \operatorname{Im}(z)=20$.

3. Deň kompleks sanlary görkeziň (**3–4**):

1) $2-4i$; | 2) $3+5i$; | 3) $\frac{2}{3}+i$; | 4) $\sqrt{121}-7i$; | 5) $33+44i$; | 6) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}\,i$.

4. 1) $4-3i$; | 2) $1+3i$; | 3) $\frac{1}{3}+i$; | 4) $\sqrt{16}-\sqrt{9}i$; | 5) $3+4i$; | 6) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}i$.

z sanyna birleşen bolan $\bar{z}$ sany tapyň (**5–6**):

5. 1) $z = 5 - 3i$; | 2) $z = -5 + 3i$; | 3) $z = 1 - i$; | 4) $z = 2 + 3i$; | 5) $z = -7 - i$.

6. 1) $z = 7{,}2$; | 2) $z = 6i$; | 3) $z = \sqrt{16}-\sqrt{9}i$; | 4) $z = -2i + (-7 + 3i)$.

7. Jemi tapyň (**7-8**):

1) $(-5+3i)+(2-i)$; | 2) $(-3)+(3-4i)$; | 3) $(2+5i)+(-2-5i)$; | 4) $(-4i)+(3.6-3i)$.

8. 1) $(8-3i) + (8 + 3i)$; | 2) $(-7 + 5i)+(7-5i)$; | 3) $9i + (3 - 8i)$; | 4) $-17i+(-9+16i)$.

9. Tapawudy tapyň (**9-10**):

1) $(3 + 4i) - (4 + 2i)$; 2) $(4 - 6i) - (3 + 2i)$; | 3) $(2 + 4i) - (-4 + 2i)$.

10. 1) $(5 + 4i) - (5 - 4i)$; 2) $7 - (8 + 5i)$; 3) $7i - (6i + 3)$.

11. Köpeltmek hasylyny tapyň (**11-12**):

1) $(4 + 6i)(3 + 4i)$; 2) $(5 + 8i)(3 - 2i)$; 3) $(6 - 4i)(3 - 6i)$.

12. 1) $(-3+2i)(8-4i)$; 2) $\left(\frac{1}{3}-i\right)\left(\frac{1}{2}+i\right)$; 3) $\left(\frac{5}{7}+4i\right)\left(\frac{7}{5}-2i\right)$.

13. Paýy tapyň (**13-14**):

1) $\frac{2+2i}{1-2i}$; | 2) $\frac{4-5i}{3+2i}$; | 3) $\frac{3+4i}{3-4i}$; | 4) $\frac{2+3i}{4-3i}$; | 5) $\frac{4-5i}{3+2i}$.

14. 1) $\frac{4-5i}{-2+3i}$; | 2) $\frac{3}{5-2i}$; | 3) $\frac{5-2i}{3}$; | 4) $\frac{7i}{13-i}$; | 5) $\frac{7+4i}{5-6i}$.

15. Amallary ýerine ýetiriň (**15-16**):

1) $\frac{(3-4i)(4-3i)}{2+i}$; | 2) $\frac{(4-i)(3+2i)}{3-2i}$; | 3) $\frac{5-2i}{(2+i)(1-i)}$.

16. 1) $\frac{3-2i}{(1+i)(3-i)}$; | 2) $\frac{3}{2-3i}+\frac{3}{2+3i}$; | 3) $\frac{2}{1+i}+\frac{5}{2+i}$.

17. Kompleks sanlary tekizlikde şekillendiriň (**17-18**):

1) $z = 3 + 4i$; | 2) $z = 3 - 4i$; | 3) $z = -3 + 4i$; | 4) $z = -3 -4i$; | 5) $z = 2i$.

18. 1) $z = 4-2i$; | 2) $z = 5+3i$; | 3) $z = \frac{2+i}{2-i}$; | 4) $z = (2-i)(1+i)$; | 5) $z = (2+i)(2-i)$.

88 $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ we $r\cdot e^{i\varphi}$ $(r > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$ GÖRNÜŞDÄKI KOMPLEKS SANLAR

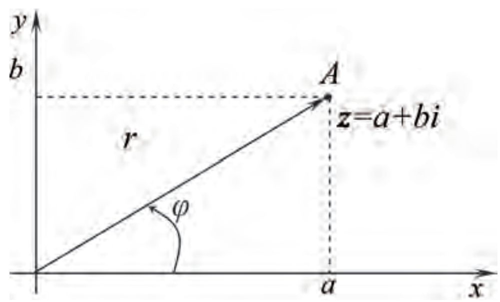
Bu temada kompleks sanyň trigonometrik we görkezijili görnüşlerini öwrenýäris.

Trigonometrik görnüşdäki kompleks sanlar

Tekizlikde gönüburçly Dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsun. $z = a + bi$ kompleks sana $(a; b)$ koordinataly A nokat laýyk goýlan, diýeliň. Koordinatalar başlangyjy O we A nokatlaryny utgaşdyryp $\overrightarrow{OA}$ wektory alarys (4-nji surat).

O nokatdan A nokada çenli bolan $r=OA$ aralyk kompleks sanyň moduly, absissa okunyň položitel ugry hem-de $\overrightarrow{OA}$ wektor arasyndaky (φ) burç ***kompleks sanyň argumenti*** diýilýär.

Görnüşi ýaly, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.



4-nji surat

Kompleks sanyň $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ görnüşine onuň trigonometrik şekli we $z = r \cdot e^{i\varphi}$ görnüşine bolsa görkezijili şekli diýilýär. Kompleks sany trigonometrik görnüşinden algebraik görnüşine geçirmek üçin aşakdaky formuladan peýdalanýar: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

1-nji mysal. Kompleks sanlary trigonometrik görnüşde ýazyň:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△ 1) $z = i = 0 + 1\cdot i$, $a = 0$, $b = 1$, $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Diýmek, $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, ýagny $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

2) $r=2$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ bolanlygy üçin $-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

3) $z = -1 - i$, $a = -1$, $b = -1$, $r = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Diýmek, $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. ▲

2-nji mysal. Kompleks sanlary görkezijili görnüşde ýazyň:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△ 1-nji mysalyň hasaplamalaryndan peýdalanýarys:

$$i=e^{\frac{\pi}{2}i},\qquad -2i=2e^{\frac{3\pi}{2}i},\qquad -1-i=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$ ▲

Soraglar we ýumuşlar

1. Kompleks sanyň moduly näme? Ol nähili hasaplanýar?
2. Kompleks sanyň argumenti näme? Mysal getiriň.
3. Kompleks sanyň trigonometrik görnüşini düşündiriň.
4. Kompleks sanyň görkezijili görnüşini düşündiriň.
5. *Eýleriň meşhur formulasyny* subut ediň: $e^{i\pi}=-1$.

Gönükmeler

Kompleks sanyň modulyny tapyň (**19-20**):

19. 1) $z=-2+3i$; 2) $z=-2+3i$; 3) $z=1+\sqrt{3}i$; 4) $z=\sqrt{8}-i$.

20. 1) $z=6-8i$; 2) $z=2+2\sqrt{3}i$; 3) $z=\sqrt{3}+i$; 4) $z=2i$.

Kompleks sanyň argumentini tapyň (**21-22**):

21. 1) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 2) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 3) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $z=2\sqrt{2}i$.

22. 1) $z=5$; 2) $z=-2i$; 3) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$.

Kompleks sany trigonometrik we görkezijili görnüşde ýazyň (**23-24**):

23. 1) $z=-2-2i$; | 2) $z=2-2i$; | 3) $z=\sqrt{3}-i$; | 4) $z=1-\sqrt{3}i$.

24. 1) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; | 2) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; | 3) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$; | 4) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

89-90 TRIGONOMETRIK GÖRNÜŞDE BERLEN KOMPLEKS SANLARYŇ KÖPELTMEK HASYLY WE PAÝY

Trigonometrik görnüşde berlen kompleks sanlary köpeltmek

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ trigonometrik görnüşdäki kompleks sanlarynyň köpeltmek hasyly üçin aşakdaky formula ýerlikli:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]. \qquad (1)$$

z_1 we z_2 trigonometrik görnüşdäki sanlary bölmek üçin bolsa
$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}\left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right]$ formula ýerlikli, $r_1 \neq 0$. (2)

1-nji mysal. $z_1 = 3(\cos 20° + i\sin 20°)$ va $z_2 = 2(\cos 35° + i\sin 35°)$ kompleks sanlary köpeldiň.

Ýokardaky düzgüne görä, köpeltmek hasylyny tapýarys:
$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2(\cos(20° + 55°) + i\sin(20° + 55°)) = 6(\cos 55° + i\sin 55°)$.

2-nji mysal. $z_1 = 2(\cos 140° + i\sin 140°)$, $z_2 = 3(\cos 150° + i\sin 150°)$ va 5 cos
va $z_3 = 5(\cos 70° + i\sin 70°)$ kompleks sanlary köpeldiň.

Ýokardaky düzgüne görä köpeltmek hasylyny tapýarys:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5\left[\cos(140° + 150° + 70°) + i\sin(140° + 150° + 70°)\right] = 30 \;\cos 360$$

$$= 30(\cos 360° + i\sin 360°) = 30.$$

3-nji mysal. $z_1 = 6(\cos 50° + i\sin 50°)$ va $z_2 = 2(\cos 25° + i\sin 25°)$ kompleks sanlar paýyny tapyň.

Bölmegiň düzgünine görä:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\left[\cos(50° - 25°) + i\sin(50° - 25°)\right] = 3(\cos 25° + i\sin 25°).$$

Natural derejä götermek

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sany kwadrata götermek üçin kompleks sanlary köpeltmek formulasyndan (1) formuladan peýdalanýarys:

$$z^2 = r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Edil şunuň ýaly, $z^3 = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$. Umuman,

$z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ formula ýerlikli, munda $n \in N$.

4-nji mysal. $z = 3(\cos 15° + i\sin 15°)$ kompleks sany kuba göteriň:

(3) formula görä:

$$z^3 = 27(\cos 45° + i\sin 45°) = \frac{27}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \frac{27}{\sqrt{2}}(1 + i).$$

5-nji mysal. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ kompleks sanyň 10-njy derejesini tapyň.

Ilki berlen sanyň modulyny we argumentini tapyp, ony trigonometrik görnüşde ýazyp alýarys: $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60°$, $z = 1 \cdot (\cos 60° + i\sin 60°)$, bu ýerden:

$$z^{10} = \left(\cos 600° + i\sin 600°\right) = \cos 240° + i\sin 240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \cdot$$ ▲

Soraglar we ýumuşlar

1. Trigonometrik görnüşdäki kompleks sanlar nähili köpeldilýär? Manysyny açyň we aýdyň.
2. Trigonometrik görnüşdäki kompleks sanlar nähili bölünýär? Manysyny açyň we aýdyň.
3. Trigonometrik görnüşdäki kompleks sanlar derejä nähili göterilýär?

Gönükmeler

Kompleks sanlary köpeldiň (**27-28**):

27. 1) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ we $z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$;

2) $z_1 = \frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$ we $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

28. 1) $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ we $z_2 = \sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$;

2) $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18})$ we $z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

Kompleks sanlary bölüň (**29-30**):

29. 1) $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$ ni $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ ga;

2) $z_1 = 8(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ ni $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ ga.

30. 1) $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ ni $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$ ni $z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

Kompleks sany derejä göteriň (**31-32**):

31. 1) $(3(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}))^5$; 2) $(\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}))^6$; 3) $(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}))^7$.

32. 1) $(4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^4$; 2) $(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15})^{10}$; 3) $(\cos\frac{\pi}{22} + i\sin\frac{\pi}{22})^{11}$.

33. Amallary ýerine ýetiriň (**33-34**):

1) $\dfrac{(1+i)^5\left(\sqrt{2}-i\right)^4}{(1-i)\left(1+\sqrt{2}\,i\right)^4}$; 2) $\dfrac{(1-i)^4\left(\sqrt{2}+i\right)^3}{(1+i)^4}$; 3) $\dfrac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{10}-(1+i)^{10}\cdot i}$.

34. 1) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^2}{1-2i}$;; 3) $\dfrac{3-4i}{3+4i}+\dfrac{5+6i}{5-6i}$.

91 KOMPLEKS SANDAN KWADRAT KÖK ALMAK

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ görnüşdäki kompleks sandan kwadrat kök almak üçin gözlenýän kompleks sanyň modulyny x we argumentini y diýip aşakdaky deňligi ýazýarys:

$$\sqrt{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y).$$

Deňligiň iki bölegini kwadrata göterip,
$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x^2(\cos 2y+i\sin 2y)$ hem-de $x^2=r,\ 2y=\varphi+2\pi n$ -dan

$x=\sqrt{r},\ y=\dfrac{\varphi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ gatnaşyklary tapýarys. Diýmek, gözlenýän z kompleks sanyň kwadrat köki üçin

$$\beta=\sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi n}{2}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{2}\right]$$

formula ýerlikli. n-e $0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ bahalary goýup dürli kökleri tapýarys. Barlamak netijesinde diňe 2 dürli bahanyň barlygy anyklanýar, ýagny

$$n=0 \text{ bolanda } \beta_1=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (1)$$

$$n=1 \text{ bolanda } \beta_2=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right] \qquad (2)$$

1-nji mysal. $z=9(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ kompleks sandan kwadrat kök çykaryň.
△ Ýokardaky formula görä, kwadrat kökleri hasaplaýarys:

$$\sqrt{z}=3\left[\cos(30^\circ+180^\circ n)+i\sin(30^\circ+180^\circ n)\right]$$

Bu formulada

$n=0$ üçin $\sqrt{z}=3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ we

$n=1$ üçin $\sqrt{z}=3(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ)=-\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ kwadrat kökler tapylýar. ▲

Kompleks sandan kub kök almakda aşakdaky formuladan peýdalanylýar:

$$z_n=\sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y)=\sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+360°n}{3}+i\sin\frac{\varphi+360°n}{3}),$$

$n=0,\ 1,\ 2.$

Bu tapylan sanlar Dekart koordinatalar sistemasynda merkezi koordinata başlangyjynda we radiusy $\sqrt[3]{r}$ bolan töwerege çyzylan dogry üçburçlugyň depelerinden ybaratdyr.

2-nji mysal. $z=1$ kompleks sanyň kub köküni tapyň we çyzgyda görkeziň.

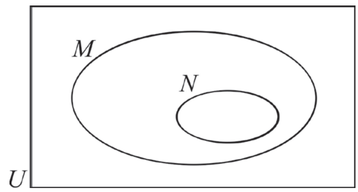
Bu sanyň moduly $r=1$ we argumenti $\varphi=0°$ bolany üçin,

$$z_n=\sqrt[3]{1}=1\cdot\left(\cos\frac{0°+360°n}{3}+i\sin\frac{0°+360°n}{3}\right),\ n=0,\ 1,\ 2.$$

Bu ýerden: $n=0$ da $z_0=1\cdot(\cos0°+i\sin0°)=1$,

$n=1$ da $z_1=1\cdot(\cos120°+i\sin120°)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$n=2$ da $z_2=1\cdot(\cos240°+i\sin240°)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$



5-nji surat

Bu sanlar dogry üçburçlugyň depelerinden ybaratdygyny 5-nji suratdan görüp bileris.

Kompleks sandan 4-nji derejeli kök almakda aşakdaky formuladan peýdalanylýar:

$$z_n=\sqrt[4]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y)=\sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\varphi+360°n}{4}+i\sin\frac{\varphi+360°n}{4}\right),$$

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

3-nji mysal. $z=i$ kompleks sandan 4-nji derejeli kök alyň.

Bu sanyň moduly $r=1$, argumenti $\varphi=90°$ bolany üçin

$$z_n=\sqrt[4]{1(\cos90°+i\sin90°)}=1\cdot\left(\cos\frac{90°+360°n}{4}+\sin\frac{90°+360°n}{4}\right).$$

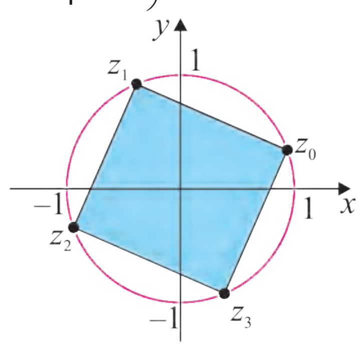
Bu ýerden: $n=0$ bolanda $z_0=\cos22{,}5°+i\sin22{,}5°$,

$n=1$ bolanda $z_1=\cos112{,}5°+i\sin112{,}5°$,

$n=2$ bolanda $z_2=\cos202{,}5°+i\sin202{,}5°$,

$n=3$ bolanda $z_3=\cos292{,}5°+i\sin292{,}5°$.

Bu sanlar merkezi koordinata başlangyjynda we radiusy 1 bolan töweregiň içinden çyzylan kwadratyň depelerinden ybaratdyr (6-njy surat).



6-njy surat

Soraglar we ýumuşlar

1. Kompleks sandan kwadrat kök haýsy formula arkaly tapylýar?
2. Muawr formulasy näme? Onuň manysyny açyň we aýdyň.

Gönükmeler

35. Kompleks sandan kwadrat kök alyň (**35–36**):

1) $z=25\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$;
2) $z=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\cdot\sin\frac{\pi}{18}\right)$;
3) $z=\cos\frac{\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{\pi}{5}$;
4) $z=\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}$;
5) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{30}+i\cdot\sin\frac{\pi}{30}\right)$;
6) $z=\frac{1}{49}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;
7) $z=\cos\frac{\pi}{10}+i\cdot\sin\frac{\pi}{10}$;
8) $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;

36.

1) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$;
2) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;
3) $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$;
4) $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;
5) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$;
6) $z=\frac{16}{9}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;
7) $z=5(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$;
8) $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

IV baba degişli gönükmeler

37. Hasaplaň:

1) $(3+4i)(2-5i)+(3-4i)(2+5i)$;
2) $(1+3i)^3-(4+i^5)$;
3) $\frac{(1-2i)^2}{1+3i}$;
4) $5-7i+8i^2-9i^3+i^4$.

38. Algebraik görnüşde ýazyň:

1) $z=\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{3i}\right)^2$;
2) $z=\frac{12-13i}{8+6i}+\frac{(1+2i)^2}{i+3}$;
3) $\frac{4i}{(\sqrt{3}-i)^2}$.

39. Hasaplaň (**39–42**):

1) $(1+i)^{10}$;
2) $(1-i)^4\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^3$;
3) $(1+i)^{2018}\cdot(1-1)^{2018}$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{8}$; | 5) $\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i\right)}$; | 6) $\left(\dfrac{\sqrt{2}-i}{1+i}\right)^{10}$.

40. 1) $z=\dfrac{(2+i)^{2}}{3-4i}$; | 2) $z=\dfrac{(1+2i)^{3}}{2i}-3i^{10}$; | 3) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{5}$;

4) $z=\dfrac{3+2i}{1+4i}-i^{7}$; | 5) $\dfrac{(4-i)}{3+4i}$; | 6) $\dfrac{2-3i}{1-4i}$.

41. 1) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^{2}}{1-2i}$;

3) $(2-3i)^{3}-(2+3i)^{3}$; 4) $\dfrac{(4+3i)(2+3i)^{2}}{6+8i}$;

5) $\dfrac{33+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 6) $\dfrac{12-5i}{6-8i}+\dfrac{(2+i)^{2}}{1-2i}$.

42. 1) $(2-2i)\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos 70^{\circ}+i\sin 70^{\circ}\right)$; | 2) $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{3}-3i\right)$.

43. Bölmegi ýerine ýetiriň:

1) $5\left(\cos 100^{\circ}+i\sin 100^{\circ}\right):\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$; 2) $(6+6i):3\left(\cos 75^{\circ}+i\sin 75^{\circ}\right)$.

44. Derejä göteriň:

1) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{3}$; | 2) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^{4}$; | 3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{6}$;

4) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{5}$; | 5) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^{10}$; | 6) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{10}$.

45. Kwadrat köki hasaplaň:

1) $\sqrt{-27i}$; 2) $\sqrt{6-6\sqrt{3}\,i}$; 3) $\sqrt{8+8\sqrt{3}\,i}$; 4) $\sqrt{-256}$.

46. Deňligi barlaň:

1) $\left[\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right]^{5}+\left[\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}\right]^{5}=\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{(\sin 26^{\circ}+i\cos 154^{\circ})\cdot(\sin 27^{\circ}+i\cos 153^{\circ})^{3}}{\sin 17^{\circ}-i\cos 17^{\circ}}=-1$.

47. Kub köki hasaplaň:

1) $\sqrt[3]{1+i}$; 2) $\sqrt[3]{-i}$; 3) $\sqrt[3]{8}$; 4) $\sqrt[3]{1-i}$; 5) $\sqrt[3]{-8}$.

48. 4-nji derejeli kök alyň:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{16}$; 3) $\sqrt[4]{1+i}$; 4) $\sqrt[4]{1-i}$; 5) $\sqrt[4]{-16}$.

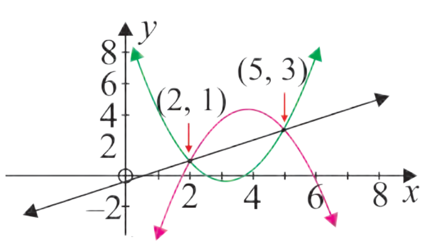
Barlag işiniň nusgalary

1. Hasaplaň: $(35-7i)\cdot(4-6i)$.
2. Bölmegi ýerine ýetiriň: $\dfrac{8-i}{40+3i}$.
3. Köpeldiň:
   $3(\cos5° + i\sin5°)\cdot 8(\cos3° + i\sin3°)$.
4. Derejä göteriň: $(3(\cos4° + i\sin4°))^6$
5. Kwadrat kök alyň: $\sqrt{64i}$.

JOGAPLAR
III bap

73. a) Ähli x abssissalar dürli bolany üçin bu funksiýa bolýar. b) iki nokatda x abssissalar birmeňzeş bolany üçin bu funksiýa bolmaýar. ç) ähli nokatlarda x abssissalar birmeňzeş bolany üçin bu funksiýa bolmaýar. d) ähli x abssissalar dürli bolany üçin bu funksiýa bolýar. e) ähli x abssissalar dürli bolani üçin bu funksiýa bolýar. f) ähli nokatlarda x abssissalar birmeňzeş bolany üçin bu funksiýa bolmaýar. **74.** a) funksiýa; b) funksiýa; ç) funksiýa; d) funksiýa däl; e) funksiýa; f) funksiýa däl; g) funksiýa; h) funksiýa däl. **75.** Ýok, islendik wertikal göni çyzyk funksiýa bolmaýar. **76.** Ýok, $y=\pm\sqrt{9-x^2}$. **77.** a) 2; b) 8; ç) –1; d) –13; e) 1. **78.** a) 2; b) 2; ç) –16; d) –68; e) $\frac{17}{4}$. **79.** a) –3; b) 3; ç) 3; d) –3; e) $\frac{15}{2}$. **80.** a) $7-3a$; b) $7+3a$; ç) $-3a-2$; d) $10-3b$; e) $1-3x$; f) $7-3x-3h$. **81.** a) $2x^2+19x+43$; b) $2x^2-11x+13$; ç) $2x^2-3x-1$; d) $2x^4+3x2-1$; e) $2x^4-x^2-2$; f) $2x^2+4hx+2h^2+3x+3h-1$. **82.** a) **I)** $-\frac{7}{2}$; **II)** $-\frac{3}{4}$; **III)** $-\frac{4}{9}$; b) $x=4$. **84.** $V(4)=6210$. Bu enjamyň 4 ýyldan soň bolýan nyrhy. $t=4{,}5$ şunça ýyldan soň enjamyň nyrhy 5780 bolýar. Enjamyň deslapky nyrhy 9650-ä deň.

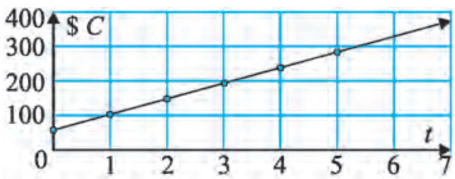
85.



86. $f(x)=-2x+5$. **87.** $a=3$, $b=-2$. **88.** $a=3$, $b=-1$, $c=-4$. **90.** a) **I)** $x>0$; b) **II)** $-2\le x\le 3$; c) **I)** $-2<x\le 0$; **II)** $0\le x<2$; d) **I)** $x\le 2$; **II)** $x\ge 2$; e) **II)** $x\in\mathbb{R}$; f) **I)** $x\in\mathbb{R}$; g) **I)** $1\le x\le 5$; **II)** $x\le 1, x\ge 5$; h) **I)** $2\le x<4$, $x>4$; **II)** $x<0$, $0<x\le 2$; i) **I)** $x\le 0$, $2\le x\le 6$; **II)** $0\le x\le 2$, $x\ge 6$. **92.** a) V(0)=25000 ýewro. Bu awtomaşynyň başlangyç nyrhy. b) V(3)=16000. Bu awtomaşynyň 3 ýyldan soň bolan nyrhy. c) $t=5$.

93. a)

t	0	1	2	3	4	5
C	60	105	150	195	240	285

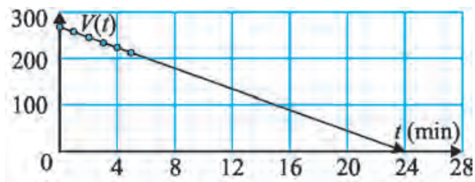


b) $C=60+45t$; c) \$ 352,50.

94. a)

t	0	1	2	3	4	5
V	265	254	243	232	221	210

b)

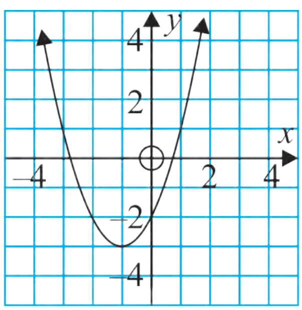


c) $V(t) = 265–11t$; d) **I)** 100 *l*.

95. a) hawa; b) ýok; ç) hawa; d) hawa; e) hawa; f) ýok. **96.** a) ýok; b) hawa; ç) hawa; d) hawa; e) ýok; f) ýok. **97.** a) $x=–3$; b) $x=–2$ ýa-da $–3$; ç) $x=1$ ýa-da 4; d) hakyky çözüwe eýe däl. **98.** a) **I)** 75 m; **II)** 195; **III)** 275 m; b) **I)** t=2 s ýa-da t=14 s; **II)** t=0 s ýa-da t=16 s. **99.** a) 40 müň, 480 müň; b) 10 sany ýa-da 62 sany.

100. a)

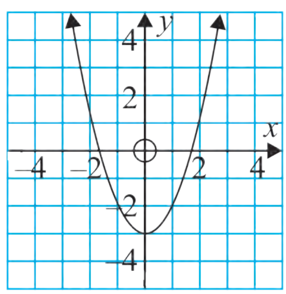
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	-2	-3	-2	1	6	13



$y=x^2+2x–2$

b)

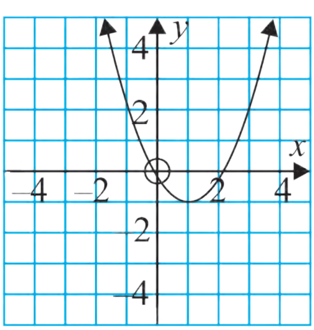
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6



$y=x^2–3$

ç)

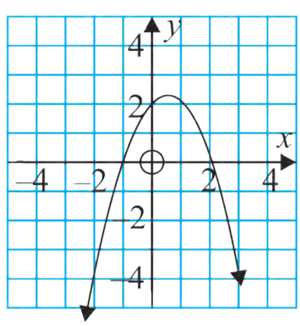
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	-2	-3	-2	1	6	13



$y=x^2–2x$

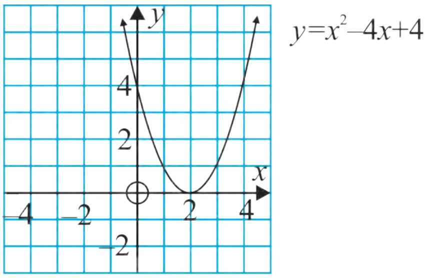
d)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	-4	0	2	2	0	-4

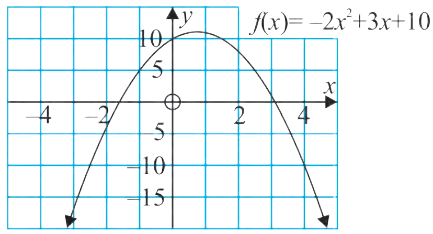


$f(x)=–x^2+x+2x$

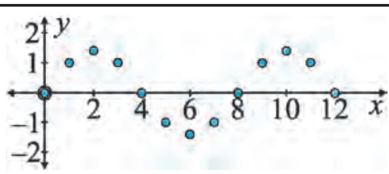
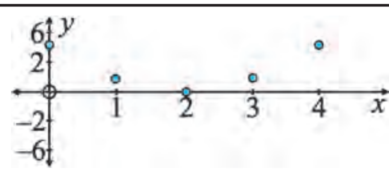
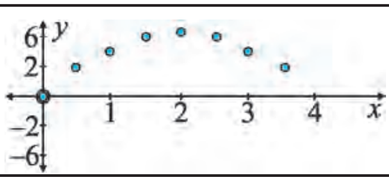
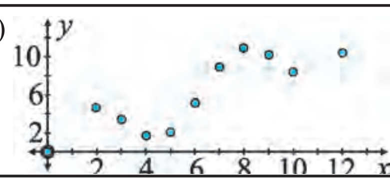
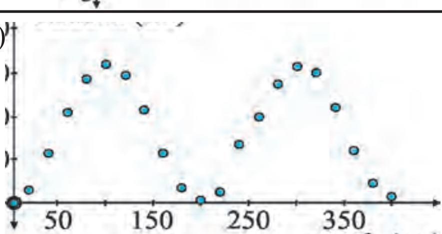
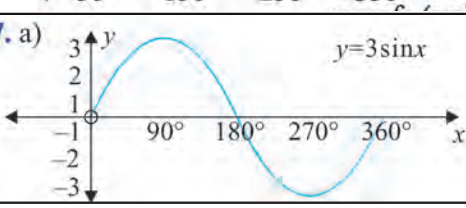
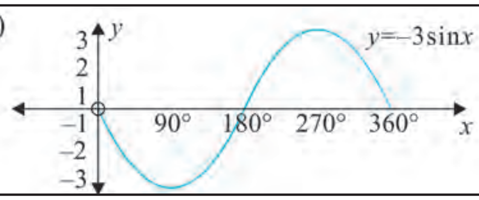
e)



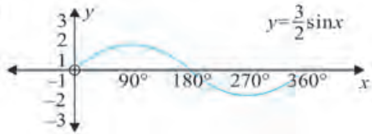
f)



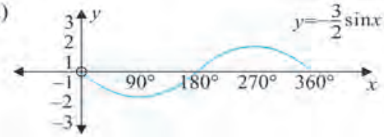
101. a) 3; b) –1; ç) –4; d) 1; ç) 5; f) 0; g) 8; h) –5; **i)** 2. **102.** a) 3; b) –6; ç) 49; d) 15; e) 0; f) 20. **105.** a) x=3; b) x=–5/2; ç) x=1; d) x=–4; e) x=3; f) x=–4. **106.** a) x=4; b) x=–2; ç) x=1; d) x=11/2; e) x=5; f) x=–2. **107.** a) x=–3; b) x=4; ç) x=–5/4; d) x=3/2; e) x=0; f) x=7/10; g) x=3; h) x=5/3; i) x=–4. **108.** a) (2, 3); b) (–1, 4); ç) (3, 8); d) (0, 3); e) (–3, –18); f) (1, –1); g) (1/2, –5/4); h) (3/4, –7/8); i) (6, 7). **109.** a) y=2(x–1)(x–2); b) y=2(x–2)^2; c) y=(x–1)(x–3); d) y=–(x–3)(x+1); y=–3(x–1)^2; f) y=–2(x+2)(x–3). **110.** a) y=3/2(x–2)(x–4); b) y=–1/2(x+4)(x–2); ç) y=–4/3(x+3)^2; d) y=1/4(x+3)(x–5); e) y=–(x+3)(x–3); f) y=4(x–1)(x–3). **111.** a) 3m; b) 0,5s; ç) 4m.

<table>
<tr><td>113. a) periodik;</td><td></td><td>b) periodik däl;</td><td></td></tr>
<tr><td>ç) periodik däl;</td><td></td><td>d) periodik däl;</td><td></td></tr>
<tr><td>114. a)</td><td></td><td colspan="2">Ok deňlemesi maksimum period amplituda degişlilikde y=32; 64 sm; 200 sm; 32 sm-e deň. 115. a) periodik; b) periodik; ç) periodik; d) periodik däl; e) periodik; f) periodik. 116. a) 2; b) 8; c) (2,1); d) 8; e) y=–1.</td></tr>
<tr><td>117. a)</td><td></td><td>b)</td><td></td></tr>
</table>

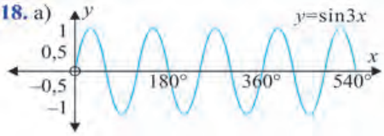
c)



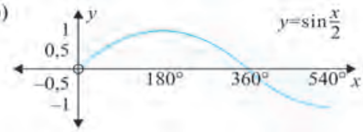
d)



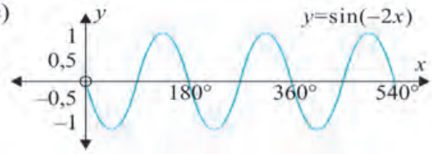
118. a)



b)

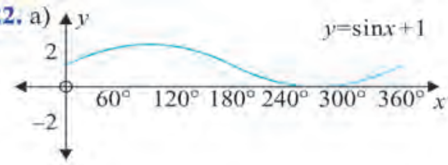


c)

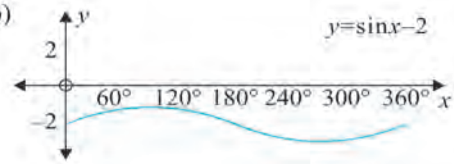


119. a) 90°; b) 90°; ç) 1080°; d) 600°; **120.** a) $b=2/5$; b) $b=3$; ç) $b=1/6$. **121.** a) $y=3\sin x$; b) $y=\sin x-2$; ç) $y=-2\sin x-1$; d) $y=\sin 2x$; e) $y=-4\sin(x/2)$; f) $y=\sin(x/2)$; g) $y=2\sin 3x$; h) $y=2\sin 2x-3$.

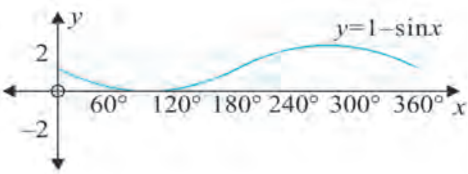
122. a)



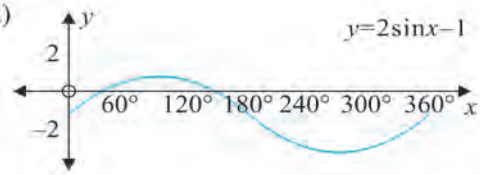
b)



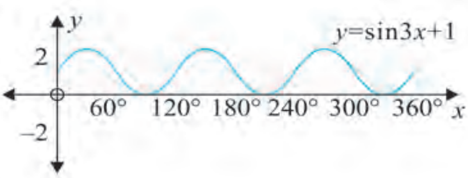
c)



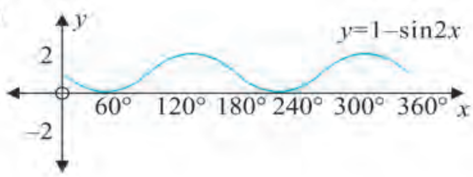
d)



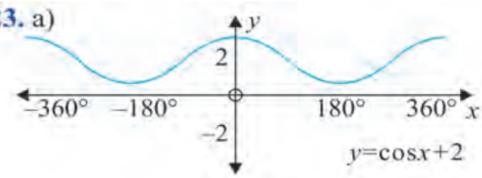
e)



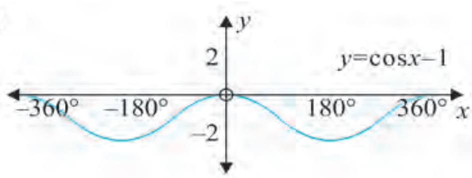
f)



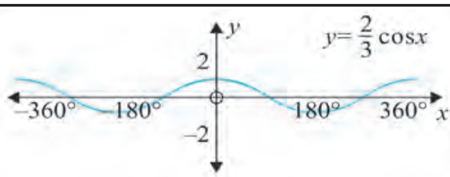
123. a)



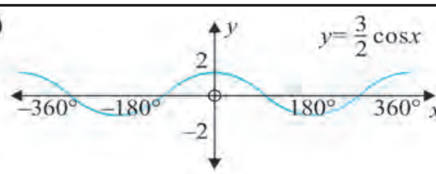
b)

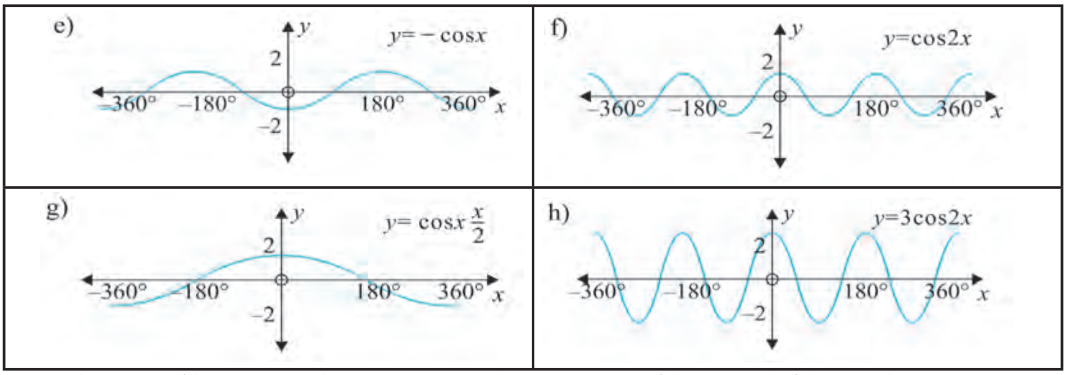


c)



d)





124. a) 120°; b) 1080°; c) 720°. **126.** a) y=2cos2x; b) y=cos(x/2)+2; ç) y=–5$x$cos2x.
127. T=9,5cos(30t)–9,5. **130.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **131.** 1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **132.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) π. **136.** 1) 0; 2) $\frac{4\pi}{3}$. **138.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) –π.
140. 1) 2π; 2) $\frac{3\pi}{2}$. **142.** 1) mana eýe; 2) mana eýe däl; 3) mana eýe däl.

144. 1) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z.$ **146.** 1) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z.$

148. 1) $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z.$ **150.** 1) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z.$

151. 1) $x=(-1)^{n}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z.$ **152.** 2) $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4},\ n\in Z.$

153. 1) $x_1=k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$

156. 1) $x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z.$

157. 1) $x_1=-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ \ x_2=(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z.$

158. 2) $x=\pm\arccos(1-\frac{\sqrt{7}}{2})+2n\pi,\ n\in Z.$ **159.** 2) $x_1=-\frac{\pi}{4}+n\pi,$
$x_2=\arccos 4+n\pi,\ n\in Z.$ **160.** 1) $x=\frac{2n\pi}{3},\ n\in Z;$ 3) $x_1=\frac{n\pi}{2},$
$x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5},\ n\in Z.$ **162.** 1) $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

163. 1) $\left[\frac{\pi}{4}+2n\pi;\ \frac{3\pi}{4}+2n\pi\right],\ n\in Z;$ 2) $\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi;\ \frac{5\pi}{4}+2n\pi\right),\ n\in Z;$

3) $\left(-\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\ -\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)$, $n\in Z$. **167.** 1) $\left[-\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\ \dfrac{\pi}{3}+n\pi\right]$, $n\in Z$. **173.** 1) $y=2x+6$.

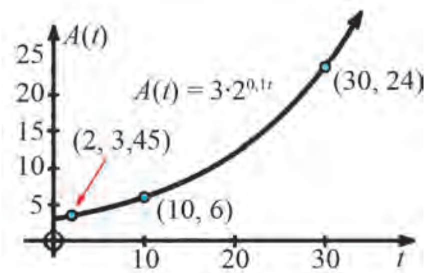
174. 1) $y=13\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{17}}$. **175.** 1) $x^2+y^2=49$, töwerek. **176.** 1) $(x-3)^2+(y-7)^2=36$, töwerek.
177. 1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) 4. **178.** 1) uly; 2) kiçi. **180.** 1) kesgitleniş oblasty: $(-\infty;+\infty)$, bahalar oblasty: $(0;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$ aralykda artýar. **181.** 1) artýar; 2) kemelýär; 3) artýar. **183.** 1) $(-\infty;1]$; 2) $\left(-\infty;\dfrac{4}{9}\right)$; 7) $[1;+\infty]$; 12) $\left(-\infty;\ -2-\sqrt{34}\right)\cup\left(-2+\sqrt{34};\ +\infty\right)$.

184. 1) $(-\infty;2]$. **185.** 1) 3; 2) –2; 3) –2; 4) –3; 5) –3. **186.** 1) uly; 2) uly; 3) kiçi.

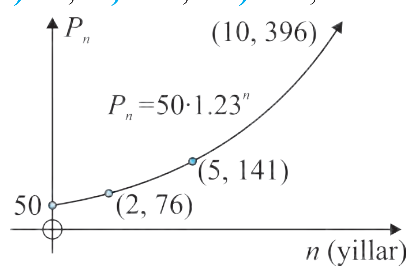
187. 1) 2; 2) 5; 3) 125; 4) 45; 5) $\dfrac{1}{36}$; 9) –2. **188.** 1) $(2{,}5;+\infty)$; 2) $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$; 3) $(-2;2)$. **190.** 1) $\dfrac{1}{32}$; 2) 1; 3) 4; 4) 2; 8) –2; 10) 0,5 we 1; 15) $\dfrac{1}{7}$ we 49.

191. 1) $(64;+\infty)$; 2) $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\cup(27;+\infty)$; 7) $(2;5)$.

192. a) 3 m^2;
b) **I)** 3,45 m^2; **II)** 6 m^2; **III)** 24 m^2;
ç)

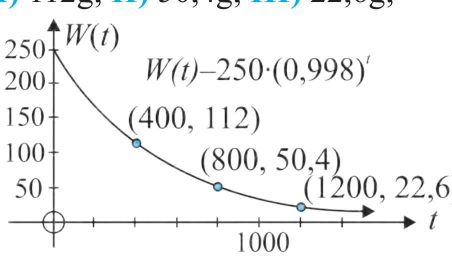


193. a) 50;
b) **I)** 76; **II)** 141; **III)** 396;
ç)



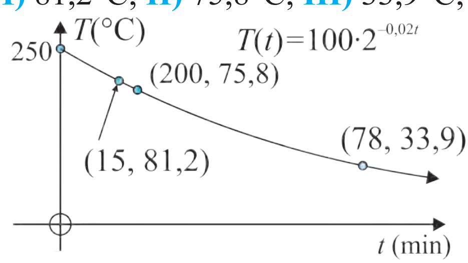
194. a) V_0; b) $2V_0$; ç) 100%; d) 183 göterime artýar.

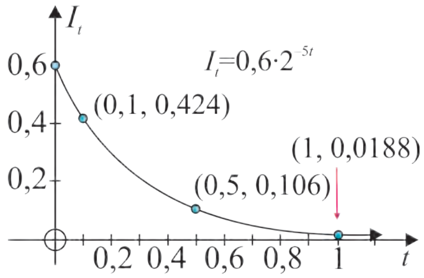
195. a) 250g;
b) **I)** 112g; **II)** 50,4g; **III)** 22,6g;
ç)



d) ≈346.

197. a) 100°C;
b) **I)** 81,2°C; **II)** 75,8°C; **III)** 33,9°C;
ç)



198. a) 0,6 amper;
b) **I)** 0,424 amper; **II)** 0,106 amper;
III) 0,0188 amper;
ç)


199. a) L_0; b) 99%. **200.** Takmynan 3 sagat 15 min. **201.** 37,8 aý. **202.** 10,8 minut.
203. 22,7 ýyl. **204.** b) 1.
205. a) {–14; 3; 15}; ç) {–4;4}.
206. a) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.
207. a) (–∞;–6]∪[–2; +∞).
208. a) $\left(-2;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$;
c) (–∞;–2)∪[1;+∞).

209. a) {(7;8);(8;7);(–7;–8);+8;–7)}. **212.** a) 3; b) 2. **213.** a) kiçi; b) kiçi. **216.** a) (–∞;–1]∪[1;+∞); b) (–∞;+∞). **217.** a) (0;1]; b) (3;+∞); ç) (–∞; 0). **218.** a) $\dfrac{1}{15}$; b) 0 we 1; ç) 1 we –2. **219.** ç) 0. **220.** a){(2;3);(–3;8)}. **221.** a) (–∞;0]; b) (–∞;1,5). **222.** a) kiçi; b) uly. **223.** a) (–3,5; +∞); b) (–2;2). **224.** a) $2\sqrt{5}$. **225.** b) (100000;0,1). **226.** a) (3;1). **227.** a) (–∞;–2]∪[1;+∞). **229.** a) kiçi; b) uly. **230.** a) $-\dfrac{2\pi}{3}$ **231.** ç) $x_1=\dfrac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=\arccos\dfrac{1}{4}+n\pi,\ n\in Z.$

234. a) $\left(-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi;\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi\right),\ n\in Z.$ **235.** ç) $\left(-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{9};\dfrac{\pi}{27}+\dfrac{n\pi}{9}\right),\ n\in Z.$

IV bap

1. 7) Re(z)=–7, Jm(z)=3; 8) Re(z)=8, Jm(z)=5; 9) Re(z)=–0,5, Jm(z)=–6; 10) Re(z)=–5,7, Jm(z)=–5; 11) Re(z)=0, Jm(z)=–5; 12) Re(z)=90, Jm(z)=0.

6. 1) $\bar{z}$=7,2; 3) $\bar{z}$=4+3i. **8.** 1) 16; 3) 3+i. **10.** 1) 8i; 2) –1–5i; 3) –3+i. **12.** 2) $1\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}i$. **14.** 1) $-\dfrac{23}{13}-\dfrac{2}{13}i$; 3) $\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}i$. **16.** 2) $\dfrac{12}{13}$. **20.** 1) 10; 2) 4; 3) 2; 4) 2. **22.** 1) 0; 2) $\dfrac{3\pi}{2}$; 3) $\dfrac{11\pi}{6}$. **24.** 1) $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ we $2\cdot e^{\frac{7\pi i}{4}}$.

28. 1) $z_1\cdot z_2=\cos\dfrac{13\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{13\pi}{12}$. **30.** 1) $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}$. **32.** 2) $\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

34. 1) $-\dfrac{42}{29}$; 2) –18i. **36.** 1) $z_0=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{6})$, $z_1=\sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{6})$.

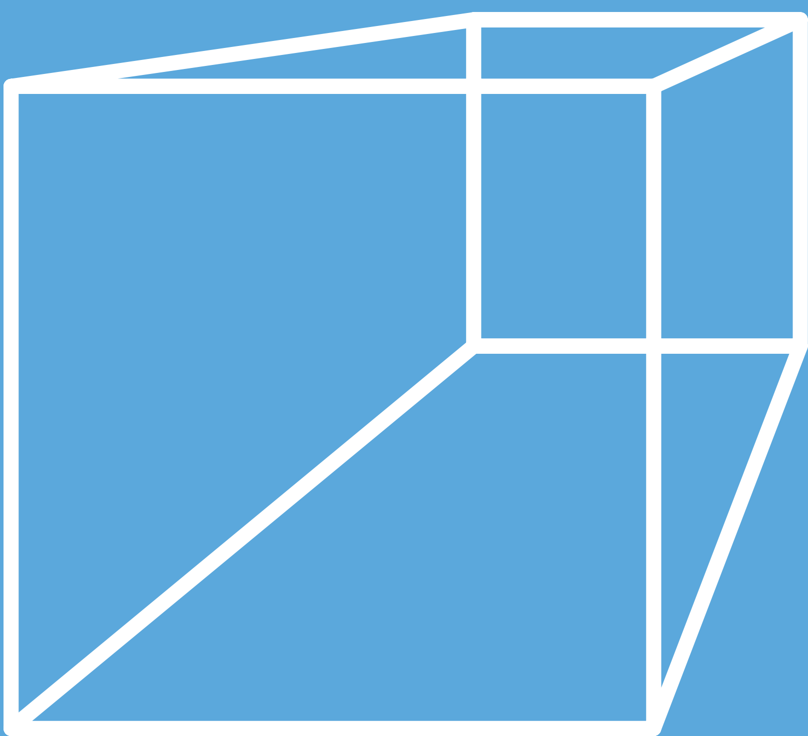
Peýdalanylan we hödürlenýän edebiýatlar

1. *Ş.A. Alimow, O.R. Halmuhamedow, M.A. Mirzaahmedow.* Algebra we analiziň esaslary. 10-njy synp üçin derslik. Daşkent: "O‘qituvchi", 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. *Э. Сайдаматов и др.* Алгебра и основы математического анализа. часть 1, Ташкент: "O'qituvchi", 2016.
4. *A.U. Abduhamidov va boshqalar.* Algebra va matematik analiz asoslari, 1-qism, Toshkent: "O'qituvchi", 2012.
5. *Н.П. Филичева.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. "Рязань". 2009.
6. *М.И. Исроилов.* Ҳисоблаш методлари. Тошкент: "Ўқитувчи" 1988.
7. *Г.К. Муравин.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, "Дрофа", 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, "Просвещение", 2004.
9. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).
10. "Математика в школе" jurnali.
11. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001 - yildan boshlab chiqa boshlagan).
12. *M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov* Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.
13. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, "O‘qituvchi", 1979.
14. *M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev.* O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, "O‘qituvchi", 1993.
15. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
16. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
17. http://www.problems.ru – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
18. http://matholymp.zn.uz – O‘zbekistonda va dunyoda matematik olimpiadalar.

MAZMUNY

MATEMATIKA

GEOMETRIÝA



10-njy synp

10-njy synpda geometriýanyň stereometriýa bölümini – giňişlikdäki geometrik şekilleriň häsiýetlerini düzümli öwrenmäge girişilýär. Derslikden esasy giňişlikdäki şekiller, köpgranlyklar we aýlanma jisimler we olaryň esasy häsiýetleri, giňişlikde parallel we perpendikulýar göni çyzyklar we tekizlikler hem-de olaryň häsiýetlerine degişli meseleler orun alan.

“Geometriýa-10” dersliginde nazary materiallar ýönekeý we rowan dilde beýan etmäge hereket edilen. Ähli temalar we düşünjeler durmuşdan dürli mysallar arkaly açyp berlen. Her bir temadan soň getirilen soraglar, subut etmäge, hasaplamaga we gurmaga degişli ençeme meseleler we mysallar okuwçyny döredijilikli pikirlenmäge ündeýär, özleşdirilen bilimleri çuňlaşdyrmaga we berkidip barmaga kömek edýär.

“Geometriýa-10” dersligi umumy bilim berýän mekdepleriň 10-njy synp okuwçylaryna niýetlenen, ondan geometriýany özbaşdak öwrenmekçi we gaýtalamakçy bolan kitapsöýüjiler hem peýdalanyp bilerler.

MAZMUNY

Dersligiň "Geometriýa" bölüminde ulanylan belgiler we olaryň düşündirişi:

– teoremanyň häsiýetnamasy

– aksiomanyň häsiýetnamasy

– tema boýunça soraglar

– ugrukdyryjy sapak

– teorema subudynyň ahyry

– amaly ulanylyşy

– Taryhy sahypalar

– geometrik tapmaçalar

IV BÖLÜM

GIŇIŞLIKDE GÖNI ÇYZYKLARYŇ WE TEKIZLIKLERIŇ PARALLELLIGI

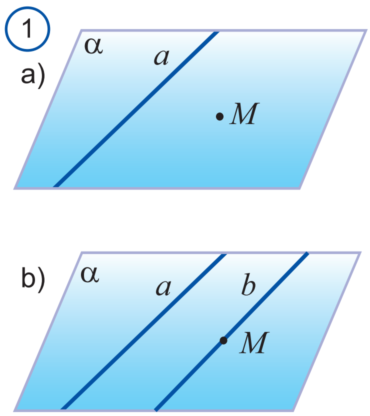
10 GIŇIŞLIKDE GÖNI ÇYZYKLARYŇ ÖZARA ÝERLEŞIŞI

Giňişlikdäki iki a we b göni çyzyk bir tekizlikde ýatsa we kesişmese, olara *parallel göni çyzyklar* diýilýär. a we b göni çyzyklaryň parallelligi $a||b$ ýaly ýazylýar.

Tekizlikde berlen nokat arkaly berlen göni çyzyga ýeke-täk parallel göni çyzyk geçirmek mümkin. Şeýle häsiýet giňişlikde-de ýerlikli bolýar:

4.1-nji teorema. ***Giňişlikde berlen göni çyzykda ýatmaýan nokatdan şu göni çyzyga ýeke-täk parallel göni çyzyk geçirmek mümkin.***

Subudy. a – berlen göni çyzyk we M – bu göni çyzykda ýatmaýan nokat bolsun (1-nji a surat). Subut edilen 2.1-nji teorema görä, a – berlen göni çyzyk we onda ýatmaýan M nokat arkaly ýeke-täk α tekizlik geçirmek mümkin.



α tekizlikde bolsa M nokat arkaly a – berlen göni çyzyga parallel ýeke-täk b göni çyzygy geçirmek mümkin (1-nji b surat).

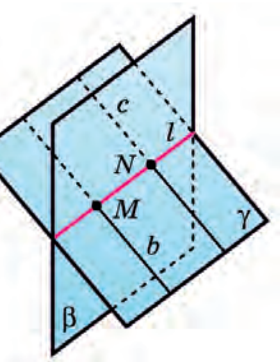
Edil şu – b göni çyzyk gözlenýän ýeke-täk göni çyzyk bolýar. ❑

Tekizlikde iki parallel göni çyzyklardan biri üçünji göni çyzygy kesip geçse, olaryň ikinjisi-de bu göni çyzygy kesip geçýär. Şuňa meňzeş häsiýet – giňişlikde-de ýerlikli bolýar:

4.2-nji teorema. ***Giňişlikde berlen iki parallel göni çyzykdan biri tekizligi kesip geçse, olaryň ikinjisi-de bu tekizligi kesip geçýär.***

Subudy. b we c parallel göni çyzyklar berlen bolup, olaryň biri – b göni çyzyk berlen β tekizligi M nokatda kesip geçsin (2-nji a surat).

2



b we c göni çyzyklar parallel bolany üçin olar bir tekizlikde ýatýar. Bu – γ tekizlik bolsun.

β we g tekizlikler üçin M umumy nokat. Onda S3 aksioma görä, bu tekizlikler bir l göni çyzyk boýunça kesişýär. Bu göni çyzyk γ tekizlikde ýatýar we b göni çyzygy M nokatda kesip geçýär. Şonuň üçin, bu göni çyzyk b göni çyzyga parallel c göni çyzygy hem N nokatda kesip geçýär.

l göni çyzyk β tekizlikde-de ýatýandygy üçin N nokat bu β tekizlige-de degişli bolýar. Diýmek, N nokat β we g tekizlikler üçin umumy nokat.

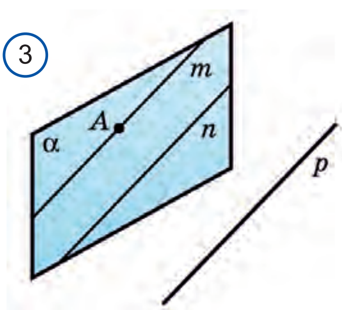
Indi c göni çyzygyň β tekizlik bilen başga umumy nokady ýokdugyny görkezýäris. Tersini çak edýäris. Aýdaly, c göni çyzygyň β tekizlik bilen ýene başga K umumy nokady bar bolsun. Onda S2 aksioma görä, c göni çyzyk β tekizlikde ýatýar. Onda, c göni çyzyk β we γ tekizlikler üçin umumy bolýar. Ýöne, l - şeýle göni çyzykdy. Mundan c göni çyzygyň l göni çyzyk bilen üstme-üst düşýändigi gelip çykýar. Munuň bolsa bolmagy mümkin däl. Çünki b göni çyzyk c göni çyzyga parallel we l göni çyzygy kesip geçýär. Gapma-garşylyk, çakymyzyň nädogrudygyny görkezýär. ❑

Size planimetriýadan mälim bolşy ýaly, iki göni çyzygyň her biri üçünji göni çyzyga parallel bolsa, olar özara parallel bolýar. Bu häsiýet giňişlikde-de ýerlikli bolup, ol göni çyzyklaryň parallellik nyşany diýlip aýdylýar.

4.3-nji teorema. Üçünji göni çyzyga parallel iki göni çyzyk özara paralleldir.

Subudy. Aýdaly, m we n göni çyzyklar p göni çyzyga parallel bolsun. m we n göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýandygyny we özara kesişmeýändigini, ýagny paralleldigini görkezýäris.

3



m göni çyzykda A nokady alýarys we bu nokat we n göni çyzyk arkaly α tekizlik geçirýäris. m göni çyzygyň α tekizlikde ýatýandygyny subut edýäris.

Aýdaly, şeýle bolmasyn. m göni çyzyk α tekizlik bilen umumy nokada eýe bolany üçin, ol tekizligi kesip geçýär. Onda 3.2 teorema görä,bu tekizligi m göni çyzyga parallel bolan p göni çyzyk hem, p göni çyzyga parallel bolan n göni çyzyk hem kesip geçýär. Ýöne, munuň bolmagy mümkin däl, çünki n göni çyzyk α tekizlikde ýatýar.

Diýmek, m we n göni çyzyklar α tekizlikde ýatýar.

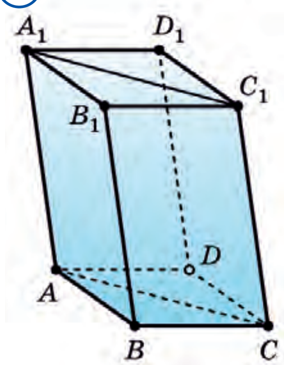
Indi bu göni çyzyklaryň kesişmeýändigini subut edýäris. Ýene tersini çak edýäris. m we n göni çyzyklar nähilidir B nokatda kesişsin. Onda B nokat arkaly p göni çyzyga iki sany parallel m we n göni çyzyklar geçýär. Munuň bolsa 3.1 teorema görä bolmagy mümkin däl. ❑

Indi parallelepipediň aşakdaky häsiýetlerini subut edýäris.

1-nji häsiýet. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedde (4-nji surat) esasynyň diagonallary we gapdal gapyrgalardan düzülen ACC_1A_1 dörtburçly parallelogramdan ybarat bolýar.***

Hakykatdan hem, parallelepipediň ABB_1A_1 we BCC_1B_1 granlarynyň kesgitlemesine görä, parallelogramdan ybarat.

4



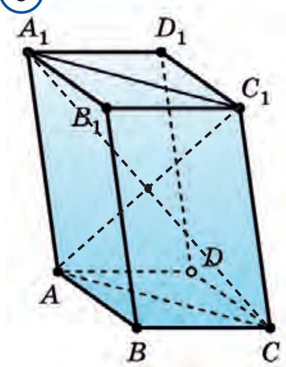
Bu parallelogramlaryň garşylykly taraplary özara deň bolýar. Hususan-da, $AB = A_1B_1$ we $BC = B_1C_1$.

Parallelepipediň kesgitlemesine görä, $AA_1 \parallel BB_1$ we $BB_1 \parallel CC_1$. Onda 3.2-nji teorema görä, $AA_1 \parallel CC_1$ we $AA_1 = CC_1$ bolýar. Diýmek, AC_1CA_1 dörtburçluk – parallelogram.

2-nji häsiýet. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipediň (4-nji surat) garşylykly granlary özara deň.***

Ýokardaky häsiýete görä, AC_1CA_1 - parallelogram we $AC = A_1C_1$. Onda ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar üç tarap boýunça deň bolup, ABC we $A_1B_1C_1$ burçlar hem özara deň bolýar. Netijede, $ABCD$ we $A_1B_1C_1D_1$ parallelogramlar hem özara deň bolýar.

5



Başga garşylykly granlaryň deňligi-de şeýdip subut edilýär.

3-nji häsiýet. ***Parallelepipediň ähli diagonallary bir nokatda kesişýär we bu nokatda deň ikä bölünýär (5-nji surat).***

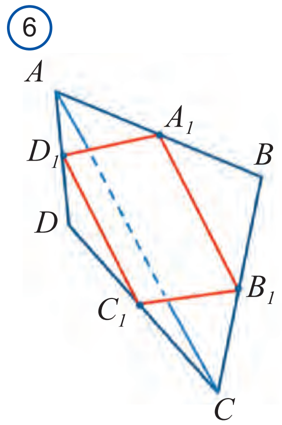
1-nji häsiýete görä, AC_1CA_1 parallelogram. Onda bu parallelogramyň diagonallary A_1C we AC_1 bir nokatda kesişýär we kesişme nokadynda deň ikä bölünýär.

Galan diagonallaryň kesişmesi we bu nokatda deň ikä bölünişi şuňa meňzeş subut edilýär.

Bir göni çyzykda ýa-da parallel göni çyzyklarda ýatýan kesimler (şöhleler) özara *parallel kesimler (şöhleler)* diýip atlandyrylýar.

Mesele. Depeleri bir tekizlikde ýatmaýan giňişlikdäki dörtburçlugyň taraplarynyň ortalary parallelogramyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

Subudy. $ABCD$ - giňişlikdäki dörtburçluk we A_1, B_1, C_1 we D_1 - dörtburçlugyň taraplarynyň ortalary bolsun (6-njy surat). Onda, A_1B_1 kesim - ABC üçburçlugyň AC tarapyna parallel orta çyzygy, C_1D_1 - ACD üçburçlugyň AC tarapyna parallel orta çyzygy bolýar.

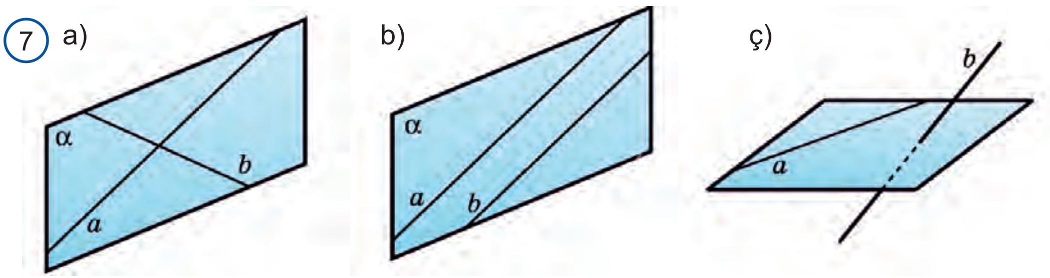


3.3-nji teorema görä A_1B_1 we C_1D_1 göni çyzyklar parallel bolýar. Diýmek, olar bir tekizlikde ýatýar.

A_1D_1 we B_1C_1 göni çyzyklaryň parallelligi hem edil şeýle subut edilýär.

Şeýdip, $A_1B_1C_1D_1$ dörtburçluk bir tekizlikde ýatýar we onuň garşylykly taraplary parallel. Diýmek, ol parallelogramdyr.❑

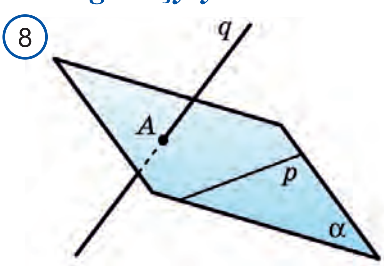
Eger giňişlikde iki göni çyzyk özara kesişse ýa-da özara parallel bolsa, olar bir tekizlikde ýatýar (7-nji *a* we 7-nji *b* surat). Giňişlikde bir tekizlikde ýatmaýan



göni çyzyklar *atanaklaýyn göni çyzyklar* diýip atlandyrylýar (7-nji c surat).

Atanaklaýyn göni çyzyklary aşakdaky nyşana görä tanamak mümkin:

4.4-nji teorema. ***Eger iki göni çyzyklardan biri käbir tekizlikde ýatsa, ikinjisi bolsa bu tekizligi birinji göni çyzykda ýatmaýan nokatda kesip geçse, onda bu göni çyzyklar atanaklaýyn bolýar.***



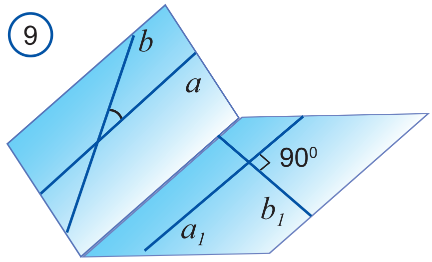
Subudy. Aýdaly, p göni çyzyk α tekizlikde ýatsyn. q göni çyzyk bolsa bu tekizligi p göni çyzyga degişli bolmadyk A nokatda kesip geçsin (8-nji surat). p we q göni çyzyklaryň atanaklaýyn ekenligini subut edýäris.

Tersini çak edýäris: p we q göni çyzyklar haýsy-da bolsa bir β tekizlikde ýatsyn. Onda β tekizlige p göni çyzyk we A nokat degişli bolýar. Öz gezeginde A nokat q tekizlige hem degişli. Diýmek, α we β tekizlikler üstme-üst düşýär. Netijede, şerte görä α tekizlige degişli bolmadyk q göni çyzyk bu tekizlige degişli bolup galdy. Gapma-garşylyk, çakymyzyň nädogrudygyny görkezýär. ❑

Iki göni çyzygyň kesişmeginden alnan goňşy burçlaryň kiçisine *iki göni çyzygyň arasyndaky burç* diýilýär.

Atanaklaýyn göni çyzyklaryň arasyndaky burç diýip, bu göni çyzyklara parallel bolan kesişýän göni çyzyklaryň arasyndaky burça aýdylýar (9-njy surat).

9



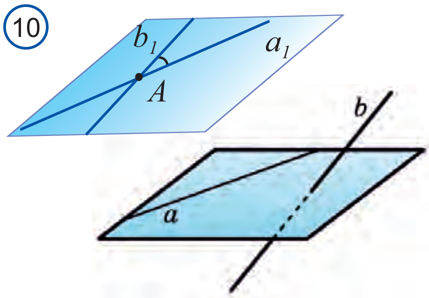
Amalda a we b atanaklaýyn göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapmak üçin (10-njy surat)

1) käbir A nokat saýlanýar:

2) A nokatdan atanaklaýyn göni çyzyklara parallel a_1 we b_1 göni çyzyklar geçirilýär;

3) bu göni çyzyklaryň arasyndaky burç ölçelýär.

10



Bu algoritmiň netijesi - A nokada bagly dälligi barada oýlap görüň.

Arasyndaky burç 90^0-a deň göni çyzyklar *perpendikulýar göni çyzyklar* diýip atlandyrylýar. Parallel göni çyzyklaryň arasyndaky burç 0^0 diýlip hasaplanýar.

? *Tema degişli soraglar we ýumuşlar*

1. Parallel göni çyzyklaryň nähili häsiýetlerini bilýärsiňiz?
2. Göni çyzyklaryň parallellik nyşanyny aýdyň
3. Parallelepipediň nähili häsiýetlerini bilýärsiňiz?
4. Göni çyzyklaryň atanaklaýynlyk nyşanyny aýdyň.
5. Göni çyzyklaryň arasyndaky burç nähili kesgitlenýär?
6. Atanaklaýyn göni çyzyklar parallel bolmagy mümkinmi?

4.1. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipeddäki; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizmadaky parallel gapyrgalaryň jübütlerini anyklaň.

4.2. Nähili piramidlarda parallel gapyrgalar bolýar?

4.3. Mälim bolşy ýaly, tekizlikde göni çyzyk parallel göni çyzyklardan birini kesip geçse, ikinjisini hem kesip geçýär. Bu häsiýet giňişlikde-de ýerlikli bolarmy?

4.4. Dogry tassyklamany tapyň.

A) Giňişlikde göni çyzykda ýatmaýan nokatdan oňa köp parallel göni çyzyklary geçirmek mümkin;

B) Üçünji göni çyzyga parallel göni çyzyklar özara kesişýär;

Ç) Eger iki göni çyzyk tekizlikde ýatsa, olar kesişýär;

D) Göni çyzykdan we onda ýatmaýan nokatdan iki dürli tekizlik geçirmek mümkin;

E) Giňişligiň tekizlikde ýatmaýan nokadyndan bu tekizligi kesýän köp göni çyzyklary geçirmek mümkin.

4.5. A depesi α tekizlikde ýatýan AB kesimden C nokat saýlanan. B we C nokatlardan geçirilen parallel göni çyzyklar α tekizligi degişlilikde B_1 we C_1 nokatlarda kesip geçýär. Eger a) C nokat B kesimiň ortasy, we $BB_1 = 14$ sm; b) $AC : CB = 3 : 2$ we $BB_1 = 50$ sm bolsa, CC_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

4.6. Bir tekizlikde ýatmaýan $MNOP$ parallelogram we EK esasly $MNEK$ trapesiýa berlen. a) PO we EK göni çyzyklaryň özara ýerleşişini anyklaň. b) trapesiýanyň esaslary $MN = 45$ sm, $EK = 55$ sm-e deň bolup, oňa içinden töwerek çyzmak mümkin. Trapesiýanyň perimetrini tapyň.

4.7. a we b göni çyzyklar bir tekizlikde ýatýar. Bu göni çyzyklaryň mümkin bolan özara ýerleşişini görkeziň.

A) a we b parallel; *B)* a we b kesişýär; *Ç)* a we b kesişmeýär; *D)* a we b atanaklaýyn; *E)* a we b parallel däl.

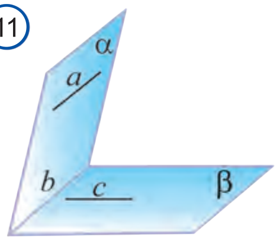
4.8. a we b göni çyzyklar c göni çyzyga parallel. a we b göni çyzyklar özara nähili ýerleşmegi mümkin?

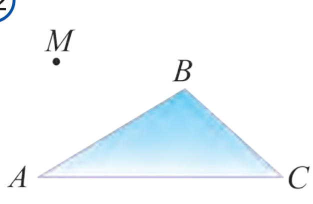
4.9. 11-nji suratda α we β tekizlikler b göni çyzyk boýunça kesişýär. Eger $a//b$, c we b göni çyzyklar parallel bolmasa, a we c göni çyzyklar özara nähili ýerleşmegi mümkin?

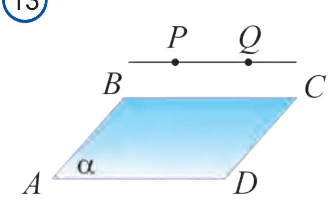
4.10. 12-nji suratda M nokat ABC üçburçluk daşky ýaýlasynda ýatyr. MA, MC, MB göni çyzyklara atanaklaýyn göni çyzyklary anyklaň.

4.11. 13-nji suratda PQ göni çyzyk $ABCD$ dörtburçlugyň daşky ýaýlasynda ýatýar we BC ga parallel. a) PQ we AB; b) PQ we CD; ç) PQ we AD nähili göni çyzyklar?

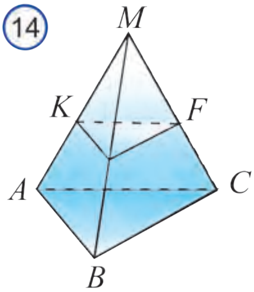
4.12. 14-nji suratda M nokat ABC üçburçlugyň daşky ýaýlasynda ýatyr. MA, MB, MC kesimleriň ortalary degişlilikde K, F, P nokatlar bilen belgilenen. 1) KP; 2) PF; 3) KF; 4) KM; 5) PM; 6) FM; 7) AB; 8) BC; 9) AC göni çyzyklardan haýsylary özara papallel?

11


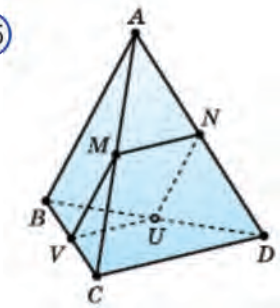
12


13


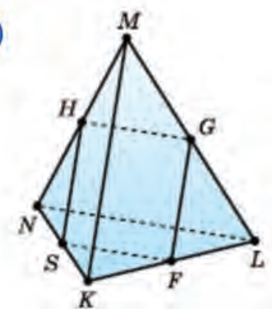
14



15



16



4.13. *M, N, U, V* nokatlar *ABCD* piramidanyň degişlilikde *AC, AD, BD* we *BC* gapyrgalarynyň ortalary (15-nji surat). Eger *AB* = 20 sm, *CD* = 30 sm bolsa, *MNUV* dörtburçlugyň perimetrini tapyň.

4.14. *H, G, F, S* nokatlar *KLMN* üçburçly piramidanyň degişlilikde *MN, ML, LK* we *KN* gapyrgalarynyň ortalary (16-njy surat). Eger *LK* = 18 mm, *MN* = 22 mm bolsa, *HGFS* dörtburçlugyň perimetrini tapyň.

4.15. Göni çyzykdan dürli iki tekizlik geçirmek mümkinligini subut ediň.

4.16. Bir tekizlikde ýatmaýan dört nokat berlen. Olaryň üçüsinden geçýän näçe tekizlik geçirmek mümkin?.

4.17. *A, B, C* nokatlar berlen iki tekizlikleriň her birinde ýatýar. Bu nokatlaryň bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

4.18. *a* göni çyzyk boýunça kesişýän iki tekizlik berlen. *b* göni çyzyk olardan birinde ýatýar we ikinjisini kesip geçýär. *a* we *b* göni çyzyklaryň kesişýändigini subut ediň.

4.19. Üç tekizligiň her ikisi özara kesişýär. Tekizlikleriň kesişme göni çyzyklaryndan ikisi haýsy-da bolsa bir nokatda kesişse, üçünji kesişme çyzygy hem şu nokatdan geçýändigini subut ediň.

4.20. Eger dörtbuçlugyň diagonallary kesişse, onda onuň depeleri bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

4.21. *K,Z,M,N* nokatlar degişlilikde *SABC* üçburçly piramidanyň *SA, AC, BC, SB* kesimleriniň ortalary. Eger piramidanyň gapdal gapyrgalary *b*-ge, esasynyň tarapy *a*-ga deň bolsa, *KZMN* dörtburçlugyň perimetrini tapyň.

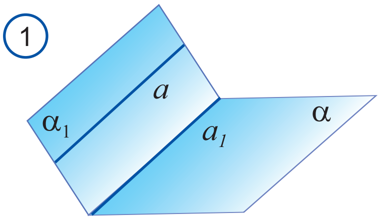
4.22. *XU* we *VT* göni çyzyklar parallel, *XY* we *VT* göni çyzyklar bolsa atanaklaýyn. Eger a) $\angle YXU = 40^\circ$; b) $\angle YXU = 135^\circ$; ç) $\angle YXU = 90^\circ$ bolsa, *XY* we *VT* göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapyň.

4.23. *l* göni çyzyk *ABCD* parallelogramyň *BC* tarapyna parallel we onuň tekizliginde ýatmaýar. *l* we *CD* göni çyzyklaryň atanaklaýyndygyny subut ediň. Eger piramidanyň burçlaryndan biri a) 58°; b) 133° bolsa, *l* we *CD* göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapyň.

11 GIŇIŞLIKDE GÖNI ÇYZYKLARYŇ WE TEKIZLIGIŇ ÖZARA ÝERLEŞIŞI

Eger göni çyzyk bilen tekizlik kesişmese, *göni çyzyk we tekizlik parallel* diýilýär. Göni çyzyk bilen tekizligiň parallelligi aşakdaky nyşan arkaly kesgitlenilýär.

4.5-nji teorema. Eger tekizlikde ýatmaýan göni çyzyk şu tekizlikdäki haýsy-da bolsa bir göni çyzyga parallel bolsa, bu göni çyzyk tekizligiň özüne-de parallel bolýar.

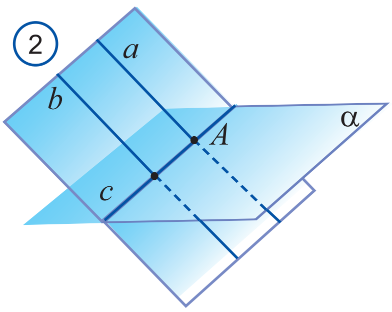


Subudy. Aýdaly, α - tekizlik, *a* - onda ýatmaýan göni çyzyk, a_1 bolsa α tekizlikde ýatýan we *a*-ga parallel göni çyzyk bolsun.

a we a_1 göni çyzyklar arkaly α_1 tekizligi geçirýäris (1-nji surat). Görnüşi ýaly, α we α_1 tekizlikler a_1 göni çyzyk, boýunça kesişýär.

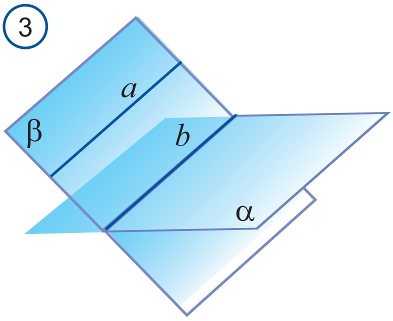
Eger *a* göni çyzyk α tekizligi kesip geçse, onda kesişme nokady a_1 göni çyzyga degişli bolardy. Emma bu mümkin däl, çünki *a* we a_1 göni çyzyklar özara parallel. Şeýdip, *a* göni çyzyk α tekizligi kesip geçip bilmeýär.

Diýmek, *a* göni çyzyk α tekizlige parallel. ❑



Mesele. Eger tekizlik iki parallel göni çyzykdan birini kesip geçse, ikinjisini hem kesip geçýändigini subut ediň.

Subudy. *a* we *b* - iki parallel göni çyzyk, α bolsa *a* göni çyzygy *A* nokatda kesip geçýän tekizlik bolsun (2-nji surat).



a we *b* göni çyzyklardan tekizlik geçirýäris. Ol α tekizligi haýsy-da bolsa bir *c* göni çyzyk boýunça kesýär. *c* göni çyzyk *a* göni çyzygy *A* nokatda kesip geçýär.

Diýmek oňa parallel bolan *b* göni çyzygy hem kesip geçýär. *c* göni çyzyk α tekizlikde ýatýandygy üçin α tekizlik *b* göni çyzygy hem kesip geçýär.

4-6-njy teorema. Eger bir tekizlik ikinji tekizlige parallel bolan göni çyzykdan geçse, bu tekizlikleriň kesişme göni çyzygy hem berlen göni çyzyga parallel bolýar.

Subudy. Aýdaly, *a* göni çyzyk α - tekizlige parallel we β tekizlikde ýatsyn. *b* göni çyzyk bolsa α we β tekizlikleriň kesişme çyzygy bolsun (3-nji surat). Onda, a we b göni çyzyklar β tekizlikde ýatýar we özara kesişmeýär. Tersine bolanda, a göni çyzyk β tekizligi kesip geçerdi.

Diýmek, a we b göni çyzyklar özara parallel.❑

? *Tema degişli soraglar we ýumuşlar*

1. Göni çyzyk we tekizlik giňişlikde özara nähili ýerleşmegi mümkin?
2. Göni çyzyk we tekizlik haçan parallel bolýar?
3. Göni çyzygyň tekizlige parallellik nyşanyny aýdyň.
4. Giňişlikde göni çyzyklaryň we tekizlikleriň joýleşişi bilen bagly nähili häsiýetleri bilýärsiňiz?

4.24. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubuň; b) $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ dogry altyburçly prizmanyň bir-birine parallel bolan gapyrgalaryny we granlaryny anyklaň.

4.25. Dogry tassyklamany saýlaň:

A) Giňişlikde göni çyzykda ýatmaýan nokatdan bu göni çyzyga parallel köp göni çyzyklary geçirmek mümkin;

B) Üçünji göni çyzyga parallel göni çyzyklar bir nokatda kesişýär;

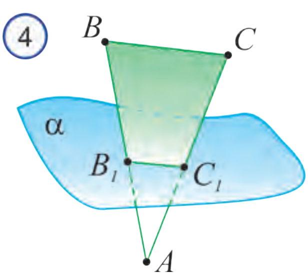
Ç) Eger göni çyzygyň iki nokady tekizlige degişli bolsa, göni çyzyk tekizligi kesip geçýär;

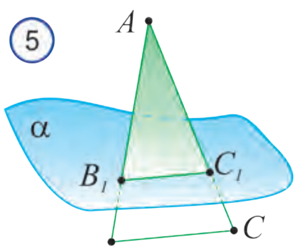
D) göni çyzyk we onda ýatmaýan nokatdan iki dürli tekizlik geçirmek mümkin;

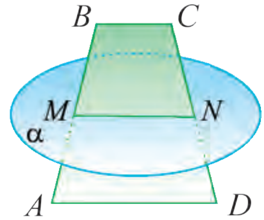
E) giňişlikde tekizlikde ýatmaýan nokatdan berlen tekizligi kesip geçýän köp göni çyzyklary geçirmek mümkin.

4.26. A we C nokatlar α tekizlikde ýatýar. B we D nokatlar β tekizlikde ýatýar. AC, CD, BD, AB, BC we AD göni çyzyklardan haýsylary β tekizligi kesip geçýär?

4.27. ABC üçburçluk α tekizligi B_1 we C_1 nokatlarda kesip geçýär (4-nji surat). Eger $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ sm, $BC // B_1C_1$ bolsa, B_1C_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

4


5


6


4.28. α tekizlik ABC üçburçlugyň AB we AC taraplaryny B_1 we C_1 nokatlarda kesip geçýär (5-nji surat). Eger $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12$ sm, $BC // \alpha$ bolsa, BC kesimiň uzynlygyny tapyň.

4.29. α tekizlik $ABCD$ trapesiýanyň AD esasyna parallel we gapdal taraplaryny M we N nokatlarda kesip geçýär (6-njy surat). Eger $AD = 17$ sm, $BC = 9$ sm bolsa, MN kesimiň uzynlygyny tapyň.

4.30. Tekizlige onda ýatmaýan nokatdan näçe parallel göni çyzyk geçirmek mümkin?

4.31. a göni çyzyk α tekizlige parallel. Dogry tassyklamalary tapyň.

a) a göni çyzyk α tekizligiň diňe bir göni çyzygyna parallel bolýar;

b) a göni çyzyk a tekizligiň bir göni çyzygyndan başga ähli göni çyzyklaryna atanaklaýyn bolýar;

ç) α tekizlikde a göni çyzyga parallel we atanaklaýyn bolan köp göni çyzyklar tapylýar;

d) α tekizlikde diňe bir a göni çyzyga parallel we bu tekizligiň islendik nokadyndan geçýän göni çyzyk bar.

4.32. A, B, C, D nokatlar bir tekizlikde ýatmaýar. M, N, K, Z nokatlar degişlilikde AD, BD, BC, AC kesimleriň ortalary. Eger $CD = AB$ bolsa, MK we NZ göni çyzyklaryň perpendikulýardygyny subut ediň.

4.33. $ABCD$ parallelogramyň AB we BC taraplary α tekizligi kesip geçýär. AD we DC göni çyzyklar hem α tekizligi kesip geçýändigini subut ediň.

4.34. ABC we ABD üçburçluklar bir tekizlikde ýatmaýar. CD göni çyzyga parallel bolan islendik göni çyzygyň bu üçburçluklaryň tekizligini kesip geçýändigini subut ediň.

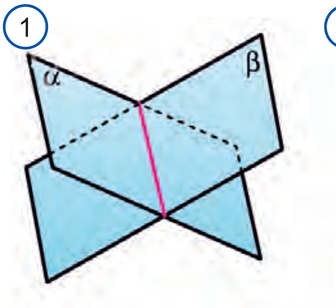
4.35. Berlen iki göni çyzygy kesip geçýän göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

12 GIŇIŞLIKDE TEKIZLIKLERIŇ ÖZARA ÝERLEŞIŞI

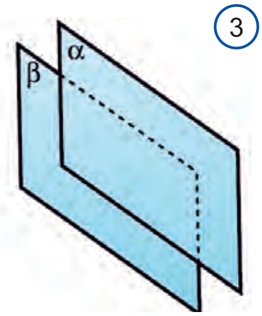
Iki göni çyzyk ýa-da umumy nokada eýe, ýa-da umumy nokada eýe bolmazlygy mümkin. Birinji ýagdaýda S3 aksioma görä bu tekizlikler umumy göni çyzyga hem eýe bolýar, ýagny göni çyzyk boýunça kesişýär (1-nji surat). Ikinji ýagdaýda tekizlikler kesişmeýär (2-nji surat).

Kesişmeýän tekizlikler *parallel tekizlikler* diýip atlandyrylýar. Parallel tekizlikler barada otagyň poly we petigi, garşylykly diwarlary düşünje bermegi mümkin (3-nji surat).

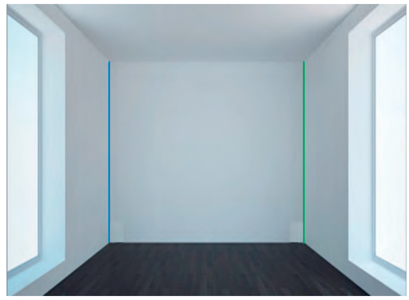
1



2



3

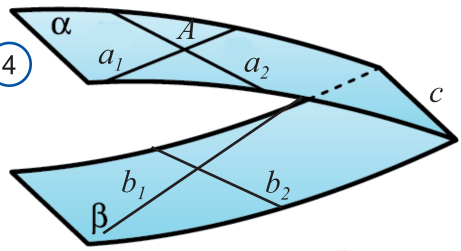


Iki tekizligiň paralleligi aşakdaky nyşan arkaly kesgitlenilýär.

4.7-nji teorema. ***Eger bir tekizlikdäki kesişýän iki göni çyzyk ikinji tekizlikdäki iki göni çyzyga degişlilikde parallel bolsa, bu tekizlikler parallel bolýar.***

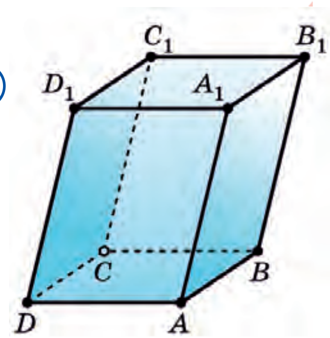
Subudy. Aýdaly, α we β - berlen tekizlikler, a we b - α tekizlikde ýatýan we A nokatda kesişýän göni çyzyklar, a_1 we b_1 bolsa β tekizlikde ýatýan we degişlilikde a we b göni çyzyklara parallel göni çyzyklar bolsun (4-nji surat).

4



Çak edýäris, α we β tekizlikler özara parallel bolmasyn, ýagny nähilidir c göni çyzyk boýunça kesişsin. Onda 3.6-njy teorema görä, a_1 we a_2 göni çyzyklar - degişlilikde b_1 we b_2 göni çyzyklara parallel bolup, β tekizlige hem parallel bolýar. Şonuň üçin, olar bu tekizlikde ýatýan c göni çyzygy hem kesip geçmeýär.

5



Şeýdip, α tekizlikde ýatýan A nokat arkaly c göni çyzyga parallel iki: a_1 we a_2 göni çyzyklar geçýär. Parallellik aksiomasyna görä, şeýle bolmagy mümkin däl. Gapma-garşylyk çakymyzyň nädogrudygyny görkezýär. ❑

Bu teorema peýdalanyp, parallelepipediň gapdal granlarynyň (5-nji surat) parallel bolýandygyny özbaşdak subut ediň.

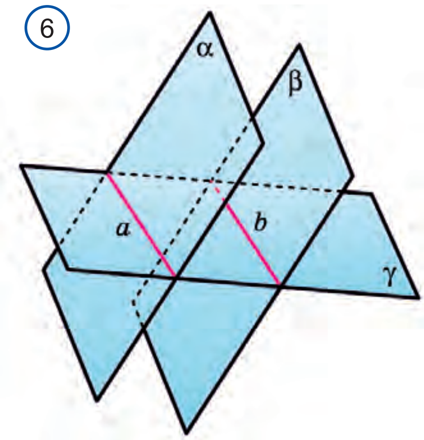
4.8-nji teorema. ***Ol iki parallel göni çyzyklaryň üçünji tekizlik bilen kesişme göni çyzyklary özara parallel bolýar.***

Subudy. Aýdaly, α we β parallel tekizlikler γ tekizligi degişlilikde a we b göni çyzyklar boýunça kesip geçsin (6-njy surat). a we b göni çyzyklaryň paralleldigini subut edýäris.

Çak edýäris, a we b göni çyzyklar käbir Q nokatda kesişsin. Onda Q nokat α tekizlikde ýatýar, çünki a göni çyzyk α tekizlikde ýatýar. Şonuň ýaly-da, Q nokat β tekizlikde ýatýar, çünki b göni çyzyk β tekizlikde ýatýar. Netijede, α we β tekizlikler umumy Q nokada eýe bolmýar. Bu bolsa şerte görä mümkin däl. Gapma-garşylyk çakymyzyň nädogrudygyny görkezýär. ❑

4.9-njy teorema. Berlen tekizlige ondan daşardaky nokatdan ýeke-täk parallel tekizlik geçirmek mümkin.

6

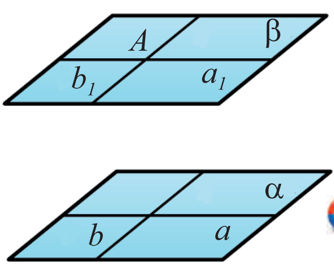


Subudy. Berlen α tekizlikde kesişýän iki a, b göni çyzyklary geçirýäris. Berlen A nokatdan olara parallel a_1, b_1 göni çyzyklary geçirýäris (7-nji surat).

a_1, b_1 göni çyzyklar arkaly β tekizlik geçirýäris. Bu tekizlik 3.7-nji teorema görä, α tekizlige parallel bolup, gözlenýän tekizlik bolýar.

Indi bu tekizligiň ýeke-täkligini görkezýäris. Çak edýäris, α tekizlige parallel ýene bir β_1 tekizlik bar bolsun (8-nji surat). A nokatdan we a göni çyzykdan geçýän γ tekizligi geçirýäris. Bu tekizlik β tekizligi a_1 göni çyzyk boýunça, β_1 tekizligi a_2 göni çyzyk boýunça kesip geçýär. a_1 a_2 göni çyzyklar 3.6-njy teorema görä a göni çyzyga parallel bolýar. Ýöne, munuň bolmagy mümkin däl, çünki tekizlikde onda ýatmaýan nokatdan diňe bir parallel göni çyzyk geçirmek mümkin. Gapma-garşylyk - çakymyzyň nädogrudygyny görkezýär. ❑

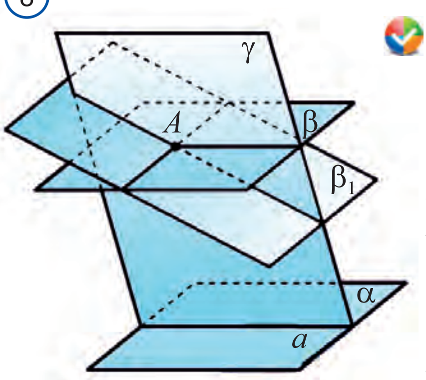
7



4.10-njy teorema. Üçünji tekizlige parallel iki tekizlik özara parallel bolýar.

Bu teoremany özbaşdak subut ediň.

8



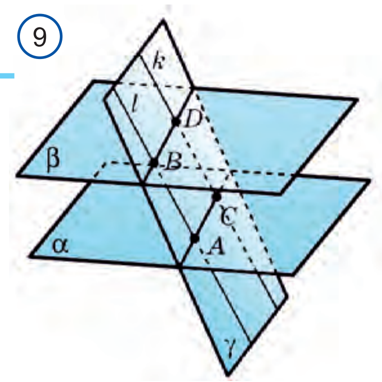
4.11-nji teorema. Parallel tekizlikleriň arasyndaky parallel göni çyzyklaryň kesimleri deňdir.

Subudy. Aýdaly, α we β tekizlikler k we l göni çyzyklardan AC we BD kesimleri bölsün (9-njy surat). Şu kesimleriň deňligini görkezýäris.

k we l göni çyzyklardan geçýän γ tekizlik parallel tekizlikleri AC we BD göni çyzyklar boýunça kesip geçýär. Netijede, garşylykly taraplary parallel bolan $ABCD$ dörtburçluga, ýagny parallelograma eýe bolýarys. Parallelogramyň garşylykly taraplary özara deň bolýar. Hususan-da, $AB = CD$. ❑

4.12-nji teorema.* *Üç parallel tekizlikleriň arasyndaky islendik göni çyzyklaryň kesimleri özara proporsional bolýar.

Bu teoremany hem özbaşdak subut ediň.



? *Tema degişli soraglar we ýumuşlar*

1. Tekizlikler giňişlikde nähili ýerleşmegi mümkin?

2. Parallel tekizlikler diýip nähili tekizliklere aýdylýar?

3. Tekizlikleriň parallellik nyşanyny aýdyň.

4. Giňişlikde tekizlikleriň ýerleşişi bilen bagly nähili häsiýetleri bilýärsiňiz?

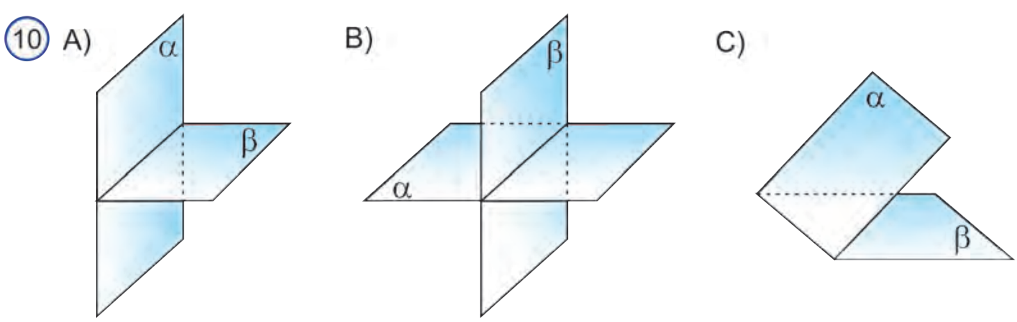
5. Parallelepipediň gapdal granlary parallel bolýandygyny esaslandyryň.

4.36. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipediň; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizmanyň parallel granlaryny anyklaň.

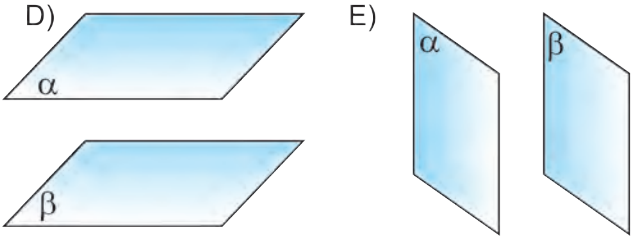
4.37. Ýekeje-de umumy nokady bolmadyk α we β tekizlikler giňişlikde nähili ýerleşýär?

4.38. α we b tekizlikler parallel. a we b göni çyzyklar α tekizlikde ýatýar, c we d göni çyzyklar bolsa β tekizlikde ýatýar. Aşakdaky tassyklamalardan haýsylary dogry?

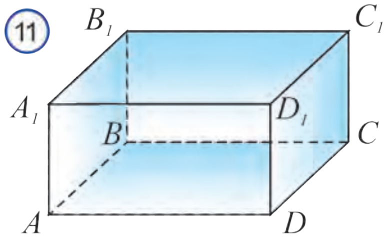
1) $a \parallel b$; 2) $c \parallel b$; 3) $b \parallel b$; 4) $b \parallel a$; 5) $c \parallel a$; 6) $d \parallel b$; 7) $a \parallel a$; 8) $d \parallel a$.



D) E)



11



4.39. Kesişýän iki tekizlik şekillendirilen üç suraty görkeziň (10-njy surat).

4.40. α we b tekizlikler parallel. Olaryň hiç birine degişli bolmadyk nokatdan γ tekizlik geçirilen. Dogry tassyklamalary görkeziň.

a) γ tekizlik α tekizlige parallel bolan ýeke-täk tekizlik;

b) γ tekizlik β tekizligi kesip geçýän ýeke-täk tekizlik;

ç) γ tekizlik parallel bolan ýeke-täk tekizlik;

d) γ tekizlik α tekizligi kesip geçýän ýeke-täk tekizlik;

e) γ tekizlik α tekizlige-de, b tekizlige-de parallel bolan ýeke-täk tekizlik.

4.41. 11-nji suratda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ gönüburçly parallelepiped şekillendirilen.

a) $A_1B_1C_1D_1$ we $B_1A_1D_1C_1$; b) ADD_1A_1 we $ABCD$; ç) ABB_1A_1 we C_1D_1DC; d) $BADC$ we ABB_1A_1; e) CC_1B_1B we ADD_1A_1 tekizlikleriň özara ýerleşişini anyklaň.

4.42. *AB, BC* kesimler *ABCD* parallelogramyň taraplary bolup, olar degişlilikde *a* we *b* göni çyzyklara parallel (12-nji surat). *a* we *b* göni çyzyklar özara kesişýär we α tekizlige degişli. *ABCD* we α tekizlikleriň giňişlikde özara ýerleşişini anyklaň.

4.43. *a* we *b* atanaklaýyn göni çyzyklar berlen. *a* göni çyzykdan geçýän we β tekizlige parallel bolan näçe tekizlik geçirmek mümkin?

4.44. Iki α we b tekizlikleriň kesişme çyzygy üçünji γ tekizlige parallel. α we β tekizlikleriň giňişlikde özara ýerleşişini anyklaň.

4.45. *AB* we *CD* parallel göni çyzyklar arkaly geçirilen γ tekizlik α we β parallel tekizliklerni degişlilikde *AC* we *BD* göni çyzyklar boýunça kesip geçýär (13-nji surat). Eger $BD = 15$ sm bolsa, *AC* kesimiň uzynlygyny tapyň.

4.46. Islendik iki atanaklaýyn göni çyzyklar arkaly ýeke-täk parallel tekizlikler jübütini geçirmek mümkinligini subut ediň.

4.47. α we β tekizlikler parallel. α tekizlikde ýatýan islendik göni çyzyk β tekizlige parallel bolýandygyny subut ediň.

4.48. *O* nokat – bir tekizlikde ýatmaýan AA_1, BB_1, CC_1 kesimleriň umumy ortasy. *ABC* we $A_1B_1C_1$ tekizlikler paralleldigini subut ediň.

4.49. *ABCD* parallelogram we ony kesmeýän tekizlik berlen. Parallelogramyň *A, B, C, D* depelerinden tekizligi degişlilikde A_1, B_1, C_1, D_1 nokatlarda kesip geçýän parallel göni çyzyklar geçirilen. Eger $AA_1 = 4$ m, $BB_1 = 3$ m we $CC_1 = 1$ m bolsa, DD_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

4.50. Iki parallel tekizlik berlen. Bir tekizligiň *A* we *B* nokatlaryndan ikinji tekizligi A_1 we B_1 nokatlarda kesip geçýän parallel göni çyzyklar geçirilen. Eger $AB = a$ bolsa, A_1B_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

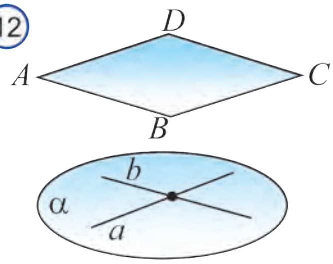
4.51. α we β tekizlikler parallel. α tekizligiň *M* we *N* nokatlaryndan β tekizligi *K* we *L* nokatlarda kesip geçýän parallel göni çyzyklar geçirilen. *MNLK* parallelogramdygyny subut ediň. Eger $ML = 14$ sm, $NK = 8$ sm we $MK : MN = 9 : 7$ bolsa, *MNLK* dörtburçlugyň perimetrini tapyň.

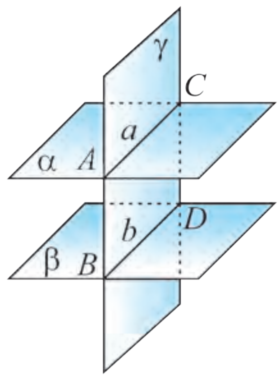
4.52. *OF* we *OP* şöhleler α we β parallel tekizlikleri degişlilikde F_1, P_1, F_2, P_2 nokatlarda kesip geçýär. Eger $F_1P_1 = 3$ sm, $F_2P_2 = 5$ sm we $P_1P_2 = 4$ sm bolsa, OP_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

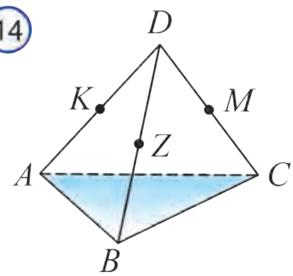
4.53. *OA* we *OB* şöhleler α we β parallel tekizlikleri degişlilikde A_1, B_1, A_2, B_2 nokatlarda kesip geçýär. Eger $OA_1 = 16$ sm, $A_1A_2 = 24$ sm we $A_2B_2 = 50$ sm bolsa, A_1B_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

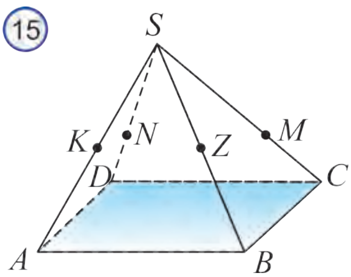
4.54. *D* nokat *ABC* üçburçlugyň tekizligine degişli däl (14-nji surat). *K, M, Z* nokatlar degişlilikde *DA*, *DB* we *DC* kesimleriň ortasy. *ABC* we *KZM* tekizlikleriň özara ýerleşişini anyklaň.

4.55. *S* nokat *ABCD* parallelogramyň tekizligine degişli däl (15-nji surat). *K, Z, M, N* nokatlar degişlilikde *SA, SB, SC* we *SD* kesimlere degişli. Eger $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$ bolsa, *ABCD* we *KZMN* tekizlikleriň özara ýerleşişini anyklaň.

12


13


14


15


13 GIŇIŞLIKDE PARALLEL PROÝEKSIÝA

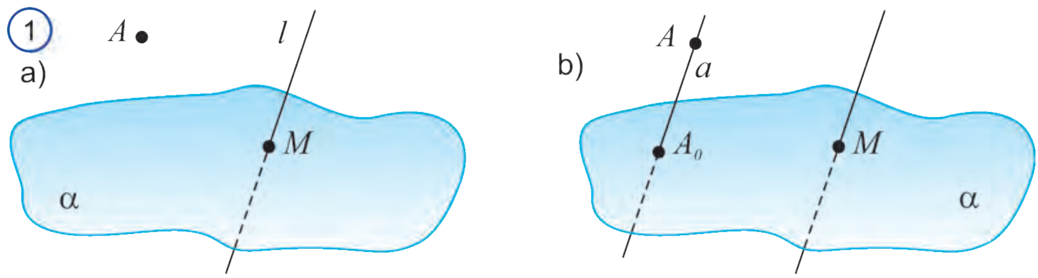
Giňişlikdäki şekiller dürli usullar bilen tekizlikde şekillendirilýär. Aşakda olar bilen tanşarys.

Giňişlikdäki şekili tekizlige *parallel proýesirlemek* diýip şeýle şöhlelenmä aýdylýar, ýagny onda şekiliň her bir nokady berlen proýesirleme ugruna parallel bolan göni çyzyklar boýunça tekizlige göçürilýär.

Parallel proýesirlemegi ýagtylyk şöhleleriniň kömeginde käbir zadyň diwardaky ýa-da poldaky kölegesine deňeşdirmek mümkin.

Şeýdip, parallel proýesirlemede käbir şekil we *proýeksiýa tekizligi* diýlip atlandyrylýan tekizlik alynýar hem-de *proýesirleme ugry*, ýagny käbir göni çyzyk saýlanýar. Elbetde, bu göni çyzyk proýeksiýa tekizligi bilen kesişmelidir.

Aýdaly, islendik α tekizlik we proýesirleme göni çyzygy l we tekizlikde-de, göni çyzykda-da ýatmaýan A nokat berlen bolsun (1-nji a surat).



A nokatdan α tekizlige i göni çyzyga parallel bolan göni çyzyk geçirýäris. Bu göni çyzyk α tekizligi A_0 nokatda kesip geçsin(1-nji b surat).

Tapylan A_o nokat A nokadyň α tekizlige *parallel proýeksiýasy* diýlip atlandyrylýar.

Aýdaly, käbir F şekili α tekizlige l ýöneliş boýunça parallel proýeksiýasyny gurmaly bolsun. Munuň üçin F şekiliň islendik nokadyny alýarys, ondan l -e parallel göni çyzyk geçirýäris we onuň α tekizlik bilen kesişme nokadyny belgileýäris. Şeýle nokatlar α tekizlikde nähilidir F_1 şekili emele getirýär. Hut şu F_1 şekil F şekiliň α tekizlikdäki parallel proýeksiýasy bolýar. 2-nji suratda F şekiliň α tekizlige proýeksiýasy – F_1 şekil şekillendirilen.

Parallel proýeksiýa gurmagyň aşakdaky häsiýetlerini getirip geçýäris. Olary özbaşdak subut etjek boluň.

Parallel proýeksiýa guranda: nokat – nokada, kesim – kesime, göni çyzyk – göni çyzyga geçýär.

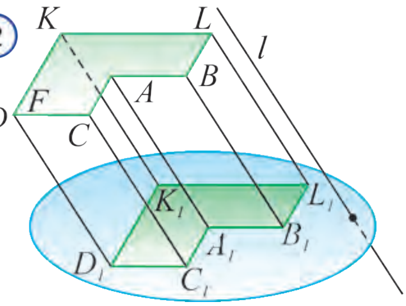
Parallel göni çyzyklaryň proýeksiýalary parallel bolýar ýa-da üstme-üst düşýär.

Aşakdaky häsiýetlerni subut edeliň.

***1-nji häsiýet.* Şekiliň göni çyzykly kesimleriniň proýeksiýasy hem kesimlerden ybarat bolýar.**

Hakykatdan hem, AC kesiminiň nokatlarynyň proýeksiýasyny guryan ähli göni çyzyklar α tekizligi A_1C_1 göni çyzyk boýunça kesip geçýän tekizlikde ýatýar (3-nji surat). AC kesimden islendik B nokady A_1C_1 kesimiň B_1 nokadyna geçýär.❑

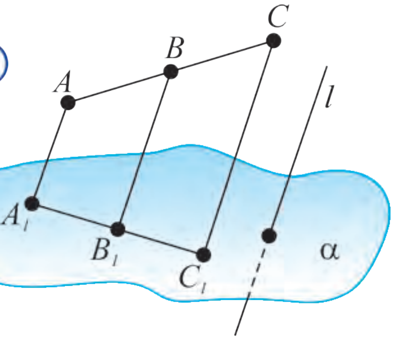
2



***2-nji häsiýet.* Şekiliň parallel kesimleriniň proýeksiýasy hem parallel kesimlerden ybarat bolýar.**

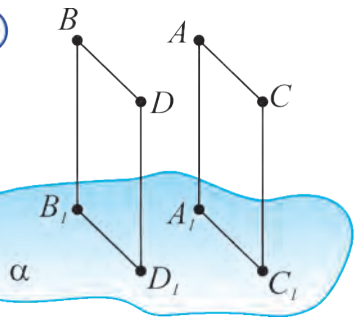
Hakykatdan hem, AC we BD käbir şekiliň parallel kesimleri bolsun (4-nji surat). Olaryň proýeksiýalary A_1C_1 we B_1D_1 kesimler hem parallel bolýar, çünki olary iki parallel tekizligi α tekizlik bilen kesende aldyk.

3



***3-nji häsiýet.* Bir göni çyzykda ýa-da parallel göni çyzyklarda ýatýan kesimleriň uzynlyklarynyň gatnaşygy öz proýeksiýalarynyň uzynlyklarynyň gatnaşygyna deň.**

4

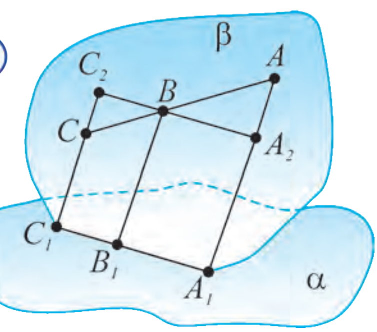


Hakykatdan hem, 5-nji suratda AC we A_1C_1 göni çyzyklar β tekizlikde ýatýar. AC kesimiň B nokadyndan A_1C_1-e parallel bolan A_2C_2 göni çyzygy geçirýäris.

Emele gelen BAA_2 we BCC_2 üçburçluklar meňzeş bolýar. Üçburçluklaryň meňzeşligi we $A_1B_1=A_2B$ we $B_1C_1=BC_2$ deňliklerden gözlenýän gatnaşykda bölýäris:

$AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$. ❑

5



Şeýdip, parallel proýeksiýa gurmakda göni çyzykda ýa-da parallel göni çyzyklarda ýatýan kesimleriň uzynlyklarynyň gatnaşygy saklanýan eken.

Hususan-da, kesimiň ortasy proýeksiýanyň ortasyna geçýär.

? *Tema degişli soraglar we ýumuşlar*

1. Giňişlikdäki şekili tekizlige parallel proýesirlemek diýip nähili şöhlelenmä aýdylýar?

2. Nokadyň tekizlige parallel proýeksiýasy nähili tapylýar?
3. Parallel proýeksiýa tekizligi we proýesirleme ugry diýip nämä aýdylýar?
4. Parallel proýeksiýa gurmagyň nähili häsiýetlerini bilýärsiňiz?

4.56. Parallel proýeksiýa guranda kesimiň proýeksiýasy a) kesim; b) nokat; ç) iki nokat; d) şöhle; e) göni çyzyk bolmagy mümkinmi?

4.57. Parallel proýeksiýa guranda kwadratyň proýeksiýasy a) kwadrat; b) parallelogram; ç) romb; d) gönüburçluk; e) trapesiýa; f) kesim bolmagy mümkinmi?

4.58. Parallel tekizliklerden birinde ýatýan üçburçluk ikinji tekizlige parallel proýesirlense, onuň meýdanynyň üýtgemeýändigini subut ediň.

4.59. Parallelogramyň parallel proýeksiýasy trapesiýa bolmagy mümkinmi? Jogabyňyzy esaslandyryň.

4.60. Dogry üçburçlugyň parallel proýeksiýasy dogry üçburçluk bolarmy?

4.61. Gönüburçly üçburçlugyň parallel proýeksiýasy gönüburçly üçburçluk bolarmy?

4.62. ABC üçburçlugyň parallel proýeksiýasy $A_1B_1C_1$ üçburçlukdan ybarat. Bu proýeksiýa guranda ABC üçburçlugyň a) medianasy; b) beýikligi; ç) bissektrisasy $A_1B_1C_1$ üçburçlugyň degişli a) medianasyna; b) beýikligine; ç) bissektrisasyna geçýärmi?

4.63. ABC üçburçlugyň parallel proýeksiýasy $A_1B_1C_1$ üçburçlukdan ybarat. Eger $\angle A = 30^0$, $BC = 20$ sm bolsa, $\angle A_1 = 30^0$, $B_1C_1 = 20$ sm bolarmy?

4.64. AB kesimiň parallel proýeksiýasy A_1B_1 kesimden ybarat. AB kesimden alnan C nokadyň proýeksiýasy bolsa C_1 nokat. $AB = 48$ sm, $A_1B_1 = 36$ sm. Eger AC kesimiň uzynlygy a) 24 sm; b) 12 sm; ç) 8 sm; d) 32 sm; e) 36 sm bolsa, A_1C_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

14 AMALY GÖNÜKME WE ONUŇ ULANYLYŞY

4.65. a) Iki göni çyzyk; b) göni çyzyk we tekizlik; ç) iki tekizlik näçe umumy nokada eýe bolmagy mümkin?

4.66. a) Iki göni çyzyk; b) göni çyzyk we tekizlik; ç) iki tekizlik; d) üç tekizlik ýeke-täk umumy nokada eýe bolmagy mümkinmi?

4.67. Dört nokat bir tekizlikde ýatmaýar. a) olarda üçüsi bir göni çyzykda ýatmagy mümkinmi? b) Olar arkaly näçe tekizlik geçirmek mümkin?

4.68. m we n göni çyzyklar kesişýär, d göni çyzyk bolsa n göni çyzyga parallel. m we d göni çyzyklar özara nähili ýerleşmegi mümkin?

4.69. ABC üçburçlugyň C depesinden geçýän we AB tarapyna parallel bolan näçe tekizlik geçirmek mümkin?

4.70. *ABCD* we *ABKZ* parallelogramlar dürli tekizliklerde ýatýar. Parallel göni çyzyklary görkeziň.

a) *DA* we *KB*; b) *CD we KZ*; ç) *BC we AZ;* d) *DA we ZA;* e) *CB we KB*.

4.71. *A* we *C* nokatlar α tekizlige, *B* we *D* nokatlar b tekizlige degişli. *AC, CD, BD, AB, BC, AD* göni çyzyklardan haýsylary β tekizligi kesip geçýär?

4.72. *AB, AC, KB, KD* kesimler α tekizligi kesip geçýär. *AK, AD, BD, KC, CD* göni çyzyklardan haýsylary α tekizligi kesip geçýär?

4.73. Bir tekizlikde yormagan *AB, AC* we *AD* göni çyzyklar α tekizligi B_1, C_1 we D_1 nokatlarda kesip geçýär. B_1, C_1 we D_1 nokatlar yzygider utgaşdyrylsa nähili şekil peýda bolýar?

4.74. α tekizligi kesip geçmeýän *MN* kesimiň uçlaryndan we ortasyndan parallel göni çyzyklar geçirilen. Eger bu göni çyzyklar α tekizligi degişlilikde M_1, N_1, we K_1 nokatlarda kesip geçse we KK_1= 9 sm, NN_1 = 15 sm bolsa, MM_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

4.75. α tekizligiň *P* we *Z* nokatlaryndan ondan daşarda uzynlyklary *PK* = 6 sm we *ZM* = 9 sm bolan parallel kesimler geçirilen. *MK* göni çyzyk α tekizligi *O* nokatda kesip geçýär. Eger *MK* = 6 sm bolsa, *MO* kesimiň uzynlygyny tapyň.

4.76. Parallellogramy parallel proýeksiýa guranda kwadrat emele gelmegi mümkinmi?

4.77. Üçburçlugyň parallel proýeksiýasy berlen. Bu üçburçlugyň medianalarynyň proýeksiýalary nähili gurulýar?

4.78. *MNZ* üçburçluk we *MNPS* (*BC* - esas) parallelogram bir tekizlikde ýatmaýar. *Q* we *R* nokatlar *CB* we *DA* kesimleriň ortasy, *M* we *N* bolsa *DP* we *CZ* kesimleriň ortasy. *MN* we *QR* göni çyzyklaryň paralleldigini subut ediň.

4.79. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubuň (6-njy surat) a) AA_1D_1D; b) BB_1C_1C; ç) *ABCD;* d) DD_1C_1C; e) $B_1C_1D_1A_1$; f) ADD_1A_1 granlaryndan haýsylary A_1B_1 göni çyzyga parallel bolýar?

4.80. *PRT* üçburçluk berlen. *PT* göni çyzyga parallel α tekizlik *PR* tarapy *S* nokatda, *RT* tarapy *Q* nokatda kesip geçýär (7-nji surat). Eger *SR* = 7 sm, *SQ* = 3 sm we *SP*= 35 sm bolsa, *PT* tarapy tapyň.

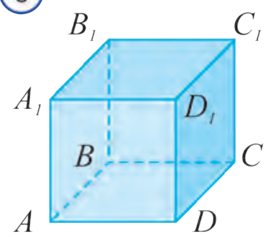
4.81. α tekizlik *ABCD* trapesiýanyň *AD* esasyna parallel hem-de *AB* we *CD* taraplaryny *M* we *N* nokatlarda kesip geçýär (8-nji surat). *AD* = 20 sm, *MN* = 16 sm. Eger *M* nokat *AB* kesimiň ortasy we *AB* = 8 sm bolsa, trapesiýanyň perimetrini tapyň.

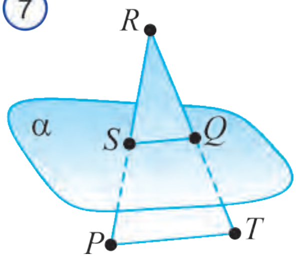
4.82. α tekizligiň *P* we *Z* nokatlaryndan ondan daşarda *PK* = 6 sm we *ZM* = 9 sm kesimler geçirilen. *MK* göni çyzyk tekizligi *O* nokatda kesip geçýär. Eger *MK* = 6 sm bolsa, *MO* aralygy tapyň.

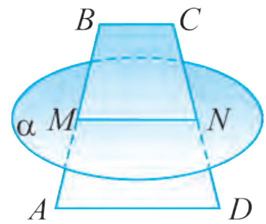
4.83. *ABCD* gönüburçlugyň *AB* tarapy α tekizlige parallel, *AD* tarapy bolsa bu tekizlige parallel däl. *ABCD* we α tekizlikleriň giňişlikde özara ýerleşişini anyklaň.

4.84 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ gönüburçly parallelepipediň aşakda berlen granlaryndan haýsylary A depesine we $ABCD$ granyna parallel bolýar?

A) D_1A_1AD; B) $D_1A_1B_1C_1$; Ç) ABB_1A_1; D) D_1C_1CD; E) D_1A_1BD;

6


7


8


4.85. Pombuň iki diagonaly α tekizlige parallel. Pombuň tekizliginiň we α tekizlikleriň giňişlikde özara ýerleşişini anyklaň.

4.86. D nokat ABC üçburçlugyň tekizliginde ýatmaýar. K, Z we M nokatlar degişlilikde DA, DB, we DC kesimleriň ortalary. ABC we KZM tekizlikleriň giňişlikde özara ýerleşişini anyklaň.

Ulanmalar we amaly kompetensiýalary şekillendirmek

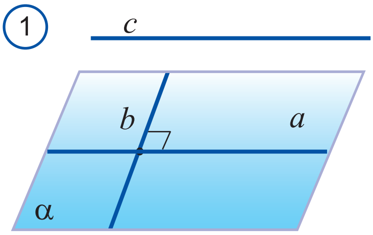
1. Demir ýol wagonlarynyň oklary bir-birine görä nähili ýerleşen?
2. Demir ýol wagonlarynyň oklary relslere görä nähili ýerleşen?
3. Daş-töwerekden parallel we atanaklaýyn göni çyzyklara mysallar getiriň.
4. Näme üçin ýazuw stolunyň çekmeleri käte gowy açylmaýar?
5. Näme üçin nasosuň porşeni onuň içinde ýeňil hereketlenýär?
6. Tikinçilik lentasy ýa-da islendikçe uzyn taýagyň kömeginde koridoryň polunyň gyrasyna kakylan reýkalaryň parallelligini nähili barlamak bolýar?
7. Agaçdan işlenen brusuň (tagtanyň) hemme granlary gönüburçluk şeklinde. Ony kese gapyrgalary boýunça nähili byçgylaň, emele gelen hemme kesimleriň parallelogram bolýandygyny subut ediň.

V BÖLÜM

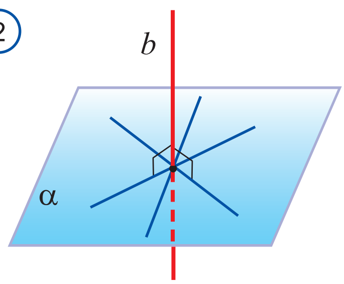
GIŇIŞLIKDE GÖNI ÇYZYKLARYŇ WE TEKIZLIKLERIŇ PERPENDIKULÝARLYGY

15 GIŇIŞLIKDE PERPENDIKULÝAR GÖNI ÇYZYKLAR WE TEKIZLIKLER

Ýatladyp geçýäris, giňişlikde berlen iki göni çyzygyň arasyndaky burç 90°-a deň bolsa, olar özara *perpendikulýar göni çyzyklar* diýilýär. Perpendikulýar göni çyzyklar kesişýän we atanaklaýyn bolmagy mümkin. 1-nji suratda a we b perpendikulýar göni çyzyklar kesişýän, b we c perpendikulýar göni çyzyklar bolsa atanaklaýyndyr. a we b göni çyzyklaryň perpendikulýarlygy $a \perp b$ ýaly ýazylýar.

1


Tekizlikdäki islendik göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyga *tekizlige perpendikulýar* diýilýär (2-nji surat). α tekizlik we b göni çyzyklaryň perpendikulýarlygy $b \perp$ a ýaly ýazylýar.

2


Daş-töwerekden özara perpendikulýar şekillere köp mysallar getirmek mümkin. Adatda öýüň diwarlary we sütünleri, minaralar, yşyklandyryjy sütünler we beýleki sütünler ýere görä dik, ýagny perpendikulýar edip gurulýar. Otagdaky şkaf, stol we sowadyjylar hem pola görä dik edip ýerleşdirilýär (3-nji surat).

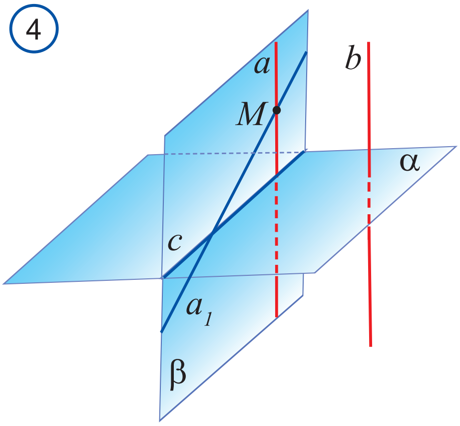
3


Indi giňişlikdäki perpendikulýar göni çyzyklaryň käbir häsiýetleri barada durup geçýäris.

Eger a göni çyzyk α tekizlikde ýatsa ýa-da oňa parallel bolsa, onda α tekizlikde ýatýan, a göni çyzyga parallell başga b göni çyzyk hem tapylýar. Şu sebäpli, tekizlige perpendikulýar göni çyzyk hökman bu tekizligi kesip geçýär.

Tersi tassyklama hem ýerlikli bolýar.

5.1-nji teorema. Eger iki göni çyzyk tekizlige perpendikulyar bolsa, olar özara parallel bolýar.



Subudy. a we b göni çyzyklar α tekizlige perpendikulýar bolsun (4-nji surat). Bu göni çyzyklaryň özara paralleldigini subut edýäris.

a göni çyzygyň käbir M nokadyndan b göni çyzyga parallel a_1 göni çyzygy geçirýäris.

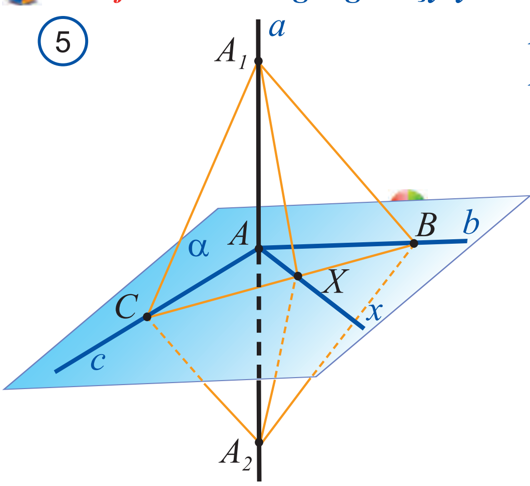
Onda, $a_1 \perp \alpha$ bolýar.

a we a_1 göni çyzyklaryň üstme-üst düşýändigini görkezýäris. Aýdaly, şeýle bolmasyn, a we a_1 göni çyzyklar üstme-üst düşmesin. Onda a we a_1 göni çyzyklar ýatýan β tekizlikdäki M nokatdan α we β tekizlikleriň kesişme çyzygy c göni çyzyga iki a we a_1 perpendikulýar göni çyzyklar geçýär. Munuň bolsa bolmagy mümkin däl. Gapma-garşylyk – çakymyzyň nädogrudygyny görkezýär.

Diýmek, a we b göni çyzyklar özara parallel. ❑

Indi göni çyzygyň tekizlige perpendikulýarlyk nyşanyny getirýäris.

5.2-nji teorema. Eger göni çyzyk tekizlikde ýatýan iki kesişýän göni çyzyga perpendikulyar bolsa, ol tekizlige-de perpendikulýar bolýar.



Subudy. a göni çyzyk α tekizlikde ýatýan iki b we c göni çyzyklara perpendikulýar bolsun. Onda a göni çyzyk b we c göni çyzyklaryň kesişme nokady A arkaly geçýär. a göni çyzygyň α tekizlige perpendikulýar bolýandygyny subut edýäris.

α tekizligiň A nokady arkaly islendik x göni çyzyk geçirýäris we onuň a göni çyzyga perpendikulýar bolýandygyny görkezýäris. α tekizlikde A nokatdan geçmeýän, b, c we x göni çyzyklary kesip geçýän x göni çyzygy geçirýäris. Bu kesişme degişlilikde B, C we X nokatlar bolsun.

a göni çyzykda A nokadyň dürli taraplarynda AA_1 we AA_2 kesimleri goýýarys. Emele gelen A_1BA_2 we A_1CA_2 üçburçluklar deňýanly bolýar (muny özbaşdak esaslandyryň). Mundan A_1BC we A_2BC üçburçluklar deň bolýandygy gelip çykýar (muny-da özbaşdak esaslandyryň). Öz gezeginde, mundan A_1BX we A_2BX burçlaryň deň bolýandygy we ahyrynda A_1BX we A_2BX üçburçluklaryň hem deň bolýandygy gelip çykýar (muny-da özbaşdak esaslandyryň).

Hususan-da, $A_1X = A_2X$ bolýar. Onda A_1XA_2 üçburçluk deňýanly bolýar. Şonuň üçin, onuň XA medianasy onuň beýikligi hem bolýar. Bu bolsa öz gezeginde, x göni çyzygyň a göni çyzyga perpendikulýar bolýandygyny görkezýär. Diýmek, a göni çyzyk α tekizlige perpendikulýar. ❑

Bu teoremadan netije hökmünde aşakdaky häsiýetler gelip çykýar. Olary özbaşdak esaslandyryň.

5.3-nji teorema. ***Eger göni çyzyk iki parallel tekizligiň birine perpendikulýar bolsa, ikinjisine-de perpendikulýar bolýar.***

5.4-nji teorema. ***Eger iki tekizlik bir göni çyzyga perpendikulýar bolsa, olar parallel bolýar.***

Aşakda "barlyk we ýeke-täklik teoremalary" diýip atlandyrylýan häsiýetleri hem özbaşdak subut etmek üçin getirýäris.

5.5-nji teorema. ***Giňişligiň islendik nokadyndan, berlen göni çyzyga perpendikulýar ýeke-täk tekizlik geçirmek mümkin.***

5.6-njy teorema. ***Giňişligiň islendik nokadyndan, berlen tekizlige perpendikulýar ýeke-täk göni çyzyk geçirmek mümkin.***

Netije (umumylaşan Pifagoryň teoremasy). ***Gönüburçly parallelepipediň diagonalynyň kwadraty onuň üç ölçegleriniň kwadratlarynyň jemine deň.***

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ gönüburçly parallelepiped bolsun (6-njy surat). CC_1 gapyrga $A_1B_1C_1D_1$ grana perpendikulýar bolany üçin A_1C_1C gönüburçly üçburçluk bolýar. Onda Pifagoryň teoremasyna görä,

$$A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 \qquad (1).$$

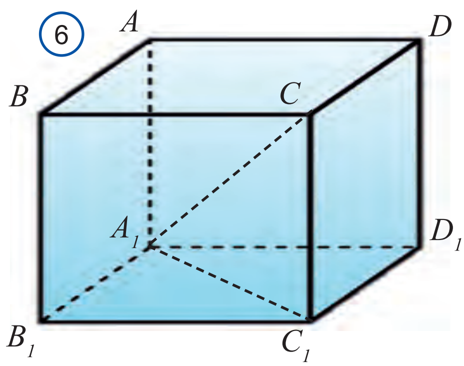
$A_1D_1C_1$ hem gönüburçly üçburçluk. Ýene Pifagoryň teoremasyna görä,

$$A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2 \qquad (2).$$

Onda, (1) we (2) -ä görä: $A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 = CC_1^2 + A_1D_1^2 + D_1C_1^2$.

$A_1D_1 = B_1C_1$ bolany üçin $A_1C^2 = CC_1^2 + B_1C_1^2 + D_1C_1^2$. ❑

6



Tema degişli soraglar we ýumuşlar

1. Giňişlikde nähili göni çyzyklar özara perpendikulýar bolýar?
2. Atanaklaýyn göni çyzyklar perpendikulýar bolmagy mümkinmi?

3. 7-nji suratda haýsy şäher şekillendirilen? Onda siz nähili göni çyzyklary we tekizlikleri görýärsiňiz? Suratdan parallel, perpendikulýar we atanaklaýyn göni çyzyklara mysallar getiriň.
4. Nähili göni çyzyk tekizlige perpendikulýar bolýar?
5. Bir tekizlige perpendikulýar göni çyzyklaryň häsiýetlerini aýdyň.
6. Göni çyzyk we tekizlikleriň perpendikulýarlyk nyşanyny aýdyň.
7. Parallel tekizlikleriň birine perpendikulýar bolan göni çyzygyň häsiýetini aýdyň.
8. Bir göni çyzyga perpendikulýar bolan tekizlikleriň häsiýetini aýdyň.
9. Umumylaşan Pifagoryň teoremasy näme barada?

5.1. *SB* kesim *ABCD* parallelogram tekizligine perpendikulýar (8-nji surat). *SB* perpendikulýar bolan göni çyzyklary aýdyň.

5.2. Nähilidir *l* göni çyzyk *ABC* üçburçlugyň *AB* we AC taraplaryna perpendikulýar. *l* göni çyzyk we *ABC* üçburçlugyň tekizliginiň özara ýerleşişini anyklaň.

a) *l* göni çyzyk we *ABC* tekizligi kesip geçýär, ýöne oňa perpendikulýar däl;

b)*l* göni çyzyk we *ABC* tekizlige degişli;

ç)*l* göni çyzyk we *ABC* tekizlige perpendikulýar;

d) *l* göni çyzyk we *ABC* tekizlige parallel.

5.3. *KO* göni çyzyk *ABCD* parallelogram tekizligine perpendikulýar (9-njy surat). *KO* göni çyzyga perpendikulýar göni çyzygy anyklaň

5.4. *MB* göni çyzyk *ABC* üçburçlugyň *AB* we BC taraplaryna perpendikulýar (10-njy surat). *X* nokat *AC* tarapyň islendik nokady bolsa, *MBX* üçburçlugyň tipini anyklaň.

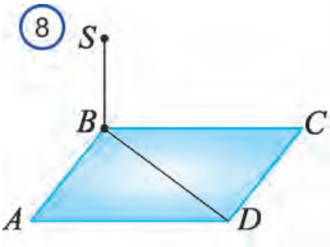
5.5 . $ABCDA_1B_1C_1D_1$ gönüburçly parallelepipediň AA_1C_1C we BB_1D_1D diagonal kesimleri özara perpendikulýardygyny subut ediň.

5.6. *ABCD* dörtburçlugyň taraplary $A_1B_1C_1D_1$ gönüburçlugyň taraplaryna degişlilikde parallel. *ABCD* gönüburçlukdygyny subut ediň.

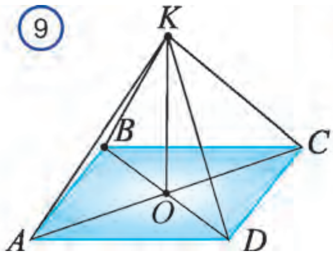
5.7. α tekizlik m göni çyzyga, m göni çyzyk n göni çyzyga parallel. Tekizligiň n göni çyzyga perpendikulýar bolýandygyny subut ediň.

5.8. $ABCD$ trapesiýanyň AB esasy ýatýan göni çyzyk α tekizlige perpendikulýar. Bu trapesiýanyň CD esasy ýatýan göni çyzyk hem α tekizlige perpendikulýar bolýandygyny subut ediň.

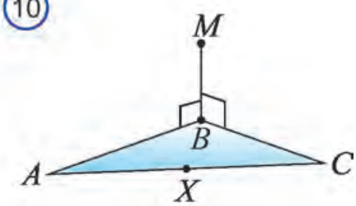
8



9



10



5.9. Giňişlikdäki göni çyzygyň islendik nokadyndan oňa perpendikulýar göni çyzyk geçirmek mümkinligini subut ediň.

5.10. Giňişlikdäki göni çyzygyň islendik nokadyndan oňa iki dürli perpendikulýar göni çyzyk geçirmek mümkinligini subut ediň.

5.11. AB, AC, AD göni çyzyklar jübüti-jübüti bilen özara perpendikulýar (11-nji surat). Eger

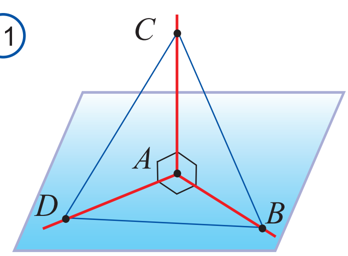
1) $AB = 3$ sm, $BC= 7$ sm, $AD = 1{,}5{,}$sm;

2) $BD = 9$ sm, $BC= 16$ sm, $AD = 5$ sm;

3) $AB = b$ sm, $BC = a$ sm, $AD = d$ sm;

4) $BD = c$ sm, $BC= a$ sm, $AD = d$ sm bolsa, CD kesimiň uzynlygyny tapyň.

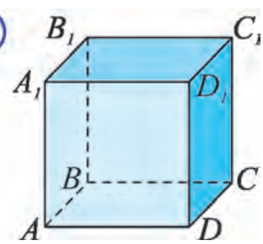
11



5.12. $ABCD$ gönüburçlugyň A depesinde onuň tekizligine perpendikulýar AK göni çyzyk geçirilen. K nokatdan gönüburçlugyň başga depelerine çenli aralyk 6 m, 7 m, 9 m. AK aralygy tapyň.

5.13. A we B nokatlardan α tekizlige perpendikulýar we ony degişlilikde C we D nokatlarda kesip geçýän göni çyzyk geçirilen. Eger $AC = 3$ m, $BD = 2$ m we $CD = 2{,}4$ m bolsa we AB kesim α tekizligi kesip geçmese, A we B nokatlaryň arasyndaky aralygy tapyň

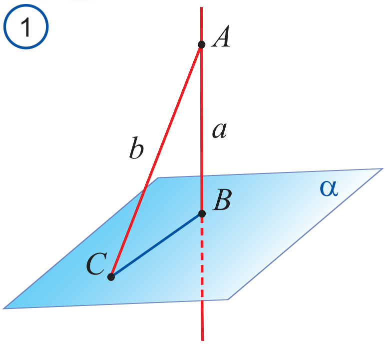
12



5.14. 12-nji suratda şekillendirilen kubuň gapyrgasy a) 4 sm; b) 8 sm bolsa, AB_1C üçburçlugyň perimetrini we DAC_1 üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

16 GIŇIŞLIKDE PERPENDIKULÝAR, ÝAPGYT WE ARALYK

1



α tekizlige onda ýatmaýan A nokatdan perpendikulýar a göni çyzyk geçirýäris (1-nji surat). Bu göni çyzyk tekizligi B nokatda kesip geçsin. Şonuň ýaly-da, tekizligiň käbir C nokadyny A nokat bilen utgaşdyrýarys. Netijede emele gelen

AB kesim – *tekizlige geçirilen perpendikulýar*,

AC kesim – *tekizlige geçirilen ýapgyt,*

BC kesim – *ýapgydyň tekizlikdäki proýeksiýasy,*

B nokat – *perpendikulýaryň esasy*,

C nokat – *ýapgydyň esasy* diýip atlandyrylýar.

ABC üçburçluk gönüburçly we onda AB katet, AC bolsa gipotenuza bolany üçin, hemişe $AB < AC$ bolýar.

2

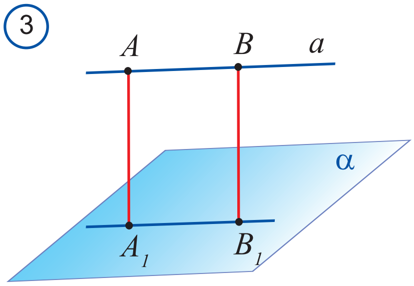
Diýmek, käbir nokatdan tekizlige geçirilen perpendikulýaryň uzynlygy şu nokatdan geçirilen islendik ýapgydyň uzynlygyndan kiçi bolýar.

Nokatdan tekizlige çenli bolan aralyk diýip nokatdan tekizlige geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyna aýdylýar.

Daşkentdäki sagat minarasynyň beýikligi – 30 m diýlende, minaranyň depesinden onuň esasynyň tekizligine geçirilen perpendikulýaryň uzynlygy düşünilýär (2-nji surat).

5.7-nji teorema. Eger göni çyzyk tekizlige parallel bolsa, onda onuň ähli nokatlary tekizlikden deň aralykda bolýar.

3



Subudy. a - berlen göni çyzyk we α - berlen tekizlik bolsun (3-nji surat). a göni çyzykda iki A we B nokatlary alýarys. Olardan α - tekizlige perpendikulýarlar geçirýäris. Bu perpendikulýarlaryň esasy degişlilikde A we B nokatlar bolsun. Onda A we B nokatlardan α tekizlige çenli bolan aralyklar degişlilikde AA_1 we BB_1 kesimler bolýar. 3.6-njy teorema görä AA_1 we BB_1 kesimler parallel bolýar.

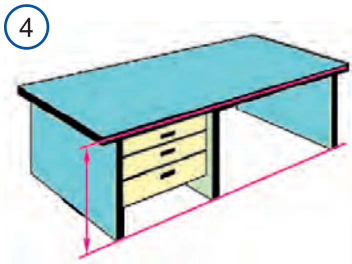
Diýmek, olar bir tekizlikde ýatýar. Bu tekizlik α tekizligi A_1B_1 göni çyzyk boýunça kesýär. a göni çyzyk A_1B_1 göni çyzyga parallel bolýar, çünki ol α tekizligi kesip geçmeýär.

Şeýdip, ABA_1B_1 dörtburçlugyň garşylykly taraplary parallel.

Diýmek, ol parallelogram. Bu parallelogramda $AA_1 = BB_1$. ❑

Göni çyzykdan oňa parallel bolan tekizlige çenli bolan aralyk diýip göni çyzygyň islendik nokadyndan şu tekizlige çenli bolan aralyga aýdylýar.

4



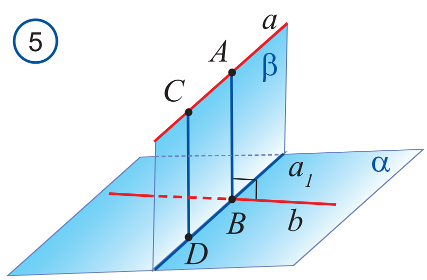
Tekizligiň islendik iki nokadyndan oňa parallel bolan tekizlige çenli bolan aralyk birmeňzeş bolýar. Bu häsiýet öňki teoremanyň subudyna meňzeş subut edilýär.

Iki parallel tekizlikleriň arasyndaky aralyk diýip bir tekizligiň islendik nokadyndan ikinji tekizlige çenli bolan aralyga aýdylýar.4-nji suratda şekillendirilen stoluň beýikligi poluň we stoluň tekizlikleriniň arasyndaky aralyga deň bolýar.

5.8-nji teorema. Iki atanaklaýyn göni çyzyk ýeke-täk umumy perpendikulýara eýe bolýar.

Subudy. a we b atanaklaýyn göni çyzyklar bolsun (5 -nji surat). Bu göni çyzyklarda şeýle A we B nokatlary saýlamak mümkinligini görkezýäris, ýagny AB göni çyzyk hem a-ga, hem b-ge perpendikulýar bolýar. α tekizlik b göni çyzykdan geçýän we a göni çyzyga parallel bolsun. a göni çyzykda C nokady alýarys we ondan α tekizlige CD perpendikulýar geçirýäris. Kesişýän a we CD göni çyzyklardan β tekizligi geçirýäris. a_1 göni çyzyk – α we b tekizlikleriň kesişme çyzygy bolsun.

5



$a_1 \parallel a$ bolany üçin a_1 we b göni çyzyklar nähilidir B nokatda kesişýär. B nokatdan β tekizlikde ýatýan, a göni çyzyga BA perpendikulýar geçirýäris.

Netijede, AB we CD göni çyzyklaryň ikisi-de β tekizlikde ýatýar we a göni çyzyga perpendikulýar bolýar. Şonuň üçin, $AB \parallel CD$ we $AB \perp \alpha$ bolýar.

Diýmek, $AB \perp a$ we $AB \perp b$ bolýar. AB gözlenýän göni çyzyk bolup, ol a we b atanaklaýyn göni çyzyklaryň ikisine-de perpendikulýar bolýar.

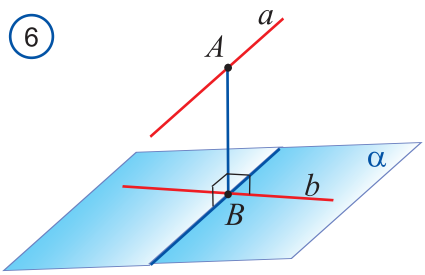
Umumy perpendikulýaryň ýeke-täkligini özbaşdak subut ediň. ❑

Iki atanaklaýyn göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk diýip olaryň umumy perpendikulýarynyň uzynlygyna aýdylýar.

Ýokardaky teoremadan aşakdaky netije gelip çykýar:

Iki atanaklaýyn a we b göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk (6-njy surat) - a göni çyzygyň islendik nokadyndan, b göni çyzyk ýatýan we a göni çyzyga parallel bolan α tekizlige çenli bolan aralyga deň bolýar.

6

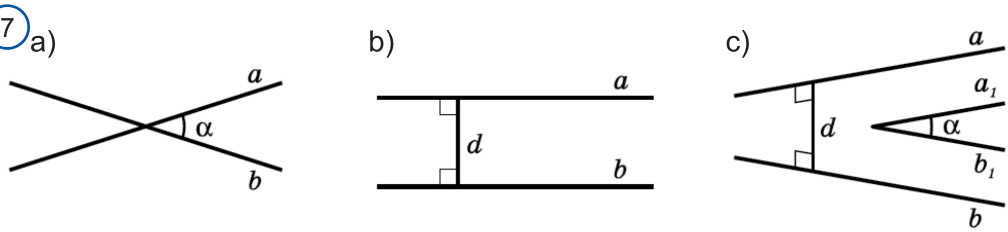


Ýokardakylara esaslanyp, indi biz giňişlikde iki göni çyzygyň özara ýerleşişini sanlaryň kömeginde häsiýetlendirip bileris.

Eger giňişlikde iki göni çyzyk:

- özara kesişse – olaryň arasyndaky α burç (7-nji *a* surat),
- özara parallel bolsa – olaryň arasyndaky *d* aralyk (7-nji *b* surat),
- özara atanaklaýyn bolsa - olar arasyndaky a burç we arasyndaky *d* aralyk

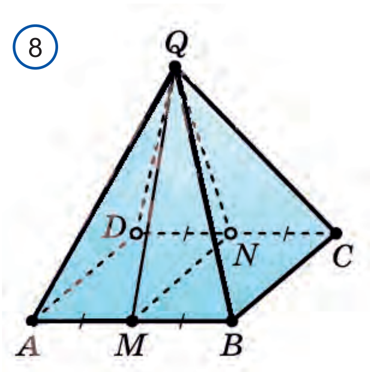
7



(7-nji c surat) şu göni çyzyklaryň özara ýerleşişini sanly häsiýetlendirýär.

Mesele. Dörtburçly *SABCD* piramidanyň ähli gapyrgalary *a*-ga deň. Onuň *AB* we *SC* gapyrgalarynyň arasyndaky aralygy tapyň (8-nji surat).

8



Çözülişi: 4.8-nji teorema görä, *AB* we *SC* gapyrgalarynda şeýle *X* we *Y* nokatlar bar bolup, *XY* göni çyzyk *AB* we *SC* gapyrgalaryň ikisine-de perpendikulýar bolýar. Şonuň ýaly-da, *XY* göni çyzyk, *SC* göni çyzyk ýatýan we *AB* göni çyzyga parallel bolan tekizlige-de perpendikulýar bolýar.

Aýdaly, α tekizlik – *S* nokatdan geçýän we *AB* göni çyzyga perpendikulýar bolan tekizlik bolsun. Bu tekizlik *AB* we *CD* gapyrgalaryň ortalary *M* we *N* nokatlardan geçýär. Onda *XY* || α we *XY* kesimiň α tekizlikdäki proýeksiýasy *XY* kesime deň bolýar.

Indi *X* we *Y* nokatlaryň α tekizlikdäki haýsy nokatlara proýesirlenýändigini anyklaýarys.

AB ⊥ α bolany üçin *AB* gapyrganyň ähli nokatlary *M* nokada proýesirlenýär. Diýmek, *X* nokat *M* nokada proýesirlenýär.

S we *C* nokatlar degişlilikde S we *N* nokatlara proýesirlenendigi üçin, *SC* kesim *SN* kesime geçýär. *SN* göni çyzyk *AB* göni çyzyga parallel tekizlikde ýatandygy üçin, gözlenýän, *XY* kesimiň proýeksiýasy - *SN* göni çyzyga *M* nokatdan geçirilen perpendikulýardan ybarat bolýar.

Bu perpendikulýaryň d uzynlygyny, esasy a we gapdal tarapy $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ -e deň bolan SMN deňýanly üçburçlugyň meýdanyndan peýdalanyp tapýarys.

Bir tarapdan bu üçburçlugyň meýdany: $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$ -ä deň,

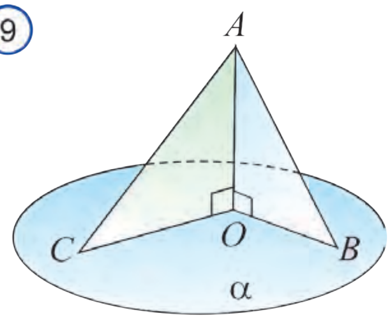
ikinji tarapdan bolsa $\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} d$-ge deň. Bu deňlikden $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

? *Tema degişli soraglar we ýumuşlar*

1. Tekizlige geçirilen perpendikulýara we ýapgyda kesgitleme beriň.
2. Ýapgydyň tekizlikdäki proýeksiýasy diýip nämä aýdylýar?
3. Nokatdan tekizlige çenli bolan aralyk nähili anyklanýar?
4. Tekizlige parallel bolan göni çyzyk bilen tekizligiň arasyndaky aralyk nähili tapylýar?
5. Iki parallel tekizlikleriň arasyndaky aralyk nähili anyklanýar?
6. Iki atanaklaýyn göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk nähili anyklanýar?
7. Giňişlikde iki göni çyzygyň özara ýerleşişini haýsy sanly ululyklar anyklaýar?

5.15. A, B, Q nokatlar α tekizlige degişli, M nokat bolsa oňa degişli däl we $MQ \perp \alpha$. MA, AQ, MQ, BQ, MB kesimleriň haýsy biri a) perpendikulýar; b) ýapgyt; ç) ýapgyt proýeksiýasydygyny anyklaň.

9



5.16. A nokatdan α tekizlige AB we AC ýapgytlar we AO perpendikulýar geçirilen (9-njy surat). Eger AB = 2,5 sm, AC = 3 sm bolsa, ýapgytlaryň proýeksiýalaryny özara deňeşdiriň.

5.17. Nokatdan tekizlige iki ýapgyt geçirilen (9-njy surat). Eger ýapgytlaryň biri ikinjisinden 26 sm uzyn, proýeksiýalary bolsa 12 sm we 40 sm bolsa, şu ýapgytlaryň uzynlyklaryny tapyň.

5.18. Üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezinden üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar göni çyzyk geçirilen. Bu göni çyzygyň her bir nokady üçburçlugyň depelerinden deň uzaklykda ýatýandygyny subut ediň.

5.19. Meýdany a) 21 sm^2; b) 96 sm^2; ç) 44 sm^2; d) 69 sm^2; e) 156 sm^2 bolan $ABCD$ kwadrat tekizligine uzynlygy 10 sm bolan DM perpendikulýar geçirilen. MA ýapgydyň uzynlygyny tapyň.

5.20. Göni burçy C bolan ABC üçburçlugyň ýiti burçunyň depesinden üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar AD göni çyzyk geçirilen. Eger $AC = c$, $BC = b$ we $AD = c$ bolsa, D nokatdan B we C depelere çenli bolan aralyklary tapyň.

5.21. Bir-birinden 3,4, m uzaklykda bolan wertikal sütüniň ýokarky uçlary pürs bilen utgaşdyrylan. Sütünleriň beýiklikleri 5,8 m we 3,9 m bolsa, pürsüň uzynlygyny tapyň.

5.22. 15 m uzynlykdaky telefon simi sütünine ýeriň üstünden 8 m beýiklikde berkidilen we ondan beýikligi 20 m bolan köp etažly öýüň üçegine dartyp çekilen. Öý bilen sütüniň arasyndaky aralygy tapyň.

5.23. Tekizlige P nokatdan geçirilen PQ perpendikulýaryň uzynlygy 1 ga, PA we PB ýapgytlaryň uzynlyklary bolsa 2-ä deň. C nokat AB kesimiň ortasy. Eger a) $\angle APB = 90^0$; b) $\angle APB =$ b bolsa, QC kesimiň uzynlygyny tapyň.

5.24. $ABCD$ parallelogramyň kütek B burçy depesinden onuň tekizligine perpendikulýar bolan BH kesim dikilen. Eger $AH = 5$ sm, $HD = HC = 8{,}5$ sm, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ bolsa, parallelogramyň taraplaryny tapyň.

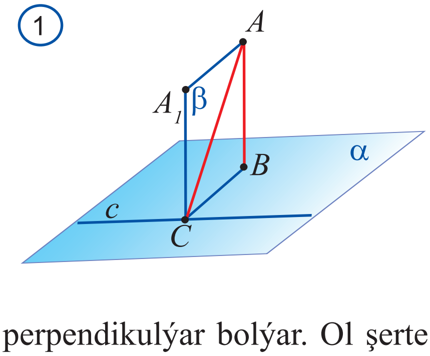
5.25. M nokat tarapy 60 sm bolan dogry ABC üçburçlugyň her bir depesinden 40 sm aralykda ýerleşen. ABC üçburçlugyň tekizliginden M nokada çenli bolan aralygy tapyň.

17 ÜÇ PERPENDIKULÝARLAR BARADAKY TEOREMA

5.9-njy teorema. Eger tekizlige geçirilen ýapgydyň esasyndan geçýän göni çyzyk ýapgydyň proýeksiýasyna perpendikulýar bolsa, onda ol ýapgydyň özüne-de perpendikulýar bolýar.

Subudy. Aýdaly, AB kesim α tekizlige geçirilen perpendikulýar, AC kesim bolsa ýapgyt bolsun. c göni çyzyk α tekizlikde ýatýan, C nokatdan geçýän we ýapgyt proýeksiýasyna perpendikulýar bolan göni çyzyk bolsun (1-nji surat). AB-ge parallel A_1C göni çyzygy geçirýäris. Bu göni çyzyk α tekizlige perpendikulýar bolýar.

1



AB we AC_1 göni çyzyklar arkaly β tekizligi geçirýäris. c göni çyzyk CA_1 göni çyzyga perpendikulýar bolýar. Ol şerte görä, CB göni çyzyga hem perpendikulýardy. Onda c göni çyzyk β tekizlige-de perpendikulýar bolýar.

Diýmek, c göni çyzyk β tekizlikde ýatýan AC ýapgyda-da perpendikulýar. ❑

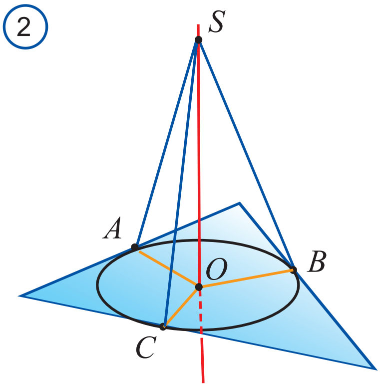
Şu teoremada üç perpendikulýarlar barada gürrüň edilýändigi üçin ol "Üç perpendikulýarlar baradaky teorema" adyny alan. Bu teorema tersi bolan teorema hem ýerlikli bolýar. Ony özbaşdak subut ediň.

5.10-njy teorema. ***Eger tekizlige geçirilen ýapgydyň esasyndan geçýän göni çyzyk ýapgyda perpendikulýar bolsa, onda ol ýapgydyň proýeksiýasyna hem perpendikulýar bolýar.***

1-nji mesele. Üçburçluggyň içinden çyzylan töweregiň merkezinden üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar göni çyzyk geçirilen (2-nji surat). Bu göni çyzygyň islendik nokady üçburçlugyň taraplaryndan deň uzaklykda ýatýandygyny subut ediň.

Subudy. Aýdaly, A, B, C - üçburçlugyň tarapla-rynyň töwerek bilen kesişme nokatlary, O – töweregiň merkezi, S bolsa perpendikulýardaky islendik nokat bolsun.

2



OA üçburçlugyň tarapyna perpendikulýar bolany üçin, üç perpendikulýarlar baradaky teorema görä, OA hem bu tarapa perpendikulýar bolýar. Onda SAO gönüburçly üçburçluk bolýar. Bu üçburçlukda Pifagoryň teoremasyna görä,

$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$,

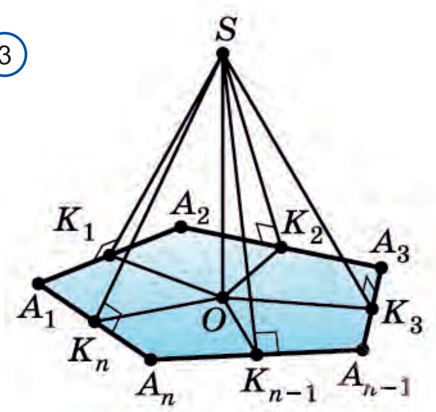
bu ýerde r - töweregiň radiusy.

Edil şuňa meňzeş, SBO gönüburçly üçburçlukdan $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$ we SCO gönüburçly üçburçlukdan bolsa $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$ bolýandygyny tapýarys.

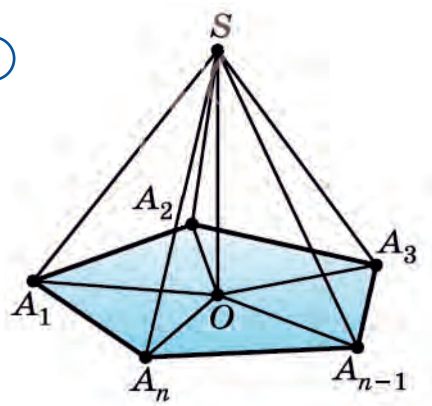
Diýmek, $SA = SB = SC$. ❑

Ýokarda getirilen 3-4-nji suratlar esasynda 1-nji meselä meňzeş we islendik köpburçluk üçin umumyrak ýagdaýlary özbaşdak subut etmek üçin getirýäris.

3



4

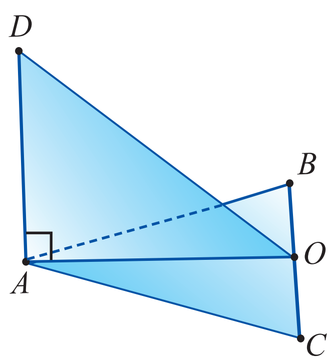


2-nji mesele. Giňişlikdäki nokat köpburçlugyň taraplaryndan deň uzaklykda ýerleşen bolup, ondan köpburçlugyň tekizligine perpendikulýar geçirilen. Bu perpendikulýaryň esasy köpburçlugyň içinden çyzylan töweregiň merkezi bilen üstme-üst düşýändigini subut ediň (3-nji surat).

3- nji mesele. Giňişlikdäki nokat köpburçlugyň depelerinden deň uzaklykda ýerleşen bolup, ondan köpburçlugyň tekizligine perpendikulýar geçirilen. Bu perpendikulýaryň esasy köpburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezi bilen üstme-üst düşýändigini subut ediň (4-nji surat).

4-nji mesele. ABC üçburçlugyň tekizligine onuň A nokadyndan perpendikulýar çykarylan (5-nji surat). Eger $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ we $AD = 36$ -a deň bolsa, D nokatdan BC göni çyzyga çanli bolan aralygy tapyň.

5



Çözülişi: Gözlenýän aralyk D nokatdan BC tarapa geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyna deň bolýar. Bu kesimi düşürmek üçin onuň BC tarapdaky esasyny tapmaly bolýar. Munuň üçin ABC üçburçlugyň A depesinden BC tarapyna AO beýikligi düşürýäris: $AO \perp BC$.

Onda üç perpendikulýarlar baradaky teorema görä, $BC \perp DO$ bolýar. Diýmek, DO gözlenýän kesim eken.

Indi DO kesimiň uzynlygyny tapýarys. Munuň üçin, ilki ABC üçburçlugyň meýdanyny Geronyň formulasyndan peýdalanyp tapýarys:

$p = (a + b + c) / 2 = (20 + 11 + 13) : 2 = 22;$

$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} = \sqrt{22 \cdot (22 - 20) \cdot (22 - 11) \cdot (22 - 13)} = 66.$

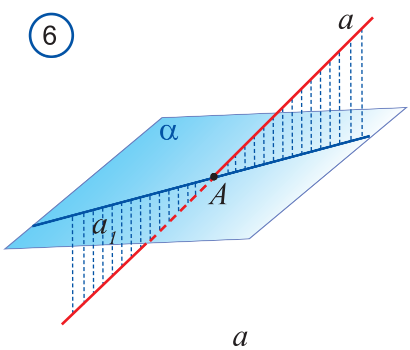
$DO = 2\,S / a = (2 \cdot 66) : 20 = 6{,}6.$

ADO gönüburçly üçburçlukda, Pifagoryň teoremasyna görä

$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6.$

Aýdaly, α tekizlik we ony kesip geçýän we şu tekizlige perpendikulýar bolmadyk a göni çyzyk berlen bolsun (6-njy surat). a göni çyzygyň her bir nokadyndan perpendikulýarlar geçirýäris. Bu perpendikulýarlaryň esaslary a_1 göni çyzygy düzýär.

6

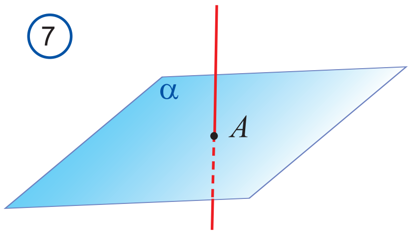


a_1 göni çyzyk a göni çyzygyň α tekizlikdäki *proýeksiýasy* diýip atlandyrylýar.

a göni çyzyk we α tekizligiň arasyndaky burç diýip, göni çyzyk bilen onuň şu tekizlikdäki proýeksiýasynyň arasyndaky burça aýdylýar.

Eger göni çyzyk tekizlige perpendikulýar bolsa (7-nji surat), onuň bilen tekizligiň arasyndaky burç 90^0 -a, eger parallel bolsa, bu göni çyzyk bilen tekizligiň arasyndaky burç 0^0-a deň diýip alynýar.

7



? *Tema degişli soraglar we ýumuşlar*

1. Üç perpendikulýarlar baradaky teoremany düşündiriň. Näme sebäpden ol şeýle atlandyrylypdyr?
2. Üç perpendikulýarlar baradaky teorema ters teoremany aýdyň we düşündiriň.
3. Göni çyzyk bilen tekizligiň arasyndaky burç nähili anyklanýar?
4. Tekizlik bilen oňa perpendikulýar göni çyzygyň arasyndaky burç näçe gradus?

5.26. *A* nokat tarapy *a*-ga deň bolan deň taraply üçburçlugyň depelerinden *a* aralykda ýatýar. *A* nokatdan üçburçluk tekizligine çenli bolan aralygy tapyň.

5.27. α tekizligiň daşarsyndaky *S* nokatdan oňa üç deň *SA, SB, SC* ýapgytlar we *SO* perpendikulýar geçirilen. Perpendikulýaryň *O* esasy *ABC* üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezi bolýandygyny subut ediň.

5.28. Deň taraply üçburçlugyň taraplary3 m-e deň. Üçburçlugyň her bir depesinden 2 m aralykda bolan nokatdan üçburçlugyň tekizligine çenli bolan aralygy tapyň.

5.29. Deňýanly üçburçlukda esasy we beýikligi 4 m-e deň. Berlen nokat üçburçlugyň tekizliginden 6 m aralykda we onuň depelerinden birmeňzeş aralykda ýatýar. Şu aralygy tapyň.

5.30. *A* nokatdan kwadratyň depelerine çenli bolan aralyk *a*-ga deň. Kwardatyň tarapy *b*-ge deň bolsa, *A* nokatdan kwadrat tekizligine çenli bolan aralygy tapyň.

5.31. Berlen nokatdan tekizlige geçirilen berlen uzynlykdaky ýapgytlar esaslarynyň geometrik ornuny tapyň.

5.32. Berlen nokatdan tekizlige uzynlyklary 10 sm we 17 sm bolan iki ýapgyt geçirilen. Bu ýapgytlaryň proýeksiýasynyň tapawudy 9 sm-e deň. Ýapgytlaryň proýeksiýalaryny tapyň.

5.33. Nokatdan tekizlige iki ýapgyt geçirilen. Eger 1) olardan biri ikinjisinden 26 sm uzyn, ýapgytlaryň proýeksiýaslary 12 sm we 40 sm bolsa; 2) ýapgytlaryň uzynlyklary 1 : 2 gatnaşykda bolup, olaryň proýeksiýalary 1 sm we 7 sm-e deň bolsa, ýapgytlaryň uzynlyklaryny tapyň.

5.34. α tekizlikden *d* aralykda ýatýan *A* nokatdan tekizlik bilen 30^0 burç emele getirýän *AB* we *AC* ýapgytlar geçirilen.Olaryň α tekizlige proýeksiýalary özara 120^{0}-ly burç düzýär. *BC* kesimiň uzynlygyny tapyň.

5.35. Eger gönüburçly üçburçlugyň katetlerinden biri tekizlige degişli, ikinjisi bolsa onuň bilen 45^0-ly burç emele getirse, gipotenuza bu tekizlik bilen 30^0-ly burç düzýändigini subut ediň.

5.36. a ýapgyt α tekizlik bilen 45^0-ly burç düzýär, tekizligiň b göni çyzygy bolsa ýapgyt proýeksiýasy bilen 45^0-ly burç düzýär. a we b göni çyzyklaryň arasyndaky burçuň 30^0 -a deňdigini subut ediň.

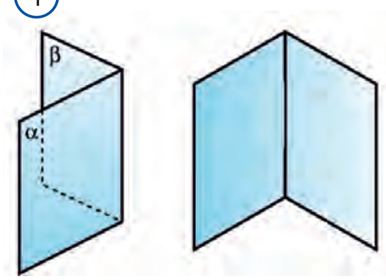
5.37. P nokat tarapy a-a deň $ABCD$ kwadratyň her bir depesinden a aralykda ýatýar. Kwadratyň tekizliginiň we AP göni çyzygyň arasyndaky burçy tapyň.

5.38. Üçburçly piramidanyň hemme gapyrgalary özara deň. Piramidanyň gapyrgasy we bu gapyrga degişli bolmadyk granynyň arasyndaky burçy tapyň.

5.39. Gönüburçly parallelepipediň ölçegleri a, b we c -ga deň. Parallelepipediň diagonaly bilen onuň granlarynyň diagonallarynyň arasyndaky aralygy tapyň.

18 GIŇIŞLIKDE TEKIZLIKLERIŇ PERPENDIKULÝARLYGY

1



Iki ýarymtekizlik we olary çäklendirýän umumy göni çyzykdan ybarat geometrik şekile *ikigranly burç* diýip atlandyrylýar (1-nji surat). Ýarymtekizlikler ikigranly burçuň *granlary*, olary çäklendirýän göni çyzyk bolsa ikigranly burçuň *gapyrgasy* diýip atlandyrylýar.

Ikigranly burçlar barada daş-töwerekdäki aşakdaky zatlar düşünje berýär (2-nji surat): kitap, noutbuk, açyk gapy we ymaratyň üçegi.

Ikigranly burçuň gapyrgasynyň islendik nokadyndan onuň granlarynda ýatýan we bu gapyrga perpendikulýar bolan şöhleleri çykarýarys. Bu şöhleler emele getiren burç ikigranly burçuň *çyzyk burçy* diýlip atlandyrylýar (3-nji surat).

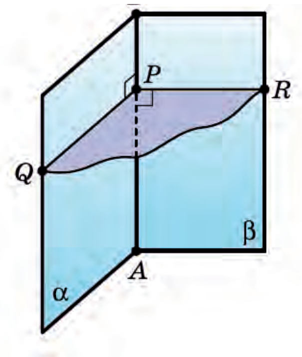
Kesgitlemeden görnüşi ýaly, ikigranly burçuň çyzyk burçy gapyrgada saýlanan nokat bilen anyklanýar we çäksiz köp bolýar. Şeýle bolsa-da, ikigranly burçuň çyzyk burçy ululygy gapyrgada saýlanan nokada bagly däl, ýagny olaryň hemmesi özara deň bolýar.

Ikigranly burçlaryň ululygy onuň çyzyk burçunyň ululygy bilen anyklanýar. Çyzyk burçy burçlaryň ýiti, göni, kütek we ýazgyn bolmagyna garap, ikigranly burçlar hem degişlilikde ýiti, göni, kütek we ýazgyn ikigranly burçlara bölünýär. 4-nji suratda dürli ikigranly burçlar şekillendirilen.

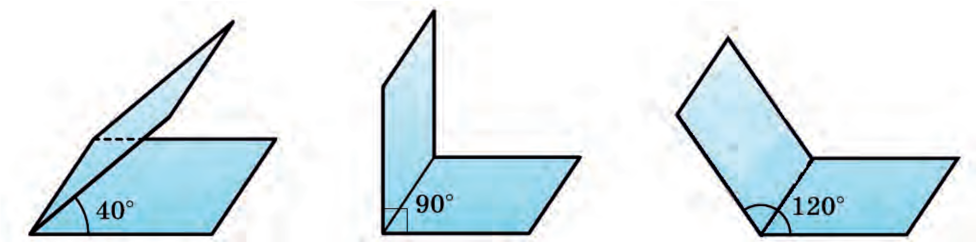
Iki kesişýän tekizlik bütin giňişligi umumy gapyrga eýe bolan dört ikigranly burça bölýär (5-nji surat). Bu ikigranly burçlaryň biri α deň bolsa, olardan ýene

2

3



4



biriniň bahasy hem a-ga deň bolýar. Galan ikisiniň bahasy bolsa 180^0 - a deň bolýar.

Bu ikigranly burçlaryň içinde 90^0-dan kiçisi-de bolýar. Şu burçuň bahasy kesişýän *tekizlikleriň arasyndaky burç* diýip alynýar.

Eger ikigranly burçlaryň biri göni, ýagny 90^0-a deň bolsa, galan üçüsi-de göni bolýar (6-njy surat).

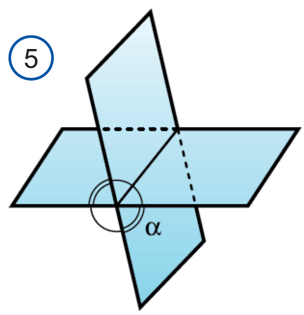
Göni burç astynda kesişýän tekizlikler *perpendikulýar tekizlikler* diýip atlandyrylýar.

Perpendikulýar tekizliklere daş-töwerekden mysal hökmünde otagyň poluny we diwarlaryny,umumy gapyrga eýe otag diwarlaryny, umumy gapyrga eýe Rubik kubunyň granlaryny we ýer üstüni we öýüň diwarlaryny mysal hökmünde getirmek mümkin (7-nji surat).

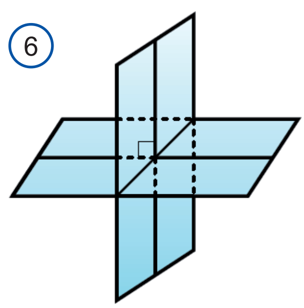
α we β tekizlikleriň perpendikulýarlygy göni çyzyklardaky ýaly "⊥" belgi kömeginde, $\alpha \perp \beta$ ýaly ýazylýar.

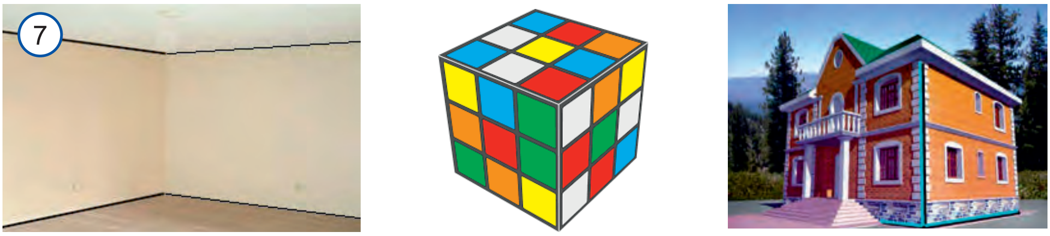
Indi perpendikulýar tekizlikleriň häsiýetleri barada durup geçýäris. Aşakdaky teorema – "tekizlikleriň perpendikulýarlyk nyşany" diýlip atlandyrylýar.

5



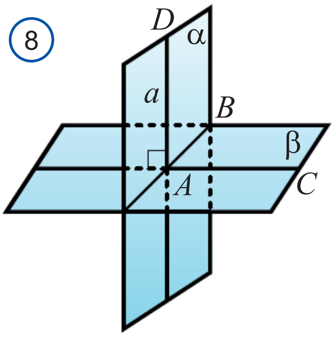
6





7

5.11-nji teorema. ***Eger tekizliklerden biri ikinjisine perpendikulýar bolan göni çyzykdan geçse, şeýle tekizlikler özara perpendikulýar bolýar.***



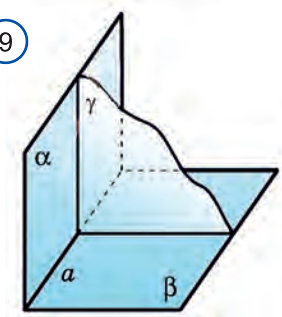
8

Subudy. Aýdaly, α we b tekizlikler berlen bolup, α tekizlik β tekizlige perpendikulýar bolan *a* göni çyzykdan geçsin (8-nji surat). β tekizlik bilen *a* göni çyzygyň kesişme nokady *A* bolsun. α⊥β bolýandygyny subut edýäris.

α we β tekizlikler *AB* göni çyzyk boýunça kesişmeýär. Onda, *AB*⊥*a* bolýar, çünki şerte görä β⊥*a.* β tekizlikde ýatýan we *AB* göni çyzyga perpendikulýar bolan *AC* göni çyzygy geçirýäris. Netijede, emele gelen *DAC* burç – αb ikigranly burçuň çyzyk burçy bolýar. Şerte görä, *a*⊥β. Onda, *DAC* göni burç. Diýmek, α⊥β. ❑

Bu teoremadan aşakdaky netije gelip çykýar.

Netije. ***Eger tekizlikler iki tekizligiň kesişme çyzygyna perpendikulýar bolsa, bu tekizlikleriň her birine perpendikulýar bolýar (9-njy surat).***

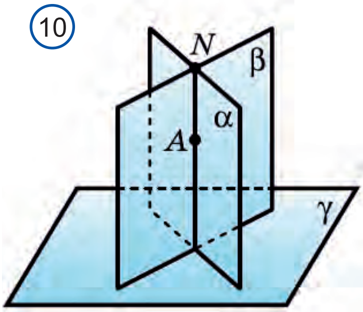


9

4.11 teoremanyň ters teoremasy-da ýerlikli bolýar. Ony subutsiz getirýäris.

5.12-nji teorema. ***Eger iki perpendikulýar tekiz-liklerden biriniň käbir nokadyndan ikinjisine perpendikulýar göni çyzyk geçirilse, bu göni çyzyk birinji tekizlikde ýatýar.***

Netije. ***Eger iki perpendikulýar tekizlik üçünji tekizlige perpendikulýar bolsa, olaryň kesişme çyzygy-da bu tekizlige perpendikulýar bolýar (10-njy surat).***

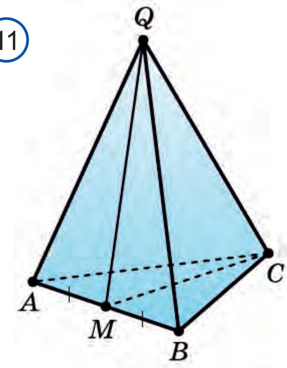


10

1-nji mesele. *M* nokat – *QABC* dogry piramidanyň esasyndaky gapyrgasynyň ortasy bolsa (11-nji surat), *QCM* tekizlik piramidanyň esasynyň tekizligi *ABC* -ge perpendikulýardygyny subut ediň.

Subudy. AB kesim deňýanly AQB we ACB üçburçluklaryň esasy bolany üçin bu üçburçluklar medianalary QM we CM-e hem perpendikulýar bolýar. Şunuň bilen birlikde, AB kesim QCM tekizlige-de perpendikulýar bolýar. Onda 4.12 teorema görä, ABC tekizlik QCM tekizlige perpendikulýar bolýar. ❑

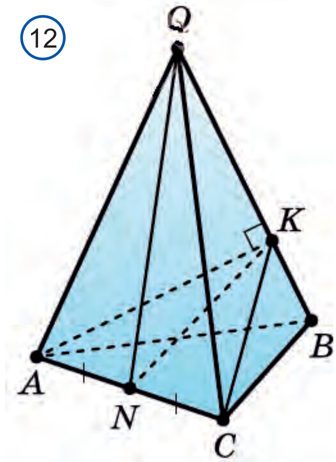
11



2-nji mesele. $QABC$ dogry piramidanyň depesindäki tekiz AQB burçy α deň. Onuň gapdal gapyrgasyndaky ikigranly burçuny tapyň (12-nji surat).

***Çözülişi*.** Aýdaly, N nokat AC gapyrganyň ortasy, AK bolsa A nokatdan BQ gapyrga geçirilen perpendikulýar bolsun.

12



ABQ we CBQ üçburçluklaryň deňliginden $CK \perp BQ$ bolýar. Şonuň üçin, AKC burç BQ ikigranly burçuň çyzyk burçy bolýar.

AKQ we ANQ gönüburçly üçburçluklardan

$AK = \sin\alpha$, $AN = AQ\ \sin(\alpha/2)$ bolýandygyny tapýarys.

AKN gönüburçly üçburçluklardan bolsa

$\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$ alarys.

Mundan, $\angle AKC = 2\arcsin\frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$. ❑

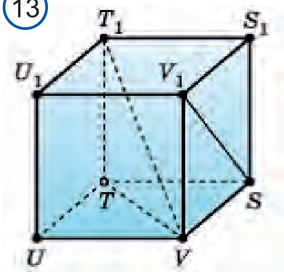
? *Tema degişli soraglar we ýumuşlar*

1. Ikigranly burç diýip nämä aýdylýar?
2. Nähili burç tekizlikleriň arasyndaky burç diýlip atlandyrylýar?
3. Göni burç astynda kesişýän tekizlikler nähili atlandyrylýar?
4. Tekizlikleriň perpendikulýarlyk nyşanyny aýdyň.
5. Perpendikulýar tekizlikleriň häsiýetlerini aýdyň we düşündiriň.

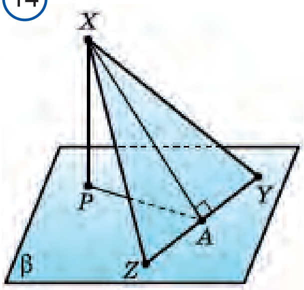
5.40. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ gönüburçly parallelepipediň; b) $ABCA_1B_1C_1$ dogry prizmanyň perpendikulýar granlaryny anyklaň we dogry ikigranly burçlaryny aýdyň.

5.41. $STUVS_1T_1U_1V_1$ kubda (13-nji surat) a) TVT_1 burç; b) T_1ST burç T_1SVT ikigranly burçuň çyzyk burçy bolarmy? V_1UTS ikigranly burçuň bahasyny tapyň.

13



14



5.42. Iki ikigranly burçuň birden grany umumy, galan granlary bilelikde tekizligi düzýär. Şu ikigranly burçlaryň jemi 180^0-a deňdigini subut ediň.

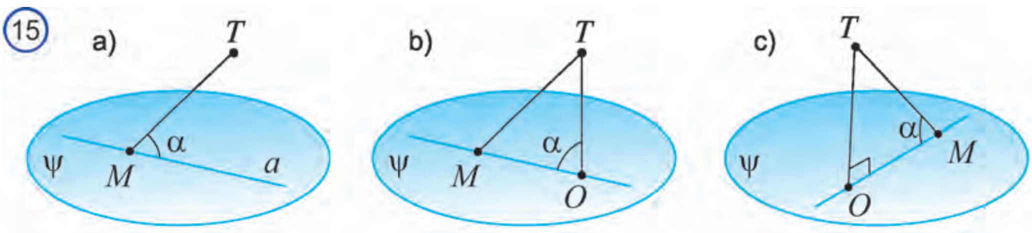
5.43. XYZ üçburçlugyň YZ tarapy β tekizlikde ýatýar. Onuň X depesinden XA beýiklik we β tekizlige XP perpendikulýar geçirilen (14-nji surat). XAP burç $XYZP$ ikigranly burçuň çyzyk burçudygyny subut ediň.

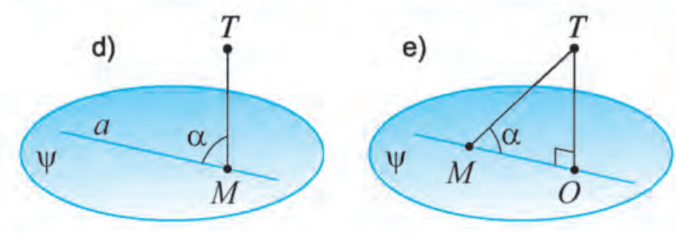
5.44. Üçburçly $ABCD$ piramidanyň CD gapyrgasy ABC tekizlige perpendikulýar. $AB = BC = AC = 6$ we $BD = 3\sqrt{7}$ bolsa, $DACB$, $DABC$, $BDCA$ ikigranly burçlary tapyň.

5.45. T nokatdan ψ tekizlige ýapgyt geçirilen (15-nji surat). Aşakdaky suratlaryň haýsylarynda tekizlik we ýapgyt arasyndaky α burç dogry belgilenipdir?

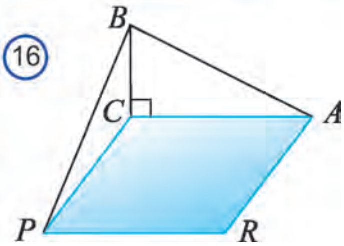
5.46. Üçburçly $ABCD$ piramidada DAB, DAC, ACB burçlar göni, $AC = CB = 5$ we $DB = 5\sqrt{5}$ bolsa, $ABCD$ ikigranly burçuny tapyň.

15



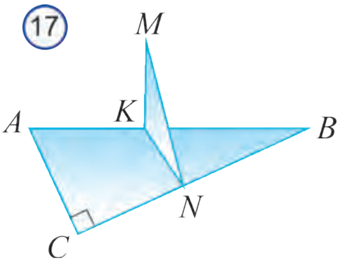


16



5.47. Ikigranly burçuň çyzyk burçunyň tekizligi onuň her bir granynda perpendikulýardygyny subut ediň.

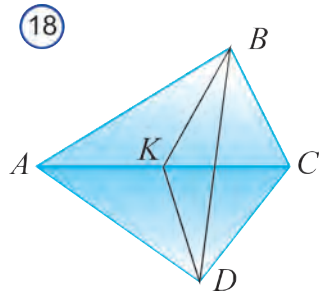
17



5.48. Ikigranly burçuň bir granynda ýatýan iki nokat onuň gapyrgasyndan degişlilikde 51 sm we 34 sm uzaklykda ýatyr. Bu nokatlaryň birinjisi başga granyndan 15 sm uzaklykda ýatýanlygy mälim bolsa, şu grandan ikinji nokada çenli bolan aralygy tapyň.

5.49. ABC gönüburçly üçburçlugyň ($\angle C = 90^0$) we $ACPR$ kwadratyň tekizlikleri özara perpendikulýar

(15-nji surat). Kwadratyň tarapy 6 sm, üçburçlugyň gipotenuzasy 10 sm. *BP* kesimiň uzynlygyny tapyň.



5.50. *MK* kesim gönüburçly *ABC* üçburçlugyň ($\angle C = 90^0$) tekizligine perpendikulýar (16-njy surat). *KN//AC*, *AK* = *KB*, *AC* = 12 sm, *MK* = 8 sm bolsa, *MN* kesimiň uzynlygyny tapyň.

5.51. *ABC we ADC* deňýanly üçburçluklaryň tekizlikleri perpendikulýar (17-nji surat). *AC* olaryň umumy esasy. *BK* kesim *ABC* üçburçlugyň medianasy.

BK = 8 sm, *DK* = 15 sm bolsa, *BD* kesimiň uzynlygyny tapyň.

19 GIŇIŞLIKDE ORTOGONAL PROÝEKSIÝA WE ONDAN TEHNIKADA PEÝDALANMAK

Eger proýeksiýanyň ugry *l* proýeksiýa tekizligi α perpendikulýar bolsa, şeýle parallel proýesirleme *ortogonal proýesirleme* diýlip atlandyrylýar.

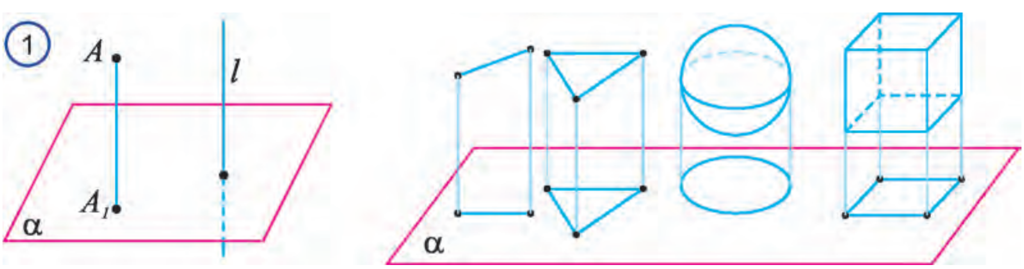
Ortogonal proýeksiýa guranda alnan şekile berlen şekiliň *ortogonal proýeksiýasy* ýa-da gysgaça *proýeksiýasy* diýlip aýdylýar.

Parallel proýeksiýasyny gurmagyň hemme häsiýetleri ortogonal proýeksiýa guranda-da ýerlikli bolýar. Aşakda diňe ortogonal proýeksiýa degişli bolan möhüm häsiýeti subut edýäris.

5.13-nji teorema. Köpburçlugyň tekizlikdäki ortogonal proýeksiýasynyň meýdany köpburçlugyň meýdanyny onuň tekizligi bilen proýeksiýa tekizliginiň arasyndaky burçuň kosinusynyň köpeltmek hasylyna deň.

Subudy. 1) Ilki üçburçluk we onuň käbir tarapyndan geçýän tekizlikdäki proýeksiýasyny garap çykýarys.

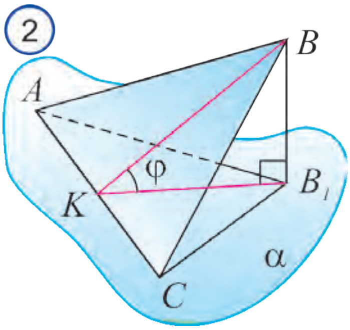
Aýdaly, *ABC* üçburçlugyň α tekizlikdäki proýeksiýasy AB_1C üçburçluk bolsun.



ABC üçburçlugyň *BK* beýikligini geçirýäris. Üç perpendikulýarlar baradaky teorema görä, B_1K kesim KBB_1 üçburçlugyň beýikligi bolýar.

BKB_1 burç – üçburçlugyň tekizligi bilen proýeksiýa tekizliginiň arasyndaky φ burçdan ybarat bolýar. BKB_1 üçburçlukda: $KB_1 = KB \cdot cos\varphi$.

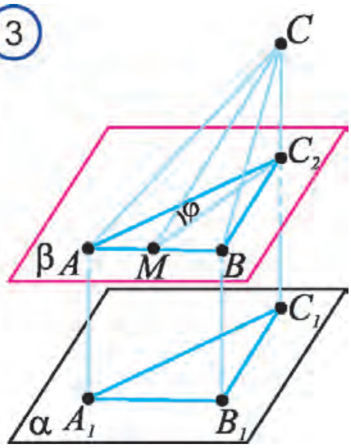
2



Onda, $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot KB$, $S_{AB_1C}=\frac{1}{2}AC\cdot KB_1$. Bulardan, $S_{AB_1C}=S_{ABC}\cdot\cos\varphi$ -i alýarys. 1-nji ýagdaýda teorema subut edildi.

2) α tekizligiň ýerine oňa parallel bolan, başga β tekizlik alnanda-da teorema ýerlikli bolýar (3-nji surat). Bu parallel proýeksiýasyny gurmak häsiýetinden peýdalanyp subut edilýär.

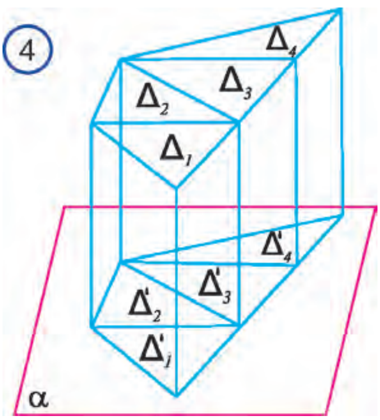
3



3) Indi umumy, köpburçluk ýagdaýyna gelýän bolsak (4-nji surat). Munda teorema, köpburçlugy diagonallarynyň kömeginde üçburçluklara bölmek kömeginde ýokarda garalan hususy ýagdaýa getirip subut edilýär. ❑

Ortogonal proýeksiýadan tehniki çyzuwda dürli hili detallary proýektirlände peýdalanylýar. Dürli maşyn detallarynyň çyzgylary bir, iki ýa-da üç özara perpendikulýar proýeksiýa tekizliklerine ortogonal proýeksiýasyny gurmak ýoly bilen alynýar (5-nji suratlar). Bu proýeksiýalar haýsy ugurda proýeksiýasy gurlanlygyna garap, wertikal (dik), gorizontal we frontal proýeksiýalar diýip hem atlandyrylýar.

4



? *Tema degişli soraglar we mashqlar*

1. Ortogonal proýeksiýasyny gurmak diýip nämä aýdylýar?

2. Ortogonal proýesirlemek häsiýetlerini sanaň.

3. Ortogonal proýeksiýa gurandan tehnikada nähili peýdalanylýar?

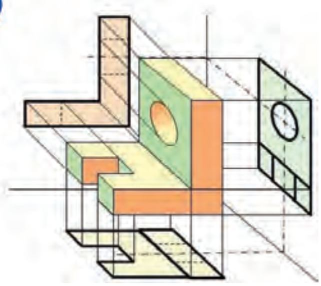
4. Bir göni çyzyga perpendikulýar bolan tekizligiň häsiýetini aýdyň.

5. Umumlaşan Pifagoryň teoremasy näme barada?

6. Üçünji tekizlige prependikulýar iki göni çyzyk özara parallel bolarmy?

7. Ikinji tekizlige perpendikulýar tekizlik we göni çyzyk özara parallel bolýarmy?

5



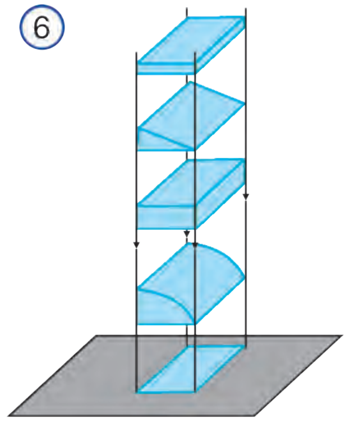
8. Berlen göni çyzykdan berlen tekizlige perpendikulýar bolan näçe tekizlik geçirmek mümkin?
9. α tekizlik β tekizlige perpendikulýar. α tekizlikdäki islendik göni çyzyk β tekizlige perpendikulýar bolarmy?
10. Birinji tekizlige ýapgyt bolan kesimden geçýän ikinji tekizlik birinjisine perpendikulýar bolarmy?
11. Gönüburçly parallelepipediň kesişýän granlary özara perpendikulýar bolarmy?

5.52. Trapesiýanyň ortogonal proýeksiýasy a) kwadrat; b) kesim; ç) gönüburçluk; d) parallelogram; e) trapesiýalardan biri bolmagy mümkinmi?

5.53. 1-nji surata garap ortogonal proýeksiýasy gönüburçluk bolan geometrik şekilleri aýdyň.

5.54. A_1B_1 kesim AB kesimiň α tekizlige ortogonal proýeksiýasy (2-nji surat). Eger AB = 20 sm, AC = 10 sm, A_1B_1 = 12 sm bolsa, B_1C_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

6

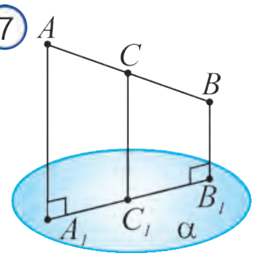


5.55. Uzynlygy 5 sm bolan AB kesimiň ω tekizlige ortogonal proýeksiýasy uzynlygy 3 sm bolan AC kesimden ybarat (3-nji surat). AB kesimiň ω tekizlige gyşarma burçunyň kosinusyny tapyň.

5.56. Eger AB göni çyzykdan C nokada çenli bolan aralyk (4-nji surat) C nokatdan ABD tekizlige çenli bolan aralykdan iki esse uly bolsa, ABC we ABD tekizlikleriň arasyndaky burçy tapyň.

5.57. ABC üçburçlugyň meýdany 18 sm^2 -a deň. $KC \perp (ABC)$. Eger ABK we ABC üçburçluklaryň tekizlikleriniň arasyndaky burç a) a = 30^0; b) a = 45^0; a) α = 60^0 bolsa, ABK üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

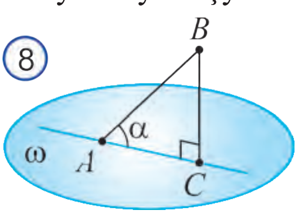
7



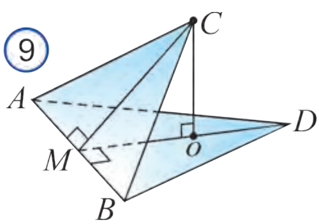
5.58. ABC we ABD üçburçluklaryň tekizlikleriniň arasyndaky burç 60^0-a deň. Eger AB= 4√3 bolsa, CD aralygy tapyň.

5.59. Meýdany 48 sm^2-a deň bolan üçburçlugyň ortogonal proýeksiýasy - taraplary14 sm, 16 sm we 6 sm bolan üçburçlukdan ybarat. Şu üçburçlugyň tekizliginiň we onuň proýeksiýasynyň arasyndaky burçy hasaplaň.

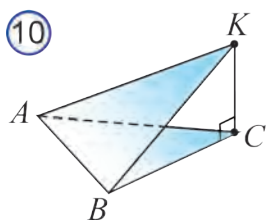
8



9



10



5.60. Meýdany 12 sm^2 -a deň bolan üçburçlugyň ortogonal proýeksiýasy - taraplary13 sm, 14 sm we 15 sm bolan üçburçlukdan ybarat. Şu üçburçlugyň tekizliginiň we onuň proýeksiýasynyň arasyndaky burçy hasaplaň.

20 AMALY GÖNÜKME WE ONUŇ ULANYLYŞY

Ulanmalar we amaly kompetensiýalary şekillendirmek

1. Iki goňşy otagyň diwarlary utgaşýan çyzygyň pola perpendikulýardygyny nädip ölçemek bilen barlap bolýar?

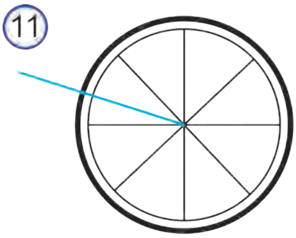
2. Uzynlyk ölçeg guraly – puletkanyň kömeginde sütüniň dikligini nähili barlamak bolýar?

3. Tigiriň okunyň tekizliginiň ol tigirlenýän tekizlige perpendikulýardygyny nähili barlamak bolýar?

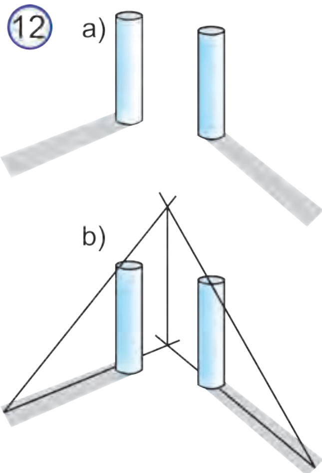
4. Näme sebäpden gyşda tamdan asylyp durýan buzlary, olaryň galyňlygyny hasaba almazdan, özara parallel diýmek mümkini?

5. Okuwçy amaly işi ýerine ýetirýär. Birnäçe ornaşdyrylan sütünleriň Ýere görä dikligini barlamak üçin olardan diňe birini barlady. Galan sütünleriň dikligini aşakdaky ýaly barlady: hemme sütünleriň beýikligini, olaryň aşaky esaslary bilen ýokarky depeleriniň arasyndaky aralyklary ölçäp karar kabul etdi. Ol bu işi dogry ýerine ýetiripdirmi?

11



12



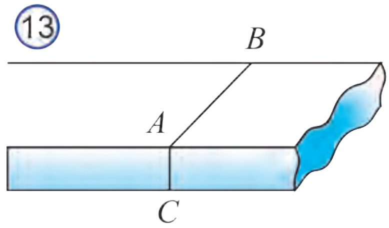
6. Näme sebäpden gapy, ol açykmy ýa-da ýapykmy her gezek pola görä perpendikulýar bolýar?

7. Göni çyzygyň tekizlige perpendikulýardygyna aýdyň mysal hökmünde tigiriň simleri ýatýan tekizligiň tigiriň okuna okyna bolan ýerleşişini getirmek mümkin (5-nji surat). Ok tigiriň her bir simine perpendikulýar. Hereket dowamynda tigiriň simleri her bir nokatda kesişýän kesimlerden ybarat tegelegiň tekizligini emele getirýär. Eger ok gorizontal ýerleşen bolsa, tigir nähili tekizlikde aýlanýar? Näme üçin?

Görkezme: tigiriň okuna perpendikulýar tekizlige perpendikulýar bolýar.

8. Beýikligine bökmek maşky ýerine ýetirilýär. Germew taýagy foýmak üçin grany 25 m bolan kub we ölçegleri 25×25×50 bolan gönüburçly parallelepipedlerden peýdalanylýar. 1) 125 sm; 2)150 sm; 3) 175 sm beýikligine bökmek maşklaryny nähili guramak bolýar?

9. 6-njy suratda iki wertikal sütün we olaryň kölegesi şekillendirilen. Şu maglumatlardan peýdalanyp, ýagtylyk çeşmesi (çyra) ýerleşen nokady we onuň gorizontal tekizlige proýeksiýasyny tapyň we aşakdaky soraglara jogap beriň. a) Sütünleriň wertikallygynyň ähmiýeti barmy?



b) Kölege düşýän tekizligiň gorizontallygynyň ähmiýeti barmy? ç) suratda berlen maglumatlaryň hemmesi-de möhümmi?

Çözülişi:6-njy suratda degişli gurmalar getirilen.Ýagtylyk çeşmesiniň ýerini tapmakda sütünleriň ugry ähmiýete eýe däl, ýöne olaryň wertikaldygy möhüm hasaplanýar. Eger sütünler wertikal we kölege gorizontal tekizlige düşýän bolsa, meseläni çözmek üçin suratdaky bir sütüniň kölegesini we ikinji sütünden düşýän kölegäniň ugruny bilmek ýeterli (6-njy b surat).

10. Tegelek stola tarapy a-ga deň bolan kwadrat şeklindäki saçak düşelen. Tegelegiň merkezi kwadratyň merkezi bilen üstme-üst düşýär. Saçagyň uçlary onuň taraplarynyň ortalaryna görä näçe pola ýakynrak?

Jogaby: $a(2\text{-}1)/2 = 0{,}207\ a$.

11. Diwarlaryň dikligini otwes (bir depesine daş daňlan ýüp) bilen barlanylýar. Eger otwesiň ýüpi diwara nähili derekede ýapyşyp dursa, şonça diwar dik diýen karara gelinýär. Bu karar nähili derejede dogry? Bu barlamak usuly nämä esaslanýar?

12. Byçgylama üsti byçgylanýan tagtanyň hemme gapyrgalaryna perpendikulýar bolýandygyny üpjün etmek üçin (7-nji surat) tagtanyň üstünde byçgylama çyzyklaryny nähili belgilemeli?

13. Otagyň goňşy diwarlarynyň özara perpendikulýardygyny barlamak üçin Pifagoryň teoremasyndan nähili peýdalanmak bolýar?

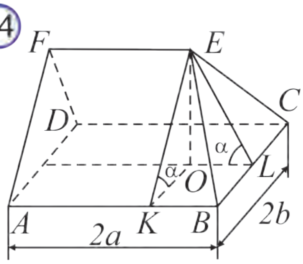
14. Sütüniň dikligini barlamak üçin sütüniň esasy bilen bir göni çyzykda ýatmaýan iki nokatdan gözegçilik edilýär. Şeýle barlamak usulyny esaslandyryň.

Görkezme: Göni çyzygyň we tekizligiň perpendikulýarlyk nyşanyndan peýdalanyň.

15. Baryp bolmaýan depelikdäki nokatda beýik sütün ornaşdyrylan. Kenaryň kömeginde onuň dikligini nädip barlamak bolýar?

Çözülişi: Sütüniň käbir wertikal göni çyzyk bilen bir tekizlikde ýatýandygyny we ýene başga wertikal göni çyzyk bilen bir (başga) tekizlikde ýatýandygyny görkezmek ýeterli bolýar. Otwesi şeýle öňümize goýup, onuň we sütüniň ýokarky uçlary hem-de gözümiz bir göni çyzykda ýatanda, otwesiň ýüpi we sütün bir göni çyzykda ýatsyn. Bu usul aşakdakylara esaslanýar: 1) wertikal sütün islendik wertikal göni çyzyk bilen bir tekizlikde ýatýar; 2) eger iki parallel göni çyzyklar iki kesişýän tekizliklerde ýatsa, bu göni çyzyklar tekizlikleriň kesişme çyzygyna hem parallel bolýar.

14



16. Iki wertikal goýlan tekiz aýna berlen. Bu aýnalaryň biriniň üstüne parallel bolan, gorizontal şöhle ikinji aýnadan birinji aýnanyň üstüne perpendikulýar bolan göni çyzyk boýunça serpilýär. Aýnalaryň arasyndaky burçy tapyň.

Görkezme: Ýagtylygyň serpikme kanunyndan peýdalanyň. Jogaby; 45⁰.

17. Gorizontal şöhle iki wertikal goýlan tekiz aýnalardan serpilýär. Ilki şöhle birinji aýnanyň üstüne parallel bolan bolsa, iki gezek şöhlelenmesi netijesinde ikinji aýnanyň tekizligine parallel bolup galýar. Aýnalaryň arasyndaky burçy tapyň.

Jogaby: 60^0.

18. Galyňlygy 5 m, meýdany 4 m^2 bolan, kwadrat şeklindäki polat platformanyň dört depesinden tros sim bilen gorizontal asylan. Her bir tros simiň uzynlygy 2 m. Tros simleriň platforma görä gyşarma burçuny tapyň. Beýikligi 0,9 m, esasynyň diametri 0,6 m bolan silindr şeklindäki baky şu platforma ýerleşdirip bolarmy?

Jogaby: 45^0*, baky ýerleşdirip bolýar.*

19. Suw dört tarapyndan akyp düşýän üçegiň esasyna ortogonal proýeksiýa gurlan. Üçegiň gapyrgalarynyň proýeksiýasy gönüburçluk şeklindäki üçegiň esasynyň burçunyň bissektrisasy bolýandygyny subut ediň.

20. Esasy *ABCD* gönüburçlukdan ybarat öýe ýagyş suwy dört tarapyndan akyp düşýän üçek ornaşdyrmaly (8-nji surat). $AB = 2a$ m, $BC = 2b$ m. Üçegiň hemme taraplarynyň esasynyň tekizligi bilen α burçy emele getirýär. Şu üçeg ýapmak üçin näçe tünüke gerek bolar? Munda üçegiň üstüniň meýdanynyň *k* göterim mukdaryndaky tünüke çykynda çykýandygyny hasaba alyň.

Jogaby: 4ab (1 + 0,01k) / cos a.

21. Şemalsyz howada ýagyş "ýapgytlygyna" ýagýar. Gönüburçluk şeklindäki faner böleginiň kömeginde ýagyşyň gorizont tekizligine görä ýapgytlygyny nähili anyklamak bolýar? Degişli çyzgyny çyzyň.

Görkezme: Faner bölegini şeýle ýerleşdirmeli, ýagny onuň tekizligi ýagyş damjalarynyň hereket traýektoriýasy we olaryň gorizontal tekizlige proýeksiýasy anyklanan tekizlige takmynan perpendikulýar bolsun. Şunda, gorizontal tekizlikde ýagyş düşmeýän gönüburçluk emele gelýär. Soň degişli kesimleriň uzynlyklary ölçelýär we olaryň arasyndaky burçuň tangensi hasaplanýar.

22. Meýdany S_1 -e, uzynlygy *n*-e deň bolan çagalar krowatyň üstüni iki birmeňzeş gönüburçluk şeklindäki perdeler bilen ýapmaly. Her bir perdäniň meýdany S_2 -e, uzynlygy bolsa krowatyň uzynlygyna deň. Iki perdäniň hem ýokarky çeti krowatyň üstünde parallel ornaşdyrylan we krowatyň uzynlygyna deň sime berkidilen. Simiň krowatdan nähili beýiklikde ornaşdyrylandygyny tapyň. Meseläni aşakdaky sanly şertlerde çözüň: n = 1 m 20 sm, S_1= 6000 sm^2, S_2=7800 sm^2. Degişli çyzgyny çyzyň. *Görkezme:* $\sqrt{4S_2^2 - S_1^2} / 2n$; *Jogaby:* 0,5 m.

23. Esasy *ABCD* gönüburçlukdan ybarat öýe ýagyş suwy dört tarapyndan akyp düşýän üçek ornaşdyrmaly (8-nji surat). *AB*= 18 m, *BC*= 12 m. Üçegiň hemme taraplarynyň esasynyň tekizligi bilen 40^0-ly burçy emele getirýär. Eger 1 m^2 meýdany ýapmak üçin 15 sany çerepisa ulanylsa, bu üçegi ýapmak üçin näçe sany çerepisa gerek bolar?

24. Alty granly galamyň we açylan kitabyň kömeginde göni çyzyklaryň arasyndaky, göni çyzyk bilen tekizligiň arasyndaky, tekizlikleriň arasyndaky burçlaryň nusgalaryny görkeziň.

25. Iki simmertiýa okuna eýe, 4-nji suratda şekillendirilen üçekden ýagyş suwy haýsy ugurlarda akyp düşýändigini anyklaň.

26. Esasyna baryp bolmaýan minaranyň beýikligini kesgitlemek üçin nähili ölçegleri amala aşyrmaly?

27. Beýikligi mälim, ýöne golaýyna baryp bolmaýan bina çenli bolan aralygy tapmak üçin nähili ölçegleri amala aşyrmaly?

28. Näme üçin kölegeler çäşde (günortan) ýitýär?

29. Daragtyň depesine çykmazdan onuň beýikligini nähili ölçemek bolýar?

Jogaplar

4.5. a) 7 sm; b) 30 sm; **4.6.** b) 200 mm; **4.13.** 50 sm; **4.14.** 40 mm; **4.21.** $a + b$; **4.22.** a) 40^0; b) 45^0; ç) 90^0; **4.23.** a)58^0; b) 47^0; **4.40.** 32 sm; **4.41.** 6 sm; **4.42.** 20 sm;

5.11. 1) 6,5 sm; 2) 15 sm; 3) $\sqrt{2a^2 - b^2 + d^2}$; 3) $\sqrt{2a^2 - c^2 + 2d^2}$; **5.12.** 2 m; **5.17.** 15 sm we 41 sm; **5.20.** $BD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$; $CD = \sqrt{a^2 + c^2}$; **5.21.** 3,9 m; **5.22.** 9 m; **5.23.** a) $\sqrt{2}/2$; b) $\sqrt{(5 + 3\cos b)/2}$; **5.24.** 3 sm; 7,5 sm; **5.25.** 20 sm; **5.34.** 3d; **5.37.** 45^0; **5.38.** arccos$\sqrt{3}/3$; **5.44.** 90^0; **5.46.** 60^0;

M.A. Mirzaahmedov, B.Q. Haydarov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov

MATEMATIKA 10
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI
GEOMETRIYA
II QISM

(Turkman tilida)
O‘rta ta‘lim muassasalarning 10-sinf o‘quvchilari uchun darslik
1- nashr

Terjime eden	K.Hallyýew
Redaktor	J.Metýakubow
Tehredaktor	K. Madiarow
Kompýuterde sahaplaýjy:	R. Malikov

Nashriyot litsenziyasi AI № 296. 22.05.2017
Çap etmäge 2017-nji ýylyň 00-nji sentýabrynda rugsat edildi. Möçberi $70\times100^{1}/_{16}$ «TimesNewRoman» garniturasy. Göwrümi: 9,0 çap listi. Neşir listi. 9,0. nusgada çap edildi.

Original-maket «Extremum-press» JÇJ-de
taýýarrlandy. 100053, Daşkent ş.
Bagişemal köçesi, 3. Tel: 234-44-05

Özbegistanyň Metbugat we habar agentliginiň «O‘qituvchi»
neşirýat-çaphana döredijilik öýüniň çaphanasynda çap edildi.
100206, Daşkent ş. Ýunusabat, Ýangişäher köçesi, 1.
Buýurma № .