А. Н. РЕМИЗОВ

ФИЗИКА КУРСИ

1

МЕДИЦИНА
ИНСТИТУТЛАРИ
УЧУН

(МЕХАНИКА,
МОЛЕКУЛЯР ФИЗИКА,
ТЕРМОДИНАМИКА)

СССР Соғлиқни сақлаш министрлиги Ўқув юртлари бош бошқармаси томонидан медицина институтлари студентлари учун дарслик сифатида рухсат этилган

Таржимон
ЎзССР да хизмат кўрсатган ўқитувчи
РУМИ САИД

ЎзССР „МЕДИЦИНА" НАШРИЁТИ
ТОШКЕНТ—1979

ББК 22.3
УДК 530.1(075.8)

Рецензентлар: Минск медицина институти физика кафедраси (кафедра мудири доц. Ф. Қ. Горский) ва Киев медицина институти физика кафедраси мудири Е. А. Безденежних.

Ремизов А. Н.

Р 40 Физика курси: Мед. ин-тлари студентлари учун дарслик/Таржимон: Руми Санд; Таржиманинг махсус муҳаррири: Б. М. Якубов. — Т.: Медицина, 1979.

Т. I. Механика. Молекуляр физика. Термодинамика. 238б.

Ремизов А. Н. Курс физики. Т. I. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика.

Китобнинг биринчи томи сўз боши, механика асослари, механикавий тебранишлар ва тўлқинлар, акустика, гидродинамика, молекуляр физика ва термодинамикадан иборат. Ушбу томга математикадан қисқача маълумотлар илова қилиб берилган.

Курснинг асосий материалини танлашда, турли қонун ва ҳодисаларни тасвирлашда амалий медико-биологик жиҳат акс эттирилгандир. Физика курси амалий характерда бўлганлиги туфайли у юқори курс студентлари ва врачлар учун, шунингдек, биология ҳамда қишлоқ хўжалиги бўйича мутахассис муаллим ва студентлар учун ҳам яхши қўлланма сифатида хизмат қила олади.

ББК 22.3
53

Таржиманинг махсус муҳаррири
Б. М. ЯКУБОВ

Р $\frac{50100-44}{М354(04)-79}$ 1—79 1704000000

Медицина институтларида физика курсини ихтисослаш тарафдори — Ремизов Николай Александрович хотирасига бағишланади.

СЎЗ БОШИ

Ушбу физика курси медицина институтларининг даволаш, педиатрия, санитария-гигиена ва стоматология ихтисослари студентларига мўлжалланган.

Курс асосан ҳозирда ишлатилувчи программага мувофиқ ёзилган бўлса-да, программадан ташқари баъзи масалаларни ҳам ўз ичига олади. Буни программанинг ўзгариш эҳтимолини назарда тутилган ҳолда, шунингдек студентларнинг илмий ишларини активлаш мақсадида қилинган.

Физика курси ихтисосланган бўлиб, у медицина ва биология соҳаларига қаратилган. Дарсликнинг шундай хусусияти уни, айни вақтда, биология, фармация ва қишлоқ хўжалиги институтлари студентлари учун ҳам қўлланма деб ҳисоблашга имкон беради. Дарсликдаги материал врачлар, биофизиклар ва бошқа мутахассислар учун ҳам қизиқарли бўлиши мумкин.

Автор мактаб программасининг қайта тузилишини ҳисобга олган ҳолда ўрта мактаб материалини такрорламасликка интилган.

Асбоблар тавсифи асосан схематик равишда берилган, чунки, бизнингча, асбоб ва аппаратларнинг муфассал ва конкрет тавсифи физика практикумларида берилиши лозим.

Ўз меҳнати, маслаҳатлари ва истаклари билан ушбу китобнинг бунёдга келишига сабаб бўлганларнинг ҳаммасини эслатиб ўтиш қийин. Автор рецензентларга, 2-Москва медицина институти экспериментал ва назарий физика кафедраси ходимларига ва катта ўқитувчи Н. Х. Исаковага алоҳида миннатдорчилигини изҳор этади.

Февраль 1976 й. *А. Н. РЕМИЗОВ*

...Организм механика, физика ва химияни, шубҳасиз, ўзида мужассам боғловчи энг олий бирликдир...

Ф. Энгельс.

КИРИШ

Олий медицина ўқув юртида физикани ўрганишга бошлашдан аввал медик-студент ва врач учун физика ва математика билимларининг нимага кераклиги, медицинанинг физика ва математика билан қанчалик боғланганлиги ҳақида тасаввурга эга бўлиш зарур. Даставвал физиканинг нималарни ўрганиши ва бу фан қандай хусусиятларга эга эканлигини эслатган ҳолда юқоридаги масалалар устида тўхтаймиз.

§ 1. ФИЗИКА ПРЕДМЕТИ

Асосий фалсафий категория — бу атрофимиздаги барча нарсани, ҳатто бизни ҳам ўз ичига олувчи *материядир.*

«Материя объектив реалликни ифодалайдиган философик категория бўлиб, бу объектив реалликни инсон ўз сезгилари билан идрок қилади, бу объектив реаллик бизнинг сезгиларимизга боғлиқ бўлмаган ҳолда мавжуддир, бизнинг сезгиларимиз ундан копия олади, сурат олади ва уни акс эттиради»*, — деб ёзган эди В. И. Ленин.

Материянинг ажралмас хоссаси, унинг мавжудлик формаси *ҳаракатдир.*

«Сўзнинг энг умумий маъносида қараладиган, яъни материянинг яшаш усули сифатида, материяга ичдан хос атрибут сифатида тушуниладиган ҳаракат оддий жой алмашишдан тортиб то тафаккургача коинотда содир бўладиган ҳамма ўзгаришлар ва процессларни ўз ичига олади»*.

Материя ҳаракатининг турли ва хилма-хил турлари, Ф. Энгельс кўрсатувига мувофиқ, баъзи асосий: *механикавий, физикавий, биологик* ва *социал* формаларга ажралади. Бу, фанни ҳаракатнинг қайси турини ўрганилаётганига қараб классификациялашга имкон беради.

Энгельс изидан бориб, *физикани материя ҳаракатининг механикавий ва физикавий формаларини ўрганувчи фан* деб таърифлаш мумкин. Муфассалроқ қилиб кўрганда материя ҳаракатининг физикавий формасини *молекуляр-иссиқлик, электрикавий, элек-*

---

* Ленин В. И. Материализм ва эмпириокритицизм. Асарлар, ўзбекча 5-нашри, 18-том, 146-бет.

* Энгельс Ф. Марксча-ленинча философия хрестоматияси. 1-нашри. 402-бет.

тромагнит, атомавий ва ядро ичидаги материя ҳаракати турларига ажратиш мумкин. Зотан, бундай ажратиш бир қадар шартли, албатта. Шундай бўлса-да, физикани ўқув фани сифатида, одатда худди шундай бўлимлардан иборат деб тасаввур қиладилар.

Материя ҳаракатининг ҳар хил турлари ўзаро боғлиқдир. Бу боғланиш, аввалги фанлар чегарасида ётувчи, янги фанларни туғдирди. Масалан, физика билан бошқа фанлар улашган чегарада биологик физика (биофизика), астрофизика, химиявий физика ва бошқалар вужудга келди. Ҳаракат турларининг дифференцияланиши мавжуд фанлардан бошқа фанларнинг ажралиб чиқишига сабаб бўлади. Масалан, физикадан материаллар қаршилиги, иссиқлик техникаси, электроника ва бошқалар каби фанлар ва ўқув предметлари ажраб чиқдилар.

§ 2. ФИЗИКАВИЙ ТАДҚИҚОТЛАР МЕТОДЛАРИ

Физикада фойдаланиладиган тадқиқот методлари назария ва практика бирлигига мос келиб, В. И. Ленин таърифлаган билишнинг диалектик қонуниятини акс эттиради: «Жонли мушоҳададан абстракт тафаккурга *ва ундан практикага — ҳақиқатни* билишнинг, объектив реалликни билишнинг диалектик йўли ана шундайдир»*.

Бундан физикавий тадқиқотнинг биринчи этапи кузатиш ва тажрибадир деган хулоса чиқариш мумкин. *Кузатиш* — ҳар қандай ҳодисани билишнинг энг содда, ҳар кунги элементидир дейиш мумкин. Тажриба муайян ҳодиса рўй бериши учун яратилган махсус шароит бўлиб, у кузатишнинг юқорироқ даражаси ҳисобланади. Физикавий тажриба одатда физик катталикларни; жисмлар хоссаларини, процесс характеристикаларини ўлчаш билан бирга боради. Физикавий катталикларни аниқ ўлчаш тажрибани миқдорий баҳолашнинг ва шу туфайли, физикавий ҳодисани билиш процессининг қатъий шартидир.

Физикавий ҳодисани билишнинг ёки илмий тадқиқотнинг келгуси этапи *абстракт тафаккурдир*. Физикавий тадқиқотларга нисбатан бу муайян муносабатлар ва қонуниятларни аниқлаш, гипотезалар таклиф қилиш ва назария тузишдан иборатдир.

Мураккаб физикавий ҳодисалар анализ қилинганда, абстракция деб аталувчи, илмий тадқиқот методи қўлланади. Бу метод мазкур ҳодиса учун иккинчи даражадаги, муҳим бўлмаган аломатларни чиқариб ташлашга асосланган. Физикада *моддий нуқта, абсолют қаттиқ жисм, абсолют қора жисм* ва ҳ. к. каби абстракциялар ишлатилади.

Назария, қонун ва гипотезалар амалда текширилади ва ишлатилади. Шундай қилиб, *практика-тажриба* билишнинг дастлабки ва сўнгги этапларидир.

---

* Ленин В. И. Философия дафтарлари. Асарлар, ўзбекча 5-нашри, 29-том, 159-бет.

§ 3. ФИЗИКА ВА МЕДИЦИНА

Физиканинг медицина билан боғланиши кўп қирралидир, бинобарин, бу боғланишни кўрсатувчи аспектлар ёрдамида у ҳақда қисмангина тасаввурга эга бўлиш мумкин.

1. *Организмдаги физикавий процесслар. Биофизика.* Одам организмидаги процессларнинг мураккаблиги ва ўзаро боғланганлигига қарамай, улар ичида физикавий процессларга яқин бўлганларини ажратиш мумкин. Масалан, қон айланиши каби шундай бир мураккаб физиологик процесс асли физикавий процессдир, чунки у суюқлик оқими (гидродинамика), томирларда эластик тебранишларнинг тарқалиши (тебраниш ва тўлқинлар), юракнинг механикавий иши (механика), биопотенциаллар генерацияси (электр) ва ҳ. к. билан боғлиқдир. Нафас олиш газ ҳаракати (аэродинамика), иссиқлик узатиш (термодинамика), буғланиш (фазовий айланишлар) ва ҳ. к. билан боғлиқдир.

Физикавий макропроцесслардан бошқа организмда, жонсиз табиатдагидек, пировардида биологик системалардаги ўзгаришларни белгиловчи молекуляр процесслар ҳам мавжуд. Бу каби микропроцесслар физикасини тушуниш организм ҳолатини, баъзи касалликлар табиатини, дорилар таъсири ва ҳ. к. ларни тўғри баҳолаш учун зарур.

Бу масалаларнинг барчасида физика биология билан ўзаро шунчалик сингишиб кетганки, натижада мустақил бир фан — биофизика вужудга келди. Биофизика тирик организмларда физикавий ва физик-химиявий процессларни ҳам, шунингдек, биологик системаларнинг ҳамма даражадаги субмолекуляр ва молекуляр даражасидан то ҳужайра ва бутун организм даражасигача ташкил топган ультраструктурасини ўрганади. Медицина институтларида биофизика физикавий ва биологик билимларга асосланган мустақил бир ўқув фанидир.

2. *Касалликлар диагностикасида ва биологик системалар тадқиқотида қўлланиладиган физикавий методлар.* Диагностика ва тадқиқот методларининг кўпчилиги физикавий принцип ва ғоялардан фойдаланишга асосланган. Замонавий медицинада ишлатилувчи асбобларнинг кўпчилиги конструктив жиҳатдан физика асбобларидир. Фикримизни тасдиқлаш учун китобхонга ўрта мактаб курсидан маълум бўлган баъзи мисолларни келтириш кифоя.

Механикавий катталик — қон босими — қатор касалликларни аниқлашда фойдаланиладиган кўрсаткичдир. Манбалари организм ичида ётган товушларни тинглаш органларнинг нормал ёки патологик хатти-ҳаракати ҳақида маълумот олишга имкон беради. Симобнинг иссиқликдан кенгайишига асосланган медицина термометри — жуда кўп тарқалган диагностик асбобдир. Электрон қурилмалар тараққий этиши натижасида, сўнгги йилларда, тирик организмларда ҳосил бўлувчи биопотенциалларни қайд қилишга асосланган диагностик метод кенг тарқалиб кетди. Шу жумладан, юрак фаолиятини акс эттирувчи биопотенциалларни ёзиб олиш —

электрокардиография методи энг кўп тарқалгандир. Медико-биологик тадқиқотларда микроскопнинг роли ҳаммага маълум. Толали оптикага асосланиб ясалган замонавий медицина асбоблари организмнинг ички бўшлиқларини кўришга имкон беради. Спектраль анализ суд медицинасида, гигиена, фармакология ва биологияда ишлатилади; рентгенодиагностика ва нишонланган атомлар методи каби анча маълум бўлган диагностикавий методларда атом ва ядро физикаси ютуқларидан фойдаланилади.

3. *Даволаш мақсадида организмга физикавий факторлар билан таъсир этиш.* Медицинада қўлланилувчи турли даволаш методларининг умумий тўпламида физикавий факторлар ҳам ўрин олади. Уларнинг баъзиларини кўрсатиб ўтамиз. Синган суяклар устига қўйиладиган гипс боғлам шикастланган органлар вазиятини механик равишда беркитувчи фиксатордир. Даволаш мақсадида ишлатилувчи совитиш (муз) ва иситиш (грелка) иссиқлик таъсирига асосланган. Электр ва электромагнит таъсири физиотерапияда кенг ишлатилади. Кўринувчи ва кўринмас ёруғлик (ультрабинафша ва инфрақизил нурланишлар), рентген ва гамма-нурлар даволаш мақсадида ишлатилади.

4. *Медицинада ишлатилувчи материалларнинг физик хоссалари. Биологик системаларнинг физикавий хоссалари.* Медицинада қўлланилувчи боғламлар, ускуналар, электродлар, протез ва шунга ўхшашлар атрофдаги муҳитнинг ва шу жумладан, атрофдаги биологик муҳитнинг бевосита таъсири шароитида ишлайди. Бундай нарсаларни реал шароитларда эксплуатация қилишни билиш учун улар ясалган материалларнинг физикавий хоссалари ҳақидаги маълумотга эга бўлиш зарур. Масалан, тиш, қон томирлар, клапан ва ҳ. к. протезларини ясаш учун механикавий маҳкамликни, ҳар хил нагрузкаларга чидамлиликни, эластикликни, иссиқлик ўтказувчанликни, электр ўтказувчанликни ва бошқа хоссаларни билишнинг аҳамияти анча муҳимдир.

Қатор ҳолларда биологик системаларнинг яшовчанлигини ёки муайян ташқи таъсиротларга чидамлигини баҳолаш учун уларнинг физикавий хоссаларини билиш аҳамиятга эга. Биологик объектлар физикавий хоссаларининг ўзгаришига қараб касалликка диагноз қўйилиши мумкин.

5. *Атрофдаги муҳитнинг физикавий хоссалари ва характеристикалари.* Тирик организм атрофдаги муҳит билан доимо ўзаро муносабатда бўлиши туфайлигина нормал яшай олади. Муҳитнинг температура, намлик, ҳаво босими ва бошқа физикавий характеристикалари ўзгаришининг организмга таъсир этиши маълум. Организмга ташқи муҳит таъсирини ёлғиз пассив бир фактор деб ҳисобламай, ундан даволаш учун: иқлимий терапия (климатотерапия) ва баротерапияларда фойдаланиш мумкин. Бу мисоллар атрофдаги муҳитнинг физикавий хоссалари ва характеристикаларига врачнинг баҳо бера оладиган бўлиши кераклигини кўрсатади.

6. *Медицина ва математикавий билимлар.* Медицинанинг математика билан боғланиши бир неча йўл билан юзага чиқади.

Биринчидан, медицина тадқиқотлари натижаларини ишлаб чиқиш, шунингдек, касалликлар диагнозини аниқлашда ишлатилувчи ҳисоблаш машиналари борган сари кенг тарқалмоқда. Бунинг натижасида янги билимлар соҳаси — медицина кибернетикаси пайдо бўлди.

Иккинчидан, тирик системаларда рўй берувчи процессларни тавсифлаш учун, шунингдек, тегишли анализ ва моделларни ҳосил қилиш учун математикадан фойдаланилади.

Учинчидан, касаллик турларини, эпидемиялар тарқоқлигини ҳисоблаш ва бошқа мақсадларда математик статистика қўлланилади.

Врачга физикавий ва математикавий билимларнинг зарурлиги яна шундаки, улар тирик организмга ва унда рўй берувчи процессларга материалистик назардан қарашнинг шаклланишига ёрдам беради.

БИРИНЧИ БЎЛИМ

МЕХАНИКА АСОСЛАРИ

Жисмларнинг механикавий ҳаракатини ўрганувчи физиканинг бўлимига механика дейилади. Фазода жисмлар вазиятининг вақт давомидаги ўзгариши *механикавий ҳаракат* дейилади.

Асосида Ньютон қонунлари ётган механика *классик* механика дейилади. Бу механикада тезликлари ёруғликнинг вакуумдаги тезлигидан кўп марта кичик бўлган жисмлар ҳаракати кўриб чиқилади.

Тезликларини ёруғлик тезлиги билан солиштириб бўладиган жисмлар ҳаракатини *релятивистик механикада* кўриб чиқади; бу механика нисбийлик назариясига асослангандир. Микрозаррачалар ҳаракатининг хусусиятлари *квант (тўлқинли) механикада* ўрганилади.

Ушбу бўлимда классик механика асослари баён этилади.

I БОБ

МОДДИЙ НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

Кинематика — жисмлар ҳаракатини, уларни вужудга келтирувчи ёки ўзгартирувчи сабаблардан қатъи назар, ўрганувчи механиканинг бир бўлими.

Асосий кинематик масалалар энг содда ҳолда моддий нуқта ҳаракати мисолида кўриб чиқилиши мумкин.

§ 1. МОДДИЙ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Моддий нуқтанинг фазодаги вазиятини аниқ кўрсатиш учун координаталар системасидан фойдаланади. Кўпинча *тўғри бурчакли декарт координаталар системаси* (1.1-расм) ишлатилмоқда.

Нуқта M нинг фазодаги вазияти координаталар бошидан шу нуқтага ўтказилган *радиус-вектор* $\mathbf{r}$ нинг катталиги ва йўналиши билан аниқланади. Радиус-векторнинг катталиги ва йўналишини унинг координата ўқларига туширилган уч проекцияси ёрдамида берилиши мумкин. Бу проекциялар, демак, M нуқтанинг вазияти x, y, z координаталарига мосдир.

Моддий нуқтанинг исталган вақт моментидаги вазияти *ҳаракат тенгламалари* ёрдамида берилиб, улар декарт координаталар системасида қуйидаги кўринишга эгадир:

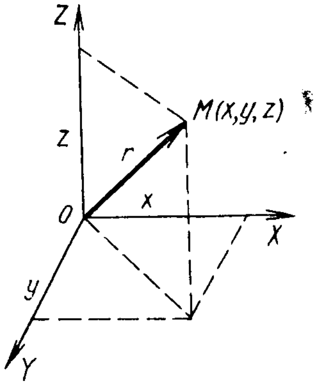
$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t) \quad (1.1)$$

ёки, умумийроқ қилиб ёзганда,

$$\mathbf{r}=f(t), \quad (1.2)$$

бу ерда **r** — радиус-вектор.

Моддий нуқтанинг фазодаги кетма-кет эгаллаган ҳамма вазиятларининг тўплами *ҳаракат траекториясини* беради. Шундай қилиб, (1.1)-тенглама фақатгина ҳаракат тенгламаси бўлмай, балки параметр t орқали берилган моддий нуқта траекториясининг ҳам тенгламасидир.



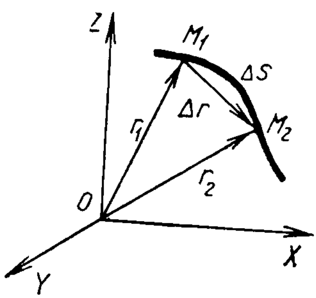
1.1-расм.

§ 2. МОДДИЙ НУҚТА ТЕЗЛИГИ

Моддий нуқта момент t_1да радиус-вектор $\mathbf{r}_1$ билан характерланувчи M_1 (x_1, y_1, z_1) вазиятида, момент t_2да радиус-вектор $\mathbf{r}_2$ билан характерланувчи M_2 (x_2, y_2, z_2) вазиятида турибди, дейлик (1.2-расм). Шундай қилиб, моддий нуқта $\Delta t=t_2-t_1$ вақтда эгри чизиқли кесма Δsни ўтади. Ҳаракатнинг бошланғич ва охирги нуқталарини бирлаштирувчи

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 \quad (1.3)$$

векторга *кўчиш вектори* дейилади. (1.3)-дан кўриниб турибдики, радиус- векторнинг орттирмаси кўчиш векторининг ўзгинасидир.



1.2-расм.

Агар, ҳаёлан вақт интервали Δt камайтирилса ($\Delta t \to 0$), у ҳолда $|\Delta\mathbf{r}| \to \Delta s$. Кўчиш векторининг вақтга нисбатининг лимити, вақт интервали нолга интилганда, моддий нуқтанинг тезлиги бўлади:

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t\to 0} (\Delta \mathbf{r}/\Delta t). \quad (1.4)$$

Функция орттирмаси билан аргумент орттирмаси нисбатининг лимити, аргумент орттирмаси нолга интилганда ҳосила бўлади:

$$\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt. \quad (1.5)$$

Бу кейинги ифода тезликнинг энг мукаммал таърифидир: *тезлик радиус-векторнинг вақт бўйича олинган ҳосиласидир**.

Лимитда ($M_2 \to M_1$ ҳолда) хорда уринмага интилганлиги учун (1.5) да кўринганидек, тезликнинг вектори моддий нуқта ҳаракати траекториясига уринма бўйича йўналган бўлади.

* Китобнинг математик иловасида кўрилган ҳосила тушунчасидан бошқа вектор ҳосиласи (1.5) ҳам мавжуддир.

r нинг координаталар ўқига туширилган проекциялари мос равишда x, y, z га тенг бўлганлиги учун (1.5)-дан тезлик векторининг координата ўқларига туширилган проекцияларини олиш мумкин:

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt. \qquad (1.6)$$

§ 3. МОДДИЙ НУҚТА ТЕЗЛАНИШИ

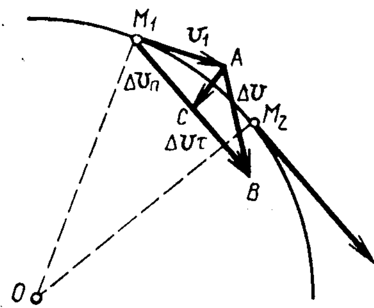
Тезликнинг сон қиймати ва йўналиши бўйича ўзгариш илдамлигини характерловчи катталик *тезланишдир.*

1.3-расмда моддий нуқта ҳаракати траекториясининг бир қисми кўрсатилган. Айтайлик, t_1 вақт моментида бу нуқта M_1 вазиятда $\mathbf{v}_1$ тезлик билан ҳаракатланиб, t_2 вақт моментида эса M_2 вазиятда ва $\mathbf{v}_2$ тезликка эга бўлган бўлсин. Тезликнинг Δt вақтдаги ўзгаришини ифодалаш учун $\mathbf{v}_2$ векторни M_1 нуқтага (ўз-ўзига параллель ҳолда) кўчириш ва векторлар айирмаси

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \qquad (1.7)$$

ни топиш керак. Тезланиш

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \qquad (1.8)$$



1.3-расм.

га тенг бўлади.

Тезланиш тезликнинг вақт бўйича олинган ҳосиласи ёки радиус-векторнинг вақт бўйича олинган иккинчи ҳосиласидир.

Вектор $\Delta\mathbf{v}$ ни (1.3-расмга қаранг) икки векторнинг йиғиндиси шаклида кўрсатиш мумкин:

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_\tau + \Delta \mathbf{v}_n; \qquad (1.9)$$

Вектор $\mathbf{v}_2$ (M_1B кесма) дан миқдор жиҳатидан $\mathbf{v}_1$ га тенг бўлган M_1C кесмани айириш натижасида $\Delta\mathbf{v}_\tau$ ҳосил қилинган: кесма AC вектор $\Delta\mathbf{v}_n$ ни белгилайди. (1.9)-ни ҳисобга олган ҳолда (1.8)-формулани қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t}. \qquad (1.10)$$

Шундай қилиб, тезланиш икки қўшилувчига ажратиш ёрдамида ҳосил қилинади. Уларнинг ҳар бирини кўриб чиқайлик.

1.3-расмдан кўринишича, $|\Delta \mathbf{v}_\tau|$ тезлик сон қийматларининг айирмасига тенг:

$$|\Delta \mathbf{v}_\tau| = v_2 - v_1 = \Delta v^*;$$

---

* Қуйидаги белгиланишларни бир-бирдан ажратиш лозим: $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ — тезликнинг вектоpавий орттирмаси; $|\Delta\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ — тезлик векторавий орттирмасининг сон қиймати (модули);

$\Delta v = v_2 - v_1$ — тезлик сон қийматининг орттирмаси, яъни тезликлар модулларининг айирмаси.

шунинг учун $|\Delta \mathbf{v}_\tau|$ тезлик қийматининг қанчалик ўзгарганини кўрсатади. Демак, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}\right|$ тезлик катталигининг ўзгариш илдамлигига тенг. Тезланиш бу $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}$ ташкил этувчисининг йўналиши траекторияга уринмадир, чунки тезлик билан бир хил йўналишдадир; $\Delta \mathbf{v}_\tau$ билан $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_1$ параллелдирлар. Шундай қилиб, ташкил этувчилардан бири

$$\mathbf{a}_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t}; \qquad (1.11)$$

тезланишнинг *тангенциал* (уринма) ташкил этувчисидир; унинг

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta v_\tau|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (1.12)$$

га, яъни тезлик сон қийматининг вақт бўйича олинган ҳосиласига тенг.

Тезланишнинг иккинчи ташкил этувчиси $\lim\limits_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta v_n}{\Delta t}$ нинг маъносини аниқлаш учун 1.3-расмда қўшимча ясашлар олиб борамиз. M_1 ва M_2 нуқталарида тезликларга перпендикуляр чизиқ ўтказамиз; улар O нуқтада кесишади; томонлари ўзаро перпендикуляр бўлгани учун $\angle AM_1C = \angle M_1OM_2$. $OM_2 \to OM_1$ бўлганда ΔAM_1C ва ΔM_1OM_2 тенг ёнли $(OM_2 - OM_1)$ ва учларида тенг бурчакларга эга бўлганликлари учун бир-бирига ўхшашдирлар.

Учбурчаклилар ўхшашлигидан

$$\frac{M_1M_2}{OM_1} \cong \frac{|\Delta v_n|}{v_1}.$$

келиб чиқади. $OM_2 \to OM_1$ га интилганда, OM_1 нуқта M_1 даги *эгрилик радиуси** R_1 бўлади; $M_1M_2 = |\Delta \mathbf{r}|$.

Бундан

$$\frac{|\Delta r|}{R_1} \cong \frac{|\Delta v_n|}{v_1} \text{ ёки } \frac{v_1}{R_1} |\Delta r| \cong |\Delta v_n|. \qquad (1.13)$$

OM_2 радиуси OM_1 га қанча яқинроқ бўлса, (1.13)-ифода шунча аниқроқ бажарилади.

---

* Таърифлашдаги аниқликни даъво қилмай, қуйидагини эслатамиз. Эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси M учун шундай бир айланани кўрсатиш мумкиндирки, нуқта M ва унга исталганча яқинда ётган қўшни эгри чизиқ нуқталари ана шу айлана устида ётган бўлади. Шундай айлананинг радиусини эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилигининг (траекториясининг) эгрилик радиуси, айлананинг марказини — эгрилик маркази дейилади. Эгрилик деганда радиус тескарисига тенг катталик тушунилади: $\rho = 1/R$. Иккита мисол: бир хил эгриликдаги эгри чизиқ ($\rho =$ const) — айлана чизиқдир; тўғри чизиқ ноль эгриликка эгадир ($\rho = o$, чунки $R \to \infty$).

(1.13)-нинг ҳар икки томонини Δt га бўлиб, лимитга ўтсак:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta v_n|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1}{R_1}\frac{|\Delta r|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1}{R_1}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta r|}{\Delta t}=\frac{v_1}{R_1}v_1=\frac{v_1^2}{R_1} \quad \textbf{(1.14)}$$

га эга бўламиз.

Моддий нуқтанинг траекториядаги исталган вазияти учун бу формулани чиқариш мумкин бўлгани учун, тезлик ва эгрилик радиусига қўйилган индекслар ёзилмаса ҳам бўлади. Шундай қилиб, тезланишнинг иккинчи ташкил этувчисининг сон қиймати v^2/R га тенг. Тезланишнинг бу ташкил этувчиси қайси томонга йўналган? Лимитда $\angle AM_1C\to 0$ ва $\angle M_1AC\to\pi/2$ экани эътиборга олинса, бу саволга жавоб бериш қийин эмас. Демак, ҳаракат тезлигига пер-

$$\mathbf{a}_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} \quad \textbf{(1.15)}$$

пендикуляр бўлади ва тезланишнинг *нормал* ташкил этувчиси деб аталади. У ҳаракат траекториясининг берилган еридаги тезлик й ў н а л и ш и н и н г ўзгаришини характерлайди. Нормал ташкил этувчининг модули моддий нуқта тезлиги квадрати билан траекториянинг берилган нуқтасидаги эгрилик радиусига бўлган нисбатига тенг:

$$a_n=v^2/R. \quad \textbf{(1.16)}$$

Ниҳоят, тезланиш векторини (2.1-расмга қаранг)

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_\tau+\mathbf{a}_n,$$

унинг модулини эса

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \quad \textbf{(1.17)}$$

деб ёза оламиз.

Хотимада баъзи хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз:

а) $a_\tau=0$, $a_n=0$. $a_n=0$ бўлгани учун, (1.16)-дан $R\to\infty$лиги келиб чиқади, яъни ҳаракат траекторияси — тўғри чизиқ. $a_\tau=0$ бўлгани учун, (1.12)-дан $v=const$ бўлади, бу эса тўғри чизиқли текис ҳаракатга мосдир.

б) $a_\tau=\text{const}$, $a_n=0$. Ҳаракат тўғри чизиқли ($a_n=0$). Тезлик вақтга пропорционал ўзгаради ($a_\tau=dv/dt=const$). $a_\tau>0$ бўлганда ҳаракат текис тезланувчан, $a_\tau<0$ бўлганда эса — текис секинланувчан бўлади.

в) $a_\tau=0$, $a_n=\text{const}$. Ҳаракат текис ($a_\tau=0$), $v=const$. (1.16)-дан $a_n=\text{const}$ бўлса, $R=\text{const}$ келиб чиқади. Ҳаракатнинг траекторияси айлана бўлади.

г) $a_\tau=\text{const}$, $a_n=\text{const}$. Биринчи муносабатдан тезликнинг вақтга пропорционал ўзгариши келиб чиқади, $a_n=v^2/R=const$ бўлиши эса, R нинг вақт квадратига пропорционал бўлиб ўзгариши кераклигини кўрсатади. Ҳаракатнинг траекторияси спираль бўлади.

II БОБ

НУҚТА ВА НУҚТАЛАР СИСТЕМАСИ ДИНАМИКАСИ

Жисмлар ҳаракатини, уларни юзага келтирувчи ёки ўзгартувчи сабаблар билан биргаликда текширувчи механика бўлимига *динамика* дейилади.

Динамиканинг асосий қонунлари оддий равишда моддий нуқта ҳаракати мисолида текширилиши мумкин. Моддий нуқта деб бўлмайдиган жисм ҳаракати мисоли умумийроқ ҳолдир. Бундай жисм ёки жисмлар группасини, ҳар бирини моддий нуқта деб қабул қилиш мумкин бўлган, айрим элементлардан ташкил топган, деб тасаввур қилиш мумкин.

§ 1. НЬЮТОННИНГ ИККИНЧИ ҚОНУНИ

Ньютоннинг иккинчи қонуни тажрибага асосланиб чиқарилган қонундир. У жисм (моддий нуқта) тезланиши билан унга таъсир этувчи кучлар орасидаги боғланишни белгилайди. *Жисм тезланиши жисмга таъсир қилувчи ҳамма кучлар тенг таъсир этувчиси* $\mathbf{F}$ *га пропорционал ва жисм массаси* m *га тескари пропорционалдир:*

$$\mathbf{a} = k\,\frac{\mathbf{F}}{m}, \qquad (2.1)$$

бу ерда k — танланган ўлчов бирликларига боғлиқ бўлган пропорционаллик коэффициенти. $k=1$ деб, шунингдек (1.8)-формуладан фойдаланган ҳолда

$$\mathbf{F} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} \text{ ёзиш мумкин.} \qquad (2.2)$$

Масса m ўзгармас ҳисобланса, уни ҳосила ишораси остига киритиш мумкин, у ҳолда

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \text{ бўлади,} \qquad (2.3)$$

бу ерда $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ — моддий нуқта *импульси* ёки *ҳаракат миқдори* (механикавий характеристикалардан бири). (2.3)-тенглама жисм импульси ўзгаришининг тезлиги унга қўйилган барча кучларнинг тенг таъсир этувчисига боғлиқ бўлганини кўрсатади.

(2.3)-ни бошқа шаклда ифодалаймиз:

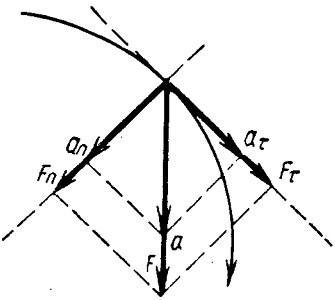
$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p}. \qquad (2.4)$$

Етарли даражада кичик бўлган вақт интервали dt га мос кўпайтма $\mathbf{F}dt$ га элементар куч импульси дейилади; $d\mathbf{p}$ — моддий *нуқта импульсининг элементар ўзгариши.* (2.4)-тенглама нуқта импульсининг элементар ўзгариши унга таъсир этувчи кучнинг элементар импульсига тенг эканини кўрсатади. Бу таъриф Ньютон томонидан берилган иккинчи қонун таърифига яқиндир: ҳаракат миқдорининг ўзгариши қўйилган ҳаракатлантирувчи кучга пропорционал ва куч таъсир этган тўғри чизиқ йўналишида бўлади.

(2.4)-тенгламани интегралласак, $\Delta t = t_2 - t_1$ вақтда моддий нуқта импульсининг ўзгариши билан куч импульси орасидаги боғланишга эга бўламиз:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1; \qquad (2.5)$$

бу ерда $\mathbf{p}_1$ — моддий нуқтанинг t_1 моментдаги, $\mathbf{p}_2$—t_2 моментдаги импульси, $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt$ — кучнинг Δt вақтдаги импульси.



2.1-расм.

Куч ҳам, тезланиш каби, нормал ва тангенциал ташкил этувчиларга ажратилиши мумкин (2.1-расм). Кучнинг ва тезланишнинг мос ташкил этувчилари, Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан, ўзаро жуда содда равишда боғланадилар:

$$\mathbf{F}_n = m\mathbf{a}_n, \quad F_n = m\,\frac{v^2}{R}; \qquad (2.6)$$

$$\mathbf{F}_\tau = m\mathbf{a}_\tau, \quad F_\tau = m\,\frac{dv}{dt}. \qquad (2.7)$$

Куч моддий нуқта тезлигининг ўзгариш сабабидир: кучнинг тангенциал ташкил этувчиси тезликнинг қийматини, нормал ташкил этувчиси эса — йўналишини ўзгартади.

§ 2. МОДДИЙ НУҚТАЛАР СИСТЕМАСИ. ИМПУЛЬСНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ. БАЛЛИСТОКАРДИОГРАФИЯНИНГ ФИЗИКАВИЙ АСОСЛАРИ

Мос равишда массалари $m_1, m_2 \ldots, m_i \ldots, m_N$, тезликлари — $\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_i \ldots \mathbf{v}_N$ импульслари — $\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1$, $\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2 \ldots$, $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i \ldots$, $\mathbf{p}_N = m_N\mathbf{v}_N$ бўлган N та моддий нуқтадан иборат системани кўриб чиқамиз. *Моддий нуқталар системасининг импульси системани ҳосил қилган барча нуқталар импульсларининг векторавий йиғиндисига тенг:*

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i. \qquad (2.8)$$

Ҳар бир моддий нуқтага система нуқталари (жисмлар) томонидан кучлар — *ички* кучлар таъсир қилади, шунингдек системага кирмаган жисмлар томонидан *ташқи* кучлар таъсир этади.

Биринчи моддий нуқтага системанинг иккинчи, учинчи. . . , N— моддий нуқталари томонидан: $\mathbf{F}_{21}$, $\mathbf{F}_{31}$, $\mathbf{F}_{N1}$ — ички кучлар таъсир этади; улардан ташқари системанинг биринчи нуқтасига барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\mathbf{F}_1$ ҳам таъсир этади. Иккинчи моддий нуқтага биринчи, учинчи. . . , N — моддий нуқталари томонидан: $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{32}$, . . , $\mathbf{F}_{N2}$— ички кучлар таъсир этади; булардан ташқари системанинг иккинчи нуқтасига барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\mathbf{F}_2$ ҳам таъсир этади. Худди шунингдек системанинг қолган ҳамма нуқталари учун ҳам шу ҳолда кучлар таъсир этади.

Бундай системанинг импульси қандай ва нима сабабдан ўзгаришини кўрсатамиз. Системанинг ҳар бир моддий нуқтаси учун Ньютоннинг иккинчи қонунини (2.3)-тенглама шаклида ёзамиз:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \dots + \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_1 = d\mathbf{p}_1/dt,\\
&\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} \dots + \mathbf{F}_{N2} + \mathbf{F}_2 = d\mathbf{p}_2/dt,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_{2N} + \dots + \mathbf{F}_{N-1,\,N} + \mathbf{F}_N = d\mathbf{p}_N/dt.
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

Ички кучлар орасида ўзаро тенг бўлган, лекин қарама-қарши йўналишдаги кучлар (Ньютоннинг учинчи қонуни):

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki} \qquad (2.10)$$

мавжудлигини назарда тутиб, (2.9)-тенгламаларни қўшамиз. Қўшиш натижасида

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \dots + \frac{d\mathbf{p}_N}{dt},$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N) \text{ ҳосил бўлади.}$$

(2.8)-дан фойдаланиб,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = d\mathbf{p}\,/\,dt \text{ ёзамиз,} \qquad (2.11)$$

Шундай қилиб, *моддий нуқталар системаси импульсининг вақт бўйича олинган ҳосиласи системага таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисига тенг.*

(2.11)-ни

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i\, dt = d\mathbf{p} \text{ шаклга келтирамиз.} \qquad (2.12)$$

Бундан, *система импульсининг элементар ўзгариши,* система нуқталарига таъсир қилувчи, *барча ташқи кучлар тенг таъсир этувчисининг элементар импульсига тенг* эканлиги кўриниб турибди.

Ташқи кучлар таъсир этмаган ёки барча ташқи кучлар йиғиндиси нолга тенг бўлган системани *изоляцияланган (ёпиқ)* система дейилади. Изоляцияланган система учун (2.11)-тенгламадан

$$\mathbf{dp}/\mathbf{dt}=0 \text{ ёки } \mathbf{p}=\mathrm{const} \tag{2.13}$$

келиб чиқади. Бу ҳол импульс сақланиш қонуни номи билан маълум: *изоляцияланган система импульси ўзгармайди.*

Ташқи кучлар таъсир этиб, аммо уларнинг тенг таъсир этувчисининг бирор йўналишга, масалан, координата ўқларининг бирортасига туширилган проекцияси нолга тенг бўлгандаги ҳол амалий жиҳатдан диққатга сазовордир. (2.11)-тенгламанинг ҳар икки қисмини, масалан, OX ўқига проекциялайлик:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\right)_x=\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_x. \tag{2.14}$$

Векторавий йиғиндининг проекцияси қўшилувчи векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенглигини ва проекция ҳосиласининг проекция бўйича олинган ҳосилага тенг эканлигини эътиборга олсак, (2.14)-дан

$$\sum_{i=1}^{N}F_{ix}=\frac{dp_x}{dt} \text{ га эга бўламиз.}$$

Агар $\sum\limits_{i=1}^{N}F_{ix}=0$ бўлса,

$$p_x=\mathrm{const} \quad \text{бўлади.} \tag{2.15}$$

Агар барча ташқи кучлар тенг таъсир этувчисининг қандайдир йўналишдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система импульсининг шу йўналишдаги проекцияси ўзгармас бўлади.

Изоляцияланган система массалари марказининг ҳаракатини кўриб чиқайлик. Система массаларининг маркази координаталари қуйидаги тенгламалар орқали берилган нуқта каби аниқланади.

$$\begin{gathered}x_C=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_Nx_N}{m_1+m_2+\ldots+m_N},\\ y_C=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_Ny_N}{m_1+m_2+\ldots+m_N},\\ z_C=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_Nz_N}{m_1+m_2+\ldots+m_N},\end{gathered} \tag{2.16}$$

бу ерда $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N$ — система моддий нуқталарининг мос координаталари.

(2.8)-ва (2.16)-тенгламалардан

$$p_x = p_{1x} + p_{2x} + \ldots + p_{Nx} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \ldots + m_N v_{Nx} =$$

$$= m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} + \ldots + m_N \frac{dx_N}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N) =$$

$$= \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2 + \ldots + m_N) x_C] =$$

$$= (m_1 + m_2 + \ldots + m_N)\frac{dx_C}{dt}. \tag{2.17}$$

Агар (2.15)-шарт бажарилса, (2.17)-дан

$$dx_C/dt = \text{const} \tag{2.18}$$

га эга бўламиз.

Изоляцияланган система массалари марказий тезлигининг OX ўқига туширилган проекцияси ўзгармай қолади. Шунга ўхшаш

$$dy_C/dt = \text{const}, \quad dz_C/dt = \text{const}$$

эканлигини кўрсатиш мумкин.

Демак,

$$v_C = \text{const}. \tag{2.19}$$

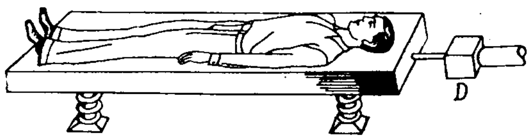
Изоляцияланган система массаларининг маркази текис ва тўғри чизиқ бўйлаб кўчади.

Юрак фаолиятидаги механикавий намоёнликларни текшириш методи импульснинг сақланиш қонунига асосланган. Бу метод *баллистокардиография* деб аталади. Унинг моҳиятини тушунтирамиз. Бунинг учун массалари m_1 ва m_2 бўлган икки жисмдан иборат система учун массалар маркази қўзғалмас бўлган ҳолдаги импульснинг сақланиш қонунини ёзамиз:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2, \quad m_1 \mathbf{v}_1 = -m_2 \mathbf{v}_2.$$

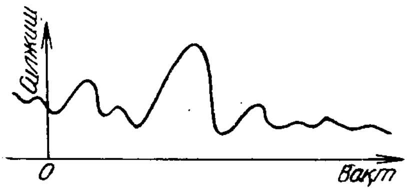
Бундан, система бир қисмининг импульсига кўра, масалан, $\mathbf{p}_1$ бўйича, унинг иккинчи қисмининг импульси — $\mathbf{p}_2$ ҳақида хулоса қилиш мумкинлиги кўринади. Системанинг бир қисмининг ҳаракати бўйича унинг иккинчи қисмининг ҳаракати тўғрисидаги зарур маълумотни олиш мақсадида системанинг бир қисмининг импульсини ўлчаш ўнғайроқ, соддароқ ва қулайроқ бўлганда бу ҳолдан фойдаланиш мумкин. Жумладан, юрак фаолияти ва қон оқиши тўғрисида одам танасининг «тепиниши» бўйича хулоса қилиш мумкин. Тана ҳаракатини қайд этиш, қон ҳаракатини қайд этишдан қулайроқ албатта.

Баллистокардиограф устида текширилувчи одам (ёки ҳайвон) ётадиган ҳаракатланувчи енгил платформадан ва платформага беркитилиб унинг ҳаракатини қайд этувчи датчиклар D — дан*



2.2-расм.

(2.2-расм) иборатдир. Устида одам ётган платформа вақт бўйича силжишини тасвирловчи эгри чизиқ — баллистокардиограмма кўриниши бўйича қон ҳаракати ва юрак фаолиятининг ҳолатини аниқлаш мумкин. 2.3-расмда баллистокардиограмманинг тахминий намунаси кўрсатилган.



2.3-расм.

§ 3. ЭНЕРГИЯ. ИШ ВА ҚУВВАТ

Жисмнинг импульси ҳатто механикавий ҳаракатнинг ҳам тўла ўлчови эмасдир. Фикримизни тушунтириш учун шундай бир мисол келтирамиз. Агар пластилиндан ясалган бир хил массали икки шар бир хил тезлик билан бир-бирига томон ҳаракат қилса, тўқнашганларидан кейин тўхтаб қолади. Бу импульснинг сақланиш қонунига мос келади. Лекин бу ҳолда «шар—шар» системаси импульсида ўзгариш рўй бермаган бўлса-да, ҳаракат бутунлай бошқача бўлиб кетди: шарлар тўхтайди, тўқнашув натижасида уларнинг исиши ва деформацияланиши юз берди. Бу ўзгаришларни импульс акс эттирмайди. Тажриба урилиш пайтида жисмлар температурасининг ўзгариши билан шарлардаги импульслар орасида бевосита боғланиш йўқлигини кўрсатади. Шунинг учун жисмлар механикавий ҳаракатининг (фақат механикавий эмас), айниқса бир ҳаракат формаси иккинчи хилига айланишида керак бўладиган бошқа тўлароқ ва умумий ўлчови киритилади; шарлар мисолида механикавий ҳаракат формаси ҳаракатнинг молекуляр-кинетик формасига ўтади.

Материя ҳаракат турларининг энг тўлиқ миқдорий ўлчови *энергиядир.* Бир ҳаракат формаси иккинчисига айланганда ҳаракатнинг бир турига мос энергия камайиб, иккинчи турига мос келган энергия эса кўпаяди. Худди шунинг каби бир жисмдан ҳаракат иккинчи жисмга узатилганда энергия бир жисмда камайиб, иккинчи жисмда кўпаяди. Ҳаракатнинг, демак энергиянинг ҳам, бундай ўзгариши ва ўтишлари иш бажарилиш процессида,

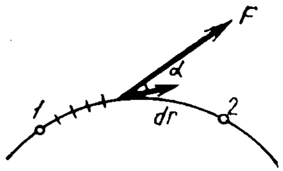
* Датчиклар тўғрисида II томнинг XXV бобидан қаранг.

яъни куч таъсирида жисмнинг кўчиши рўй берган ҳолларда ёки иссиқлик алмашиш процессида юзага келиши мумкин.

Иш процессида энергиянинг узатиш ўлчови *иш**, иссиқлик алмашиш процессида эса — *иссиқлик миқдори* физикавий катталик ҳисобланади.

Ишнинг миқдорий характеристикасини энергия узатишнинг ўлчови сифатида кўриб чиқамиз. «Ҳаракат формасининг ўзгариши миқдорий жиҳатдан қаралганда ишдир»**, — дейди Энгельс.

Кучнинг қиймати ва кўчишга нисбатан йўналиши ўзгарганда ишнинг куч ва кўчиш билан қандай боғланганлигини умумий ҳолда кўриб чиқамиз. 2.4-расмда моддий нуқтанинг 1-вазиятдан 2-вазиятга ўтиш ҳаракатининг эгри чизиқли траекторияси кўрсатилган.



2.4-расм.

Траекторияни етарли даражада кичик бўлган элементар кўчишлар $d\mathbf{r}$ га бўлиб чиқамиз, бу вектор моддий нуқта ҳаракати йўналишига мос келади. Элементар кўчишнинг сон қийматини (модулини) ds билан белгилаймиз:

$$|d\mathbf{r}| = ds.$$

Элементар кўчиш анча кичик бўлганлиги учун мазкур кўчишдаги куч $\mathbf{F}$ ни ўзгармас деб қабул қилиш, элементар ишни ўзгармас кучнинг иши формуласи бўйича ҳисоблаш мумкин:

$$dA = F\cos\alpha\, ds = F\cos\alpha\, |d\mathbf{r}|,$$

ёки векторларнинг скаляр кўпайтмаси сифатида:

$$dA = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (2.20)$$

Шунинг учун, *кучнинг элементар иши кучлар векторлари билан элементар кўчишнинг скаляр кўпайтмасига тенгдир,* дейиш мумкин.

Барча элементар ишларни қўшиб, траекториянинг 1-нуқтасидан 2-нуқтасигача бўлган участкасида (2.4-расмга қаранг) ўзгарувчан кучнинг бажарган ишини аниқлаш мумкин. Бу масала қуйидаги интегрални топишда келтирилади:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (2.21)$$

(2.20) ва (2.21)-ифодаларда Ньютоннинг иккинчи қонунидагидек, $\mathbf{F}$ деганда барча кучларнинг тенг таъсир этувчисини тушуниш шарт эмас, балки $\mathbf{F}$ кўп кучлар тўпламидан биттаси ёки бир неча

* Иш деб, энергияни узатиш мумкин бўлган процесслардан бирини ҳамда шу процессда узатилган энергия ўлчовини аташ унчалик маъқул эмас.

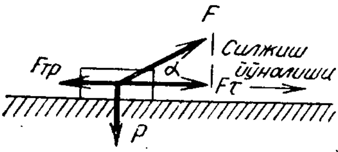
** Энгельс Ф. Ҳаракатнинг ўлчови, Иш. — Маркс К., Энгельс Ф. Русча асарлар, 2-нашр., 20-т, 419-бет.

кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўлиши ҳам мумкинлигини эслатиб ўтиш фойдалидир.

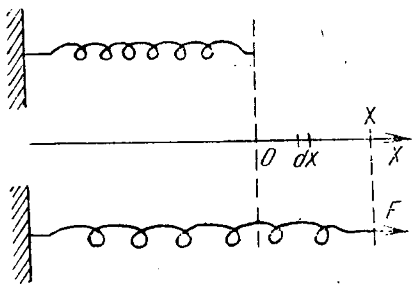
Элементар ишнинг ишораси $\cos\alpha$ нинг қийматига боғлиқ. Масалан, 2.5-расмдан кўринишича, жисм горизонтал текисликда кўчирилса, ҳаракатлантирувчи **F** кучнинг бажарган иши мусбат ($\alpha>0$), ишқалаш $F_{ишқ}$ кучининг иши манфий ($\alpha=180°$) ва оғирлик **P** кучининг иши нолга тенг ($\alpha=90°$). Кучнинг тангенциал ташкил этувчиси $F_\tau=F\cos\alpha$ эканлиги ҳисобга олинса (2.5'-расмга қаранг), элементар иш кучнинг тангенциал ташкил этувчиси билан элементар кўчиш модулининг кўпайтмасига тенг бўлади:

$$dA=E_\tau ds. \qquad \textbf{(2.22)}$$

Шундай қилиб, ишни кучнинг фақат тангенциал ташкил этувчиси бажаради; кучнинг нормал ташкил этувчиси ($\alpha=90°$) иш бажармайди.



2.5-расм.



2.6-расм.

Мисол сифатида, пружинани деформацияланмаган вазиятидан x га тенг, деформациягача чўзувчи (2.6-расм) кучлар бажарган ишини ҳисоблайлик.

Чўзувчи **F** кучнинг йўналиши ўқ OX нинг йўналишига мосдир, шунинг учун dx участкасида бажарилган элементар иш ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dA=F\,dx \qquad \textbf{(2.23)}$$

Гук қонунига мувофиқ пружинани чўзувчи куч деформацияга пропорционалдир:

$$F=kx \qquad \textbf{(2.24)}$$

бу ерда k — пружина мустаҳкамлиги (қаттиқлиги). (2.24)-ни (2.23)-га қўйсак ва 0 дан x гача бўлган чегарада интеграллсак,

$$A=\int_0^x Fdx=k\int_0^x xdx=\frac{kx^2}{2} \qquad \textbf{(2.25)}$$

ни оламиз.

Пружина чўзилганда ҳосил бўладиган эластик кучнинг иши ҳам шундай қийматга эга, аммо ишораси тескари бўлади:

$$A_{эл}=-kx^2/2.$$

Умумий ҳолда пружина ҳаракатчан учининг координатаси $x=x_1$ дан $x=x_2$ гача кўчганда эластик кучларнинг ишига тенг

$$A_{эл}=-\left(\frac{kx_2^2}{2}-\frac{kx_1^2}{2}\right) \tag{2.26}$$

бўлади.

Иш билан бир қаторда қувват ҳам процесснинг энергетик характеристикасидир. Қувват ишнинг вақт бўйича олинган ҳосиласига тенг:

$$N=dA/dt. \tag{2.27}$$

(2.20)-ни назарда тутсак,

$$N=\frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v},$$

ёки

$$N=Fv\cos\alpha \tag{2.28}$$

ни ҳосил қиламиз.

Қувват куч билан тезликнинг скаляр кўпайтмасига тенг.

§ 4. КИНЕТИК ЭНЕРГИЯ

Системанинг кинетик энергияси деб, шу система нуқталари ҳаракатининг тезлигига боғлиқ бўлган энергияга айтилади.

Моддий нуқтага қўйилган куч тенг таъсир этувчисининг иши ифодасидан фойдаланиб, унинг кинетик энергиясини ҳисоблаймиз. (2.22) ва (2.7)-га асосланиб, куч тенг таъсир этувчисининг элементар иши учун бўлган формулани ёзамиз:

$$dA=m\frac{dv}{dt}ds=mdv\frac{ds}{dt}.$$

$v=ds/dt$ бўлгани учун

$$dA=mvdv \quad \text{бўлади.} \tag{2.29}$$

Жисм тезлигининг v_1 дан v_2 гача ўзгариш вақтида куч тенг таъсир этувчисининг бажарган ишини топиш учун (2.29) ифодани интеграллаймиз:

$$A=\int_{v_1}^{v_2} mvdv=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}. \tag{2.30}$$

Иш — бир жисмдан иккинчи жисмга энергия узатилишининг ўлчови бўлгани учун (2.30)-га асосан функция $mv^2/2$ моддий нуқтанинг кинетик энергиясидир, деган хулосага келиш мумкин:

$$E_к=mv^2/2, \tag{2.31}$$

бундан (2.30)-нинг ўрнига

$$A=E_{к2}-E_{к1} \text{ бўлади.} \tag{2.32}$$

Системанинг кинетик энергияси мазкур системани ташкил қилувчи моддий нуқталар кинетик энергияларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$E_к = \sum_{i=1}^{N} m_i\, v_i^2/2.$$

Жисм илгариланма ҳаракат қилганда унинг ҳамма нуқталари бир хил тезликка эга бўлади, шунга кўра, (2.31)-формула бундай ҳол учун ҳам тўғри келади; m деганда бутун жисмнинг массасини тушуниш лозимдир. (2.30) ва (2.32)-ифодалар, жисм кинетик энергиясининг ўзгаришини вужудга келтирган кучлар қандай табиатга эга бўлишидан қатъи назар, ҳосил қилингандир. Бу кучлар электрик, гравитацион, эластик ва ҳ. к. табиатда бўлишлари мумкин. (2.32)-дан жисмга таъсир қилувчи барча кучларнинг бажарган иши мусбат бўлганда жисм кинетик энергиясининг кўпайиб борганлиги, манфий бўлганда эса — камайиб кетганлиги кўриниб турибди.

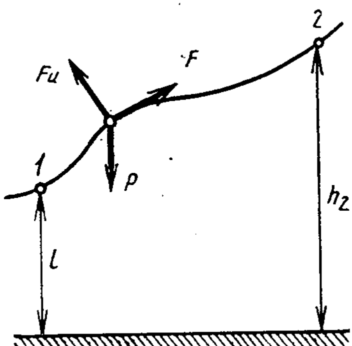
Жисмга қўйилган ҳамма тенг таъсир этувчи кучларнинг элементар иши жисм кинетик энергиясининг элементар ўзгаришига тенг бўлишини фаҳмлаш қийин эмас:

$$dA = dE_к \tag{2.33}$$

Пировардида, кинетик энергиянинг, ҳаракат тезлиги каби, нисбий характерда бўлганлигини эслатамиз. Масалан, поездда ўтирган пассажирнинг кинетик энергияси унинг ҳаракати йўл полотносига ёки вагонга нисбатан қаралишига кўра ҳар хил бўлиб чиқади.

§ 5. ПОТЕНЦИАЛ ЭНЕРГИЯ

Кинетик энергиядан ташқари, механикада потенциал энергия ҳам кўриб чиқилади. *Потенциал* энергия деб жисмларнинг ўзаро таъсирланиши билан белгиланувчи ва уларнинг ўзаро жойланиш вазиятига боғлиқ бўлган энергияга айтилади.



2.7-расм.

Ердан кўтарилган моддий нуқта потенциал энергиясини аниқлаймиз. m массали нуқта, кесими 2.7-расм чизмаси текислигида кўрсатилган сирт бўйича, ерга тортилиш майдонидаги 1-вазиятдан 2-вазиятга текис ҳаракатланиб кўчади, дейлик. Бу кесим моддий нуқта ҳаракатининг траекториясидир. Агар ишқаланиш бўлмаса, унда нуқтага учта куч таъсир этади: сирт томонидан сиртга нормал ҳолда таъсир этувчи куч $\mathbf{F}_н$ (бу кучнинг иши нолга тенг); оғирлик кучи $\mathbf{P}_1$ унинг иши-

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2 \tag{2.34}$$

га тенг; ҳаракатланувчи

жисм томонидан ҳосил бўлувчи тортиш кучи **F**, бу кучнинг ишини A билан белгилаймиз.

Моддий нуқта текис ҳаракатлангани учун унинг кинетик энергияси ўзгармайди ва (2.32)-бўйича ҳамма тенг таъсир этувчи кучларнинг иши нолга тенг бўлади. Бу

$$A_{12}+A=0 \text{ ёки } A=-A_{12} \text{ демакдир.}$$

(2.34)-ни ҳисобга олган ҳолда

$$A=mgh_2-mgh_1 \tag{2.35}$$

ни ёзамиз.

Иш узатилган энергиянинг ўлчови бўлганлигидан ҳаракатланувчи жисм (ички ёнар двигатели, электромотор, одам ва ҳ. к.) энергиясининг ҳисобига моддий нуқтанинг энергияси (2.35)-тенглама бўйича аниқланадиган миқдорча катталашади дейиш мумкин. Моддий нуқтанинг энергияси қандай формада ортди? Бу саволга жавоб бериш учун моддий нуқта билан Ернинг ўзаро вазиятлари ўзгарганлигини эътиборга олиш керак. Бу ҳолда юқорида кўрсатилган жисмларнинг ўзаро жойлашишига боғлиқ бўлган энергия, яъни потенциал энергия ортади. Моддий нуқта, аниқроқ айтилганда, «моддий нуқта — Ер» системаси потенциал энергиясининг ўзгариши тортиш кучининг бажарган ишига тенг. Текширилган мисолда потенциал энергия моддий нуқтага таъсир қилувчи оғирлик кучи билан шартланган, шунинг учун иш туфайли потенциал энергиянинг ўзгаришини айниқса шу куч билан боғлаш табиийдир.

(2.34)-ни бошқача қилиб ёзайлик:

$$A_{12}=-(mgh_2-mgh_1). \tag{2.36}$$

Катталик $E_p=mgh$ни Ер юзидан h баландликка кўтарилган m массали моддий нуқтанинг потенциал энергияси деб айтамиз. Демак, (2.36)-формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A_{12}=-(E_{p2}-E_{p1}), \text{ ёки } A_{12}=-\Delta E_p. \tag{2.37}$$

Тортилиш кучининг бажарган иши жисмлар потенциал энергиясининг тескари ишора билан олинган ўзгаришига* тенг.

Оғирлик кучининг элементар иши потенциал энергиянинг элементар ўзгаришга тенг эканлиги (2.37)-дан кўриниб турибди.

$$dA=-dE_p. \tag{2.38}$$

Бунга ўхшаш мулоҳазаларни эластик деформацияланган жисмлар учун ҳам юритиш мумкин. (2.26)-ифодадан (2.37) ва (2.38)-га ўхшаш формулаларни ўқувчининг ўзига мустақил чиқариб ишонч ҳосил қилишни ҳавола қиламиз, фақат бу ерда сўз эластик кучларнинг иши ва эластик деформация потенциал энергиясининг ўзгариши ҳақида боради.

---

* Бирор миқдорнинг ўзгариши унинг охирги ва бошланғич қийматларининг айирмасига тенг.

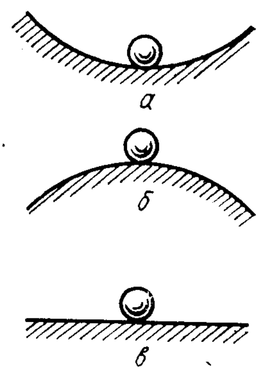
Бироқ эластик кучлар, оғирлик кучлари ва бошқаларнинг ишини белгилаб берадиган катталик сифатидаги потенциал энергиялар айирмасининг физикавий маъноси борлигини кўрсатиб ўтамиз. Шунга кўра, потенциал энергия ноль қийматининг қайси вазиятга, конфигурацияга мансублигининг аҳамияти йўқ. Потенциал энергия ихтиёрий доимийлик аниқлигигача топилади дейишади, чунки потенциал энергиялар айирмаси маъноли бўлади, айирмага эса ихтиёрий доимийлик кирмайди. Масалан, катталик

$$E_p = mgh + \mathrm{const} \text{ ни}$$

Ердан кўтарилган жисмнинг потенциал энергияси дейиш мумкин; бу катталик (2.37) ва (2.38)-формулаларга ҳеч қандай таъсир қилмаган бўлур эди.

Потенциал энергия жисмларнинг ўзаро вазиятларига кўра белгиланувчи энергия, шунинг учун, аслида, битта жисм энергияси бўлмасдан, жисмлар системасининг, моддий нуқталар системаси ва ҳоказоларнинг энергиясидир. Бинобарин, «жисмнинг потенциал энергияси» деган термин шартли маънога эга.

Потенциал энергия консерватив кучларга боғлиқ. *Консерватив кучлар* деганда бажарган ишлари системанинг бошланғич ва охирги ҳолатига кўра аниқланиб, кўчиш траекторияси (йўл) га боғлиқ бўлмаган кучларга айтилади. Бу ҳамма кучлар учун характерли эмас, масалан, ишқаланиш кучларининг иши ҳаракат траекториясига боғлиқ ва турли йўллар учун бир хил бўлмайди.



2.8-расм.

Мувозанат вазиятидан озгина оғиш натижасида система потенциал энергиясининг ўзгариш характери мувозанат турғунлигининг критерияси бўла олади.

Системанинг (ёки жисмнинг) уч хил мувозанати маълум: турғун, нотурғун ва фарқсиз мувозанат. 2.8-расмда чуқурликда (*а*), дўнг юзаси тепасида (*б*) ва горизонтал текисликда (*в*) турган шар учун мос мувозанат турлари кўрсатилган. Жисмнинг потенциал энергияси бўлиши мумкин бўлган барча вазиятлардаги потенциал энергиясига нисбатан энг кам бўлса, турғун мувозанатда эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Фарқсиз мувозанатда жисмнинг потенциал энергияси унинг энг яқин бўлиши мумкин бўлган барча ҳолларидаги потенциал энергиясига тенг бўлади.

§ 6. МЕХАНИКАДА ЭНЕРГИЯНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

Энди фақат консерватив кучлар таъсир этувчи биронта изоляцияланган системада (бундай системага консерватив система дейилади) кинетик ва потенциал энергиянинг ўзгаришини кўриб чиқамиз. Консерватив кучларнинг элементар иши потенциал энергиянинг тескари ишорали қилиб олинган элементар ўзгаришига тенг [(2.38)-формулага қаранг]; иккинчи томондан, системада бошқа кучлар бўлмагани учун худди шу элементар иш кинетик энергиянинг элементар ўзгаришига тенг [(2.33)-га қаранг], шунинг учун

$$dA = dE_к = -dE_р ,$$

ёки

$$dE_к + dE_р = 0, \ d(E_к + E_р) = 0,$$

бундан

$$E_к + E_р = E \quad \text{бўлади;} \tag{2.39}$$

бу ерда E — *тўла механикавий энергия.* Бу тўла механикавий энергия ўзгармас демакдир:

$$E = \text{const.} \tag{2.40}$$

Бу тенглик механикавий энергиянинг сақланиш қонунини ифодалайди: *консерватив системанинг тўла механикавий энергияси ўзгармасдир.* Консерватив системада вужудга келадиган ҳар хил процессларда кинетик энергиянинг ортиши потенциал энергиянинг камайиши билан боғлиқдир ва, аксинча; барча бу ўзгаришларда тўла механикавий энергия ўзгармас бўлиб қолади. Жумладан, эллиптик орбита бўйича айланувчи ер йўлдошининг перигеяга яқинлашганда потенциал энергиясининг камайиши тезлиги ва кинетик энергиясининг ортиши билан бир пайтда бўлади, апогеяга яқинлашгандаги потенциал энергиянинг кўпайиши эса кинетик энергиянинг камайиши билан бир пайтда бўлади. Траекториянинг исталган нуқтасида йўлдошнинг тўла механикавий энергияси бир хилдадир.

Ер шароитларида консерватив системага мисол кўрсатиб бўлмайди, чунки системага доимо ишқаланиш ва қаршилик кучлари таъсир этади. Ўқувчига маълум бўлган кўпдан-кўп мисоллар (маятникнинг тебраниши, жисмларнинг тушиши, шарлар урилишлари ва ҳ. к.) консерватив системага муайян даражада яқинлашишдир, холос.

Механикада масалалар ечиш вақтида энергиянинг сақланиш қонунининг қуйидаги формуласидан фойдаланиш қулайдир.

$$\Delta E_к = -\Delta E_р \text{ , ёки } E_{к1} + E_{р1} = E_{к2} + E_{р2}. \tag{2.41}$$

Бу ерда $E_{к1}$ ва $E_{р1}$ — жисмнинг (системанинг) бошланғич вазиятидаги кинетик ва потенциал энергиялари; $E_{к2}$ ва $E_{р2}$ — жисмнинг (системанинг) охирги вазиятлари учун.

Механикадаги энергиянинг сақланиш қонуни, табиатнинг асосий қонунларидан бири бўлган умумийроқ энергия сақланиш ва айланиш қонунининг хусусий бир ҳолидир.

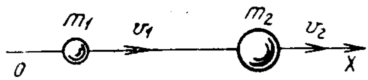
§ 7. ШАРЛАРНИНГ УРИЛИШИ (ЗАРБИ)

Импульс ва энергия сақланиш қонунларининг татбиқ қилинишини кўрсатувчи мисол сифатида шарлар урилишини кўриб чиқамиз. Бу мисол молекуляр, атом ва ядро физикаси учун айниқса қизиқарлидир, чунки жуда кўп процессларда зарралар тўқнашишлари ҳал қилувчи роль ўйнайди.

Энг аввал шарлар массалари марказларининг бир тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланишлари натижасида рўй берувчи марказий урилиш (зарб) устида тўхтаб ўтайлик.

1. *Абсолют ноэластик урилиш.* Бу жисмларнинг шундай қисқа муддатли ўзаро бир-бирларига таъсир кўрсатишларини, улар шу таъсирланиш процессида эгаллаган шаклларини сақлаб қолади. Ана шундай хоссага эга бўлган жисмлар абсолют ноэластик жисм дейилади. Абсолют ноэластик жисм, шунингдек, абсолют ноэластик урилиш ҳам, абстракт тушунчалардир. Турли пластик жисмлар, масалан, қўрғошин, лой, пластилин ва бошқа жисмлар урилиш натижасида эгаллаган шаклларини тўла сақлаб қолмайди.

Абсолют ноэластик урилишда шарлар тўқнашиш пайтида уларнинг деформацияланиши бошланади, шакли ўзгаради. Қарама-қарши йўналишда шарларга таъсир этган кучлар шарлар тезлигини, то улар тенглашгунча ўзгартади. Шундан кейин шарларнинг шакллари ўзгармаганлиги учун уларнинг бир-бирига таъсири йўқолади ва уларнинг бир хил тезлик билан ҳаракатни давом эттириши табиий.



2.9-расм.

Массаси m_1 бўлган шарлардан бири массаси m_2 бўлган иккинчи шарни қувиб етсин (2.9-расм). Ташқи кучларнинг (оғирлик кучи ва таянч реакцияси) OX ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлгани учун импульснинг шу ўқдаги проекцияси ўзгармай қолади [(2.15)-га қаранг].

$$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v \quad \text{ни ёзиш мумкин;} \qquad (2.42)$$

бу ерда v_1 ва v_2 — ўзаро таъсирланувчи шарларнинг бир-бирлари билан урилгунларигача бўлган тезликлари; v — уларнинг урилишдан кейинги тезлиги.

Бундан

$$v=(m_1v_1+m_2v_2)/(m_1+m_2). \qquad (2.43)$$

Умумий ҳолда тезликнинг йўналиши унинг ишораси билан аниқланади. Тезлик OX ўқи бўйича йўналган бўлса мусбат, қарама-қарши йўналган бўлса манфий бўлади.

Хусусий ҳолда шарлар массалари тенг бўлганда (2.43)-дан

$$v=(v_1+v_2)/2 \quad \text{ни оламиз.}$$

Кейинги икки формуладан фойдаланиб, қарама-қарши ҳаракатланган шарлар тўқнашганларидан кейин биргалашиб катта импульсли шарнинг ҳаракати томон ҳаракатини давом эттиришларини, хусусан, импульсларининг модуллари тенг бўлганида шарларнинг тўхтаб қолишини ўқувчининг ўзи мустақил ҳолда исботлаб кўриши фойдалидир. Агар шарлар бир томонга ҳаракатланиб турган бўлсалар, у ҳолда урилишдан кейин улар худди шу томонга тезлиги бир шарнинг тезлигидан каттароқ ва иккинчисининг тезлигидан камроқ ҳаракатда давом этадилар.

Агар тинч ҳолатдаги бир жисм ($v_2=0$) бошқа бир жисмдан анча салмоқли, $m_2 \gg m_1$ бўлса, у ҳолда тўқнашган жисм абсолют ноэластик урилишдан кейин тўхтаб қолади:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 v_1}{m_2} \approx 0;$$

бу вақтда v_1 ни унча катта деб ҳисобламаймиз, бу ҳол деворга урилишга мос келади.

Абсолют ноэластик урилишда шарларнинг механик энергияси сақланмайди, чунки системада пластик деформация кучлари таъсир этади ва бошланғич умумий кинетик энергиянинг камайиши ҳисобига шарларнинг исиши вужудга келади.

2. *Абсолют эластик урилиш.* Бу жисмларнинг шундай қисқа муддатли ўзаро бир-бирларига таъсир кўрсатишларики, улар бу кўрсатган таъсирларидан кейин аввалги шаклларига тўла қайтадилар. Деформациядан сўнг аввалги формаларини тўла қайтара оладиган жисмларга абсолют эластик жисмлар дейилади. Абсолют эластик жисм тушунчаси абстракт тушунчадир; ҳатто фил суяги, пўлат каби материаллар ҳам фақат тақрибан абсолют эластик деб қабул қилиниши мумкин.

Жисмларнинг абсолют эластик урилишлари икки фазадан иборат. Биринчи фаза — шарлар тўқнашишларида рўй берадиган жисмлар деформацияси. Бундай ўзаро кўрсатилган таъсирларда шарларнинг умумий кинетик энергияси қисман ёки тўла эластик деформацияларнинг потенциал энергиясига айланади. Иккинчи фаза — шарларнинг аввалги формасининг қайта тикланиши; бу фаза даврида эластик деформациялар потенциал энергияси шарлар кинетик энергиясига айланади. Шарларнинг урилишдан кейинги умумий кинетик энергияси урилишдан илгариги кинетик энергияга тенг бўлади. Урилиш биринчи фазасининг охирида жисмлар бир хил тезликка эга бўладилар, сўнг улар бир-бирларидан айриладилар ва турлича ҳаракат қиладилар.

Юқорида баён этилганларга кўра, абсолют эластик урилишга механикавий энергиянинг сақланиш қонунини татбиқ этиш мумкин.

$$m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 = m_1 u_1^2/2 + m_2 u_2^2/2, \qquad (2.44)$$

бу ерда m_1 ва m_2 ўзаро таъсир этувчи шарлар массалари, v, v_2 ва u_1, u_2 уларнинг урилишдан аввалги ва кейинги тезликлари. Абсолют ноэластик урилишлар учун баён этилган сабабларга кўра, бу ҳол учун импульсни сақланиш қонунини ҳам татбиқ этиш мумкин:

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2. \qquad (2.45)$$

(2.44) ва (2.45)-тенгламаларни бирга ечсак,

$$u_1=[(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2]/(m_1+m_2), \qquad (2.46)$$

$$u_2=[(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1]/\ (m_1+m_2) \qquad (2.47)$$

га эга бўламиз.

Баъзи хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Массалари бир хил ($m_1=m_2=m$) бўлган шарларнинг ўзаро урилишлари (2.46) ва (2.47)-формулалардан

$$u_1=v_2,\ u_2=v_1 \qquad (2.48)$$

ни оламиз. Бундай ҳолда шарлар тезликларини алмаштиради дейишади: урилишдан кейин биринчи шарнинг тезлиги иккинчи шарнинг урилишгача бўлган тезлигига тенг бўлади, иккинчи шарнинг тезлиги эса биринчининг урилишигача бўлган тезлигига тенг бўлади.

2. Массив деворга ($m_2 \gg m_1$) урилиш. (2.46) ва (2.47)-формулаларга асосан, v_1 ни кичик ҳисоблаб қуйидаги тақрибий тенгликларни оламиз:

$$u_1\approx-v_1+2v_2,\ u_2\approx v_2+2v_1\ \frac{m_1}{m_2}\approx v_2; \qquad (2.49)$$

Бунда v_1 ни кичик деб ҳисоблаймиз. Бу формулалардан кўринишича массив жисмнинг (иккинчи) тезлиги урилишдан кейин озгина ўзгарар экан. Агар эластик шар тинч турган эластик деворга урилса, масалан, ҳаракатланмай турган идиш ичидаги газ молекулалари унинг деворларига урилганидек, у ҳолда (2.49)-дан

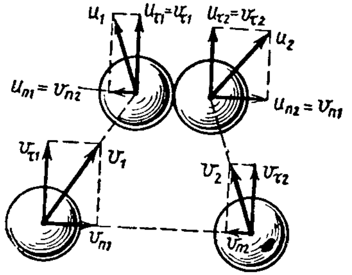
$$u_1=-v_1,\ u_2=0 \text{ ни оламиз.} \qquad (2.50)$$

яъни шарнинг урилишдан кейинги тезлиги урилишдан аввалги тезлигига тенг бўлиб, қарама-қарши томонга йўналган бўлади. Шар энергиясини деворга бермайди, аммо унга таъсир кўрсатади. Молекулалар мисолида бундай таъсир молекуланинг идиш деворига урилишида вужудга келадиган босим сифатида намоён бўлади.

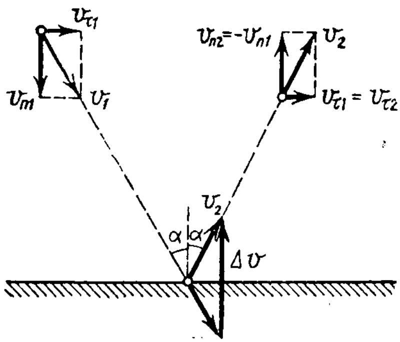
Номарказий (қия) абсолют эластик урилиш бўлган ҳолда шарлар тезликларини уларнинг урилиш пайтида массалари марказларини бирлаштирувчи чизиқ йўналиши бўйича v_n ва унга перпендикуляр йўналишда v_τ га ажратиш мумкин. Биринчи ташкил этувчиларнинг урилиш вақтида ўзгаришини (2.46) ва (2.47)-тенгламалар ёрдамида аниқлаш мумкин. Тезликларнинг иккинчи ташкил этувчилари ўзгармайди, чунки текис силлиқ шарлар урилма йўналишларда бир-бирига таъсир этмайдилар. Ўзаро таъсирланиш натижасида, шарлар муайян бурчак остида учиб кетади.

Шундай номарказий урилиш 2.10-расмда кўрсатилган: бу ерда шарлар массаси бир хил ва улар (2.48)-формулага мувофиқ, v_n ташкил этувчилари билан «алмашаётирлар».

Массаси m бўлган молекуланинг деворга қия эластик урилиши (2.11-расм) молекуляр физика учун қизиқарлидир. Бу ҳолда тезликнинг деворга нисбатан нормал ташкил этувчиси ўз қиймати



2.10-расм.



2.11-расм.

тини сақлаб қолади, аммо унинг йўналиши қарама-қаршисига ўзгаради [(2.50)-формулага қаранг)]. Тангенциал ташкил этувчиси ўзгармайди, шунинг учун тушиш бурчаги қайтиш бурчагига тенг бўлади. Урилиш вақтида шар тезлигининг ўзгариши $\Delta\mathbf{v}$ ни топамиз (2.11-расмга қаранг):

$$\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2+(-\mathbf{v}_1).$$

$v_1=v_2=v$ эканини ҳисобга олган ҳолда тригонометрик муносабатлардан фойдаланиб, $|\Delta\mathbf{v}|=2v\cos\alpha$ бўлганини кўрсатиш қийин эмас. Деворга эластик урилган вақтда молекула импульси ўзгаришининг сон қиймати $|\Delta\mathbf{p}|=2mv\cos\alpha$ га тенг. Деворнинг импульси ҳам худди шунчалик ўзгаради.

3. *Реал жисмларнинг урилиши.* Абсолют эластик ва абсолют ноэластик урилишлар — булар идеал чегаравий ҳоллардир. Реал жисмлар абсолют эластик билан абсолют ноэластик жисмлар ўртасида ётган жисмлардир, шунинг учун реал жисмлар бир-бирлари билан тўқнашганда ҳамиша ҳам эластик, ҳам қолдиқ деформациялар мавжуд бўлади.

(2.46) ва (2.47)-дан абсолют эластик урилишдан кейин ва олдин шарлар нисбий тезликлари орасида бўлган муносабатни олиш мумкин: $u_1-u_2=-(v_1-v_2)$. Абсолют ноэластик урилишда $u_1-u_2=0$. Шунинг учун қисман ноэластик бўлган урилишдан кейинги нисбий тезлиги уларнинг урилишдан аввалги нисбий тезлигининг фақат муайян қисмига тенг бўлишини тасаввур этиш табиийдир:

$$u_1-u_2=-k\,(v_1-v_2), \qquad \textbf{(2.51)}$$

бу ерда k — урилиш вақтида нисбий тезликнинг *тикланиш коэффициенти*, $0\leqslant k\leqslant 1$; $k=0$ абсолют ноэластик урилишга, $k=1$ — абсолют эластик урилишга мосдир. Пўлат шарлар урилишида $k=0{,}56$, фил суягидан ясалган шарлар учун $k=0{,}89$; қўрғошин шарлар учун k нолга яқин бўлади. Нисбий тезликнинг тикланиш коэффициенти урилувчи жисмларнинг шаклига боғлиқ.

III БОБ

АЙЛАНМА ҲАРАКАТ МЕХАНИКАСИ

Мураккаб ҳаракатларни, масалан, одам танаси ҳаракатини (юриш, чопиш, сакраш ва ҳ. к.) кузатганда, унинг ҳамма нуқталари ҳаракатини батафсил тасвирлаш жуда қийин ёки ҳеч мумкин бўлмагандек кўринади. Бироқ бундай ҳаракатларни анализ қилиш натижасида уларнинг анча содда — илгариланма ва айланма ҳаракатлардан иборат эканлигини кўриш мумкин. Мазкур бобда айланма ҳаракат, асосан, абсолют қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланиши мисолида кўриб чиқилади.

§ 1. АБСОЛЮТ ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ КИНЕМАТИКАСИ

Ораларидаги масофалар ўзгармай қоладиган моддий нуқталар системаси *абсолют қаттиқ жисм* дейилади. Бу тушунча абстрактдир, ҳақиқатда абсолют қаттиқ жисм йўқ, чунки ҳамма жисмлар деформацияланиш қобилиятига эга.

Абсолют қаттиқ жисм айланма ҳаракатнинг энг содда кўриниши — *қўзғалмас ўққа нисбатан айланишдир.* Бу шундай ҳаракатки, унда жисм нуқталари, марказлари тўғри чизиқда ётувчи айланалар бўйлаб ҳаракатланади. Бу тўғри чизиқ айланиш ўқи деб айтилади.

Маълумки, баъзи ҳолларда жисм ҳаракатини ифодалаш (характеристика бериш) учун ундаги барча нуқталар ҳаракатини кўрсатиш шарт эмас; масалан, илгариланма ҳаракатда жисмнинг исталган битта нуқтасининг ҳаракатини кўрсатиш кифоя. Ўқ атрофида бўлаётган айланма ҳаракатда жисмнинг нуқталари турли траекториялар бўйича ҳаракатланади, лекин барча нуқталар ва жисмнинг ўзи бир вақтда бир хил бурчакка бурилади. Айланишни ифодалаш (характеристика берищ) учун ўққа перпендикуляр бўлган текисликнинг ихтиёрий i нуқтасига радиус-вектор $\mathbf{r}_i$ ни ўтказамиз. Радиус-векторнинг бурилиш α бурчаги билан биророрта танлаб олинган OX йўналишга нисбатан боғланиши қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланишининг тенгламасидир:

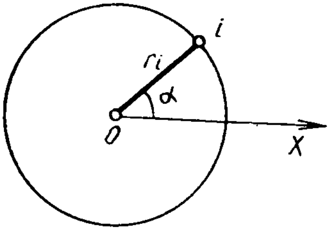
$$\alpha = f(t). \tag{3.1}$$

Жисм айланишининг тезлиги унинг бурчагий тезлиги билан характерланади. Бу тезлик радиус-вектор бурилиш бурчагининг вақт бўйича олинган ҳосиласига тенг:

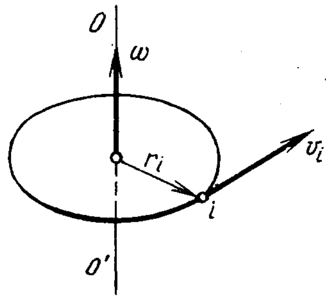
$$\omega = d\alpha/dt. \tag{3.2}$$

Бурчагий тезлик айланиш ўқи бўйича йўналган вектордир; унинг айланиш йўналиши ўнг винт қоидаси билан аниқланади

(3.2-расм). Бурчагий тезлик вектори куч ва тезлик векторларидан шундай фарқланадики, у сирпанувчи вектордир: унинг маълум қўйилган бир нуқтаси йўқ, у айланиш ўқининг исталган нуқтасига қўйилиши мумкин. Шундай қилиб, вектор ω нинг берилиши



3.1-расм.



3.2-расм.

айланиш ўқининг вазиятини, айланиш йўналишини ва бурчагий тезликнинг катталигини кўрсатади.

Бурчагий тезликнинг ўзгариш тезлиги *бурчагий тезланиш* билан характерланади. Бурчагий тезланиш бурчагий тезликнинг вақт бўйича олинган ҳосиласидир:

$$\varepsilon = d\omega/dt, \tag{3.3}$$

ёки вектор формасида ёзилганда:

$$\varepsilon = d\omega/dt \tag{3.4}$$

Бурчагий тезланиш векторининг йўналишини бурчагий тезлик $d\omega$ нинг элементар, жуда кичик ўзгаришига мос келиши (3.4)-дан кўриниб турибди: тезланишли айланишда бурчагий тезланишнинг йўналиши тезлик йўналиши билан бир хил бўлиб, секинланувчи айланишда эса — қарама-қарши йўналган бўлади. Абсолют қаттиқ жисмдаги барча нуқталарнинг бурчагий силжишлари бир хил бўлгани учун, (3.2) ва (3.3)-ларга мувофиқ, жисмнинг ҳамма нуқталари бир вақтда ҳам бирдай бурчагий тезликка, ҳам бирдай бурчагий тезланишга эга бўладилар. Турли нуқталар учун — силжиш, тезлик, тезланиш — чизиғий характеристикалар турличадир. Чизиғий ва бурчагий характеристикалар орасидаги боғланишни кўрсатамиз; r_i радиусли айлана бўйича ҳаракатланувчи i нуқта учун бу боғланиш мустақил чиқарилиши мумкин:

$$\Delta s_i = r_i\,\Delta\alpha;\quad v_i = r_i\,\omega;$$

$$a_{ni} = \frac{v_i^2}{r_i} = r_i\,\omega^2;\quad a_{\tau i} = r_i\,\varepsilon;\quad a_i = r_i\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Пировардида тегишли ифодаларни интеграллаш йўли билан топилган қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида қилган айланма ҳаракати кинематикасининг формулаларини келтирамиз: текис айланма ҳаракат тенгламаси [(3.2)-ни қаранг)]

$$\alpha=\omega t+\alpha_o \ (\alpha_o \text{ — бурчакнинг бошланғич қиймати}); \qquad (3.5)$$

текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда бурчагий тезликнинг вақтга боғлиқлиги [(3.3)-ни қаранг)]

$$\omega=\varepsilon t+\omega_o \ (\omega_o \text{ — бошланғич бурчагий тезлик}); \qquad (3.6)$$

текис ўзгарувчан айланма ҳаракат тенгламаси [(3.1)-ни ва (3.6)-ни қаранг].

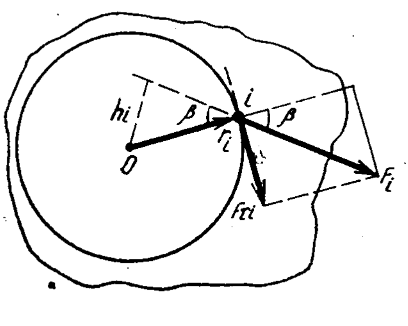
$$\alpha=(\varepsilon t^2/2)+\omega_o t+\alpha_o \qquad (3.7)$$

Бу формулаларни илгариланма ҳаракат учун ёзилган шунга ўхшаш боғланишлар билан солиштириб кўриш фойдалидир.

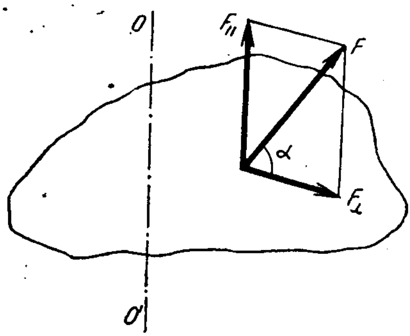
§ 2. АЙЛАНМА ҲАРАКАТ ДИНАМИКАСИНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ ВА ТЕНГЛАМАСИ

1. Куч моменти (айлантирувчи момент). Фараз қилайлик, қаттиқ жисмнинг бирор i нуқтасига айланиш ўқига перпендикуляр текисликда ётувчи куч қўйилган бўлсин (3.3-расм). Бу кучнинг айланиш ўқига нисбатан *моменти* M_i деб қуйидаги векторавий кўпайтмага айтилади.

$$\mathbf{M}_i=\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i\,. \qquad (3.8)$$



3.3-расм.



3.4-расм.

Уни кенгайтириб

$$M_i=F_i\,r_i\sin\beta \quad \text{деб ёзиш мумкин,} \qquad (3.9)$$

бу ерда β—$\mathbf{r}_i$ ва $\mathbf{F}_i$ векторлари орасидаги бурчак. Кучнинг елкаси $h_i=r_i\sin\beta$ га тенг бўлганлигидан (3.3-расмга қаранг).

$$M_i=F_i\,h_i \quad \text{деб ёза оламиз.} \qquad (3.10)$$

Агар куч айланиш текислигига α бурчаги остида таъсир қилса (3.4-расмга қаранг), уни бири айланиш ўқига перпендикуляр бўлган текисликда ётувчи, иккинчиси шу ўққа параллель бўлган икки ташкил этувчига ажратиш мумкин. Сўнгги ташкил этувчи жисмнинг айланишига таъсир этмайди; реал шароитда у подшипниккагина таъсир этади. Келажакда фақат айланиш ўқига перпендикуляр бўлган текисликда ётувчи кучлар кўриб чиқилади.

2. Айланма ҳаракатдаги бажарилувчи иш. Айтайлик, куч F_i таъсири остида (3.3-расмга қаранг) жисм жуда кичик бурчак $d\alpha$ га бурилсин. $dA_i = F_{\tau i} ds$ [(2.22)-ни қаранг] ва $F_{\tau i} = F_i \sin\beta$ (3.3-расмни қаранг) бўлгани учун

$$dA_i = F_i\, ds_i \sin\beta. \qquad (3.11)$$

$ds_i = r_i\, d\alpha$ ва шунингдек (3.9)-муносабатни назарда тутсак, (3.11)-дан

$$dA_i = F_i\, r_i \sin\beta d\alpha = M_i\, d\alpha \qquad (3.12)$$

ни оламиз.

Шундай қилиб, айланма ҳаракатда кучнинг бажарган *элементар иши куч* моменти билан жисм бурилиш элементар бурчагининг кўпайтмасига тенг экан.

Агар жисмга бир неча куч таъсир этса, унда қўйилган барча кучлар тенг таъсир этувчисининг бажарган элементар иши (3.12)-га ўхшаш аниқланади;

$$dA = M d\alpha, \qquad (3.13)$$

бу ерда M — жисмга таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг жамланиш моменти.

Қаттиқ жисм нуқталари орасида таъсир қилувчи барча ички кучларнинг бажарган жами ишининг нолга тенг эканлигини мустақил исботлаб кўришни ўқувчиларнинг ўзларига топширамиз.

Агар жисмнинг бурилиши вақтида радиус-векторнинг вазияти α_1 дан α_2 гача ўзгарган бўлса, унда ташқи кучларнинг бажарган иши (3.13)-ифодани интеграллаш натижасида топилиши мумкин:

$$A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M d\alpha. \qquad (3.14)$$

3. Жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти. Илгариланма ҳаракат вақтида жисмлар инертлигининг ўлчови массадир. Айланма ҳаракат вақтида жисмлар инертлиги фақат массага эмас, унинг ўққа нисбатан фазода тақсимланишига ҳам боғлиқ. Айланиш вақтида жисм инертлигининг ўлчови, *жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти* деб аталувчи, физикавий катталик билан характерланади.

Аввало, айланиш ўқига нисбатан *моддий нуқтанинг инерция* *моменти* деб нуқта массаси билан унинг ўққача бўлган масофаси квадратининг кўпайтмасига айтилишини кўрсатамиз:

$$J_i = m_i\, r_i^2 \qquad (3.15)$$

Ўққа нисбатан *жисмнинг инерция моменти* деб, жисмни ташкил этган моддий нуқталар инерция моментларининг йиғиндисига айтилади:

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i\, r_i^2 \qquad (3.16)$$

Яхлит жисмнинг инерция моментини одатда

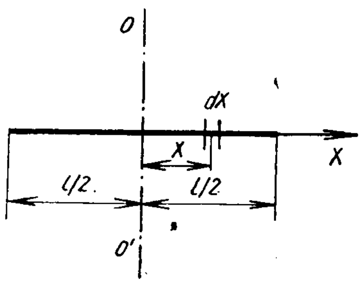
$$J = \int\limits_{\substack{\text{бутун}\\ \text{жисм бўйича}}} r^2\, dm \qquad (3.17)$$

ифодани интеграллаш орқали аниқлайдилар.

Мисол сифатида узунлиги l, массаси m бўлган б и р ж и н с л и и н г и ч к а с т е р ж е н ь (3.5-расм) инерция моменти формуласини чиқарамиз. Стерженнинг ўқ OO' дан x масофада ётган, массаси dm ва узунлиги dx бўлган маълум даражада кичик участкасини олайлик. Олган участкамиз кичик бўлганлигидан уни моддий нуқта деб ҳисоблаш мумкин ва, (3.15)-га асосан, унинг инерция моменти

$$dJ = x^2 dm \qquad (3.18)$$

га тенг.



3.5-расм.

Элементар участканинг массаси стержень узунлик бирлигидаги масса m/l билан элементар участка узунлиги кўпайтмасига тенг:

$$dm = (m/l)dx.$$

dm нинг бу қийматини (3.18)-га қўйсак,

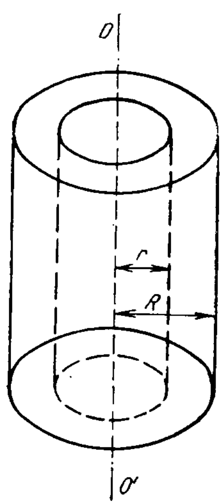
$$dJ = (m/l)x^2 dx \qquad (3.19)$$

ни оламиз,

Бутун стерженнинг инерция моментини топиш учун (3.19)-ифодани бутун стержень бўйича, яъни $-l/2$ дан $+l/2$ чегараси ичида интеграллаш керак:

$$J = \frac{m}{l}\int\limits_{-l/2}^{+l/2} x^2 dx = \frac{m}{l}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{m}{3l}\left(\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right) = \frac{ml^2}{12}. \qquad (3.20)$$

Массаси m бўлган турли симметрик жисмлар учун инерция моментларининг ифодаларини келтирамиз. Цилиндрнинг геометрик ўқи билан устма-уст тушган ўқ OO' га (3.6-расм) нисбатан ички радиуси r ва ташқи радиуси R бўлган бир жинсли ковак цилиндр (гардиш) нинг инерция моменти:



3.6-расм.

$$J = m(r^2 + R^2)/2. \qquad (3.21)$$

Юпқа деворли цилиндр ($R \approx r$) ёки ҳалқа учун (3.21)-дан

$$J = mR^2 \qquad (3.22)$$

га эга бўламиз.

Яхлит бир жинсли цилиндр ($r=0$) ёки диск учун (3.21)-дан

$$J = mR^2/2 \qquad (3.23)$$

га эга бўламиз.

Марказидан ўтувчи ўққа нисбатан бир жинсли шарнинг инерция моменти

$$J=(2/5)mR^2 \qquad (3.24)$$

га тенг.

Асос текислигига перпендикуляр ҳолда марказдан ўтувчи ўқ OO' га нисбатан (3.7-расмга қаранг) тўғри бурчакли параллелепипеднинг инерция моменти

$$J = \frac{m}{12}(a^2+b^2) \qquad (3.25)$$

га тенг.

Келтирилган мисолларнинг ҳаммасида айланиш ўқи жисмлар массаларининг марказидан ўтади. Массалар марказидан ўтмаган ўққа нисбатан жисмнинг инерция моментини аниқлашга доир масалалар ечилганда Штейнер теоремасидан фойдаланиш мумкин. Бу теоремага мувофиқ (3.8-расм) бирор ўқ $O''O''$ га нисбатан жисмнинг инерция моменти J, жисмнинг массалар марказидан ўтувчи параллель ўқ $O'O'$ га нисбатан бўлган инерция моменти J_0 билан жисм массаси ва шу икки параллель ўқ орасидаги масофа d квадрати кўпайтмасининг йиғиндисига тенг.

$$J = J_0 + md^2 \qquad (3.26)$$

СИ системасида инерция моментининг бирлиги 1 кг·м².

4. Импульс моменти (механикавий момент). Моддий нуқта импульси p_i билан унинг айланиш ўқигача бўлган

масофаси кўпайтмасига *моддий нуқта импульсининг моменти* дейилади:

$$L_i = p_i r_i = m_i v_i r_i \,, \qquad (3.27)$$

ёки $v_i = r_i\omega$ ва $J_i = m_i r_i^2$ эканлиги ҳисобга олинса,

$$L_i = m_i \omega r_i r_i = m_i r_i^2 \omega = J_i \, \omega \qquad (3.28)$$

Ўққа нисбатан жисм *импульсининг моменти* мазкур жисмни ташкил этган нуқталар импульслари моментларининг йиғиндисига тенг:

$$L = \sum_{i=1}^{N} J_i \, \omega \qquad (3.29)$$

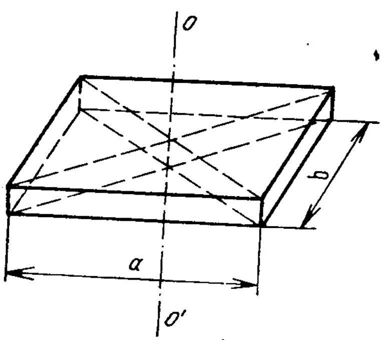
Қаттиқ жисмнинг ҳамма нуқталари бир хилдаги бурчагий тезликка эга бўлганлари учун (3.29)-дан.

$$L = \omega \sum_{i=1}^{N} J_i = J\omega \qquad (3.30)$$

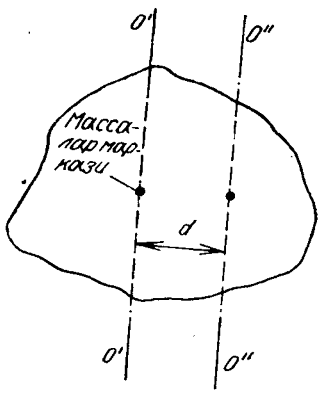
ни ҳосил қиламиз

(J — жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти ёки векторий шаклда

$$L = J\omega \qquad (3.31)$$



3.7-расм.



3.8-расм.

Бундан импульс моментининг вектори қаттиқ жисм бурчагий тезлигининг йўналишига мос бўлганлиги келиб чиқади.

СИ системасида импульс моментининг бирлиги 1 кг·м²·с⁻¹.

(3.31)-формулани илгариланма ҳаракатнинг импульси формуласи билан солиштириб кўриш фойдалидир.

5. Айланувчи жисмнинг кинетик энергияси. Айланиб турган жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айрим нуқталари кинетик энергияларининг йиғиндисидан ташкил топади. Қаттиқ жисм учун қуйидаги алмаштиришларни бажариш мумкин:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (3.32)$$

(3.32)-ни илгариланма ҳаракатда унга ўхшаш ифода билан солиштириб кўриш фойдалидир.

(3.32)-ни дифференциялаcак, айланма ҳаракатда кинетик энергиянинг элементар ўзгаришини топамиз:

$$dE_к = J\omega d\omega. \quad (3.33)$$

6. Айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламаси. Айтайлик, ташқи кучлар таъсиридаги қаттиқ жисм етарлича кичик бурчак $d\alpha$ га бурилган бўлсин. Бундай бурилишда барча ташқи кучлар бажарган элементар ишни (3.13) кинетик энергиянинг элементар ўзгаришига (3.33) тенглаштирамиз:

$$Md\alpha = J\omega d\omega.$$

Бундан

$$M\frac{d\alpha}{dt} = J_\omega \frac{d\omega}{dt}$$

ёзиш мумкин. (3.2)-ни ҳисобга олиб, тенгликни ω га қисқартирсак,

$$M = J\frac{d\omega}{dt} \quad (3.34)$$

ни оламиз, бундан

$$\varepsilon = \frac{M}{J}$$

ёки векторий шаклда

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{M}}{J} \quad (3.36)$$

Ана шунинг ўзи *айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламасидир*. (3.35)-дан кўриниб турибдики, инерция моменти жисмнинг инерцион хоссаларини характерлайди: ташқи кучлар таъсир этганда жисмнинг инерция моменти қанча кичик бўлса, унинг бурчагий тезланиши шунча катта бўлади.

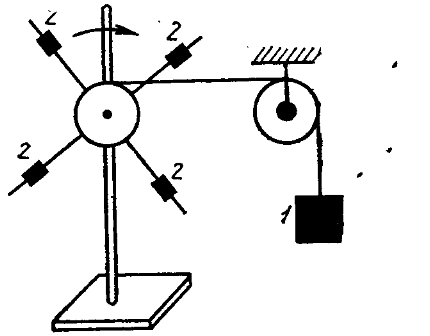
Илгариланма ҳаракат учун Ньютон қонуни қандай ролни ўйнаса, айланма ҳаракат учун асосий тенглама ҳам шундай ролни ўйнайди. Бу тенгламага кирувчи физикавий катталиклар мос равишда кучга, массага ва тезланишга ўхшашдирлар.

(3.34)-дан

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt} = \frac{dL}{dt} \qquad (3.37)$$

келиб чиқади.
Жисм импульси моментидан вақт бўйича олинган ҳосиласи барча ташқи кучлар моментининг таъсир этувчисига тенг.

Асосий тенгламани 3.9-расмда кўрсатилган асбоб ёрдами билан намойиш қилиш мумкин. Блок орқали ўтказилган ипга осилган юк 1 таъсирида крестовина тезланишли айланма ҳаракат қилади. Махсус юкчалар 2 ни айланиш ўқидан турли масофаларга силжитиб, крестовинанинг инерция моментини ўзгартиш мумкин. Юкларни, яъни кучлар моментини ва инерция моментини ўзгартириб, куч моменти ортганда ёки инерция моменти камайганда бурчагий тезланишнинг ортишига ишонч ҳосил қилиш мумкин.



3.9-расм.

§ 3. ИМПУЛЬС МОМЕНТИНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

Айланма ҳаракатнинг, ташқи кучлар жамий моменти нолга тенг бўлган хусусий ҳолни кўриб чиқамиз. (3.42)-дан кўринишича $M=0$ бўлганда $dL/dt=0$ бўлади, бундан

$$L = \text{const} \text{ ёки } J\omega = \text{const}. \qquad (3.38)$$

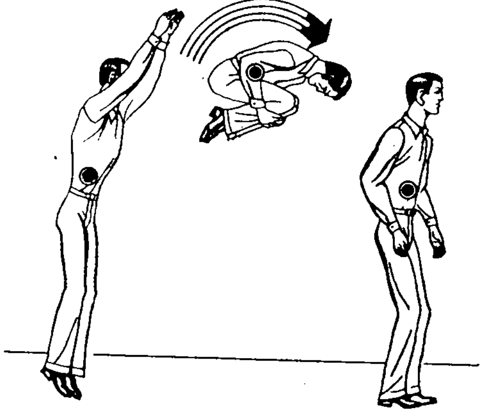
Бу ҳол импульс моментининг сақланиш қонуни номи билан маълум: *жисмга таъсир этувчи барча ташқи кучлар жамий моменти нолга тенг бўлса, бу жисм импульсининг моменти ўзгармай қолади.*

Импульс моментининг сақланиш қонунини фақат абсолют қаттиқ жисмлар учун ҳаққоний эканлигини эслатиб ўтамиз. Бу қонуннинг энг қизиқарли суратда қўлланилиши жисмлар системасининг умумий ўқ атрофида айланишлари билан боғлиқдир. Бу ҳолда импульс моменти ва бурчагий тезликларнинг векторий характердаликларини ҳисобга олиш зарур. Жумладан, умумий ўқ атрофида айланувчи N та жисмдан иборат система учун импульс моментининг сақланиш қонунини қуйидаги формада ёзиш мумкин.

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} J_i \omega_i \qquad (3.39)$$

Бу қонунни тасвирловчи баъзи мисолларни кўриб чиқамиз.

Сальто қилувчи гимнастикачи (3.10-расм) сакрашининг бошланғич фазасида тиззаларини букиб, уларни кўкрагига қисади, бунда у инерция моментини камайтиради ва горизонтал ўқ атрофида айланишнинг бурчагий тезлигини оширади. Сакрашнинг



3.10-расм.

охирида гавда тўғриланади, инерция моменти катталашади, бурчагий тезлик камаяди. Вертикал ўқ атрофида айланувчи фигурист (3.11-расм) айланиш бошида қўлларини гавдасига яқинлаштиради, бу билан у инерция моментини камайтиради, бурчагий тезлигини эса оширади. Айланиш охирида процесс аксинча бўлади: қўллар ёйилганда инерция моменти ортади, бурчагий тезлик — камаяди, бу эса осонгина тўхташ имконини беради.

Худди шундай ҳодисани Жуковский курсисида ҳам намойиш қилиш мумкин. Бу курси, вертикал ўқ атрофида кам ишқаланиш билан айланувчи, енгил, горизонтал бир платформадир. Қўллар вазиятининг ўзгариши билан инерция моменти ва бурчагий тезлик ўзгаради (3.12-расм), импульс моменти эса ўзгармайди. Намойиш қилиш эффектини кучайтириш мақсадида одам қўлларига гантеллар берилади. Жуковский курсисида импульс моменти сақланиш қонунининг векторли характерда эканини кўрсатиш мумкин. Ҳаракатсиз курси устида турган экспериментатор ўз ёрдамчиси қўлидан вертикал ўқ атрофида айланувчи велосипед ғилдирагини олади (3.13-расм, чапда). Бу ҳолда «одам ва платформа — ғилдирак» системаси импульсининг моменти фақат ғилдирак импульсининг моменти орқали аниқланади:

$$L = J_0 \cdot 0 + J_{\text{ғ}}\,\omega_{\text{ғ}} = J_{\text{ғ}}\,\omega_{\text{ғ}}\,. \tag{3.40}$$

бу ерда J_0 — одам ва платформа инерция моменти $J_{\text{ғ}}$ ва $\omega_{\text{ғ}}$ — ғилдиракнинг инерция моменти ва бурчагий тезлиги. Вертикал ўққа нисбатан ташқи кучлар моменти нолга тенг бўлгани учун L сақланади (L-const).

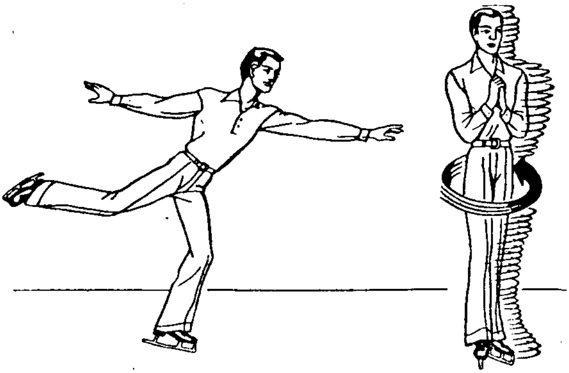
Агар экспериментатор ғилдиракнинг айланиш ўқини 180° га бурса (3.13-расм, ўнгда), у ҳолда ғилдирак импульсининг моменти аввалги йўналишига қарама-қарши йўналади ва $-J_{\text{ғ}}\,\omega_{\text{ғ}}$ га тенг бўлади. Ғилдирак импульси моментининг вектори ўзгариб, система импульсининг моменти сақлангани учун, одам ва платформа импульси моментининг ўзгариши муқаррар, у энди нолга тенг бўлмайди*. Бу ҳолда система импульсининг моменти

* Ғилдирак ўқининг платформа айланиш ўқига бир оз тўғри келмаганлигини эътиборга олмаса бўлади.

$$L = J_0\omega_0 + (-J_F\,\omega_F) = J_0\omega_0 - J_F\,\omega_F \qquad (3.41)$$

бўлади. Импульс моментининг сақланиш қонуни (3.40) ва (3.41)-ни тенглаштиришга имкон беради:

$$J_F\,\omega_F = J_0\omega_0 - J_F\,\omega_F$$



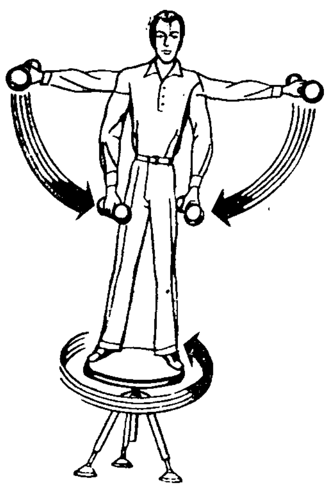
3.11-расм.

ёки скаляр шаклда

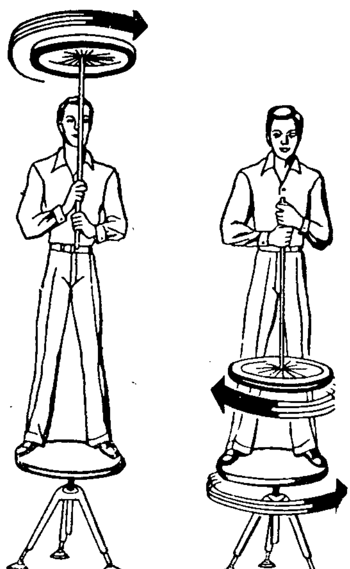
$$J_F\,\omega_F = J_0\omega_0 - J_F\,\omega_F\,, \qquad 2J_F\,\omega_F = J_0\omega_0$$

бундан

$$J_0 = 2J_F\,\omega_F\,/\omega_0 \qquad (3.42)$$



3.12-расм.



3.13-расм.

Одам танасининг платформа билан биргаликдаги инерция моментини (3.42)-формула ёрдамида тахминан баҳолаш мумкин; бунинг учун $\omega_{\text{ғ}}$, ω_0 -ларни ўлчаб, $J_{\text{ғ}}$ ни топиш керак. Текис айланишнинг бурчагий тезликларини ўлчаш усули ўқувчига маълум. Ғилдирак массасини била туриб ва массани, асосан гардиш бўйлаб тақсимланган деб ҳисоблаб, (3.22)-формула бўйича $J_{\text{ғ}}$ ни аниқлаш мумкин. Аниқлаш хатолигини камайтириш мақсадида велосипед ғилдирагининг гардишига махсус шина кийгизиб, гардиш оғирлигини катталаштириш мумкин. Одам айланиш ўқига симметрик жойланган бўлиши керак.

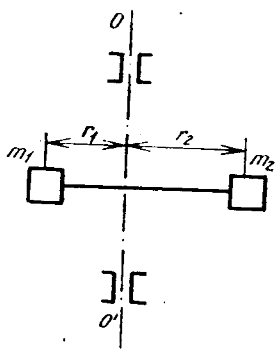
3.14-расм.

Кўриб чиқилган тажрибанинг соддароқ вариантини ҳосил қилиш учун Жуковский курсиси устида турган одамнинг ўзи ғилдиракни, вертикал ўқ учидан ушлаб, айлантириши керак. Бу ҳолда одам ва платформа қарама-қарши томонга айлана бошлайди. (3.14-расм).

§ 4. АЙЛАНИШНИНГ ЭРКИН ЎҚЛАРИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Фиксацияланган ўқ атрофида айланувчи жисм, умуман, мазкур ўқ вазиятини ўзгартмай сақловчи подшипникларга ёки бошқа тузилмаларга таъсир этади. Бурчагий тезликлар ва инерция моментлари катта бўлган вақтларда бу таъсиротлар анча катта бўлишлари мумкин. Бироқ ҳар бир жисмда айланиш вақтида йўналиши ҳеч бир махсус тузилмаларсиз сақланиб қоладиган ўқларни танлаб олиш мумкин. Бундай ўқларни танлаш қандай шартни қаноатлантириши кераклигини тушуниш учун қуйидаги мисолни кўриб чиқамиз.

Айтайлик, массалари m_1 ва m_2 га тенг икки моддий нуқтадан ва массасини ҳисобга олмаса бўладиган қаттиқ стержендан иборат бирор система подшипникларга ўрнатилган ўқ OO' атрофида айлансин (3.15-расм; r_1 ва r_2 — айланиш ўқидан моддий нуқталаргача бўлган масофалар).



3.15-расм.

Моддий нуқталар томонидан айланиш ўқига, демак, подшипникларга ҳам, қарама-қарши йўналган кучлар таъсир этади. Бу кучлар мос равишда, $F_1 = m_1\omega^2 r_1$ ва $F_2 = m_2\omega^2 r_2$ га тенг, бу ерда ω айланишнинг бурчагий тезлиги. Агар бу кучлар бир-бирини компенсацияламайдиган бўлсалар, унда подшипникларга, уларни сийқалашга ёки ҳатто бузилишга олиб келадиган доимий куч таъсир этадиган бўлади. Массалар ва масофалар муайян муносабатда бўлганларида F_1 ва F_2 кучлар тенглашишлари мумкин:

$$m_1\omega^2 r_1 = m_2\omega^2 r_2$$

ёки

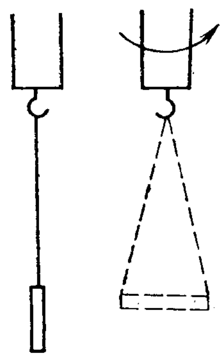
$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \qquad (3.43)$$

(3.43)-ни массалар маркази координаталари (2.16)-билан солиштириб, айланиш ўқи массалар марказидан ўтганда, ўққа таъсир этадиган кучларнинг мувозанатлашганини кўрамиз.

Шундай қилиб, айланиш ўқи стерженга перпендикуляр ҳолда массалар марказидан ўтса, бу ўққа айланувчи жисм таъсир этмайди. Агар (3.43)-шарт бажарилса-ю, подшипник олиб ташланса, айланиш ўқи ўз ҳолатини фазода сақлаган ҳолда кўчади, жисм эса шу ўқ атрофида айланишни давом эттираверади.

Фазода ўз йўналишини махсус беркитмасиз сақлайдиган айланиш ўқларини эркин ўқлар деб атайдилар. Ер ва пилдироқнинг айланиш ўқлари, ҳар бир отиб юборилган ва эркин айланувчи жисмнинг ўқи ва ҳ. к. бундай ўқлар мисолидир.

Ихтиёрий шаклдаги жисмда ҳамиша массалар марказидан ўтувчи ҳеч бўлмаганда учта ўзаро перпендикуляр ўқлар бордирки, улар айланишнинг эркин ўқлари бўла оладилар. Бу ўқларга *бош инерция ўқлари* дейилади. Гарчи бош инерция ўқларининг учаласи ҳам эркин бўлса-да, энг катта инерция моментига эга бўлган ўқ атрофида айланиш турғунроқ бўлади. Масала шундаки, ташқи кучларнинг бевосита таъсири, масалан ишқаланиш натижасида, шунингдек, тўппа-тўғри танланган ўқ атрофида айланишни вужудга келтириш қийин бўлганлигидан бошқа эркин ўқлар атрофида айланиш турғун бўлмайди.



а б

3.16-расм.

Баъзан, жисм кичик инерция моментига эга бўлган ўқ атрофида айланаётганда, у ўзи бу ўқни энг катта инерция моментли ўққа ўзгартади. Бу ҳодисани қуйидаги тажрибада кўрсатамиз. Ўз геометрик ўқи атрофида айлана оладиган цилиндрик таёқча ип билан электр моторига осилган (3.16-расм, *а*). Бу ўққа нисбатан инерция моменти $J_1 = mR^2/2$. Айланиш тезлиги муайян даражага етганда таёқча ўз вазиятини ўзгартади (3.16-расм, б). Янги айланиш ўқига нисбатан инерция моменти $J_2 = ml^2/12$. Агар $l^2 > 6R^2$ бўлса, $J_2 > J_1$ бўлади. Янги ўқ атрофида айланиш турғун бўлади.

Ташланган гугурт қутичасининг катта ёғидан перпендикуляр ўтган ўққа нисбатан айланиши турғун айланиш ва бошқа ёқларга перпендикуляр ўтган ўқларга нисбатан (3.7-расмга қаранг) нотурғун ёки турғунсизроқ эканлигини ўқувчининг ўзи мустақил тажриба қилиб ишонч ҳосил қилиши мумкин.

Ҳайвонларнинг ва одамнинг эркин парвоз қилишида ва ҳар хил сакрашларида айланиши энг катта ёки энг кичик инерция моменти ўқлар атрофида бўлади. Массалар марказининг вазияти гавданинг ҳолатига боғлиқ бўлгани учун, турли ҳолатларда турли эркин ўқлар бўлади.

§ 5. ЭРКИНЛИК ДАРАЖАЛАРИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Эркин моддий нуқтанинг фазодаги ҳолати мустақил уч x, y, z координаталар ёрдамида берилади. Агар нуқта эркин бўлмаса, масалан, бирор сирт устида силжиса, у ҳолда координаталардан бирортаси мустақил бўла олмайди.

Моддий нуқта ҳаракати $x^2+y^2+z^2=R^2$ тенглама билан берилган R радиусли сфера устида бўлаётир, дейлик. Агар x ва y мустақил ҳисобланса, z ни кейинги формуладан топамиз:

$$z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2} \tag{3.44}$$

Мисол учун $x=2$, $y=3$, $R=6$ деб олайлик, у ҳолда*

$$z=\pm\sqrt{6^2-2^2-3^2}=\pm\sqrt{23}.$$

Шундай қилиб, бу мисолда учта координатадан фақат иккитаси мустақил ўзгарувчандир.

Механикавий система вазиятини характерловчи мустақил ўзгарувчиларга эркинлик даражалари дейилади. Эркин моддий нуқта учта эркинлик даражасига эга, текширилган мисолда икки эркинлик даражаси мавжуд.

Яна баъзи мисоллар.

Иккита 1 ва 2 моддий нуқта бир-бири билан қаттиқ боғланган. Ҳар икки нуқтанинг вазияти олтита: x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 координаталар билан берилган бўлиб, уларга математик равишда $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=l^2$ шаклдаги тенглама билан ифодаланувчи битта чек боғланиш қўйилган. Физикавий жиҳатдан бу моддий нуқталар орасидаги масофа ҳамиша l демакдир. Бу ҳолда эркинлик даражаларининг сони 5 га тенг. Кўздан кечирилган бу мисол икки атомли молекула моделидир.

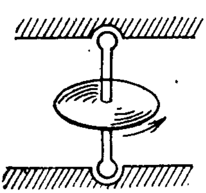
---

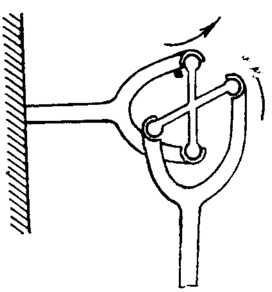
* Агар (3.44)-дан боғлиқ координата учун мавҳум миқдор келиб чиқадиган бўлса, бу танланган мустақил координаталар берилган радиусли сферада жойланган ҳеч бир нуқтага мос келмайди демакдир.

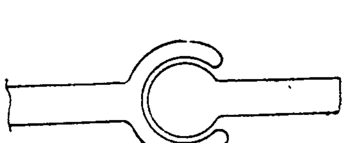
Учта — 1, 2 ва 3 моддий нуқталар бир-бири билан қаттиқ боғланган. Бундай система вазиятини тўққизта: x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3 z_3 координаталар характерлайди. Бироқ нуқталар орасидаги учта боғланиш фақат олтита координаталарнинг мустақиллигини таъминлайди. Система олтита эркинлик даражасига эга. Бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтанинг вазияти қаттиқ жисм вазиятини бир хил қимматда белгилагани учун қаттиқ жисм ҳам олтита эркинлик даражасига эгадир.

Эркинлик даражаларининг сони фақат механикавий система вазиятини характерловчи мустақил ўзгарувчилар сонини белгилайди эмас, система мустақил кўчишларининг сонини ҳам белгилайди. Буниси жуда аҳамиятлидир. Жумладан, эркин моддий нуқтадаги учта эркинлик даражаси нуқтанинг исталган кўчишини, учта координата ўқлари бўйича, мустақил ўзгарувчиларга ажратиш мумкин демакдир. Нуқта ўлчовсиз бўлганлигидан унинг айланиши тўғрисидаги гап маъносиздир. Шундай қилиб, моддий нуқта илгарилама ҳаракатнинг учта эркинлик даражасига эгадир. Моддий нуқтанинг эгри чизиқ бўйлаб кўчиши (шартли мисол поезднинг рельслар бўйича ҳаракати) илгарилама ҳаракатнинг битта эркинлик даражасига эга эканлигини кўрсатади.

Тинч турган ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисм битта айланма ҳаракат эркинлик даражасига эга. Поезднинг ғилдираги иккита эркинлик даражасига эга: бири — айланма ҳаракатнинг, иккинчиси — илгариламаники (ғилдирак ўқининг рельслар бўйича кўчиши). Қаттиқ жисмда олтита эркинлик даражасининг бўлиши, мазкур жисмнинг исталган кўчишини қуйидаги ташкил этувчиларга ажратиш мумкин демакдир: массалар марказининг кўчиши, координата ўқлари бўйича, учта илгариланма ҳаракатларга ажралади, айланиш эса — массалар марказидан ўтувчи координата ўқларига нисбатан бўлган учта соддароқ бурилишлардан иборат бўлади.


3.17-расм.


3.18-расм.


3.19-расм.

3.17, 3.18 ва 3.19-расмларда битта, иккита ва учта эркинлик даражаларига мос шарнирли уланишлар кўрсатилган.

IV БОБ

НОИНЕРЦИАЛ ҲИСОБЛАШ СИСТЕМАЛАРИ

Ньютоннинг биринчи ва иккинчи қонунлари ҳамма ҳисоблаш системалари учун мос келавермайди.

Бу қонунлар тўғри келадиган ҳисоблаш системаларига *инерциал* системалар дейилади. Гелиоцентрик системани (Қуёш билан боғланган система) муайян тақрибийлик билан инерциал система деб ҳисоблаш мумкин. Барча инерциал системалар бир-бирларига нисбатан текис ва тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қиладилар ёки тинч ҳолда турадилар.

Инерциал ҳисоблаш системасига нисбатан тезланишли ҳаракат қилувчи ҳисоблаш системаси *ноинерциал* система дейилади.

Ушбу бобда ноинерциал системалар механикаси текшириладиади*. Бу системаларда механика қонунлари алоҳида спецификага эгадир.

§ 1. ИНЕРЦИЯ КУЧЛАРИ

Ноинерциал ҳисоблаш системасига мисол сифатида тезланишли ҳаракат қилаётган поезд ёки автомобиль кабиларни кўриб чиқамиз. Тажрибанинг кўрсатишича, ноинерциал ҳисоблаш системасидаги жисмлар, бошқа жисмлар таъсири бўлмаса ҳам, тезланишли ҳаракат қила бошлайди: поезд вагони токчаларидаги нарсалар полга тушади, пассажирлар ўриндиқ суянчиқларига сиқиладилар ва ҳ. к.

Ньютон механикасининг кўрсатишича жисмларнинг тезланиши кучлар туфайли ҳосил бўлади, кучлар эса жисмларнинг бирбирига таъсиридир. Бу асосий тушунчаларни сақлаб қолиш ва ноинерциал системада Ньютоннинг иккинчи қонунидан фойдаланиш имкониятига эга бўлиш учун инерция кучлари деб аталувчи, қўшимча кучларни киритамиз. Бу кучлар ноинерциал ҳисоб системасининг инерциал системага нисбатан тезланишли ҳаракати туфайли вужудга келади.

Ноинерциал ҳисоб системаси ва бу системадаги жисмларнинг ихтиёрий ҳаракатланишларида инерциал кучларни ҳисобга олиш анча қийин, шунинг учун иккита энг содда ҳолларни кўриб чиқамиз.

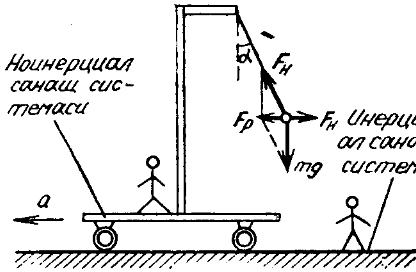
1.-ҳол. Инерциал системага нисбатан ўзгармас тезланиш билан тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланувчи ноинерциал ҳисоб системасида тинч ётган жисм.

Айтайлик, устига маятник ўрнатилган тележка (аравача) (ноинерциал ҳисоб системаси) тўғри чизиқ бўйича тезланишли ҳаракат қилсин. Бундай ҳаракатда маятник бирорта α бурчакка оғади

* Бу бобда кўриладиганлар қўпол тажрибалар учун ер системаси тақрибан инерциал деб ҳисобланади.

(4.1-расм). Маятникка қуйидаги кучлар таъсир этади: оғирлик кучи mg ва ипнинг тортилиш кучи $\mathbf{F}_н$. Инерциал ҳисоб системасида турган кузатувчи («қўзғалмас» кузатувчи) шундай деб ҳисоблайди. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси (4.1-расмга қаранг).

$$\mathbf{F}_р=\mathbf{F}_н+mg$$



4.1-расм.

$\mathbf{F}_р$ кучи таъсирида тележка (аравача) билан бирликда маятник «ҳаракатсиз» кузатувчига нисбатан тезланишли ҳаракат қилади.

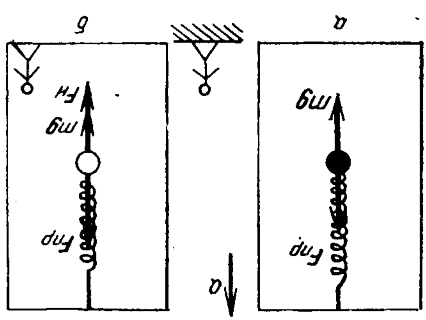
Ноинерциал ҳисоб системасида турган кузатувчи («ҳаракатчан» кузатувчи) маятникни α бурчакка оғган ҳолда тинч турганини кузатади. Буни Ньютон қонунларига мос келтириш учун «ҳаракатчан» кузатувчи, икки (mg ва $\mathbf{F}_н$) кучдан ташқари, $\mathbf{F}_р$ га қарама-қарши йўналган, лекин унга тенг бўлган учинчи — *инерция кучини киритади:*

$$\mathbf{F}_и=-m\mathbf{a} \qquad (4.1)$$

Инерция кучи жисм массаси m билан система тезланиши — а нинг қарама-қарши ишораси билан олинган кўпайтмасига тенг.

Шундай қилиб, ноинерциал ҳисоб системасида маятникка учта куч таъсир этади: оғирлик кучи, ипнинг тортилиш кучи ва инерция кучи. Бу кучларнинг йиғиндиси нолга тенг, шунинг учун маятник, Ньютон қонунига мувофиқ, бу системада тезланишга эга эмасдир.

Инерция кучини баъзида гўё «сохта» куч деб ҳисоблайдилар. Буни шундай тушуниш керакки, бу куч таъсири томонида реал жисм йўқ.



4.2-расм.

Яна бир мисол. Лифт кабинаси ичига ўрнатилган пружинали тарозига m массали жисм осилган. Лифт а тезланиш билан юқорига кўтарилади. «Қўзғалмас» кузатувчи (инерциал ҳисоб системаси) жисмга оғирлик кучи mg ва пружинанинг эластиклик кучи $F'_{пр}$ таъсир этганлигини қайд этади (4.2-расм, *а*). Ньютонни иккинчи қонуни бўйича бу кучлар модулларининг айирмаси жисм массаси билан тезланишнинг кўпайтмасига тенг;

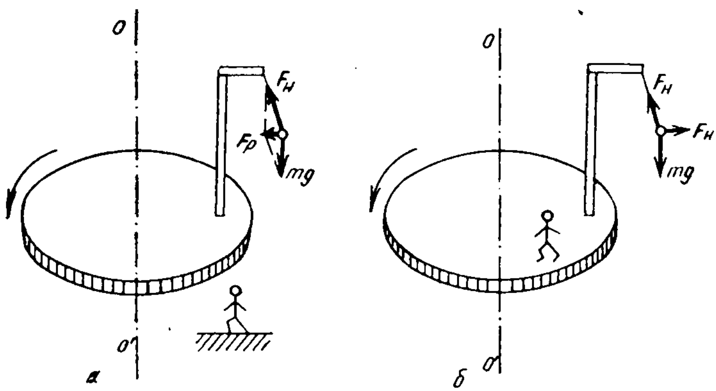
$$F_{пр}-mg=ma$$

Ноинерциал ҳисоб системасидаги «ҳаракатчан» кузатувчи жисмга оғирлик кучи mg, эластиклик кучи $\mathbf{F}_{\text{пр}}$ ва инерция кучи $\mathbf{F}_{\text{и}} = -ma$ таъсир этади деб ҳисоблайди (4.2-расм, *б*). Жисм бу системага нисбатан тинч ҳолда турганлиги учун

$$mg+\mathbf{F}_{\text{пр}}+\mathbf{F}_{\text{и}}=0 \text{ ёки } mg+F_{\text{и}}=F_{\text{пр}}.$$

2-ҳ о л. Инерциал системага нисбатан текис айланувчи ноинерциал системада ҳаракатсиз турган жисм.

Айтайлик, OO' ўқ атрофида бурчагий тезлик ω билан айланувчи столга маятник осилган бўлсин (4.3-расм, *а*). Ноинерциал ҳисоб системасидаги «қўзғалмас» кузатувчи мулоҳазалари қуйидагича бўлади. m массали осилган жисмга оғирлик кучи mg ва ипнинг тортилиш кучи $\mathbf{F}_{\text{н}}$ таъсир этади; бу кучларнинг тенг таъсир



4.3-расм.

этувчиси айланиш марказига йўналган ва жисмнинг r радиусли айлана бўйича текис айланишини таъминлайди.

$$\mathbf{F}_{\text{р}}=\mathbf{F}_{\text{н}}+mg,\ \mathbf{F}_{\text{р}}=m\omega^2 r$$

Ноинерциал ҳисоб системаси билан боғланган «ҳаракатчан» кузатувчи (4.3-расм, *б*) бошқача тушунтиради: вертикал ҳолатидан оғдирилган маятник столга нисбатан қўзғалмас, шунинг учун маятникка таъсир этувчи кучларнинг векторий йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак. Бундай кучлардан ҳеч бўлмаганда учта бўлиши керак: оғирлик кучи, ипнинг тортилиш кучи ва $F_{\text{и}} = ma = m\omega^2 r$ — га тенг бўлган инерция кучи; бу кейинги кучни марказдан қочма инерция кучи деб атайдилар. Шундай қилиб, $mg + \mathbf{F}_{\text{н}} + \mathbf{F}_{\text{и}} = 0$.

Инерция кучлари учун (4.1)-формула бу ҳолда ҳам ўз кучини сақлайди, лекин фарқи шундаки, айланма ҳаракатда **a** жисмнинг айланиш ўқига нисбатан жойланишига боғлиқ бўлади. Жисмнинг айланувчи ноинерциал системасида айланиши каби мураккаброқ ҳоллар учун (4.1)-формула нотўғридир.

Бу мисоллардан маълум бўлишича, бир ҳодиса турли ҳисоб системаларида қаралиши мумкин экан, бироқ ноинерциал ҳисоб системаларида Ньютоннинг иккинчи қонунини ишлатиш фақат инерция кучларини эътиборга олгандагина мумкиндир.

Инерция кучлари ва тортишиш (гравитацион) кучлари эквивалент кучлар бўлиб, физик жиҳатдан бир-бирларидан фарқ қилмайдилар. Буни лифт мисолида кўриб чиқамиз. Бизнинг мулоҳазаларимизда лифт Ер яқинида турибди ва унга ҳамда унинг ичидаги жисмларга, Ернинг тортиши билан белгиланувчи, оғирлик кучлари таъсир этадилар деб фараз қилинар эди. Агар бу маълум бўлмаганда эди, инерция кучларини тортилиш кучларидан ажратиш мумкин бўлмас эди. 4.2-расм, *б* да кўрсатилган ҳолни тасаввур қилайлик. Гравитациянинг таъсири номаълум бўлсин дейлик. Лифт билан боғланган системада нимани кузатиш мумкин? Жисмга фақат пружинани чўзувчи куч таъсир қилади дейиш мумкин. Бу кучнинг нима учун вужудга келганлигини айтиш мумкин эмас, чунки учта вариантдан биттаси бўлиши мумкин: а) тортишиш майдонлари йўқлигида система тезланишли ҳаракат қилади, шунга кўра таранглаииш фақат инерция кучлари туфайли ҳосил бўлади; б) система қўзғалмас ёки гравитацион майдонда текис ва тўғри чизиқли ҳаракат қилади ва бу вақтда пружинанинг таранглаииши фақат оғирлик кучи таъсирида вужудга келади; в) система тортилиш майдонида тезланишли ҳаракат қилади ва пружинани чўзувчи куч (кўрилган мисолда бўлганидек) оғирлик кучи ва инерция кучи йиғиндисидан иборат бўлади.

Тортилиш кучлари билан инерция кучларининг эквивалентлиги Эйнштейн яратган (1915 й.)* умумий нисбийлик назарияси асосларидан бирини акс эттиради.

Келгуси параграфларда ноинерциал ҳисоб системалари билан боғлиқ баъзи физикавий ва биофизикавий масалалар кўрилади.

§ 2. ВАЗНСИЗЛИК ВА ЎТА ЮКЛАНИШЛАР

Ернинг тортиши ва таянч* билан бирга бўлиши мумкин бўлган тезланишли ҳаракат туфайли жисмнинг горизонтал таянчга таъсир этиш кучини жисм **оғирлиги** деб атаймиз.

Агар жисм Ерга нисбатан қўзғалмас бўлса ёки текис ва тўғри чизиқли ҳаракатланса, унда жисмнинг оғирлиги Ернинг тортиш кучига тенг. Шундай қилиб, жисмнинг оғирлиги бирма-бир равишда жисм массаси ва унинг турган жойи билан аниқлана олмайди. 4.2-расм, *б* дан кўринишича, жисмнинг оғирлиги (уни G

---

* Бу эквивалентлик фазовий чекланган соҳадагина, масалан, ичидаги майдон бир жинсли бўлган лифт кабинасидай жойлардагина ўринлидир.

* «Таянч» терминини кенг маънода тушуниш лозим. Жумладан, сузувчи жисмга таянч суюқлиқ ёки газ бўла олади. Таянч деганда осма, таглик ва бошқалар тушунилади.

билан белгилайлик) инерция кучи ва оғирлик кучидан иборат бўлади, бу йиғинди куч таянчига (пружинага) таъсир этади:

$$\mathbf{G}=\mathbf{F}_{и}+mg. \tag{4.2}$$

Биологик системанинг, жумладан, одамнинг нормал, ўрганган ҳолатидаги вазни оғирлик кучига тенг. Космик медицинада жисм вазни оғирлик кучидан фарқ қилган ҳоллар қизиқарлидир. Бундай ҳолларни батафсил қараб чиқамиз.

Агар жисм таянч билан бирга тезланиш g билан Ер томон ҳаракатланса, (4.1)-га мувофиқ

$$\mathbf{F}_{и}=-mg, \text{ демак, } \mathbf{G}=0 \text{ бўлади}.$$

Жисмнинг оғирлиги нолга тенг, жисм таянчга таъсир этмайди. Бундай ҳолатга вазнсизлик дейилади.

Шундай қилиб, ноинерциал ҳисоб системасида оғирлик ва инерция кучларининг йиғиндиси нолга тенг бўлганда, вазнсизлик вужудга келади. Инерциал ҳисоб системасида вазнсизликни системага фақат оғирлик кучлари ёки ҳеч қандай куч таъсир этмаган ҳолат деб қараш мумкин. Ҳисоб системалари эътиборга олинмай қаралганда системага таъсир этувчи ташқи кучлар система зарралари ўртасида ўзаро босимлар ҳосил қилмайдиган механикавий система ҳолатини вазнсизлик деб таърифлашади.

Одам ерга тортилиш шароитида яшайди, у оғирлик кучи ва таянч реакциясининг бир вақтдаги таъсирига ўрганиб қолган. Вазнсизлик ҳолатида таянч таъсиротининг йўқолиши одам ва ҳайвонлар физиологик функцияларида жиддий ўзгаришларни вужудга келтириши мумкин.

Жисмнинг вазни оғирлик кучидан катталашиб кетган ($G>mg$) ҳолда *ўта юкланишлар* деб аталувчи ҳодиса рўй беради. (4.2)-ни назарда тутиб, ноинерциал ҳисоб системасида

$$|\mathbf{F}_{и}+mg|>mg \quad \text{деб ёзиш мумкин}$$

4. 2-расм, *б* да ўта юкланишлар пайдо бўлувчи, энг содда инерция кучи ва оғирлик кучи бир томонга йўналган ҳол кўрсатилган. Ўта юкланишларни одатда

$$\eta=\frac{|\mathbf{F}_{и}+mg|}{mg}=|-m\mathbf{a}+m\mathbf{g}|/mg \tag{4.3}$$

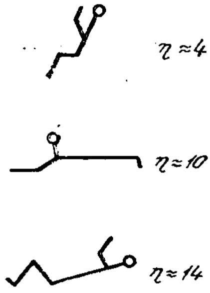
нисбат орқали ифодалайдилар. Жумладан, агар ноинерциал система g га қарши $a=-4\mathbf{g}$ билан ҳаракатланса, ўта юкланишлар 5 га тенг (беш қиррали ўта юкланиш).

4. 4-расмда схематик равишда тана вазиятлари кўрсатилган ва ҳеч бўлмаганда бир неча минут давомида жиддий бирорта бузилишларга учрамай, соғлом инсон организми чидайдиган ўта юкланишларнинг мос қийматлари келтирилган.

Космик медицинада одамларни ўта юкланишларга мослаш машқларида ва ҳайвонлар билан шунга ўхшаш экспериментлар қилиш учун катта центрифугалар ишлатилади. Бундай системаларда марказдан қочма инерция кучи ва оғирлик кучи бир-бири билан тўғри бурчак ҳосил қилиб таъсир этади, лекин катта ўта юкланишларда бу кучлар тенг таъсир этувчисининг йўналиши марказдан қочма инерция кучининг йўналишидан (4.5-расм) кам фарқ қилади. Тенг таъсир этувчисининг қиймати формула

$$F_p = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2} = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2}$$

бўйича аниқланганлиги расмдан маълум;
$\omega^2 r \gg g$ бўлганда $F_p \approx m\omega^2 r$, яъни $F_p \approx F_и$

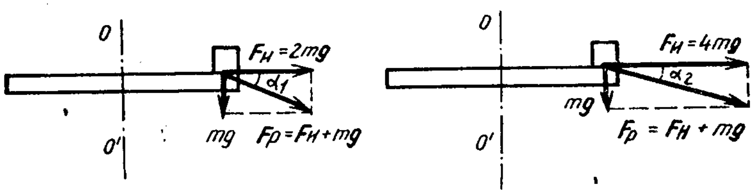


4.4-расм.

§ 3. ЦЕНТРИФУГАЛАШ

Суюқлиқ ичида бўлган майда заррачаларни марказдан қочма инерция кучлари ёрдамида суюқлиқдан ажратиш процессига (*сепарация* қилишга) *центрифугалаш* дейилади. Бу ҳодисанинг физикасини текширайлик.

Турли зичликка эга бўлган заррачаларнинг сув суспензияси бор дейлик. Оғирлик ва Архимед кучлари таъсири туфайли бир қанча вақтдан сўнг заррачалар қатламларга ажрала бошлайди: зичликлари сувнинг зичлигидан каттароқ бўлган заррачалар чўкиб кетадилар, зичликлари сувникидан камроқ бўлганлари қал-



4.5-расм.

қиб чиқадилар. Каттароқ зичликка эга бўлган айрим заррачага таъсир этган натижаловчи куч

$$F_p = mg - F_A = \rho_1 Vg - \rho Vg = (\rho_1 - \rho)Vg,$$

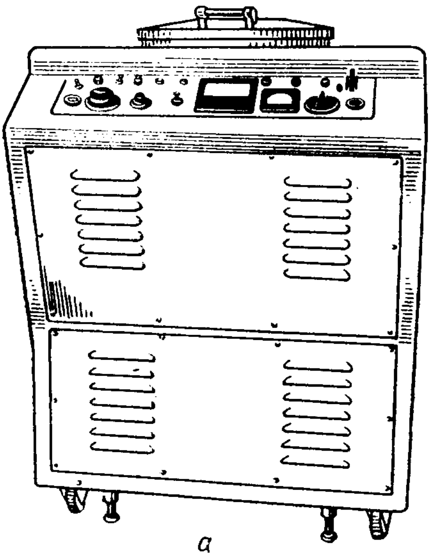
га тенг, бу ерда ρ_1 — заррачалар моддасининг зичлиги, ρ — сувнинг зичлиги, V — заррача ҳажми.

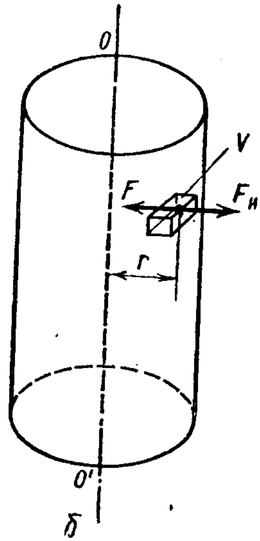
Агар ρ_1 ва ρ бир-биридан кам фарқ қилсалар, F_p кичик бўлади ва заррачаларнинг қатламларга ажралиши анча секин бўлади. Центрифугада (сепараторда) бундай ажратишни, марказдан қочма инерция кучидан фойдаланиб, мажбурий равишда вужудга келтирадилар. Марказдан қочма инерция кучи айланишнинг бурчагий тезлиги билан белгилангани учун, бу кучнинг қийматини центрифуганинг бурчагий тезлигини ўзгартиб ҳар хиллаб туриш

4*

мумкин. 4.6-расм, *а* да лаборатория центрифугаси ЦВР-1 нинг ташқи кўриниши берилган. 4.6-расм, *б* да эса сепарацияланувчи муҳитнинг ҳажми шартли кўрсатилган.

Центрифуга ҳажмини бирор бир жинсли суюқлиқ тўла эгаллаган дейлик. Айланиш ўқи OO' дан r масофада кичик бир ҳажми V ни ажратамиз. Центрифуга текис айланганда ажратилган суюқликнинг бирор силжиши рўй бермайди ва ажратилган ҳажм центрифугага нисбатан қўзғалмас бўлади (ноинерциал ҳисоб системаси), барча кучлар тенг таъсир этувчиси нолга тенг. Ажра-





4.6-расм.

тилган ҳажмга оғирлик ва Архимед кучидан* бошқа икки куч таъсир этади: биринчиси ҳажм атрофидаги суюқлиқ томондан бўлаётган куч, иккинчиси — марказдан қочма инерция кучи. Буларнинг биринчиси айланиш марказига йўналган ва

$$F = m\omega^2 r = \rho V \omega^2 r \tag{4.4}$$

га тенг, иккинчиси, аксинча, айланиш марказидан йўналган ва

$$F_и = m\omega^2 r = \rho V \omega^2 r$$

га тенг.

* Тортилиш ва Архимед кучлари ҳисобга олинмайди, чунки улар айланиш ўқи бўйича йўналган бўлиб, центрифугалаш процессига принципиал таъсир қилмайди.

Энди, ажратилган ҳажм V — бу, зичлиги $\rho_1 \neq \rho$ бўлган, сепарацияланувчи заррача деб фараз этайлик, у ҳолда заррача атрофидаги суюқлиқ томондан бўлаётган куч (4.4) ўзгармас бўлади, заррача зичлигига боғлиқ бўлган марказдан қочма инерция кучи эса бошқача

$$F_{и} = \rho_1 V \omega^2 r \tag{4.5}$$

бўлиб қолади. Бу икки кучнинг натижаловчиси

$$F_{р} = (\rho_1 - \rho) V \omega^2 r \tag{4.6}$$

га тенг.

(4.6)-ни анализ қилиб, $\rho_1 > \rho$ бўлганда тенг таъсир этувчи марказдан йўналганини, $\rho_1 < \rho$ бўлганда эса — марказга йўналганини қайд этамиз, яъни суюқлиқдан оғирроқ заррачалар центрифуга периферияcига, енгил бўлганлари — айланиш ўқи томонга кўчади. Тенг таъсир этувчи куч (4.6) ω^2 га боғлиқ ва кенг чегарада ўзгариши мумкин.

Центрифугалаш билан ажратишни огирлик кучи ёрдамида ажратиш билан солиштирайлик:

$$\eta = \frac{F_{р\,(цф)}}{F_{р\,(оғ)}} = \frac{(\rho_1 - \rho) V \omega^2 r}{(\rho_1 - \rho) V g} = \frac{\omega^2 r}{g} \tag{4.7}$$

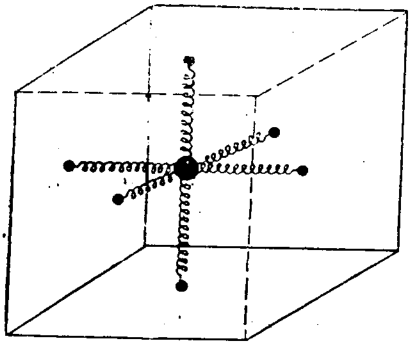
Бир секундда минглаб айланадиган замонавий центрифугаларда бурчагий тезликнинг қиймати $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ *рад/с* гача етади, бундан $r = 0{,}1$ *м* бўлганда (4.7)-га мувофиқ топамиз:

$$\eta = \frac{(2\pi \cdot 10^3)^2 \cdot 0{,}1}{9{,}8} \approx 4 \cdot 10^5.$$

Текширилувчи объектлар ҳолатида муҳим ўзгаришлар рўй бериши мумкин бўлганлигидан, сепарациялаш тезлигининг биологик ва биофизикавий тадқиқотлар учун аҳамияти анча каттадир.

§ 4. ВЕСТИБУЛЯР АППАРАТ ОРИЕНТАЦИЯЛАНИШНИНГ ИНЕРЦИАЛ СИСТЕМАСИ СИФАТИДА

Одатдаги шароитларда эркин осилган маятникнинг вазияти оғирлик кучи йўналишини кўрсатади. Агар маятник ноинерциал ҳисоб системаси билан боғлиқ бўлса, унинг вазияти оғирлик ва инерция кучлари тенг таъсир этувчисининг йўналишини кўрсатади. Даражаланган пружинали маятник, бу тенг таъсир этувчининг йўналишини кўрсатишдан ташқари, қийматини ҳам белгилаш қобилиятига эга. Маятник массасини билган ҳолда система тезланишини аниқлаш мумкин [(4.1)-га қаранг)]. Бундай индикатор ориентацияланишнинг инерциал системасидир, яъни унинг ёрдамида инерция кучларининг (ва оғирлик кучларининг) йўналиши, шунингдек система тезланиши аниқланади. 4.7-расмда кўрсатилган қурилма система тезланишининг қулайроқ индикаторидир; маълум массали жисм олтита пружинага маҳкамланган. Пружиналарнинг деформацияланишига қараб инерция кучларининг йўналиши ва қийматини, ундан эркин тушиш тезланиши билан қўшилган ҳолда система тезланишининг йўналиши ва қийматини аниқлаш мумкин. Бу хилдаги индикаторлар, инерциал навигацияда ишлатилади. Бу хилдаги навигациялар космик масалалар ҳал қилиниши туфайли ўз тараққиётини топди.



4.7-расм.

Дарҳақиқат, агар системанинг, масалан, ракетанинг, ҳар бир вақт моментидаги тезланиши маълум бўлса, тезлик билан вақт орасидаги боғланишни ҳосил қилиш мумкин.

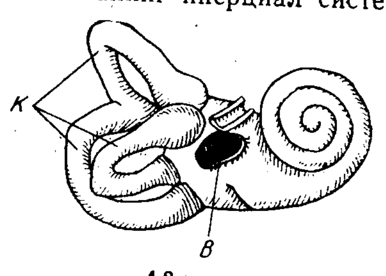
$$v = \int a\, dt \qquad (4.8)$$

$v = f(t)$ ни аниқлагач, системанинг исталган моментидаги вазиятини топиш мумкин:

$$x = \int v_x\, dt, \quad y = \int v_y\, dt, \quad z = \int v_z\, dt. \qquad (4.9)$$

Шундай қилиб, ракета ташқарисидаги мосламалар ёрдамидан фойдаланмай, инерция кучларини ўлчаб, исталган вақт моментида турган жой, тезлик ва тезланиш каби параметрларни автоном равишда аниқлаш мумкин.

Одам организмида ҳам ориентацияланишнинг инерциал системаси мавжуд, бу орган вестибуляр аппаратдир*. У ички қулоқда жойланган бўлиб, учта ўзаро перпендикуляр ярим доира каналлардан (K) ва бўшлиқ — ички қулоқ даҳлизи (B) дан иборат (4.8-расм). Даҳлиз деворларининг ички сиртида ва ярим доира каналларининг қисмида, эркин учлари қилчалар бўлган, сезувчи нерв ҳужайралари группаси жойлашган. Даҳлиз ва ярим доира



4.8-расм.

каналлари ичида майда кальций фосфат ва кальций карбонат (отолит) дан иборат дирилдоқ масса (эндолимфа) мавжуд. Бош-

* Вестибуляр аппарат 4.7-расмда кўрсатилган системадан принципиал равишда шуниси билан фарқланадики, у одамнинг (ноинерциал системанинг) тезланишини миқдор жиҳатдан аниқлай олмайди. Бу шунингдек, одамда (4.8) ва (4.9)-тенгламаларни автоматик равишда ечадиган органнинг йўқлиги, машинанинг ёпиқ кабинасида кетаётган одамга автомобиль турган жойни аниқлашга имкон бермайди.

нинг тезланишли силжиши эндолимфанинг ва отолитларнинг кўчишини вужудга келтиради, бу эса нерв ҳужайралари томонидан (қилчалар орқали) қабул қилинади. Вестибуляр аппарат исталган ҳар қандай биофизикавий система каби оғирлик кучини ва инерция кучларини ажратмайди, балки кучларнинг тенг таъсир этувчисидан таъсирланади, холос.

Одам организми оғирлик кучининг таъсирига мослашган, одатдаги тегишли информацияни вестибуляр аппаратнинг ҳужайралари мияга хабар қилади, шунинг учун вазнсизлик ва ўта юкланиш ҳолатларини биз вестибуляр аппарат (ва бошқа органлар) воситаси билан одатдагидек бўлмаган ва уларга мосланиш лозим бўлган ҳоллар каби қабул қиламиз.

Агар инерция кучлари вестибуляр аппаратга даврий суратда, масалан, кема чайқалишидаги каби таъсир қилиб турса, бу ҳол организмни денгиз касаллиги деб аталувчи, алоҳида ҳолатга келтириши мумкин.

V БОБ

БИОМЕХАНИКАНИНГ БАЪЗИ МАСАЛАЛАРИ

Тирик тўқима ва органларнинг механикавий хоссаларини ва, шунингдек, организмда ва унинг айрим органларида рўй берувчи механикавий ҳодисаларни ўрганувчи биофизиканинг бўлимига *биомеханика* дейилади. Қисқа қилиб айтганда, биомеханика — бу тирик системалар механикасидир.

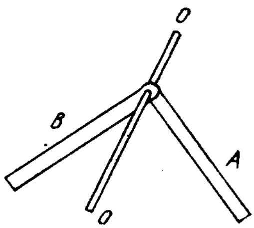
§ 1. ОДАМНИНГ ТАЯНЧ-ҲАРАКАТЛАНИШ АППАРАТИДАГИ БЎҒИМЛАР ВА РИЧАГЛАР

Механизмларнинг ҳаракатланувчи қисмлари одатда унинг бошқа ҳаракатланувчи ёки ҳаракатланмайдиган қисмлари билан туташтирилган бўлади. Бир неча звеноларнинг ҳаракатли бирлашмаси кинематик боғланишни ҳосил қилади. Одам танасидаги айрим аъзоларнинг турли бўғимлар билан боғланиши кинематик боғланишнинг яққол мисолидир.

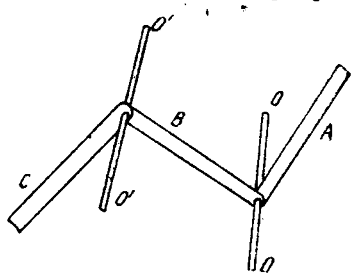
Ўқ *OO* ёрдамида бирлашган икки звеноли системани кўриб чиқайлик (5.1-расм). Бунга бир ўқли икки звеноли бирлашма мисол бўла олади. Звено *B* қўзғалмас бўлса, звено *A* қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм бўлгани учун битта эркинлик даражасига эга бўлади. Одам организмидаги елка-тирсак, товон-усти ва фаланга бирикмалари бир ўқли бирлашмаларга мисол бўла олади. Улар фақат бир эркинлик даражаси билан букилмоқ ва ростланмоққа имкон беради. Икки звеноли системани, *OO* ўқига параллел бўлган, битта $O'O'$ ўқли звеноча катталаштирайлик (5.2-расм). Қўзғалмас C да B звенонинг ҳамма нуқталари, шулар қаторида айлана бўйлаб силжий оладиган ўқ OO ҳам, битта эркинлик даражасига эгадир.

Звено A эса, ўқ OO атрофида айлана туриб, яна бир даражага эга.

Шундай қилиб, бир ўқли уч звеноли системада* маҳкамланган звено силжиш эркинлигига эга эмас, иккинчи звено бир эркинлик



5.1-расм.



5.2-расм.

даражасига ва учинчиси — икки эркинлик даражасига эга бўлади. Бармоқ фалангалари бир ўқли бирлашмалар бўлган бўғимлар орқали бирлашганлар. Тирноқ фалангаси асосий фалангага нисбатан икки эркинлик даражасига, ўртанчасига нисбатан эса бир эркинлик даражасига эга.

Икки ўқли бўғим звеноларни икки ўзаро перпендикуляр ўқлар атрофида (3.18-расмга қаранг) айланишга имкон беради. У икки айланиш эркинлик даражасига эга. Одам организмида бундай икки ўқли бирлашиш иккита яқин жойлашган бўғимлар: атлант-энса ва эпистроф-атлант бирлашмалари туфайли вужудга келтирилади. Биринчи бирлашма ўнг елкадан чап елкага йўналган горизонтал ўққа эга. У калланинг олдинга ва орқага айланишини таъминлайди. Эпистроф атлант ёнига жойланган бўйин умуртқаси — кичкина цилиндрик ўсиқ (шип) га эга бўлиб, бу ўсиқ атлант ҳалқаси билан вертикал ўқли цилиндрик бир ўқли бирлашмани ҳосил қилади. Бу бирлашма бошнинг вертикал ўқ атрофида айланишини таъминлайди.

Уч ўқли бирлашув ўзаро перпендикуляр бўлган учта ўқ атрофида айланишга имкон беради. Бундай бирлашув мисоли 3.19-расмда (шар шарнир)кўрсатилган. Бу бирлашув уч айланиш эркинлик даражасига эга. Шар шарнир одамнинг чаноқ-сон бўғимида юзага келтирилган. Чаноқ бирлашув чуқурлиги тахминан тўғри ярим шар шаклига эга. Шу чуқурликка кирувчи сон суякнинг боши ҳам унга мос формага эга (5.3-расм).

Янги звеноларни қўшиш кинематик ҳаракатчанликни оширади. Жумладан, умуртқааро бўғимларнинг муайян ҳаракатчанлиги

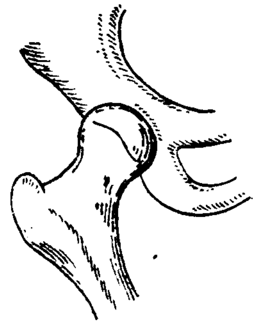
---

* Бир ўқли система тушунчаси ўқлар сонини эмас, балки барча ўқлар йўналишининг биттасини характерлайди, ўқлар сони бир неча дона бўлиши мумкин.

туфайли (анча чекланган бўлса-да) улар олтита эркинлик даражасининг ҳаммасига эга.

Скелет суяклари ва мускулларнинг ўзаро бирлашувларидан иборат бўлган одамнинг таянч-ҳаракатланув системаси, физика нуқтаи назари бўйича, одамнинг мувозанатда сақлаб турган ричаглар тўпламидир деса бўлади.

Анатомияда ричагларни икки турга ажратадилар: куч ричаглари ва тезлик ричаглари. Куч ричагларида кучдан ютилиб, силжишдан ютқазилади, тезлик ричагларида эса кучдан ютқазиб, силжиш тезлигидан ютилади. Пастки жағ тезлик ричагининг яхши мисолидир. Таъсир қилувчи кучни чайнов мускули ҳосилқилади. Қарама-қарши куч — эзилувчи овқат қаршилиги—тишларга таъсир этади. Таъсир қилувчи кучнинг елкаси қарама-қарши таъсир кучи елкасидан анча қисқа, шунинг учун чайнов мускули қисқа ва кучли бўлади. Бирор қаттиқ нарсани тиш билан парчаланмоқчи бўлинганда одам озиқ тишларини ишлатади, бу вақтда қаршилик кучининг елкаси камаяди.



5.3-расм.

Агар скелетни бутун бир организмга уюшган айрим звенолар йиғиндиси деб қаралса, мазкур звеноларнинг барчаси, нормал тикка турганда, жуда нотурғун мувозанат ҳолга эга системани ташкил этганлиги аниқланади. Жумладан, тана таянчи чаноқ-сон бирлашмаси шар шаклли сиртни ташкил қилади. Тана массаларининг маркази таянчдан юқорироқ жойлашгани учун шар шаклидаги таянч нотурғун мувозанат ҳосил қилади. Бунга тизза ва болдир-товон бирлашмалари мисол бўла олади. Бу барча звенолар нотурғун мувозанат ҳолида бўладилар.

Нормал тикка турган одам танаси массаларининг маркази чаноқ-сон, тизза ва оёқ болдир-товон бирлашмалари марказлари билан бир вертикалда, думғаза тумшуғидан 2—2,5 см пастда ва чаноқ-сон ўқидан 4—5 см юқорида жойлашган бўлади. Шундай қилиб, нормал тикка туриш, бир-бири билан туташиб кетган скелет звеноларининг, энг нотурғун бир ҳолатидир. Шундай бўлса-да, бутун бу система мувозанатда сақланар экан, бунга сабаб фақат ушлаб турувчи мускуллар системасининг доимий тарангланиб туришидир.

§ 2. ОДАМНИНГ ИШИ ВА ҚУВВАТИ. ЭРГОМЕТРИЯ

Кун давомида одамнинг бажарадиган иши кўп факторларга боғлиқ. Шунинг учун бирорта чегаравий миқдорни кўрсатиш қийин. Бу ҳол қувватга ҳам мансубдир. Масалан, қисқа кучланиш ёрдамида одам бир неча киловатт қувватни тараққий эттириши мумкин. Агар массаси 70 кг бўлган спортчи унинг массалари маркази нормал тикка тургандагига нисбатан 1 *м* кўтарилиб итарилиш фазаси 0,2 *с* давом этган ҳолда турган жойидан сакраганда у 3,5 *квт* қувватни тараққий эттиради.

Одам ҳатто текис жойда юриб борганда ҳам иш бажаради. Бунда энергия асосан танани даврий суратда кўтаришга ва оёқларни тезлатиш ёки секинлатишга сарф бўлади. Бу энергиянинг бир қисми организм қисмларининг «қаршилиги» ҳисобига организмни ва атрофдаги муҳитни иситишга сарфланади.

Оёқ-қўллар кинетик энергиясининг ўзгаришига кетган ишни (3.32)-формуладан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун одам оёқ-қўллари инерция моментларининг тахминий қийматларини билиш мақсадга мувофиқдир. Ўлчаш процессида суюқ қисмларнинг силжишларини йўқотиш мақсадида музлатилган ўлик устида бажарилган экспериментлар далиллари жадвалда кўрсатилган.

Одам танаси звеносининг номи	Инерция моменти кг·м^2
Қўл (массаси 4,2 *кг*)	0,3
Оёқ (массаси 12 *кг*)	1,7
Қўлнинг бош бармоғи	0,00006
„ ўрта	0,00014
Жимжилоқ	0,00004

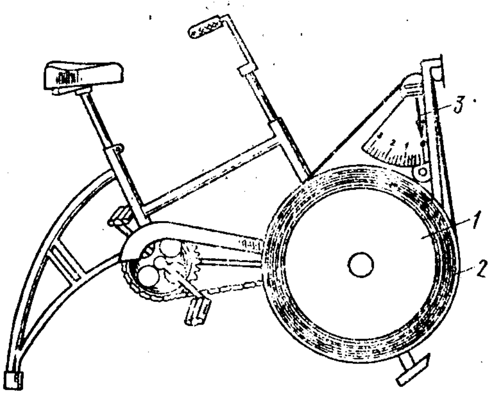
Массаси 75 кг бўлган одам 5 км/соат нормал тезлик билан ҳаракат қилганда 60 Вт га яқин қувватни тараққий эттиради. Тезлик ошган сари бу қувват тез катталашиб, 7 км/соат тезликда 200 Вт га етиб боради. Велосипедда юрганда одам массалари марказининг вазияти пиёда юргандагидан анча кам ўзгаради, оёқлар тезланиши ҳам кам бўлади. Шунинг учун велосипедда юрган вақтда сарфланадиган қувват анча кам бўлади: 9 км/соат тезликда 30 Вт, 18 км/соат тезликда 120 Вт.

Агар силжиш бўлмаса, иш нолга тенг. Шунинг учун юк таянч ёки подставка устида турса ёки ипга осилган бўлса, оғирлик кучи иш бажармайди. Бироқ ёйилган қўлда тош ёки гантелни қўзғатмай ушлаб туриш натижасида қўл ва елка мускулларининг чарчаб кетиши ҳар биримизга маълум. Агар ўтирган киши орқасига юк қўйилса, орқа ва бел соҳаси мускуллари ҳам худди шундай чарчайди. Ҳар икки ҳолда ҳам юк қўзғалмас — иш ҳам йўқ. Чарчашлик эса мускулларнинг иш бажарганлигидан далолат беради. Бундай ишга мускулларнинг статик иши дейилади.

Мускулга ҳаракат нерви бўйича ўтказилувчи нерв қўзғалиши мускулни қўзғатади ва у бир қадар қисқаради. Агар мускул бирор юк билан оғирлаштирилган бўлса, у ҳолда юкни кўтариш иши бажарилади. Мускулнинг қўзғалиш ва қисқариш процесси унинг бўшашиб кетиши билан тамомланади, шу билан бирга у илгариги узунлигига қайтади. Одамда бундай цикл 0,03 дан то 0,06 с давом этади.

Агар мускул қисқараётган пайтда иккинчи марта қўзғатилса, унда қайтадан қисқариш ва юк кўтарилиши пайдо бўлади. Ҳар бир янги қўзғалиш мускул қисқаришини зўрайтиради. Натижада мускул узунлиги, мускулни чўзувчи кучга боғлиқ бўлган муайян чегарага яқинлашади. Агар қўзғалишлар кетма-кет тез-тез бўлиб турадиган бўлса, қисқариш борган сари равонроқ бўлиб боради. Қўзғалиш тахминан ҳар секундда 100 та бўлиб турганда одам мускули амалий жиҳатдан равон қисқарадиган бўлади ва титрашлар сезилмайдиган бўлади. Мавҳум мувозанат пайдо бўлади.

Қисқарган скелет мускулининг давомли мавҳум мувозанатига тетанус дейилади. Тетаник мувозанат фақат мавҳумдир. Агар юкнинг тебранишлари кўринмайдиган бўлса, бунинг сабаби фақат уларнинг жуда кичик бўлишидадир. Энди бизга скелет мускулларининг статик ишлари ҳам тушунарли бўлиб қолди. Ҳақиқатда механикада тушуниладиган статика бу ерда йўқ, балки мускулларнинг жуда майда ва жуда тез, кўзга сезилмайдиган, оғирлик кучига қарши иш бажарадиган, қисқариш ва бўшашишлари мавжуддир. Бошқача айтганда одамнинг статик иши аслда динамик ишдир.



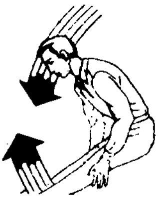
5.4-расм.

Одамнинг ёки унинг айрим аъзоларининг бажарадиган ишини ўлчаш учун эргометр деб аталувчи асбоб ишлатилади. Ўлчашлар техникасининг тегишли бўлимига эргометрия дейилади.

Тормозланувчи велосипед (5.4-расм) эргометр мисолидир. Айланувчи ғилдирак 1 нинг гардиши устидан пўлат лента 2 оширилган. Лента билан ғилдирак гардиши орасидаги ишқаланиш кучи динамометр 3 ёрдамида ўлчанади. Синалувчи бажарган ишнинг ҳаммаси ишқаланиш кучини енгишга сарф этилади (бошқа иш турларини эътиборга олмаймиз). Ғилдирак айланаси узунлигини ишқаланиш кучига кўпайтиб, ҳар айланишда бажариладиган ишни топамиз: айланиш сонини ва синов вақтини билгач, тўла ишни ва ўртача қувватни аниқлаймиз.

§ 3. ВАЗНСИЗЛИК ШАРОИТИДА ОДАМ ТАНАСИНИНГ ҲАРАКАТИ

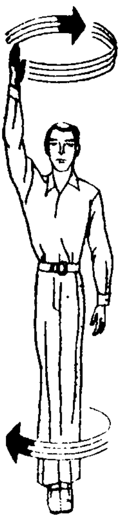
Одамнинг механика қонунларини амалий ўзлаштириши ёш болалик давридан бошланади: биз ўтиришга, оёқда туришга, юришга, югуришга, физикавий машқлар билан шуғулланишга, ишлашга, велосипедда юришга ва ҳ. к. ларга ўрганамиз. Уларнинг ҳаммасига биз асосан тегишли қонунларни назарий жиҳатдан билмай туриб эришамиз. Одам механикавий амалларни онгсиз бажаришга ўрганиб кетади. Жумладан, ядро улоқтириш вақтида одам «ирғитишда» йиқилмаслик учун инстинктив равишда оёғига таралади: болға уришида ишчи гавдасининг бурилишига тўсқинлик қилувчи мускулларини беихтиёр таранглайди ва ҳ. к.



5.5-расм.

Одам механика қонунларига шунчалик ўрганиб кетадики, уларни алоҳида ва кам учровчи ҳоллардагина рўй беришини сеза бошлайди. Бу парадоксаль бир ҳол, албатта.

Механика қонунларининг бундай муҳим амалий рўй беришига вазнсизлик шароитларидаги одамнинг ҳаракат фаолияти ёки бетаянч фазода деб аталувчи ҳол мисол бўла олади. Агар массаси 100 кг бўлган киши вазнсизлик ҳолатда 0, 1 кг массадаги жисмни 3 м/с тезлик билан отиб юборса, у ўзи қарама-қарши томонга 0,3 м/с тезлик билан ҳаракатланиб кетишини ҳисоблаш қийин эмас [(2,13)-ни қаранг]. Агар жисм қўл силтови ёрдамида отилса, одам танаси айлана бошлайди. Импульс ва импульс моменти сақланиш қонунларининг ердагига нисбатан одатдан ташқари шароитларда рўй беришлари шундайдир. Одам фақат бошқа жисмлар билан ўзаро таъсирлана туриб тўхташи мумкин. Агар вазнсизлик ҳолатда одам одатдаги шароитларда гимнастларнинг анча аниқ-равшан қилиб бажарадиган, «бурчак» машқини қилмоқчи бўлса, унда оёқлар ҳаракати импульс моментининг сақланиш қонунига мувофиқ гавданинг аксига айланишини юзага келтиради (5.5-расм). Вазнсизлик шароитда, шунингдек эркин тушишда ҳам, гавданинг бурилишини оёқ-қўлларни айлантириш билан юзага келтирадилар. Масалан, қўлнинг бош тепасида конуссимон айланма ҳаракати гавданинг симметрия ўқи атрофида айланишини юзага келтиради (5.6-расм).



5.6-расм.

Агар одам вазнсизлик шароитида гайка бурайдиган бўлса, унда унинг ўзи қарама-қарши йўналишда айлана бошлайди.

Мазкур бўлимда кўриб чиқилган Ньютон қонунлари вазнсизлик шароитларида ҳам ўз кучини сақлайди, бироқ шароитлар одатдагидек бўлмагани учун одам вазнсизликдаги ҳаракатга «одатланиши» керак. Бошни, қўллар ёки оёқларни бирданига кескин ҳаракатлантириш, бирор нарсани ирғитиб ташлаш, одам танаси ҳаракатини анча ўзгартиб юбориши мумкин.

Бу ҳол космонавтлар томондан космик парвозларга тайёрланишда ҳам, парвоз қилиш вақтида ҳам ҳисобга олинади. Планетанинг очиқ космосга чиққан биринчи одами А. А. Леонов ўз китобида: «бирмунча тайёрланишдан сўнг одам ҳатто вазнсизликда ҳам таянчсиз «сузиш» вақтида ўз танасини исталган йўналишда ҳеч қандай техникавий воситалар ишлатмасдан, фақат мускулларининг зўрайиши ҳисобига тез ва аниқ ориентациялай олиши мумкин». Сўнгра яна: «Вазнсизликда арзимайдиган таянч нуқта бўлгани ҳолда, ҳаракатлар координациясини сезиларли даражада бузмасдан исталган ишни бажариш мумкин бўлса керак»*, деб ёзади.

Яна бир изоҳ. Вазнсизлик шароитларида мускуллар юкдан бўшатилганлиги учун махсус жисмоний машқлар ўтказиб тренировка қилиш ёки космонавтлар ҳаракатини қийинлаштириб, мускуллар ишига қўшимча юк берадиган махсус костюмлар кийишга тўғри келади. Узоқ давом этган космик парвоз қилишларда оғирликнинг (вазнсизлик), центрифугадан фойдаланиб, сунъий равишда яратилиши истисно эмасдир.

---

* Леонов А. А., Лебедев В. И. Психологические особенности деятельности космонавтов. М., «Наука», 1971, б. 215, 217.

ИККИНЧИ
БЎЛИМ

МЕХАНИКАВИЙ ТЕБРАНИШЛАР ВА ТЎЛҚИНЛАР. АКУСТИКА. ГИДРОДИНАМИКА.

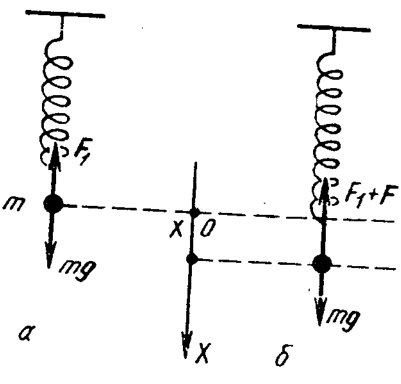
Муҳитнинг туташлиги, яъни унинг фазода бир сидирға узлуксиз жойланиши механикавий тўлқинлар ва гидродинамикани бирлаштиради. Шунинг учун иккинчи бўлим асосий масалаларини туташ муҳитлар механикасига киритиш мумкин.

VI БОБ

МЕХАНИКАВИЙ ТЕБРАНИШЛАР ВА ТЎЛҚИНЛАР

Такрорланувчи ҳаракатлар ёки ҳолат ўзгаришларига *тебранишлар* дейилади: ўзгарувчан электр токи, маятник ҳаракати, юрак иши ва ҳ. к. Табиатидан қатъи назар барча тебранишларга баъзи умумий қонуниятлар хосдир.

Мазкур бобда механикавий тебранишлар ва тўлқинлар кўриб чиқилади.



6.1-расм.

§ 1. ГАРМОНИК ТЕБРАНИШЛАР

Турли тебранишлар орасида энг содда формаси *гармоник тебранишлардир,* бунда тебранувчи миқдор вақт давомида синус ёки косинус қонунига мувофиқ ўзгаради.

Мисол. m массали моддий нуқта (6.1-расм, a) пружинага осилган. Бу вазиятда эластик куч $\mathbf{F}_1$ оғирлик кучи mg ни мувозанатлаштиради. Агар пружинани x миқдорга чўзсак (6.1-расм, $б$), у ҳолда моддий нуқтага каттароқ эластик куч таъсир этади. Гук қонунига мувофиқ эластик кучнинг ўзгариши пружина узунлигининг ўзгаришига ёки нуқта x нинг силжишига пропорционалдир:

$$F = -kx, \qquad (6.1)$$

бу ерда k — пружина қаттиқлиги; минус ишора кучнинг ҳамма вақт мувозанат ҳолат томонга йўналганини кўрсатади: $x>0$ бўлганда $F<0$, $x<0$ бўлганда $F>0$ бўлади.

Иккинчи мисол. Математикавий маятник (6.2-расм) мувозанат ҳолидан кичик α бурчакка оғдирилган. Шундай экан, маятник ҳаракатининг траекториясини OX ўқ билан устма-уст тушган тўғри чизиқ деб ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда.

$$\alpha \approx \sin\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha \approx x/l$$

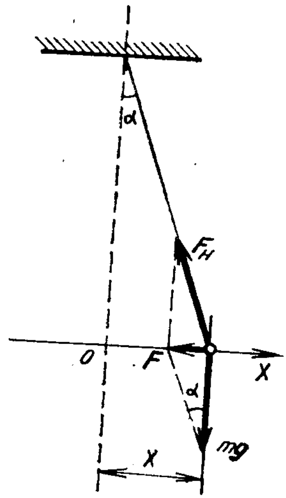
тақрибий тенглик ўринли бўлади; бу ерда x — моддий нуқтанинг мувозанат ҳолга нисбатан силжиши, l — маятник ипининг узунлиги.

Моддий нуқтага ипнинг таранглик кучи $\mathbf{F}_т$ ва оғирлик кучи mg таъсир қиладилар. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\mathbf{F}$ сон жиҳатдан

$$F = -mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = -mgx/l = -kx \qquad (6.2)$$

га тенг, бу ерда

$$k = mg/l. \qquad (6.3)$$



6.2-расм.

(6.2) ва (6.1)-ни таққосласак тенг таъсир этувчининг эластик кучга ўхшаганини кўрамиз, чунки у моддий нуқта силжишига пропорционал бўлиб, мувозанат томонга йўналгандир. Бундай, табиати бўйича ноэластик бўлиб, лекин хоссалари бўйича эластик жисмларнинг кичик деформацияланишларида вужудга келадиган кучларга ўхшаган кучларни квазиэластик кучлар дейилади.

Ньютоннинг иккинчи қонуни формуласига кучнинг (6.2)-ифодасини қўйсак.

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (6.4)$$

га эга бўламиз.

$$\omega_0^2 = k/m^* \qquad (6.5)$$

ни алмаштирсак, иккинчи тартибли дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x.$$

Бу тенгламани ёзиш гармоник қонун

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (6.6)$$

* Нисбат k/m мусбатдир, шунинг учун уни бирор миқдорнинг квадрати билан алмаштириш мақсадга мувофиқдир.

га олиб келади, бунга ўрнига қўйиб ишониш мумкин. Бу тенгламада $\omega_0 t+\varphi_0=\varphi$ — тебранишлар фазаси; φ_0 — $t=0$ даги бошланғич фаза, ω_0 — тебранишлар доиравий частотаси, A — уларнинг амплитудаси. Тебранишларнинг амплитуда ва бошланғич фазаси ҳаракатнинг бошланғич шартлари, яъни моддий нуқтанинг вақт моменти $t=0$ даги вазияти ва тезлиги бўйича аниқланади.

Шундай қилиб, пружинага осилган (пружинали маятник) ёки ипга осилган (математик маятник) моддий нуқта гармоник тебранади. Мазкур тебранишлар даврини

$$T=2\pi/\omega_0 \tag{6.7}$$

формула бўйича топиш мумкин. (6.5)-дан фойдаланиб пружинали маятник учун

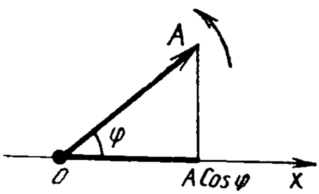
$$T=2\pi\sqrt{m/k} \tag{6.8}$$

ни оламиз; k ўрнига ифода (6.3)-ни қўйиб, математик маятник учун

$$T=2\pi\sqrt{l/g} \tag{6.9}$$

ни топамиз.

Гармоник тебранишларни векторли диаграммалар ёрдамида тасвирлаш жуда қулайдир. Бу методнинг мазмуни қуйидагича. Абсцисса ўқининг бошидан вектор **A** ни чизамиз (6.3-расм); бу векторнинг OX ўқдаги проекцияси $A\cos\varphi$ га тенг. Агар вектор A соат стрелкасига тескари йўналишда ω_0 бурчак тезлиги билан текис айланадиган бўлса, $\varphi=\omega_0 t=\varphi_0$ бўлади (бу ерда φ_0—φ нинг бошланғич қиймати) ва вектор **A** нинг ўқ **OX** даги проекцияси вақт давомида (6.6)-қонун бўйича ўзгаради. Бундай тасаввурлашда текис айланувчи вектор **A** нинг катталиги тебранишлар амплитудасидир, вектор A билан ўқ OX орасидаги бурчак — тебранишлар фазаси, мазкур бурчакнинг дастлабки қиймати — бошланғич фаза, вектор **A** айланишининг бурчак тезлиги тебранишларнинг доиравий частотаси, вектор **A** нинг ўқ **OX** даги проекцияси — тебранувчи нуқтанинг силжишидир.



6.3-расм.

Гармоник тебраниш вақтидаги моддий нуқтанинг тезлигини топиш учун ифода (6.6)-дан ҳосила олиш лозим:

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega_0 sin(\omega_0 t+\varphi_0)=-v_m\, sin(\omega_0 t+\varphi_0), \tag{6.10}$$

бу ерда $v_m=A\omega_0$ максимал тезлик (тезлик амплитудаси).

Маълум тригонометрик формулаларга асосан (6.10)-ни ўзгартирамиз:

$$v=v_m \cos\left[(\pi/2)+(\omega_0 t+\varphi_0)\right]. \qquad (6.11)$$

(6.11) ва (6.6)-ни таққослаб, тезликнинг фазаси силжиш фазасидан $\pi/2$ ча ортиқ эканини, яъни тезликнинг фаза бўйича силжишдан $\pi/2$ қадар олдинроқ юрганини кўрамиз.

(6.10)-ни дифференциаллаб, тезланишни топамиз:

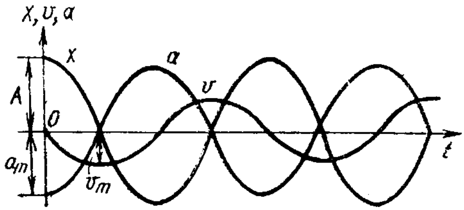
$$a=dv/dt=-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=-a_m\cos(\omega_0 t+\varphi_0), \qquad (6.12)$$

бу ерда $a_m=A\omega_0^2$ — максимал тезланиш (тезланиш амплитудаси). (6.12) ўрнида ёзамиз:

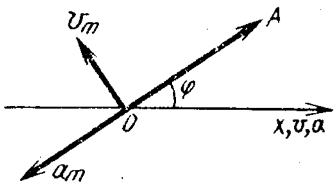
$$a=a_m\cos\left[\pi+(\omega_0 t+\varphi_0)\right]. \qquad (6.13)$$

(6.13) ва (6.6)-ни таққослашдан тезланиш ва силжиш фазаларининг π қадар фарқланганликлари, яъни бу катталикларнинг қарама-қарши фазаларда ўзгарганликлари келиб чиқади.

Силжиш, тезлик ва тезланишнинг вақт давомидаги графикавий боғланишлари 6.4-расмда, уларнинг векторли диаграммалари эса — 6.5-расмда кўрсатилган.



6.4-расм.



6.5-расм.

§ 2. ТЕБРАНМА ҲАРАКАТНИНГ КИНЕТИК ВА ПОТЕНЦИАЛ ЭНЕРГИЯСИ

Тебранувчи моддий нуқтанинг кинетик энергиясини тезлик ифодаси (6.10)-дан фойдаланиб, умумий формула (2.31) бўйича ҳисоблаш мумкин:

$$E_к=\frac{mv_m^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)=\frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)=$$

$$=kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)/2. \qquad (6.14)$$

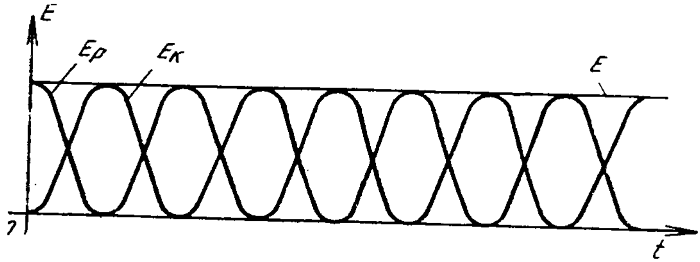
Эластик деформациянинг потенциал энергиясини ҳисоблаш умумий формуласидан фойдаланиб тебранма ҳаракатнинг потенциал энергиясини топамиз: $E_p = kx^2/2$ ва нуқта силжишининг ифодаси (6.6)-дан фойдаланиб:

$$E_p = kA^2 cos^2 (\omega_0 t + \varphi_0)/2. \qquad (6.15)$$

Кинетик (6.14) ва потенциал (6.15) энергияларини қўшиб, тебранувчи моддий нуқтанинг тўла механикавий энергиясини топамиз:

$$E = E_k + E_p = kA^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)/2 + kA^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)/2 =$$

$$= kA^2 [sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)]/2 = kA^2/2. \qquad (6.16)$$



6.6-расм.

Илгари кўрсатилганича, ишқаланиш кучлари бўлмаган ҳолда системанинг тўла механикавий энергияси ўзгармайди:

$$E = kA^2/2 = m\omega_0^2 A^2/2. \qquad (6.17)$$

Тебранувчи системанинг кинетик, потенциал ва тўла механикавий энергиялари вақтга боғлиқлигининг график боғланиши 6.6-расмда кўрсатилган.

§ 3. ГАРМОНИК ТЕБРАНИШЛАРНИ ҚЎШИШ

Моддий нуқта бир вақтда бир неча тебранишларда иштирок этиши мумкин. Бу ҳолда натижаловчи ҳаракат траекториясини топиш учун тебранишларни қўшиш лозим. Гармоник тебранишларни қўшиш энг содда равишда бажарилади. Шундай икки масалани кўриб чиқамиз.

1. *Бир тўғри чизиқ бўйича йўналган гармоник тебранишларни* қўшиш.

Моддий нуқта бир вақтда битта чизиқ бўйича бўлаётган иккита тебранишда иштирок қилаётир дейлик. Бундай тебранишлар аналитик суратда қуйидаги тенгламалар билан ифодаланади;

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_{01} t + \varphi_{01}); \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_{02} t + \varphi_{02}) \qquad (6.18)$$

Қўшилувчи тебранишларнинг частоталари бир хил, яъни $\omega_{01}=\omega_{02}=\omega_0$ бўлсин дейлик, у ҳолда нуқтанинг натижаловчи силжиши

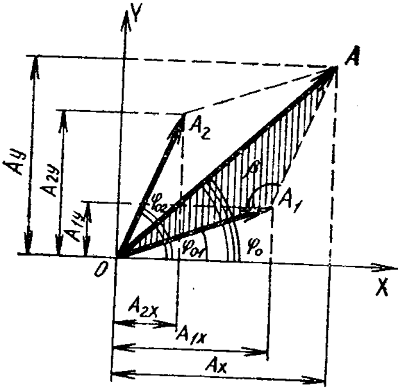
$$x=x_1+x_2=A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_{01})+A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_{02}) \quad (6.19)$$

га тенг бўлади.

Шундай қўшишни векторли диаграмма ёрдамида бажарайлик. $\mathbf{A}_1$ ва $\mathbf{A}_2$ векторларнинг (6.7-расм) бошланғич вақт моментидаги вазиятларини кўрсатамиз; бу векторлар билан ўқ OX орасидаги бурчаклар қўшилувчи тебранишларнинг бошланғич фазалари φ_{01} ва φ_{02} га тенг.

Вектор $\mathbf{A}$ — натижаловчи тебранишларнинг амплитудасидир. $\mathbf{A}_1$ ва $\mathbf{A}_2$ бир хил бурчак тезлиги билан айланганликлари учун, уларнинг йиғиндиси — вектор $\mathbf{A}$ — ҳам худди шундай бурчак тезлиги билан айланади, яъни ω_0 доиравий частотали натижаловчи ҳаракат гармоник тебранма ҳаракат бўлади:

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0) \quad (6.19a)$$



6.7-расм.

Бу тебранишларнинг амплитудаси A ни ва бошланғич фазаси φ_0 ни A_1, A_2, φ_{01} ва φ_{02} ларнинг берилган қийматлари орқали ифодалаймиз. 6.7-расмда штрихланган учбурчакка косинуслар теоремасини қўллаб:

$$A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos\beta$$

ни ҳосил қиламиз. — $\cos\beta=-\cos[\pi-(\varphi_{02}-\varphi_{01})]=\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})$ бўлгани учун

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})}. \quad (6.20)$$

6.7-расмдан кўринишича, $\mathrm{tg}\,\varphi_0$ A нинг ўқ OY даги проекциясининг ўқ OX ни проекциясига нисбати, яъни A_y/A_x га тенг. Йиғинди проекциясининг проекциялар йиғиндисига тенг эканлигини ҳисобга олсак,

$$A_y=A_{1y}+A_{2y}=A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02},$$
$$A_x=A_{1x}+A_{2x}=A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02},$$
$$\mathrm{tg}\,\varphi_0=A_y/A_x=(A_1\sin\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02})/(A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02}) \quad (6.21)$$

га эга бўламиз

Шундай қилиб, қўйилган масала ечилди: (6.20) ва (6.21)-формулалар ёрдамида натижаловчи тебранишнинг амплитудаси

5*

ва бошланғич фазасини аниқлаш мумкин. (6.20)-дан қуйидаги хусусий ҳоллар келиб чиқади:

1) $\varphi_{02}-\varphi_{01}=2k\pi$, $\cos 2k\pi=+1$, бу ерда $k=0, 1, 2, \ldots$ ва ҳ. к. (6.8-расм, *а*), у ҳолда

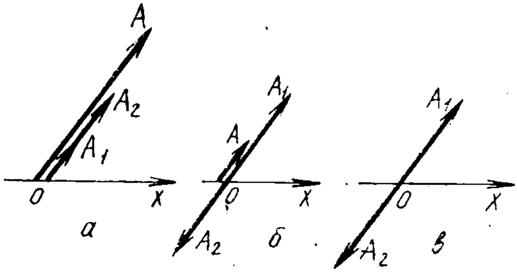
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=A_1+A_2, \qquad (6.22)$$

яъни бошланғич фазалар айирмаси бутун сонли π ларга тенг бўлса, натижаловчи тебранишларнинг амплитудаси қўшилувчи тебранишлар амплитудаларининг йиғиндисига тенг бўлади;

2) $\varphi_{02}-\varphi_{01}=(2k+1)\pi$, $\cos (2k+1)\pi=-1$ ва у ҳолда

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2}=|A_1-A_2|, \qquad (6.23)$$

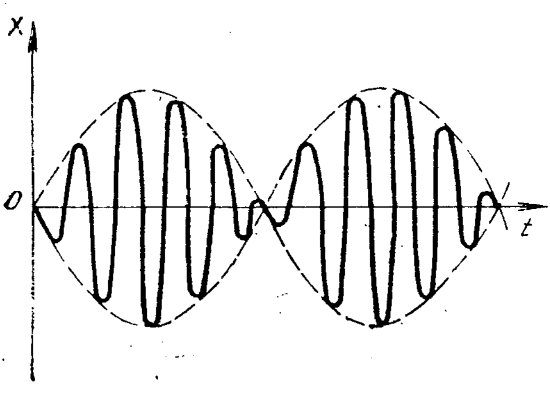
яъни бошланғич фазалар айирмаси бутун сонли π ларга тенг бўлса, натижаловчи тебранишнинг амплитудаси қўшилувчи тебранишлар амплитудаларининг айирмасига тенг бўлади (6.8-расм, *б*). Жумладан, $A_1=A_2$ бўлганда $A=0$, яъни тебраниш йўқ (6.8-расм, *в*). Агар моддий нуқта, бир вақтда амплитудалари бирдай, фазалари қарама-қарши бўлган икки тебранишда иштирок этса, нуқтанинг қўзғалмай тураверишн кўриниб турибди.



6.8-расм.

Агар қўшилувчи тебранишларнинг частоталари бир хил бўлмаса, у ҳолда мураккаб тебраниш гармоник тебраниш бўлмайди.

Қўшилувчи тебранишлар частоталари бир-биридан кам фарқланган $\omega_{01}\approx\omega_{02}$ ҳол қизиқарлидир. Бу ҳолдаги натижаловчи тебраниш амплитудаси секин ўзгарувчи гармоник тебранишга ўхшайди (амплитудавий модуляция). Бундай тебранишларга *тепинишлар* дейилади. Уларнинг графиги 6.9-расмда кўрсатилган.



6.9-расм.

2. *Ўзаро перпендикуляр гармоник тебранишларнинг қўшилиши.* Фараз қилайлик, моддий нуқта бир вақтда бири OX ўқи, иккинчиси OY ўқи бўйича йўналган иккита тебранишда ишти-

рок қилаётган бўлсин. Тебранишлар қуйидаги тенгламалар билан берилган:

$$x=A_1\cos(\omega_{01}t+\varphi_{01});\quad y=A_2\cos(\omega_{02}t+\varphi_{02}). \qquad \mathbf{(6.24)}$$

Тебранишлар частоталари бир хил бўлсин дейлик, яъни $\omega_{01}=\omega_{02}=\omega_0$; у ҳолда

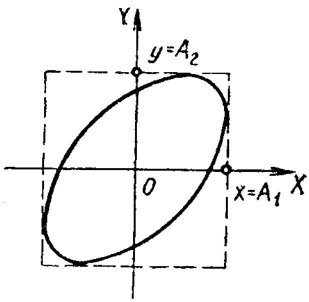
$$x=A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_{01});\ y=A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_{02})\ \text{бўлади}. \qquad \mathbf{(6.25)}$$

(6.25)-тенгламалар моддий нуқта ҳаракатининг траекториясини параметрий формада берадилар. Агар бу тенгламаларга t нинг ҳар хил қийматлари қўйилса, у ҳолда x ва y координаталарини аниқлаш мумкин, координаталар тўплами эса траекториядир. Траекторияни боғланиш $y=f(x)$ шаклида равшанроқ ифодалаш мумкин, бунинг учун (6.25)-тенгламадан вақтни чиқариб ташлаш керак. Номураккаб, лекин узун математик алмаштиришларни ташлаб юбориб, қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\sin^2(\varphi_{02}-\varphi_{01}). \qquad \mathbf{(6.26)}$$

Бу *эллипс* тенгламасидир.

Шундай қилиб, бир вақтда бир хил частотали ўзаро перпендикуляр бўлган икки гармоник тебранишда иштирок этган моддий нуқта эллиптик траектория бўйича ҳаракат қилади (6.10-расм). (6.26)-дан баъзи хусусий ҳоллар келиб чиқади:



6.10-расм.

1) $\varphi_{02}-\varphi_{01}=(2k+1)\pi/2$, бу ерда $k=0, 1, 2, \ldots$, $\cos(2k+1)\pi/2=0$, $\sin(2k+1)\pi/2=1$, у ҳолда

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1. \qquad (6.27)$$

Бу, координата ўқларига нисбатан симметрик жойланишга мос келадиган (6.11-расм, *а*), эллипс тенгламасининг каноник кўринишидир, $A_1=A_2=R$ бўлганда (6.27)-дан R радиусли айлана (16.11-расм, *б*) тенгламасига эга бўламиз:

$$x^2+y^2=R^2; \qquad \mathbf{(6.28)}$$

2) $\varphi_{02}-\varphi_{01}=k\pi$, бу ерда $k=0, 1, 2, \ldots$, $\cos k\pi=\pm1$, $\sin^2 k\pi=0$, у ҳолда

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}\pm2\frac{xy}{A_1A_2}=0, \qquad \mathbf{(6.29)}$$

ёки алмаштиришлардан сўнг

$$\left(\frac{x}{A_1}\pm\frac{y}{A_2}\right)^2=0,\quad \frac{x}{A_1}\pm\frac{y}{A_2}=0,\qquad y=\pm\frac{A_2}{A_1}x. \qquad \mathbf{(6.30)}$$

Бу эллипс айнишидан ҳосил бўлган тўғри чизиқ тенгламасидир (6.12-расм, *а*, унга тенглама (6.30)-да «+» ишора, 6.12-расм, *б* да — «—» ишора мос келади).

Частоталари бир хил бўлган ўзаро перпендикуляр тебранишлар қўшилганда моддий нуқтанинг, *Лиссажу фигуралари* деб аталадиган турли траекториялари ҳосил бўлади. Лиссажу фигурасининг шакли частоталар муносабати $\omega_1:\omega_2$ га ва қўшилувчи тебранишлар бошланғич фазаларининг айирмаси $(\varphi_{01}-\varphi_{02})$ га боғлиқ бўлади (6.13-расм): а) $\omega_1:\omega_2=1:2$, $\varphi_{01}-\varphi_{02}=0$; б) $\omega_1:\omega_2=1:2$, $\varphi_{01}-\varphi_{02}=\pi/2$; в) $\omega_1:\omega_2=3:2$, $\varphi_{01}-\varphi_{02}=\pi/2$; г) $\omega_1:\omega_2=4:3$, $\varphi_{01}-\varphi_{02}=\pi/2$;

§ 4. СЎНУВЧИ ТЕБРАНИШЛАР

Гармоник тебранишлар кўриб чиқилганда реал системалардаги мавжуд бўлган ишқаланиш ва қаршилик кучлари ҳисобга олинмасди. Бу кучлар таъсири ҳаракат характерини анча ўзгартиради, тебранишлар *сўнувчи* бўлади.

Агар системага, квазиэластик кучдан бошқа, муҳитнинг қаршилик кучлари (ишқаланиш кучлари) таъсир этса, Ньютоннинг иккинчи қонунини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+F_{\text{ишқ}}. \qquad (6.31)$$

Бу дифференциал тенгламани ечиш учун ишқаланиш кучи $F_{\text{ишқ}}$ ни билиш зарур. Одатда, жуда катта бўлмаган амплитуда ва частоталарда ишқаланиш кучларини ҳаракат тезлигига пропорционал бўлади деб ҳисобланади ва тезликка қарама-қарши йўналган бўлади:

$$F_{\text{ишқ}}=-rv=-r\frac{dx}{dt} \qquad (6.32)$$

бу ерда r — муҳитнинг ҳаракатга қаршилик кўрсатиш хоссасини характерловчи ишқаланиш коэффициенти. (6.32)-ни (6.31)-га қўйиб,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-r\frac{dx}{dt}$$ га эга бўламиз

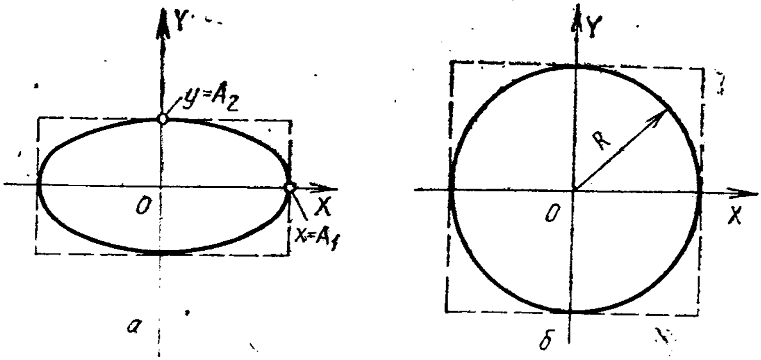
ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \text{ бўлади}, \qquad (6.33)$$

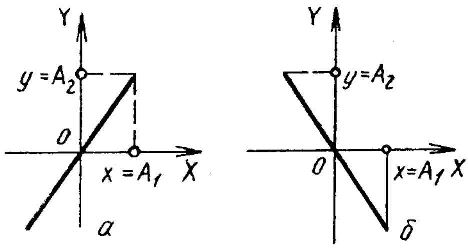
бу ерда $2\beta=r/m$, $\omega_0^2=k/m$, β — сўниш коэффициенти, ω_0 — системанинг хусусий доиравий тебранишлари частотаси. (6.33)-тенгламанинг ечими

$$\omega^2=\omega_0^2-\beta^2$$

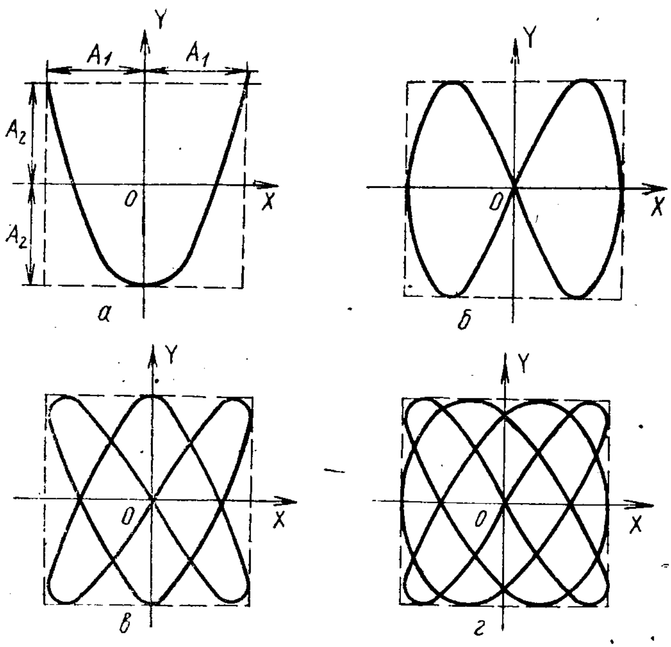
нинг ишорасига жиддий боғлиқ бўлади, бу ерда ω — сўнувчи тебранишларнинг доиравий частотаси, $\omega_0^2-\beta^2>0$ шарт бажарилган-



6.11-расм.



6,12-расм.



6.13-расм.

да ω ҳақиқий катталик бўлади ва (6.33)-нинг ечими қуйидагича бўлади:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (6.34)$$

Бу функциянинг графиги 6.14-расмда узлуксиз чизиқ билан кўрсатилган, пунктир билан эса амплитуда ўзгариши кўрсатилган:

$$A = \pm A_0 e^{-\beta t} \qquad (6.35)$$

Сўнувчи тебранишларнинг даври ишқаланиш коэффициентига боғлиқ ва қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (6.36)$$

Ишқаланиш жуда кичик бўлганда ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) сўнувчи тебранишлар даври сўнмас эркин тебранишлар даврига яқин бўлади: $T \approx 2\pi/\omega_0$.

Тебранишларнинг сўниш тезлиги сўниш коэффициенти билан белгиланади: β қанча катта бўлса, муҳитнинг тормозловчи таъсири шунча кучли бўлади ва амплитуда шунча тез камаяди. Аммо сўниш даражасини амалда кўпинча *сўнишнинг логарифмик декременти* билан характерлайдилар. Сўнишнинг логарифмик декременти деганда бир-биридан тебраниш даврича вақт интервали билан ажралган, икки кетма-кет амплитудалар нисбатининг натурал логарифми тушунилади:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T},$$

демак, сўниш коэффициенти ва сўнишнинг логарифмик декременти анча содда муносабат билан боғлангандир:

$$\lambda = \beta T \qquad (6.37)$$

(6.36)-формуладан маълумки, сўниш кучли ($\beta > \omega_0^2$) бўлганда тебраниш даври мавҳум миқдордир. Энди бу ҳолдаги ҳаракат даврий бўлмайди ва *нодаврий (апериодик)** деб аталади. Бўлиши мумкин бўлган нодаврий ҳаракатлар график равишда 6.15-расмда кўрсатилган.

Юқорида кўрилган сўнмас (§ 1 ни қаранг) ва сўнувчи тебранишларга *хусусий* ёки *эркин* тебраниш дейилади. Бундай тебранишлар дастлабки силжиш ёки бошланғич тезлик туфайли ҳосил бўлиб, ташқи таъсир бўлмаганда дастлабки йиғилган энергия ҳисобига давом этади.

---

* Агар бирор физик катталик мавҳум қийматга эга бўлиб қолса, бу мос ҳодисанинг одатдан ташқари, «экстраординар» бўлганидан далолат беришини эслатиб ўтамиз. Текширилган мисолнинг экстраординарлиги процесснинг даврий бўлмай қолишидадир.

§ 5. МАЖБУРИЙ ТЕБРАНИШЛАР. РЕЗОНАНС

Даврий қонун бўйича ўзгарувчи ташқи куч таъсирида системада ҳосил бўладиган тебранишлар *мажбурий* тебранишлар деб айтилади.

Моддий нуқтага квазиэластик куч ва ишқаланиш кучидан ташқари ташқи мажбурловчи куч

$$F = F_0 \cos \omega t$$

таъсир этади, деб фараз қилайлик: бу ерда F_0 — амплитуда, ω — мажбурловчи кучнинг доиравий частотаси. Дифференциал тенглама тузамиз (Ньютоннинг иккинчи қонуни):

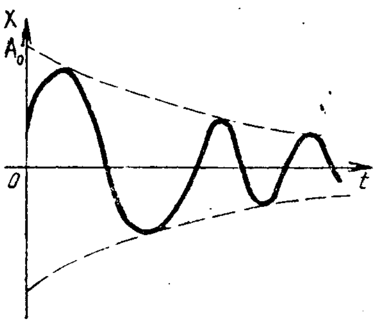
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 cos \omega t,$$

ёки

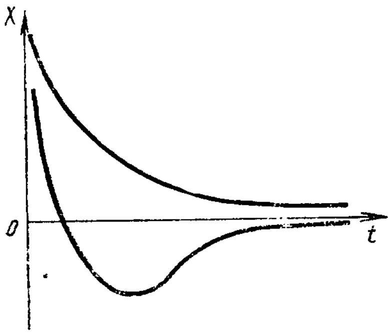
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 cos \omega t, \tag{6.38}$$

бу ерда $f_0 = F_0/m$; β ва ω_0 — § 4 да кўрсатилганлардагидек.

(6.38)-дифференциал тенгламанинг ечими икки ҳад йиғиндисидир. Улардан бири, сўнувчи тебранишлар (6.34)-га мос келгани (6.14-расмга қаранг), фақат тебранишлар барқарорлашаётганда-



6.14-расм.



6.15-расм.

гина роль ўйнайди. Вақт ўтгач уни эътиборсиз қолдириш мумкин. Иккинчи ҳад моддий нуқтанинг барқарорлашган мажбурий тебранишлардаги силжишини тасвирлайди:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{6.39}$$

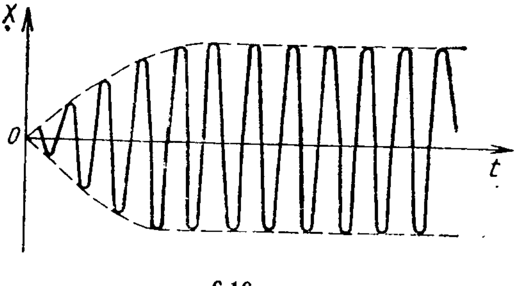
бу ерда

$$A = f_0/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \tag{6.40}$$

$$tg\varphi_0 = -2\beta\omega/(\omega^2 - \omega_0^2). \tag{6.41}$$

(6.39)-дан кўринишича, гармоник ўзгариб турган мажбурловчи куч таъсири остида юзага келувчи барқарорлашган мажбурий тебраниш ҳам гармоникдир. Мажбурий тебранишнинг частотаси мажбурловчи куч частотасига тенг. Графиги 6.16-расмда кўрсатилган мажбурий тебранишлар мажбурловчи кучга нисбатан фаза бўйича силжигандир.

Мажбурий тебранишнинг амплитудаси (6.40) мажбурловчи куч амплитудасига тўғри пропорционал бўлиб, муҳитнинг сўниш коэффициенти ва хусусий ҳамда мажбурий тебранишлар доиравий частоталари билан бирмунча мураккаб боғланади. Агар система учун ω_0 ва β берилган деб ҳисоблан-са, у ҳолда мажбурий тебранишлар амплитудаси мажбурловчи кучнинг бирорта муайян **резонансий частота** деб аталувчи частотасида максимал қийматга эга бўлади. Берилган ω_0 ва β да максимал амплитудага эришиш ҳодисаси резонанс дейилади. Агар (6.40)-даги маҳражнинг қийматини минимумга тенг бўлиш шарти аниқланса, резонанс доиравий частотаси $\omega_{рез}$нинг қийматини топиш мумкин. Натижада



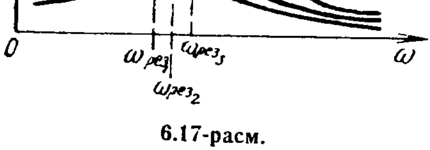
6.16-расм.

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \text{ га эга бўламиз.} \qquad (6.42)$$

(6.42)-ни (6.40)-га қўйиб чиқсак, резонанс вақтидаги амплитуда ифодасини топамиз

$$A_{рез}=f_0/2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}. \qquad (6.43)$$

(6.43)-дан кўринишича, қаршилик бўлмаган ($\beta=0$) ҳолда резонанс вақтида мажбурий тебранишларнинг амплитудаси чексиз катта бўлиб кетади. Шу билан бирга (6.42)-дан $\omega_{рез}=\omega_0$ эканлиги келиб чиқади, яъни сўниш бўлмаган системада резонанс мажбурловчи кучнинг частотасига тенглашганда вужудга келади. Сўниш коэффициентининг қиймати ҳар хил бўлганда мажбурий тебранишлар амплитудаси билан мажбурловчи куч доиравий частотаси орасидаги график боғланиш 6.17-расмда кўрсатилган.



6.17-расм.

Механикавий резонанс ҳам фойдали, ҳам зарарли ҳодиса бўлиши мумкин. Резонанснинг зарарли таъсири асосан унинг бузиб ташлашининг мумкинлигидир. Жумладан, техникада ҳар хил вибрацияларни эътиборга олганда резонанс ҳосил бўлиши мумкин бўлган шароитларнинг олдини олиш даркор, акс ҳолда вайрона ва ҳалокат рўй бериши мумкин. Одатда жисмлар бир неча хусусий тебраниш частоталарига уларга мос бир неча резонансий частоталарга эга бўлади.

Агар одам ички органларининг сўниш коэффициенти унча катта бўлмаганда ташқи вибрациялар ёки товуш тўлқинлари таъсиридан бу органларда ҳосил бўлувчи резонанс ҳодисалари фожиали натижаларни: органлар йиртилиши, бойламлар шикастланиши ва шунга ўхшашларни вужудга келтирган бўлар эди. Лекин бундай ҳодисалар ўртача ташқи таъсиротларда амалий кузатилмайди, чунки биологик системаларда сўниш коэффициенти етарли даражада каттадир. Шундай бўлса-да, кучли механик вибрациялар киши организмига зарарли таъсир этади ва буни тегишли механизм ва машиналарни конструкциялашда ҳисобга олиш лозим бўлади.

§ 6. МЕХАНИКАВИЙ ТЎЛҚИНЛАР ТЕНГЛАМАСИ

Фазода тарқалувчи ва энергия ташувчи механикавий ғалаёнларга *механикавий тўлқин* дейилади.

Механикавий тўлқинлар икки хил бўлади: эластик тўлқинлар — эластик деформацияларнинг тарқалиши ва суюқлиқ сиртидаги тўлқинлар.

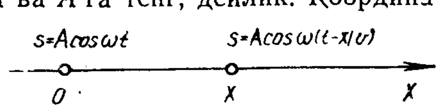
Эластик тўлқинлар муҳит зарралари орасидаги мавжуд боғланишлар туфайли вужудга келади: битта заррачанинг мувозанат ҳолатидан силжиши қўшни заррачалар силжишини юзага келтиради. Бу процесс фазода чекланган тезлик билан тарқалади.

Тўлқин тенгламаси тўлқинли процессда қатнашаётган тебранувчи нуқта силжиши s билан унинг мувозанат ҳоли координаталари ва вақт орасидаги муносабатни ифодалайди. Йўналиш OX бўйича тарқалувчи тўлқин учун бу муносабат умумий шаклда қуйидагича ёзилади:

$$s=f\ (x, t).$$

Агар s ва x бир тўғри чизиқ бўйича йўналган бўлсалар, тўлқин бўйлама бўлади, агар улар ўзаро перпендикуляр бўлсалар — тўлқин кўндаланг.

Ясси тўлқин тенгламасини чиқарамиз. Тўлқин OX ўқи бўйича (6.18-расм) сўнмасдан шундай тарқаладики, барча тебранувчи нуқталар амплитудалари бир хил ва A га тенг, дейлик. Координатаси $x=0$ (тебранишлар манбаи) бўлган нуқтанинг тебранишини тенглама



6.18-расм.

$$s=A\cos\omega t$$

билан берайлик. Ғалаён координаталар бошидан бирорта ихтиёрий x координатали нуқтагача τ вақтда етиб боради, шунинг учун бу нуқтанинг тебранишлари кечикиб орқада қолади:

$$s = A\cos\omega\,(t-\tau). \tag{6.44}$$

Вақт ва тўлқиннинг тарқалиш тезлиги $\tau = x/v$ муносабат орқали боғланганлари учун (6.44)-ўрнига

$$s = A\cos\omega\,(t-x/v) \tag{6.45}$$

ни ёзаоламиз. Бу эса *ясси тўлқин тенгламасининг* худди ўзи бўлиб, у тўлқинли процессда иштирок этувчи, исталган нуқтанинг исталган вақт моментидаги силжишини аниқлашга имкон беради. Косинус олдидаги аргумент $\varphi = \omega\,(t-x/v)$ га тўлқин *фазаси* дейилади. Бир вақтда бир хил фазага эга нуқталарнинг геометрик ўрнига тўлқин *фронти* дейилади. Муҳокама қилинган ҳол учун тўлқин фронти, OX ўқига перпендикуляр, барча нуқталарига бир вақтда бир хил фаза тўғри келадиган, текислик $x=\text{const}$ бўлади. *Ясси* тўлқин номи ҳам ана шундан келиб чиққандир.

Тебранишларнинг қайд этилган фазасининг тарқалиш тезлиги бўлмиш тезлик v га кўпинча ф а з о в и й т е з л и к дейилади. Фараз қилайлик,

$$\varphi = \omega(t-x/v) = \text{const}$$

бўлсин. Бу тенгликни дифференциаллаб

$$0 = \omega(dt - dx/v) \quad \text{ни оламиз,}$$

бундан

$$v = dx/dt.$$

Бундан фазаси қайд қилинган тебранишларнинг тарқалиш тезлиги тўлқин тарқалиши тезлигининг ўзгинаси эканлиги кўриниб турибди.

Фазовий тезликдан бошқа яна г р у п п а в и й тезлик тушунчаси ҳам мавжуд, реал тўлқинни биргина гармоник тенглама (6.45)-билангина эмас, балки тўлқинлар группаси билан тасвирлаш зарур бўлган ҳолдагина бу тушунчани киритиш мақсадга мувофиқ. Фазалари айни моментда 2π га фарқ қилувчи икки нуқта орасидаги масофа *тўлқин узунлиги* λ дейилади. У тўлқиннинг бир тебраниш даврида ўтган масофасига тенг:

$$\lambda = Tv. \tag{6.46}$$

Тўлқин тенгламаси (6.45) муҳитда ғалаён тарқалиш процессини тасвирловчи хусусий ҳосилаларга нисбатан умумий дифференциал тенгламани мумкин бўлган ечимларидан биридир. Бундай тенгламага *тўлқинавий тенглама* дейилади.

Тўлқинавий тенглама ҳақида тасаввурга эга бўлиш учун (6.45)-ни вақт бўйича икки марта дифференциаллайлик:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -A\omega\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right),\quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right), \tag{6.47}$$

x координата бўйича ҳам икки марта дифференциаллайлик:

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\mathrm{A}\,\frac{\omega}{v}\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right),\quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=-\mathrm{A}\,\frac{\omega^2}{v^2}\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right). \qquad (6.48)$$

(6.47) ва (6.48)-даги иккинчи ҳосилаларни таққослаб, бир ўлчамли тўлқин тенгламасини оламиз:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \qquad (6.49)$$

Хусусий ҳосилали тенгламаларни ечиш мазкур курс чегарасидан ташқаридадир. Ечимларнинг бири (6.45)-дан маълум. Бироқ қуйидагиларни эслатиш муҳимдир. Агар механикавий, иссиқлик, электрик, магнитавий ва ҳ. к. бирор физикавий катталикнинг ўзгариши (6.49)-тенгламага мос келса, бу ҳол шу физикавий катталик v тезлик билан тўлқин шаклида тарқалади демакдир.

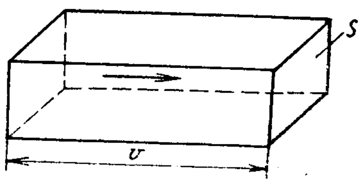
§ 7. ТЎЛҚИН ЭНЕРГИЯСИНИНГ ОҚИМИ. УМОВ ВЕКТОРИ

Тўлқинли процесс энергия тарқалиши билан боғлиқ. Кўчирилган энергиянинг соний характеристикаси энергия оқимидир.

Энергия оқими сон жиҳатдан вақт бирлигида бирор сирт орқали тўлқин кўчирган энергияга тенг. СИ системасида энергия оқимининг бирлиги 1 Дж/с, ёки 1 Вт дир.

Энергия оқими Φ нинг тебранувчи нуқталар энергияси ва тўлқин тарқалиш тезлиги билан боғланишини аниқлаймиз.

Ичида тўлқин тарқалаётган муҳитдан тўғри бурчакли параллелепипед шаклида (6.19-расм) ҳажм ажратамиз; унинг асоси S, қирраси эса сон жиҳатдан v га тенг бўлиб, тўлқин йўналишига мос келади (стрелка билан кўрсатилган). Шунга кўра S юзидан 1 с да ҳажми Sv га тенг бўлган параллелепипед ичида тебранувчи заррачаларга эга бўлган энергия ўтади. Ана шунинг ўзи энергия оқимидир:



6.19-расм.

$$\Phi=w_\rho Sv, \qquad (6.50)$$

бу ерда w_ρ — тебранма ҳаракат энергиясининг ҳажмий зичлиги.

Тўлқин тарқалган йўналишга перпендикуляр жойланган бирлик юзага нисбатан олинган энергия оқими *энергия оқимининг зичлиги* ёки *тўлқин интенсивлиги* дейилади:

$$I=\Phi/S=w_\rho v,$$

ёки векторли формада

$$\mathbf{I}=w_\rho\mathbf{v}. \qquad (6.51)$$

Тўлқин йўналишига перпендикуляр бирлик юзадан ўтувчи энергия оқимига тенг бўлиб, тўлқин тарқалиш йўналишини кўрсатувчи вектор $\mathbf{I}$ га *Умов вектори* дейилади. СИ системада Умов векторининг ўлчов бирлиги 1 Вт/м^2 бўлади.

Эластик тўлқин ташиган энергия деформация потенциал энергияси ва тебранувчи зарралар кинетик энергиясидан ташкил топади. Бу ҳолда энергия ҳажмий зичлиги w_ρ нинг нималарга боғлиқлигини кўрсатамиз. Агар (6.17)-формулада айрим заррача массаси ўрнига модда зичлиги ρ ни қўйсак,

$$w_\rho = \rho A^2 \omega^2/2 \tag{6.52}$$

га эга бўламиз

(6.52)-ни (6.51)-га қўйсак,

$$\mathbf{I} = (\rho A^2 \omega^2/2)\ \mathbf{v} \tag{6.53}$$

га эга бўламиз.

Шундай қилиб, эластик тўлқин учун Умов вектори муҳитнинг зичлигига, заррачалар тебраниш амплитудасининг квадратига, тебранишлар частотасининг квадратига ва тўлқин тарқалиш тезлигига боғлиқ экан.

§ 8. ДОПЛЕР ЭФФЕКТИ

Тўлқин манбаи билан кузатувчининг бир-бирига нисбатан ҳаракатланиши натижасида кузатувчи (тўлқинларни қабул қилувчи — приёмник) қабул қиладиган тебранишлар частотасининг ўзгаришига *Доплер эффекти* дейилади.

Кузатувчи муҳитга нисбатан ҳаракатланмай турган тўлқинлар манбаига $v_к$ тезлик билан яқинлашаётир деб фараз қилайлик. Бу ҳолда у вақт бирлигида ҳаракат йўқдагидан кўра кўпроқ тўлқинларга учрайди. Бу қабул этилувчи частота ν' манба чиқарадиган тўлқин частотасидан кўпроқ демакдир. Лекин тўлқин узунлиги, частота ва тўлқинлар тарқалиш тезлиги $\nu = v/\lambda$ муносабат билан боғланганлари учун

$\nu' = (v - v_к)/\lambda$ ни ёзиш мумкин. (6.54)

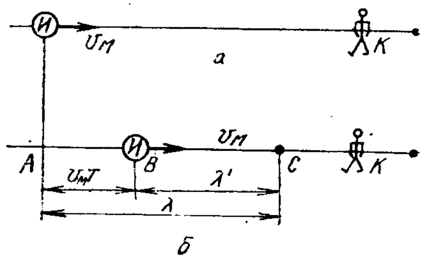
Бошқа ҳол: тўлқинлар манбаи M, муҳитга нисбатан тинч турган кузатувчи К (6.20-расм, *а*) томон $v_м$ тезлик билан ҳаракатланади. Манба чиқарилган тўлқин кетидан ҳаракатлангани учун тўлқин узунлиги ҳаракатланмайдиган манбадагидан кичик бўлади. Дарҳақиқат, тўлқин узунлиги фазаларининг айирмаси 2π га тенг бўлган икки нуқта орасидаги масофага тенг. Бир даврга тенг вақт ичида тўлқин λ масофага (6.20-расм, *б*) тарқалади, тўлқинлар манбаининг кўчган масофаси АВ$= v_м\ T$ га тенг. Бунда B ва C нуқталарининг фазалари бир-биридан 2πча фарқланадилар, демак улар орасидаги масофа, тўлқинлар манбаи ҳаракатланишида ҳосил бўлувчи, тўлқин узунлиги λ' га тенг. 6.20-расмдан фойдаланиб ва $\nu=v/\lambda$ эканини била туриб, баъзи ҳисоблашларни бажарамиз:

$$\lambda'=\lambda-v_{м}T=v/\nu-v_{м}/\nu=(v-v_{м})/\nu. \qquad (6.55)$$

Бу ҳолда кузатувчи тебраниш частотаси

$$\nu''=v/\lambda'=[v/(v-v^{м})]\nu \qquad (6.56)$$

га тенг бўлган товушни қабул қилади.



6.20-расм.

Кузатувчи ва манба бир-бири томон бир вақтда ҳаракатланганда қабул қилинувчи частотани топиш учун (6.54)-даги λ ўрнига (6.55)-даги λ' ни қўйиш лозим.

$$\nu'''=(v+v_{к})\gamma/(v-v_{м}). \qquad (6.57)$$

(6.57)-дан кўринганича, тўлқинлар манбаи ва кузатувчи яқинлашганда қабул қилинувчи частота чиқарилувчи частотадан каттадир. (6.57)-даги $v_{к}$ ва $v_{м}$ ларнинг ишораларини ўзгартиб, манба ва кузатувчи узоқлашган ҳол учун юқоридаги формулани чиқариш мумкин.

Поезд яқинлашган ва узоқлашган вақтда берилган товуш сигнали тони баландлигининг ўзгаришига кўра (VII боб, § 2 ни қаранг) ўқувчи Доплер эффектини кузатиши мумкин.

Доплер эффектидан манбанинг ёки товуш қабул этувчининг (приёмникнинг) муҳитга нисбатан ҳаракатланиш тезлигини аниқлашда фойдаланадилар. Одам ва ҳайвонлар томирларидаги қон оқимининг тезлигини ўлчаш усулларидан бири айниқса шунга асосланган.

VII БОБ

АҚУСТИКА

Акустика — товуш ҳақидаги, яъни одам қулоғи қабул этадиган (частоталари 16 Гц дан 20 000 Гц гача бўлган) газлар, суюқликлар ва қаттиқ жисмлардаги эластик тебранишлар ва тўлқинлар ҳақидаги таълимотлар. Акустикада товуш билан чегарадош соҳалар: 16 Гц дан камроқ — *инфратовушлар* ва 20 000 Гц дан каттароқ — *ультратовушлар* ҳам кўриб чиқилади.

Товуш тебранишлари ва тўлқинлари — механикавий тебраниш ва тўлқинларнинг хусусий ҳолидир, шунинг учун VI бобда тасвирланган қонуниятлар уларга ҳам мансубдир. Бироқ эшитув сезгиларини баҳолаш учун акустикавий тушунчалар муҳим бўлгани учун ва, шунингдек, медицинада қўлланишлари учун баъзи масалаларни махсус муҳокама қилиш мақсадга мувофиқдир.

§ 1. ТОВУШ ТАБИАТИ. ФИЗИКАВИЙ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАР

Қуйидаги товушларни ажратиш қабул қилинган: 1) *тонлар, ёки мусиқий товушлар;* 2) *шовқинлар;* 3) *товуший зарбалар.*

Тон деб даврий процессдан иборат товушга айтилади. Агар бу процесс гармоник бўлса, унда тон содда ёки соф деб айтилади, мос ясси товуш тўлқини эса тенглама (6.45) билан тасвирланади. Соф тоннинг асосий физикавий характеристикаси унинг частотасидир. Ангармоник* тебранишларга мураккаб тон мосдир. Содда тонни, масалан, камертон чиқаради, мураккаб тонни музика асбоблари, нутқ аппарати (унли товушлар) ва ҳ. к. чиқаради.

Мураккаб тон содда тонларга ажратилиши мумкин. Бу ажралишнинг энг кичик частотаси ν_0 *асосий тонга* мос келиб, қолган гармониклар *(обертонлар)* $2\nu_0$, $3\nu_0$ ва ҳ. к.-ларга тенг частоталарга эга бўладилар. Нисбий интенсивликларни (амплитудалари A) кўрсатилган частоталар тўпламига *акустикавий спектр* дейилади. Мураккаб тон спектри чизиғийдир; 7.1-расмда роялда (*а*) ва кларнетда (*б*) олинган бир хил нотанинг ($\nu_0 = 100$ Гц) акустикавий спектрлари кўрсатилган. Шундай қилиб, акустикавий спектр — мураккаб тоннинг муҳим физикавий характеристикасидир.

Шовқин деб вақт давомида такрорланмайдиган, мураккаб муносабатлари билан ажралувчи товушга айтилади. Машиналар вибрацияси, чапак, горелка алангасининг шовқини, шилдираш, гичиллаш, сўзлашдаги унсиз товуш ва бошқалар шовқин жумласидандир. Шовқинни тартибсиз ўзгарувчи мураккаб тонлар бирлашмаси деб қараш мумкин. Агар муайян шартлик даражасида шовқинни спектрга ажратмоқчи бўлсак, у ҳолда бу спектрнинг сидирға бўлганлигини кўриш мумкин, масалан, Бунзен газ горелкаси спектри (7.2-расм).

Товуший зарба — бу товушнинг қисқа вақтдаги таъсиридир: тақиллатиш, портлаш ва ҳ. к.

Товушнинг энергетик характеристикаси интенсивликдир.

СИ системада товуш интенсивлигининг ўлчов бирлиги — 1 Вт/м^2; бундан бошқа 1 мкВт/м^2 ва 1 эрг/(с·см^2) ҳам қўлланилади.

Амалда товуш қабул этилишини баҳолаш учун интенсивликни эмас, балки товуш тўлқини суюқлик ёки газ ҳолдаги муҳитдан ўтаётганда қўшимча пайдо бўладиган товуш (акустик) босимидан фойдаланиш ўнғайроқдир. Текис тўлқин учун интенсивлик билан товуш босими p орасида қуйидаги боғланиш мавжуд:

$$I = p^2/2\rho c^*, \tag{7.1}$$

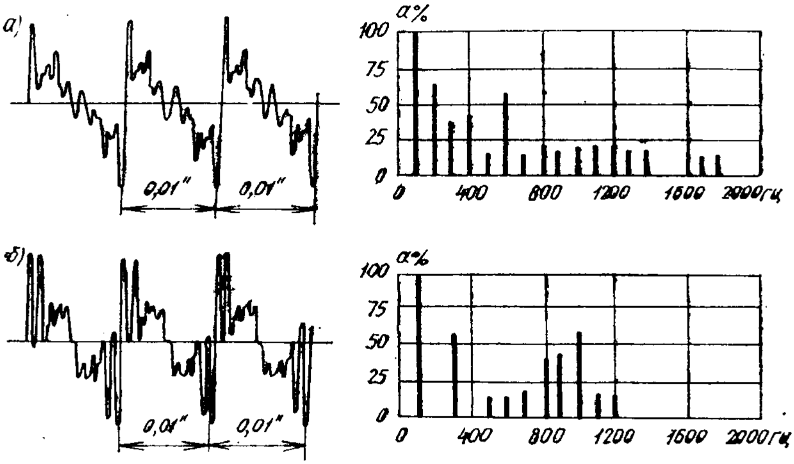
бу ерда ρ — муҳитнинг зичлиги, c — товуш тезлиги.

Нормал одам қулоғи анча кенг диапазондаги товуш интенсивликларини, жумладан, 1 кГц частотада $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2 (*эшитув*

* Ангармоник, яъни гармоник бўлмаган тебраниш.

* Қатъий қилиб айтганда (7.1)-даги p деганда товуш босими амплитудасининг ўртача квадратик қийматини тушуниш лозим.

бўсағаси) дан то $I_m = 10$ Вт/м^2 *(оғриқ сезиш бўсағаси)* гача бўлган интенсивликларни қабул қилади. Бу интенсивликларнинг нисбати 10^{13} га тенг. Агар бирор катталик жуда кенг қийматлар интервалида ўзгарадиган бўлса, у ҳолда логарифмик шкаладан фой-

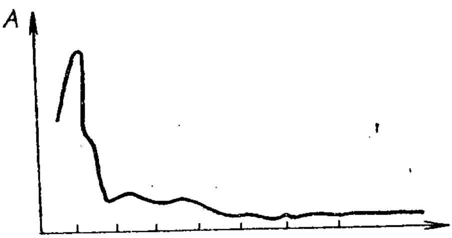


7.1-расм.

даланиб, катталикларнинг ўзларини таққослаш ўрнига уларнинг логарифмларини солиштириш қулай бўлади. Товуш интенсивлиги даражаларининг шкаласини худди шу усулда тузадилар. I_0 нинг қийматини шкаланинг бошланғич даражаси қилиб олиб, бошқа исталган интенсивлик I ни унинг I_0 га нисбатининг ўнлик логарифми орқали ифодалайдилар:

$$L_Б = lg(I/I_0). \qquad (7.2)$$

Икки интенсивлик нисбатининг логарифми *бел* (Б)-ларда ўлчанади.



7.2-расм.

Агар, масалан, товушнинг интенсивлиқ даражаси 4 Б бўлса, бу:

$$4 = lg(I/I_0), \text{ ёки } I = I_0 \cdot 10^4$$

демакдир. I_0 нинг қийматини ҳисобга олсак, берилган товуш интенсивлигининг қийматини топамиз:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^4 = 10^{-8} \text{ Вт/м}^2.$$

Беллар билан бир қаторда *децибел* (дБ)-лар ҳам кенг қўлланилади. Бундай ҳолларда (7.2)-формулани қуйидагича ёзиш керак:

$$L_{дБ} = 10 lg(I/I_0). \qquad (7.2а)$$

(7.2а)-ни потенциялаб, $I/I_0=10^{L_{дБ}/10}$ га эга бўламиз. Бундан $L_{дБ}=1_{дБ}$ бўлганда $I/I_0=10^{1/10}=\sqrt[10]{10}\approx1{,}26$ га эга бўламиз, яъни 1 дБ интенсивликлари тахминан 1,26 марта фарқланувчи иккита даражага мос келади.

§ 2. ЭШИТУВ СЕЗГИСИНИНГ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ. ТОВУШНИ ЎЛЧАШЛАР

Олдинги параграфда одамдан мустақил тегишли асбоблар билан боғланиши мумкин бўлган товушнинг объектив характеристикалари кўрилиб чиқилган эди. Бироқ товуш эшитув сезгилари объектидир, шунинг учун одам томонидан ҳам субъектив равишда баҳоланади.

Тонларни эшитганда одам уларни баландликлари бўйича ажратади. *Баландлик* — биринчи навбатда асосий тон частотаси билан шартланган товушнинг субъектив характеристикасидир. Баландлик тоннинг мураккаблиги ва интенсивлиги билан анча кам даражада боғланади: кучлироқ товуш анча паст бўлиб эшитилади.

Товуш *тембри* деярли фақат спектрал таркиб билан белгиланади. Асосий тон, демак тон баландлиги ҳам, бир хил бўлса-да, ҳар хил тембрларга мос акустик спектрларнинг ҳар хил бўлиши 7.1-расм, *а* ва *б* да кўрсатилган.

Қаттиқлик — товушнинг яна бир субъектив баҳоси бўлиб, у эшитув сезгиси даражасини характерлайди. Ўзининг субъективлигига қарамай, икки манбадан бўлаётган эшитув сезгиларини таққослаш йўли билан қаттиқликка миқдорий баҳо бериш мумкин.

Қаттиқлик даражалари шкаласини яратиш асосида Вебер—Фехнернинг муҳим психо-физикавий қонуни ётади. Агар бу қонунга мувофиқ таъсирот (қитиқланиш) геометрик прогрессия бўйича (яъни бир хил каррадан) катталаштирилса, у ҳолда бу таъсиротнинг сезилиши арифметик прогрессия бўйича (яъни бир хил миқдордан) ўсиб боради. Товушга нисбатан татбиқ қилинадиган бўлса, бу товуш интенсивлиги қатор кетма-кет қийматларга, масалан, aI_0, a^2I_0, a^3I_0 (a — муайян коэффициент) ва ҳоказоларга эга бўлганларида, уларга мос товуш қаттиқлигининг сезилишлари E_0, $2E_0$, $3E_0$ ва ҳ. к. бўладилар демакдир.

Математик жиҳатдан товуш қаттиқлиги товуш интенсивлигининг логарифмига пропорционал демакдир. Агар интенсивликлари I ва I_0 бўлган (I_0 — эшитиш бўсағаси) икки товуш таъсир қиладиган бўлсалар, Вебер—Фехнер қонунига асосан эшитув бўсағасига нисбатан олинган қаттиқлик интенсивлик билан қуйидагича боғланган бўлади:

$$E=k\lg(I/I_0), \tag{7.3}$$

бу ерда k — частота ва интенсивлик билан боғланган муайян пропорционаллик коэффициенти.

Агар коэффициент k доимий бўлганда эди, у ҳолда (7.2) ва (7.3)-дан товуш интенсивликларининг логарифмик шкаласи қаттиқликлар шкаласига мос келгани келиб чиқади. Бундай ҳолда товуш қаттиқлиги, интенсивлик каби, бел ёки децибелларда ўлчанадиган бўлар эди. Бироқ k нинг товуш частотаси ва интенсивлигига кучли боғлиқлиги қаттиқликни (7.3)-формуладан фойдаланиб оддийгина ўлчашга имкон бермайди.

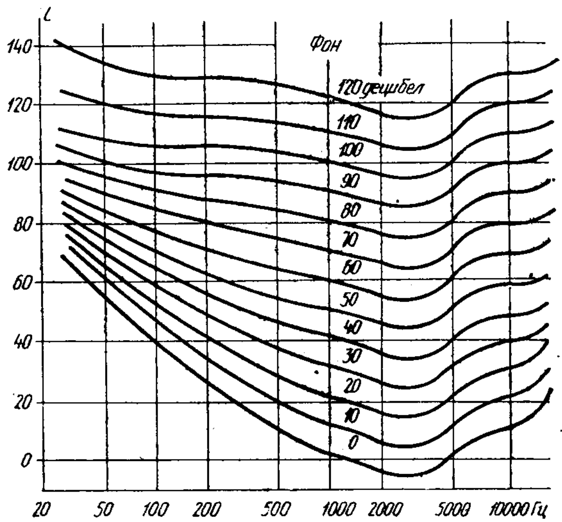
1 кГц частотада товуш қаттиқлиги ва интенсивлигининг шкалалари тўла мос келади. $k=1$ деб шартли ҳисоблайдилар ва

$$E_Б = lg(I/I_0),$$

ёки (7. 2а)-га ўхшаш

$$E_ф = 10\, lg(I/I_0). \quad (7.4)$$

Товуш интенсивлиги шкаласидан ажратиш учун қаттиқлик шкаласидаги децибеллар фоналар (*ф*) дейилади.



7.3-расм.

Бошқа частоталардаги қаттиқликни текширилувчи товушни 1 кГц частотали товуш билан таққослаб ўлчаш мумкин. Бунинг учун товуш генератори* ёрдамида 1 кГц частотали товуш ҳосил қилинади. Бу товуш интенсивлигини текширилувчи товуш қаттиқлигига ўхшаш эшитув сезгиси ҳосил бўлмагунча ўзгартиб борадилар. Асбоб ёрдамида децибелларда ўлчанган 1 кГц частотали товушнинг интенсивлиги шу товушнинг фонларда ифодаланган қаттиқлигига тенг бўлади

Ҳар хил частоталарда товуш қаттиқлиги билан интенсивлиги орасидаги мосликни топиш учун тенг қаттиқлик эгри чизиқларидан (7.3-расм) фойдаланадилар. Бу эгри чизиқлар юқорида тасвирланган усулда нормал эшитиш қобилиятига эга одамлар устига ўтказилган ўлчашларда олинган ўртача далилларга асосан ясалгандир.

Пастки эгри чизиқ энг кучсиз эшитилувчи товушлар — эшитиш бўсағасидаги интенсивликларга мосдир; ҳамма частоталар учун

* 20 Гц дан 20 кГц гача частотали электр гармоник тебранишларни генерацияловчи электрон асбоб товуш генератори дейилади. Бироқ товуш генераторининг ўзи товуш манбаи эмас. Агар у ҳосил қиладиган тебранишлар динамикка берилса, унда тони генератор частотасига мос бўлган товуш ҳосил бўлади. Товуш генераторида тебранишлар амплитудасини равон ўзгартиш имконияти кўзда тутилган.

$E_ф=0$; 1 кГц учун товуш интенсивлиги $I_0=10^{-12}$ Вт/м^2. Келтирилган эгри чизиқлардан кўринишича ўртача одам қулоғи 2500—3000 Гц частоталарда энг сезгир экан. Юқоридаги эгри чизиқ оғриқ сезгиси бўсағасига мосдир; ҳамма частоталар учун $E_ф \approx \approx 130_ф$, 1 кГц учун $I_m=10$ Вт/м^2. Оралиқдаги ҳар бир эгри чизиқ бирдай қаттиқликка, лекин турли частоталардаги ҳар хил товуш интенсивлигига мос келади. Фонларда ифодаланган товуш қаттиқлигининг децибелларда ўлчанган товуш интенсивлигига тенг бўлганлиги фақат 1 кГц частота учун бўлгани айтилиб ўтилган эди. Муайян частоталарда шу қаттиқликни сезиш имконини ҳосил қиладиган интенсивликни тенг қаттиқлик эгри чизиғи бўйича топиш мумкин. Масалан, 100 Гц частотали товушнинг интенсивлиги 60 дБ га тенг бўлсин. Шу товушнинг қаттиқлиги қанча? 7.3-расмда координаталари 100 гЦ, 60 дБ бўлган нуқтани топамиз. У қаттиқлиги 30 *фонга* мос эгри чизиқ устида ётади; ана шунинг ўзи қўйилган саволга жавобдир.

Турли характердаги товушлар ҳақида муайян тасаввурга эга бўлиш учун уларнинг физикавий характеристикаларини келтирайлик — жадвалга қаранг.

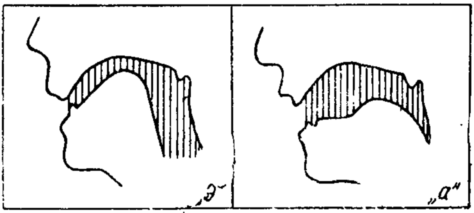
Товушнинг тахминий характери	Товуш интенсивлиги, Вт/м^2	Товуш босими, Па	Эшитув бўсағасига нисбатан товуш интенсивлигининг даражаси, дБ (ёки 1 кГц частота учун товуш қаттиқлигининг даражаси, ф)
Эшитув бўсағаси	10^{-12}	0,00002	0
Стетоскоп орқали юрак тонлари	10^{-11}	0,000064	10
Шивирлаш	10^{-11}	0,0002	20
»	10^{-9}	0,00064	30
Секин гаплашиш	10^{-8}	0,002	40
Нормал гаплашиш	10^{-7}	0,0064	50
Қаттиқ гаплашиш	10^{-6}	0,02	60
Ҳаяжонли кўча шовқини	10^{-5}	0,064	70
Бақириш	10^{-4}	0,2	80
Метро поездидаги шовқин	10^{-3}	0,64	90
Мотоцикл шовқини (максимал)	10^{-2}	2	100
Самолёт моторининг шовқини	10^{-1}	6,4	110
Шунинг ўзи (яқиндан)	10^{0}	20	120
Оғриқ сезиш бўсағаси	10	64	130

Эшитиш ўткирлигини ўлчаш усулига аудиометрия дейилади. Аудиометрия вақтида махсус асбоб (аудиометр) ёрдамида ҳар хил частоталарда эшитиш сезгисининг бўсағаси аниқланади; олинган эгри чизиқ аудиограмма дейилади. Касал одам аудиограммасини нормал эшитув сезгиси бўсағасининг эгри чизиғи билан солиштириш эшитув органлари касалликларига диагноз қўйишга ёрдам беради.

§ 3. ОДАМНИНГ НУТҚ ВА ЭШИТИШ АППАРАТЛАРИ ТУЗИЛИШИНИНГ ФИЗИКАВИЙ АСОСЛАРИ

Одамнинг овоз аппарати эластик овоз бойламлари, юмшоқ танглай, тил ва лаблар тебранишлари туфайли товуш ҳосил қиладиган системадан иборат. Товуш ҳосил қилинишида ҳаво йўллари (ўпка, бронх, трахея) ва бўшлиқлар (ютқин, оғиз, бурун бўшлиқлари) иштирок этади.

Овоз ёриғида ҳосил бўлувчи товуш тўлқинлари — кўп сонли ҳар хил тонлар тўпламидир. Бурун ва оғиз бўшлиқлари резонатор ролини ўйнайди. Бу бўшлиқларнинг катталиги ва формасини тил, тишлар ва лаблар вазиятини ўзгартиш воситаси билан ўзгартириб, товуш тўлқинининг айрим тонларини кучайтириш ёки кучсизлантириш мумкин, шу билан у ёки бу товушни талаффуз этиш мумкин. 7,4-расмда «э» ва «а» товушларини талаффуз этиш вақтида оғиз ва ютқин конфигурациялари кўрсатилган.



7.4-расм.

Овоз бойламларининг энг зўр тебранишлари унли товушлар чиқарилишида рўй беради. Унсиз товушлар ҳосил бўлганда юмшоқ танглайнинг, тил учининг ва лабларнинг ҳар хил қисмлари мустақил тебранади. Бу тебранишлар айрим суратда ёки овоз бойламлари ҳосил қиладиган товушлар билан биргаликда унсиз товушлар ҳосил қиладилар.

Одамнинг эшитиш аппарати товушни ўтказувчи ва қабул қилувчи қисмлардан иборат. Товуш ўтказувчи қисмга ташқи товуш йўли ва ўрта қулоқ киради. Товуш қабул этувчи қисмга калла туби чуқурида жойлашган ички қулоқ киради.

Ички қулоқнинг асосий элементи — лабиринт (чиғаноқ) шаклидаги, суюқликқа тўлган суяк бўшлиғидир. Чиғаноқнинг спираль йўллари бутун узунлиги бўйича парда (асосий мембрана) билан ажратилган. Мембрананинг асосий қисми ҳар хил узунлик ва қалинликда бўлиб, радиал йўналишда жойланган эластик толалар (Кортий торлари) ташкил этади; уларнинг сони 20 000 га етади. Толалар асосига эшитиш нервининг шохлари тақалган.

Қулоққа етиб келган механик тебранишлар эшитиш нерви толаларини қўзғатадилар; бу ҳодисанинг механизми ҳозирги вақтда ҳали етарли даражада аниқланган эмас.

Икки товуш қабул қилгичларга (қулоқларга) эга бўлган одам ва ҳайвонлар товуш манбаи томонга бўлган йўналишни аниқлаш қобилиятига эгадирлар (бинаурал эффект). Товуш манбага қаратилган қулоққача қисқароқ йўлни босади, бу эса товушнинг фаза-

Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд (1821—1894) — немис физиги, физиологи ва психологи. Гельмгольцнинг электромагнетизм, оптика ва акустика бўйича қилган ишлари унинг физиологик тадқиқотлари (кўриш, эшитиш ва бошқалар) билан кўп жиҳатдан узвий боғланган.

лари ва интенсивликларини ажратишга имкон беради. Нормал эшитувчи одам горизонтал текисликда товуш йўналишини 3° гача аниқлик билан белгилай олади. Товуш манбаининг вертикал текисликда жойланишини аниқлаш одам боши вазиятининг ўзгартирилишига боғлиқ бўлиб, камроқ аниқликда топилади.

§ 4. КЛИНИКАДА ТОВУШИЙ ТЕКШИРИШ МЕТОДЛАРИНИНГ ФИЗИКАВИЙ АСОСЛАРИ

Товуш ҳам, ёруғлик каби информация манбаи бўлиб, унинг асосий аҳамияти ана шундадир. Табиат товушлари, атрофимиздаги одамларнинг гаплари, ишлаб турган машиналар шовқини бизга кўп маълумот беради. Одам учун товушнинг қанчалик аҳамиятли эканини тасаввур қилиш учун ўзини вақтинча товуш қабул қилиш имкониятидан маҳрум қилиб кўриши — қулоқларини бекитиб қўйиши етарлидир.

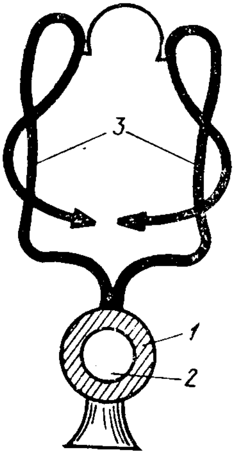
Товушнинг одам ички органлари аҳволи ҳақидаги информация манбаи бўла олиши ҳам табиийдир.

Қасалликлар диагностикасида тарқалган товуший метод — аускультация (беморни эшитиб кўриш усули) эрамизгача бўлган II асрдан бери маълум. Аускультация учун стетоскоп ёки фонендоскопдан фойдаланадилар. Фонендоскоп (7.5-расм) товуш ўтказадиган мембрана 2 ва ковак капсула *1* дан иборат бўлади. Мембрана бемор танасига қўйилиб, ундан врач қулоғига иккита резина трубка 3 боради. Қовак капсулада ҳаво устуни резонансланади, бунинг натижасида товушланиш зўраяди ва аускультация яхшиланади.

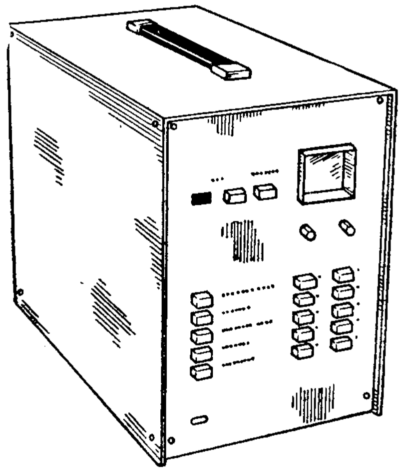
Ўпкалар аускультациясида нафас шовқинларини, касаллик учун характерли бўлган турли хириллашларни тинглайдилар. Юрак тонларининг ўзгариши ва шовқинлар пайдо бўлишига кўра юрак фаолиятининг аҳволи ҳақида мулоҳаза қилиш мумкин. Аускультациядан фойдаланиб меъда ёки ичак перистальтикасини аниқлаш, она қорнидаги ҳомиланинг юрак уришини эшитиш мумкин.

Бемор юрагини бир вақтда бир неча текширувчиларга эшиттириш имкониятини туғдириш учун ўқиш мақсадида ёки консилиум вақтларида микрофон, кучайтиргич ва громкоговоритель ёки бир неча телефонлардан иборат бўлган системадан фойдаланадилар.

Юрак фаолияти ҳолатининг диагностикасида аускультацияга ўхшаш ва фонокардиография (ФКГ) деб аталувчи усул қўлланади. Бу усул юрак тонлари ва шовқинларини графикавий қайд этишдан ва уларни диагностикавий интерпретациялашдан (шархлашдан) иборатдир. Фонокардиограммани фонокардиограф (7.6-

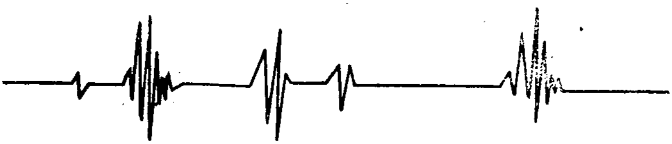


7.5-расм.


7.6-расм.

расм) ёрдами билан бажарадилар. Фонокардиограф микрофон, кучайтиргич, частотавий фильтрлар системаси ва регистрацияловчи қурилмалардан иборат бўлади. 7.7-расмда нормал фонокардиограмма кўрсатилган.

Юқорида кўрсатилган икки товуший методлардан перкуссия принципиал фарқ қилади. Бу усулда тананинг айрим қисмларини тукиллатиш вақтидаги товушлар тингланади.


7.7-расм.

Бирор жисм ичида ҳавога тўлдирилган берк бўшлиқни тасаввур қиламиз. Агар бу жисмда товуш тебранишлари ҳосил қилинса, товушнинг муайян частоталарида бўшлиқ ичидаги ҳаво бўшлиқнинг вазияти ва катталигига мос тонни ажратиб ва кучайтириб резонанслана бошлайди. Схематик суратда тасаввур этиладиган бўлса, одам танасини газга тўлган (ўпкалар), суюқлиққа тўлган (ички органлар) ва қаттиқ (суяк) ҳажмлар тўпламидир, дейиш мумкин. Тана сиртига урилганда кенг диапазон частотали тебранишлар ҳосил бўлади. Бу диапазондаги баъзи тебранишлар тез сўнади, баъзилари эса бўшлиқларнинг хусусий тебранишларига тўғри келиб, кучайиб кетади ва резонанс натижасида эшитиладиган бўлади. Перкуссия товушлари тони бўйича тажрибали врач ички органлар топографиясини аниқ белгилай олади.

§ 5. ТОВУШ ТЎЛҚИНЛАРИНИНГ ЮТИЛИШИ ВА ҚАЙТИШИ. РЕВЕРБЕРАЦИЯ

Товуш тўлқини ўз йўлида жисмларга дуч келиб уларни тебратади, бунга ўз энергиясининг бир қисмини сарф қилади. Қолган энергияни жисм қайтаради. Шундай қилиб, тўлқин энергиясини шартли равишда тўлқин билан таъсирланган жисмларнинг ютган ва қайтарган энергияларига ажратиш мумкин.

Ютилган товуш энергиясининг тушган товуш энергиясига нисбати *a* қатор факторларга, шу жумладан товуш тўлқинининг тебраниш частотасига ҳам боғлиқ. Бу нисбатнинг ҳар хил материаллар учун товуш частотаси 512 Гц бўлгандаги баъзи ўртача қийматларини келтирамиз:

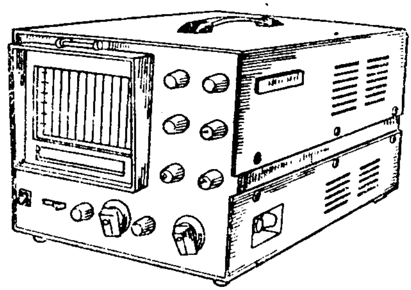
Очиқ дераза	1
Мармар	0,01
Ғишт девор	0,032
Қалинлиги 2,5 см бўлган пробка	0,16
Қалинлиги 2,5 см бўлган жун кигиз	0,55

Юмшоқ тўқималар катта товуш ютиш қобилиятига эга бўладилар, шунинг учун уларни девордан товуш қайтишини камайтириш лозим бўлган ҳолларда ишлатадилар.

Ҳар бир ёпиқ хона ичида девордан, шипдан, мебелдан қайтувчи товуш бошқа девор, пол ва ҳ. к. ларга тушади, сўнгра яна қайтади, ютилади ва секин-аста сўнади. Шунинг учун товуш манбаи ўз таъсирини тўхтатгандан кейин ҳам хона ичида ҳали товуш тўлқинлари мавжуд бўлиб, улар гулдираш товушларни ҳосил қиладилар. Бу айниқса катта кенг залларда сезилади. Ёпиқ хоналарда манба тўхтатилгандан кейин товушнинг секин-аста сўниб боришига *реверберация* дейилади.

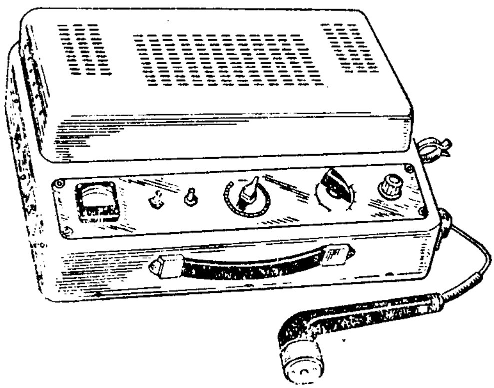
Реверберация, бир жиҳатдан, фойдалидир, чунки қайтарилган тўлқин энергияси ҳисобига товушни қабул қилиш зўраяди, лекин иккинчи томондан, ортиқча чўзилган реверберация нутқнинг, музиканинг қабул этилишини анча ёмонлаштириб ҳам қўйиши мумкин, чунки текстнинг ҳар бир янги қисми олдингиси билан қопланади. Шунга кўра одатда реверберациянинг бирорта оптимал вақтини кўрсатиб, аудиториялар, театр ва концерт заллари ва ҳ. к. қурганда шунга эришишга интиладилар. Масалан, Москвадаги Союзлар Уйининг Қолонна зали тўла бўлганда реверберация вақти 1,70 с, Большой театр тўла бўлганда — 1,55 с га тенг. Худди шу хоналар бўш бўлган вақтларида реверберация вақти тегишлича 4,55 ва 2,06 с га тенг.

84-ва 88-бетлардаги жадваллар далилларидан шовқинлар қаттиқлигини ва товушдан танҳоланиш имкониятларини баҳолашда фойдаланиш мумкиндир.



7.8-расм.

Зарарли товушлар манбаини йўқотиш ёки товуш ютувчи материаллар ёрдами билан товуш интенсивлигини камайтиш йўли орқали уларнинг таъсирини озайтириш санитария хизматининг назорати остида туради, чунки шовқин одам соғлигига таъсир этади. Юқори частотали шовқинлар учун рухсат этилган шовқин даражаси 75—80 дБ, паст частотали шовқинлар учун 90—100 дБ. Нормал рухсат этилган шовқин даражаси 40—50 дБ ҳисобланади.



7.9-расм.

Шовқин қаттиқлигини ўлчаш учун махсус асбоблар — шумомерлар (шовқин ўлчагичлар) ишлатилади; уларда товуш тебранишлари электр тебранишларига айлантирилади. Шумомернинг электр ўлчагич асбоби тўғридан-тўғри децибелларда даражаланади.

§ 6. УЛЬТРАТОВУШ ВА УНИНГ МЕДИЦИНАДА ҚЎЛЛАНИШИ

Частоталари 20 кГц дан ортиқ бўлган механикавий тебранишлар ва тўлқинларга *ультратовуш* дейилади. Ультратовуш частоталарининг юқори чегарасини шартли равишда 10^6—10^7 кГц деб ҳисоблаш мумкин. Бу чегара молекулалараро масофалар билан аниқланади, шунинг учун ичида ультратовуш тўлқинлари тарқалаётган модданинг агрегат ҳолатига боғлиқ бўлади.

Ультратовушни генерация қилиш ва қабул қилиш учун ультратовуш нурлагичи ва приёмниги деб аталадиган асбоблар ишлатилади. Булардан энг кўп тарқалгани электромеханикавий нурлагичлар бўлиб, уларнинг ишлаш принципи тескари пьезоэлектр эффект (XV боб, § 6 га қаранг) ҳодисасига асослангандир.

Ультратовушнинг баъзи характерли хоссаларини кўриб чиқамиз.

Ультратовуш тўлқинларининг тарқалиш тезлиги ва уларнинг ютилиши муҳит ҳолатига жуда боғлиқдир; модданинг молекуляр хоссаларини ўрганиш учун ультратовушдан фойдаланиш шунга асослангандир. Бу хилдаги текширишлар молекуляр акустиканинг ўрганиш предметидир.

Икки муҳит чегарасидан ультратовуш тўлқинларининг қайтиши бир жинсли бўлмаган қўшилмаларнинг, бўшлиқларнинг, ички органларнинг ва ҳ. к. жойланишларини ва катталикларини аниқлашга имкон беради (ультратовуш локацияси). Бу мақсадларда узлуксиз нурланиш, шунингдек, импульсли нурланишлардан фойдаланилади. Биринчи ҳолда ажралиш чегарасида тушувчи ва қайтувчи тўлқинлар интерференцияланиши натижасида ҳосил бўлувчи турғун тўлқинлар текширилади. Иккинчи ҳолда қайтган импульсни кузатадилар ва ультратовушнинг текширилувчи объектгача ва ундан қайтишдаги вақтини ўлчайдилар. Ультратовуш тарқалишининг тезлигини билгач объект ётган чуқурлик аниқланади.

Ультратовуш ҳосил қиладиган зичланиш ва сийракланишлар суюқлик яхлитлигининг бузилиб, парчаланиб кетишига — *кавитация* деб аталувчи ҳодисанинг ҳосил бўлишига олиб келади. Кавитациялар узоқ яшамайдилар ва тез бекилиб кетадилар, бу маҳалда кичик ҳажмлар ичида анча энергия ажралади, модданинг исиши, молекулаларнинг ионланиш ва диссоцияланишлари ҳосил бўлади.

Медицина ва биологияда ультратовушнинг ишлатилишини асосан икки йўналишга ажратиш мумкин: диагностика методлари ва текширишлар ҳамда таъсир кўрсатиш методлари.

Биринчи йўналишга асосан импульсли нурлардан фойдаланувчи локацион методларни киритиш мумкин. Бу эхоэнцефалография — бош мия ўсмалари ва шишини аниқлашдир (7.8-расмда ватанимизда ясаладиган эхоэнцефалограф «Эхо-12» кўрсатилган); ультратовуш кардиографияси — юрак ўлчамларини динамикада ўлчаш; офтальмологияда — кўз муҳитлари катталикларини аниқлаш учун ультратовуш локацияси. Ультратовушнинг Доплер эффекти ёрдамида юрак клапанлари ҳаракатининг характерини ўрганадилар ва қон оқимининг тезлиги ўлчанади. Ультратовуш тезлиги бўйича диагностика мақсадларида бирикиб кетган ёки шикастланган суяк зичлигини аниқлайдилар.

Иккинчи йўналишга ультратовуш физиотерапияси киради. 7.9-расмда шу мақсадларда фойдаланиладиган ватанимизда ясалувчи аппарат УТП-3М кўрсатилган. Ультратовуш билан пациентни таъсирлаш аппаратнинг махсус нурловчи головкаси ёрдамида бажарилади. Одатда терапия мақсадлари учун 800 кГц частотали ультратовушлар ишлатилади, уларнинг ўртача интенсивлиги тахминан 1 Вт/см^2 ва ундан камроқ бўлади. Нурловчи головка билан тери орасига бирор суюқлиқ, масалан, ёғ қуйилади, чунки ҳатто юпқа ҳаво қавати ультратовушнинг организмга ўтишини тўсиб қўйиши мумкин. Тўқимага қилинадиган механикавий ва иссиқлик таъсири ультратовуш терапияси асосида ётган бирламчи механизмдир.

Операциялар вақтида ультратовушни фақат юмшоқ тўқималарни эмас, балки суяк тўқималарини ҳам кесиш қобилиятига эга бўлган «ультратовуш скальпели» сифатида ишлатадилар.

Ультратовушнинг суюқлиқ ичидаги жисмларни майдалаб парчалаш ва эмульсия ҳосил қилиш қобилиятидан фармацевтика саноатида дорилар тайёрлашда фойдаланадилар. Ультратовуш ёрдамида олинган ҳар хил доривор моддаларнинг аэрозолини сил, бронхиал астма, юқори нафас йўллари катари каби касалликларни даволашда ишлатадилар.

Ҳозирги вақтда шикастланган ёки трансплантацияланувчи суяк тўқималарини ультратовуш ёрдами билан «пайвандлаш» методи (ультратовуш остеосинтези) ишланган.

Ультратовушнинг микроорганизмларни ўлдириши улардан стерилизацияда фойдаланиш имконини беради.

Ультратовушнинг кўрлар учун қўлланилиши қизиқарлидир. «Ориентир» номли портатив асбоб ёрдамида ультратовуш локациясини ҳосил қилиш натижасида 10 м гача узоқликдаги жисмларни сезиш ва улар қандай характердалигини аниқлаш мумкин.

Келтирилган мисоллар медицина ва биологияда ультратовуш устида қилинган барча тадқиқотларни ўз ичига ололмайди, мазкур тадқиқотларнинг кенгайиш перспективаси дарҳақиқат каттадир. Масалан, медицинага ультратовуш голографиясининг (II т, XXVII бобга қаранг) жорий этилиши натижасида тубдан янги бўлган диагностика усулларининг пайдо бўлишини кутиш мумкин.

VIII БОБ

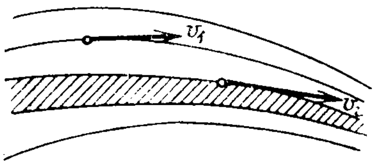
ГИДРОДИНАМИКА

Сиқилмайдиган суюқлиқларнинг ҳаракати ва уларнинг атрофдаги қаттиқ жисмлар билан ўзаро таъсири масалаларини ўрганувчи физика бўлими *гидродинамика* дейилади.

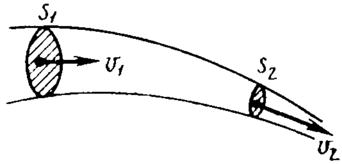
§ 1. СТАЦИОНАР ОҚИШ. ШАЛОЛАНИНГ УЗЛУКСИЗЛИК ШАРТИ

Суюқлиқнинг барқарорлашган, стационар оқишини кўриб чиқамиз. Бу ҳолда галма-галдан фазонинг бирор нуқтасига тушувчи суюқлиқ ҳар хил зарраларининг тезлиги бир хилда бўлади, бу суюқлиқни тезликлар майдони деб тасаввур қилишга имкон беради. Уни графикавий *оқим чизиқлари* билан тасвирлайдилар; уларга чизилган уринма тезлик векторининг йўналишини кўрсатади, чизиқларнинг зичлиги эса тезлик қийматига пропорционал бўлади (8.1-расм; $v_2>v_1$). Оқим чизиқлари суюқлиқ заррачаларининг траекториясидир.

Оқим чизиқлари билан чегараланган суюқлиқнинг қисми *оқим найчасини* (шалола) ҳосил қилади. 8.1-расмда оқим найчаларидан бирининг чизма текислиги билан кесими штрихланган. Заррачалар тезлиги оқим чизиқлари бўйлаб йўналганликлари учун



8.1-расм.



8.2-расм.

суюқлиқ заррачалари оқим найчаси чегарасидан чиқиб кета олмайди.

Ихтиёрий перпендикуляр кесимда барча нуқталар тезлиги бир хил бўлган оқим найчасини танлаб оламиз. Бу найчанинг икки кесимига S_1 ва S_2 юзалар ва v_1 ва v_2 тезликлар (8.2-расм) мос келади. Оқимнинг исталган кесимидан вақт бирлигида, кесим юзининг тезлик билан кўпайтмасига тенг бўлган, сиқилмас суюқлиқнинг бирдай ҳажмлари ўтиб туради:

$$S_1v_1=S_2v_2 \text{ ёки } Sv=\text{const}. \tag{8.1}$$

8.1-тенглама *шалоланинг узлуксизлик шартини ифодалайди,* чунки фақат узлуксиз оқишларда исталган кесимдан бир хил вақт ичида бир хил миқдорда суюқлиқ ўтади.

§ 2. БЕРНУЛЛИ ТЕНГЛАМАСИ ВА УНДАН КЕЛИБ ЧИҚАДИГАН НАТИЖАЛАР

Кичик кесимли оқим найчасини (8.3-расм) кўриб чиқамиз. 1-ва 2-кесимлар орасида турган суюқлиқ силжиб $1'$—$2'$ вазиятларни эгаллайди. Оқиш стационар бўлгани учун суюқлиқнинг $1'$—2 қисмида ҳеч қандай энергетик ўзгаришлар рўй бермайди. Суюқлиқнинг 1—2 ҳажмдан $1'$—$2'$ ҳажмгача силжиган вақтида энергиянинг ўзгариши штрихланган ҳажмнинг 1—$1'$ дан 2—$2'$ гача силжигандаги ўзгаришларига тенг бўлади.

1—$1'$ ва 2—$2'$ ҳажмларни цилиндрик деб ҳисоблаб,

$V=S_1l_1=S_2l_2$ деб ёзишимиз мумкин.

Агар ҳар бир штрихланган ҳажмдаги суюқлиқ тезлиги бир хилда бўлса, у ҳолда суюқлиқ кинетик энергиясининг ўзгариши $m=\rho S_1 l_1=\rho S_2 l_2$ бўлгани учун,

$$\Delta E_к = mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = \frac{1}{2}(\rho S_2 l_2 v_2^2 - \rho S_1 l_1 v_1^2) \quad (8.2)$$

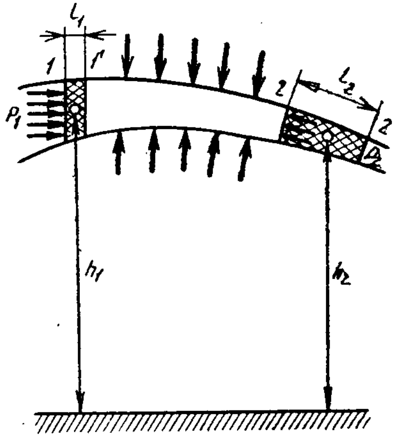
га тенг, бу ерда ρ — суюқлиқнинг зичлиги. Суюқлиққа таъсир этган ташқи кучлар ишини ҳисоблаймиз.

Қўшни оқим найчалар томонидан таъсир қилувчи кучлар текширилаётган оқим найчаси сиртига нормал йўналишда бўлиб, иш бажармайди. 1—2 ҳажмнинг кўндаланг кесимига босим p_1 ва p_2 ларни кўрсатувчи кучларнинг уни силжитганда бажарадиган иши

$$A_р = F_1 l_1 - F_2 l_2 = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2. \quad (8.3)$$

Оғирлик кучининг иши [(2.36) -ни қаранг]

$$A_{оғ} = mgh_1 - mgh_2 = \rho S_1 l_1 g h_1 - \rho S_2 l_2 g h_2. \quad (8.4)$$



8.3-расм.

Тенг таъсир этувчи кучнинг иши кинетик энергиянинг ўзгаришига тенг бўлганлигидан (8.3) ва (8.4)-ни қўшиб, уни (8.2)-ифодага тенглаб,

$$p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 + \rho S_1 l_1 g h_1 - \rho S_2 l_2 g h_2 = \frac{1}{2}(\rho S_2 l_2 v_2^2 - \rho S_1 l_1 v_1^2)$$ ни ёза

оламиз, бундан, $S_1 l_1 = S_2 l_2$ га қисқартиб, қўшилувчиларни қайта группалаб

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \quad (8.5)$$

га эга бўламиз.

Найча кесимини танлаш ихтиёрий бўлганлиги учун, индексларни ташлаб юбориш мумкин, у ҳолда:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const. \quad (8.6)$$

Бу — *Бернулли тенгламасидир;* у фақат найча кесимига эмас, балки бирор оқим чизиғи бўйича жойлашган нуқталарга ҳам татбиқ этилиши мумкин.

Бернулли тенгламасига кирган қўшилувчилар босим маъносига ва ўлчамига эгадир. Босим p га *статик босим* дейилади; у суюқлиқ ҳаракатига боғлиқ эмас ва суюқлиқ билан бирга ҳаракатланувчи, масалан, манометр билан ўлчаниши мумкин. Босим $\rho v^2/2$ га динамик босим дейилади; у суюқлиқнинг ҳаракатланиши натижасидагина вужудга келиб, унинг тормозланган вақтида намоён бўлади. Статик ва динамик босимлар йиғиндиси *тўла босимдир:*

$$p_n = p + \rho v^2/2.$$

Босим ρgh — *оғирлик босими.* Вазнсизлик ҳолатда оғирлик босими бўлмайди, ўта юкланиш катталашган сари у ортиб боради.

Бу терминологиядан фойдаланиб, Бернулли тенгламасини қонун сифатида таърифлаш мумкин: идеал суюқлиқ оқими чизиқларининг турли нуқталаридаги статик, динамик ва оғирлик босимларининг йиғиндиси бир хилдир.

Бернулли тенгламасидан келиб чиқадиган баъзи хусусий ҳолларни кўрсатамиз.

1. Ўзгармас кесимли қия оқим найчаси. Бундай найчанинг ҳамма ерида суюқлиқнинг тезлиги бир хил (v=const), у ҳолда (8.5)-дан.

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2 \quad \text{га эга бўламиз,}$$

ёки

$$p_2 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2), \Delta p = \rho g \Delta h.$$

Бу ҳолда гидростатикадагидек, босимлар айирмасининг сабаби тегишли суюқлиқ устунлари оғирликларининг айирмасидир.

2. Ҳар хил кесимли горизонтал оқим найчаси (8.4-расм). Бу ҳолда $h_1 = h_2$ бўлгани учун (8.5)-дан

$$p_1 + \rho v_1^2/2 = p_2 + \rho v_2^2/2$$

эканлиги келиб чиқади. Горизонтал оқим найчасининг турли кесимларидаги тўла босим бир хил. Торроқ жойларда $S_2 < S_1$, $v_2 > v_1$ ва $p_2 < p_1$. 8.4-расмда манометрик найчалар турли кесимлардаги статик босимларни кўрсатиб турибди. Мазкур найчаларнинг пастки кесимлари оқим чизиқларига параллел бўлганлиги учун улар динамик босимларни кўрсатмайди.

Найча кесимини шунча тор қилиш мумкинки, босим жуда кичиклашиб (атмосферааникидан пасайиб) кетганлиги натижасида бу кесим ҳавони ёки суюқлиқни сўрадиган бўлади (шалоланинг сўриш таъсири рўй беради). Бу ҳодисадан сув оқим насосларида, ингаляторларда ва пульверизаторларда фойдаланилади.

3. Суюқлиқ тезлигини ўлчаш. Пито найчаси. Ҳаракатланиб турган суюқлиқ оқимида битта оқим чизиғи усти-

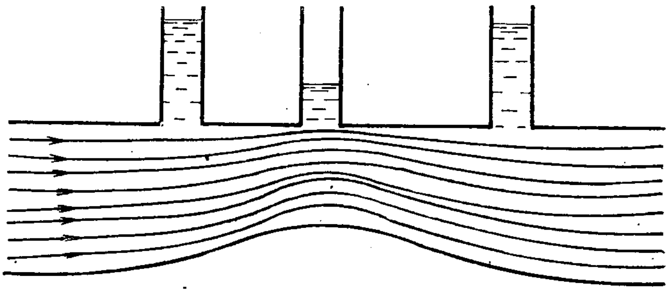
да ётган 1 ва 2 нуқталарни (8,5-расм, *а*) танлаб олайлик. Найча горизонтал $v_2=0$ бўлгани учун (8.5)-га асосан

$$p_1=\rho v_1^2/2=p_2 \text{ ни ёзамиз.}$$

бундан

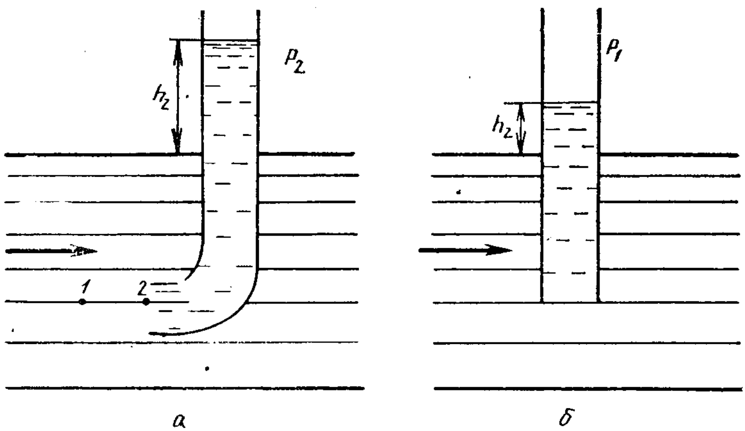
$$v_1=\sqrt{2(p_2-p_1)/\rho}. \quad (8.7)$$

8.5-расм, *а* да кўрсатилган найчага Пито найчаси дейилади; унинг ичидаги суюқлиқ устунининг баландлиги h_2 бўйича тўла бо-



8.4-расм.

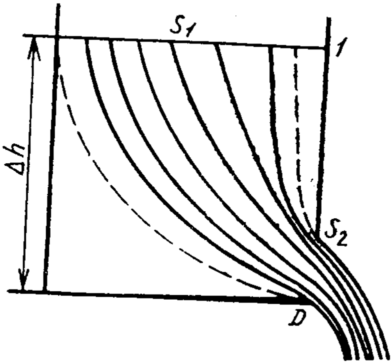
сим p_2 ни ўлчайдилар. Ҳаракатланувчи суюқликнинг статик босими p_1 ни, 8.5-расм, *б* да кўрсатилган найча ёрдамида устун баландлиги h_1 бўйича аниқлайдилар. 8.5-расмдагидек шундай



8.5-расм.

икки найча системасига эга бўлгач, (8.7)-формула бўйича суюқлиқ оқими тезлигини ҳисоблайдилар. Баъзан бу мақсад учун биратўла $p_2—p_1$ қийматини берадиган ёки тезлик бирликларида даражаланган дифференциал манометрдан фойдаланадилар.

4. Идиш тешигидан суюқликнинг оқиб чиқиши. Торричелли формуласи. Кенг идишдаги кичик тешикдан суюқлиқ оқиб чиқаётгандаги оқим чизиқларини шартли равишда кўрсатайлик (8.6-расм); бу вақтда $S_1 \gg S_2$, $v_1 \ll v_2$ тахминан $v_1 \approx 0$, $p_1 \approx p_2$ (атмосфера босими 1 ва 2 даражада) деб ҳисоблаймиз. Бу шартларни назарда тутиб, (8.5)-дан



8.6-расм.

$\rho g h_1 = \rho v_2^2/2 + \rho g h_2$ ни оламиз,

бундан

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2g\Delta h}$$

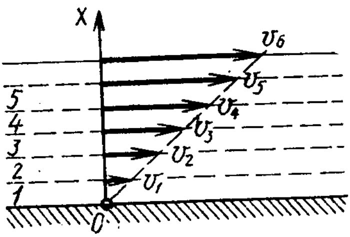
ҳосил бўлади. (8.8)

Демак, шалоланинг оқиб чиқиш тезлиги $\Delta h = h_1 - h_2$ баландликдан эркин тушувчи жисмнинг тезлигига тенг.

§ 3. СУЮҚЛИҚ ҚОВУШОҚЛИГИ. НЬЮТОН ТЕНГЛАМАСИ

Реал суюқлиқ оққанда унинг айрим қатламлари бир-бирларининг қатламларига уринма бўлган кучлар билан ўзаро таъсир қиладилар. Бу ҳодисага ички ишқаланиш ёки қовушоқлик дейилади.

Қовушоқ суюқликнинг горизонтал оқишини кўриб чиқамиз (8.7-расм)*. Суюқликни шартли суратда бир неча 1, 2, 3, 4, 5, қатламлар шаклида тасаввур қилайлик. Тубга «ёпишган» қатлам ҳаракатсиз. Тубдан узоқлашган сари суюқлиқ тезликлари катталашиб ($v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5$) ҳаво билан чегараланган қатламда тезлик $v_в$ максимал бўлади.



8.7-расм.

Қатламлар бир-бирига таъсир этадилар. Масалан, учинчи қатлам иккинчи қатлам ҳаракатини тезлаштиришга интилади, аммо ўзи эса иккинчи қатлам томонидан тормозланишни сезади, тўртинчи қатлам томонидан эса тезлантирилади ва ҳ. к. Ички ишқаланиш кучи ўзаро таъсирланувчи қатламлар юзи S га пропорционал ва уларнинг нисбий тезликлари қанча катта бўлса, шунча катта бўлади. Қатламларга ажратиш шартли бўлганлиги учун тезликка перпендикуляр йўналишдаги узунлик

* Ички ишқаланиш модданинг молекуляр табиатига боғлиқ бўлгани учун бу ҳодисанинг тушунтирилиши III бўлимда берилган. Бу ерда ички ишқаланиш фақат қовушоқ (ёпишқоқ) суюқликнинг ҳаракати муносабати билан қаралади.

бирлигига тўғри келган тезликнинг ўзгаришига, яъни *тезлик градиенти деб* аталувчи (қисқача *grad v*) катталик dv/dx га боғланувчи кучни қуйидагича ифодалаш қабул этилган:

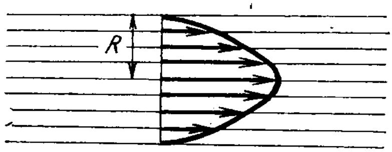
$$F_{\text{ишқ}} = \eta \frac{dv}{dx} S. \qquad (8.9)$$

Бу *Ньютон тенгламасидир. Бу ерда* η — ички ишқаланиш коэффициенти ёки *динамикавий қовушоқлик* (ёпишқоқлик) ёки оддийчасига *қовушоқлик (ёпишқоқлик)* деб аталувчи пропорционаллик коэффициенти. Қовушоқлик суюқлиқнинг (ёки газнинг) ҳолатига ва молекуляр хоссаларига боғлиқдир.

Қовушюқликнинг СИ системасидаги ўлчов бирлиги 1 Па·с. Тезлик градиенти 1 м/(с·м) бўлган 1 м² юзли қатламга 1 Н ички ишқаланиш кучи таъсир этадиган суюқлиқ 1 Па·с қовушоқликка эгадир. СГС системасида қовушоқлик пуазларда (П) ўлчанади; бу ном олим Пуазейль шарафига берилган. Қовушоқлик бирликлари орасидаги муносабат: 1 Па·с = 10 П.

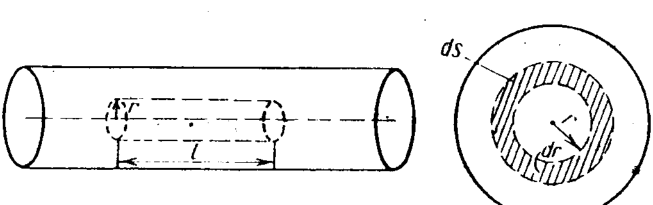
§ 4. ҚОВУШОҚ СУЮҚЛИҚНИНГ ТРУБАЛАРДАН ОҚИШИ ПУАЗЕЙЛЬ ФОРМУЛАСИ

Қовушоқ суюқлиқнинг трубалардан оқиши медицина учун алоҳида қизиқарли, чунки қон оқиш системаси асосан ҳар хил диаметрли цилиндрик томирлардан иборат.



8.8-расм.

Найча ичида, унинг ўқидан бирдай узоқликда бўлган, оқиб турувчи суюқлиқ заррачалари симметрия тўғрисидаги мулоҳазаларга кўра бир хил тезликка эгадир. Энг катта тезликка ўқ бўйлаб ҳаракатланувчи заррачалар эга бўлади; найчага энг яқин ётган суюқлиқ қатлами ҳаракатланмайди. Найча кесимида суюқлиқ заррачалари тезликларининг тахминий тақсимоти 8.8-расмда кўрсатилган.



8.9-расм.

$v = f(r)$ боғланишни аниқлаш учун бирор r радиусли ва l узунликдаги суюқлиқнинг цилиндрик ҳажмини ҳаёлан ажратиб олайлик. (8.9-расм, *а*). Бу цилиндрнинг кўндаланг кесимларида P_1 ва P_2 босимлар сақланадики, улар тегишлича натижаловчи куч

$$F_р = p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2 = (p_1 - p_2)\pi r^2 \quad (8.10)$$

ни юзага келтирадилар. Цилиндрнинг ён сиртига атрофдаги суюқлик қатлами томонидан ички ишқаланиш кучи таъсир этади, бу куч Ньютон тенгламаси (8.9) бўйича

$$F_{ишқ} = \eta \frac{dv}{dr} S = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi rl \quad (8.11)$$

га тенг; бу ерда $S = 2\pi rl$ цилиндр ён сиртининг юзи. Суюқлик текис ҳаракат қилганлиги учун ажратилган цилиндрга таъсир этувчи кучлар мувозанатланган бўлади: $F_р = F_{ишқ}$; бу тенгликка (8.10) ва (8.11)-ни қўйиб,

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi rl \quad (8.12)$$

ни оламиз.

$dv/dr<0$ (r катталашган сари тезлик камайиб боради) бўлганлиги учун тенгламанинг ўнг томонида «—» ишора бўлади. (8.12)-дан

$$dv = -\frac{p_1-p_2}{2l\eta} rdr$$ га эга бўламиз:

Бу тенгламани интеграллаймиз:

$$\int_0^v dv = -\frac{p_1-p_2}{2l\eta} \int_R^r rdr; \quad (8.13)$$

бу ерда пастки чегаралар найчанинг ички сиртига «ёпишган» қатламга мос бўлиб, юқори чегаралар — ўзгарувчандирлар. (8.13)-ни ечиб, суюқлик қатламлари тезлиги билан уларнинг найча ўқигача бўлган масофалари орасидаги параболик муносабатни чиқарамиз (8.8-расмдаги тезлик векторлари учларини айланиб ўтувчи чизиққа қаранг).

$$v = \frac{p_1-p_2}{4l\eta} (R^2 - r). \quad (8.14)$$

Найча ўқи бўйича ($r=0$) оқувчи қатлам энг катта тезликка эга бўлади:

$$v_m = (p_1 - p_2)R^2/4l\eta.$$

Горизонтал труба орқали вақт бирлигида оқиб чиққан суюқлик ҳажми Q нинг қандай факторларга боғлиқ эканини аниқлайлик. Бунинг учун r радиусли ва dr қалинликдаги цилиндрик қатлам ажратамиз. Бу қатлам кесимининг юзи (8.9-расм, *б*) $dS = 2\pi rdr$. Қатлам юпқа бўлгани учун уни бир хил v тезлик билан силжийди деб ҳисоблаш мумкин. Вақт бирлигида қатлам

$$dQ = vdS = v \cdot 2\pi rdr \quad (8.15)$$

ҳажмга тенг бўлган суюқликни кўчиради

(8.14)-ни (8.15)-га қўйиб,

$$dQ = \pi \frac{p_1-p_2}{2l\eta} (R^2 - r^2) rdr$$ ни оламиз.

Бундан бутун кесим бўйича интеграллаб

$$Q = \pi \frac{p_1-p_2}{2l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2)\, rdr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{p_1-p_2}{l} \quad (8.16)$$

ни топамиз.

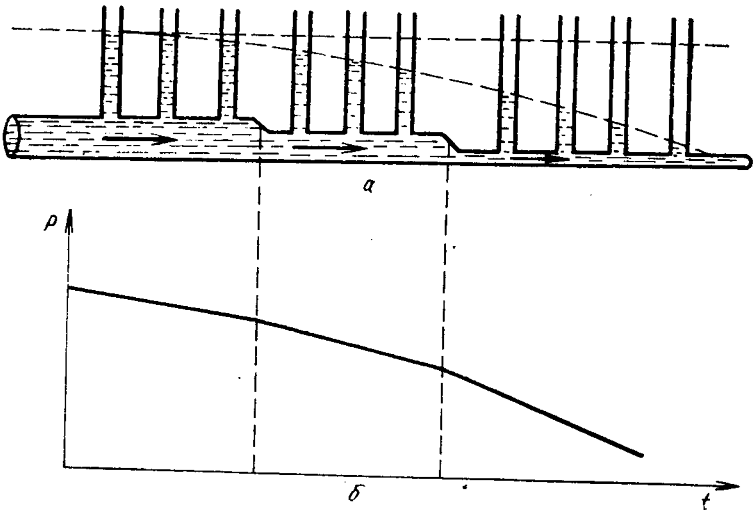
Бу муносабат *Пуазейль формуласи* номи билан маълумдир.

Маълум ташқи шароитларда (p_1 ва p_2) найча радиуси қанчалик катта бўлиб, қовушоқлиги қанча кичик бўлса, вақт бирлигида труба орқали шунча кўп суюқлик оқиши (8.16)-дан кўриниб турибди. Q билан радиус ўртасидаги кучли боғланиш фақат ҳажмнинг ўзгаришигагина эмас, балки труба сирти яқинига жойланган қатламларнинг нисбий қисмига ҳам боғлиқдир.

Пуазейль формуласи (8.16) билан ток манбаи бўлмаган занжир участкаси учун Ом қонуни ўртасидаги ўхшашликни кўриб чиқайлик. Потенциаллар айирмаси труба учларидаги босимлар айирмасига, ток кучи — вақт бирлигида труба кесимидан ўтувчи суюқлиқ ҳажмига, электрик қаршилик — *гидравлик қаршилик* X га мос келади:

$$X = 8\eta\, l/\pi R^4. \tag{8.17}$$

Қовушоқлик η ва труба узунлиги l қанча катта бўлиб, кўндаланг кесим юзи қанча кичик бўлса, гидравлик қаршилик шунча катта бўлади. Электрик ва гидравлик қаршиликлар аналогияси баъзи ҳолларда ўтказгичларнинг кетма-кет ва параллель уланишларида электрик қаршиликни топиш қоидасидан кетма-кет ва параллель уланган трубалардаги гидравлик босимни топиш учун фойдаланишга имкон беради.



8.10-расм.

Пуазейль тенгламасига ўзгарувчан кесимли трубалар учун ҳам тўғри келадиган. умумийроқ шаклни бериш учун $(p_1-p_2)/l$ ни босим градиенти dp/dl билан алмаштирамиз, шунда

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dl} \tag{8.18}$$

Қовушоқ суюқлиқ оқиб турган турли кесимли горизонтал цилиндрик трубанинг турли жойларига манометрик трубалар ўрнатамиз (8.10-расм, *а*). Улар $dp/dl=\text{const}$ бўлганда ўзгарувчан кесимли труба бўйлаб статик босимни l га пропорционал равишда камайиб боришини кўрсатадилар. Q бир хил бўлганлиги учун,

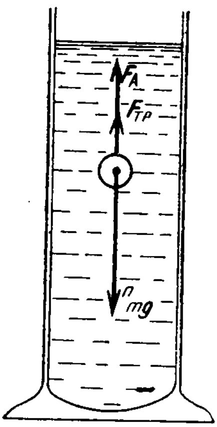
*

(8.18)-га биноан, босим градиенти кичик радиусли трубаларда каттароқ бўлади. Босим билан труба бўйича масофа орасидаги боғланишнинг графиги тахминий суратда 8.10-расм, *б* да кўрсатилган.

§ 5. ҚОВУШОҚ СУЮҚЛИҚ ИЧИДА ЖИСМЛАР ҲАРАКАТИ. СТОКС ҚОНУНИ

Қовушоқлик биргина суюқлиқнинг идишлар бўйича ҳаракатланишида эмас, жисмларнинг суюқлиқ ичида ҳаракатланишларида ҳам рўй беради. Тезликлар унча катта бўлмаган ҳолларда Ньютон формуласига биноан ҳаракатланувчи жисмга кўрсатиладиган қаршилик кучи суюқлиқнинг қовушоқлигига, жисм ҳаракатининг тезлигига ва жисм катта-кичиклигига боғлиқ бўлади. Қаршилик кучи учун умумий формулани кўрсатиш мумкин бўлмаганлиги учун хусусий ҳолни кўриб чиқиш билан чегараланамиз.

Жисмнинг энг содда формаси сферадир. Сферик жисм (шарча) учун унинг суюқлиқли идиш ичида ҳаракатланиш вақтидаги ишқаланиш кучлари билан юқорида айтилган факторлар ўртасидаги боғланиш Стокс қонуни билан ифодаланади;



8.11-расм.

$$F_{\text{ишқ}}=6\pi\eta r v, \qquad (8.19)$$

бу ерда r — шарча радиуси, v — ҳаракат тезлиги. Бу қонун идиш деворлари жисм ҳаракатига таъсир қилмайди деб фараз қилинган ҳолда олингандир.

Шарча қовушоқ суюқлиқ ичига тушганда (8.11-расм) унга учта куч таъсир этади:

а) оғирлик кучи $mg=\rho\frac{4}{3}\pi r^3 g$;

б) итариб чиқарувчи куч (Архимед кучи) $F_A=m_c g=\rho_c\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 g$, бу ерда m_c — шар сиқиб чиқарган суюқлиқнинг массаси, ρ_c — суюқлиқ зичлиги;

в) 8.19-формула бўйича ҳисобланувчи қаршилик кучи — $F_{\text{ишқ}}$.

Шарча қовушоқ суюқлиқ ичига тушганда унинг тезлиги камаяди. Қаршилик кучи тезликка тўғри пропорционал бўлгани учун у ҳам ҳаракат то текис ҳаракатга айлангунича камайиб бораверади. Бу ҳолда (8.11-расмга қаранг).

$$mg+F_A+F_{\text{ишқ}}=0$$ ни ёзишимиз мумкин,

ёки кучлар тенг бўлган ифодаларни ўринларига қўйиб скаляр формада

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_c g-6\pi\eta r v_0=0 \qquad (8.20)$$

ни ёза оламиз,

бу ерда v_0 — шарча текис ҳаракати (тушиш) нинг тезлиги. (8.20)-дан

$$v_0 = \frac{2}{9} \cdot \frac{(\rho-\rho_c)r^2g}{\eta} \text{ га эга бўламиз.} \qquad (8.21)$$

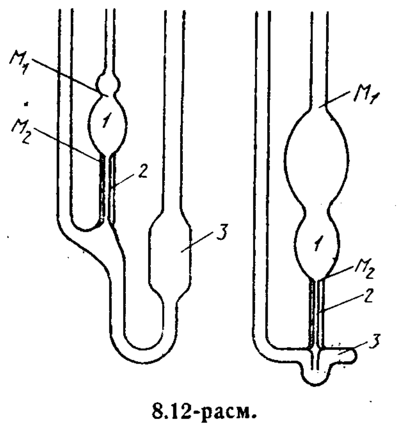
(8.21)-формула шарчанинг фақат суюқликда эмас, газ ичидаги ҳаракатида ҳам ўз кучини сақлайди. Ундан, жумладан, ҳаводаги чанг заррачаларининг чўкиш вақтини ҳисоблашда фойдаланиш мумкин. Буни қуйидаги мисол билан тушунтирамиз. Ичида ҳар хил чанг заррачалари сузиб юрган муҳит — ҳаво учун қовушоқлик $\eta = 0{,}000175$ П. Ўлган кишилар ўпкаларида топилган чанг заррачаларининг 80% га яқини 5 дан 0,2 мкм катталикда бўлгани маълум. Агар чангчалар шарсимон, чанг зичлиги ер зичлигига ($\rho = 2{,}5$ г/см^3) тенг деб ҳисобланса, у ҳолда, (8.20)-формула бўйича бу чангчалар чўкиш тезлигини ҳисоблаб, унинг қиймати $0{,}2 \div 0{,}0003$ см/с чегара ичида ётганини топамиз. Бундай чангнинг ҳаво бутунлай ҳаракатсиз ва Броун ҳаракати йўқ бўлган шароитда баландлиги 3 м бўлган уй ичида тўла чўкиб тушиши учун 12 суткага яқин вақт талаб этилади.

§ 6. СУЮҚЛИК ҚОВУШОҚЛИГИНИ АНИҚЛАШ УСУЛЛАРИ. ВИСКОЗИМЕТРИЯ.

Қовушоқликни ўлчаш методлари тўпламига *вискозиметрия* дейилади, шу мақсадлар учун ишлатилувчи асбобларга эса вискозиметрлар дейилади.

Энг кўп тарқалган вискозиметрия усулларини кўриб чиқамиз.

Капилляр метод Пуазейль қонунига асосланган бўлиб, бу метод босим ўзгариши туфайли оғирлик кучи таъсирида маълум массали суюқликнинг капилляр орқали оқиб ўтиш вақтини ўлчашдан иборатдир. Ҳар хил шаклдаги капилляр вискозиметрлар 8.12-расмда кўрсатилган (бу ерда: *1* — ўлчов резервуарлари, M_1 ва M_2 — суюқликнинг бу резервуарлардан оқиб чиқиш вақтини ўлчаш учун хизмат қилувчи белгилар, *2* — капиллярлар, *3* — қабул қилиш идишлари).



8.12-расм.

Капилляр вискозиметр қон қовушоқлигини ўлчаш учун ишлатилади (XIV боб § 4 га қаранг).

Капилляр вискозиметрлар билан қовушоқликни газларга хос бўлган 10^{-5} Па·с қийматидан то консистентли мойлашларга характерли бўлган 10^4 Па·с қийматигача ўлчанади.

Тушувчи (чўкувчи) шарча методи Стокс қонунига асосланган вискозиметрларда фойдаланилади. (8.21)-формуладан

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{(\rho - \rho_c) r^2 g}{v_0}$$ ни топамиз.

Шундай қилиб, бу формуланинг ўнг томонига кирувчи катталикларни билгач ва шарчанинг текис тушиш тезлигини ўлчаб, берилган суюқликнинг қовушоқлигини топиш мумкин.

Ҳаракатланувчи шарчали вискозиметрларнинг ўлчаш чегараси $6 \cdot 10^{-4} \div 250$ Па·с ни ташкил этади.

Ротацион вискозиметрлар ҳам ишлатилади. Бундай вискозиметрларда суюқлиқ икки умумий ўқли жисмлар, масалан, цилиндрлар орасидаги зазорда (ораликда) туради. Цилиндрлардан бири (ротор) айланади, иккинчиси эса тинч туради. Қовушоқлик тинч турган цилиндрда муайян куч моментини ҳосил қилувчи роторнинг бурчагий тезлиги бўйича ёки ротор айланишининг берилган бурчагий тезлигида тинч турган цилиндрга таъсир этувчи куч моменти бўйича ўлчанади.

Ротацион вискозиметрлар ёрдамида суюқлиқларнинг $1 \div 10^5$ Па·с интервалдаги қовушоқлигини, яъни ёғлаш мойларининг эритилган силикатлар ва металларнинг, катта қовушоқли лак ва елимларнинг, лойтупроқли қоришмалар ва ҳ. к.-ларнинг қовушоқлигини аниқлайдилар.

§ 7. ЛАМИНАР ВА ТУРБУЛЕНТ ОҚИМЛАР. РЕЙНОЛЬДС СОНИ

Суюқликнинг стационар ҳаракати *қатламдор* ёки *ламинар* оқимдир, бу оқим учун Бернулли ва Паузейль тенгламалари ҳаққонийдир. Қовушоқ суюқликнинг оқиш тезлигини орттириш труба кўндаланг кесими бўйлаб босимнинг бир текисда бўлмаганлиги туфайли гирдобланиш ҳосил қилади ва ҳаракат *уюрмали* ёки *турбулент* ҳаракатга айланади. Турбулент оқимда заррачалар тезлиги ҳар бир жойда узлуксиз ва хаотик ўзгариб туради, ҳаракат ностационар бўлади.

Труба бўйича суюқлиқ оқишининг характери суюқлиқ хоссаларига, оқиш тезлигига, труба ўлчамларига боғлиқ бўлади ва *Рейнольдс сони* билан аниқланади. Диаметри D бўлган труба учун Рейнольдс сони қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$Re = \rho_c vD/\eta. \qquad (8.22)$$

бу ерда ρ_c — суюқлиқ зичлиги.

Агар Рейнольдс сони бирор критик миқдордан катта ($Re > Re_{кр}$) бўлса, суюқлиқ ҳаракати турбулент бўлади. Масалан, текис цилиндрик трубалар учун $Re_{кр} \approx 2300$.

Рейнольдс сони суюқлиқ қовушоқлигига ва зичлигига боғлиқ бўлгани учун *кинематик* қовушоқлик деб аталувчи уларнинг нисбатини киритиш қулайдир: $\nu = \eta/\rho_c$. Бу тушунчадан фойдаланиб, труба учун бўлган Рейнольдс сонини қуйидаги шаклда ифодалаш мумкин:

$$Re = vD/\nu. \qquad (8.23)$$

СИ системасида кинематик қовушоқликнинг ўлчов бирлиги 1 $м^2/с$, СГС системасида — стокс (Ст) бўлади; улар ўртасидаги муносабат: 1 Ст$=10^{-4}$ $м^2/с$.

Ички ишқаланишни суюқлиқ ёки газнинг оқиш характерига таъсирини динамик қовушоқликдан кўра кинематик қовушоқлик тўлароқ ҳисобга олади. Масалан, сувнинг қовушоқлиги 0°С даги ҳавоникидан тахминан 100 марта ортиқ, аммо сувнинг кинематик қовушоқлиги ҳавоникидан 10 марта кам ва шунинг учун қовушоқлик ҳавонинг оқиш характерига сувникидан кўра кучлироқ таъсир этади.

Суюқлиқнинг ёки газнинг оқиш характери труба ўлчамларига жиддий боғлиқлиги (8.23)-дан маълум. Кенг трубаларда ҳатто нисбатан кичик тезликларда ҳам турбулент ҳаракат пайдо бўлиши мумкин. Масалан, диаметри 2 мм бўлган найчада сувнинг оқиш тезлиги 127 см/с бўлганда ҳаракат турбулентга айланса, диаметри 2 см бўлган трубада эса — тезлик 12 см/с га тенглашганда ҳаракат турбулент бўлади. Қоннинг оқиши бу трубада тезлик 50 см/с бўлганда турбулент бўлар эди, лекин амалда диаметри 2 см бўлган қон томирларида турбулент оқиш ҳатто камроқ тезликларда ҳам вужудга келади.

Норма бўйича артерияларда қон ламинар бўлиб оқади, озгина турбулентлик клапанлар яқинида пайдо бўлади. Патология вақтларида қовушоқлик нормадан кам бўлганда Рейнольдс сони критик қийматдан ошиб кетиши мумкин ва ҳаракат турбулент бўлиб қолади.

Турбулент оқим суюқлиқ оқиши вақтида қўшимча энергия сарф қилиниши билан боғлиқ; бу суюқлиқ қон бўлса, юракни қўшимча иш бажаришига олиб келади. Қоннинг турбулент оқишида пайдо бўладиган шовқиндан касалликларга диагноз қўйиш учун фойдаланиш мумкин. Бу шовқинни қон босимини ўлчаш вақтида елка артериясида тинглаб текшириб кўрилади.

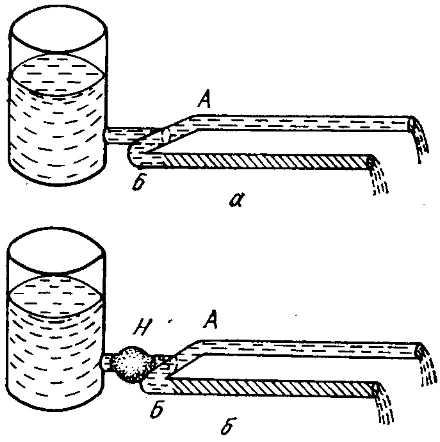
Норма бўйича бурун бўшлиғидаги ҳаво оқими ламинар бўлади. Лекин яллиғланиш ёки нормадан бошқа бирор оғишлар юз берган вақтларида оқим турбулент бўлиб қолиши мумкин, бу эса нафас мускулларини қўшимча иш бажаришга олиб келади.

Рейнольдс сони ўхшашлик критерийсидир. Гидро-ва аэродинамик системаларни, хусусан қон юритиш системасини, моделлаш вақтида модель ҳам асл нусханинг Рейнольдс сони билан бир хил бўлиши керак, акс ҳолда улар орасида мослик бўлмай қолади. Бу суюқлиқ ёки газ ичида ҳаракатланиш вақтида жисмларнинг айланиб оқишини моделлашга ҳам тегишлидир. Асл нусхага нисбатан модель ўлчамларининг камайиши оқиш тезлигининг катталаниши билан ёки моделли суюқлиқ ёки газ кинематик қовушоқлигининг камайиши билан компенсацияланадиган бўлишининг кераклиги (8.23)-дан маълум.

§ 8. ГЕМОДИНАМИКАНИНГ БАЪЗИ ФИЗИКАВИЙ МАСАЛАЛАРИ

Биомеханиканинг томирлар системасида қон ҳаракатини текширувчи бўлимига *гемодинамика* дейилади. Гемодинамиканинг физикавий асоси гидродинамикадир. Гидродинамиканинг асосий масалалари илгариги параграфларда текширилиб ўтилган эди. Бу параграф томирлар системаси бўйича қон ҳаракатини тушунтиришда аҳамиятга эга бўлган баъзи хусусий масалаларга бағишланган.

1. *Эластик деворли найчаларда суюқлиқ ва қон ҳаракати.* Суюқлиқ узлуксиз оққанда найча ясалган материалнинг эластиклик* даражаси аҳамиятга эга эмас. Масалан, кўндаланг кесимлари бир-бирига тенг бўлган шиша *А* ва резина *Б* найчалардан (8.13-расм, *а*) суюқлиқнинг бир хилда стационар бўлиб оқишини кузатиш мумкин. Оқиб чиқувчи шалола узлуксиз ва бирдек кўринади. Агар даврий таъсир қилиб турувчи насос *Н* (8.13-расм, *б*) ёрдами билан найчалар орқали пульсланиб турган оқим юборилса, у ҳолда суюқлиқнинг найчалардан оқиб чиқиш характери ҳар хил бўлади: шиша *А* найчадан узлуксиз, резина *Б* найчадан стационар оқим чиқади.



8.13-расм.

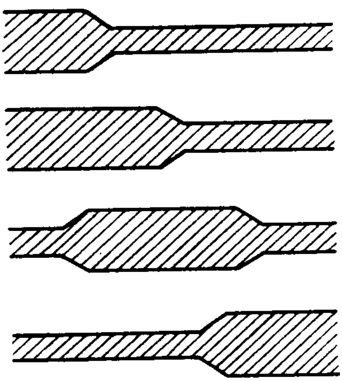
Бу ҳолни қуйидагича тушунтириш мумкин. Босим катталашганда эластик найча кенгаяди, суюқлиқнинг кинетик энергияси қисман деворлар деформациясининг потенциал энергиясига айланади. Насос даврий ишлаб тургани учун унинг ишлаши тўхтаган пайтларда тескари энергетик ўзгаришлар рўй беради, эластик найча қисилади, бу эса суюқлиқнинг лозим йўналишда оқишига имкон беради. Эластик найча қисилганда насос клапани суюқлиққа тескари йўналишда оқишга имкон бермайди. Найчада ҳосил бўлган деформация 8.14-расмда схематик кўрсатилган пульсланма тўлқин шаклида тарқалади. Найча эластиклиги насосдан ҳосил бўлувчи босим пульсланишини текислайди. Насос ҳосил қилган босим (*а*) нинг ўзи ва эластик найчадаги кўриниши (*б*) шартли суратда 8.15-расмда кўрсатилган.

Артериялар девори эластикдир, шунинг учун бундай томирларда қон ҳаракати суюқлиқнинг эластик найчада оқишига мос

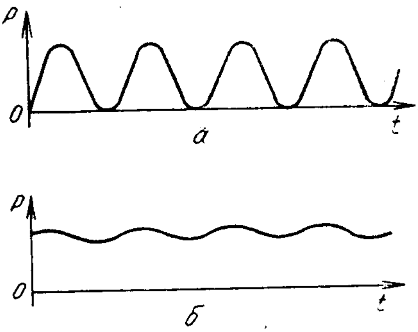
---

* Эластиклик деганда нисбатан катта бўлмаган кучлар таъсири натижасида материалнинг ёки нарсаларнинг бирмунча катта қайтувчан эластик деформацияларга чидаш (сезиш) қобилиятини тушунадилар.

келади. Юрак мускули қисқарганда (систола) қон юракдан аортага ва ундан тармоқланувчи артерияларга чиқариб юборилади. Деворлар эластик бўлгани учун йирик артериялар систола вақтида периферияга оқиб кетган қондан кўра кўпроқ қонни қабул қилади. Одам систолик босимининг нормаси тахминан 120 мм сим. уст. га тенг*. Юракнинг бўшашган вақтида (диастола) кенгайган артериялар тораядилар ва уларга юрак томонидан берилган потенциал энергия қон оқимининг кинетик энергиясига айланади, шу билан бирга тахминан 80 мм. сим. уст. га тенг диастолик босим рўй бериб сақланади. Артерияларнинг эластик хоссалари юракнинг узлуксиз қон оқимига берадиган босимнинг даврий тебранишларини текислашга ва қон юргизишга кетадиган энергиянинг кўпроқ тежалиб сарфланишига имкон беради. Систолани давом этиш вақти диастоланинг давом этиш вақтидан тахминан икки марта кам, бу эса юрак мускулига вақтнинг учдан иккисига тенг даврда дам олишга имкон беради Артерияларда пульс тўлқинининг тарқалиш тезлиги тахминан 6—8 м/с га тенг.



8.14-расм.



8.15-расм.

Юрак — юрак клапани — аорта (артериялар) — периферик томирлардан иборат система ишини англамоқ учун (8.16-расм) даги электрик моделни кўздан кечириш фойдалидир. Бу ерда юрак аналоги бўлмиш синусоидал бўлмаган электр кучланишини берувчи манба U тўғрилагич B — юрак клапани ролидадир. Конденсатор C ярим давр ичида заряд тўплайди, сўнгра резистор R га разрядланади, шўндай қилиб, резистор орқали оқувчи ток текисланади. Конденсаторнинг иши, қон босимининг тебранишларини текисловчи, эластик аорта (артерия) нинг таъсирига ўхшашдир. Резистор периферик томирлар системасининг электрик аналогиясидир.

2. *Қон томирлар системаси тармоқланган найчалар сифатида.* Қон томирлар системаси физикавий нуқтаи назардан ҳар хил

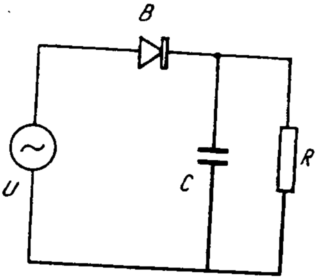
* Мазкур параграфнинг бу ва келгуси ерларида атмосфера босимидан ортиқроқ босим кўрсатилган.

радиусга ва узунликка эга бўлган кетма-кет ва параллел уланган найчалар тўпламидир. Мазкур тармоқланишлар схематик равишда 8.17-расмда кўрсатилган: аорта (*1—2*), артериялар (*2—3*), артериолалар (*3—4*), капиллярлар (*4—5*), венулалар (*5—6*) ва веналар (*6—7*).

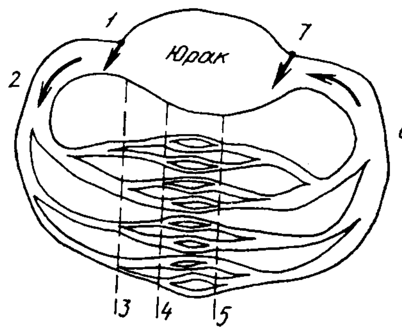
Айрим найча бўйлаб босимнинг пасайиши $\Delta p = p_1 - p_2$ ни (8.17)-ҳисобга олган ҳолда Пуазейль тенгламаси (8.16)-ёрдамида

$$p_1 - p_2 = QX^*$$

кўринишида ёзамиз, яъни белгиланган маълум ҳажмдаги суюқликнинг оқиши вақтида Δp гидравлик қаршилик X га боғлиқдир.



8.16-расм.



8.17-расм.

Қон томирлар системасида қон оқими бўйича босимнинг пасайиши тармоқларнинг гидравлик қаршилигига боғлиқ бўлади; мазкур қаршилик кетма-кет ва параллел уланишлар учун

$$X = X_1 + X_2 + \ldots;\quad X = \left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \ldots\right)^{-1}$$

формулалар бўйича топилади.

Артерияларнинг артериолаларга, артериолаларнинг капиллярларга ажралган сари қон оқимининг тўла кўндаланг кесими катталашади, лекин томирлар радиуси камайиб кетганлиги учун артериола ва капиллярларнинг гидравлик қаршилиги ҳали етарлича юксак бўлади, шунинг учун босим пасайишининг тахминан 70% миқдори ана шу томирларга тўғри келади.

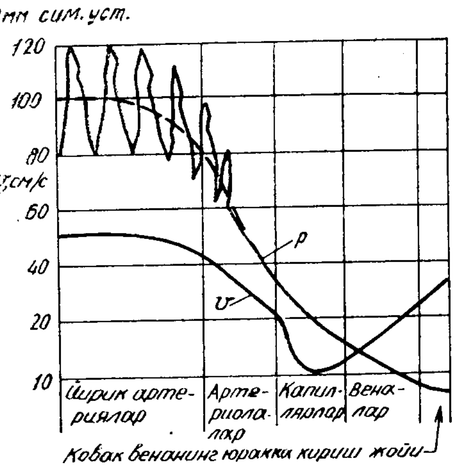
8. 18-расмда қон томирлар системасининг турли қисмларидаги (қоннинг оғирлик босими назарга олинмаган ҳолда) ўртача босим (эгри чизиқ p) ва қон оқими тезлигининг (эгри чизиқ v) графиклари кўрсатилган.

Соғлом одамнинг физиологик механизмлари қоннинг бутун организм бўйича текис тақсимланишига имкон беради. Лекин патологик ҳолларда оғирлик босими оёқ веналарида қон тўпланиб

* Қоннинг қовушоқлиги босимга боғлиқ ва шунга кўра, аслини айтганда, қонга нисбатан Ньютон ва Пуазейль тенгламалари тўғри келмайди. Бундай ньютоний суюқликларнинг молекуляр табиати III бўлимда кўриб чиқилади.

қолишига сабабчи бўлиши мумкин. Шунинг учун оёқлардан қон оқиб чиқиш вақтларида уларни мумкин қадар юқорига кўтарилган ҳолда жойлаш зарур.

Ўта юкланиш вақтларида организмда қон тақсимотининг ўзгариши органларнинг функцияларига жиддий таъсир этиши мумкин, шунинг учун бундай шароитларда одам танасини инерция кучлари йўналишига нисбатан маълум равишда жойлашнинг аҳамияти каттадир.



8.18-расм.

3. *Юракнинг механикавий иши ва қуввати.* Юракнинг бажарган иши босим кучларини енгишга ва қонга кинетик энергия беришга сарф этилади. Чап қоринчанинг бир карра қисқаришда бажарган ишини ҳисоблаб чиқайлик. Қоннинг зарб ҳажми V_3 ни цилиндр шаклида (8.19-расм) тасвирлайлик. Бу ҳажмни юрак S кесимли аорта бўйича p босимда l масофага итариб сиқиб чиқаради деб ҳисоблаш мумкин. Бу вақтда бажариладиган иш

$$A_1 = Fl = pSl = pV_3.$$

Қоннинг бу ҳажмига кинетик энергия бериш учун сарфланган иш

$$A_2 = mv^2/2 = \rho V_3 v^2/2,$$

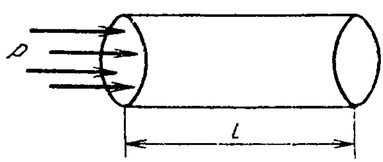
бу ерда ρ — қоннинг зичлиги, v — қоннинг аортадаги тезлиги. Шундай қилиб, юрак чап қоринчасининг қисқариш вақтида бажарган иши

$$A_ч = A_1 + A_2 = pV_3 + \rho V_3 v^2/2.$$

га тенг.

Ўнг қоринчанинг иши чап қоринча бажарадиган ишнинг 0,2 қисмига тенг деб қабул этилгани учун юракнинг бир карра қисқаришида бажариладиган умумий иш

$$A = A_ч + 0{,}2A_ч = 1{,}2(pV_3 + \rho V_3 v^2/2) \text{ га тенг.} \quad (8.24)$$



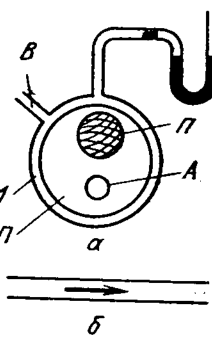
8.19-расм.

(8.24)-формула ҳам тинчликда, ҳам актив ҳолатда бўлган организм учун мос келади. Организмнинг бу ҳолатлари қон оқимининг тезлиги билан фарқланади.

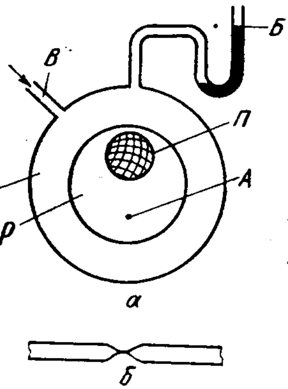
$p=100$ мм сим. уст.$=1{,}3\cdot10^4$ Па, $V_з=60$ мл$=6\cdot10^{-5}$ м^3, $\rho=1{,}05\cdot10^3$ кг/м^3, $v=0{,}5$ м/с қийматларни (8.24)-формулага қўйиб, тинч ҳолатда юракнинг бир марта қисқаришида бажарган ишини топамиз: $A_1\approx1$ Дж. Юракни ҳар секундда ўрта ҳисоб билан бир марта қисқаради деб ҳисоблаб, юракнинг бир суткада бажарган ишини топамиз $A_ю\approx86400$ Дж. Мускуллар актив бўлган фаолият вақтида юракнинг иши бир неча марта ортиши мумкин.

Систоланинг тахминан $t\approx0{,}3$ с давом этиши ҳисобга олинса, юракнинг бир марта қисқаришидаги ўртача қувватини топиш мумкин: $W=A_1/t=3{,}3$ Вт.

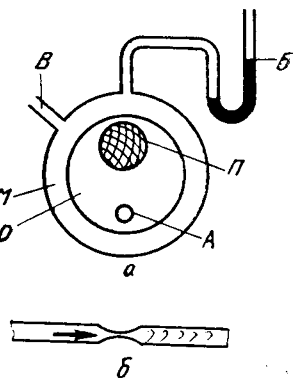
4. *Қон босимини ўлчашнинг клиникавий методининг физикавий асослари.* Қон босими каби физикавий параметр кўп касалликлар диагностикасида катта роль ўйнайди. Бирорта артериядаги систолик ва диастолик босимлар монометр билан уланган игна ёрдамида бевосита ўлчаниши мумкин. Бироқ медицинада



8.20-расм.

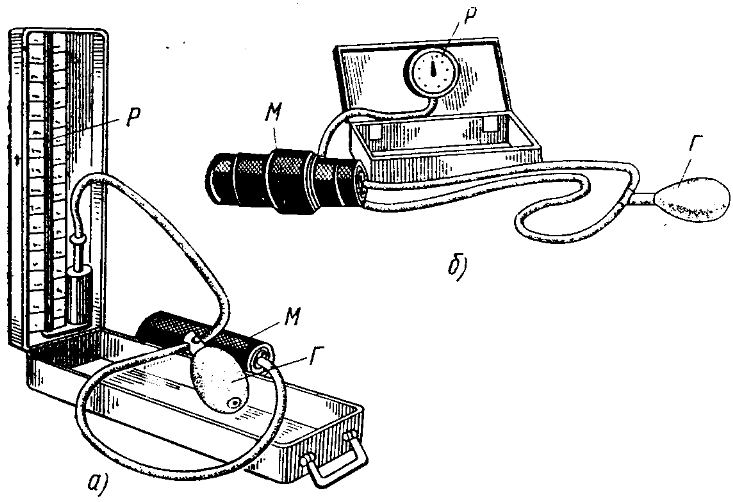


8.21-расм.

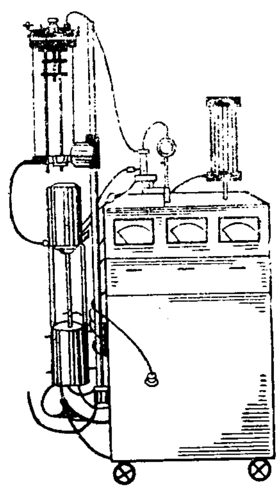


8.22-расм.

Н. С. Коротков томонидан таклиф этилган қонсиз метод кенг қўлланилади. Елка артериясидаги қон босимини ўлчаш мисолида бу методнинг физикавий асосларини кўриб чиқамиз. Қўлнинг елка билан тирсак ораси атрофига ҳаво билан тўлдириш мумкин бўлган манжета ўралади. Манжета *М*, қўл *Р*, елка суяги *П* ва елка артерияси А нинг кўндаланг кесимлари 8.20, *а* — 8.22-расм, *а* ларда кўрсатилган. Манжетага шланг *В* орқали ҳаво бериб қўл сиқилади, сўнгра худди шу шланг орқали ҳаво аста-секин манжетадан чиқариб юборилади, манометр *Б* ёрдами билан манжетадаги ҳаво босими ўлчанади. Худди шу расмларнинг *б* кўринишида елка артериясининг ҳар бир ҳолатига мос бўйлама кесимлари кўрсатилган. Аввал атмосфера босимидан ортиқча бўлган манжетадаги ҳаво босими нолга тенг (8.20-расмга қаранг), манжета қўлни ва артерияни сиқмайди. Манжетага ҳаво берилган сари елка артерияси сиқилади ва қон оқими тўхтаб қолади (8.21-расмга қаранг). Агар мускуллар бўшаштирилган бўлса, у ҳолда эластик деворли манжета ичидаги ҳавонинг босими тахминан манжета билан тўқнашиб турган юмшоқ тўқималарнинг босимига тенг бўлади. Босимни қонсиз методда ўлчашнинг асосий физикавий идеяси шундан иборат.



8.23-расм.



8.24-расм.

Ҳавони чиқара туриб, манжетадаги ва у билан тўқнашиб турган юмшоқ тўқималардаги босим камайтирилади. Босим систолик босимга тенглашиб қолганда қон сиқилган артерия орқали ўтиб кетиш қобилиятида бўлади — турбулент оқим вужудга келади (8.22-расмга қаранг). Фонендоскопни артерия устида манжетадан четроққа (яъни юракдан узоқ жойга) қўйиб, врач шу турбулент процесс билан бирга бўлаётган характерли тон ва шовқинларни* тинглаб эшитади. Манжетадаги босимни камайтира бориб, қоннинг ламинар оқишини тиклаш мумкин, буни тинглаб эшитилаётган тонларнинг бирданига кучсизланиб кетишидан билиш мумкин. Артерияда ламинар оқимнинг тикланишига мос манжетадаги босимни диастолик босим сифатида қабул қиладилар.

Артериал босимни ўлчаш учун 8.23-расмда кўрсатилган асбоблар ишлатилади: *а* — симобли манометрли сфигмоманометр;

* Бу товушларни Г. И. Косицкий тушунтириб берди.

б — металл мембраналик манометрли сфигмотонометр; бу ерда: *М* — манжета, *Г* — ҳаво бериш учун ноксимон резина, *Р* — манометр.

5. *Сунъий қон айлантириш аппарати.* Юракда операция олиб борилганда қон айланишини сунъий равишда махсус аппарат (8.24-расм) ёрдамида таъминланади. Бу аппарат аслда сунъий юрак билан (насос системаси) сунъий ўпкалар (оксигенатор — қоннинг кислородга тўйинишини таъминловчи система) бирлашувидан иборатдир.

УЧИНЧИ БЎЛИМ

МОЛЕКУЛЯР ФИЗИКА ВА ТЕРМОДИНАМИКА

Бу бўлим модданинг молекулавий тузилиши ва молекулаларнинг тартибсиз ҳаракати билан боғлиқ бўлган ҳодисаларни ўрганишга бағишланган. Физикада бу ҳодисаларни баён этишда бирбиридан принципиал фарқланувчи икки асосий: *молекулавий-кинетик (статистик)* ва *термодинамикавий методлардан* фойдаланадилар.

Молекулавий-кинетик метод ҳамма моддалар тартибсиз ҳаракатланиб турган молекулалардан иборат деган тасаввурга асослангандир. Молекулалар сони жуда кўп бўлганлиги учун, статистика қонунларини қўллаб, бутун моддага мансуб муайян қонуниятларни топиш мумкин. Термодинамикавий усул* термодинамика қонунлари номини олган асосий тажрибавий қонунларга асосланади. Ҳодисалар бу метод билан текширилганда модданинг ички тузилиши эътиборга олинмайди.

IX БОБ

ИДЕАЛ ГАЗ. МОЛЕКУЛАВИЙ-КИНЕТИК НАЗАРИЯ

Идеал газ деганда ўзаро таъсирланмайдиган ва узоқдан идиш деворлари билан муносабатда бўлмаган моддий нуқталар деб қабул қилиниши мумкин бўлган зарра̀чалар (молекулалар, атомлар, электронлар ва ш. ў.) тўпламини тушунадилар. Идеал газ заррачалари бир-бири ва идиш деворлари билан бевосита тўқнашган (урилишган) вақтлардагина ўзаро таъсирланиш қобилиятига эга бўлади.

Бу бобда кўриб чиқиладиган идеал газ молекулалардан ташкил топган.

§ 1. ҲОЛАТ ТЕНГЛАМАСИ

Система ҳолати *ҳолат параметрлари* деб аталувчи қатор физикавий катталиклар билан характерланади. Система параметрлари муайян муносабатлар — ҳолат тенгламалари орқали боғланади.

* Термодинамикавий усул ҳодисаларни ўрганишда Ньютоннинг тажрибавий қонунларига суянган классик механикадагидек йўлдан боради.

Оддий системалар учун босим p, ҳажм V ва температура T параметрлар ҳисобланади. Ҳолат тенгламаси бундай системалар учун умумий шаклда қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$f(p, V, T)=0.$$

Бу тенгламани исталган параметрга нисбатан ечиш мумкин.

Бир моль идеал газнинг ҳолат тенгламаси

$$pV_m=RT \qquad (9.1)$$

кўринишга эга; бу ерда V_m — газнинг моляр ҳажми (моль ҳажми), $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — газ моляр доимийлиги ёки m/M моль учун

$$pV=(m/M)RT, \qquad (9.2)$$

бу ерда V ва m — газнинг ҳажми ва массаси; M — моляр масса (бир молнинг массаси). (9.2)-тенглама *Менделеев — Клапейрон тенгламаси* дейилади.

Газ массасининг ҳажмига нисбатан зичлик ρ га тенг эканлигини ҳисобга олиб, (9.2)-дан

$$p=(\rho/M)\,RT \qquad (9.3)$$

га эга бўламиз.

Газ ҳолати тенгламасидан газда рўй берувчи тегишли, масалан, изохор, изобар ва изотермик каби изопроцесслар тенгламаларини чиқариш осон.

Система p, V, T лардан ташқари яна бошқа, унинг электравий, магнитавий, сиртий, эластиклик ва бошқа хоссаларини характерловчи параметрлар ёрдамида ҳам баён этилиши мумкин.

§ 2. ГАЗЛАР МОЛЕКУЛАВИЙ-КИНЕТИК НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ТЕНГЛАМАСИ ВА УНИНГ НАТИЖАЛАРИ

Ҳолат тенгламаларига кирувчи параметрлар молекулавий-кинетик тасаввурлар нуқтаи назари жиҳатидан ўртачаланган катталиклардир. Жумладан, газ ҳосил қилган босим айрим молекулалар томонидан идиш деворларига берилган зарбларнинг ўртачаланган натижасидир; температура молекулалар тартибсиз ҳаракатининг намоён бўлиши ва улардаги илгариланма ҳаракатнинг ўртача кинетик энергияси билан аниқланади ва ҳ. к.

Газ параметрларининг (макрохарактеристикаларининг) молекулалар характеристикалари (микрохарактеристикалар) билан миқдорий боғланиши *газлар молекулавий-кинетик назариясиниг асосий тенгламаси* орқали ифодаланади.

Бу тенглама, ўрта мактаб физикаси курсидан маълум бўлишича,

$$pV=(m_0/3)Nv^2_{\text{кв}} \qquad (9.4)$$

кўринишида ёзилиши мумкин; бу ерда m_0 — айрим молекула массаси; N — газ молекулаларининг умумий сони, $v_{\text{кв}}$ — уларнинг ўртача квадратик тезлиги.

Битта молекула илгариланма ҳаракатининг ўртача кинетик энергияси

$$E_{\text{кв}}=\frac{1}{2}m_0v^2_{\text{кв}}=\frac{3}{2}kT, \qquad (9.5)$$

бу ерда $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К — Больцман доимийси.

Молекуланинг илгариланма ҳаракати учта эркинлик даражаси билан характерлангани учун (9.5)-формуладан ҳар бир эркинлик даражасига ўртача $E_{\text{к}}=kT/2$ га тенг энергия тўғри келганлиги ҳақида хулоса чиқариш мумкин. i-тача эркинлик даражасига эга молекуланинг ўртача энергияси

$$E_{\text{к}i}=(i/2)kT \text{ бўлади.} \qquad (9.6)$$

Газ босими p нинг молекулалар концентрацияси n ва температура T билан боғланишини, $M=m_0N_A$, $\rho=m_0n$ ва $k=R/N_A$,(N_A— Авогадро доимийси) эканлигини ҳисобга олиб, (9.3)-дан осонгина

$$p=knT \text{ ни топиш мумкин.} \qquad (9.7)$$

Химиявий ўзаро таъсирланмайдиган газлар аралашмаси учун молекулалар концентрацияси айрим газлар молекулалари концентрацияларининг йиғиндисига тенг:

$$n=n_1+n_2+\ldots+n_N.$$

Бу тенгламани (9.7)-га қўйиб, *Дальтон қонунига* эга бўламиз:

$$p=knT=k\,(n_1+n_2+\ldots+n_N)\,T=kn_1T+kn_2T+\ldots+kn_NT,$$
$$p=p_1+p_2+\ldots+p_N, \qquad (9.8)$$

бу ерда $p_1=kn_1T$, $p_2=kn_2T$ ва ш. ў. — *парциал босимлар*, яъни аралашма таркибидаги ҳар бир газнинг ёлғиз ўзи бутун ҳажмни эгаллайдиган ҳолда ҳосил қилиши мумкин бўлган босимлар. Шундай қилиб, химиявий ўзаро таъсирланмайдиган газлар аралашмасининг босими аралашма таркибидаги барча газлар парциал босимларининг йиғиндисига тенгдир.

§ 3. ГАЗ МОЛЕКУЛАЛАРИНИНГ ТЕЗЛИКЛАР БЎЙИЧА ТАҚСИМОТИ (МАКСВЕЛЛ ТАҚСИМОТИ)

Мувозанат ҳолатда газ параметрлари ўзгармай қолади, бироқ микроҳолатлар — молекулаларнинг ўзаро жойланишлари, уларнинг тезликлари — узлуксиз ўзгариб туради. Молекулалар миқдори жуда кўп бўлганлигидан уларнинг бирор вақт моментидаги тезликларининг қийматини амалда аниқлаш мумкин эмас, аммо молекулалар тезлигини узлуксиз тасодифий катталик деб ҳисоблаб, тезликлар бўйича молекулаларнинг қандай тақсимланганини кўрсатиш мумкин.

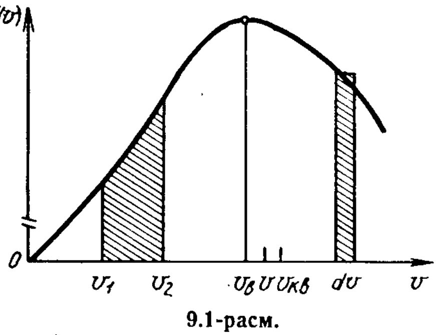
Айтайлик тезликлари dv интервалда: v дан $v+dv$ гача бўлган интервалда ётган молекулаларнинг сони dN бўлсин. dN нинг dv га пропорционал бўлишлиги ва олинган интервал яқинидаги тезлик dv га боғлиқ бўлиши лозимлигини фаҳмлаш қийин эмас.

$$dN=f(v)dv \tag{9.9}$$

Функция $f(v)$ Максвелл томонидан назарий суратда аниқланган ва унга *тезликлар бўйича Максвелл тақсимоти* дейилади:

$$f(v)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}N\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}e^{-m_0v^2/2kT}v^2 \tag{9.10}$$

Бу функцияларнинг графиги 9.1-расмда тасвирланган. Тезликлари v_1 дан v_2 гача бўлган интервалда ётган молекулалар сонини топиш учун (9.9)-ифодага (9.10)-ни қўйиб, интеграллаш керак:



9.1-расм.

$$N_{12}=\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv,$$ ёки v_1 дан v_2 гача бўлган чегарадаги эгри чизиқли трапециянинг юзини график усулда ҳисоблаш керак (9.1-расмга қаранг).

Агар тезликлар интервали етарлича кичик бўлса, у ҳолда тезликлари шу интервалга мос бўлган молекулаларнинг сонини, (9.10)-ни назарда тутиб ёзилган, (9.9)-формула бўйича ҳисоблаш мумкин:

$$dN=(4/\sqrt{\pi})N(m_0/2kT)^{3/2}e^{-m_0v^2/2kT}v^2\,dv$$

ёки асоси dv бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи сифатида график усулда ҳисоблаш мумкин.

Қанча молекула бирор маълум қийматли тезликка эга бўлади деган саволга, биринчи қарашда, ғалати жавоб берилади: агар тезлик мутлоқ аниқ берилган бўлса, унда тезликлар интервали нолга тенг ($dv=0$) ва (9.9)-дан

$$dN=f(v)dv=0 \text{ га}$$

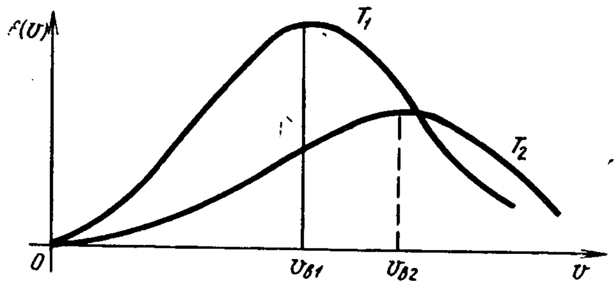
эга бўламиз, яъни ҳеч бир молекула аввалдан берилган аниқ тезликка эга бўлмайди. Бу нисбийлик назарияси асосларидан бири: газ молекулаларидан, ҳеч бўлмаганда, бир донасининг ҳам тезлигини олдиндан мутлоқ аниқ қилиб «билиш» мумкин эмас, деганига мос келади.

Максвелл эгри чизиғининг максимумига мос тезликка *энг эҳтимолий тезлик* $v_э$ дейилади. Уни Максвелл функциясини максимумидан фойдаланиб аниқлаш мумкин: $df(v)/dv=0$ ёки

$$(4/\sqrt{\pi})N(m_0/2kT)^{3/2}[e^{-m_0v_э^2/2kT}\cdot 2v_э - v_э^2e^{-m_0v_э^2/2kT}\cdot$$
$$\cdot(2m_0v_э/2kT)]=0,$$

бундан

$$v_э^2=2kT/m_0, \qquad v_э=\sqrt{2kT/m_0}. \tag{9.11}$$



9.2-расм.

Ўртача квадратик ва энг эҳтимолий тезликлар билан бир қаторда газ молекуласи учун *ўртача тезлик* ҳам характерлидир. Бу тезлик газдаги барча молекулалар тезликларининг ўрта арифметик қийматига тенг бўлиб, уни

$$\bar{v}=\sqrt{8kT/\pi m_0} \tag{9.12}$$

формула бўйича аниқлайдилар.

Бу кўрсатилган тезликларни таққослаб қуйидаги муносабатни таъкидлаш мумкин (9.1-расмга қаранг):

$$v_э<\bar{v}<v_{кв}.$$

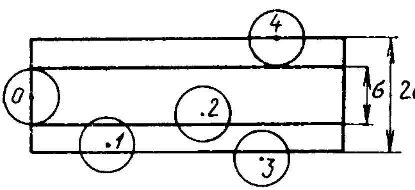
Температура ошганда Масквелл эгри чизиғининг максимуми катта тезликлар томонига силжийди ва v бўйича молекулалар тақсимоти шаклан ўзгаради (9.2-расм; $T_1<T_2$). Молекулалар сони газнинг иситилишига боғлиқ эмас деб фараз қиламиз, шунинг

учун 9.2-расмдаги эгри чизиқлар ва абсцисса ўқи билан чегараланган юзалар ҳар икки ҳолда бир хилда бўлиб, молекулаларнинг умумий сонига тенг. Мазкур расмдан кўринишича газ иситилганда кичик тезликка эга бўлган молекулалар сони камайиб, катта тезликли молекулалар сони эса кўпаяди.

§ 4. МОЛЕКУЛАЛАР УРТАСИДАГИ ЎЗАРО УРИЛИШЛАР СОНИ. МОЛЕКУЛА ЭРКИН ЮГУРИШИНИНГ УРТАЧА УЗУНЛИГИ

Реал молекулалар чекли ўлчамларга эга бўлганлари учун улар бир-бирлари билан тўқнашадилар, шу билан бирга тўқнашиш эҳтимоли молекулалар ўлчамига жуда боғлиқ бўлади. Молекуланинг бошқа молекулалар билан вақт бирлигида тўқнашиш сонини ҳисоблайлик. Ҳисоблаш вақтида қуйидагиларни фараз қиламиз: ажратилган молекула билан тўқнашувчи газ молекулаларининг барчасини ҳаракат қилмай турибди деб ҳисоблаймиз, молекулаларни σ диаметрли шарчалар сифатида ҳисоблаб, молекулаларнинг ўртача тезлиги $\bar{v}$ дай тезликка эга бўлиб ҳаракатланадилар деб ҳисоблаймиз; юзи $\pi\sigma^2/4$ бўлган доирани молекуланинг эффектив кесими деб, σ ни эса — молекуланинг *эффектив диаметри* дейлик; ажратиб олинган молекула ҳаракати траекториясини, аслида бўлганидек, синиқ чизиқ деб ҳисобламай, тўғри чизиқ деб ҳисоблайлик.

Юқоридаги фаразларда ўртача вақт бирлиги давомида молекула фазодан диаметри σ бўлган ва узунлиги сон жиҳатдан ўртача тезликка тенг цилиндрни «кесиб ўйиб» кетади (9.3-расм). Ажратилган молекула O марказлари 2σ диаметрли цилиндр ичида туриб қолган молекулалар (9.3-расм да 1 ва 2 молекулалар) билан тўқнашади ва марказлари бу цилиндрдан ташқарида ётганлари (3 ва 4 молекулалар) билан тўқнашмайди. Шундай қилиб, вақт бирлигига ўзаро урилишларнинг сони ν марказлари 2σ диаметрли цилиндр ичида ётган молекулалар сонига тенг:



9.3-расм.

$$\nu = n\pi\sigma^2\bar{v},$$

бу ерда n — молекулалар концентрацияси; қолган кўпайтувчиларнинг кўпайтмаси сон жиҳатдан диаметри 2σ бўлган цилиндр ҳажмига тенг.

Агар молекулаларнинг ҳаракатсиз бўлганликлари. Максвелл тақсимотига мос равишда силжиб турганликлари ҳисобга олинса, у ҳолда вақт бирлигидаги ўзаро урилишларнинг сони кўпроқ бўлиб чиқади. Ҳисоблаш

$$\nu = \pi\sqrt{2}\,\sigma^2 n\bar{v} \qquad (9.13)$$

ни беради.

Маълумки, молекулаларнинг иссиқлик тезлиги одатдаги шароитларда секундда бир неча юз метрларга тенг, бироқ бир-бирига урилиш сонининг кўплигидан молекула газ ичида оз вақтда катта масофага силжий олмайди. Молекула, Броун заррачаси сингари, синиқ чизиқ бўйича ҳаракатланади. Икки кетма-кет бўлаётган тўқнашишлар орасида молекулалар *эркин югуриш йўли* деб аталувчи масофани юра туриб, тўғри чизиқ бўйича ва текис ҳаракат қилади. Бу масофалар ҳар хил бўлиши мумкин, шунинг учун эркин югуришнинг *ўртача* узунлиги ҳақида гапирадилар.

Агар вақт бирлигида молекула сон жиҳатдан ўртача тезликка тенг йўлни босади ва шу вақтда бошқа молекулалар билан ν марта тўқнашади деб ҳисобланса, у ҳолда (9.13)-формуладан фойдаланиб, ўртача эркин югуриш узунлиги $\bar{\lambda}$ ни ҳисоблаш қийин эмас:

$$\bar{\lambda} = \bar{v}/\nu = 1/\pi\sqrt{2}\,\sigma^2 n. \qquad (9.14)$$

Бу формуладан молекуланинг эффектив диаметри ва молекулалар концентрацияси қанча кичик бўлса, ўзаро урилишлар орасида молекулалар юрган ўртача масофа шунча катта бўлади, деган хулоса келиб чиқади. Нормал ҳолда турган оддий молекулавий газлар учун эркин югуриш масофасининг ўртача узунлиги тахминан 10^{-5} см қадарча бўлади, бу молекулалар орасидаги ўртача масофадан 100 марта каттадир.

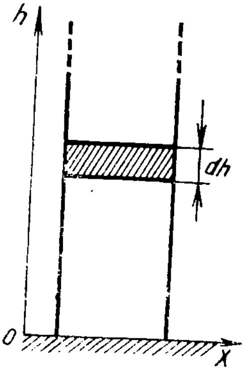
§ 5. БАРОМЕТРИК ФОРМУЛА. БОЛЬЦМАН ТАҚСИМОТИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА.

Максвелл тақсимотига молекулаларнинг фақат тезликлари бўйича тақсимланиши деб қаралмасдан кинетик энергиялари бўйича ҳам тақсимланиши деб қараш мумкин (чунки бу тушунчалар ўзаро боғлиқдир).

Агар молекулалар бирорта ташқи куч майдонида, масалан, Ернинг гравитацион майдонида турадиган бўлсалар, у ҳолда уларнинг потенциал энергиялари бўйича тақсимотини топиш мумкин, яъни потенциал энергияларнинг муайян қийматларига эга бўлган ҳажм бирлигидаги зарралар сонини аниқлаш мумкин. Зарраларнинг гравитацион электр ва бошқа куч майдонларида потенциал энергиялари бўйича тақсимланишига *Больцман тақсимоти* дейилади.

Барометрик формуладан фойдаланиб, Ер тортиш майдонида турган молекулалар учун Больцман тақсимотини топайлик.

Ерга тортилиш майдонида вертикал жойланган ҳаво устунини кўриб чиқамиз (9.4-расм). Дастлаб, *барометрик формула* деб аталувчи, босимнинг Ер юзига нисбатан олинган баландлик билан боғланиши $p=f(h)$ ни аниқлайлик.



9.4-расм.

Амалда сиқилмайдиган суюқликлар учун бу боғланиш мактаб курсидан маълум: босим суюқликқа ботириш чуқурлигига пропорционал. Газлар учун, улар яхши сиқилувчан бўлганлиги туфайли, боғланиш мураккаброқ бўлади, чунки қатламлар зичлиги баландлик h ошган сари камайиб боради.

Бирор h баландликда етарлича юпқа dh қалинлигида бўлган газ (ҳаво) қатламини ажратайлик (9.4-расмга қаранг); бу қатламда босим dp миқдорда ўзгаради. Қатламнинг қалинлиги кичик бўлгани учун суюқлик учун бўлган боғланишни dp ва dh учун ҳам ёзиш мумкин.

$$dp = -\rho g dh, \qquad (9.15)$$

бу ерда ρ — босимга кўра ўзгарувчи газ зичлиги; g — оғирлик кучининг тезланиши; «—» ишора h ўқининг йўналишига боғлиқ (баландликнинг катталашиши $dh>0$ га, босимнинг камайиши $dp<0$ га мос келади).

(9.3)-формуладан зичликни ифодалаб: $\rho=pM/RT$ ва уни (9.15) га қўйсак,

$$dp = -\frac{pM}{RT} g dh \qquad (9.16)$$

ни оламиз.

(9.16)-да ўзгарувчиларни бўлиб, интеграллаймиз:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}\int_{0}^{h} dh.$$

Ҳаво босими ва баландликнинг интегралланиш чегаралари бир-бирига мос келишлари керак: Ер сатҳида p_0 (h=0) ва h баландликда p. Бундан:

$$\ln(p/p_0) = -Mgh/RT.$$

Потенциялашдан кейин изланувчи боғланишни топамиз:

$$p = p_0 e^{-Mgh/RT} \qquad (9.17)$$

Шунинг ўзи барометрик формула бўлиб, у Ер тортиш майдони бир жинслидир (g=const) деб фараз қилиш натижасида олинади; унча катта бўлмаган баландликлар учун бундай фараз қилишлар катта хатоликлар туғдирмайди ва шунинг учун бемалол қабул этилиши мумкин.

(9.17)-га газ босими билан унинг концентрацияси орасидаги муносабат (9.7)-ни қўйсак,

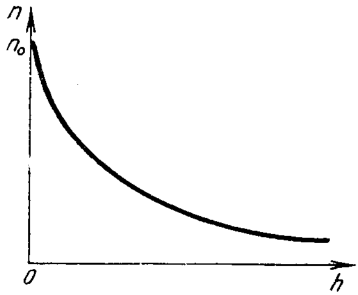
$$n = n_0 e^{-Mgh/RT}. \qquad (9.18)$$

ни оламиз, бу ерда n_0 молекулаларнинг $h=0$ баландликдаги концентрацияси. $M/R=m_0N_A/R=m_0/k$ бўлгани учун (9.18)-ўрнига

$$n = n_0 e^{-m_0gh/kT} \qquad \textbf{(9.19)}$$

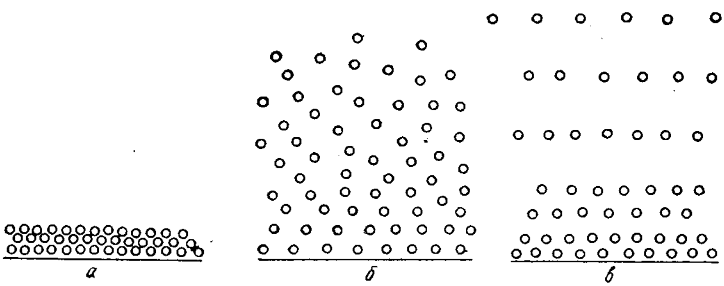
ни ёзамиз.

(9.19)-формула молекулалар концентрациясининг Ер юзидан h баландлик ёки потенциал энергия m_0gh билан боғланишини кўрсатади. Бу идеал газ заррачаларининг гравитацион майдонда тақсимланиши — Больцман тақсимотининг хусусий ҳолидир. Ифода (9.19) экспонента шаклида графикавий тасвирланади (9.5-расм).



9.5-расм.

Ер тортиш майдонида молекулаларнинг бундай тақсимланишини молекулавий кинетик тасаввурлар рамкаси ичида сифат жиҳатидан молекулаларга бир-бирига қарама-қарши бўлган икки фактор таъсир этиши билан тушунтириш мумкин: гравитацион майдон, унинг таъсири натижасида барча молекулалар Ерга тортилади ва бутун бор ҳажм ичра молекулаларни текис тарқатиб сочишга интилувчи молекулавий-тартибсиз (хаотик) ҳаракат. 9.6-расмда молекулаларнинг турли шароитларда тақсимланишлари схематик равишда кўрсатилган: $T=0$ бўлганда гравитацион майдонда (*а*), $T\neq 0$ бўлганда тортилиш майдони йўқлигида (*б*) ва ҳар икки фактор баравар таъсир қилиб турганда (*в*), кейингиси Больцман тақсимотига мосдир.



9.6-расм.

Пировардида Максвелл ва Больцман тақсимотларидаги экспоненциал ҳадларнинг бирмунча ўхшашликларини таъкидлаб ўтиш фойдалидир:

$$e^{-m_0v^2/2kT} = e^{-E_к/kT}; \quad e^{-m_0gh/kT} = e^{-E_p/kT}.$$

Биринчи тақсимотнинг даража кўрсаткичида молекула кинетик энергиясининг kT га нисбати, иккинчисида эса потенциал энергиянинг kT га нисбати олинган.

Х БОБ

ТЕРМОДИНАМИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Термодинамика деганда системани ташкил этувчи жисмларнинг микроскопик тузилишини ҳисобга олмасдан улар орасидаги энергия алмашинуви мумкин бўлган системаларни текширувчи физика бўлими тушунилади. Биринчи ва иккинчи асослар (принциплар, қонунлар) термодинамиканинг негизидир.

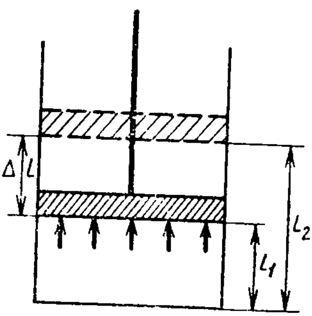
Термодинамиканинг асосий қонунларини таърифлашдан аввал иш ва иссиқлик тушунчалари устида тўхташ зарур.

§ 1. ИШ ВА ИССИҚЛИК. ГАЗНИНГ ИШИ.

Айтиб ўтилганидек, энергия бир жисмдан иккинчи жисмга икки хил процессда: иш бажарилганда ва иссиқлик алмашган вақтда узатилиши мумкин.

Иш процессида узатилган энергиянинг ўлчами, иш бўлганидек, иссиқлик алмашиш процессида узатилган энергиянинг ўлчами, *иссиқлик миқдори* (ёки иссиқлик) бўлади.

Келгусида термодинамиканинг кўп назарий масалалари идеал газ учун кўриб чиқиладиган бўлгани учун ўзгартиш вақтида идеал газ ҳажми ўзгарганда бажариладиган ишни ҳисоблаш ифодасини топамиз.



10.1-расм.

Фараз қилайлик, цилиндрик идишнинг поршени тагида турган газ (унинг массасини эътиборга олмаймиз) V_1 дан V_2 гача (10.1-расм) изобар ҳолда кенгаяди, шу вақтда поршень $\Delta l = l_2 - l_1$ масофага силжийди, ҳажм эса $\Delta V = V_2 - V_1$ қадар ўзгаради. Кесимининг юзи S бўлган поршенга газ томонидан босим p бўлганлиги туфайли куч F таъсир қилади, мазкур куч

$$F = pS \quad \text{га тенг.}$$

Бу кучнинг йўналиши поршень силжишининг йўналишига тўғри келганлиги учун газнинг бажарган иши

$$A = F\Delta l = pS\Delta l = p\Delta V \quad \text{га тенг.} \tag{10.1}$$

Газ кенгайган вақтда $\Delta V > 0$ ва иш мусбат ($A > 0$), сиқилган вақтда эса $\Delta V < 0$ ва $A < 0$ бўлади. Гап ташқи кучларнинг бажарган иши устида эмас, балки газнинг бажараётган иши устида бораётганини кўрсатамиз. Барча ташқи кучларнинг бажарадиган иши, аксинча, газ кенгайганда манфий, сиқилганда — мусбат бўлади.

Агар ҳажм ўзгариши билан газ босими ўзгарса, у ҳолда ҳажмнинг етарлича кичик ўзгариши dV га мос бўлган элементар ишни ҳисоблаш лозим:

$$dA = pdV. \qquad (10.2)$$

(10.2)-ни интеграллаб, газнинг бажарган ишини топамиз:

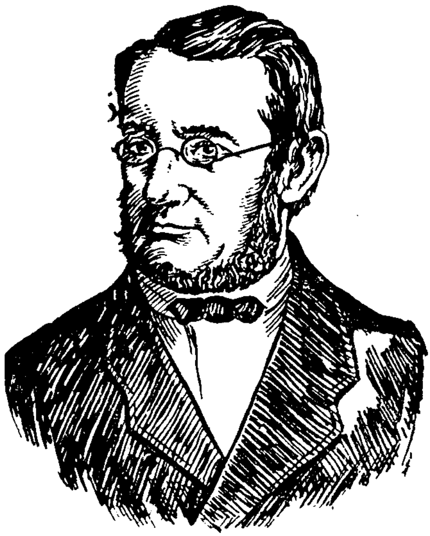
$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \qquad (10.3)$$

Мисол сифатида изометрик процесс вақтида идеал газ бажарган ишни топайлик, бунинг учун (10.3) ва (9.2)-дан фойдаланамиз:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} =$$

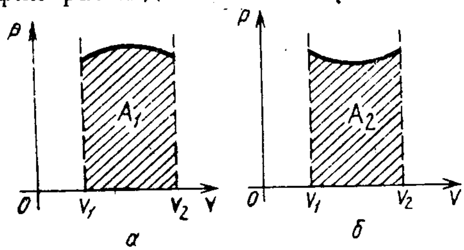
$$= \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (10.4)$$

Изохор процессда иш нолга тенг, бу (10.3)-дан маълум.



Майер Юлиус Робент (1814—1878) — немис врачи ва физиги. Кемада врач бўлиб ишлаб, тропик мамлакатларда бўлган вақтларида ўз пациентларининг вена қони рангининг ўзгаришини кузатар экан, ейилган овқат билан тирик организмда иссиқлик ҳосил бўлиши ўртасида боғланиш борлиги ҳақида хулосага келди.

(10.3)-тенгламадан кўринишича, газнинг бажарган иши график равишда «босим — ҳажм» координаталари бўйича тузилган эгри чизиқли трапециянинг юзи сифатида (10.2-расм) аниқланади. Бошланғич ва охирги ҳолатлари бир хил бўлган икки хил процессларнинг графиклари тасвирланган расмдан бажарилган ишнинг процессга боғлиқ бўлганлиги кўринади. Жумладан, 10.2-расм, *а* даги процессда бажарилган иш A_1 10.2-расм, *б* даги процесс учун бажарилган иш A_2 га қараганда кўп бўлади.



10.2-расм.

§ 2. ТЕРМОДИНАМИКАНИНГ БИРИНЧИ АСОСИ. ИЧКИ ЭНЕРГИЯ

Термодинамиканинг биринчи асоси аслда иссиқлик процессларини текширишга мослаштирилиб таърифланган энергиянинг сақланиш қонунидир: системага берилган иссиқликнинг миқдори Q

системанинг ички энергиясини ўзгартишга ΔU ва система бажарадиган иш A га кетади. Буни математикавий формада ёзамиз:

$$Q = \Delta U + A. \tag{10.5}$$

Системанинг *ички энергияси* деганда системани ташкил қилган заррачалар (молекула ёки атомлар) нинг кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндиси тушунилади. Идеал газ масофада ўзаро таъсирланмайдиган заррачалардан иборат бўлгани учун уларнинг потенциал энергияси нолга тенг. Шунинг учун идеал газнинг ички энергиясини ундаги барча молекулаларнинг (ёки атомларнинг) кинетик энергиясига тенг деб ҳисоблаш мумкин.

Ички энергия система (газ) ҳолатининг функцияси бўлиб, берилган ҳолат учун маълум қийматга эга бўлади. ΔU — системанинг охирги ва дастлабки ҳолатларига мос икки ички энергия қийматларининг айирмасидир.

$$\Delta U = U_2 — U_1.$$

Иссиқлик миқдори ва иш ҳолат функцияси эмас, процесс функциясидир (§ 1 нинг охиридаги изоҳларни қаранг), уларни охирги ва бошланғич ҳолатлардаги бирор параметрнинг иккита қиймати айирмаси шаклида ифодалаб бўлмайди. Шу сабабдан (10.5)-даги Q ва A орттирма ишораси Δ сиз ёзилган.

Q, A нинг етарлича кичик қийматлари ва U нинг кичик орттирмалари учун тегишлича dQ, dA ва dU белгиларини ишлатадилар, бироқ юқорида айтилган изоҳлар эсдан чиқарилмаслиги шарт. Бу ҳолда термодинамиканинг биринчи асосини

$$dQ = dU + dA \tag{10.5a}$$

шаклда ёзамиз.

Q, A, ΔU ва dQ, dA, dU нинг қийматлари ҳам мусбат (иссиқлик системага ташқи жисмлардан берилади, ички энергия кўпаяди, газ кенгаяди), ҳам манфий (иссиқлик системадан олинади, ички энергия камаяди, газ сиқилади) бўлишлари мумкин.

§ 3. ГАЗНИНГ ИССИҚЛИК СИҒИМИ. ТЕРМОДИНАМИКА БИРИНЧИ АСОСИНИНГ ИДЕАЛ ГАЗ ИЧИДАГИ ПРОЦЕССЛАРГА ТАТБИҚ ЭТИЛИШИ. ПОЛИТРОП ПРОЦЕСС ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Жисмни температура бирлигигача иситиш учун керак бўлган иссиқлик миқдорига *жисмнинг иссиқлик сиғими* дейилади. Модда массаси бирлигини температура бирлигига иситиш учун керак бўлган иссиқликка модданинг *солиштирма иссиқлик сиғими* дейилади. У:

$$c = dQ/mdT \tag{10.6}$$

формула бўйича аниқланади, бу ерда dQ — массаси m бўлган жисмга берилган иссиқлик миқдори, dT — жисм температурасининг ўзгариши.

(10.6)-формула дифференциал формада берилган, чунки реал жисмлар ва газларнинг солиштирма иссиқлик сиғими температурага боғлиқ бўлади.

Иссиқлик миқдори процессга боғлиқ бўлгани учун иссиқлик сиғими ҳам процессга жиддий боғлиқдир. Масалан, адиабатик процессда ($dQ=0$) иссиқлик сиғими нолга тенг, изотермикда эса — чексиз катта. Битта жисмнинг ўзи учун изобар ва изохор процесслардаги солиштирма иссиқлик сиғимлари C_p ва C_V ларни ва шунингдек моляр иссиқлик сиғимларини бир-биридан фарқлашга одатланилган. Моляр иссиқлик сиғимлари учун:

$$C_p = c_p M, \ C_V = c_V M \tag{10.7}$$

муносабатлар мавжуд, бу ерда M — моляр масса.

Идеал газдаги изопроцессларга термодинамиканинг биринчи қонунини татбиқ этамиз.

1. *Изохорик процесс. Газ ички энергиясининг температура билан боғланиши.* Изохорик процесснинг иссиқлик сиғими. Изохорик процесс вақтида иш нолга тенг бўлгани учун термодинамиканинг биринчи асоси

$$Q=\Delta U \text{ ёки } dQ=dU \tag{10.8}$$

шаклда ёзилади. Газга берилган иссиқлик миқдори унинг ички энергиясини оширишга кетади.

Бу процесс учун (10.6)-дан $dQ=c_V mdT$ га эга бўламиз; (10.8)-ни қўйиб изохорик процессда ички энергиянинг элементар ўзгаришини оламиз:

$$dU=c_V mdT. \tag{10.9}$$

(10.9)-ни интеграллагандан сўнг системанинг T_0 температурали ҳолатидан T температурали ҳолатига ўтиш вақтидаги ички энергиянинг ўзгаришини топамиз:

$$U-U_0=c_V m \ (T-T_0).$$

Абсолют нолда идеал газнинг ички энергияси нолга тенг ($T_0=0$ да $U_0=0$) эканлигини эътиборда тутиб,

$$U=c_V mT \tag{10.10}$$

ни оламиз ёки бир моль учун

$$U=C_V T. \tag{10.10a}$$

Бундан газ ички энергиясининг температурага боғлиқ бўлганлиги кўринади.

Ички энергия ва температура орасидаги муносабат процессга боғлиқ бўлмагани учун изохорик процесс мисолидан олинган (10.9)-формула идеал газдаги исталган процесс учун тўғри келаверади.

Агар газ ҳар бири i эркинлик даражасига эга бўлган молекулалардан иборат бўлса, (9.6)-га асосан бир молнинг, ички энергияси

$$U=(i/2)kTN_A=(i/2)RT \qquad (10.11)$$

га тенг. (10.10 а) ва (10.11)-ни таққослаб, изохорик процессдаги моляр иссиқлик сиғими учун

$$C_V=(i/2)R \qquad (10.12)$$

формулани ёки солиштирма иссиқлик сиғими учун

$$c_V=(i/2M)R \qquad (10.12a)$$

формулани оламиз.

2. *Изобарик процесс. Майер тенгламаси. Изобарик процесснинг иссиқлик сиғими.* Изобарик процессдаги иссиқликнинг миқдори (10.6)-га асосан

$$dQ=c_p\,mdT \qquad (10.13)$$

га тенг. Термодинамика биринчи қонунининг формуласи (10.5 а)-га (10.2), (10.9) ва (10.13)-ни қўйиб,

$c_p\,mdT=c_V\,mdT+pdV$ ни оламиз.

$pdV=(m/M)RdT$ бўлгани учун,

$$c_p\,mdT=c_V\,mdT+(m/M)RdT,$$

бундан mdT га қисқартгандан кейин,

$$c_p=c_V+R/M$$

ёки моляр иссиқлик сиғимлари учун

$$C_p-C_V=R. \qquad (10.14)$$

Бу — изобарик ва изохорик иссиқлик сиғимларини боғловчи *Майер тенгламасидир.*

Агар изохорик процессда иссиқлик миқдори фақат ички энергиянинг ўзгаришига кетадиган бўлса, изобарик процессда яна иш ҳам бажарилади, шунинг учун моляр иссиқлик сиғимларининг айирмаси (10.14)-и з о б а р и к п р о ц е с с д а т е м п е р а т у р а б и р л и г и ч а и с и т и ш в а қ т и д а б и р м о л ь г а з н и н г б а ж а р а д и г а н и ш и г а м о с к е л а д и.

(10.12)-ни (10.14)-га қўйсак, изобарик процесс вақтида моляр иссиқлик сиғими учун

$$C_p=[(i+2)/2]R \qquad (10.15)$$

формулани ёки солиштирма иссиқлик сиғими учун

$$c_p=[(i+2)/2M]R \qquad (10.15a)$$

формулани оламиз.

3. *Изотермик процесс.* Бу процессда ғазнинг температураси ўзгармагани учун ички энергия ҳам ўзгармайди. Идеал газдаги бу процесс учун термодинамиканинг биринчи асоси қуйидаги шаклда ёзилади.

$$Q = A \quad \text{ёки} \quad dQ = dA. \tag{10.16}$$

Газга берилган иссиқликнинг барча миқдори иш бажаришга кетади.

(10.4) ва (10.16)-ларга асосан ёзиш мумкин:

$$Q = (m/M)\, RTln(V_2/V_1). \tag{10.17}$$

4. *Адиабатик процесс. Пуассон тенгламаси.* Системада атрофдаги жисмлар билан иссиқлик алмашувсиз ҳосил бўлувчи (dQ=0) процессга *адиабатик* процесс дейилади. Аслда бундай процессни юзага келтириш мумкин эмас, бироқ агар процесс тез ёки яхши термоизоляцияланган шароитда борадиган бўлса, унда у адиабатикка яқин бўлади. Бу ҳолда термодинамиканинг биринчи асоси қуйидагича ёзилади:

$$A = -\Delta U \quad \text{ёки} \quad dA = -dU, \tag{10.18}$$

Газнинг адиабатик процесс вақтида бажарадиган иши ички энергиянинг ўзгариши ҳисобига бўлади. (10.18)-дан кўринишича, агар газ кенгая туриб ташқи кучларга қарши иш бажарса, унда унинг ички энергияси камаяди ва температураси пасаяди. Масалан, ичида атмосфера босимидан каттароқ босимли нам ҳаво турган идиш тезликда атмосфера билан бирлаштирилса, унда идишдаги ҳавонинг температураси пасайиб кетади, буни идиш ичида ҳосил бўлган тумандан билиш мумкин. Адиабатик сиқишда газ температураси кўтарилади, бундан дизел двигателларда ёнувчи аралашмани алангалаш учун фойдаланилади.

Адиабатик процессда газнинг икки параметрини, масалан, босим ва ҳажмини боғловчи тенгламага *Пуассон тенгламаси* дейилади ва у ушбу шаклга эга:

$$pV^{\nu} = \text{const}, \tag{10.19}$$

бу ерда

$$\nu = c_p / c_V \tag{10.20}$$

адиабата кўрсатгичи. Эътибор қилинг, ν доимо 1 дан катта бўлади, чунки Майер тенгламасига мувофиқ $c_p > c_V$. (10.12а) ва (10.15а)-дан

$$\nu = (i+2)/i \tag{10.21}$$

ни оламиз.

(10.19) ва (9.2)-лардан фойдаланиб, V, T ва p, T ўзгарувчилар учун Пуассон тенгламаларини мустақил чиқариб кўришни ўқувчиларга ҳавола қиламиз:

$$V^{\nu-1}T = const \quad \text{ва} \quad p^{1-\nu}T^{\nu} = const.$$

5. *Политроп процесс ҳақида тушунча.* Юқорида текширилган изопроцессларни политроп деб аталувчи қандайдир умумийроқ процесснинг хусусий ҳоллари деб тасаввур қилиш мумкин.

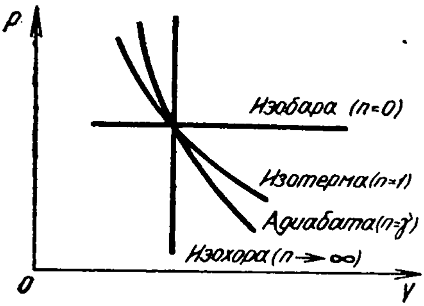
Политроп процесс деганда модданинг (газнинг) иссиқлик сиғими ўзгармайдиган процесс тушунилади. Политроп процессда газнинг босими ва ҳажми тенглама

$$pV^n = \text{const} \qquad (10.22)$$

билан боғланган. Бу ерда n — политропа кўрсаткичи бўлиб, у солиштирма иссиқлик сиғими c билан қуйидагича боғланади:

$$n = (c_p - c)/(c_V - c). \qquad (10.23)$$

(10.22)-тенгламанинг барча изопроцессларни ўз ичига олганини кўрсатиш мумкин. Политроп процессда солиштирма иссиқлик сиғими нолга тенг ($c=0$) деб фараз қилайлик; бу адиабатик процессга мосдир. (10.23)-дан $n = c_p/c_V = \nu$ ни топамиз. Кутилганича, политропа кўрсаткичи адиабата кўрсаткичига тенг бўлиб политропа тенгламаси (10.22) адиабата тенгламаси (10.19)га айланади.



10.3-расм.

Газнинг иссиқлик сиғимини чексизликка тенг ($c \to \infty$) деб қабул қиламиз; бу изотермик процессга мос келади. (10.23)-дан $n = \lim\limits_{c\to\infty} \frac{c_p - c}{c_V - c} = 1$ келиб чиқади, бу эса политропа тенгламасини изотерма тенгламаси $pV = const$ га айлантиради.

Изобарик процесс учун $c = c_p$ ва (10.23)-дан $n=0$ га эгамиз. Бу ҳол учун (10.22)-га мувофиқ $p = \text{const}$ ни оламиз.

Шунга ўхшаш изохорик процесс учун $c = c_V$ ва (10.23)-дан $1/n = 0$ га эгамиз. (10.22)-ни қуйидаги шаклда ёзамиз: $p^{1/n} V = \text{const}$, бундан $V = \text{const}$.

Политроп процесснинг хусусий ҳоллари сифатида ҳар хил изопроцессларнинг графиклари 10.3-расмда тасвирланган.

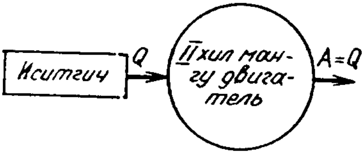
§ 4. ТЕРМОДИНАМИКАНИНГ ИККИНЧИ АСОСИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА. ЭНТРОПИЯ

Энергиянинг сақланиш қонуни ҳисобланган термодинамиканинг биринчи асоси процесслар бориши мумкин бўлган йўналишларни кўрсатмайди. Масалан, термодинамиканинг биринчи асоси бўйича иссиқлик алмашиш вақтида иссиқликнинг ўз-ўзидан иссиқроқ жисм томонидан совуқроқ жисм томонга ўтиши мумкин бўлганидай, аксинча, совуқроқ жисмдан иссиқроқ жисм томонга ҳам ўтиши мумкин. Бироқ кундаги тажриба табиатда ўринга эга эмас, масалан, уй ичидаги ҳавонинг совуши ҳисобига чойнакдаги сув ўз-ўзидан исиб кета олмайди. Иккинчи мисол: тош Ерга тушаётганда потенциал энергиясининг ўзгаришига эквивалент миқдорда у исийди, аксинча бўлган процесс — тошнинг ўз-ўзидан ўзининг совуши ҳисобига юқорига кўтарилиши мумкин эмас.

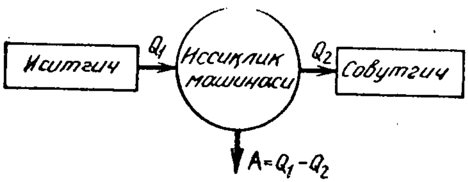
Термодинамиканинг иккинчи асоси ҳам, биринчисидек, тажрибавий маълумотларнинг умумийлаштирилганидир.

Термодинамика иккинчи асосининг бир неча таърифлари мавжуд: *иссиқлик ўз-ўзидан совуқроқ жисм томондан иссиқроқ жисм томонга ўта олмайди* (Клаузиус таърифи) ёки *иккинчи турдаги абадий двигателнинг бўлиши мумкин эмас* (Томсон таърифи), яъни бир жисмнинг совуши ҳисобига иссиқликнинг ишга айланиши мумкин бўлган даврий процесснинг бўлиши мумкин эмас.

Иссиқлик машинасида иш берилган иссиқлик ҳисобига бажарилади, бироқ бу вақтда иссиқликнинг қисми албатта бошқа, учинчи жисмга — совуткичга ўтказилади. 10.4 ва 10.5-расмларда,



10.4-расм.



10.5-расм.

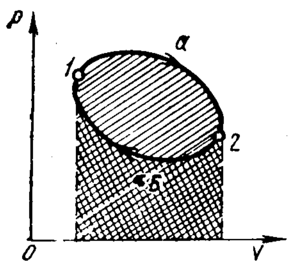
иккинчи асосга мувофиқ, бўлиши мумкин бўлмаган ва мумкин бўлган даврий процесслар схематик равишда кўрсатилган.

Термодинамиканинг иккинчи асосини миқдорий ифодалашга имкон берувчи баъзи термодинамикавий тушунчаларни кўриб чиқамиз.

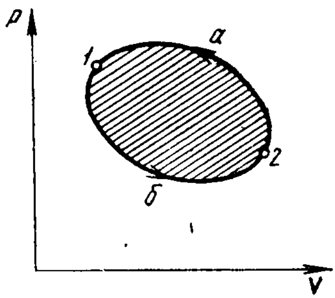
Агар барча оралиқ ҳолатлар орқали ўтила туриб унга акс бўлган 2-1 процесс бажариладиган ва системанинг дастлабки ҳолатга қайтиб келиши натижасида атрофдаги жисмларда ҳеч қандай ўзгариш рўй бермайдиган бўлса, 1-2 процессга *қайтувчан (обратимый) процесс* дейилади. Қайтувчан процесс физикавий абстракциядир. Ҳеч бўлмаганда атрофдаги жисмларнинг исишига сабаб бўлган ишқаланиш кучларининг мавжудлиги сабабли барча реал процесслар қайтмас (необратимые) процесслардир. Қайтмас процессларнинг характерли мисоллари: газнинг бўшлиққа кенгайиши, диффузия, иссиқлик алмашиш ва ҳ. к. Системани бошланғич ҳолатга қайтариш учун бу ҳолларнинг ҳаммасида ташқи кучлар иш бажаришлари лозим.

Цикл ёки *айланма процесс* деб, система дастлабки ҳолатга қайтиб кела оладиган процессга айтилади. Цикл графиги ёпиқ чизиқдан иборат бўлади. 10.6-расмда тасвирланган цикл *тўғри* цикл бўлиб, у иссиқлик машинасига, яъни бирор жисмдан — иситгичдан Q_1 миқдорда иссиқлик олиб иш бажарадиган ва иссиқликнинг Q_2 қисмини бошқа жисмга — совутгичга берадиган қурилмага (10.5-расмга қаранг) мос келади. Бу циклда ишчи модда (газ) нинг мусбат иш бажарганлиги 10.6-расмдан маълум; 1-*а*-2 процессда газ кенгаяди, иш мусбат ва сон жиҳатдан эгри 1-*а*-2 чизиқ тагидаги юзага тенг; 2-*б*-1 процессда иш манфий (газ сиқилади) ва сон жиҳатдан тегишли эгри чизиқ остидаги юзага тенг. Газнинг бир циклда бажарган иши ишнинг мусбатлиги ва сон жиҳатдан ёпиқ 1-*а*-2-*б*-1 эгри чизиқ билан чегараланган юзага тенглиги алгебраик йиғиндидан келиб чиқади.

Тескари цикл* (обратный цикл) совутгич машина ишига (10.7-расм), яъни иссиқликни совутгичдан оладиган ва кўпроқ миқдорда қилиб, иситгичга ўтказадиган системага мос келади. Бундай процесс термодинамиканинг иккинчи қонунига мувофиқ ўз-ўзидан юзага кела олмайди, у ташқи кучлар иши ҳисобига



10.6-расм.



10.7-расм.

юзага келади. Бу вақтда газ манфий иш бажаради: 2-*а*-1 процессдаги сиқилиш иши манфий, 1-*б*-2 процессдаги кенгайиш иши мусбат. Алгебраик йиғиш натижасида газнинг манфий иш бажарганини оламиз, у сон жиҳатдан эгри 2-*а*-1-*б*-2 чизиқ билан чегараланган юзага тенг.

Иссиқлик машинасининг ёки тўғри циклнинг фойдали иш коэффициенти деб, *бажарилган ишнинг ишчи модданинг иситгичдан олган иссиқлик миқдорига бўлган нисбатига айтилади.*

$$\eta = A/Q \qquad (10.24)$$

Иссиқлик машинасининг иши иссиқлик ҳисобига бажарилиб, ишчи модданинг ички энергияси бир цикл давомида ўзгаргани учун ($\Delta U=0$), термодинамиканинг биринчи қонунига мувофиқ,

* Тескари (обратный) циклни қайтувчан (обратимый) цикл билан аралаштирмаслик керак. Қайтувчан цикл қайтувчи процесслардан иборат, у ҳам тўғри (иссиқлик машинаси), ҳам тескари (совутгич) бўлиши мумкин.

айланма процессларда бажариладиган иш иссиқлик миқдорларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

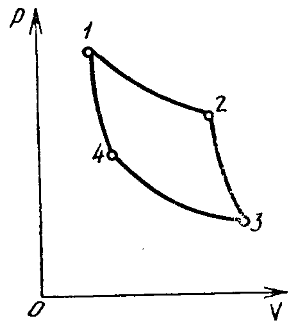
$$A=Q_1+Q_2$$

Ишчи модда қабул қилган иссиқлик миқдори Q_1 мусбат, ишчи модданинг совутгичга берган иссиқлиги Q_2 манфий. Кейинги ифодани ҳисобга олсак, ф. и. к.

$$\eta=(Q_1+Q_2)/Q_1 \qquad (10.25)$$

га тенг бўлади.

Икки изотерма (1-2, 3-4) ва икки адиабата (2-3, 4-1) дан иборат (10.8-расм) *Карно циклини* кўриб чиқайлик. Бу циклда ишчи модда идеал газ бўлиб, иссиқлик узатилиши ўзармас температурада бўлади.



10.8-расм.

Қайтувчан Карно циклининг ф. и. к. фақат иситгичнинг температураси T_1 ва совутгичнинг температураси T_2 ларга боғлиқ бўлиб,

$$\eta=(T_1-T_2)/T_1 \qquad (10.26)$$

га тенг.

Термодинамиканинг иккинчи қонунига асосланиб, Карно теоремасини исботлаш мумкин: *бир хил иситгич ва совутгич билан Карно цикли бўйича ишловчи барча қайтувчан машиналарнинг ф. и. к. бир-бирига тенг бўлиб,* ишчи модда хилига, циклни бажарувчи машина конструкциясига боғлиқ эмасдир; *қайтмовчи машинанинг ф. и. к. қайтувчи машинанинг ф. и. к. дан кичикдир.*

(10.25) ва (10.26)-ларга асосан Карно циклини қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{Q_1+Q_2}{Q_1}\leqslant\frac{T_1-T_2}{T_1} \qquad (10.27)$$

бу ерда «=» ишора қайтувчан циклга оид бўлиб, «<» ишора қайтмас циклга тегишлидир.

Бу ифода иккинчи асоснинг миқдорий таърифидир. Параграф бошида келтирилган ҳар икки сифатий таърифларнинг ҳам шу асоснинг натижаси эканлигини кўрсатамиз.

Иссиқлик бир жисмдан иккинчи жисмга иш бажармасдан ўтади деб фараз қилайлик, яъни $Q_1+Q_2=0$. У ҳолда (10.27)-дан келиб чиққанидек, $T_1-T_2>0$ ва $T_1>T_2$ бўлади, бу эса ўз-ўзича бўлаётган процессда иссиқлик юқорироқ температурали жисмлар томонидан пастроқ температурали жисмлар томонга ўтади деган Клаузиус таърифига мос келади.

Машина тўла миқдорда иссиқликни ишга айлантирадиган ҳолларда $Q=\theta$ бўлади ва (10.27)-дан

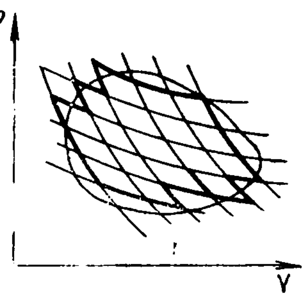
$$(1-T_2/T_1)\geqslant 1$$

га эга бўламиз, бу эса бўлиши мумкин эмас, чунки T_1 ҳам, T_2 ҳам мусбат қийматларга эга. Бундан Томсоннинг иккинчи хил абадий двигатель бўлиши мумкин эмас, деган таърифи келиб чиқади.

(10.27)-ифодани алмаштирайлик:

$$1+\frac{Q_2}{Q_1}\leqslant 1-\frac{T_2}{T_1};\quad \frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\leqslant 0. \qquad \mathbf{(10.28)}$$

Ишчи модда олган ёки берган иссиқлик миқдорининг иссиқлик алмашиши бўлаётган вақтдаги температурага нисбати *келтирилган иссиқлик миқдори* Q/T деб аталади. Шунинг учун (10.28)-ни қуйидагича таърифлаш мумкин. Цикл давомида келтирилган иссиқлик миқдорларининг алгебраик йиғиндиси нолдан катта эмас (қайтувчан циклларда нолга тенг, қайтмовчиларда нолдан кичик).



10.9-расм.

Агар система ҳолати Карно цикли бўйича ўзгармасдан, бошқа бир ихтиёрий цикл бўйича ўзгарса, у ҳолда уни етарлича кичик Карно циклларининг тўплами шаклда тасаввур этиш мумкин (10.9-расм). У ҳолда (10.28)-ифода етарлича кичик келтирилган иссиқлик миқдорларнинг йиғиндисига айланиб, лимитда интеграл

$$\oint\frac{dQ}{T}\leqslant 0 \qquad \mathbf{(10.29)}$$

билан ифодаланадиган бўлади. (10.29)-ифода исталган қайтмовчи (ишора «$<$») ёки қайтувчан (ишора «$=$») цикл учун ўринли бўлаверади; dQ/T — элементар келтирилган иссиқлик. Интеграл белгиси устидаги доира белгиси интеграллашнинг ёпиқ контур ёки цикл бўйича бўлаётганини кўрсатади.

Иккита *а* ва *б* процесслардан иборат қайтувчан циклни (10.6-расмни қаранг) кўриб чиқамиз. Унга тўғри келувчи тенглик

$$\oint\frac{dQ}{T}=\underset{(a)}{\int_1^2\frac{dQ}{T}}+\underset{(б)}{\int_2^1\frac{dQ}{T}}.$$

(10.29)га асосан қайтувчан цикллар учун

$$\underset{(a)}{\int_1^2 \frac{dQ}{T}} + \underset{(б)}{\int_2^1 \frac{dQ}{T}} = 0$$

га эгамиз. *б* йўли бўйича интеграллаш чегараларини ўзгартиб,

$$\underset{(a)}{\int_1^2 \frac{dQ}{T}} - \underset{(б)}{\int_1^2 \frac{dQ}{T}} = 0 \quad \text{ёки} \quad \underset{(a)}{\int_1^2 \frac{dQ}{T}} = \underset{(б)}{\int_1^2 \frac{dQ}{T}} \qquad \textbf{(10.30)}$$

ни оламиз. Кейинги ифода системанинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга қайтувчан ўтиш вақтидаги келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндиси процессга боғлиқ бўлмаганини, берилган газ массаси учун системанинг дастлабки ва охирги ҳолатлари билан аниқланганини кўрсатади. 10.10-расмда ҳар хил қайтувчан процесслар графиклари кўрсатилган, улар учун дастлабки (*1*) ва охирги (2) ҳолатлар умумийдир. Бу процессларда иссиқлик миқдори ва иш ҳар хил, аммо келтирилган иссиқлик миқдорлари бир хилдадир.

Процесс ёки силжиш билан боғлиқ бўлмайдиган физикавий характеристикани, одатда, процесснинг ёки система вазиятининг охирги ва дастлабки ҳолатларига мос бўлган бирор функциянинг иккита қийматининг айирмаси каби ифодалайдилар. Масалан, оғирлик кучи ишининг траекторияга боғлиқ бўлмаганлиги бу ишни траектория боши ва охиридаги потенциал энергияларнинг айирмаси орқали ифодалашга имкон беради; электр майдони кучлари ишининг заряд траекториясига боғлиқ бўлмаганлиги бу ишни, заряд силжишини чегараловчи, майдон нуқталаридаги потенциаллар айирмаси билан боғлашга имкон беради.

Шу сингари қайтувчан процесс учун келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндисини система ҳолатининг *энтропия* деб аталувчи бирор функцияси қийматларидан иккитасининг айирмаси каби ифодалаш мумкин:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \qquad \textbf{(10.31)}$$

бу ерда S_2 ва S_1 — энтропиянинг охирги (*2*) ва бошланғич (*1*) қийматлари. Шундай қилиб, энтропия система ҳолатининг функциясидир; икки ҳолат учун энтропия қийматларининг айирмаси системанинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга қайтувчан ўтишидаги келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндисига тенг.

Агар процесс қайтмовчи бўлса (10.31)-тенглик бажарилмайди. Айтайлик қайтувчан *2-б-1* ва қайтмовчи *1-а-2* процесслардан иборат цикл (10.11-расм) берилган бўлсин. Циклнинг бир қисми қайтмовчи бўлгани учун бутун цикл ҳам қайтмовчи бўлади, шунинг учун (10.29)-га асосан

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0 \quad \text{ёки} \quad \int_1^2 \frac{dQ_{\text{қайтм.}}}{T} + \int_2^1 \frac{dQ_{\text{қайтув.}}}{T} < 0 \qquad (10.32)$$

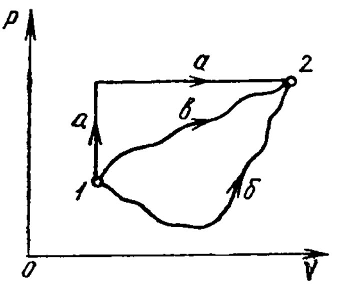
ни ёзиш мумкин.

(10.31)-га мувофиқ $S_1 - S_2 = \int_2^1 \frac{dQ_{\text{қайтув}}}{T}$ ва у ҳолда (10.32)-ўрнига

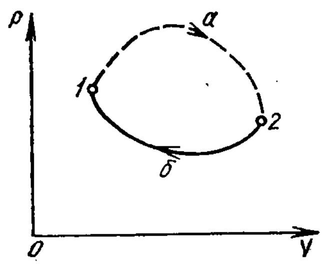
$$\int_1^2 \frac{dQ_{\text{қайтм.}}}{T} + S_1 - S_2 < 0$$ ни оламиз,

ёки

$$\Delta S = S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{dQ_{\text{қайтм.}}}{T} \qquad (10.33)$$



10.10-расм.



10.11-расм.

Шундай қилиб, қайтмовчи процессда келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндиси энтропия ўзгаришидан кичикдир. (10.31) ва (10.33)-ни бирлаштириб, ёзишимиз мумкин:

$$\Delta S \geqslant \int_1^2 \frac{dQ}{T} \qquad (10.34)$$

Бу ерда ишора «=» ни қайтувчан, «>» ишора — қайтмас процессларга тегишлидир. (10.34)-муносабат (10.27)-га асосан олинган, шунинг учун у ҳам термодинамиканинг иккинчи асосини ифодалайди. Буни кейинчалик тасвирлаймиз ва энтропиянинг физикавий маъносини аниқлаймиз.

(10.31)-формула фақат энтропия айирмасини беради, энтропиянинг ўзи бўлса, потенциал энергия сингари, ихтиёрий ўзгармас аниқлигигача топилади:

$$S = \int \frac{dQ}{T} + S_0$$

Агар система бир ҳолатдан иккинчисига ўтган бўлса, у ҳолда процесс характеридан — унинг қайтувчан ёки қайтмас бўлишидан қатъи назар мазкур ҳолатлар орасида рўй бериб турган исталган қайтувчан процесс учун энтропиянинг ўзгариши (10.31)-формула бўйича ҳисобланади. Бунга сабаб энтропия система ҳолатининг функцияси бўлганлигидир.

Икки ҳолат энтропияларининг айирмаси қайтувчан изотермик процессда осонгина ҳисобланади

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}$$

бу ерда Q — ўзгармас температура Tда системанинг 1-ҳолатдан 2-ҳолатга ўтиш вақтида олган иссиқликнинг тўла миқдори. Кейинги формулани эриш, буғланиш ва ш. ў. процессларда энтропия ўзгаришини ҳисоблашларда ишлатадилар. Бундай ҳолларда Q — фазавий ўзгаришларнинг яширин иссиқлиги бўлади.

Агар процесс адиабатик ($dQ=0$) ҳолда бўлаётган бўлса, унда (10.34)-га мувофиқ, қайтувчан процессда энтропия ўзгармайди:

$$S_2 - S_1 = 0, \quad S = \mathrm{const}.$$

Шунинг учун қайтувчан адиабатик процессга изоэнтропияли процесс дейилади.

Қайтмас адиабатик процессда $S_2 - S_1 > 0$ бўлади, энтропия кўпаяди. Буни иссиқлик ўтказмайдиган қобиқ* ичига жойланган T_1 ва T_2 температураларга эга бўлган ($T_1 > T_2$ дан) икки жисм орасидаги иссиқлик алмашиш мисоли билан ифодалаб бериш мумкин. Агар иссиқликнинг бир оз миқдори dQ биринчи жисмдан иккинчига ўтадиган бўлса, унда бу ҳолда биринчи жисмнинг энтропияси $dS_1 = dQ/T_1$ қадарча камаяди, иккинчисиники эса $dS_2 = dQ/T_2$ қадарча ортади. Иссиқлик миқдори катта бўлмагани учун ҳам биринчи ҳамда иккинчи жисмнинг температурасини ўзгармайди деб ҳисоблаш мумкин. Система энтропиясининг тўла ўзгариши мусбат бўлади:

$$dS = -dS_1 + dS_2 = \frac{dQ}{T_2} - \frac{dQ}{T_1} > 0,$$

---

* Атрофдаги жисмлардан иссиқлиги изоляцияланган системаларга термодинамик изоляцияланган ёки оддий қилиб, изоляцияланган системалар дейилади. Бундай системаларнинг муҳимлиги шундаки, амалда қўшимча жисмлар киритилиш ҳисобига атрофдаги системалар билан иссиқлигини қарийб алмаштирмайдиган системани ҳамиша ажратиш мумкин бўлади.

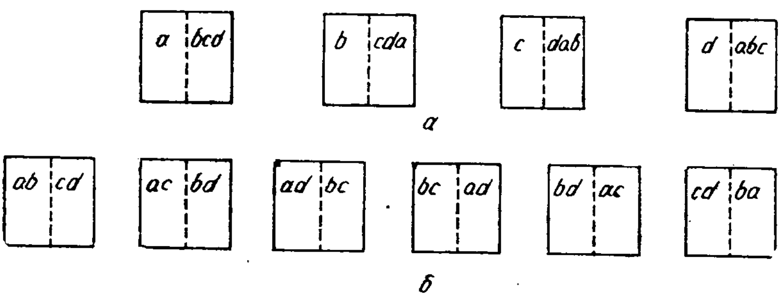
демак, изоляцияланган системанинг энтропияси ортади. Агар бу системада иссиқликнинг совуқроқ жисмдан иссиқроқ жисмга ўз-ўзидан ўтиши содир бўладиган бўлса, у ҳолда система энтропияси камайган бўлар эди:

$$dS = dS_1 + dS_2 = \frac{dQ}{T_1} - \frac{dQ}{T_2} < 0,$$

бу эса (10.34)-формулага қарши келар эди.

Шундай қилиб, (10.34)-формула термодинамика иккинчи асосининг яна бир таърифини ифодалайди: термодинамикавий изоляцияланган системада система энтропиясини камайишга олиб келадиган процессларнинг содир бўлиши мумкин эмас.

Молекулавий — кинетик нуқтаи назар бўйича энтропияни *система зарралари тартибсизлигининг ўлчовидир* деб қулайгина характерлаш мумкин. Масалан, газ ҳажми камайтирилганда унинг молекулалари бир-бирига нисбатан борган сари белгилироқ жойни эгаллашга мажбур бўладилар, бу системанинг кўпроқ тартибланганлигига мос келади, энтропия эса бу вақтда камаяди. Газ суюқликқа конденсацияланганда ёки ўзгармас температурада суюқлиқ кристаллизацияланган вақтда иссиқлик ажралади, энтропия камаяди. Бу ҳолда ҳам заррачалар жойланишидаги тартиб ортади.



10.12-расм.

Системадаги нотартиблилик миқдоран термодинамикавий эҳтимоллик $W_{\text{тер}}$ билан характерланади. Унинг маъносини аниқлаш мақсадида тўртта газ заррачаси *а, в, с, d* дан иборат системани текширайлик (10.12-расм). Мазкур заррачалар хаёлан икки бирдай катакка бўлинган ҳажмда турадилар ва унинг ичида эркин силжиш имкониятига эгадирлар, дейлик.

Системанинг биринчи ва иккинчи катакдаги заррачалар сони билан белгиланувчи ҳолатини — м а к р о ҳ о л а т деб атайлик; ҳар бир катакда конкрет равишда қайси заррачалар турганлиги билан белгиланувчи система ҳолатини м и к р о ҳ о л а т деб атайлик. Унда, 10.12, *а*-расмдан кўринишича макроҳолат биринчи катакдаги битта заррача ва иккинчи катакдаги учта заррача — яъни тўртта микроҳолат билан вужудга келади. Ҳар бир катакда иккитадан бўлиб тўртта заррачанинг жойланишига мос макроҳолат олтита микроҳолатлар билан (10.12-расм, *б*) ҳосил қилинади.

Термодинамикавий эҳтимоллик деб, берилган макроҳолатни реаллаштирувчи заррачалар жойланиш турларининг сонига ёки микроҳолатлар сонига айтилади. Кўриб чиқилган мисолларнинг биринчисида $W_{\text{тер}}=4$, иккинчисида $W_{\text{тер}}=6$. Бу мисоллардан кўринадики, заррачаларнинг катаклар бўйича текис (иккитадан бўлиб) тақсимланишига кўпроқ термодинамикавий эҳтимоллик мос келади. Иккинчи томондан, заррачаларнинг текис тақсимланиши энг катта энтропияли мувозанат ҳолатга жавоб беради. Эҳтимоллик назариясининг умумий мулоҳазаларидан маълумки, ўз-ўзига қўйиб берилган система, энг кўп миқдордаги усуллар билан реалланувчи макроҳолатга ёки энг кўп термодинамикавий эҳтимолликка эга бўлган ҳолатга интиладиган бўлади.

Агар газга имкон берилса, у кенгаяди, унинг молекулалари берилган ҳажмни бутунлай текис эгаллашга интилади ва бу процессда энтропия катталашишини мисол сифатида кўрсатиб ўтамиз. Молекулаларнинг ҳажмни фақат бир қисмини, масалан, уйнинг битта ярминигина эгаллашга интилишлари каби тескари процесс кузатилмайди, бунга термодинамикавий эҳтимоллиги анча кичик бўлган ва кам энтропияли ҳолат тўғри келган бўлар эди.

Бундан энтропиянинг термодинамикавий эҳтимоллик билан боғланиши ҳақида хулоса чиқариш мумкин. Больцман энтропиянинг термодинамикавий эҳтимолликнинг логарифмига пропорционал эканини аниқлади:

$$S=k\ln W_{\text{тер}}, \tag{10.35}$$

бу ерда k — Больцман доимийси.

Термодинамиканинг иккинчи асоси биринчи асосидан ёки Ньютоннинг иккинчи қонунидан фарқланади ва у — *статистик қонундир.* Иккинчи асоснинг баъзи процессларнинг бўлиши мумкин эмас деган даъволари аслда уларнинг мавжудлиги жуда кам эҳтимолликка эга, амалда — эҳтимолсиз, яъни бўлишлари мумкин эмас демакдир.

Космик масштабларда термодинамиканинг иккинчи асосидан анча четланишлар кузатилади, бутун Коинотга бўлса, шунингдек кам сонли молекулалардан иборат системаларга нисбатан бу асосни татбиқ этиб бўлмайди.

Пировардида яна бир бор эслатамизки, агар термодинамиканинг биринчи асоси процесснинг энергетик балансини кўрсатса, иккинчи қонуни — процесснинг бориш йўналишини кўрсатади. Термодинамиканинг иккинчи қонуни биринчи қонунини жиддий тўлатганига ўхшаш, энтропия ҳам энергия тушунчасини тўлатади.

§ 5. ОЛАМНИНГ «ИССИҚЛИК ЎЛИМИ» НАЗАРИЯСИНИ ТАНҚИД

Клаузиус, ундан сўнг баъзи бошқа олимлар ҳам, изоляцияланган системада энтропиянинг ортиши ҳақидаги қоидани бутун оламга татбиқ қилиб дунё энтропияси максимумга интилмоқда деб даъво қилдилар. Энтропия максимумга етган барча энергия турлари молекулавий-кинетик энергияга айланиб, температуралар, концентрациялар ва ш. ў. баробарлашиб, биологик процесслар тўхтайди, оламда иссиқлик ўлими вужудга келади.

Дунёдаги «иссиқлик ўлими» назарияси ҳам физикавий назария ҳамда философик концепция сифатида асоссиздир.

Биринчидан изоляцияланган система учун чиқарилган хулосаларни бутун Оламга ёйиш мумкин эмас, негаки изоляцияланганликнинг ўзи чекланганликни ва системадан ташқари қандайдир жисмларнинг борлигини билдиради. Олам эса чексиздир. Астрофизика маълумотлари бўйича ҳозирги вақтда ҳам сочилган материядан янги юлдузлар туғилмоқда, яъни энергиянинг концентрацияланиши рўй беради. Бу, термодинамиканинг иккинчи қонуни эслатиб ўтилганидек бутун Олам масштабидаги ҳодисаларга татбиқ этилишининг мумкин эмаслигини тасдиқлайди.

«Иссиқлик ўлими» назариясидан яна қуйидаги савол келиб чиқади: агар дунё қачонлардир «иссиқлик ўлимига» келадиган бўлса, нима учун у шу вақтгача унга келмади? Бу ҳолда дунё абадий мавжуд бўлган эмас, қачонлардир ҳосил бўлган ва қачонлардир ўлади, деган хулоса қилиш мумкин. У ҳолда оламни бирорта яратувчиси ҳақида гап юритиш мумкин бўлиб қолади, бу эса бевосита диний, бўлмағур, ўйлашларга олиб келади. Шунинг учун ажаб эмаски, руҳонийлар дунёдаги «иссиқлик ўлими» идеясини ҳозирги даврда ёқлаб қувватламоқдалар.

Клаузиуснинг реакцион фикрлари Энгельс томонидан «Табиат диалектикаси» асарида танқид қилинган эди. У «Клаузиуснинг иккинчи қоидаси олдимизда қай шаклда намоён бўлмасин... унинг фикрича, энергия, миқдор жиҳатидан йўқолмаса, сифат жиҳатдан йўқолади*» деб ёзган эди. «Ҳаракатнинг йўқолмаслигини — дейди Энгельс, — сон маъносидагина эмас, балки сифат маъносида ҳам тушуниш керак»**. Иссиқлик мувозанати бизнинг масштабларимизга кўра жуда катта бўлган Оламнинг чекланган участкаларида ҳосил бўлиши мумкин ва ҳосил бўлиб турмоқда, бироқ «...бизда шундай ишонч борки, материя ўзининг мана шу ҳамма ўзгаришларида абадий материялигича қола беради, унинг атрибутларидан биронтаси ҳам ҳеч вақт йўқолиши мумкин эмас ва шу сабабли материя Ердаги ўз тараққиётининг чўққисини — фикрловчи руҳни қачон бўлмасин бир вақт қандай кучли зарури-

* Энгельс Ф. Диалектика природы. — Маркс К. ва Энгельс Ф. Соч. 2-русча нашри, 20 т. 600-бет.

** Марксча-ленинча философия хрестоматияси. «Ўқитувчи» нашриёти, I том 391-бет.

ят билан қириб ташласа, у ана шу чўққини қаерда бўлмасин бошқа жойда ва бошқа вақтда худди шундай зарурият билан янгидан вужудга келтириши керак*.

§ 6. БИОЛОГИК СИСТЕМАЛАР ЭНТРОПИЯСИ

Биологик системага нисбатан 4 § да таърифланган фикрларни анализ қилишга интилиб кўрамиз:

1) энтропия система тартибсизлигининг ўлчовидир;

2) изоляцияланган системанинг энтропияси катталашади, демак, тартибсизлик ҳам ортади.

Тирик организмлар шундай системалардирки, улар кўпайиш, ўз-ўзидан қайта тикланиш натижасида тартибсиз системадан тартибли системаларни яратадилар. Айрим организм ўз ривожланиши ва яшаш процессида моддалар алмашиш ҳисобига, узлуксиз суратда камроқ тартибланган системадан кўпроқ тартибли системани ҳосил қилади: овқатни, кислородни — асосан кичик молекулали моддаларни истеъмол қилиш натижасида организм ичида юқори молекулали бирикмалар синтезланади, ҳужайралар ҳосил бўлади ва ўсади ва ҳ. к.

Агар ривожланиш процессида организм тартиблилиги камаймайди деб ҳисобланса, унда 1-давога мувофиқ унинг энтропияси ортмайди. Бунда 2-давога зид келган нарса йўқ, чунки организм изоляцияланган система эмас. Агар бирор йўл билан овқатдан, ҳаводан ва ш. ў. лардан маҳрум этиб организмни изоляциялаш мумкин бўлса эди, унда унинг энтропияси ошиб кетиб, тажриба ўлим билан тугар эди. Ҳаёт узилиш процессида системанинг тартибсизлиги кескин ортади ва энтропия ортади.

Шундай қилиб, модда алмашиши организм тартиблилигини сақлашга ёки хатто кўтаришга ва тегишлича унинг энтропиясини сақлашга ёки камайтишга имкон беради.

Термодинамика терминологияси бўйича биологик системалар очиқ системаларга, яъни атрофдаги муҳит билан энергияси ва моддаси билан алмашадиган системаларга киради.

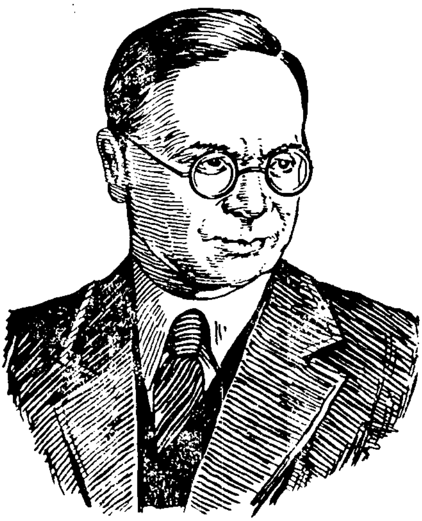
Биологик система энтропиясининг умумий ўзгариши dS ни шартли равишда икки қисмдан иборат қилиб ифодалаш мумкин:

$$dS = dS_i + dS_e \qquad (10.36)$$

бу ерда dS_i — биологик системадаги қайтмовчи процесслар билан боғланган энтропия ўзгариши, dS_e — атрофдаги муҳит билан таъсирланиш баланси ҳисобига юз берган (ташқаридан керак моддаларни қабул қилиш ва тирикчилик фаолияти маҳсулотини чиқариш) энтропия ўзгариши. Нормал, стационар ҳолатда $dS = 0$, $S = \text{const}$ деб ҳисоблаш мумкин, бундан

$$dS_i = -dS_e.$$

* Марксча-ленинча философия хрестоматияси. «Ўқитувчи» нашриёти, I том, 394-бет.



Лазарев Петр Петрович (1878—1942) — совет физиги, биофизиги ва геофизиги. Давлат биофизика институтини ташкил қилган. Лазарев қўзғалишнинг ион назариясини ишлаб чиқди, физиологик адаптация процессини текширди, термодинамика қонунларини биологик процессларга ва бошқаларга татбиқ этиш проблемасини ишлаб чиқди.

Изоляцияланган система учун бўлганидек, ҳамиша $dS_i > 0$, демак, $dS_e < 0$, яъни озиқ моддалардан кўра, организмдан чиқарилувчи маҳсулотларда энтропия каттароқ бўлиши керак.

Баъзи патологик ҳолатларда биологик системалар энтропиясининг ортиши ($dS > 0$) мумкин, бу тартибсизланишнинг ортишига боғлиқ, масалан, рак касалликларида ҳужайраларнинг хаотик равишда тартибсиз ўсиши рўй беради.

Организмнинг нормал ҳаётий фаолияти атрофдаги муҳитнинг энтропиясини оширади. Масалан, космик кема космонавт билан биргаликда, муайян тахминликда, энтропияси ортувчи термо-изоляцияланган система бўлади. Агар биологик система ҳисобланган космонавт энтропияси ўзгармаса, у ҳолда космик кеманинг энтропияси космонавтсиз ортади. Бошқача қилиб айтганда, космонавтнинг тартиблилиги атрофдаги муҳит тартиблилигини камайтириш ҳисобига сақланади. (10.36)-формулани

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_i}{dt} + \frac{dS_e}{dt}$$

шаклга келтириш мумкин ёки стационар ҳол ($S = \text{const}$, $dS/dt = 0$) учун

$$\frac{dS_i}{dt} = -\frac{dS_e}{dt}. \qquad (10.37)$$

(10.37)-дан организмнинг одатдаги ҳолида энтропиянинг ички процесслар ҳисобига ўзгариш тезлиги модда ва энергиянинг атрофдаги муҳит билан алмашиши ҳисобига бўлаётган манфий энтропия ўзгариш тезлигига тенглиги кўриниб турибди.

§ 7. ТЕРМОМЕТРИЯ ВА КАЛОРИМЕТРИЯ

Температураларни аниқ ўлчаш илмий-тадқиқот ва техникавий ишларнинг, шунингдек, медицина диагностикаси ва биологиянинг ажралмас қисмидир.

Маълум температуралар диапазони жуда кенг. Ҳозирги вақтгача эришилган энг паст температура $2\cdot10^{-5}$ К га яқин. Эришилган температураларнинг юқори чегараси ҳеч нима билан чекланмаган. Ер шароитларида энг юқори температурага водород бомбасини портлатишда эришилди, у тахминан 10^8 К га тенг. Юлдузлар бағридаги температура спектроскопик маълумотлар бўйича 10^9 К ва ундан ҳам юқори бўлиши мумкин.

Бундай кенг диапазондаги температураларни олиш ва ўлчаш методлари ғоят турличадир. Температурани ўлчаш методларини ва у билан боғлиқ бўлган масалаларни ўрганувчи физиканинг амалий соҳасига *термометрия* дейилади.

Маълумки, температура бевосита ўлчаниши мумкин эмас. Уни аниқлаш учун температуравий шкалани белгилаб олиш: термометрик моддани ва температура билан боғланувчи физикавий хоссани (термометрик хоссани) танлаш, бошланғич ҳисоб нуқтаси ва температура бирлиги ҳақида келишиш лозим. Бунинг учун одатда иккита фазавий ўтишларга, масалан, маълум ташқи шароитларда музнинг эришига ва сувнинг қайнашига мос бўлган, асосий температураларни (*репер нуқталарини*) танлайдилар. Бу нуқталар орасидаги шкала қисми *асосий интервал* деб аталади. Ҳисоб боши ўрнида репер нуқталаридан бири (масалан, *0*° — музнинг эриш температураси) қабул этилади, температура бирлиги қилиб асосий интервал улуши олинади. Жумладан, Цельсий шкаласида 1 градус асосий интервалнинг 0,01 улушини ташкил этади.

Температуравий шкалалар термометрик хосса ёки модда бўйича фарқ қилади. Бир-биридан анча фарқ қилувчи жуда кўп миқдорда шкалалар тузиш мумкин, чунки хоссалардан ҳеч биттаси қатъиян чизиқли боғланмайди ва бундан ташқари модда табиати билан белгиланади.

Барча эмпирик шкалаларнинг камчилиги уларнинг термометрик модда хоссаларига боғлиқлигидир. Хоссалар ва модда билан боғлиқ бўлмаган шкала фақат термодинамиканинг иккинчи қонунига асосан тузилади ва *абсолют термодинамикавий температуралар шкаласи* деб аталади. Унинг репер нуқтаси қилиб сувнинг учлама нуқтаси 273,16 К қабул қилинган. Бу шкала Карно цикли ёрдамида аниқланади. Бу циклнинг муз эриш T_0 ва сув қайнаш T_s темнератураларига мос изометрик процесслардаги иссиқлик миқдорлари Q_0 ва Q_s ни ўлчаб, ф. и. к. формуласи бўйича

$$T_s/T_0=Q_s/Q_0$$

нисбатни топиш мумкин. Шунга ўхшаш ихтиёрий температура T учун

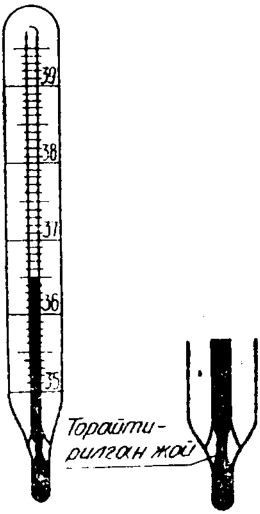
$$T/T_0=Q\ /Q_0$$

ни ёзиш мумкин, бу ерда Q — системага T температурадаги изотермик процессда берилган иссиқлик миқдори. Шу усулда аниқланган температурага *абсолют термодинамикавий температура* дейилади.

Термодинамикавий температура бирлиги кельвин (К) — сув учлама нуқтаси термодинамикавий температурасининг 1/273,16 улушига тенг. Кельвин температуравий интервал бирлиги сифатида, абсолют ноль билан сувнинг учлама нуқтаси орасидаги термодинамикавий температура интервалининг 1/273,16 қисмига тенгдир.

Исталган эмпирик шкала, мазкур модда термометрик хоссасининг температурага боғланишини ҳисобга олувчи тузатмалар киритиш воситаси билан абсолют термодинамикавий шкалага айлантирилади.

Температура қиймати термометрик модданинг бирорта хоссасининг катталиги бўйича белгиланганлиги учун уни ўлчаш ҳажм, босим, электрик, механикавий, оптикавий, магнитавий ва ш. ў. физикавий параметрларни ўлчашдан иборатдир. Температурани ўлчаш усулларининг хилма-хил бўлиши уларда фойдаланувчи термометрик модда ва хоссалар сонининг кўплиги билан боғлиқдир.



10.13-расм.

Термометрлар—температурани ўлчаш асбоблари—термометрик хоссадан фойдаланадиган сезгир элементдан ва ўлчаш асбоби (дилатометр, манометр, гальванометр, потенциометр ва ҳ. к.) дан иборат бўлади. Температурани ўлчашда зарур бўлган шарт— сезгир элемент билан температураси ўлчанадиган жисм орасида иссиқлик мувозанатининг мавжудлиги.

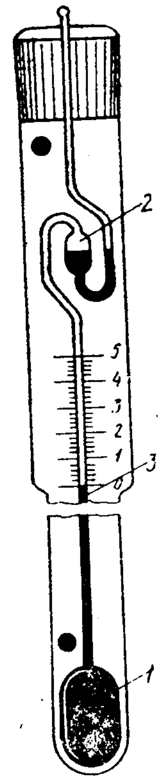
Ўлчанувчи температура интервалларига кўра кўпроқ суюқлиқли, газли термометрлар, қаршилик термометри, термометр сифатидаги терможуфт ва пирометрлар тарқалгандир.

Суюқлиқли термометрда термометрик хосса ҳажмнинг ўзгаришидир, сезгир элемент эса суюқлиқли (одатда симобли ёки спиртли) резервуардир. Пирометрларда термометрик хосса сифатида нурланиш интенсивлигидан фойдаланилади. Пирометрларнинг бошқа термометрлардан фарқи шундаки, уларнинг сезгир элементлари жисм билан бевосита контактлашмайди. Пирометрлардан исталганча юксак бўлган температураларни ўлчаш учун фойдаланадилар.

Ниҳоятда паст температураларни ўлчашда термометрик модда сифатида парамагнетиклар хизмат қилиб, ўлчанувчи хосса — магнитланувчанликнинг температурага боғланиши хизмат қилади.

Медицинада ишлатилувчи симобли термометр максимал температурани кўрсатади ва *максимал термометр* деб аталади. Ундаги бу хусусият унинг тузилишига боғлиқ; симобли резервуар даражаланган капиллярдан қилсимон даражада торайтирилган жой билан ажратилган бўлиб, бу торайганлик термометр совиган вақтда симобнинг резервуарга қайтишига имкон бермайди (10.13-расм). Узоқ вақтда кузатилувчи энг паст температурани кўрсатадиган минимал термометрлар ҳам мавжуд.

Кичик интервалдаги температурани юқори аниқликда ўлчаш учун метастатик термометр (10.14-расм) хизмат қилади. Бундай термометр суюқлиқли (одатда симобли) катта резервуар 1 дан ва узун ингичка капилляр 3 дан иборат бўлади. 1-резервуардаги симоб массаси ўзгарувчан, унинг қисми 2-резервуарга қуйилиши мумкин, бунинг натижасида шкаланинг *0* белгиси ўлчанувчи температуралар интервалининг пастки чегараси қилиб олинади. Бундай термометр даражасининг қиймати 0,01° га тенг. Ҳисоблаш интервали ҳаммаси бўлиб 5° ни ташкил этади, лекин у ҳар хил температуралар ёнидан олиниши мумкин.



10.14-расм.

Физика, химия ва биологияда кўп процесслар жиддий равишда температурага боғлиқ бўлади, шунинг учун температураларни ҳосил қилиш ва муайян даражада сақлай олиш муҳим масалалардандир. Бу мақсад учун термостатлар хизмат қилади, уларда температура ўзгармас ҳолда сақланади, буни ё автоматик регуляторлар бажаради ёки бунинг учун фазавий айланишларнинг ўзгармас температураларда ўтиш хоссасидан фойдаланадилар.

Ҳар хил физикавий, химиявий ва биологик процессларда чиқарилувчи ёки ютилувчи иссиқлик миқдорини ўлчаш учун қатор усуллар қўлланиладики, уларнинг тўплами *калориметрияни** ташкил қилади.

Калориметрик усуллар билан жисмлар иссиқлик сиғимини, фазавий айланишлар, эриш, ҳўлланиш, адсорбция иссиқликларини, химиявий реакцияларда рўй берувчи иссиқликларни, нурланиш энергиясини, радиоактив емирилиш ва ш. ў. ларни ўлчайдилар.

Бунинг каби ўлчашлар *калориметрлар* ёрдамида бажарилади. Калориметрларни икки асосий типга ажратиш мумкин: ичидаги иссиқлик миқдори температурасининг ўзгариши бўйича аниқланадиган калориметрлар ва температураси ўзгармас бўлиб, иссиқлик

---

* Ҳаётий фаолият процесслари билан бирга рўй берувчи иссиқлик эффектларини ўлчаш усуллари группасини биокалориметрия деб ҳам атайдилар, унга мос асбобларга — биокалориметрлар дейилади.

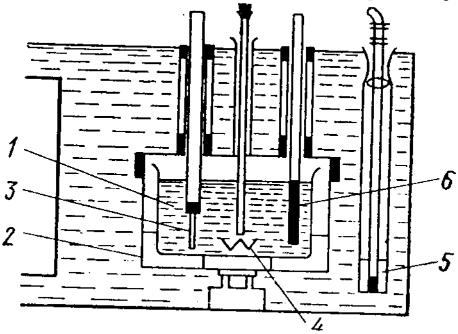
миқдори бошқа фазавий ҳолатга ўтган (масалан, эриётган қаттиқ жисм) модда миқдори бўйича аниқланадиган калориметрлар.

Амалда ишлатилувчи калориметрларнинг кўпи биринчи типга киради. Бу ҳолларда «калориметр — текширилувчи жисм» системаси қабул этган иссиқлик

$$Q = c_к \, \Delta T$$

формула бўйича топилиши мумкин, бу ерда $c_к$ — калориметрик системанинг солиштирма иссиқлик сиғими, ΔT — унинг атрофдаги муҳит билан иссиқлик алмашуви бўлмаган ҳолда кузатилиши мумкин бўлган температурасининг ўзгариши.

ΔT ни аниқлаш учун тажрибада ўлчаниб топилган температура ўзгаришига атрофдаги муҳит билан иссиқлик алмашувини ҳисобга оладиган тузатма киритилиши керак. Бунга кўра барча калориметрларни изотермик ва адиабатик қобиқли калориметрларга бўлиш мумкин. Изотермик ёки адиабатик шароитларни сақлаш учун калориметр температура регулятори билан таъминланади; регуляторлар сифатида аксарият контактланувчи термометрлар, шунингдек, қаршилик термометрлари ва дифференциал терможуфтлар ишлатилади.



10.15-расм.

10.15-расмда энг содда суюқлиқли калориметрнинг схемаси келтирилган: 1—калориметрик идиш, 2—цилиндрик идиш-қобиқ, 3—иситгич, 4 ва 5—аралаштиргичлар, 6—термометр.

Калориметрлар термостат ўрнида ҳам хизмат қила олади.

§ 8. ДАВОЛАШ УЧУН ИШЛАТИЛУВЧИ ИСИТИЛГАН ВА СОВУҚ МУҲИТЛАРНИНГ ФИЗИКАВИЙ ХОССАЛАРИ

Медицинада тананинг айрим жойларини иситиш ёки совутиш мақсадларида иситилган ёки совуқ жисмларни ишлатадилар. Бу вақтда одатда олиниши нисбатан қулай келган муҳитларни танлайдилар, уларнинг баъзилари шу вақтда фойдали механикавий ёки химиявий таъсир этадиган бўлишлари мумкин.

Бундай муҳитларнинг физикавий хоссалари уларнинг ишлатилишига кўра белгиланади. Биринчидан, нисбатан узоқ вақт давомида керакли эффект ҳосил қилинадиган бўлиши шарт. Шунинг учун ишлатилувчи муҳитлар катта солиштирма иссиқлик сиғимига (сув, балчиқ) ёки яширин фазавий айланиш солиштирма иссиқликка (парафин, муз) эга бўлишлари керак. Иккинчидан, бевосита тери устига ёпиладиган муҳитлар оғриқ сезгиларини туғдирмаслиги шарт. Бу ҳол бир томондан, мазкур муҳитлар температурасини чеклаб қўяди, иккинчи томондан, иссиқликни кам ўтказадиган муҳитларни танлашга мажбур этади. Масалан, даволаш учун ишлатиладиган сувнинг температураси 45°С гача, торф ва балчиқларнинг температураси 50°С гача бўлади, чунки бу муҳитларда иссиқлик алмашуви (конвекция) сувдагидан кам бўлади. Парафинни 60—70°С гача иситади, чунки унинг иссиқлик ўтказувчанлиги катта эмас, терига бевосита тегиб турган қисмлари тез совуб кетади, кристалланади — бу кристаллар эса унинг қолган қисмларидан келувчи иссиқликни бирмунча тўсади.

Даволаш учун совитувчи муҳит сифатида муз ишлатилади.

XI БОБ

ГАЗЛАРДА КЎЧИШ ҲОДИСАЛАРИ

Хаотик ҳаракатланиш вақтида бир-бирлари билан ўзаро таъсирланиб, газ молекулалари анча катта масофага силжийди. Бундай микропроцесслар ё молекулалар томонидан модда массасининг бевосита кўчирилишига ёки доимий равишда молекуладан молекулага энергия ва импульснинг муайян йўналишда ўтиб туришига олиб келади.

Молекулалар хаотик ҳаракати туфайли масса, кинетик энергия ва импульслар узатилишига олиб келувчи ҳодисалар *кўчиш ҳодисалари* деб аталади.

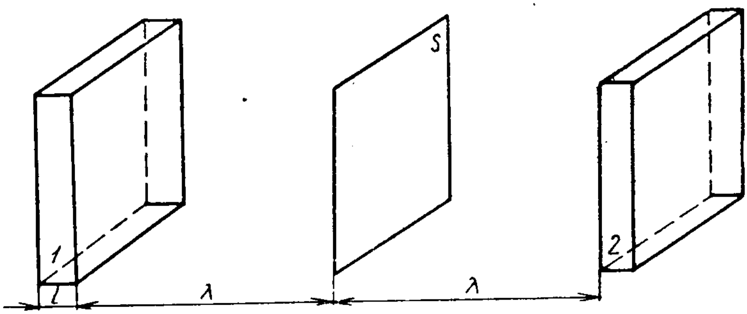
Кўчиш ҳодисаларига диффузия — моддани кўчириш, иссиқлик ўтказувчанлик — кинетик энергиянинг кўчирилиши ва ички ишқаланиш — импульс кўчирилишлари киради.

§ 1. КЎЧИШНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ

Молекулавий кинетик назарияга асосланиб, юқорида саналган ҳодисаларнинг учовини ҳам баён этувчи умумий кўчиш тенгламасини олиш мумкин.

Фараз қилайлик, юзи S бўлган майдончадан молекулаларнинг хаотик ҳаракатланишлари натижасида (11.1-расм) бирор физикавий катталик кўчириладиган бўлсин. Юзачанинг ўнг ва чап томонларида ўртача эркин югуриш узунлиги $\overline{\lambda}$ га тенг масофаларда кичик l $(l \ll \overline{\lambda})$ қалинликдаги тўғри бурчакли параллелепипедлар ясаймиз. Ҳар бир параллелепипеднинг ҳажми Sl Агар молекулалар концентрацияси n бўлса, ажратилган параллелепипед ичида Sln молекула мавжуд.

Барча молекулаларни, улар хаотик харакатланганлари учун шартли қилиб ҳар бири координата ўқларининг биттаси бўйича ёки унга қарши йўналишда силжувчи олтита группага ажратиш мумкин. Бундан юзача S га перпендикуляр бўлган йўналиш бўйича $1/6\, Sln$ молекула силжигани келиб чиқади. Ҳажм *1* (11.1-расмга қаранг) S юзачадан λ масофада тургани учун бу молекулалар унга ўзаро тўқнашмасдан етиб борадилар. Худди шунча $1/6\, Sln$ молекула S юзачага чап томондан ҳам етиб келади.



11.1-расм.

Ҳар бир молекула бирор z катталикни (масса, импульс, кинетик энергия) кўчириш қобилиятига эга; ажратилган ҳажмдаги ҳамма молекулалар $1/6\, Slzn$ ёки $1/6\, SlH$ ни кўчирадилар, бу ерда $H=nz$ ҳажм бирлигидаги молекулалар кўчирадиган физикавий катталик тушунилади. Натижада 1 ва 2-ҳажмлардан S юзача орқали $\Delta\tau$ вақтда кўчирилган физикавий катталик

$$\frac{1}{6}SlH_1 - \frac{1}{6}SlH_2 = \frac{1}{6}Sl\,(H_1 - H_2) \qquad (11.1)$$

га тенг.

Вақт $\Delta\tau$ ни аниқлаш учун ажратилган ҳажмлардаги барча молекулаларни бир хилда ўртача тезлик $\bar{v}$ билан харакатланади деб фараз қилайлик. У ҳолда 1-ёки 2-ҳажмдаги молекуладан S юзачага етиб келганлари уни

$$\Delta\tau = l/\bar{v} \qquad (11.2)$$

вақт давомида кесиб ўтади. (11.1)-ни (11.2)-га бўлиб, вақт бирлигида кўчириладиган катталикнинг қийматини оламиз:

$$\frac{1}{6}\,\frac{Sl(H_1-H_2)}{\Delta\tau} = \frac{1}{6}\,\frac{Sl(H_1-H_2)\bar{v}}{l} = \frac{1}{6}S\bar{v}\,(H_1 - H_2). \qquad (11.3)$$

Катталик Н нинг узунлик бирлигидаги ўзгаришига, яъни dH/dx *га* шу катталикнинг градиенти дейилади. (H_1—H_2) ифода H нинг $2\bar{\lambda}$ масофада ўзгариши бўлгани учун

$$\frac{dH}{dx} = \frac{H_1-H_2}{2\bar{\lambda}} \quad \text{ёки} \quad H_1 - H_2 = 2\bar{\lambda}\frac{dH}{dx} \qquad (11.4)$$

(11.4)-ни (11.3)-га қўйиб, вақтга кўпайтгандан кейин физикавий катталик H нинг Δt вақтда S юза орқали кўчирилган оқимини оламиз:

$$G = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\frac{dH}{dx}S\Delta t. \qquad (11.5)$$

Ана шунинг ўзи кўчишнинг умумий тенгламаси бўлади ва ундан диффузияни, иссиқлик ўтказишликни ва қовушоқликни ўрганишда фойдаланамиз*.

§ 2. ГАЗЛАР ДИФФУЗИЯСИ

Фазони текис тўлатиб турган газ ичида иккинчи бир газ жойлашган бўлсин. Иккинчи газнинг концентрацияси ва парциал зичлиги бирор ўқ, масалан, OX ўқи бўйича ўзгарадиган бўлсин.

$$\frac{d\rho}{dx} \neq 0. \qquad (11.6)$$

Бу OX га перпендикуляр бўлган S юзача орқали, бир йўналиш бўйича иккинчи газ молекулаларининг қарама-қарши йўналишдагилардан кўпроқ бўлиб оққани кўринади демакдир. Бундай ҳодисага *диффузия* дейилади. Диффузиянинг рўй беришида диффузияланувчи моддада зичлик градиентининг мавжудлиги зарурий шартдир.

Агар кўчишнинг умумий тенгламаси (11.5)-даги G ўрнига диффузияланувчи газнинг массаси M ни, H ўрнига унинг парциал зичлиги ρ ни қўйсак, *диффузия тенгламасига* эга бўламиз:

$$M = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\frac{d\rho}{dx}S\Delta t. \qquad (11.7)$$

Бундан юзача, процесс вақти ва концентрация ёки зичлик градиенти, шунингдек, молекулалар хаотик ҳаракатининг ўртача тезлиги ва эркин югуришнинг узунлиги қанча катта бўлса, диффузияланган газ массаси ҳам шунча катта бўлганлиги кўринади.

Тажрибадан маълумки, диффузия вақтида Δt вақтда S юзача орқали кўчирилувчи масса Фик тенгламаси бўйича ифодаланади:

$$M = D\frac{d\rho}{dx}S\Delta t. \qquad (11.8)$$

бу ерда D — *диффузия коэффициенти.* (11.7) ва (11.8)-ни таққослаб,

$$D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda} \qquad (11.9)$$

га эга бўламиз.

* (11.5)-тенгламанинг ўнг томонига баъзан «—» ишора қўйилади. Бу билан ажратилган юзача орқали H нинг суммар кўчиши H нинг камайган йўналиши бўйича бўлганини таъкидлайдилар.

Диффузиянинг хусусий ҳоли таркиб жиҳатдан бир жинсли модда заррачалари концентрациясининг текисланиши бўлмиш ўздиффузиядир.

§ 3. ГАЗЛАРНИНГ ИЧКИ ИШҚАЛАНИШИ

Айтайлик, бирор йўлда газ ёпишқоқ суюқликқа ўхшаб қатламланиб (8.7-расмга қаранг) кўчсин. Қатламларни шартли равишда ажратиб, молекулаларнинг ҳар бир қатламдаги йўналишли ҳаракати тезликларини стрелкалар билан кўрсатамиз: $u_1<u_2<u_3<u_4$. Бундан ташқари, газ молекулалари хаотик равишда ҳам ҳаракатланади; шундай қилиб, ҳар қатламдаги молекулалар ҳаракати шамол таъсирида кўчувчи майда чивинлар ғужига ўхшайди.

Хаотик ҳаракат туфайли молекулалар бир-бирларига импульслар бериб, бир қатламдан иккинчи қатламга ўтадилар, газнинг ички ишқаланиши ана шундан иборатдир.

Кўчишнинг умумий (11.5) тенгламасини ички ишқаланишга татбиқ қиламиз. Катталик G деганда молекулаларнинг импульсларни кўчириши натижасида S юзли қатламга бошқа қатлам томонидан таъсир этувчи куч импульсини тушунамиз, $G=F\Delta t$. Кўчирилувчи катталик $H=\rho u$ — ҳажм бирлигида жойланган молекулалар йўналишли ҳаракати натижасида рўй берувчи импульс. Бу катталикларни (11.5)-га қўйиб чиққандан сўнг

$$F\Delta t=\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\frac{d(\rho u)}{dx}S\Delta t \quad \text{ёки} \quad F=\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho\frac{du}{dx}S \qquad (11.10)$$

га эга бўламиз. Ички ишқаланиш кучининг Ньютон тенгламаси (8.9) бўйича аниқланиши тажрибадан маълум. (8.9) ва (11.10)-ни солиштириб, газнинг ички ишқаланиш коэффициенти ёки қовушоқлиги ифодасини оламиз:

$$\eta=\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho. \qquad (11.11)$$

§ 4. ГАЗЛАРНИНГ ИССИҚЛИК ЎТКАЗУВЧАНЛИГИ

Молекуляр кинетик назариясига биноан газларнинг иссиқлик ўтказувчанлиги молекулаларнинг урилиш вақтида кинетик энергияни йўналишли узатиш процессидир. Бу ҳодиса учун ҳам кўчишнинг умумий тенгламаси (11.5) дан фойдаланамиз.

Бу ҳолда катталик G — узатилган иссиқлик миқдори Q; кўчирилувчи катталик H — ҳажм бирлигидаги молекулаларнинг кинетик энергияси. (9.6)-га мувофиқ

$$H=\frac{i}{2}kTn \qquad (11.12)$$

ни ёзиш мумкин, бу ерда n — молекулалар концентрацияси. У ҳолда (11.5)-ни

$$Q=\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{i}{2}\mathrm{kTn}\right)\mathrm{S}\Delta t \text{ ёки } Q=\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\frac{i}{2}kn\frac{dT}{dx}\mathrm{S}\Delta t \quad \mathbf{(11.13)}$$

шаклда ифодалаш мумкин.

$k=\mathrm{R}/N_{\mathrm{A}}$, $n=\rho/m_0$, $M=m_0N_{\mathrm{A}}$ ва (10.12 а)-муносабатларидан фойдаланиб, ифодаларни ўзгартирамиз.

$$\frac{i}{2}kn=\frac{i}{2}\frac{R}{N_A}\frac{\rho}{m_0}=\frac{i}{2M}\mathrm{R}\rho=c_{\mathrm{v}}\rho.$$

Кейинги тенгликни (11.13)-га қўйиб,

$$Q=\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}c_{\mathrm{v}}\rho\frac{dT}{dx}S\Delta t \quad \mathbf{(11.14)}$$

га эга бўламиз. Ана шунинг ўзи *иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасидир.* Бироқ тажриба ёрдамида иссиқлик ўтказувчанлик учун Фурье тенгламаси олинган

$$Q=\Lambda\frac{dT}{dx}\mathrm{S}\Delta t, \quad \mathbf{(11.15)}$$

бу ерда Λ — иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти ёки осонгина *иссиқлик ўтказувчанлик.* (11.14) ва (11.15)-ни таққослаб, газларнинг иссиқлик ўтказувчанлиги учун ушбу ифодани топамиз:

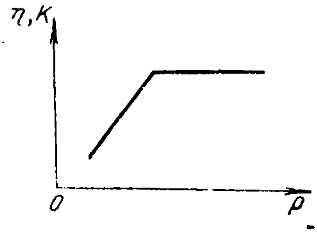
$$\Lambda=\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}c_{\mathrm{v}}\rho. \quad \mathbf{(11.16)}$$

(11.15)-дан маълум бўлишича, узатилган иссиқликнинг миқдори иссиқликнинг ўтган юзага, узатилиш вақтига, температура градиентига ва иссиқлик ўтказувчанлигига боғлиқдир. Газнинг иссиқлик ўтказувчанлиги баъзи молекуляр характеристикалар билан аниқланади (11.16-га қаранг). Фурье тенгламаси (11.15)-дан фақат газлар учун фойдаланмасдан суюқ ва қаттиқ жисмлар учун ҳам фойдаланиш мумкин, бироқ бу ҳолда иссиқлик ўтказувчанлик учун бўлган ифода (11.16)-дан бошқачароқ бўлади:

Газ қовушоқлиги η ва иссиқлик ўтказувчанлиги Λ нинг босимга боғланиши битта хусусиятга эга. (11.11) ва (11.16)-формулаларга босимга боғланмаган катталиклардан ($\bar{v}$ ва c_{v}) ташқари, яна кўпайтма $\bar{\lambda}\rho$ киради. Бу кўпайтма, умуман айтганда, молекулалар концентрацияси, демак, босимнинг ҳам ўзгариши билан ўзгармайди, чунки молекулаларнинг эркин югуриш ўртача узунлиги концентрацияга тескари пропорционал бўлиб, зичлик эса унга пропорционалдир.

η ва Λ нинг босимга бундай боғланмаслиги, босимнинг камайиб бораверишы натижасида, молекулаларнинг эркин югуриш ўртача узунлиги $\bar{\lambda}$ идиш ўлчовларига тенглашгунча давом этади.

Босимнинг бундан кейинги пасайишида газ зичлиги камаяди, аммо молекулаларнинг эркин югуриш узунлиги ўзгармайди, чунки идиш ўлчовларидан катта бўла олмайди. Бундай ҳолда қовушоқлик ва иссиқлик ўтказувчанлик босимга пропорционал бўлиб ўзгаради (11.2-расм, бу ерда K—иссиқлик ўтказиш коэффициенти).



11.2-расм.

11.3 расм.

Кичик босимлардаги газнинг иссиқлик ўтказувчанлигини босим билан боғланишидан, совуқ ёки иситилган жисмларни сақлаш учун хизмат қилувчи махсус идишларни ясашда фойдаланадилар. Вакуум ҳисобига иссиқлик ўтказувчанлик камаяди; вакуум эса икки қават деворли идишда (термос ёки *Дьюар идишларида*, 11.3-расм) сақланади.

XII БОБ

РЕАЛ ГАЗЛАР

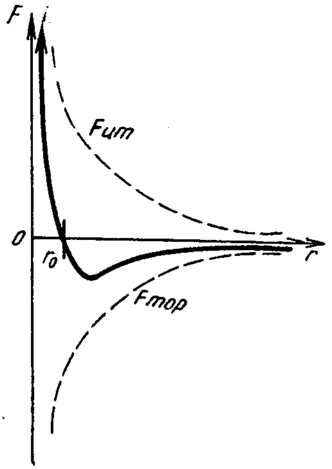
Сийраклаиган газлар ҳолатининг ўзгариши идеал газлар қонуни ёрдамида етарлича тасвирланиши маълум. Бироқ газ ҳажми камайганда бу қонунлардан етарлича чекинишларни кузатиш мумкин, бу чекинишларнинг сабаби реал ва идеал газлар молекулалари хоссаларининг фарқланишидадир.

§ 1. МОЛЕКУЛАЛАРАРО ЎЗАРО ТАЪСИР КУЧЛАРИ

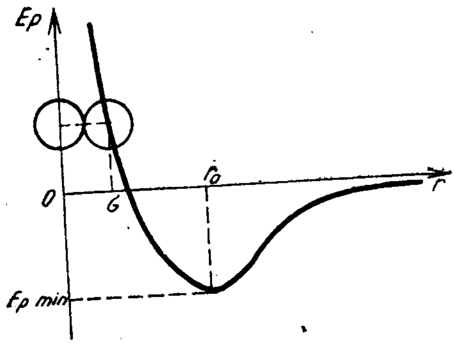
Жисмларни ташкил этувчи молекулалар бир-бирларига ўзаро таъсир қиладилар. Қаттиқ жисмларнинг чўзилишига қаршилик қилиш қобилияти суюқлиқ сиртининг алоҳида хоссалари ва бошқа ҳодисалар молекулалар орасида тортилиш кучлари таъсир қилади деган хулосага олиб келади. Жуда зич газларнинг, айниқса суюқлиқларнинг ва қаттиқ жисмларнинг кам сиқилувчанлиги молекулалар орасида итарилиш кучлари мавжуд демакдир. Қаттиқ ва суюқ жисмларда тортилиш ва итарилиш кучлари бир вақтнинг ўзида таъсир қилишини эсда тутамиз. Агар шундай бўлмаганда эди жисмлар турғун бўлмас эди: ё айрим заррачаларга бўлиниб сочилиб кетар ёки «ёпишиб» қолар эди.

Худди шунинг ўзидан молекулалар орасидаги масофага кўра ўзаро таъсир қилиш кучлари ўзгариши кераклиги келиб чиқади. Тортилиш $F_{тор}$, итарилиш $F_{ит}$ кучлари ва ўзаро таъсирланиш натижаловчи кучи F нинг молекулалар марказлари орасидаги масофа r билан боғланиши 12.1-расмда берилган. $r=r_0$ бўлганда натижаловчи куч $F=0$ эканлиги кўриниб турибди. Демак, r_0 — бу иссиқлик ҳаракати йўқ бўлган вақтдаги молекулалар орасидаги мувозанатий масофадир.

Икки молекуладан иборат системадаги ўзаро таъсир потенциал энергияси E_p нинг уларнинг марказлари орасидаги масофа r билан боғланиши 12.2-расмда келтирилган. $r=r_0$ бўлган вақтда потенциал энергия минимум E_{pmin} бўлиб қолади, бу эса мазкур системанинг турғун ҳолатига тегишлидир. $r<\sigma$ бўлган вақтда



12.1-расм.



12.2-расм

(бу ерда σ — молекуланинг эффектив диаметри) итариш кучлари натижасида бўлган потенциал энергия бирдан кўпаяди, бу эса молекулаларнинг яқинлашишига энергетик жиҳатдан тўсқинлик қилади. Бу ҳол молекулаларни $r=\sigma$ бўлганда сиртлари бир-бирига тегиб турадиган абсолют қаттиқ шарчалардек тасаввур қилишга имкон беради (схематик равишда расмда кўрсатилган).

Минимал потенциал энергия E_{pmin}ва тахминан kT га (аниқроғини айтганда 3/2 kT) тенг хаотик иссиқлик ҳаракатининг кинетик энергияси орасидаги муносабат у ёки бу модда агрегат ҳолатининг мавжуд бўлиш имкониятини аниқлайди. $E_{pmin} \ll kT$ бўлган ҳолда модда газ ҳолатида, $E_{pmin} \gg kT$ бўлганда — қаттиқ, $E_{pmin} \approx kT$ бўлган вақтда — суюқ ҳолатда бўлади.

$r>\sigma$ бўлгандаги потенциал энергия эгри чизиғининг қисми асосан кучсиз кучларга тўғри келиб, уларни (биринчи бўлиб реал газ ҳолатининг тақрибий тенгламасини таклиф этган олим *Ван-дер-Ваальс* шарафига) *ван-дер-ваальс* кучлари деб аташ қабул қилинган. Ван-дер-ваальс кучлари бўш боғланган атом ва молекулалар бирикмасига олиб келишлари мумкин. Суюқликлар ичидаги уланиш кучларининг мавжудлигини ана шу ҳодиса билан тушунтириш мумкин.

Молекулалараро, ван-дер-ваальс кучларининг назарияси устида батафсил тўхтамасдан уларни электр кучлари ёки электромагнитавий кучларга келтириш мумкинлигини кўрсатиб ўтамиз. Ҳозирги вақтда ҳар хил молекулалар ва улар орасидаги ўзаро таъсири характери учун уч типдаги ван-дер-ваальс кучларини кўрсатиш қабул этилган.

Қутбий молекулалар (II т. XV бобга қаранг) орасида молекулалар диполь моментларининг ўзаро таъсири вақтида ҳосил бўлувчи *ориентацион* кучлар рўй беради. Ноқутбий молекулаларнинг ўзаро таъсири бошқа молекула электр майдонида турувчи, молекуланинг қутбланиш вақтида ҳосил бўладиган и н д у к ц и о н кучларга боғлиқ. Квантлар механикаси яна бир молекулалараро ўзаро таъсир турини очди, унга *дисперсион* ўзаро таъсир дейилади. Дисперсион кучларнинг келиб чиқиш сабаби бошқа бир молекуладаги электронларнинг тебранишлари таъсири остида мазкур молекулада электронлар тебранишининг уйғонишидир. Қўшни молекулалар электронларининг тебранишлари бир хил фазада бўлади ва бу каби резонансий кучлар икки молекула тортилишини вужудга келтиради. Дисперсион кучлар молекулаларнинг аксарияти учун молекулалар орасидаги ўзаро таъсирнинг асосий қисмини ташкил этадилар. Ҳатто зўр қутбий молекулалар учун ҳам улар ориентацион кучлар билан бир тартибда бўлади.

Ван-дер-ваальс кучларининг учала типи ҳам масофа r нинг еттинчи даражасига тескари пропорционал бўлиб ўзгаради, уларга мос потенциал энергиялар эса r нинг олтинчи даражасига тескари пропорционал бўлиб ўзгаради.

$$F \sim 1/r^7, \quad E_p \sim 1/r^6 \qquad (12.1)$$

§ 2. ВАН-ДЕР-ВААЛЬС ТЕНГЛАМАСИ. КРИТИК ҲОЛАТ

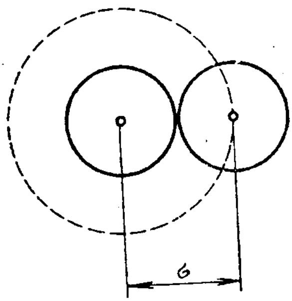
Реал газларнинг тенгламаси молекулаларнинг ўз ҳажми қийматини ва уларнинг бир-бирига ўзаро тортилишини ҳисобга оладиган бўлиши лозим.

Ван-дер-Ваальс ҳолат тенгламасига идиш ҳажми эмас, молекулалар ишғол қилмаган бир моль газнинг «кинетик» ҳажми, яъни $V_m - b$, киради деб ҳисоблашни таклиф қилган. Доимий миқдор b ҳажмнинг, молекулалар чекли катталикда бўлишлари натижасида, улар томонидан эгалланиб бўлмайдиган қисмини белгилайди. Уни топиш учун идиш ичида иккитагина молекула бор ва уларнинг марказлари бир-бирига σ дан кичик масофагача яқинлашмайди деб фараз қиламиз (12.3-расм). Шундай қилиб, ҳар бир молекула маркази учун эгаллаб бўлмайдиган ҳажм σ радиусли шарнинг $4/3\pi\sigma^3$ га тенг ҳажми бўлар экан, битта молекулага нисбатан ҳисобланганда эса икки марта кичик ҳажм, яъни $2/3\pi\sigma^3$ га тенг ҳажм тўғри келади, бу эса ҳажми $1/6\pi\sigma^3$ га тенг молекула ҳажмидан 4 марта каттадир. Бу тақрибий ҳисобдан N_A дона молекула учун «эгаллаб бўлмайдиган» ҳажмни ёзиш мумкин:

$$b = 4N_A(1/6)\pi\sigma^3. \qquad (12.2)$$

Коэффициент b нинг ўлчами м^3/моль.

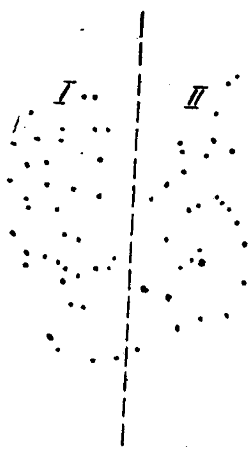
Агар молекулалар орасидаги ўзаро таъсир (тортилиш) кучлари ҳисобга олинса, у ҳолда ҳолат тенгламасига кирувчи босим учун тузатма киритиш лозим. Молекулалар орасидаги ўзаро таъсир бирдан йўқолди деб фараз қилайлик, у ҳолда молекулаларни худди шу ҳажмда ушлаб туриш учун қўшимча ташқи босим керак бўлар эди. Демак, ўзаро таъсирланувчи молекулалардан иборат газнинг идиш деворларига қиладиган босими идеал газ қиладиган босимдан ички босим деб аталувчи p_i миқдорча кам бўлади.



12.3-расм.

Ички босим p_i ни аниқлаш учун молекулаларни ҳаёлан пунктир билан ажратилган икки — I ва II группа шаклида (12.4-расм) тасаввур этайлик. I группа молекулаларидан биттасига II группа молекулалари томонидан таъсир этувчи куч мазкур молекулалар сонига, яъни концентрациясига пропорционал бўлади: $f_1 = k_1 n$, бу ерда k_1 — пропорционаллик коэффициенти.

I группадаги барча молекулаларга II группадаги молекулалар томонидан таъсир этувчи куч f_1 кучга ва уларнинг концентрациясига пропорционал: $f_2 = k_2 f_1 n = k_1 k_2 n^2$, бу ерда k_2 — пропорционаллик коэффициенти. Ички босим молекулалар орасидаги ўзаро таъсирга боғлиқ бўлганлигидан кейинги муносабатга асосан ички босим p_i нинг ҳам молекулалар концентрациясининг квадратига пропорционал эканлигини таъкидлаш мумкин. Бир моль газ учун $n = N_A/V_m$ ни ёзиш мумкин ва у ҳолда



12.4-расм.

$$p_i = a/V_m^2, \qquad (12.3)$$

бу ерда a — муайян доимий катталик, унинг ўлчами Па·м^6/моль.

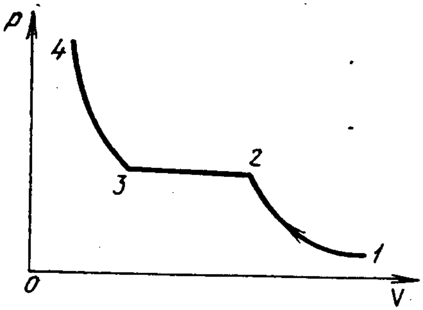
Молекулаларнинг хусусий ҳажмлари (итарилиш кучлари) (12.2) ва тортилиш кучлари (12.3) билан боғланган тузатмалар-ни Менделеев—Клапейрон (9.1) тенгламасига киритиб, бир моль реал газнинг ҳолат тенгламасини қуйидаги шаклда ёзамиз:

$$\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)(V_m-b)=RT. \tag{12.4}$$

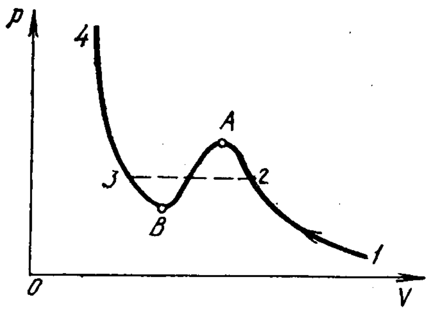
Бу *Ван-дер-Ваальс тенгламаси* бўлиб, ундаги a ва b га *Ван-дер-Ваальс доимийси* дейилади. Ҳар бир газ учун улар алоҳида қийматга эгадирлар.

Ван-дер-Ваальс тенгламаси тажрибавий маълумотларга Менделеев—Клапейрон тенгламасидан кўра анча яхшироқ мос келишидан ташқари, модданинг газ ҳолатидан суюқ ҳолатига ва, аксинча, ўтиш имкониятини ҳам акс эттиради.

Экспериментал изотерма графигини (12.5-расм) Ван-дер-Ваальс тенгламаси асосида тузилган изотерма графиги (12.6-расм) билан солиштириб кўрамиз. Ҳар икки графикнинг 1-2 қис-



12.5-расм.



12.6-расм.

ми модданинг газ ҳолатига, 3-4 қисми — суюқ ҳолатига мосдир; 12.5-расмдаги 2-3 қисм модданинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтишига мос. Ван-дер-Ваальс тенгламаси 2-А — В-3 ўтишларни (12.6-расмга қаранг) ҳам кўзда тутади, бироқ амалда улар тўла бажарилмайди, фақат маълум шароитлардагина метастабил ҳолатлар* 2-А ва 3-В вужудга келтирилиши мумкин.

Ўта тўйинган буғ деб аталувчи 2-А ҳолат ичида конденсацияланиш марказлари (чангчалар, электр зарядлари ва бошқалар) бўлмаган газнинг сиқилиши натижасида ҳосил бўлади, ўта исиган деб аталувчи *3-В* ҳолат эса — конденсацияланиш марказига ўхшаш буғ ҳосил бўлиш марказлари йўқлигида суюқлиқ босимини камайтириш вақтида ҳосил бўлади. Агар метастабил ҳолатда турувчи модда ичига конденсацияланиш ёки буғ ҳосил бўлиш марказлари киритилса, у ҳолда тез, бирдан мувозанат ҳолатга ўтиш юз беради — 2-3 қисм.

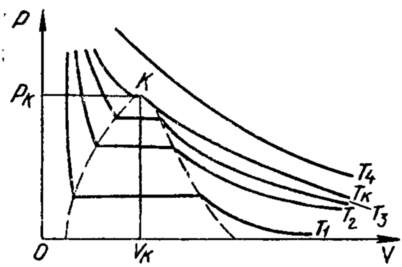
Ҳар хил температураларда тажрибавий йўл билан олинган

---

* Бу ерда термодинамикавий системанинг турғунмас мувозанат ҳолати кўзда тутилади.

реал газ изотермаларини чизиб (12.7-расм; $T_1<T_2$ ва ҳ. к.), $p-V$ текисликнинг ҳар бири модданинг муайян ҳолатига мос бўлган бир неча соҳадан иборат эканлигини кўрамиз. k нуқта билан акс эттирилган ҳолатга критик ҳолат дейилади, уни мазкур модда учун конкрет параметрлар: критик температура $T_к$, критик босим $p_к$ ва критик моляр ҳажм $V_{mк}$ билан характерлайдилар. Жумладан, сув учун: $T_к=647$ К, $p_к=2{,}1\cdot10^7$Па. $V_{mк}=55\cdot10^{-6}$ м/^{3}моль; азот учун: $T_к=126{,}7$ К, $p_к=0{,}3\cdot10^7$ Па, $V_{mк}=90{,}3\cdot10^{-6}$ м/^{3}моль.

Критик ҳолатга яқинлашиб боришда суюқлиқ ва газ орасидаги фарқ йўқолади, уларнинг зичлиги бараварлашишга интилади. Критик ҳолатда солиштирма иссиқлик ва сирт таранглиги нолга тенг бўлади, модда флюктуация* натижасида нобиржинс бўлиб қолади, анча ёруғлик сочилиши — опалесценция кузатилади.



12.7-расм.

12.7-расмдан маълум бўлишича, модда критик температурадан юқорироқда суюқ ҳолатда бўла олмайди**, шунинг учун газларни махсус қурилмаларда, температура критик температурадан пастроқ бўлган ҳолда суюлтирадилар. Жумладан, суюқ азотнинг атмосфера босимидаги температураси — 190°С, критик температураси — 147°С га тенг.

§ 3. ПАСТ ТЕМПЕРАТУРАЛАРНИНГ МЕДИЦИНАДА ИШЛАТИЛИШИ

Кейинги йилларда паст температуралар медицинада анча кенг ишлатила бошланди. Улардан баъзилари устида тўхтайлик. Паст температураларда трансплантация муносабати билан айрим органлар ва тўқималарни шундай консервация қиладиларки, натижада улар етарлича узоқ вақт давомида ўз яшовчанликларини ва нормал ишлаб туриш қобилиятларини сақлай оладилар.

Музлатиш ва эритиш вақтларида тўқималарни криоген*** методи билан бузиш медиклар томонидан бодом безлари, сўгаллар ва бошқаларни йўқотишда ишлатилади. Бунинг учун махсус криоген аппаратлари ва криозондлар ясалади.

---

* Физикавий катталикларнинг ўз ўртача қийматларидан тасодифий четланиб туришларига флюктуациялар дейилади.

** Ўта юксак босимларда модда ичидаги кристалик фаза критик температурадан юқори температурада ҳам кузатилиши мумкин. Мазкур хусусият бу ерда текширилмайди.

*** Крио... (грекча «криос» — совуқ, аёз, муз) муз, паст температуралар билан алоқадорликни ифодаловчи ёндош сўзлар қисми; криоген — паст температураларга тегишли бўлган.

Анестезияловчи хоссага эга бўлган совуқлик ёрдамида одам бош миясидаги баъзи нерв касалликларини, масалан, паркинсонизмнинг рўй беришига масъул ҳужайралар ядроларини йўқотиш мумкин.

Микрохирургияда ҳўл тўқималарнинг совуқ металл асбобларга ёпишиб кетишидан бу тўқималарни ушлаш ва бир жойдан иккинчи жойга кўчиришда фойдаланадилар.

Паст температураларнинг медицинада қўлланиши натижасида криоген медицина, криотерапия, криохирургия ва ҳ. к. деган янги терминлар пайдо бўлди.

XIII БОБ

ҚАТТИҚ ЖИСМЛАР

Қаттиқ жисмнинг характерли аломати ўз формасини сақлай олишидир. Қаттиқ жисмларни *кристалик* ва *аморф* жисмларга ажратиш мумкин.

§ 1. КРИСТАЛИК ҚАТТИҚ ЖИСМЛАР

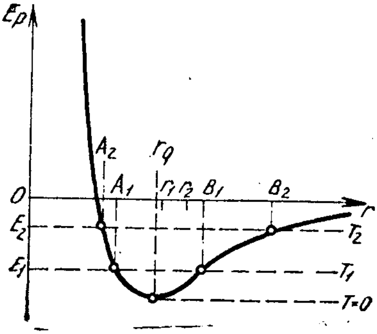
Кристалик ҳолатнинг аломати анизотропиядир, яъни физикавий хоссаларнинг (механикавий, иссиқлик, электрик, оптикавий хоссаларнинг) йўналишнга боғлиқ бўлишидир. Кристалларни ташкил этган атом ва молекулаларнинг тартибли суратда жойланиши улар анизотропиясининг сабабидир; айрим монокристалларнинг тўғри ёқланишлари бундай тартибли жойланишнинг далилидир. Бироқ қоида бўйича кристалик жисмлар поликристаллар — бир-бирлари билан туташиб, тартибсиз ориентацияланган айрим кичиккина кристалчалар (кристаллитлар) тўплами шаклида учрайди. Бундай ҳолда анизотропия кристаллитлар чегарасидагина кузатилади.

Кристалл атомлари ва молекулаларининг жойланишларидаги тартиблилик уларнинг, *кристалик* (фазовий) *панжаралар* деб аталувчи, геометрик тўғри структуралар тугунларида жойланишлари билан тушунтирилади. Тугунларда турган заррачалар табиати ва ўзаро таъсир кучларининг характерига кўра тўрт хил кристалик панжаралар мавжуд: ионавий, атомавий, металл ва молекулавий панжаралар.

Ионавий кристаллнинг кристалик панжараси тугунида ҳар хил ишорали ионлар туради. Улар орасидаги ўзаро таъсир кучлари асосан Кулон кучларидир. Бундай кристалл бутун бир молекула деб қаралади. Атомавий панжара тугунлари нейтрал атомлар билан банд бўлиб, улар орасида ковалент боғламлар таъсир этади. Металл панжаранинг барча тугунларида мусбат металл ионлари жойланган. Улар орасида электронлар хаотик ҳаракатланади. Ионлар ва электронлар системаси металлик боғланиш ҳосил қилади. Молекулавий кристаллнинг кристалик панжараси тугунларида алоҳида ориентацияланиб, ўз ўринларида Ван-дер-Ваальс кучлари билан ушлаб турувчи молекулалар жойланган бўлади.

Энергетик нуқтаи назардан қараганда идеал кристалл идеал газга қарама-қаршидир. Идеал газда ўзаро таъсир энергиясининг абсолют қиймати хаотик иссиқлик ҳаракатининг ўртача энергияси kT дан анча кам бўлади. Кристаллда эса, ўзаро таъсир кучлари катта бўлиши натижасида, ўзаро таъсир энергиясининг абсолют қиймати аксинча kT дан анча катта бўлади. Шунинг учун кристаллардаги иссиқлик ҳаракати заррачалар орасидаги боғланишни бузиб йўқота олмайди, бунинг натижасида улар мувозанат вазияти атрофида кичик тебранади.

Исталган турдаги заррачалар орасидаги ўзаро таъсир кристалл ичида потенциал энергия E_p нинг улар орасидаги масофа r билан боғланиши орқали ифодаланади (13.1-расм). Эгри чизиқ минимумга нисбатан носимметрик. Ўзаро таъсирланувчи заррачалар орасидаги масофа r_0 температура $T=0$ вақтдаги потенциал энергия минимумига мосдир. Температура T_1 да суммар (кинетик ва потенциал) энергия E_1 га тенг. Бу, заррача A_1 ва B_1 нуқталари орасида тебранади демакдир. Икки заррача орасидаги ўртача масофа



13.1-расм.

$r_1=(OA_1+OB_1)/2$. $T_2>T_1$ бўлганда заррача энергияси $E_2>E_1$ га тенг ва у A_2 ва B_2 орасида тебранади. Заррачалар орасидаги ўртача масофа $r_2=(OA_2+OB_2)/2$. Потенциал эгри чизиқ носимметрик бўлганлиги учун заррачалар орасидаги ўртача масофа иситилган сари катталашиб боради: $0<T_1<T_2<T_3$ . . . . . бўлган вақтда $r_0<r_1<r_2<r_3$ . . . ,бу эса жисмларнинг иситишдан кенгайишига сабаб бўлади.

Ихтиёрий йўналиш бўйлаб панжара ичидаги заррачанинг тебранишини уч координата бўйича бўлаётган тебранишлар йиғиндиси каби ифодалаш мумкин. Бу ҳолда кристаллнинг ҳар бир заррачасига тебранма ҳаракатнинг учта эркинлик даражасини ёзиб қўйиш мумкин. Бир эркинлик даражасига тўғри келган ўртача кинетик энергия $1/2\ kT$ га тенг ва шу билан кинетик ва потенциал энергияларнинг ўртача қийматлари бирдай бўлганлиги учун тебранма ҳаракатдаги битта эркинлик даражасига $1/2kT+$ $+1/2kT=kT$ га тенг энергия тўғри келади, учта эркинлик даражасига эга заррача бўлса — $3kT$ га тенг энергия тўғри келади. Демак, бир моль (грамм-атом) кристалик модда

$$U=N_A\cdot 3kT=3RT \qquad (13.1)$$

га тенг ички энергияга эга.

Бундан ўзгармас ҳажмдаги моляр (атомавий) иссиқлик сиғимни топамиз [(10·10а) га қаранг]:

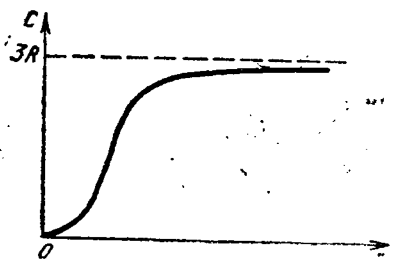
$$C_V = 3R \qquad (13.2)$$

(13.2)-формуладан қаттиқ жисмлар иссиқлик сиғимининг температурага боғлиқ бўлмаганлиги келиб чиқади (*Дюлонг ва Пти қонуни*). Бу уй температурасида кўп моддалар учун тажрибавий йўл билан аниқланган маълумотларга мос келади.

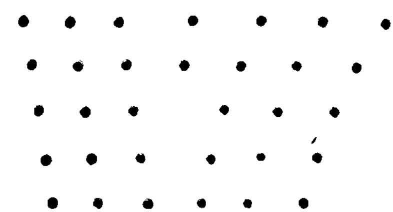
Бироқ кенг миқёсдаги қаттиқ моддалар иссиқлик сиғимини ўрганишда иссиқлик сиғимининг температурага, айниқса паст температураларга боғлиқ бўлганлигини кўриш мумкин (13.2-расм). Абсолют ноль яқинида барча қаттиқ жисмлар иссиқлик сиғими T^3 га пропорционал бўлади. Қаттиқ жисмлар иссиқлик сиғимининг ўзгаришини квантлар ҳақидаги билимга асосланиб тўғри баён этиш назариясини Дебай тавсия қилган эди.

Идеал фазовий панжарали кристалл реал кристаллар ўзидаги мавжуд дефектлари билан жиддий фарқ қиладилар.

Дефектлардан бири монокристаллнинг блокли структураси ҳисобланади; бу структура бутун бир панжара ҳосил қилмасдан, бир-бирига нисбатан дезориентацияланган (тартибсиз жойланган) жуда кўп майда блоклардан иборат бўлади. Бундай блокли структурани дислокациялар* — кристалик панжарада атомлар жойланиш тартибидаги бузилишлар — ҳосил қилади. Содда дис-



13.2-расм.



13.3-расм.

локация мисоли 13.3-расмда кўрсатилган (нуқталар билан панжара тугунларидаги атомлар белгиланган); панжара тўғри структурасини бузувчи қўшимча ярим текисликнинг пайдо бўлиши кўриниб турибди. Юқорида айтилгандан ташқари бўш жойлар (вакансиялар) ёки ёт жинс атомлар аралашмалари шаклида ҳам панжара дефектлари бўлиши мумкин. Вакансиялар ва кири-

* Дислокация сўзини ўзбек тилига таржима қилганда «силжиш» деган маънони беради. Термин дефектнинг панжара қисмлари силжиши натижасида ҳосил бўлганини кўрсатади.

тилган атомлар миқдори озгина бўлиши, аммо улар ҳосил қилган бузилишлар жуда катта бўлиши мумкин.

Панжара дефектлари монокристалларнинг блокли тузилишинигина тушунтирмай балки яна қатор бошқа ҳодисаларни ҳам тушунтиради. Масалан, дислокацияларнинг мавжудлиги кристалларнинг спирал бўлиб ўсишининг сабабчиси бўлади, киритилган атомлар аралашмасининг дислокациялар билан ўзаро таъсирланиши эскириш вақтида қотишмаларнинг қаттиқланишига сабаб бўлади. Бироқ, бу масалалар анча мураккаб бўлганликлари учун мазкур курсда кўриб чиқилмайди.

Ниҳоят, кристалларнинг бир хил хоссалари уларнинг структураларидаги тартиблилик бўлса, бошқалари эса уларда мавжуд дефектлар натижаси эканини уқдириб ўтиш зарур.

§ 2. АМОРФ ЖИСМЛАР

Аморф жисмларнинг асосий макроскопик хусусияти улар хоссаларининг табиий изотропиялиги ва жисмларнинг ички тузилишига кўра муайян аниқ эриш нуқтанинг йўқлигидадир. Аморф ҳолда бўлган жисмларнинг ички тузилишларидаги энг асосий хусусият кристалик ҳолат учун характерли бўлган узоқ тартиб деб аталувчи, яъни бутун жисм бўйича атом ва атомлар группаларининг барча йўналишлардаги жойланишларида жиддий такрорланишликнинг йўқлигидир. Шу билан бирга аморф ҳолдаги моддада яқин тартиб, яъни ёндош заррачалар жойланишида муайян тартиб мавжуддир. Масофа ортиши билан бу тартиб камайиб боради.

Ички тузилишда камроқ тартиблиликка эга бўлган ҳолда аморф жисмлар бир хил шароитларда кристаллардан кўра каттароқ солиштирма ҳажм, энтропия ва ички энергияга эга бўлади.

Бу жисмлар етарлича мувозанат ҳолатни фақат юқори температураларда ва кичик босимларда ҳосил қилади, бу — заррачаларнинг муайян равишда жойланишларига ва улар орасидаги масофаларга боғлиқдир. Шунинг учун ташқи таъсиротлар тезлигига кўра аморф жисмлар эластик ёки оқувчан бўлиб қолиши мумкин. Масалан, қора мум парчаси идиш ичига қуйилса, анча кўп вақт ўтгач у идиш шаклини эгаллайди, яъни оқувчанлик хоссаси рўй беради. Агар худди шу парча болға билан урилса, у мўрт жисм сингари ёрилиб кетади.

Аморф ҳолат ҳар хил химиявий табиатдаги моддаларга хосдир. Бундай ҳолатлардаги моддалар кичик босим ва юксак температураларда жуда ҳаракатчан бўлади: паст молекулавий моддалар суюқ ҳолда, юқори молекуляр бирикмалар юқори эластик ҳолатда бўлади. Температуранинг пасайиши ва босимнинг ортиши билан аморф моддаларнинг ҳаракатчанлиги камаяди ва уларнинг барчаси қаттиқ жисмларга айланади. Қаттиқ аморф ҳолатни бошқачасига шишасимон ҳолат дейилади.

§ 3. ПОЛИМЕРЛАР ТУЗИЛИШИНИНГ ХУСУСИЯТЛАРИ ВА ФИЗИКАВИЙ ХОССАЛАРИ

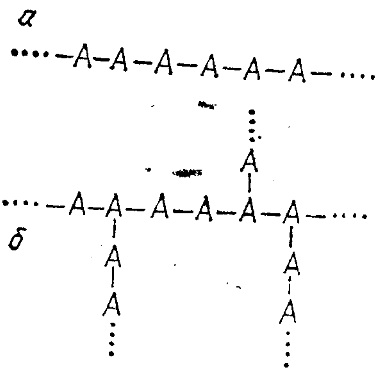
Молекулалари кўп атомлардан ёки химиявий боғланишлар билан бирлашган атом группаларидан тузилган узун занжирларни ташкил этувчи моддаларни полимер деб атайдилар. Полимерлар химиявий тузилишларининг ўзига хослиги уларнинг ўзига хос физикавий хоссаларга эга бўлишларига сабаб бўлади.

Полимерлар паст молекулали моддалардан ўзларининг механик хоссалари билан кескин фарқланади. Қаттиқ жисмлар учун қайтувчанлиги кичик бўлган деформацияларда катта мустаҳкамликнинг бўлиши характерли. Суюқликлар жуда кам мустаҳкамликка эга бўлган ҳолда чексиз деформацияланиш қобилиятига эгадирлар. Полимерлар — қаттиқ ва суюқ жисмларнинг механик хоссаларининг бирлашмасидан ташкил топган материаллардир: улар етарли даражада мустаҳкам ва шу билан бирга етарли даражада катта қайтувчан деформацияланиш қобилиятига ҳам эгадирлар.

Жун, тери (чарм, кўн), мугуз, соч, ипак, пахта, натурал каучук ва ш. ў. барча жонивор ва ўсимлик материаллар, шунингдек ҳар хил синтетик материаллар — синтетик каучук, пластмасса, тола ва бошқалар ҳам полимер материаллар ҳисобланади.

Табиий полимер материалларнинг кўпчилиги оқсилли моддалардандир: содда оқсиллар—альбумин, глобулин, мураккаб оқсиллар — казеин, кератинлар ва коллаген. Таркибида 85% гача углеводлар, асосан полисахаридлар мавжуд бўлган агар-агар ҳам полимердир.

Механик хоссалардан ташқари полимерлар бошқа алоҳида хоссаларга ҳам эгадирлар. Масалан, уларнинг эритмалари ўта ёпишқоқликка эгадир; эритма устидаги эритувчи буғнинг эластиклиги кам, осмотик босими эса, идеал эритмалар учун бўлиши керак бўлганидан каттароқ бўлади. Суюқликлар ичида полимерлар жуда шишиб, бўртиб кетиш қобилиятига эга бўладилар.



13.4-расм.

Полимерлар молекулаларининг узун занжирсимон бўлиб тузилиши парда (плёнка) ва толалар ҳосил бўлишига имкон беради.

Ҳозирги замонда полимерлардан кенг суратда диэлектрик сифатида фойдаланадилар.

Полиэтилен энг содда органик полимер занжири ёки макромолекуласи n га этилен молекулалари бириккан вақтда ҳосил бўладиган кўп марта такрорланувчи мономер ҳалқалардан тузилгандир:

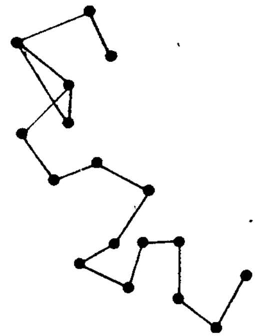
$$n.CH_2{=}CH_2 \rightarrow [-CH_2{-}CH_2-]n.$$

Полиэтилен—чизиғий полимерлар вакилидир. Чизиғий полимер деб макромолекулалари узун бир ўлчовли занжирлардан тузилган полимерларга айтилади (13.4-расм, *а*, *А* — мономер ҳалқа). Шохланган полимер асосий занжиридан ташқари ён шохларига — ён занжирларига (13.4-расм, *б*) эга бўлади.

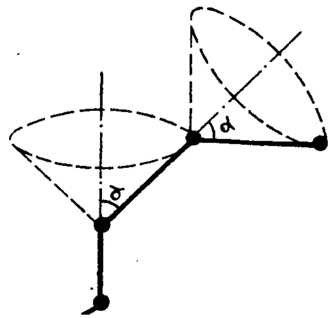
Бир-бирлари билан фазовий тўр ҳосил қилиб бириккан узун занжирлардан тузилган полимерлар тўрсимон ёки фазовий бўлиб, бир хил мономерлардан тузилгани эса — гомополимердир. Занжирлари ҳар хил мономер ҳалқалардан тузилган полимер бирикмаларини гетерополимерлардан ҳисоблайдилар.

Полимер макромолекуласи қаттиқ эмас. Иссиқлик ҳаракати туфайли ёки ташқи майдон таъсири остида унинг фазовий шакли ўзгариши мумкин. Бу ўзгаришларга конформацион айланишлар дейилади.

Эркин бўғимланган занжир (13.5-расм) охири жуда эластик бўлади. Бундай занжирда валент боғланишлар орасидаги бурчаклар аниқланган эмас ва улар атрофида эркин айланиш мумкин. Реал полимер занжирларда валентли бурчаклар α маълум қийматларга (13.6-расм) эга буладилар. Бу ҳол битта занжир ҳалқаси вазиятининг ундан олдинги занжир вазияти билан боғланишига сабабчи бўлади. Бундай занжир эркин бўғимланганидан кўра камроқ сон



13.5-расм.

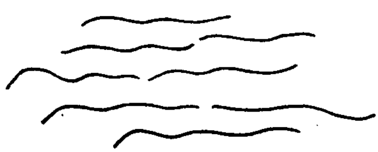


13.6-расм.

конформацияни қабул этади, лекин у ҳам жуда кўп эгилиш қобилиятига эга бўлади.

Макромолекулалар, ҳалқаларнинг иссиқлик ҳаракатлари туфайли, ҳар хил конформацияларни эгаллашлари мумкин. Бир томондан, четдагиси қаттиқ тўғри таёқча бўлиб, иккинчи томондан, дум-думалоқ бўлиб олган (глобула), эластик занжирдир.

Макромолекулалар, нисбий моляр массаси бир неча мингдан то юзлаб миллионлар ва ҳатто миллиардгача бўлган жуда зўр катталикка эга бўлишлари мумкин. Полимер молекулалари жуда катта бўлганлиги учун унинг қайнаш температураси жуда ҳам юқори бўлади (жуда катта молекулаларни буғлатиш учун жуда кўп энергия керак бўлади). Бундан барча полимерларда ажралиш температураси қайнаш температурасидан пастроқ бўлади ва уларда газ ҳолати вужудга кела олмайди. Демак, полимерлар конденсацияланган ҳолатда: суюқ ёки қаттиқ ҳолатда бўладилар. Қаттиқ полимерлар орасида аморф ва кристал полимерлар бўлади.



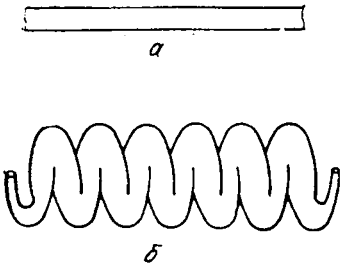
13.7-расм.

Юқори эластик ҳолатда аморф полимер жуда катта миқдорда (1000% гача) деформацияланиши мумкин, унда деформация қайтувчан бўлиб, қайтмасликка интилиш йўқ. Бу маънода юқори эластиклик — суюқ ва қаттиқ ҳолатлар ўртасидаги ҳолатдир. Полимернинг юқори эластик ҳолати макромолекулаларнинг эластиклиги (эгилувчан бўлиши) туфайли вужудга келади.

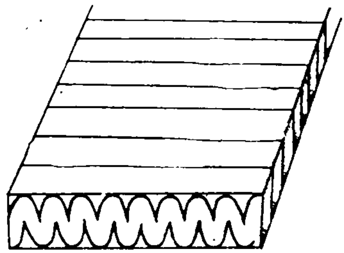
Макромолекулалар полимерларнинг барча ҳолатларида ҳамиша озми кўпми тартибланган бўладилар, бу эса ўтамолекуляр (надмолекулярный) деб аталувчи структураларга олиб келади.

Полимерлар фақат кристалл ҳолда эмас, балки аморф ҳолатларда ҳам жуда кўп хил ўтамолекуляр тузилишлари билан характерлидирлар. Бу структураларнинг бирламчи элементлари ё глобулаларга йиғилган ёки чизиқий макромолекулалардек чўзилиб кетган полимер молекулалардир. Глобулалар контактлашганларида кўп сонли, баъзан 1000 гача молекулалардан иборат, глобуляр структуралар ҳосил бўлишлари мумкин. Йиилган макромолекулалар контактлашган вақтда чўзинчоқ пачкалар (13.7-расм) пайдо бўлиб, улар флюктуацион табиатга эга бўладилар — бир хил жойларда йўқолиб, бошқаларида пайдо бўладилар, лекин шундай бўлсада анча узоқ яшайдилар.

Бирламчи энг содда ўтамолекуляр структуралар — полимер занжирлар пачкалари — ҳам нокристалик, ҳам кристалик полимерларда кузатилади. Кристалланиш вақтида пачкалар «лента» шаклида бўлиб йиғилади. 13.8-расмда тўғриланган (*а*) ва лентага йиғилган (*б*) пачкалар кўрсатилган. Сирт таранглигини камайтиришга интилиш лентанинг пластинкаларга тўпланишига (13.9-расм) ва сферолитлар (13.10-расм) ёки якка кристаллар ҳосил бўлишига (13.11-расм; тамаки некрози вирусининг якка кристали) олиб келади.

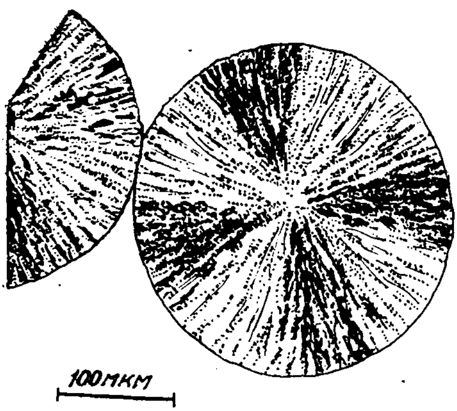


13.8-расм.

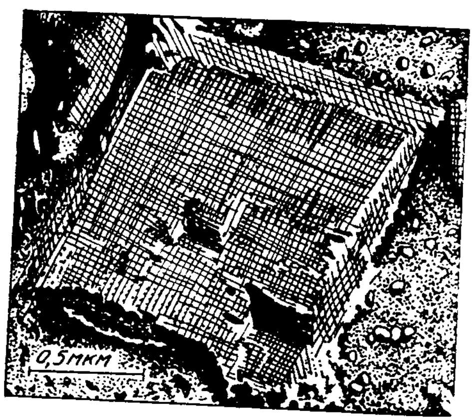


13.9-расм.

Кўпчилик ўтамолекуляр структураларни академик В. А. Каргин тўртга асосий типга ажратади: глобуляр структура (якка молекулалар ёки молекулалар группалари йиғилган), полосали структура (юқори эластик ҳолатдаги барча полимерлар структураси), фибриляр структураси (чизиқий пачкалар



13.10-расм.



13.11-расм.

ёки уларнинг чўзинчоқ формани сақловчи тўпламлари), йирик структура (сферолитлар, якка кристаллар ва ш. ў.).

Ўтамолекуляр структураларнинг формалари ва катталиклари полимерлар мустаҳкамлигига катта таъсир қилади. Масалан, кичик сферолитли нусхалар катта мустаҳкамликка ва яхши эластиклик хусусиятига эга бўлиб, йирик сферолитли нусхалар эса мўртлик билан бузилиб кетадилар.

Юқорида айтилганидек, полимер материаллар турли кўп қимматли физико-химиявий хоссалар тўплами билан характерланади. Шунинг учун улар фан ва техниканинг турли соҳаларида, шунингдек, медицинада ишлатилади.

Полимерлардан полиэтилен, поливинилхлорид ва бошқалар босим остида яхши ишланади, шунинг учун улардан ҳар хил медицина инсрументлари ва асбоблар ясайдилар. Тефлон, капрон ва лавсан, милар, силастик полимер юқори химиявий чидамлиликка эгадирлар, шу сабабли уларни организмнинг ички қисмлари протезларини (қон томирлар, юрак клапанлари, пайлар, кўзга ёпиштирилувчи линзалар ва ш. ў.) ясаш учун ишлатадилар. Поливинил — пирролидон полимер эритмаси — яхши қон плазмаси ўрнини босувчидир.

Ҳозирги вақтда сунъий буйрак ичида целлофандан ясалган мембраналар қўлланади. Бундай мембраналар оқсил ва қон ҳужайраси элементларини ушлаб қоладилар. Кислород ва углерод (II)-оксидга нисбатан жуда яхши ўтказувчанлик қобилиятига эга бўлган силикон мембранали сунъий ўпкалар ясаш экспериментлари ўтказилмоқда.

Тўқима елимлари масалан плёнка шаклида тез полимерланувчи алкил-α-цианокрилатлар, *n* — бутил — α — цианокрилат каби медицина учун жуда қизиқарлидир, улардан яраларни чок қўймасдан бекитиш учун фойдаланадилар.

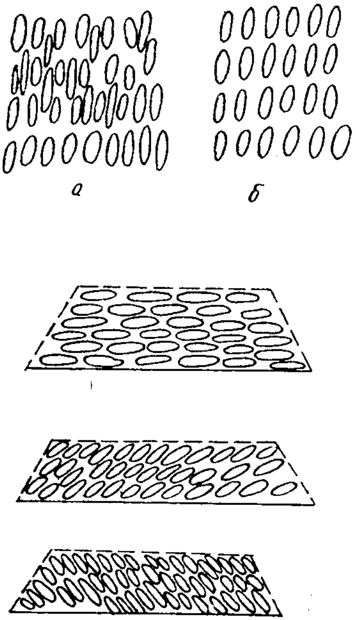
Юқори молекуляр бирикмаларга биополимерлар ҳам киради; биополимерлар барча тирик организмлар структурасининг асосини ташкил этиб, уларнинг ҳаётий фаолиятларида асосий роль ўйнайди — оқсиллар, нуклеин кислоталари, полисахаридлар, гликопротеидлар, липопротеидлар, гликолипидлар ва бошқалар шулар жумласидандир.

§ 4. СУЮҚ КРИСТАЛЛАР

Суюқ кристаллар деб ҳам суюқлиқлар, ҳам кристаллар хоссаларига эга бўлган моддаларга айтилади. Ўз механикавий хоссалари бўйича бу моддалар суюқлиқларга ўхшайди — улар оқади. Оптикавий хоссалари бўйича суюқ кристаллар ўзини анизотроп жисмлар — кристаллар каби тутади: қутбланиш текислигини айлантиради, нурларни икки марта синдира олади ва ш. ў. (II т. XXVIII бобга қаранг). Кўпинча модда суюқ кристалик хоссаларини муайян температуравий интервалдагина юзага чиқариб, ундан юқори температурада аморфсуюқ ҳолатда, паст температурада қаттиқ кристалик ҳолатда бўлади.

Физикавий хоссаларнинг икки хиллиги суюқ кристалларнинг ички тузилишларига боғлиқ. Уларда молекулаларнинг ўзаро жойланишлари аморф ва қаттиқ кристалик ҳолатлардаги оралиқ вазиятлардандир, аморф ҳолатда молекулалар жойланишида узоқ тартиб бутунлай йўқ бўлиб, қаттиқ кристалик ҳолатда молекулалар марказларининг жойланишида узоқ тартиб бор бўлганидек, молекулалар ориентациясида ҳам тартибланиш мавжуддир. Молекулалари чўзинчоқ таёқчалар ёки чўзилган пластинкаларга ўхшаш формаларга эга бўлган моддаларда суюқ кристалик ҳолат кузатилади. Молекулаларнинг бундай формаси уларнинг тартибланишига имконият беради.

Молекулавий тартибланишнинг характерига кўра суюқ кристалларни *нематик* ва *смектик* кристалларга ажратадилар. Нематик кристалларда молекулалар параллел ориентацияланган бўлади (13.12-расм, *а*), лекин уларнинг марказлари тартибсиз жойланган бўлади. Смектик кристаллар молекулалари тартиблашган параллел қатламлардан иборат бўлади (13.12-расм, *б*). Холестерик* типдаги кристаллар алоҳида синфни ташкил этади. Бундай кристалларда молекулалар смектик кристаллардагидек қатламларга тўплангандир. Бироқ ҳар бир қатлам ичидаги молекулалар ўқларининг параллел жойланиши нематик ҳолатни эслатади (13,12-расм, *в*). Қатламлар орасида ҳам тартиблик мавжуд: қўшни қатламларга ўтишда мазкур қатламнинг умумий ориентацияси илгариги қатламнинг умумий ориентациясига нисбатан кичик бурчакка ўзгаради (молекуляр структурада винтсимон буралиш кузатилади).



а *б* *в*

13.12-расм.

Холестерик суюқ кристалларнинг молекуляр структураси исталганча кичик ташқи таъсиротга жуда сезгир бўлади. Салгина ғалаёнлаш кучсиз молекуляраро кучларни бузиб юбориши мумкин, бу эса оптик хоссаларнинг сезиларли ўзгаришига олиб келади. Жумладан, температура кристалл рангига катта таъсир қилади, температурага кўра у ҳар хил рангга—бинафша рангидан қизилгача кириши мумкин. Суюқ кристалларнинг бундай хоссаларидан жисмларнинг турли қисмларидаги температура ўзгаришларини ўлчаш учун фойдалана бошланилмоқда. Бу ҳол медицинада веналарнинг, артерияларнинг ва атрофдаги бошқа муҳитдан кўра бошқачароқ иссиқлик бериш қобилиятига эга бўлган туркумлар жойланишларини қайд этишга имкон беради. Суюқ кристалик моддалар ҳар хил температурани сезувчи сигнализация қурилмаларида ҳам ишлатилади.

Суюқ кристалларнинг молекуляр структураси, демак, уларнинг оптик хоссалари, баъзи химиявий моддалар буғларининг жуда кам миқдори бор бўлганда ўзгаради. Бу моддалар изларини аниқлашда фойдаланишга имкон беради.

Суюқ кристалларни асбобларда ва соатларда рақамий индикатор сифатида ишлатилиши уларнинг оптик хоссаларини электр майдони таъсири остида ўзгаришига асослангандир.

Тирик организмлардаги суюқ кристаллар тўғрисидаги тадқиқот ишларини олиб бориш — кам ўрганилган, жуда катта, лекин

* Уларнинг тузилиши холестеринга эга бирикмалар учун характерлидир.

перспективали соҳадир. Мисол сифатида совет тадқиқотчиларининг қон зардобидаги суюқ кристалик ҳолатдаги холестерин эфирлари аралашмасининг температуравий соҳаси тўғрисидаги ишларини кўрсатиш мумкин. Патофизиолог С. С. Халатов артерияларда холестерин плакчаларининг вужудга келишида суюқ кристалик ҳолатда бўлувчи холестерин эфирлари аралашмалари ҳал қилувчи ролни ўйнайди деб, фараз қилади.

Ф. К. Горский бошчилигидаги совет олимларининг кўрсатишларича, организм учун тўйинган ва тўйинмаган кислоталар холестерин эфирларининг лозим бўлган нормал муносабатига аморф ҳолатдан суюқ кристалик ҳолатга ўтиш температурасининг одам танаси температурасидан пастроқ бўлиши мос келади. Холестерин эфирларининг ва тўйинган кислоталарнинг процентларда олинган миқдорларининг кўпайиши ўтиш температурасини унинг катталашиш томон силжитади. Бу ҳолда, одам танаси температурасида, қон зардобида, артерия деворларига нисбатан агрессив бўлган суюқ кристалик ҳолат вужудга келади.

§ 5. ҚАТТИҚ ЖИСМЛАРНИНГ ВА ОРГАНИЗМ ТЎҚИМАЛАРИНИНГ МЕХАНИКАВИЙ ХОССАЛАРИ

Жисм нуқталари ўзаро вазиятларининг ўзгаришига *деформация* дейилади. Деформациялар ташқи таъсиротлар ёки температура ўзгариши туфайли вужудга келиши мумкин.

Қаттиқ жисмларда кристалик панжара тугунларида жойлашган заррачалар деформация вақтларида янги жойларга силжийди. Бу силжишларга заррачалар ўртасидаги ўзаро таъсир кучлари тўсқинлик қилади, шунинг учун деформацияланган жисм ичида жисмга қўйилган ташқи кучларни мувозанатловчи, ички эластик кучлар ҳосил бўлади.

Агар деформация куч таъсири тўхтагандан кейин йўқолиб кетадиган бўлса, унга *эластик деформация* дейилади. Ноэластик деформациялар пластик бўлади: Нисбий деформация $\Delta x/x$ деформациянинг ўлчовидир, бу ерда x — деформацияни характерловчи катталикнинг дастлабки қиймати (масалан, нусха узунлиги l), Δx эса — шу катталикнинг деформация вақтидаги ўзгариши (масалан, чўзилиши Δl).

Кучланиш σ деб жисм кесим юзининг бирлигига тўғри келган эластик кучга айтилади:

$$\sigma = F_{\text{элас}}/S. \qquad (13.3)$$

Эластик деформациялар Гук қонунига бўйсунади; бу қонунга мувофиқ кучланиш нисбий деформацияга пропорционалдир;

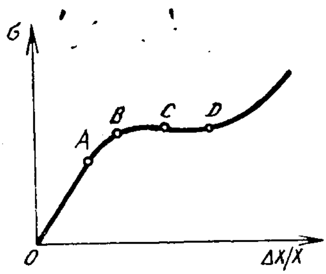
$$\sigma = E(\Delta x/x) \qquad (13.4)$$

Бу ерда E — *эластиклик модули,* у бирга тенг бўлганда нисбий деформацияланиш вақтида ҳосил бўладиган кучланишга тенг. Деформация бир ёқлама бўлганда катталик *E Юнг модули* дейилади.

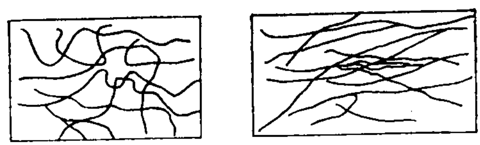
Гук қонуни одатда кичик деформациялар учун ўз маъносини сақлайди. Чўзилишнинг экспериментал эгри чизиғи 13.13-расмда келтирилган. *OA* участка эластик деформацияларга, *B* нуқта — *эластик чегарасига* мосдир; у ҳали кучланиш йўқотилгандан кейин қолувчи деформация (қолдиқ деформация) ўрнига эга бўлмаган вақтдаги максимал кучланишни характерлайди.

Чўзилиш эгри чизиғининг *CD* горизонтал участкаси *оқувчанлик чегарасига* мосдирки, бу чегарадаги кучланишдан кейинги деформация, кучланиш оширилмаса ҳам, ортиб бораверади. Ва, ниҳоят, бузилиш олдида чидаладиган энг катта нагрузка билан белгиланувчи кучланиш *мустаҳкамлик чегараси* бўлади.

Кристалик мономерларнинг ва полимер материалларнинг эластик хоссалари орасида жуда катта ва принципиал фарқ бор, масалан, мустаҳкамлик чегараси ичида пўлат 0,3% га қадар чўзилиши натижасида узилиб кетади, юмшоқ резиналарни эса



13.13-расм.



13.14-расм.

300% гача чўзиш мумкин. Бу ҳол юқори молекуляр бирикмаларда эластиклик механизмининг сифат жиҳатидан бошқача бўлиши билан боғлиқдир.

Юқорида айтилганидек кристалл қаттиқ жисмлар, масалан, пўлатнинг деформацияланиши вақтидаги эластик кучлар тўла равишда атомлар орасидаги масофаларнинг ўзгаришига боғлиқ бўлади. Юқори молекуляр бирикмаларнинг структураси номунтазамдир. Улар жуда узун, эластик, ажойиб равишда қийшайган молекулалардан иборатдир, молекулалар қисмлари шундай хаотик иссиқлик ҳаракатида бўладиларки, уларнинг формаси ва узунликлари доимо ўзгариб туради. Лекин ҳар бир берилган моментда деформацияланмаган нусхадаги молекулаларнинг кўпчилиги бўлиши мумкин бўлган узунликка яқин бўлган узунликка эга бўлади. Материалга нагрузка қўйилган вақтда унинг молекулалари тегишли йўналиш бўйича тўғриланади (13.14-расм) ва нусханинг узунлиги катталашади. Нагрузка олиб ташлангандан кейин хаотик иссиқлик ҳаракати натижасида ҳар бир молекуланинг узунлиги аввалги ҳолига қайтади ва нусха қисқаради.

Термодинамика нуқтаи назари бўйича бу икки эластик деформация хиллари орасидаги фарқ кристалик қаттиқ жисмлар эластиклиги, аввало, ички энергиянинг ўзгариши билан боғлиқ бўлиб, полимерлар эластиклиги эса полимер молекулаларининг тартибсизлигига боғлиқ бўлган энтропиянинг ўзгаришидан иборатдир.

Полимерларга хос эластикликка каучуксимон эластиклик дейилади. Бундай эластикликка тирик тўқималарнинг кўпгина компонентлари, масалан, эластин, абдиктин каби оқсиллар эгадир. Эластин артерия деворлари моддасининг, айниқса юракка яқин бўлганларининг талай қисмини ташкил этади. Резина каби у жуда чўзилувчан бўлади, унинг эластиклик модули $6 \cdot 10^5$ Па га яқин.

Мускуллар тўқимаси ҳам эластик ёпишқоқ материалга ўхшаш бўлади.

Материал мустаҳкамлигини характерловчи катталик мазкур нусхани бузилишга олиб келувчи минимал кучланишдир. Биолог хирурглар биологик тўқималар мустаҳкамлигини билишлари зарур. Бу тўқималар мустаҳкамлигини аниқлаш усуллари оддий материаллар мустаҳкамлигини аниқлаш усулларидай. Биологик тўқималарнинг механикавий таъсиротларга чидамлилигини ўрганувчи фан тармоғига биологик материаллар қаршилиги* (биосопромат) дейилади.

Коллаген ва суякнинг механикавий хоссалари тўғрисидаги далилларни келтирамиз (пўлат солиштириш учун берилган):

Материал	Эластиклик модули	Мустаҳкамлик чегараси
Коллаген	10^9	$(5 \div 10) \cdot 10^7$
Суяк	10^{10}	10^8
Юмшоқ пўлат	$2 \cdot 10^{11}$	$5 \cdot 10^8$

Коллагенлар — толали оқсиллар группаси бўлиб, улар пайларнинг, кўпчилик боғламлар ва шунга ўхшашларнинг бош компонентларини ташкил этади. Жадвалда келтирилган маълумотлар толалар бўйлаб чўзилган коллаген учундир. Суяк остеонлар ўқлари бўйлаб чўзилган.

XIV БОБ

СУЮҚЛИҚЛАР

Суюқлиқларга ўз хоссалари билан газлар ва қаттиқ жисмлар хоссалари орасидаги вазиятни эгалловчи моддалар киради.

* Матқар (сопромат) — материаллар қаршилиги (сопротивление материалов) — материалларнинг механикавий таъсиротларга чидамлилигини ўрганувчи фан тармоғи.

§ 1. СУЮҚЛИҚЛАР МОЛЕКУЛЯР ТУЗИЛИШИНИНГ ХУСУСИЯТЛАРИ

Оддий суюқлиқлар изотропдирлар, структуралари жиҳатидан улар аморф жисмлардир. Суюқлиқларнинг ички тузилишлари учун яқин тартиб (бир-бирига нисбатан энг яқин турган заррачалар жойланишидаги тартиблик) характерлидир. Молекулалар орасидаги масофалар кичик, ўзаро таъсир кучлари анча катта, бу эса суюқлиқларнинг кам сиқилишига сабаб бўлади: молекулалар орасидаги масофанинг озгина камайиши катта молекулалараро итарилиш кучларини вужудга келтиради.

Қаттиқ жисмлар сингари суюқлиқлар кам сиқилувчан, катта зичликка эгадир; газларга ўхшаш турган идишларининг формасини эгаллайди. Суюқлиқлар хоссаларининг бундай характери улардаги молекулалар иссиқлик ҳаракатининг хусусиятларига боғлиқдир. Газларда молекулалар тартибсиз ҳаракат қилади, йўлнинг кичик бўлагида уларнинг ҳаракати илгариланма ҳаракат бўлиб, заррачалар жойланишида биронта тартиб бўлмайди. Кристалл жисмларда заррачалар муайян мувозанат вазиятлари — кристалик панжара тугунлари атрофида тебраниб туради. Я. И. Френкель назарияси бўйича суюқлиқ молекулалари, қаттиқ жисм заррачалари сингари, мувозанат вазиятлар ёнида тебранади, бироқ бу мувозанат вазиятлар доимий бўлмайди. «Ўтроқ ҳаёт» вақти деб аталувчи бирор вақт ўтгач, молекула бирданига қўшни молекулалар орасидаги ўртача масофага тенг масофага сакраб ўтиб, янги мувозанат ҳолатга ўтади.

Суюқлиқ молекулалари орасидаги ўртача масофа δ ни ҳисоблаймиз: $\delta^3 \approx 1/n$ бўлгани учун [бу ерда n — суюқлиқнинг ҳажм бирлигидаги молекулалар сони бўлиб, у $n = N_A\, \rho/M$ га тенг (N_A — Авогадро доимийси, ρ — суюқлиқ зичлиги, M — моляр масса)],

$$\delta \approx 1/\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{M/N_A\, \rho} \qquad (14.1)$$

бўлади. δ катталигининг тартиби 10^{-10} *м* ни ташкил этади; масалан, сув учун $\delta \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м.

Молекуланинг ўртача «Ўтроқ ҳаёт» вақтини *релаксация* вақти τ деб атайдилар. Температура ортиши ва босим пасайиши билан релаксация вақти жуда камайиб кетади, бу эса суюқлиқ молекулаларининг серҳаракат ва кам қовушоқ бўлишини таъминлайди.

Суюқлиқ молекуласининг бир мувозанат вазиятдан иккинчисига сакраб ўта олиши учун унинг атрофидаги молекулалар билан бўлган боғланиши бузилиб, бошқа қўшнилар билан янги боғланишлари ҳосил бўлиши керак. Боғланишлар бузилиш процесси энергия E_a сарф этилишини талаб қилади, бу энергия янги боғланишлар ҳосил бўлиш вақтида ажралади. Молекуланинг бир мувозанат ҳолатдан иккинчисига бундай ўтиши E_a баландликдаги потенциал тўсиқ (барьер) орқали ўтиши демакдир. Қатталик E_a ни *активлаш энергияси* деб атайдилар. Потенциал тўсиқни енгишга керак бўлган энергияни молекула қўшни молекулалар иссиқлик ҳаракатининг энергияси ҳисобига олади.

Релаксация вақтининг суюқлиқ температураси ва активлаш энергияси билан боғланиши. Больцман тақсимотидан келиб чиқадиган формула билан ифодаланади:

$$\tau = \tau_0 e^{E_a/kT} \qquad (14.2)$$

бу ерда τ_0 — молекуланинг мувозанат вазияти ёнида тебранишининг ўртача даври.

Ўртача силжиш δ ни ва ўртача вақт τ ни била туриб, суюқликда молекулалар ҳаракатининг ўртача тезлигини аниқлаш мумкин:

$$\bar{v} = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\delta}{\tau_0} e^{-E_a/kT} \qquad (14.3)$$

Бу тезлик молекулаларнинг газ ичидаги ҳаракати ўртача тезлигига нисбатан кичикдир. Масалан, сув молекулалари учун у шу температурадаги буғнинг молекулалари тезлигидан 20 марта кичикдир.

§ 2. СУЮҚЛИҚЛАРДА КЎЧИШ ҲОДИСАЛАРИ

Суюқликлар ичидаги кўчиш ҳодисалари, газлар ичидаги мос ҳодисалардек, (11.8), (8.9) ва (11.5)-тенгламаларга бўйсунадилар. Лекин суюқлиқлар ва газлар ичидаги молекулалар иссиқлик ҳаракатининг характеридаги фарқ кўчиш ҳодисалари механизмларининг ҳам фарқланишига ва D, η, Λ коэффициентларнинг турлича ифодаланишларига олиб келади.

Суюқлиқлардаги кўчиш ҳодисаларининг хусусиятларини кўриб чиқайлик. Агар газ молекулаларининг ўртача тезлиги ўрнида (14.3)-формула бўйича топиладиган ўртача тезликни, эркин югуришнинг ўртача тезлиги ўрнида — молекуланинг бир мувозанат вазиятдан иккинчисига сакрашда босган ва (14.1)-формула бўйича аниқланадиган ўртача масофа қабул қилинадиган бўлса, суюқлиқдаги диффузия ҳодисасини газдаги диффузия процессига ўхшатиш мумкин. У ҳолда диффузия коэффициенти учун қуйидагига эга бўламиз:

$$D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda} = \frac{1}{3}\frac{\delta^2}{\tau_0} e^{-E_a/kT} \qquad (14.4)$$

Бундан температура ортиши билан суюқлиқлар диффузия коэффициентининг жуда катталашиб кетганлиги кўринади. Унча юқори бўлмаган, масалан уй температурасида, суюқлиқлардаги диффузия коэффициенти газлардаги диффузия коэффициентига кўра жуда кичик бўлади. Диффузия коэффициентларининг кичиклиги суюқлиқларда концентрация текисланишининг узоқ давомли бўлишини тушунтиради. Мана шу сабабли тез бир жинсли эритма олиш учун уни аралаштириб туриш керак. Акс ҳолда суюқлиқларда концентрация текисланиши суткалар ва ойларча давом этиши мумкин.

Суюқлиқ қовушоқлигининг температура билан боғланиши мураккаб характерга эга. Суюқлиқ молекулаларининг мувозанат вазиятлари ёнида, уларни ҳар τ вақтда ўзгартиб, тебраниб турганликлари кўрсатилган эди. Молекулалар қанча ўз мувозанат вазиятларини тез ўзгартиб турадиган бўлсалар, суюқлиқ шунча оқувчан ва кам ёпишқоқ бўлади, яъни ёпишқоқлик τ га тўғри пропорционал бўлиши керак. Қовушоқликни ҳисоблаш (14.2) ни назарда тутиб,

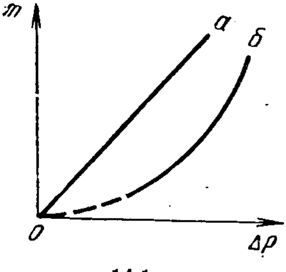
$$\eta \sim \tau_0 e^{-E_a/kT} \tag{14.5}$$

формулага олиб келади. Бу олинган боғланиш тажриба билан яхши мосланади ва суюқлиқлар ёпишқоқлигининг температура ортиши билан камайганлигини кўрсатади, газлар ёпишқоқлиги бўлса $\sqrt{T}$ га пропорционал бўлиб катталашади.

Катта босимларда суюқлиқлар қовушоқлиги босим катталашиши билан ортиб боради, бу релаксация вақтини катталаштирувчи активлаш энергиясининг кўпайиши билан тушунтирилади.

Кўп суюқлиқлар учун қовушоқлик тезлик градиентига боғлиқ бўлмайди, бундай суюқлиқлар Ньютон тенгламаси (8.9) га бўйсунадилар ва уларни *ньютон суюқлиғи* деб атайдилар. (8.9)-га бўйсунмайдиган суюқлиқларга *ноньютон суюқлиғи* дейилади. Баъзан Ньютон суюқлиқларининг қовушоқлигига нормал қовушоқлик, ноньютонларникига — аномал қовушоқлик дейилади.

Суяқлиқлар, масалан, полимер эритмалари каби мураккаб ва йирик молекулалардан иборат бўлган молекулалар ёки заррачалар уланишлари туфайли фазовий структуралар ҳосил қилувчи суюқлиқлар ноньютон суюқлиқлар ҳисобланади. Бошқа бир хил шароитларда уларнинг қовушоқлиги оддий суюқлиқларникидан анча катта бўлади. Қовушоқликнинг катталанишига сабаб шундадирки, бундай суюқлиқларнинг оқиши вақтида ташқи кучларнинг бажарадиган иши ҳақиқий, Ньютон қовушоқлигинигина енгишга сарф қилинмай суюқлиқ структурасини ҳам бузишга сарфланади. Капилляр орқали оқиб ўтувчи Ньютон суюқлиғининг массаси m, Пуазейлнинг (8.16)-формуласига мувофиқ, босимлар айирмаси Δp га пропорционалдир (14.1-расм). Структураланган ноньютон суюқлиқларнинг оқиши бу қонунга бўйсунмайди, бунга сабаб бундай суюқлиқлар қовушоқлигининг доимий бўлмаслигидир (Ньютон ва ноньютон суюқлиқларига мос *а* ва *б* эгри чизиқларини солиштириб кўринг).

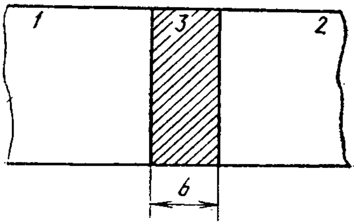


14.1-расм.

Суюқлиқларда иссиқлик ўтказишликнинг механизми газлардаги иссиқлик ўтказиш механизмидан анча кўп фарқ қилади ва муайян даражада қаттиқ жисмлардаги иссиқлик ўтказишликка ўхшайди: суюқликнинг температураси юқорироқ бўлган қисмларида молекулалар каттароқ амплитудалар билан тебранадилар, бу тебранишлар қўшни молекулаларга узатилади, натижада иссиқлик ҳаракатининг энергияси қатламдан-қатламга тарқалади. Бу суюқлиқларда иссиқлик ўтказишликнинг аста-секин (паст) бўлишига олиб келади. Суюқлиқларда иссиқлик ўтказишликни тезлаштириш учун уларни ё аралаштириб туриш ёки конвекция юз берадиган шароитни вужудга келтириш лозим.

§ 3. ҲУЖАЙРАЛАР ВА ТЎҚИМАЛАРДА ДИФФУЗИЯ

Биологик система ва шунингдек унинг қисмлари атрофдаги муҳит билан ўзаро таъсирланган вақтда у ё бу даражада кўчиш ҳодисалари рўй бериши мумкин. Диффузия модда алмашинувида, хусусан ҳужайра ва тўқима суюқлиқлари орасидаги алмашишда, алоҳида роль ўйнайди. Бу процессларда тасвирланганидан кўра диффузиянинг тўсиқлар (мембраналар) билан ажратилган суюқлиқлар орасида бўлиши характерлидир.



14.2-расм.

14.2-расмда схематик равишда биологик мембрана 3 билан ажратилган биологик системанинг икки қисми 1 ва 2 кўрсатилган. Бу атрофдаги муҳитдан ажратилган ҳужайра ёки бир-бирларидан ажралган ҳужайралар қисмлари ва ш. ў. бўлиши мумкин.

Бу ҳол учун Фик тенгламасини алмаштириш мақсадга мувофиқдир. Биринчидан (11.8)-дан

$$\frac{dM}{dt} = D\frac{d\rho}{dx}S \quad \text{га эгамиз.} \qquad (14.6)$$

Одатда зичлик ўрнида диффузияланувчи модда концентрацияси олинадиган бўлгани учун зичлик градиенти $d\rho/dx$ ни ҳам концентрация градиенти билан алмаштирадилар. Агар концентрация масофада чизиғий қонун бўйича ўзгарадиган бўлса, у ҳолда концентрация градиентини мембрананинг ҳар икки томонида диффузияланувчи модданинг мос концентрациялари c_1 ва c_2 лар айирмасининг мембрана қалинлиги b га нисбати каби ёзиш мумкин:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{c_2 - c_1}{b}$$

Бу тенгликни (14.6)-га қўйсак,

$$\frac{dM}{dt}=a_1\frac{c_2-c_1}{b}S \text{ ёки } \frac{dM}{dt}=aS(c_2-c_1) \quad (14.7)$$

га эга бўламиз, бу ерда $a=a_1/b$ — мембрананинг сингдирувчанлик константаси*.

Биологик системаларда модданинг сингиши концентрация градиентига қарши йўналишда ҳам рўй бериши мумкин (актив кўчиш ёки мажбурий диффузия). Нейтрал заррачалар (молекулалар, атомлар) диффузияланганлари каби зарядланганлари (ионлар, электронлар) ҳам диффузияланишлари мумкин, шу билан бирга кейингиларнинг диффузияси улардаги концентрация фарқигагина боғлиқ бўлмай, электр майдонларига ҳам боғлиқдир. Ионлар диффузиясининг ўзи биопотенциалларнинг ҳосил бўлиш сабаби эканлигини айтиб ўтиш фойдалидир (II т. XV боб § 4 га қаранг).

§ 4. БИОЛОГИК СИСТЕМАЛАРНИНГ ҚОВУШОҚЛИГИ. ҚОН ҚОВУШОҚЛИГИНИ КЛИНИКАВИЙ МЕТОД БИЛАН АНИҚЛАШ

Биологик системаларнинг қовушоқлиги асосан унинг структуравий қисми билан белгиланади. Масалан, ҳужайра ичидаги суюқликнинг — цитоплазманинг қовушоқлиги унинг таркибига кирувчи полимерлар структураси билан шартланади ва аномал бўлади.

Биологияда микроқовушоқликни ўлчаш методлари одатда муҳитнинг кичик ҳажмлардаги қовушоқлигини ўлчаш методларига киради. Методлардан бири центрифугалаш вақтида гранулалар силжишининг тезлигини кузатишдан, иккинчиси қовушоқ суюқлиқ ичида Броун зарраларининг ўртача силжишини ўлчашдан иборатдир.

Цитоплазманинг қовушоқлиги 2 дан то 50 сП гача бўлган чегарада ўзгариб туради ва ҳужайра циклининг даврларига боғлиқ бўлади. Бундан ташқари, қовушоқлик ҳужайранинг ҳар хил қисмида турлича бўлади. Қовушоқликнинг температура билан боғланиши мураккабдир: температурани 40—50°С дан юқорироқ оширганда ва 12—15°Сдан камроқ пасайтирганда цитоплазма қовушоқлиги ортади.

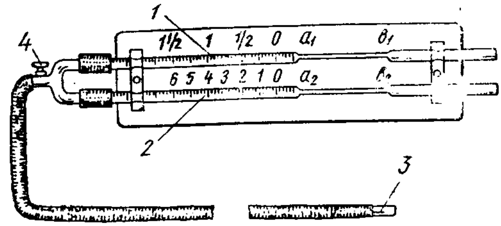
Ньютон суюқликларининг қовушоқ оқиш қонунларига ликвор, лимфа, қон плазмаси каби суюқликлар яхши бўйсунади. Уларнинг қовушоқлиги VIII боб § 6-да баён этилган оддий вискозиметрия методлари билан ўлчанади.

---

* Биофизикада модданинг диффузияси ўрнида, аксарият, мембранал ҳужайра, тўқималарнинг сингдирувчанлиги ҳақида гапирадилар, шу билан сингдирувчанлик деганда айтилган биологик системаларнинг эритмаларни ва эриган моддаларни ўтказиш қобилияти тушунилади.

Қон ноньютон суюқликларидан ҳисобланади, чунки у структураланган полимер тузилмаларидан иборат оқсиллар ва қон ҳужайраларига эгадир.

Ҳозирги вақтда клиникада қон қовушоқлигини аниқлаш учун икки капилляри бўлган Гесс вискозиметридан фойдаланадилар. Унинг тузилиш схемаси 14.3-расмда кўрсатилган. Икки бир хил a_1 b_1 ва a_2 b_2 капилляр иккита 1 ва 2 найчалар билан бирлашган. Резина нок воситаси билан ёки найча учи 3 орқали оғиз билан ҳаво сўриб, кран 4 ли тройник ёрдамида, навбатма-навбат капилляр a_1 b_1 ва найча 1 ни *0* белгигача дистилланган сув билан, капилляр a_2 b_2 ва найча 2 ни *0* белгигача текширилувчи қон билан тўлатадилар. Бундан кейин худди шу йўл билан иккала суюқликни ҳам, то қон рақам 1 гача, сув эса — ўз найчасида бошқа биронта белгига етиб боргунча силжитадилар. Сув ва қоннинг оқиш шароитлари бир хилда бўлиб қовушоқликлари ҳар хил бўлганлигидан 1 ва 2 найчаларда тўлдирилган ҳажмлар ҳар хил бўлади. Қон ноньютон суюқлиғи бўлса ҳам, муайян тақрибийлик билан Пуазейль (8.16)-формуласидан фойдаланиб муқаррар пропорцияни ёзамиз:



14.3-расм.

$$Q_с : Q_қ = \eta_қ : \eta_с \cdot \qquad (14.8)$$

Текис оқиб турган суюқликнинг умумий ҳажми V билан Q формула $V = Qt$ орқали (бу ерда t — вақт) боғланганлигини ҳисобга олсак, (14.8)-ўрнига

$$V_с : V_қ = \eta_қ : \eta_с \qquad (14.9)$$

га эга бўламиз, бу ерда $V_қ$ — қоннинг найча 2 даги 0 дан 1 белгигача бўлган ҳажми, $V_с$ — сувнинг найча 1 даги 0 белгидан ўлчаш вақтида олинган белгигача бўлган ҳажми, $\eta_қ$ ва $\eta_с$ — тегишлича қон ва сувнинг қовушоқликлари. Қон қовушоқлигининг шу температурадаги сув қовушоқлигига бўлган нисбати $\eta_қ/\eta_с$ га *қоннинг нисбий қовушоқлиги* дейилади.

Гесс вискозиметрида қоннинг ҳажми доимо бир хил, сув ҳажми эса найча *1* даги белгилар бўйича ҳисобланади, шунинг учун қон нисбий қовушоқлигининг қиймати бевосита топилади. Ҳисоблашни қулайлаштириш мақсадида *1* ва *2*-найчалар кесимларини шунчалик ҳар хил қиладиларки, қон ва сувнинг ҳажмлари турлича бўлишига қарамай уларнинг найчалардаги сатҳлари тахминан бирдай бўлади.

Норма бўйича одам қонининг қовушоқлиги 4—5 сП, патология вақтида 1,7 дан 22,9 сП гача ўзгаради, бу эса эритроцитлар чўкиш реакциясига (ЭЧР, русча РОЭ — реакция оседания эритроцитов) таъсир қилади. Веналардаги қон артериялардагидан бир оз каттароқ қовушоқликка эга бўлади. Оғир жисмоний иш қилиш натижасида қон қовушоқлиги катталашади. Баъзи инфекцион касалликлар қовушоқликни оширади, бошқалари — қорин тифи (ич терлама) ва туберкулёз (сил) — камайтиради.

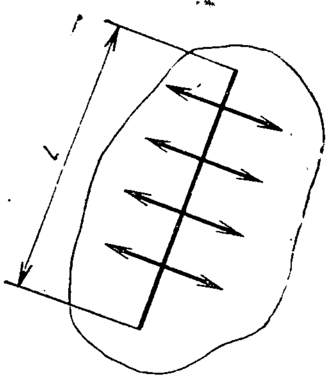
§ 5. СИРТ ТАРАНГЛИГИ

Суюқлиқ ва унинг тўйинган буғи, икки аралашмовчи суюқлиқларни, суюқлиқ ва қаттиқ жисмни бир-бирларидан ажратувчи сиртларни чегараловчи муҳитларда молекулалараро ҳар хил ўзаро таъсирланиш бўлганлиги туфайли куч вужудга келади.

Суюқлиқ ҳажми ичида жойланган ҳар бир молекула қўшни молекулалар билан ўралган ва улар билан ўзаро таъсиротда бўлади, лекин бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг. Икки муҳит чегарасининг яқинида турган молекулага, унинг ўраб олиниши бир текисда бўлмагани натижасида, суюқлиқнинг бошқа молекулалари томонидан компенсацияланмаган куч таъсир этади. Шунга кўра молекулаларни ҳажм ичидан сиртки қатламга силжитиш учун иш бажариш зарур бўлади. *Сирт таранглиги* σ ўзгармас температурада суюқлиқнинг сирт бирлигини ҳосил қилиш учун сарф қилиниши керак бўлган иш билан аниқланади;

$$\sigma = A/S. \tag{14.10}$$

Суюқлиқлар турғун мувозанатда бўлишлари учун улардаги сиртқи энергия минимал миқдорда бўлиши шарт, шунга кўра ташқи кучлар йўқлигида ёки вазнсизлик ҳолатида суюқлиқнинг сирти мазкур ҳажмда минимал қийматни қабул қилишга интилади ва шар формасини эгаллайди.



14.4-расм.

Сирт таранглиги ёлғиз энергетик мулоҳазаларга асосан аниқланмайди. Суюқлиқ сирт қатламининг қисқаришга интилиши бу қатламда сирт таранглик кучлари деб аталувчи уринма кучларнинг борлигини кўрсатади. Агар суюқлиқ сирти устида l узунликдаги бирорта кесма танланиб олинса (14.4.-расм), унда бу кучларни кесмага перпендикуляр бўлган стрелкалар билан шартли равишда кўрсатиш мумкин. Сирт таранглиги кесма устида таъсир қилиб турган сирт таранглик кучи F билан кесма узунлиги l нинг нисбатига тенг:

$$\sigma = F/l. \tag{14.11}$$

Физиканинг мактаб курсидан бу ҳар икки (14.10) ва (14.11)-таърифнинг айнан бир эканлиги маълум:

Температура 20°C бўлган вақтда баъзи суюқликлар учун сирт таранглигининг қийматларини (Н/мларда) келтирамиз:

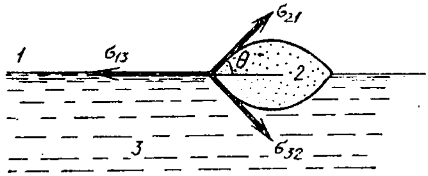
Сув	0,0725	Симоб	0,47
Ўт	0,048	Спирт	0,022
Сут	0,05	Қон зардоби	0,06
Сийдик	0,066	Эфир	0,017

Сирт таранглиги температурага боғлиқдир. Критик температурадан узоқда унинг қиймати температура оширилганда чизиғий бўлиб камаяди. Суюқлик ичига сирт қатламининг энергиясини камайтирувчи сирт-актив моддалар киритилиши билан сирт таранглигини пасайтириш мумкин.

§ 6. ҲЎЛЛАНИШ ВА ҲЎЛЛАНМАСЛИК. КАПИЛЛЯР ҲОДИСАЛАР

Турли муҳитлар туташган чегарада *ҳўлланиш* ва *ҳўлланмаслик* ҳодисаларини кузатиш мумкин.

Суюқлик томчисининг бошқа, у билан аралашмайдиган, суюқлик сирти устидаги (14.5-расм) ва суюқлик томчиси қаттиқ жисм сиртидаги (14.6 ва 14.7-расм) ҳатти-ҳаракатини кўриб чиқамиз.

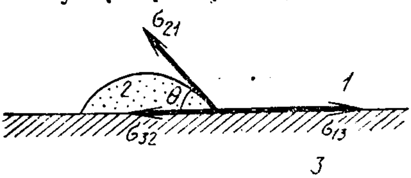


14.5-расм.

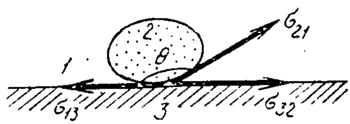
Ҳар икки муҳитни ажратувчи сиртларда сирт таранглик кучлари таъсир этади. Томчи айланаси узунлиги бирлигига, сон жиҳатдан сирт тарангликлари σ_{13}, σ_{21}, σ_{32} ларга мос учта куч қўйилган. Ҳўлланувчи сирт ва суюқлик сиртига чизилган уринма орасида суюқлик ичи орқали ўлчанувчи Θ бурчакка *чегаравий бурчак* дейилади. Катталик

$$\cos\Theta = (\sigma_{32} - \sigma_{13})/\sigma_{21} \qquad \textbf{(14.12)}$$

ни ҳўлланиш ўлчови сифатида қабул қилинади. Агар $\sigma_{32} > \sigma_{13}$ бўлса, яъни суюқлик ва қаттиқ жисм молекулалари орасидаги ўзаро таъ-



14.6-расм.



14.7-расм.

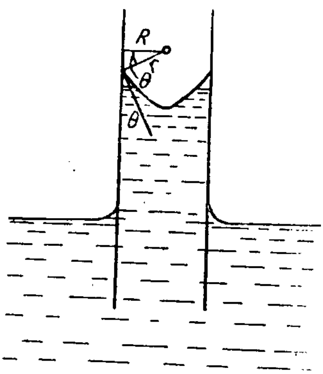
сир кучлари қаттиқ жисм ва газ молекулалари орасидагидан катта бўлса, у ҳолда $\Theta < \pi/2$ бўлади ва суюқлик қаттиқ жисмни ҳўллайди, бу ҳолда унинг сирти гидрофил сирт дейилади (14.7-расмга қаранг). Ҳўлламовчи суюқлик қаттиқ жисмдаги кичик тешиклардан оқиб чиқмайди. $\sigma_{32}-\sigma_{13}=\sigma_{21}$ бўлганда молекулалараро кучлар тўла компенсацияланган, $\Theta=0$ бўлади. Бу ҳолда мувозанат бўлиши мумкин эмас ва томчи қаттиқ жисм сиртида унинг бутун сиртини қоплагунча ёки мономолекуляр қатлам ҳосил бўлгунча ёйилиб оқади. Бундай ҳол ҳўлланишнинг идеал кўриниши бўлади. Спиртнинг ёки сувнинг тоза шиша сиртида, нефтнинг сув устида ёйилиб кетишлари ва бошқаларни муайян тақрибийлик билан шу жумладан ҳисоблаш мумкиндир.

Сирт таранглик кучлари таъсири остида суюқликнинг сирт қатлами эгриланади, бу ҳол суюқликда қўшимча босим пайдо бўлишига сабаб бўлади. Сиртқи қатлам эластик қобиққа (масалан, резина пардасига) ўхшайди, ортиқча босим эгриланган сирт ботиқлиги томонга йўналади. Эгрилик радиуси r бўлган сферик сиртнинг ортиқча босими

$$\Delta p=2\sigma/r \qquad \textbf{(14.13)}$$

га тенг.

Сиртнинг эгриланиши (мениск), хусусан, ингичка (капилляр) найчаларда уларнинг сиртлари суюқлик томонидан ҳўлланиши ёки ҳўлланмаслиги натижасида пайдо бўлади. Ҳўлланиш вақтида ботиқ мениск (14.8-расм) ҳосил бўлади. Юқорида айтилганига мувофиқ сирт эгрилигининг ҳосил қилган ортиқча босими Δp суюқликдан ташқарига, яъни юқорига йўналган бўлади ва суюқликнинг капилляр бўйлаб кўтарилишига сабаб бўлади. Расмда кўрсатилган бу мувозанат ҳолат оғирлик босими ρgh ортиқча босимни тенглаштирганда вужудга келади.



14.8-расм.

14.8-расмдан $r=R/\cos\Theta$ эканлиги кўринади. бу ерда R — капиллярнинг радиуси. Шунинг учун (14.13)-га асосан

$$\Delta p=2\sigma\cos\Theta/R \qquad \textbf{(14.14)}$$

га эга бўламиз.

Ортиқча ва оғирлик босимларини тенглаштирамиз:

$$\rho gh=2\sigma\cos\Theta/R.$$

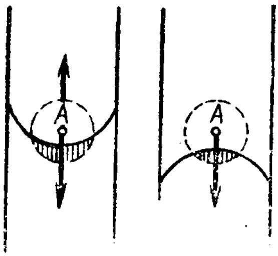
Бундан капиллярда суюқликнинг кўтарилиш баландлиги

$$h=\frac{2\sigma\cos\Theta}{R\rho g}, \qquad \textbf{(14.15)}$$

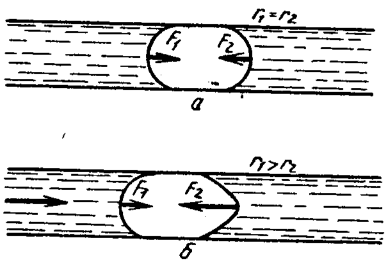
яъни у суюқлик хоссаларига ва капиллярнинг материалига ҳамда унинг радиусига боғлиқдир.

Ҳўлланмайдиган ҳолда $\cos\Theta<0$ бўлади ва (14.15)-формула капиллярдаги суюқликнинг пастга тушиш баландлигини кўрсатади.

Капилляр ҳодисалар буғларнинг конденсацияланиш, суюқликларнинг қайнаш, кристаллизацияланиш шароитлари ва ҳ. к ни белгилайди. Масалан, суюқликнинг ботиқ мениски устидаги буғ молекуласига (14.9-расмдаги нуқта *А*) қабариқ мениск бўлган вақтдагидан кўра суюқликнинг кўпроқ молекулалари, демак, каттароқ куч таъсир этади. Бу 14.9-расмда яхши кўринади, унда пунктир билан шартли равишда молекулаларнинг таъсир қилиш сфераси, штрихлар билан молекулалари буғнинг танланган молекуласини тортувчи суюқликнинг ҳажми кўрсатилган. Бунинг натижасида ҳўлланувчи ингичка найчаларда, ҳатто ҳавонинг нисбатан кам намлигида ҳам капилляр конденсация ҳосил бўлади. Шу туфайли ғовак моддалар буғлардаги суюқликларнинг анча миқдорини тутиб қолишлари мумкин, бу эса зах уйларда ич кийимларнинг, пахтанинг намланишига олиб келади, гигроскопик жисмларнинг куритилишини қийинлаштиради, тупроқда намликнинг сақланишига ёрдам беради ва ҳ. к. Аксинча, ҳўлланмайдиган суюқликлар ғовак жисмлар ичига ўта олмайди. Масалан, ёғ билан мойланган қушлар патига сув юқмаслиги шунга боғлиқ.



14.9-расм.



14.10-расм.

Ичида суюқлик бўлган капиллярдаги ҳаво пуфакчасининг ҳатти-ҳаракатини кўриб чиқамиз. Мувозанат ҳолатда пуфакча менискларининг ҳар икки томонидаги эгриликлари бирдай радиусларга эга бўлади (14.10-расм, *а*). Томонларнинг бирида ортиқча босим бўлган вақтда, масалан, суюқлик ҳаракатланиб турган вақтда, менисклар деформацияланадиган, эгриликларининг радиуслари ўзгарадиган бўлади (14.10-расм, *б*). Бу суюқликқа пуфакча томонидан суюқликнинг ҳаракатини қийинлаштирувчи ёки бутунлай тўхтатувчи қўшимча босимнинг пайдо бўлишига олиб келади.

Бундай ҳодисалар одамнинг қон юриш системасида ҳам рўй бериши мумкин. Қонга кириб қолган ҳаво пуфакчалари майда томирларни тўсиб бирорта органнинг қон билан таъминланишини тўхтатиб қўйиши мумкин. Бу *газ эмболияси* деб аталувчи ҳодисага, муҳим функционал шикастларга ёки ҳатто летал натижа (ўлим)га олиб келиши мумкин. Газ пуфакчалари ғаввослар қонида пайдо бўлиши мумкин: босим тез пасайтирилган вақтда газлар қондан ажралиб чиқади. Вена қон томири ичига дори қуйишларда веналар ичига ҳаво пуфакчалари кириб қолмаслиги керак.

§ 7. СИРТ ТАРАНГЛИГИНИ ЎЛЧАШ МЕТОДЛАРИ

Сирт таранглиги σ ни суюқлиқнинг капилляр найчада кўтарилган баландлиги бўйича белгилаш энг аниқ усул деб ҳисобланади (14.15)-дан келиб чиққанига кўра

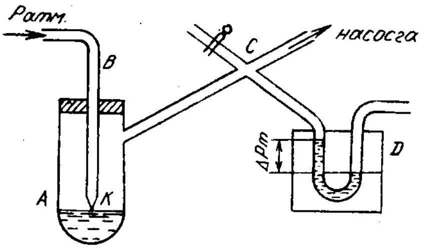
$$\sigma=\rho ghR/(2\cos\Theta). \qquad \textbf{(14.16)}$$

Тўла ҳўлланиш учун $\Theta=0$, $\cos\Theta=1$ ва (14.16)-формула ушбу шаклни эгаллайди:

$$\sigma=\rho ghR/2.$$

Шундай қилиб, капилляр радиуси R ни суюқлиқ зичлиги ρ ни ва унинг кўтарилган баландлиги h ни била туриб синалувчи суюқлиқнинг сирт таранглигини топиш мумкин.

Сирт таранглигини аниқлашнинг бошқа бир методи r радиусли капилляр учидан суюқлиқ ичига сиқиб чиқариладиган ҳаво пуфакчасидаги максимал босим Δp_mни ўлчашга асослангандир. (Капилляр ва пуфакча радиуслари бирдайдир деб фараз қилинади). Бу мақсад учун П. А. Ребиндер ишлаб чиққан асбоб (14.11-расм) ишлатилади. Асбоб ичига текширилувчи суюқлиқ қуйилган идиш A дан иборат; идиш билан тўрт учлик найча C орқали манометр D ва насос уланган. Пробкадаги тешик орқали идиш ичига ингичка найча B киритилган бўлиб, унинг пастки боши ингичка капилляр «учлик» K шаклида чўзилган, иккинчи боши эса атмосфера билан бирлашган. Найча учи суюқлиқ сатҳида фақат унинг сиртига тегиб турадиган қилиб ўрнатилган.



14.11-расм.

Агар насос билан, масалан, сув оқими билан A идишдаги босим пасайтирилса, у ҳолда атмосфера босими $p_{атм}$ таъсири остида B найча учи орқали суюқлиқ ичига ҳаво пуфакчаси сиқилиб киритилади. Атмосфера босими билан идиш ичидаги босим Δp_m айирмаси суюқлиқнинг сирт таранглиги томонидан ҳосил қилиниб, пайдо бўлган пуфакчани эзиб йўқотишга интиладиган босим $p=2\sigma/r$ га тенглашган шароитдагина манометрда энг катта сатҳлар айирмаси (максимал босим Δp_m) вужудга келади. Найча учи суюқлиқ сатҳида жойлангани учун босим p га киритиладиган барча гидростатик тузатмалар эътиборсиз қолдирилиши мумкин. Пуфакча ажралиш моментида тенглик

$$\Delta p_m=2\sigma/r$$

ўринли бўлиб, ундан текширилувчи суюқликнинг сирт таранглиги σ ни аниқлайдилар.

Максимал босим методини суюқликнинг буғ чегарасига ҳам, суюқликнинг суюқлик чегарасига ҳам сирт таранглигини ўлчаш учун қўлланилиш мумкин. Бу методнинг афзаллиги капилляр учи тўғри бурчак остида кесилган бўлиб, пуфакча капиллярни ёмонроқ ҳўлловчи муҳитдан яхшироқ ҳўлловчи муҳит ичига сиқиб чиқарилгандаги ҳўлланиш шароитига боғлиқ бўлмаслигидадир.

Узилувчи томчи методида (14.12-расм) доиравий R радиусли вертикал найчадан томчи узилиш моментида сирт таранглик кучи F оғирлик кучи mg га, яъни

$$2\pi R\sigma = \rho V g$$

га тенг деб фараз этилади, бу ерда ρ — суюқлик зичлиги, V —томчининг ҳажми. Бундан сирт таранглик

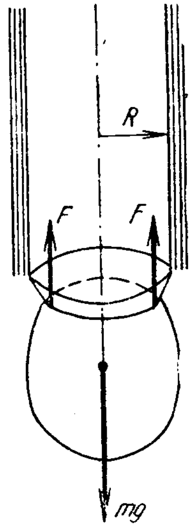
$$\sigma = \rho V g / 2\pi R.$$

Бу метод билан одатда солиштирма ўлчашлар бажарилади. Агар стандарт суюқлик, масалан, сув учун сирт таранглик маълум бўлса, кейинги формулага асосан

$$\sigma_0 = \rho_0 + V_0 g / 2\pi R$$

ни ёзиб, сўнгра

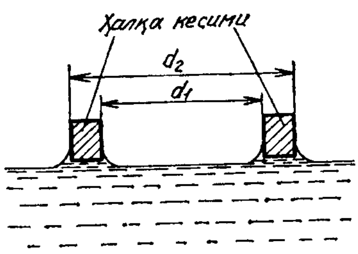
$$\sigma/\sigma_0 = \rho V / \rho_0 V_0$$



14.12-расм.

нисбатни ёзишимиз мумкин. Шунинг ўзи ишлатиладиган формуладир. Берилган V_1 ҳажмли суюқликни томчидонга томган томчилар сони n_0 ва n бўйича V_0 ва V ҳажмларни топадилар:

$$V = V_1/n, \quad V_0 = V_1/n_0.$$



14.13-расм.

Томчилар узилиш методи билан диагностик мақсадларда орқа мия суюқлиғи, ўт ва организм таркибига кирувчи бошқа суюқликларнинг сирт таранглигини аниқлайдилар. Бундай ўлчашларда ишлатилувчи асбобга *сталагмометр* дейилади.

Сирт таранглигини суюқлик сиртидан ҳалқа ажратиш методи билан ҳам ўлчаш мумкин (14.13-расм). Ҳалқани ажратиш учун унинг ички ва ташқи айланаларига тегиб турувчи пардани йиртадиган куч қўйиш керак. Биринчи айлананинг узунлиги πd_1 га, иккинчисиники — πd_2 га тенг, бу ерда d_1 ва d_2 — тегишлича ҳалқанинг ички ва ташқи диаметрлари. (14.11)-дан ҳалқани ушлаб турувчи сирт таранглигининг кучи

$$F=\sigma\pi d_1+\sigma\pi d_2=\sigma\pi(d_1+d_2)$$

га тенг, бундан

$$\sigma=F/\pi(d_1+d_2).$$

Шундай қилиб, берилган суюқлиқнинг сирт таранглигини топиш учун ҳалқанинг ташқи ва ички диаметрларини ва ҳалқани суюқлиқдан ажратиш учун керак бўлган кучни ўлчаш етарлидир.

ИЛОВА

МАТЕМАТИКАДАН ҚИСҚАЧА МАЪЛУМОТЛАР*

§ 1. ЛИМИТЛАР

1. Соний кетма-кетлик лимити

Ўзгарувчан катталик x қийматларининг тўпламини кўриб чиқамиз; тўпламдаги бу қийматлар номерланадиган бўлсин; номернинг исталган қиймати $n=1, 2, 3\ldots$ га муайян қиймат x_n мос бўладиган бўлсин. Ўзгарувчан катталик қийматларининг бундай тўпламига *соний кетма-кетлик дейилади:* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, Қисқача у $\{x_n\}$ белгиланади.

Соний кетма-кетлик мисоли: $1^3, 2^3, 3^3\ldots n^3, \ldots$

Берилган кетма-кетликдаги исталган ҳар қандай кичик мусбат сон δ учун шундай бир x_N сонни кўрсатиш мумкин бўлсинки, x_n $(n>N)$ кетма-кетликнинг барча кейинги сонлари учун тенгсизлик $|x_n - a| < \delta$ бажариладиган бўлса, у ҳолда сон a *кетма-кетлик* $\{x_n\}$ нинг лимити дейилади.

Соний кетма-кетлик $x_1=2;\ x_2=3\frac{1}{2};\ x_3=2\frac{2}{3}\ldots,\ x_n=3+\frac{(-1)^n}{n}$ нинг лимити 3 га тенг бўлганини кўрсатамиз. Дарҳақиқат: $|x_n-3|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}$, яъни қандайдир номердан бошлаб $\frac{1}{n}$ нинг қиймати олдиндан берилган исталган мусбат сон δ дан кичик бўлиб қолади.

Соний кетма-кетлик лимити қуйидагича белгиланади: $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. x_n абсолют миқдори бўйича чексиз ўсиб борганлиги учун соний кетма-кетлик лимитга эга бўлмаган ҳол қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

2. Узлуксиз ўзгарувчан катталик лимити

Соний кетма-кетликдан ташқари узлуксиз ўзгарувчан катталик x ҳам лимитга эга бўлиши мумкин.

---

* Математика масалаларини қисқача баён қилинса, баъзи хусусиятларни туғдиради: кўп даъволарнинг информатив, бедалил характерда бўлиши, қатъийликнинг йўқлиги, масалан, функциялар ва ҳосилаларнинг мавжудлиги, уларнинг узлуксизлиги ва ш. ў. ҳеч бир изоҳсиз фараз этилади.

Агар олдиндан берилган исталганча кичик δ сон учун ўзгарувчининг ўзгариш процессида шундай қиймати топилсаки, ўзгарувчи x нинг барча келгуси қийматлари $|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган бўлса, *а ўзгармас х ўзгарувчининг лимити* деб аталади.

3. Функция лимити

Агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ *сон учун шундай* $\delta>0$ *топилсаки,* $|y-A|<\varepsilon$ *да* $|x-a|<\delta$ *бажарилса, A сон х нинг а га интилган вақтидаги* $y=f(x)$ *функциянинг лимити бўлади.* Қисқача у шундай ёзилади: $\lim\limits_{x\to a} y=A$.

Мисол. $y=x^2+1$ функцияни кўриб чиқамиз. Агар $x\to 2$ бўлса, y 5 га интилади: $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5$. $x\to a$ вақтда функция чексиз ўсиб, лимитга эга бўлмай қолиши ҳам мумкин. $x\to 0$ вақтда функция $y=1/x$ бунга мисол бўла олади.

Баъзи функциялар аргумент чексиз ўсиб ёки камайиб борган вақтда лимитга эга бўлади. Жумладан, $y=1/x$ функция $x\to\infty$ да нолга интилади: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

А сон $y=f(x)$ функциянинг $x\to\infty$ да лимити бўлади, агар x нинг чексиз катталаниши вақтида $|y-A|$ нинг қиймати олдиндан берилган исталган сондан кичик қилиниши мумкин бўлса:

$$\lim_{x\to\infty} y=A.$$

4. Лимитлар ҳақида асосий теоремалар

Лимитлар топишни осонлаштирадиган баъзи теоремаларни исботсиз келтирамиз.

I. Ўзгармас миқдорнинг лимити шу ўзгармас миқдорнинг ўзига тенг:

$$\lim A=A \qquad (1)$$

II. Чекли сон функциялар йиғиндиси (айирмаси)нинг лимити шу функциялар лимитларининг йиғиндиси (айирмаси)га тенг:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+\varphi(x)+\psi(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x)+\lim_{x\to a}\psi(x). \quad (2)$$

III. Чекли сон функциялар кўпайтмасининг лимити шу функциялар лимитларининг кўпайтмасига тенг:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x)+\lim_{x\to a}\psi(x) \qquad (3)$$

Мисол: $\lim\limits_{x\to 2}\left[(3+x)x^2\cdot\frac{1}{x^3}\right]=\lim\limits_{x\to 2}(3+x)\cdot\lim\limits_{x\to 2}x^2\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x^3}=$

$5\cdot 4\cdot\frac{1}{8}=2{,}5.$

IV. Икки функция бўлинмасининг лимити (махраж лимити нолга тенг бўлмаса) шу функциялар лимитларининг бўлинмасига тенг:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}. \tag{4}$$

Мисол: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^3+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

5. Ноаниқликлар

Лимитларни ҳисоблаш вақтида лимитлар ҳақидаги теоремаларни бевосита татбиқ этиш муайян натижаларни бермайдиган махсус ҳоллар учраши мумкин. Баъзи мисолларни кўриб чиқамиз.

1-мисол.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{2x+7} \tag{5}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)=\infty$ ва $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+7)=\infty$ бўлгани учун, $\frac{\infty}{\infty}$ типдаги маъносиз бир ифодага эга бўламиз ва уни $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги ноаниқлик дейилади. Бундай лимитни топишга *ноаниқликни очиш* дейилади. Ноаниқликни очиш учун (5) функция лимити ишорасининг остида турувчи сурат ва махражларни x га бўламиз.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{4}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{7}{x}\right)}=\frac{1}{2} \tag{6}$$

2-мисол.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}$$

Бу $\frac{0}{0}$ кўринишдаги ноаниқликдир. Уни очиш учун лимит ишораси остидаги функцияни алмаштирамиз:

$$y=\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Сурат ва махражни $x-1$ га бўламиз; буни бажариш мумкин, чунки y лимит остига ўтгунча x нинг қиймати ихтиёрийдир ва $x-1\neq 0$. Бундан

$$y=\frac{x+1}{x^2+x+1}; \quad \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$$

оламиз.

3-мисол (исботсиз берамиз):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad (7)$$

яъни бурчак нолга интилган вақтда бурчак синусининг бурчакка бўлган нисбатининг лимити бирга тенг ва *ажойиб лимит* (замечательный предел) деб аталади.

6. е сон лимит сифатида. Натурал логарифмлар

Функция $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ни кўриб чиқамиз. Унинг лимити

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad (8)$$

ҳақида тасаввурга эга бўлиш учун x га ихтиёрий равишда қийматлар бериб, y қийматларининг жадвалини тузамиз:

x	1	2	3	4	5	10	100	1000
y (яхлитланган)	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,59	2,705	2,717

Махсус курсларда лимит (8)-нинг иррационал сон эканлиги исбот қилинади ва уни *е* ҳарфи билан белгилаб, *Непер сони* деб айтилади:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x; \quad e=2,718281828....$$

Бу лимит ҳам *ажойиб лимит* дейилади.

е сони математика ва физикада алоҳида аҳамиятга эгадир; унинг ёрдамида кўпгина кўрсаткичли ва логарифмик муносабатларни энг содда шаклда ифодалаш мумкин. *е* сони *натурал логарифмлар* деб аталувчи логарифмлар асоси сифатида ишлатилади ва у ln символи билан белгиланади:

$$\log_e a=\ln a.$$

Бир хил соннинг натурал ва ўнли логарифми анча содда муносабатлар билан боғланадилар:

$$\lg a\approx 0{,}43\ \ln a \text{ ёки } 2{,}3\ \lg a\approx\ln a$$

7. Функциянинг узлуксизлиги

Лимитлар назариясига асосан функция узлуксизлигининг таърифини бериш мумкин.

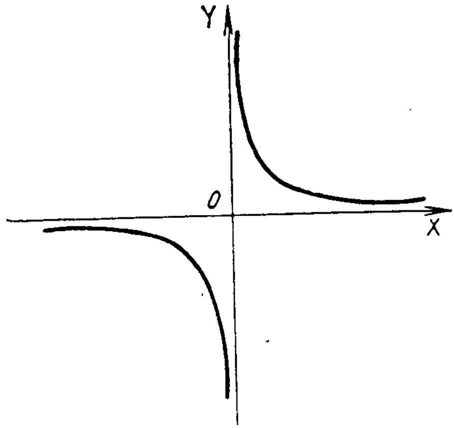
Агар a нуқтада функциянинг лимити шу нуқталардаги функциянинг қийматига тенг бўлса, яъни агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ бўлса, $y=f(x)$ функция *$x=a$ нуқтада узлуксиз* дейилади.

$[a, b]$ кесманинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлган функция *бу кесмада узлуксиз* дейилади.

Функциянинг узлуксизлик шарти бажарилмайдиган нуқтага *узилиш нуқтаси* дейилади.

Узлуксиз функциянинг графигини қаламни қоғоздан узмай чизиш мумкин ва у узлуксиз чизиқдир.

Мисол: $x=0$ дан бошқа x нинг барча қийматларида $y=\frac{1}{x}$ функция узлуксиздир; $x=0$ нуқтада функция узилишга учрайди (1-расм).



1-расм.

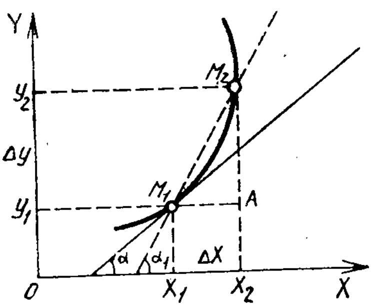
Агар махсус кўрсатиб ўтилмаса келажакда фақат узлуксиз функцияларни кўриб чиқилишини эслатиб ўтамиз.

§ 2. ФУНКЦИЯ ҲОСИЛАСИ

1. Моддий нуқтанинг ҳаракат тезлиги ҳақидаги масала

Бирорта моддий нуқта тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилсин. Бу нуқта t_1 моментда M_1 ҳолатда ва t_2 моментда M_2 ҳолатда бўлсин. Моддий нуқта M_1 ҳолатда бўлса, унинг тезлиги қанча бўлади? M_1 ва M_2 нуқталар орасидаги масофани Δs билан белгилаймиз; $t_2-t_1=\Delta t$.

$\Delta s/\Delta t$ нисбатга ҳаракатнинг ўртача тезлиги дейилади. Тезликнинг t_1 моментдаги қийматини топиш учун Δt интервални, шунингдек, Δs ни нолга интилтириш керак. Бу ҳолда ўртача тезлик M_1 нуқтадаги оний тезликка яқинлашади. Уни символик равишда қуйидагича ёзиш мумкин: $\bar{v}=\lim\limits_{t_2\to t_1}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$.



2-расм.

Ҳаракатнинг оний тезлигини топиш ҳақидаги масаланинг қўйилиши муносабати билан аргумент орттирмаси нолга интилганда функция орттирмаси (Δs) нинг аргумент орттирмаси (Δt) га бўлган нисбатининг лимитини ҳисоблашга ўрганиш лозим.

2. Эгри чизиққа уринма ҳақидаги масала

2-расмда бирорта $y=f(x)$ функциянинг графиги берилган. Эгри чизиққа M_1 нуқтадан ўтувчи уринманинг абсцисса ўқига нисбатан оғиши (α бурчаги) қанча? Бу саволга жавоб бериш учун эгри чизиқ устида M_2 нуқтани танлаб, $M_1 M_2$ кесувчини чизамиз. Кесувчи OX ўққа нисбатан α_1 бурчакка оғган ва 2-расмда кўринишича

$$tg\,\alpha_1 = \frac{M_2A}{M_1A} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Агар M_1 нуқтани белгилаб олиб, M_2 нуқтани M_1 га яқинлаштирсак, у ҳолда M_1 M_2 кесувчи эгри чизиқ M_1 нуқтадаги уринмага, α_1 бурчак эса α бурчакка интилади. Математик равишда бу қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$tg\,\alpha = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Бу масалани ечиш вақтида, аргументнинг орттирмаси нолга интилганда, функция орттирмасининг аргумент орттирмасига бўлган нисбати лимитининг топилишини билиш зарурдир.

3. Функция ҳосиласининг таърифи

Юқорида келтирилган икки мисолда турли билим соҳаларида — физика ва геометрияда аргумент орттирмаси нолга интилганда функция орттирмасининг аргумент орттирмасига бўлган нисбатининг лимитини топишни билиш зарурияти вужудга келишини кўрдик. Бу ҳол бизни ҳосила тушунчасига олиб келади.

$f(x)$ функцияни ҳосиласи деб, аргумент орттирмаси нолга интилганда, функция орттирмасининг x нуқтадаги аргумент орттирмасига бўлган нисбатининг лимитига айтилади.*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (9)$$

бу ерда y' — функция y ҳосиласининг символик белгиланиши. Функция ҳосиласини топиш процессига *дифференциялаш* дейилади. Агар функция бирор нуқтада ҳосилага эга бўлса, бу функция шу нуқтада дифференциалланади демакдир.

y' билан бир қаторда ҳосиланинг бошқача $\frac{dy}{dx}$ кўринишдаги белгиланишини ҳам ишлатадилар («де икс бўйича де игрек» деб ўқилади).

Юқорида таърифланган масалаларни эслаб, тезлик (аниқроғи тезлик модули) йўлнинг вақт бўйича олинган ҳосиласига тенг, эгри чизиқча ўтказилган уринманинг OX ўқига нисбатан қиялик бурчаги эса функциянинг ҳосиласига тенгдир.

4. Ҳосилани топиш учун умумий қоида

Ҳосилани топиш учун, (9) формула шаклида ёзилган, умумий қоидага риоя қилиш зарур; функция орттирмаси $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ни ифодалаш, уни аргумент орттирмаси Δx га бўлиш, сўнг-

---

* «Функция ҳосиласи» терминидан бошқа яна «функциядан ҳосила» ва оддийча «ҳосила» терминлари ҳам ишлатилади.

ра бўлинма лимитини топиш зарур. Бу математикавий операциялар кетма-кетлигини баъзи мисолларда кўриб чиқамиз.

1-мисол. $y=x^2-1$ функция ҳосиласини топинг.

Ечиш қуйидаги кетма-кетликда бажарилади. Функция орттирмасини ифодалаймиз:

$$\Delta y=[(x+\Delta x)^2-1]-[x^2-1]=2x\,\Delta x+\Delta x^2;$$

Δy ни Δx га бўламиз: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x;$ y' ни топамиз:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

2-мисол. $y=x^2+x$ функция ҳосиласи топилсин.

Ечиш. Функция орттирмасини ифодалаймиз.

$$\Delta y=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)]-(x^2+x)=2x\Delta x+\Delta x+\Delta x^2;$$

Δy ни Δx га бўламиз; $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+1+\Delta x;$ y' ни топамиз:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+1+\Delta x)=2x+1$$

3-мисол. $y=\sin x$ функция ҳосиласи топилсин.

Ечиш. Икки бурчак синуслари айирмаси учун бўлган формулани ишлатиб, функция орттирмасини ифодалаймиз:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

Δy ни Δx га бўламиз: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$; y' ни топамиз:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

Ҳисоблашларда (7)-формула ишлатилди.

5. Баъзи функциялар ҳосилалари

Ҳосилаларни топиш учун ҳамиша 4-параграфда баён этилган барча математикавий операцияларни бажариш мақсадга мувофиқ эмас. Умумий қоида бўйича олинган асосий функцияларнинг ҳосилаларини билиш кифоядир. Уларнинг асосийларини келтирамиз. $y=C$ доимий миқдорнинг ҳосиласи.

$$y'=0 \qquad (10)$$

$y=x^{\mu}$ даражали функциянинг ҳосиласи:

$$y'=\mu x^{\mu-1} \qquad (11)$$

Хусусан: $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$; $y'=-\frac{1}{x^2}$

$y=\alpha^x$ кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи:

$$y'=a^x \ln a \qquad (12)$$

Хусусан: $y=e^x$; $y^1=e^x$

$y=\log^a x$ логарифмик функциянинг ҳосиласи:

$$y'=\frac{\log_a e}{x} \qquad (13)$$

Хусусан: $y=\ln x$ натурал логарифм учун:

$$y'=\frac{1}{x} \qquad (14)$$

Тригонометрик функциялар ҳосиласи:

$$y=\sin x; \qquad y'=\cos x. \qquad (15)$$

$$y=\cos x: \qquad y'=-\sin x \qquad (16)$$

$$y=tg\, x; \qquad y'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (17)$$

Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари:

$$y=\arc \sin x: \qquad y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (18)$$

$$y=\arc \cos x: \qquad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (19)$$

$$y=\arc tg\, x; \qquad y'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (20)$$

6. Функциялар йиғиндиси (айирмаси) ҳосиласи

Функциялар йиғиндисининг (айирмасининг) ҳосиласи шу функциялар ҳосилаларининг йиғиндисига (айирмасига) тенг:

$$y=u\pm v \qquad y'=u'\pm v'. \qquad (21)$$

Бу теоремани исбот қиламиз. Фараз қилайлик $y=u\pm v$ бўлсин, бу ерда u ва v x функцияси. Δx орттирмасига Δu Δv, ва Δy орттирмалар мос келади, демак,

$$\Delta y = [(u+\Delta u) \pm (v+\Delta v)] - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u' \pm v' \text{ га эга бўламиз.}$$

Мисол: $y=e^x+x^4$; $y'=e^x+4x^3$.

7. Икки функция кўпайтмасининг ҳосиласи

Икки функция кўпайтмасининг ҳосиласи биринчи функция ҳосиласи билан иккинчисининг кўпайтмасига плюс иккинчи функция ҳосиласининг биринчи функция билан кўпайтмасига тенг:

$$y=uv; \qquad y'=u'v+v'u. \tag{22}$$

Буни исботлаймиз:

$$\Delta y (u+\Delta u)\ (v+\Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

u ва v Δx га боғлиқ бўлмаганлари учун,

$$\lim_{\Delta x \to 0} u = u; \quad \lim_{\Delta x \to 0} v = v; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0.$$

Натижада $y'=uv'+vu'$ *га* эга бўламиз.

Агар $y=Cu$ бўлса, $y'=Cu'$ эканлигига ўқувчи мустақил ишонч ҳосил қилиши мумкин, бу ерда C — ўзгармас миқдор, u — функция.

Мисол: $y=5x^3\sin x$; $y'=15x^2\sin x+5x^3\cos x$.

8. Бўлинма ҳосиласи

Бўлинманинг ҳосиласи маҳражи бўлувчининг квадратидан, сурати эса бўлувчи билан бўлинувчи ҳосиласининг кўпайтмаси билан бўлинувчи ва бўлувчи ҳосиласи кўпайтмасининг айирмасидан иборат бўлган касрга тенг:

$$y = \frac{u}{v}; \qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{23}$$

Буни исботлаймиз:

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v\,(v+\Delta v)}.$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатни топамиз: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)}$. Бундан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0} u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} v\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0} v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v\right)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} v=v,\quad \lim_{\Delta x\to 0} u=u,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$$

бўлгани учун, $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ га эга бўламиз:

Мисол: $y=\frac{x^2+4}{e^x+1}$; $y'=\frac{2x\,(e^x+1)-(x^2+4)\,e^x}{(e^x+1)^2}$

9. Мураккаб функция ҳосиласи

Агар $y=f_1(u)$, $u=f_2(x)$ бўлса, унда y функция x-нинг мураккаб функцияси бўлади. Бу ҳолда y'_x (x бўйича) ҳосила y'_u (u бўйича) ҳосиланинг u'_x (x бўйича) ҳосиласи билан кўпайтмасиға тенг, яъни

$$y'_x=y'_u\,u'_x, \tag{24}$$

бу ерда ўнг томондаги пастки ҳарфли индекслар ҳосила олинган ўзгарувчиларни кўрсатади.

Мисоллар:

1) $y=e^{\sin x}$ ёки $y=e^u$, бу ерда $u=\sin x$; у ҳолда

$$y'=e^u\cos x=e^{\sin x}\cos x.$$

2) $s=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ — гармоник тебраниш тенгламаси. Тебранувчи нуқтанинг тезлиги $v=ds/dt$ ни топамиз. $\omega t+\varphi_0=\varphi$ деб белгиласак, у ҳолда s φ-нинг функцияси, φ эса t нинг функцияси бўлади. Шунинг учун (24)-формула бўйича

$v=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=-A\sin\varphi\cdot\omega=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$ ни оламиз.

10. Иккинчи ва юқори тартибли ҳосилалар

Функция ҳосиласи бўйича олинган ҳосилага иккинчи тартибли ҳосила дейилади. Иккинчи ҳосила y'' ёки $\frac{d^2y}{dx^2}$ билан белгиланади («де икс квадрат бўйича де икки игрек» деб ўқилади). Иккинчи тартибли ҳосила бўйича олинган ҳосила учинчи тартибли ҳосила бўлиб, y''' ёки $\frac{d^3y}{dx^3}$ билан белгиланади ва ҳоказо, n — тартибли ҳосила $y^{(n)}$ ёки $\frac{d^ny}{dx^n}$ билан белгиланади.

Мисол: $y=3x^4+2x$. Бу функциянинг ҳар хил тартибли ҳосилаларини топамиз.

$$y'=12x^3+2;\ y''=36x^2;\ y'''=72x;$$
$$y^{(4)}=72;\ y^{(5)}=0;\ y^{(6)}=0.$$

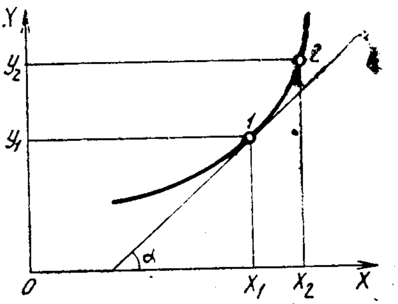
§ 3. ҲОСИЛАЛАРДАН ФУНКЦИЯЛАРНИ ТЕКШИРИШ ВА ГРАФИКЛАР ТУЗИШДА ФОЙДАЛАНИШ

1. Функциянинг ўсиши ва камайиши

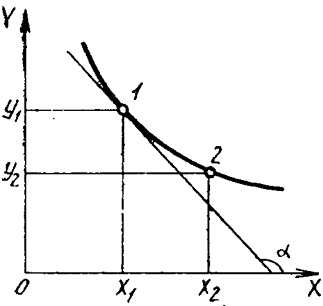
Муайян интервалда аргументнинг ўсиши билан шу интервалдаги $y=f(x)$ функция ҳам ўсадиган бўлса, унга ўсувчи функция дейилади. Агар аргумент ўсиши билан функция камайса, унга камаювчи функция дейилади.

$x_2-x_1=\Delta x>0$ бўлса, ўсувчи функция учун $y_2-y_1=\Delta y>0$ бўлади, демак, $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ ва ҳосила $y'>0$ бўлади. Бу функциянинг графиги 3-расмда кўрсатилган (α—уринманинг OX абсцисса ўқига оғиш бурчаги).

$\Delta x>0$ бўлганда камаювчи функция учун $\Delta y<0$, демак нисбат $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ ва ҳосила $y'<0$ бўлади (4-расм).

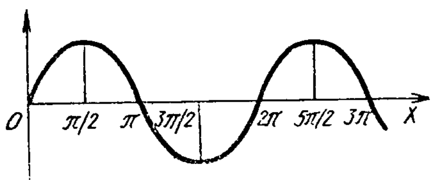


3-расм.



4-расм.

Мисол. Графиги 5-расмда кўрсатилган функция $y=\sin x$ берилган. Расмдан функциянинг $\pi/2<x<3\pi/2$ интервалда камайиб, $3\pi/2<x<5\pi/2$ интервалда ўсиб боргани кўринади. Бунга функция ҳосиласини текшириб ҳам ишониш мумкин: $y'=\cos x$; $\pi/2<x<3\pi/2$ интервалда $\cos x<0$ ва $3\pi/2<x<5\pi/2$ интервалда $\cos x>0$.



5-расм.

2. Функциянинг экстремал қийматларини топиш

Қандайдир $y=f(x)$ функциянинг графигини тасвирлаймиз

(6-расм). У биронта нуқтада, агар бу нуқтага жуда яқин жойлашган қўшни нуқталарда функциянинг қийматлари камроқ бўлса, максимум (*max*) қийматга эга бўлади. Графикда x_1 ва x_2 абсциссали нуқталар максимумларга тўғри келади. Агар бирор нуқтага яқин жойлашган қўшни бўлган нуқталарда функция каттароқ қийматларни қабул қилса, бу нуқтада функция минимуми (*min*) га етиб боради. 6-расмда x_2 абсциссали нуқта минимумга тўғри келади. Экстремум максимум ва минимумнинг умумий номидир.

Функция бир неча максимум ва минимумларга эга бўлиши мумкин. Чексиз ўсувчи ёки камаювчи функциялар ва фақат максимумга ёки минимумга эга бўлувчи функциялар мавжуддир.

Функция экстремумини топиш шартини кўриб чиқамиз. $y=f(x)$ функция графигининг А нуқтасига (7-расм) максимум мос келадиган бўлсин ($x=a$). Расмдан кўринишича, A дан чапроқда жойлашган атрофдаги нуқталарда (масалан B нуқтада) уринмалар OX ўқнинг мусбат йўналиши билан ўткир бурчаклар ҳосил қилади. Шунинг учун бу бурчакларнинг тангенси мусбат қийматга эга бўлади, яъни $f'(x)=tg\alpha_1>0$. A-дан ўнгроқда ётган нуқталарда (масалан, C нуқтада), уринмалар OX ўқнинг мусбат йўналиши билан ўтмас бурчаклар ҳосил қиладилар ва $f'(x)=$ $=tg\alpha_2<0$. Функциянинг ҳосиласи узлуксиз равишда ўзгаради деб фараз қилинади, шунинг учун $x=a$ нуқтада ҳосиланинг ишораси шундай ўзгарадики, натижада ҳосила нолга тенг бўлиб қолади. Эгри чизиққа ўтказилган уринманинг максимум нуқтасида ОХ ўқига параллел бўлгани графикдан кўриниб турибди.

Шундай қилиб, агар $y=f(x)$ функция $x=a$ бўлганда максимумга эга бўлса, у ҳолда: 1) $f'(a)=0$ ва 2) аргумент $x=a$ дан ўтган вақтда $f'(x)$, x ўсган сари, ишорасини плюсдан минусга ўзгартади.

Агар бирор $x=a$ нуқтада (8-расм) функция минимумга эга бўлса, у ҳолда: 1) $f'(a)=0$ ва 2) аргумент $x=a$ дан ўтган вақтда $f'(x)$, x ўсган сари, ишорасини минусдан плюсга ўзгартади.

max ва *min* ни ажрата билиш учун иккинчи тартибли ҳосилани ишлатиш мумкин: Дарҳақиқат, *max* нуқтасида биринчи ҳосила камаяди («+» дан «—» га ўзгаради), min нуқтасида эса ўсади («—» дан «+» га ўзгаради), демак, функциянинг ўсиши ёки камайишига қараб (аввалги бўлимга қаранг) биринчи ҳосиланинг ўсишини ёки камайишини аниқлаш мумкин.

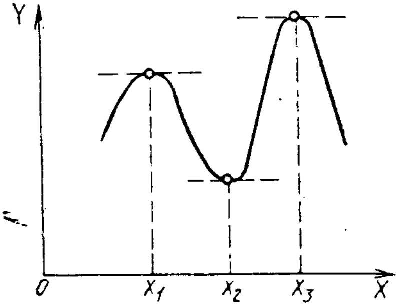
Максимум ҳолида $f'(x)$ камаяди, демак, $f''(x)<0$. Минимум бўлган ҳолда $f'(x)$ ўсади, демак. $f''(x)>0$.

Мисол. Графиги 5-расмда кўрсатилган функция $y=sinx$ берилган. Унинг биринчи ва иккинчи ҳосиласи тегишлича $y'=\cos x$ ва $y''=-\sin x$ га тенг. $x_1=\pi/2$ ва $x_2=3\pi/2$ нуқталарда $y'=0$. x_1 нуқтада $y''=-1$, демак, бу нуқта максимум; x_2 нуқтада $y''=1$, демак, бу ерда минимум.

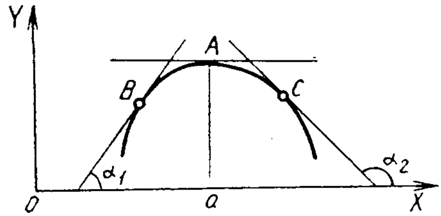
Масала. Электр юритувчи кучи $\mathcal{E}$ ва ички қаршилиги r бўлган ток манбаига ўзгарувчан ташқи R қаршилик уланган. Занжирнинг ташқи қисмида ажралувчи қувват максимал бўлиши учун R қаршилик қанча бўлиши керак?

Ечиш. Электр токининг қуввати $N=I^2R$, бу ерда I — ток кучи. Тўлиқ занжир учун Ом қонуни

$$I=\mathcal{E}/(r+R)$$



6-расм.



7-расм.

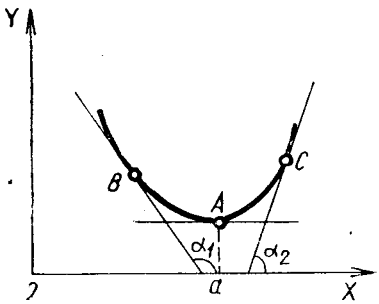
дан фойдаланиб, қувват учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$N=\mathcal{E}^2R/(r+R)^2$$

Экстремум шартини ёзамиз:

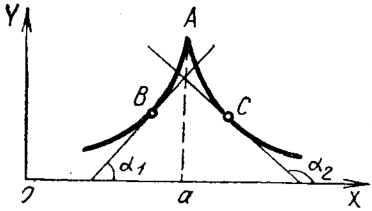
$$\frac{dN}{dR}=\frac{\mathcal{E}^2(r+R)^2-\mathcal{E}^2R(2r+2R)}{(r+R)^4}=\frac{\mathcal{E}^2(r^2-R^2)}{(r+R)^4}=0.$$

Бундан $R=r$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, манбанинг э. ю. к. ва ички қаршилиги ўзгармас қолиб, ички ва ташқи қаршиликлар бир-бирига тенглашиб қолганида занжирнинг ташқи қисмида ажралувчи қувват максимал бўлади.



8-расм.

Ниҳоят бу пунктни баён этганда функция ҳосиласининг экстремал нуқталарда мавжуд бўлгани фараз қилинганини эслатиб ўтамиз. Агар бу шундай бўлмаганда, юқорида таърифланган аломатлар (критерийлар) максимум ёки минимумга мос келмасликлари мумкин: масалан 9-расмда қандайдир бир функция графиги кўрсатилган, шу билан бирга А нуқтада (max) ҳосила номавжуддир.



9-расм.

3. Ҳосилаларни графиклар ясаш учун татбиқ этиш

Функция графиги ясашнинг кўп ҳолларида, функция ўсишини ёки камайишини ва унинг экстремал қийматларини аниқлашда ҳосил қўлланса, иш анча енгиллашади.

Мисол: Функция

$$y = x^3 - x^2 + 1 \quad (25)$$

графигини ясаймиз.

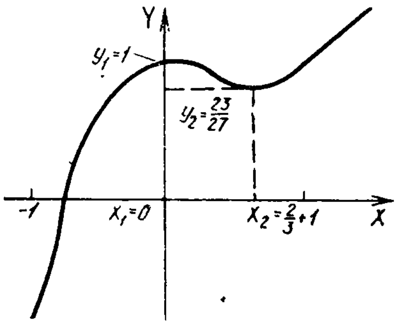
Функция экстремумини текширайлик:

$$y' = 3x^2 - 2x = x(3x-2) = 0, \quad \text{бундан}$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2/3;$$

$y'' = 6x - 2.$

$x_1 = 0$ нуқтада $y'' = -2 < 0$, демак бу ерда максимум; $x_2 = 2/3$ нуқтада $y'' = 2 > 0$ — бу ерда минимум. (25) тенгламадан бу нуқталарнинг ординаталарини топамиз ва координаталари $x_1 = 0$, $y_1 = 1$ бўлган нуқтанинг максимумга, $x_2 = 2/3$, $y_2 = 23/27$ бўлгани эса — минимумга мос эканини аниқлаймиз. График ясаш учун бу нуқталарни X, Y текислиги устида белгилаймиз (10-расм).



10-расм.

Биринчи ҳосиланинг ишораси бўйича функциянинг ўсиш ва камайиш соҳаларини аниқлаймиз:

$y' = (3x-2)x > 0$, функция ўсади. Агар бу вақтда $x > 0$ бўлса, у ҳолда $(3x-2) > 0$, яъни $x > 2/3$ бўлади. Агар $x < 0$ бўлса, унда $(3x-2) < 0$, яъни $x < 2/3$ бўлади, $x < 0$ сақланади.

$y' = (3x-2)x < 0$, функция камаяди. Агар бу вақтда $x > 0$ бўлса, у ҳолда $(3x-2) < 0$, яъни $x < 2/3$, соҳа $0 < x < 2/3$ бўлади. Агар $x < 0$ бўлса, унда $(3x-2) > 0$, $x > 2/3$, қарама-қаршиликка эга бўламиз. Демак,

$\infty < x < 0$ интервалда функция ўсади,

$0 < x < 2/3$ » » камаяди,

$2/3 < x < \infty$ » » ўсади.

Экстремал нуқталарни ва функциянинг ўсиш ва камайиш соҳаларини била туриб берилган функциянинг графигини ясаймиз (10-расмга қаранг).

§ 4. ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1. Таъриф. Дифференциалнинг геометрик маъноси

9-тенгламадан қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \beta, \quad (26)$$

бу ерда β — бирорта катталик. $\Delta x \to 0$ га интилганда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$ бўлади, яъни бу ҳолда β ҳам нолга интилади (26)-ни ўзгартириб,

$$\Delta y = y'\Delta x + \beta\Delta x \qquad (27)$$

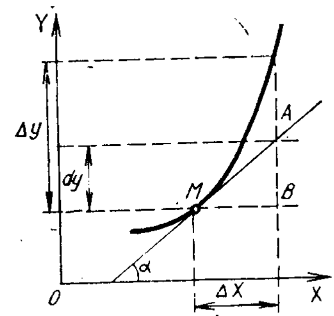
га эга бўламиз.

(27)-дан функция орттирмаси иккита қўшилувчидан иборат эканлиги кўринади. Қўшилувчи $y'\Delta x$ га функция $y=f(x)$ *орттирмасининг бош қисми* ёки *функциянинг дифференциали* дейилади.

Функция дифференциали функция ҳосиласи билан аргумент орттирмасининг кўпайтмасига тенг. Символик равишда дифференциал dy билан белгиланади («де игрек» деб ўқилади):

$$dy = y'\Delta x. \qquad (28)$$

Функция дифференциалининг геометрик маъносини $y=f(x)$ функциянинг графиги тасвирланган 11-расм ёрдамида тушунтириш мумкин. M нуқтада уринма ўтказамиз. ΔABM ни кўриб чиқамиз. MB катет аргумент орттирмаси Δx га тенг; $tg\alpha = y'$; $AB = tg\alpha \cdot MB = y'\Delta x$. Шундай қилиб, $AB = dy$.



11-расм.

Демак, геометрик жиҳатдан функция дифференциали *уринма ординатаси* (AB) *нинг* абсцисса (MB) орттирмаси Δx га мос орттирмасидир.

2. Аргумент дифференциали. Функция ҳосиласини дифференциаллар орқали ифодалаш

Аргумент дифференциали деб аргумент орттирмасига айтилади, яъни

$$dx = \Delta x. \qquad (29)$$

(29)-ни назарда тутиб, (28)-ни қуйидагича қайтадан ёзиш мумкин:

$$dy = y'dx, \qquad (30)$$

ёки

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad (31)$$

Шундай қилиб, *функция ҳосиласи функция дифференциалининг аргумент дифференциалига бўлган нисбатига тенг.* Агар аввал $\frac{dy}{dx}$ символи бутун, узлуксиз, y' га эквивалент ҳолда қўлланилган бўлса, энди унга каср сифатида қаралиши мумкин: dy — сурат, dx — махраж.

Пировардида «дифференциаллаш» терминининг ҳосила ҳисоблашдан бошқа дифференциал топишга ҳам мансуб эканлигини эслатиб ўтамиз. Шунинг учун «ифодани дифференциаллайлик» дейилганда бу — берилган ифодадан ҳосилани топайлик» ёки «берилган ифода дифференциалини топайлик» демакдир.

3. Дифференциаллар топишнинг баъзи қоидалари

Дифференциал топишнинг умумий қоидаси (30)-формулада кўрсатилган: функция ҳосиласини аргумент дифференциалига кўпайтирадилар. Бу қоидани функция йиғиндисига (айирмасига), уларнинг кўпайтмасига ва бўлинмасига татбиқ этамиз.

Йиғинди (айирма) $y=u\pm v$ дифференциали:

$$dy=(u'_x \pm v'_x)dx = u'_x dx \pm v'_x dx = du \pm dv. \tag{32}$$

Кўпайтма $y=uv$ дифференциали:

$$dy=(u'_x v+v'_x u)dx=vu'_x\, dx+uv'_x\, dx=vdu+udv. \tag{33}$$

Бўлинма $y=\frac{u}{v}$ дифференциали:

$$dy=\frac{u'_x v-v'_x u}{v^2}dx=\frac{vdu-udv}{v^2}. \tag{34}$$

Дифференциаллашнинг асосий формулалари ҳақидаги маълумотларни бу ерда келтирмаймиз, чунки бу мақсад учун асосий ҳосилалар жадвали ва дифференциаллашнинг асосий қоидаларидан фойдаланиш мумкин.

Мисоллар. Ушбу функциялар дифференциалини топинг.

1) $y=2x^3+x$; $dy=6x^2dx+dx$.

2) $y=x\sin x^2$; $dy=\sin x^2\, dx+x\cos x^2\, 2x\, dx=\sin x^2\, dx+2x^2\cos x^2\, dx$.

3) $y=\frac{x}{2+x^2}$; $dy=\frac{(2+x^2)dx-x2xdx}{(2+x^2)^2}=\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}dx$

4. Иккинчи ва юқори тартибли дифференциаллар

$d\,(dy)$ ни d^2y символи билан белгилаб, (30)-ифодани дифференциаллаймиз:

$$d^2y=d\;(y'\,dx)=d\;(y')dx. \tag{35}$$

(30)-га асосан $d\;(y')=y''\,dx$ га эга бўламиз. Шунинг учун (35)-ўрнига

$$d^2y=y''\,dx\,dx=y''\,dx^2 \tag{36}$$

ни ёзамиз. Бу, иккинчи тартибли дифференциал (d^2y) иккинчи тартибли ҳосиланинг аргумент дифференциали квадрати билан кўпайтмасига тенг, демакдир. (36)-дан

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2} \tag{37}$$

ни оламиз, демак, иккинчи тартибли ҳосила *иккинчи тартибли дифференциалнинг аргумент дифференциали квадратига нисбати сифатида* қаралиши мумкин.

Шунга ўхшаш ёзишимиз мумкин:

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3};\ y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} \quad \text{ва ҳ. к.}$$

5. Функция орттирмасининг ва функция дифференциалининг тақрибий тенглиги

$dx = \Delta x$ ни ва шунингдек (30)-ифодани ҳисобга олиб, (27)-формулани қуйидаги шаклда қайтадан ёзамиз:

$$\Delta y = dy + \beta dx. \tag{38}$$

Бу формуладан аргумент дифференциали dx (ёки аргумент орттирмаси) етарли миқдорда кичик бўлса, функция орттирмаси тақрибан функция дифференциалига тенг бўлиши кўринади:

$$\Delta y \approx dy.$$

Буни 11-расмдан ҳам тушуниш мумкин: $\Delta x \to 0$ интилганда уринма ординатасининг орттирмаси эгри чизиқ ординатасининг орттирмасига яқинлашади.

Функция ва аргумент дифференциаллари таъриф бўйича исталган қийматларни эгаллашлари мумкин бўлса-да, физикавий ва бошқа масалалар ечган вақтда одатда dx ни етарли миқдорда кичик деб фараз қилинади, бу ҳолда dy ҳам етарли даражада кичик бўлади, шу билан бирга dy деганда функция орттирмасини тушуниш мумкин бўлади.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛНИНГ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШЛАРДА ВА ХАТОЛИКЛАРНИ БАҲОЛАШДА ТАТБИҚ ЭТИЛИШИ

1. Функция ва функция орттирмасини тақрибий ҳисоблаш

Аргумент кичик миқдорга ўзгарганда функция орттирмасини (30)-формуладан фойдаланиб, тақрибан топиш ва, шунингдек, аргумент бутун сондан кам фарқ қилса, функция қийматини тақрибан ҳисоблаш мумкин. Дифференциалнинг бу татбиқини баъзи масалаларда кўриб чиқайлик.

Мисол: Аргумент 2 дан 2,001 гача ўзгарсин, яъни аргумент орттирмаси 0,001 га тенг бўлганда $y = x^3 + 4$ функциянинг орттирмасини топинг.

(30)-формуладан

$$dy = 3x^2dx = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}001 = 0{,}012.$$

Масала. Иситиш натижасида радиуси $\Delta R = 0{,}01$ м ча катталашган шарнинг ҳажми қанчалик ўзгаради? Шарнинг радиуси $R = 3$ м.

Шарнинг ҳажми $V=4/3\pi R^3$ формула бўйича ҳисобланади. (30)-дан фойдаланиб,

$$dV=4/3\pi\cdot 3R^2dR=4\pi R^2dR=4\cdot 3{,}14\cdot 3^2\cdot 0{,}01\text{ м}^3=1{,}13\text{ м}^3.$$

Мисол. Аргумент қиймати 3,02 га тенг бўлган ҳолда $y=2x^4+x^2$ функциянинг тақрибий қийматини ҳисобланг.

Аргументнинг икки қийматини ифодалайлик: $x_1=3$ ва $x_1+\Delta x=3+0{,}02=3{,}02$. Функциянинг изланувчи тақрибий қийматини қуйидагича топамиз:

$$y_1+\Delta y=f(x_1+\Delta x)=f(x_1)+\Delta y\approx f(x_1)+dy=f(x_1)+y'dx=$$
$$=(2x_1^4+x_1^2)+(8x_1^3+2x_1)dx=$$
$$=(2\cdot 3^4+3^2)+(8\cdot 3^3+2\cdot 3)\cdot 0{,}02=175{,}44.$$

2. Баъзи тақрибий формулалар

Орттирманинг функция дифференциалига тақрибий тенглигидан фойдаланиб баъзи тақрибий формулаларни чиқариш мумкин.

I. Бирдан кам фарқ қилувчи сонни даражага кўтариш:

$$(1+a)^{\mu}\approx 1+\mu a,\ \text{бў ерда } a\ll 1. \qquad (39)$$

$y=x^{\mu}$ бўлсин; у ҳолда бу функциянинг дифференциали

$$dy=\mu x^{\mu-1}dx$$

бўлади. $x+dx=1+a$ деб қабул қиламиз, у ҳолда изланувчи $y+dy$ тахминан $(1+a)^{\mu}$ га тенг бўлади. Очамиз:

$$y+dy=x^{\mu}+y'dx=x^{\mu}+\mu x^{\mu-1}dx.$$

$x=1$ ни ва $dx=a$ ни ўринларига қўйиб,

$$(1+a)^{\mu}\approx y+dy=1+\mu a \text{ ни оламиз.}$$

Шунга ўхшаш

$$(1-a)^{\mu}\approx 1-\mu a \text{ ни кўрсатиш мумкин.} \qquad (40)$$

(39)-формуладан илдиз чиқариш учун ҳам фойдаланиш мумкин:

$$\sqrt[\mu]{1+a}\approx 1+\frac{1}{\mu}a \quad (a\ll 1). \qquad (41)$$

II. Логарифмни ҳисоблаш:

$$\ln(1+a)\approx a,\ \text{бу ерда } a\ll 1. \qquad (42)$$

$y=\ln x$ бўлсин; у ҳолда $dy=\frac{dx}{x}$. Агар $x=1$ бўлса, унда $y=\ln 1=0$ ва $dy=\frac{dx}{1}=dx$ бўлади.

Тегишли қийматларни $y+dy=\ln(x+dx)$ формулага қўйиб, $0+dx=\ln(1+dx)$ га эга бўламиз, бундан dx ни a билан алмаштирсак, $\ln(1+a)\approx a$ ни оламиз.

3. Дифференциални хатоликларни ҳисоблаш учун ишлатиш

1. Радиуси $R=2{,}03$ см бўлган доира берилган. Радиус $\Delta R=$ $=0{,}005$ см аниқлигида берилган. Доира юзини қандай аниқликда топиш мумкин?

Доира юзи $S=\pi R^2$. Тақрибан функция (юза) орттирмасини дифференциалга тенг деб ҳисоблаб, доира юзини ҳисоблашнинг абсолют хатосига эга бўламиз:

$\Delta S=2\pi R dR=2\cdot 3{,}14\cdot 2{,}03\cdot 0{,}005$ см$^2=0{,}064$ см^2.

2. Бирорта натижа икки ўлчанувчи миқдорнинг кўпайтмаси сифатида олинган бўлсин:

$$y=uv. \qquad (43)$$

Бу ҳолда ўлчанувчи миқдорлар ва натижанинг нисбий хатоликларини қандай аниқлаш мумкин?

Натижанинг нисбий хатоси $\frac{dy}{y}$ ни топиш учун (43)-ни логарифмлаймиз:

$$\ln y=lh\,(uv)=\ln u+\ln v$$

ва кейинги ифодани дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}.$$

Демак, кўпайтманинг нисбий хатоси кўпайтирилувчилар нисбий хатоларининг йиғиндисига тенг.

§ 6. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАР. ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Хусусий ҳосилалар

Фараз қилайлик, u бир неча эркин ўзгарувчилар функцияси бўлсин: $u=f\,(x, y, z)$.

Агар аргументлардан бири, масалан x нинг ўзгариш миқдори Δx бўлиб, бошқа аргументлар ўзгармаса, у ҳолда хусусий орттирма Δu қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y,\ z)-f(x,\ y,\ z). \qquad (44)$$

$\Delta x\to 0$ да (44)-нинг Δx га бўлган нисбатининг лимити u нинг x бўйича олинган хусусий ҳосиласи деб аталади; хусусий ҳосила $\frac{\partial u}{\partial x}$ символи билан белгиланади. Бу таърифга мувофиқ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y,\ z)-f(x,\ y,\ z)}{\Delta x} \qquad (45)$$

ни ёзишимиз мумкин.

Хусусий ҳосилаларни бошқа ўзгарувчилар бўйича ҳам шунга ўхшаш ифодалаш мумкин:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} \tag{46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \tag{47}$$

Хусусий ҳосилани топиш учун функцияни битта ўзгарувчи бўйича дифференциаллаб, бошқа ўзгарувчиларни доимий деб ҳисоблаш керак.

Мисол: $u = \frac{xy^2}{z}$ функция берилган, y ва z бўйича ҳосилалар топилсин.

Ечиш. x ва z ни доимий деб қабул қиламиз, шунда $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{z}$; агар x ва y — доимий бўлса, у ҳолда $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy^2}{z^2}$.

2. Тўлиқ дифференциал ҳақида тушунча

$u=f\ (x, y, z)$ функциянинг тўлиқ дифференциали деб қуйидаги ифодага айтилади:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \tag{48}$$

бу ерда dx, dy ва dz эркин ўзгарувчиларнинг дифференциаллари.

Тўлиқ дифференциал тушунчаси эркин ўзгарувчилар сони ихтиёрий бўлган функция учун татбиқ этилиши мумкин.

Агар эркин ўзгарувчилар дифференциаллари етарли даражада кичик бўлсалар, у ҳолда функция тўлиқ дифференциалини тақрибан функция орттирмасига тенг деб ҳисоблаш мумкин: $du \approx \Delta u$.

Мисол. Тўғри бурчакли параллелепипед қирралари узунликларининг қийматлари 2,3 ва 4 м дан, мос равишда 2,01; 3,005 ва 4,05 м гача ўзгарган бўлсалар, унинг ҳажмининг ўзгаришини топинг.

Ечиш. Берилган параллелепипед ҳажмини учта ўзгарувчининг функцияси сифатида ифодалаймиз:

$$u = xyz, \tag{49}$$

бу ерда x, y, z — тегишли қирраларнинг узунликлари. (48)-формулани ишлатиб, ҳажм орттирмаси Δu тақрибан қуйидагига тенг деб ёзамиз:

$$\Delta u \approx du = yzdx + xzdy + xydz, \tag{50}$$

бу ерда dx, dy, dz — мос қирралар узунликларининг ўзгаришлари; шарт бўйича $dx=0{,}01$; $dy=0{,}005$; $dz=0{,}05$. (50)-га миқдорларнинг берилган қийматларини қўйсак,

$$\Delta u \approx 3 \cdot 4 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}005 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}05 \approx 0{,}46 \text{ м}^3 \text{ ни оламиз.}$$

§ 7. БОШЛАНҒИЧ (ПЕРВООБРАЗНАЯ) ФУНКЦИЯ. НОАНИҚ ИНТЕГРАЛ

Ҳаракат тезлигини ҳисоблаш ва уринманинг эгри чизиққа оғиш бурчагини топиш масалаларининг қўйилишлари муносабати билан ҳосила тушунчасига зарурият туғилди. Тезлик бўйича юрилган йўлни топиш, уринма оғиш бурчагининг тангенси бўйича тегишли функцияни аниқлаш каби тескари масалалар ҳам бўлиши мумкин. Бу каби тескари масалалар ноаниқ интеграл тушунчасига олиб келади.

1. Ноаниқ интегралнинг таърифи

Номаълум y функциянинг ҳосиласи:

$$y'=f(x) \tag{51}$$

ёки унинг дифференциали

$$dy=f(x)\,dx \tag{52}$$

берилган бўлсин.

Берилган функция $f(x)$ ҳосиласи ёки дифференциали $f(x)dx$ бўлган F(x) функцияга *берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси (первообразная) дейилади.*

Функция дифференциалига биргина бошланғич функция эмас, балки бир-биридан доимий қўшилувчиси билан фарқланувчи бир неча бошланғич функциялар бўлишини кўрсатиш осон. Масалан, $dy=3x^2dx$ дифференциал учун $F(x)=x^3+20$,

$$F(x)=x^3+23 \text{ ва ҳ. к.}$$

бошланғич функциялар бўлади.

Демак, умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x)=x^3+C.$$

бу ерда C — исталган доимий сон.

$f(x)dx$ дифференциали учун барча бошланғич функциялар тўплами *ноаниқ интеграл* дейилади ва уни

$$\int f(x)dx$$

символи билан белгилайдилар («интеграл эф икс де икс бўйича» деб ўқилади). Бу ерда: $f(x)\,dx$ — *интеграл остидаги ифода,* $f(x)$ — *интеграл остидаги функция.*

Юқорида текширилган мисолдан маълум бўлишича, битта функциянинг барча бошланғичлари бир-биридан доимий миқдорча фарқланадилар, шунинг учун, бирорта бошланғич $F(x)$ функцияни топгач,

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ ни ёзиш мумкин.} \tag{53}$$

бу ерда C — бирорта ихтиёрий доимий сон. Баъзан C ни *константа ёки интеграллаш доимийси* деб атайдилар.

Бошланғич функцияни топиш процессига *интеграллаш* дейилади.

2. Ноаниқ интегралнинг асосий хоссалари

I. Ноаниқ интегралнинг дифференциали интеграл остидаги ифодага тенг:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Бу ноаниқ интегралнинг таърифидан келиб чиқади.

II. Функция дифференциалининг ноаниқ интеграли шу функциянинг ихтиёрий доимий билан қўшилганига тенг:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Исботи:

$$dF(x) = f(x)\,dx; \qquad \int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

III. Доимий кўпайтувчини интеграл ишораси ташқарисига чиқариш мумкин: $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

Буни исбот қилайлик.

$$a\int f(x)\,dx \tag{54}$$

ифодани дифференциаллаcак

$$d\left[a\int f(x)\,dx\right] = ad\int f(x)\,dx = af(x)\,dx$$

га эга бўламиз, яъни (54) $af(x)\,dx$ дифференциал ифоданинг бошланғич функциясидир, ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

IV. Алгебраик йиғиндисининг интеграли қўшилувчилар интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)\,dx.$$

Буни исбот қилайлик. Кейинги тенгламанинг ўнг томонини дифференциаллаймиз:

$$d\left[\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)\,dx\right] =$$

$$= d\int f_1(x)dx + d\int f_2(x)dx + d\int f_3(x)\,dx =$$

$$= f_1(x)\,dx + f_2(x)\,dx + f_3(x)\,dx.$$

Шундай қилиб, дифференциал ифода

$$\left[f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)\right]dx \text{ учун}$$

$\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\int f_3(x)\,dx$ бошланғич функция бўлади, шунинг ўзини исбот қилиш талаб қилинган эди.

3. Асосий интеграллар жадвали

Ноаниқ интегрални (бошланғич функцияни) топиш учун дифференциаллашга тескари бўлган амал бажарилиши керак. Қуйида баъзи асосий интегралларни келтирамиз:

$$\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C, \text{ бу ерда } \mu\neq -1, \tag{55}$$

$$\int\frac{dx}{x} = \ln x + C; \tag{56}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, \tag{57}$$

хусусан, агар $a=e$ бўлса, у ҳолда

$$\int e^x\,dx = e^x + C; \tag{58}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C; \tag{59}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C. \tag{60}$$

4. Интеграллаш методлари

Ноаниқ интегрални топиш учун, амалда уни жадвалий шаклга, яъни 3-параграфда кўрсатилган ифодаларга келтиришга тиришмоқ керак. Бу мақсад учун ҳар хил методлар қўлланади, улардан иккитаси қуйида тушунтирилади.

1. *Ўзгарувчиларни алмаштириш методи.* У бир ўзгарувчини иккинчиси билан алмаштиришга асосланган.

Мисоллар.

1) $y=\int(1+x)^3\,dx$ ни топинг. $1+x=z$, $dx=dz$ билан алмаштирамиз. Янги ўзгарувчини ўрнига қўйиб, $y=\int z^3dz$ ни оламиз. Шундай қилиб, интеграл жадвалий шаклга келтирилади. (55)-формуладан фойдаланамиз ва

$$\int z^3dz=\frac{z^4}{4}+C$$

ни топамиз.

Илгариги ўзгарувчи x га қайтиб, пировардида

$$y=\frac{(1+x)^4}{4}+C$$

га эга бўламиз.

2) $y=\int e^{3x}dx$ топилсин. Янги ўзгарувчини қўйиб $3x=z$, $dx=\frac{dz}{3}$ ларни алмаштирсак $y=\frac{1}{3}\int e^z dz$ ни оламиз. Шундай қилиб, интеграл жадвалий шаклга келтирилди. (58) — формулани ишлатиб

$$\frac{1}{3}\int e^z dz=\frac{1}{3}e^z+C$$

ни топамиз.

Илгариги ўзгарувчи x га қайтиб, пировардида

$$y=\frac{1}{3}e^{3x}+C$$

га эга бўламиз.

II. *Бўлаклаб интеграллаш.* Бу метод

$$\int udv=uv-\int vdu \tag{61}$$

формулага асосланган.

Формулани чиқариш учун (33)-ни

$$udv=d(uv)-vdu$$

шаклда қайта ёзамиз; бу тенгламанинг иккала қисмини ҳам интеграллаб, дастлабки (61)-ифодани оламиз.

Мисоллар.

1) $y=\int lnxdx$ топилсин. Фараз қилайлик: $u=ln\,x$; $dv=dx$, бундан $du=\frac{dx}{x}$; $v=x$. (61)-формулани ишлатиб,

$$y=\int \ln xdx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

га эга бўламиз:

2) $y=\int x\sin x\,dx$ топилсин. $u=x$; $dv=\sin x dx$ деб фараз қиламиз, шунда $du=dx$; $v=-\cos x$. (61)-формулани ишлатиб,

$$y=\int x\sin xdx=-x\cos x-\int(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\int\cos xdx=$$
$$=-x\cos x+\sin x+C$$ ни оламиз.

5. Уринманинг X ўқига оғиш бурчаги тангенсининг берилган қиймати бўйича эгри чизиқ тенгламасини топиш

Эгри чизиқ уринмасининг X ўққа нисбатан оғиш бурчагининг тангенси уриниш нуқтаси абсциссасига боғланадиган бўлсин: $tg\,\alpha = 2x$. Бу қандай функция учун тўғри келади?

Уринманинг X ўқига оғиш бурчагининг тангенси ҳосилага тенг бўлгани учун,

$$\frac{dy}{dx} = 2x; \quad dy = 2x\,dx$$

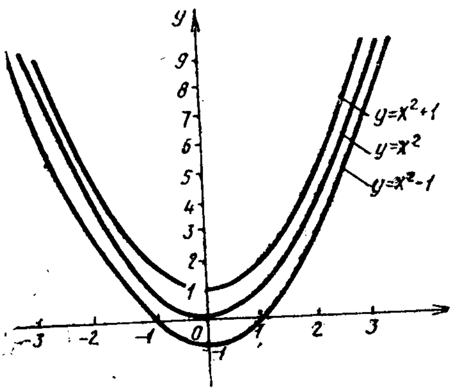
$$y = \int 2x\,dx = x^2 + C; \; y = x^2 + C. \tag{62}$$

Бу парабола тенгламасидир. Аниқроғи бир-биридан C константа билан фарқланувчи бутун бир параболалар оиласи олинди. Бу параболалардан баъзиларининг графиклари 12-расмда кўрсатилган. C доимий ҳар бир конкрет ҳолда қўшимча шартлар бўйича аниқланади. Мазкур мисолда эгри чизиқ координаталари $x=1$, $y=2$ бўлган нуқта орқали ўтадиган бўлсин дейлик. Бу қийматларни (62)-тенгламага қўйсак:

$$2 = 1^2 + C; \; C = 1,$$

маълум бир парабола тенгламасини оламиз:

$$y = x^2 + 1.$$



12-расм.

6. Тезлик билан вақт орасидаги муносабатга кўра юрилган йўлни топиш

Моддий нуқтанинг тезлиги вақт давомида

$$v = 4t + 2 \tag{63}$$

қонун бўйича ўзгарсин дейлик.

Нуқтанинг юрган йўли вақтга қандай боғланади?

Маълумки, $v = ds/dt$, бундан

$$ds = vdt = (4t + 2)\,dt.$$

Бу тенгликни интеграллсак,

$$s = \int (4t + 2)\,dt = 4\int t\,dt + 2\int dt;$$

$$s = 2t^2 + 2t + C \text{ ни оламиз.} \tag{64}$$

Доимий C, аввалги мисолдагидек, масаланинг конкрет шартларидан топилади. Масалан, қўшимча шарт берилган бўлиши мумкин: бошланғич ($t=0$) моментда моддий нуқта ноличи ҳисоб бошидан аллақачон s_0 масофада турган бўлсин, у ҳолда (64)-дан

$$s_0=0+0+C, \text{ яъни } s_0=C \text{ га эга бўламиз.}$$

бундан (64)-ўрнига

$$s=2t^2+2t+s_0$$

га эга бўламиз.

Тезлик деганда ёлғиз механик ҳаракат тезлиги тушунилмасдан, балки препаратнинг организм томонидан сингдирилиш тезлиги, бактерияларнинг кўпайиш, тўқиманинг емирилиш, химиявий процесс, радиоактив емирилиш ва ш. ў. процессларнинг тезлиги ҳам тушунилиши мумкин бўлгани учун интеграллаш йўли билан организм сингдирган препаратнинг, бактериялар миқдорининг, емирилган тўқима миқдорининг ва шу кабиларнинг тегишлича вақт билан боғланишларини топиш мумкин.

§ 8. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

Аниқ интегрални кўриб чиқишдан аввал шу тушунчага олиб келувчи икки типик масалани кўриб чиқиш мақсадга мувофиқдир.

1. Эгри чизиқли трапеция юзини ҳисоблаш

Графиги 13-расмда тасвирланган функция $y=f(x)$ берилган. X ўқи устида a ва b нуқталарини танлаб олиб, улардан эгри чизиқ билан кесишгунча перпендикуляр ўтказамиз. Эгри чизиқ перпендикуляр ва X ўқ билан чегараланган фигурани эгри чизиқли трапеция дейилади. Шу трапециянинг юзини қандай ҳисоблаш мумкин?

$[a, b]$ кесмани айрим майда кесмаларга бўлиб чиқамиз.

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b.$$

Ҳар бир кесма ичида бирорта ихтиёрий нуқтани танлаб оламиз:

$x_0x_1(\Delta x_1)$ кесма ичида $-k_1$ нуқтани: $x_0\leqslant k_1\leqslant x_1$
$x_1x_2(\Delta x_2)$ „ „ $-k_2$ „ : $x_1\leqslant k_2\leqslant x_2$ ва ҳ. к.
$x_{i-1}x_i(\Delta x_i)$ „ „ $-k_i$ „ : $x_{i-1}\leqslant k_i\leqslant x_i$ ва ҳ. к.

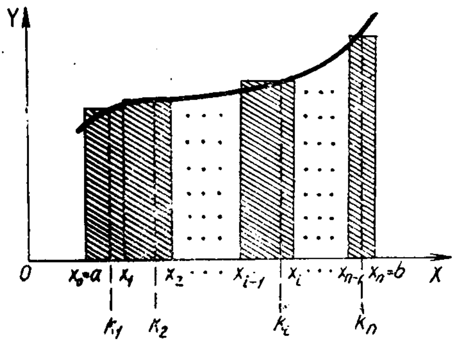
$f(k_1)\Delta x_1,\ f(k_2)\Delta x_2, \ldots$ кўпайтмаларини тузиб чиқамиз. Бундай кўпайтманинг ҳар бири асоси кесма $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ га, баландлиги эса тегишли кесманинг ихтиёрий нуқтадаги $f(x)$ функциянинг қиймати бўлган тўғри бурчакликнинг юзига тенг бўлади. Бундай кўпайтмаларнинг йиғиндиси:

$$\sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i \qquad (65)$$

барча тўғри тўртбурчакликлар юзига тенгдир. Улардан бир қисми 13-расмда кўрсатилган. $\sum\limits_{i=1}^{n}$ символи, i нинг қийматлари 1, 2, 3, ..., n бўлган ҳолда, $f(k_i)\Delta x_i$ нинг барча ҳадлари йиғиндисини ифодалайди. Агар кесмаларнинг ҳар бири етарли даражада кичик бўлса, яъни $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$ ва ҳ. к. бўлса, 13-расмда қурилганича штрихланган соҳа эгри чизиқли трапеция юзига яқинлашади. Шунинг учун бу трапециянинг юзи

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i \qquad (66)$$

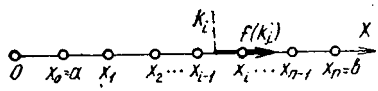
Шундай қилиб, эгри чизиқли трапеция юзини ҳисоблаш тўғрисидаги масала йиғинди (66) лимитини аниқлашга олиб келади.



13-расм.

2. Ўзгарувчи куч ишини ҳисоблаш

Жисмга қўйилган куч X ўқи бўйича йўналган ва X га боғлиқ, яъни X нинг функцияси: $y=f(x)$ бўлсин дейлик. Ўзгарувчи куч бажарган ишни қандай қилиб топиш мумкин?



14-расм.

Куч жисмни $x_0=a$ дан $x_n=b$ гача силжитганда иш бажарада (14-расм). Бу масофани майда бўлакларга бўлиб, аввалги масалага ўхшаш, кўпайтма тузамиз:

$$f(k_i)\Delta x_i$$

Умуман айтганда, бундай кўпайтманинг ҳар бири кучнинг Δx_i участкада бажарган ишига тенг эмас, лекин Δx_i кесма етарли даражада кичик бўлса, у ҳолда бу кўпайтма бажарилган ишдан кам фарқ қилади. Ўзгарувчи кучнинг иши айрим кесмаларда (участкаларда) бажарилувчи ишлардан йиғилади, шунинг учун қуйидагини ёзиш мумкин:

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i\,, \qquad (67)$$

бу ерда жамлаш барча кесмалар бўйича a дан b гача бажарилади.

Шундай қилиб, ўзгарувчи кучнинг ишини ҳисоблаш учун ҳам йиғинди (66) нинг лимитини аниқлай билиш керак.

3. Интеграл йиғинди. Аниқ интеграл

Аргументнинг айрим кесмалари узунликлари билан кесмаларнинг ихтиёрий нуқтасида олинган функция $f(x)$ қийматининг кўпайтмасига интеграл йиғинди деб айтилади [(65) га қаранг].

Юқорида таърифланган иккала масалада ҳам, кесмаларнинг ҳар бири нолга интилганда, яъни $\Delta x_i \to 0$ бўлган ҳолда (бу ерда $i=1, 2, 3, \ldots, n$) интеграл йиғинди лимитини топа билиш зарурлиги кўриниб турибди. Масаланинг математик жиҳатдан бундай қўйилиши аниқ интеграл тушунчасига олиб келади. Шу тушунчани кўриб чиқамиз.

Агар функция $f(x)$ бирорта $x=a$ дан $x=b$ гача бўлган оралиқда $\Delta x_i \to 0$ да интеграл йиғинди (65) интилган I сон мавжуд бўлса, функция интегралланадигандир. Бу ҳолда I сони $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги *аниқ интеграли* дейилади ва у

$$J=\int_a^b f(x)dx \qquad (68)$$

билан белгиланади; $[a, b]$ — интеграллаш соҳаси, бу ерда a — интегралнинг қуйи чегараси, b — интегралнинг юқори чегараси. «a дан b оралиғидаги интеграл эф икс де икс» деб ўқилади.

Айтилганидан маълум бўлишича:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i \, . \qquad (69)$$

Шундай қилиб, эгри чизиқли трапеция юзини ва ўзгарувчи кучнинг ишини ҳисоблаш аниқ интегрални топиш билан боғлиқдир.

4. Аниқ интегрални топиш қоидаси

Аниқ интегрални топиш учун Ньютон—Лейбниц формуласидан фойдаланилади:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \qquad (70)$$

бу ерда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функциясидир, яъни $F'(x)=f(x)$. Шундай қилиб, аниқ интегрални топиш учун бошланғич функцияни топиш ва бу бошланғич функцияга юқори ва қуйи чегараларни қўйиб, айириш лозим. Кўрсатилган амалларнинг кетма-кетлиги умумий ҳолда одатда қуйидагича ёзилади:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad (70a)$$

Мисоллар:

1) $\int\limits_3^5 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_3^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}$;

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1.$

5. Аниқ интегралнинг баъзи хоссалари

I. Агар интеграллаш чегаралари бир хил бўлса, у ҳолда аниқ интеграл нолга тенг бўлади:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{71}$$

Бу Ньютон—Лейбниц формуласи (70) дан келиб чиқади.

II. Агар интеграллаш чегаралари алмаштирилиб қўйилса, унда интегралнинг ишораси тескарисига ўзгаради:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx. \tag{72}$$

Бу ҳам Ньютон—Лейбниц формуласидан келиб чиқади.

III. Агар ҳар қандай тартибдаги сонлар қатори $a, b, c, \ldots, k, l$ берилган бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^l f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx + \ldots + \int\limits_k^l f(x)dx \quad \text{бўлади.} \tag{73}$$

Буни учта сон a, b, c бўлган ҳол учун исботлаймиз. (70)-га мувофиқ

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); \quad \int\limits_b^c f(x)dx = F(c) - F(b) \quad \text{ни ёзамиз.}$$

Бу ифодаларнинг тегишлича ўнг ва чап қисмларини қўшамиз

$$\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = F(c) - F(a),$$

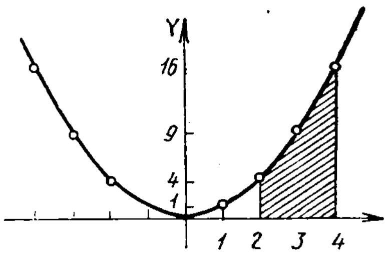
бу, (70)-га асосан, $\int\limits_a^c f(x)dx$ га тенг.

6. Ноаниқ интегрални эгри чизиқли трапеция юзини ва эластик кучнинг ишини ҳисоблаш учун татбиқ этиш

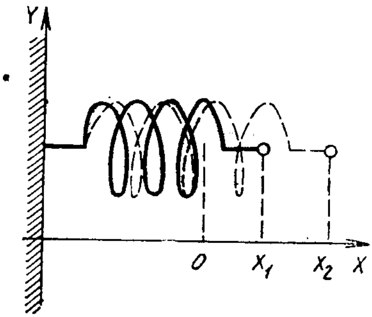
Мисол. Парабола тенгламаси берилган:
$y = x^2$. $a = 2$ дан $b = 4$ гача бўлган оралиқдаги (15-расм) эгри чизиқли трапеция юзини топинг.

Ечиш: $S = \int\limits_2^4 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} \approx 18{,}6$ кв. бр.

Масала. Эластик пружина бир учи маҳкамланиб, иккинчи учи x_1 дан x_2 гача тортилиб чўзилади (16-расм). Бу ҳолда бажариладиган ишни топинг?



15-расм.



16-расм.

Ечиш. Пружинани чўзувчи куч унинг деформацияланишига боғлиқ ва Гук қонунига мувофиқ

$$F_ч = kx$$

га тенг, бу ерда k — пружина қаттиқлиги. Бу формула пружинанинг ўнг томондаги учининг вазияти $x=0$ нуқтада (16-расмга қаранг) турган вақтда эластик кучлар бўлмайдиган шароитдагина тўғри келади. (67) ва (69) га асосан, пружинани чўзувчи кучнинг ишини топамиз:

$$A_ч = \int_{x_1}^{x_2} F_ч dx = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}.$$

Пружина эластик кучларининг $A_{эл}$ иши $A_ч$ га тенг бўлиб, тескари ишорага эга бўлади.

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

1. Таъриф

Номаълум y функция, эркин ўзгарувчи ва биринчи, иккинчи ва ҳ. к. тартибдаги ҳосилаларга эга бўлган тенгламага дифференциал тенглама деб айтилади:

$$F\,(y, x, y', y'', \ldots, y^n) = 0. \qquad (74)$$

Дифференциал тенгламанинг тартиби мазкур тенгламага кирувчи ҳосилалар тартибининг энг каттаси билан белгиланади. Масалан, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^4 + 3x^2y = 0$ учинчи тартибли дифференциал тенглама бўлади.

Дифференциал тенгламани ечиш мазкур тенгламани қаноатлантирадиган $y=f(x)$ функцияни топиш демакдир, яъни шу функцияни, шунингдек унинг ҳосилаларини тенгламага қўйганда айният олинадиган бўлиши керак.

2. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

Дифференциал тенгламалар тузиш ва ечиш мисолларини кўриб чиқамиз.

Мисол: Биринчи тартибли дифференциал тенгламани ечинг:

$$y' = 2xy \text{ ёки } \frac{dy}{dx} = 2xy. \qquad (75)$$

Ечиш. x ва y ўзгарувчиларни тенгламанинг турли томонларига ўтказамиз.

$$\frac{dy}{y} = 2xdx. \qquad (75а)$$

Бу ифодани интеграллаб

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int xdx,$$

$$\ln y = x^2 + C \qquad (76)$$

га эга бўламиз.

Тенгламага $\ln y$ кирганлиги учун доимийни логарифм шаклида ифодалаш, яъни (76)-ўрнига

$$\ln y = x^2 + \ln C \text{ ёки } \ln \frac{y}{C} = x^2$$

шаклда ёзиш қулай. Кейинги тенгликни потенциялласак,

$$y = Ce^{x^2} \qquad (77)$$

ни оламиз.

(77)-ифода *(75)-дифференциал тенгламанинг ечими* бўлади.

Ечишнинг тўғрилигини текширамиз. Бунинг учун (77)-дан ҳосила оламиз:

$$y' = Ce^{x^2} \cdot 2x. \qquad (*)$$

(77) ва (*)-ни (75)-га қўйиб, ушбу айниятни оламиз:

$$Ce^{x^2} 2x \equiv 2x\, Ce^{x^2};$$

демак, (77)-ҳақиқатан (75)-дифференциал тенгламанинг ечими бўлар экан.

Доимий C ни қўшимча: бошланғич, охирги: чегаравий ва ш. ў. шартлардан топадилар. Масалан, берилган тенгламага мос нуқта $x=0$, $y=2$ берилган бўлсин; бу қийматларни (77)-га қўйиб

$$2=Ce^{\circ}=C;\ C=2$$ га эга бўламиз.

Энди дифференциал тенгламанинг ечими бутунлай аниқ бўлади:

$$y=2e^{x^2}. \tag{77a}$$

(75а)-тенгламани аниқ интеграл тушунчасидан фойдаланиб бошқачароқ қилиб ҳам ечиш мумкин. Қуйи чегаралар сифатида изланувчи функцияга мос $x=0$, $y=2$ нуқталар координаталарини, юқори чегаралар сифатида — x ва y ўзгарувчиларни (улар фиксацияланган эмас) қўйиб, (75а)-ни интеграллаймиз.

$$\int_2^y \frac{dy}{y}=2\int_0^x xdx,$$

у ҳолда

$\ln\frac{y}{2}=2\frac{x^2}{2};\ y=2\,e^{x^2}$ га эга бўламиз;

натижа (77а)-га тўғри келади.

Масала. Бирорта организмдаги дори препарати миқдорининг химиявий емирилиш натижасида икки марта камайиши учун кетган вақтни топинг.

Ечиш. Бошланғич ($t=0$) моментда органда мавжуд бўлган препарат миқдори m_0. Бирор айни момент t да емирилмаган препаратнинг массаси m га тенг. Етарлича кичик dt вақтда dm препарат миқдори емирилган. dm химиявий емирилиш давом этган вақтга пропорционалдир дейиш мантиқлидир, яъни

$$dm=-\lambda mdt;$$

λ — препаратнинг табиатига, ташқи шароит ва ш. ў. ларга боғлиқ бўладиган бирор доимий катталик. «—» ишора препарат миқдорининг вақт давомида камайишини кўрсатади.

Кейинги тенгламадаги ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dm}{m}=-\lambda dt.$$

Қуйи чегараларнинг бошланғич шартларга, юқориларнинг — масала шартларига мос эканликларини ҳисобга олиб, бу дифференциал тенгламани интеграллаймиз:

$$\int_{m_0}^{m_0/2}\frac{dm}{m}=-\lambda\int_0^t dt;\ \ln\frac{m_0}{2m_0}=-\lambda t;$$

Бундан

$$t=\ln 2/\lambda.$$

Бу қиймат масалада қўйилган саволнинг жавобидир.

3. Иккинчи тартибли дифференциал тенглама

Мисол. Узунлиги l ва массаси m бўлган математик маятник гармоник тебранади. Унинг ҳаракатини таърифловчи дифференциал тенглама тузилсин.

Ечиш. Маятникка ипни таранглювчи куч $F_т$ ва ерга тортилиш кучи mg (6,2-расмни қаранг) таъсир этади. Маятникнинг оғиш бурчаги α ни кичик деб фараз қиламиз, шунда маятник ҳаракатини тўғри чизиқли деб қараш мумкин. Тенг таъсир этувчи кучнинг

$$F=-mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\approx -mg\,x/l$$

эканини кўриш қийин эмас; бу ерда $tg\,\alpha\approx x/l$ тақрибий равишда қабул этилади, «—» ишора куч йўналишига боғлиқ, g — эркин тушиш тезланиши.

Ньютоннинг иккинчи қонуни бўйича

$$-mgx/l=m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

$g/l=\omega^2$ билан белгиласак, кейинги муносабатдан

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x \tag{78}$$

га эга бўламиз.

Бу олинган дифференциал тенгламанинг ечими

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{79}$$

бўлади; бу ерда A — тебранишлар амплитудаси, φ_0 — уларнинг бошланғич фазаси.

Ечимнинг тўғрилигини текшириш учун

$$x'=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0),$$

$$x''=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{*}$$

ни топамиз.

(79) ва (*) ни (78)-га қўйсак, ушбу айниятни оламиз:

$$-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)\equiv-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi_0).$$

(78)-тенглама математик маятникнинг ёки гармоник тебранаётган исталган моддий нуқта ҳаракатининг тенгламасидир. Бу тенгламага кирувчи A ва φ_0 константаларнинг қийматлари бошланғич шартлар — бошланғич силжиш ва бошланғич тезлик — бўйича белгиланади.

4. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳақида тушунча

Бу параграфда юқорида кўриб чиқилган тенгламаларга *оддий* дифференциал тенгламалар дейилади.

Кўп физикавий, механикавий ва бошқа процесслар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар билан ифодаланади. Хусусий ҳосилали тенгламалар бир неча эркин ўзгарувчилар (масалан, x, y, z) нинг номаълум (u) функциясига ва уларнинг хусусий ҳосилаларига эга бўлади. Масалан: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=u$.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш анча мураккаб масаладир ва мазкур курсда кўриб чиқилмайди.

§ 10. ВЕКТОРЛАРНИНГ СКАЛЯР ВА ВЕКТОРИЙ КЎПАЙТМАСИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

1. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Икки **a** ва **b** векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб векторлар модулларининг улар орасидаги бурчак косинуси билан бўлган кўпайтмасига тенг бўлган скалярга айтилади: $A=ab\cos\alpha$. Скаляр кўпайтма қуйидагича белгиланади:

$$A=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}. \tag{80}$$

Агар кучнинг йўналиши силжишга нисбатан, шунингдек, унинг қиймати ўзгармас бўлса $\mathbf{s}$, силжиш вақтида $\mathbf{F}$ кучнинг бажарадиган иши скаляр кўпайтмага мисол бўла олади:

$$A=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}=Fs\cos\alpha.$$

2. Векторларнинг векторий кўпайтмаси

Векторларнинг векторий кўпайтмаси деб, кўпайтирилувчи векторлар ётган текисликка перпендикуляр бўлган векторга айтилади, бу вектор шундай йўналишга эга бўладики, агар биринчи кўпайтирилувчи векторни иккинчи кўпайтирилувчи вектор томонига кичик бурчакка ҳаёлан айлантирилса, бундай айланишга боғлиқ бўлган, ўнг винт кўпайтма — вектор йўналиши бўйича силжийдиган бўлади (17-расм). Векторий кўпайтмани шартли суратда қуйидагича ёзадилар:

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}. \tag{81}$$

Векторий кўпайтма сон жиҳатдан кўпайтирилувчи векторлар модуллари билан улар орасидаги бурчак синусининг кўпайтмасига тенг:

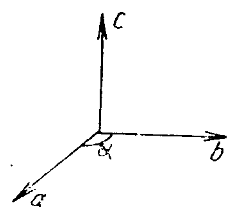
$$c=ab\sin\alpha. \tag{82}$$

§ 11. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛ ҲАҚИДА ҚИСҚАЧА МАЪЛУМОТЛАР

Фазода L эгри чизиқ берилган бўлсин (18-расм).

Фазонинг ҳар бир нуқтасига, демак, эгри чизиқнинг ҳам ҳар бир нуқтасига бирорта вектор миқдор, масалан куч $\mathbf{F}$, электр майдонининг кучланганлиги **E**, суюқлиқ заррачаларининг ҳаракат тезлиги **v** ва ҳ. к. мос келади. **a** векторининг фазода майдони бор деб гапириш қабул қилинган.

L эгри чизиқни P_1, $P_2, \ldots,$ $P_i, \ldots$ нуқталари ёрдамидэ айрим майда ёйларга бўламиз. Эгри чизиқнинг бирорта P_i нуқтасида $\mathbf{a}_i$ вектори модули билан мос ёй Δl_i узунлиги ва улар орасидаги бурчак косинусининг (вектор билан бу нуқтадаги эгри чизиқ уринмаси орасидаги бурчакнинг косинуси) кўпайтмасини тузамиз: $a_i \Delta l_i \cos\alpha_i$. Эгри чизиқнинг барча ёйлари бўйича шундай кўпайтмалар йиғиндисини тузамиз:



17-расм.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \Delta l_i \cos \alpha_i \tag{83}$$

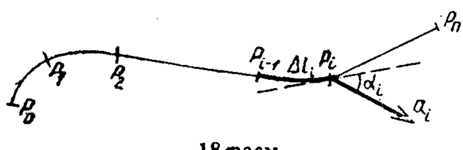
n чексиз ўсгандаги ва барча ёйлар нолга интилгандаги йиғинди (83)-нинг лимитига эгри чизиқли интеграл дейилади:

$$\int_L a \cos \alpha dl = \lim_{\Delta l_i \to 0} \Sigma a_i \Delta l_i \cos \alpha_i ; \tag{84}$$

интеграл ости ифодадаги dl ни вектор каби қараш мумкин ва шу вақтда эгри чизиқли интегрални скаляр кўпайтма орқали ифодалаш қулай.

$$\int_L a \cos \alpha dl = \int_L \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl}. \tag{85}$$

Эгри чизиқли интегралнинг яна бир ёзиш усулини таклиф қилиш мумкин.



18-расм.

Агар $\alpha \cos \alpha$ вектор **a** нинг dl йўналишига туширилган проекциясига, яъни a_l га тенг эканлиги ҳисобга олинса, шунда эгри чизиқли интегрални ушбу шаклда ёзиш мумкин:

$$\int_L a_l \, dl. \tag{85a}$$

Ёпиқ эгри чизиқ бўйича олинган эгри чизиқли интегрални циркуляция деб атайдилар ва қуйидагича белгилайдилар:

$$\oint_L a_l \, dl. \tag{85б}$$

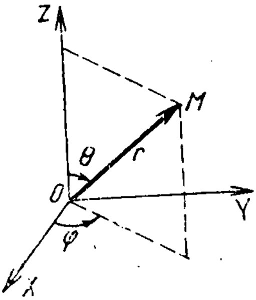
§ 12. СФЕРИК КООРДИНАТАЛАР

Фазода M нуқтанинг вазияти фақатгина Декарт координаталарида берилмай, сферик координаталарда ҳам берилиши мумкин (19-расм): r — радиус-векторнинг узунлиги, φ — узунлик, Θ — қутбий масофа. Санашнинг мусбат йўналиши расмда кўрсатилган. Эркин ўзгарувчиларнинг ўзгариш чегаралари қуйидагича:

$$0 \leqslant r < \infty; \ -\pi < \varphi \leqslant \pi; \ 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi.$$

Декарт координаталари сферик координаталар билан қуйидаги муносабатлар билан боғланади:

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi; \ \ y = r \sin \Theta \sin \varphi; \ \ z = r \cos \Theta.$$



19-расм.

Сферик симметрияга эга бўлган системаларни сферик координаталарда ифодалаш мақсадга мувофиқдир.

§ 13. ТАСОДИФИЙ ВОҚЕА. ЭҲТИМОЛЛИК

Турли ҳодисаларни кузатилганда S шартлар билан бирор A воқеанинг рўй бериши ёки бермаслиги орасида икки хил боғланиш борлигини пайқаш мумкин. Баъзи ҳолларда шартлар комплекси S нинг амалга оширилиши (синаш) бевосита A воқеани келтириб чиқаради. Масалан, массаси m_0 бўлган моддий нуқта F кучнинг таъсири остида (шарт S) $a = F/m_0$ тезланишга эга бўлади (воқеа A). Бошқа ҳолларда синаш кўп марта такрорланган A воқеанинг пайдо бўлиши ёки бўлмаслигига олиб келиши мумкин. Бундай воқеаларни *тасодифий* деб аташ қабул қилинган: маълум касаллик билан оғриган беморнинг врач кабинетида пайдо бўлиши, отиб ташланган танга пулнинг белгили томони билан тушиб қолиши ва бошқалар бундай тасодифий воқеалардандир.

Тасодифий ҳодисаларни бесабаб, ҳеч нарса билан шартланмаган деб ўйлаш мумкин эмас. Маълумки, барча ҳодисалар ўзаро боғланган бўлади, битта ҳодиса бошқа бирининг натижаси ва ўзи эса келажагининг сабаби бўлади. Бироқ шартлар ва воқеалар орасидаги бу боғланишни миқдорий равишда кузатиб бориш кўпинча қийин, ҳатто мумкин бўлмайди. Жумладан соққа ташлаш ўйинида (олти ёғи 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 қилиб номерланган кичик бир жинсли куб ташлаб ўйнаш) кубнинг сўнгги вазияти ташлаш пайтидаги қўл ҳаракатига, ҳаво қаршилигига, сиртга тушган вақтдаги кубнинг вазиятига, куб тушган сиртнинг хусусиятларига ва шунга ўхшаш ҳар бирини алоҳида ҳисобга олиш мумкин бўлмайдиган факторларга боғлиқдир.

Турмушда тасодифий воқеаларга татбиқан «бўлиши мумкин», «эҳтимол», «кам эҳтимол» деган сўзлар ишлатилади. Баъзи ҳолларда бундай баҳолаш воқеанинг ҳақиқий рўй бериш ёки рўй бермаслигидан кўра гапирувчининг ўзининг хоҳишини кўпроқ характерлайди. Лекин тасодифий воқеалар ҳам, агар уларнинг сони етарли даражада кўп бўлса, муайян қонуниятларга бўйсунади. Тасодифий воқеаларга оид қонуниятларга миқдорий баҳо бериш математиканинг *эҳтимолликлар назарияси* деб аталувчи бўлимида ўрганилади.

Эҳтимолликлар назарияси кўплаб (статистик) тасодифий воқеаларга тегишли қонуниятларни ўрганади. Айрим тарихий фактлар, «кутилмаганликлар», «ҳалокатлар» ягона, такрорланмайдиган воқеалардандир ва улар тўғрисида миқдорий эҳтимолий мулоҳаза қилиб бўлмайди. Тарихан бу назария қимор ўйинларнинг натижаларидаги турли имкониятларни ҳисоблашга интилишлар билан боғланиб пайдо бўлган. Ҳозирги замонда у фанда, шу билан бирга, амалий муҳим воқеаларнинг эҳтимоллигини баҳолаш учун, биология ва медицинада ҳам қўлланилади. Ўйинлардан фақат назарий қонун-қоидаларни тасвирлашда фойдаланиш учун қулай бўлган мисоллар қолган холос.

1. Эҳтимолликнинг статистик таърифи

$P(A)$ эҳтимоллик эҳтимоллик назариясида синашни кўп марта такрорлаш вақтида қандай маълум тасодифий воқеа A нинг содир бўлишини кўрсатувчи соний характеристика сифатида номоён бўлади.

Ўйин соққасини 1000 марта ташлаганда 4 рақами 160 марта тушсин дейлик. $160/1000=0{,}16$ нисбат мазкур синашлар сериясида 4 рақамнинг нисбий тушиш частотасини кўрсатади. Умумий ҳолда эркин синашларнинг n сериясида A тасодифий воқеа m марта рўй берса, бу синашлар сериясидаги *воқеалар нисбий частотаси* ёки шундай A воқеанинг частотаси деб

$$P^*(A)=m/n \qquad (86)$$

нисбатга айтилади. Синашлар сони катта бўлган ҳолда воқеа частотаси тахминан ўзгармас бўлади; синашлар сонининг кўпайиши воқеанинг ўзгариш частотасини ўзгармас миқдор атрофида камайтиради.

Синаш сони чексиз кўпайганда воқеа частотаси интиладиган лимитни *тасодифий воқеанинг эҳтимоллиги* деб атаймиз:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} m/n \qquad (87)$$

Ана шунинг ўзи эҳтимолликнинг с т а т и с т и к таърифидир.

Эҳтимолликни аниқлаш учун ҳеч ким ва ҳеч қачон чексиз марта синаш ўтказа олмаслиги табиий албатта. Бунинг ҳеч бир кераклиги ҳам йўқ. Амалда (87)-таърифга кўра, кўп сонли синашлар вақтида воқеанинг нисбий частотасини эҳтимоллик ўрнида қабул қилиш мумкин. Масалан, кўп йиллар давомида кузатилган туғилишнинг статистик қонуниятлари асосида туғиладиган гўдакнинг ўғил бўлиш эҳтимоллигини 0,515 қилиб баҳолайдилар.

2. Эҳтимолликнинг классик таърифи

Агар синашлар вақтида тасодифий воқеалардан бирининг бошқаларга нисбатан тезроқ бўлиб туриш сабаби бўлмайдиган (*тенг имкониятли воқеалар*) бўлса, эҳтимолликни назарий мулоҳазалар бўйича аниқлаш мумкин. Масалан, танга пулни юқорига отишда унинг герби юқорида бўлиб тушиш частотасини (A воқеа) аниқлаймиз. Ҳар хил экспериментаторлар томонидан бир неча минг синашлар натижасида бундай воқеаларнинг нисбий частотаси 0,5 га яқин қийматларни қабул қилганлиги аниқланган. Танганинг герб томони билан тушиши ёки қарама-қарши томони билан тушиши (B воқеа) ҳам, танга симметрик бўлгани ҳолда тенг имкониятли воқеалар бўлганини ҳисобга олиб, $P(A)=P(B)=0{,}5$ ҳақидаги мулоҳазани бу воқеалар частоталарини аниқламасдан қилиш мумкин. Воқеалар «тенг имкониятлилиги» тушунчасига асосан эҳтимолликни бошқача таърифлаш мумкин.

Синаш натижасида n га тенг имкониятли воқеалардан биттасигина рўй бериши мумкин бўлсин, дейлик. Текширилувчи A воқеа m марта A воқеага қулай ҳолда рўй бериб ва қолган, A воқеага қулай бўлмаган $n—m$ ҳолларда рўй бермайдиган бўлсин, дейлик. Шунда қулай бўлган ҳолларнинг тенг имкониятли ноўриндош воқеаларнинг умумий сонига нисбатини эҳтимоллик деб аташ мумкин:

$$P(A)=m/n. \tag{88}$$

Ана шу — эҳтимолликнинг классик таърифидир. Биргаликда вужудга келтирилиши мумкин бўлмайдиган воқеаларга *ноўриндош воқеалар* дейилади.

1-мисол. Урна (қути) ичида 40 та шар бор: 10 та қора ва 30 та оқ. Урна ичидан таваккалига чиқариб олинган битта шарнинг қора шарлардан бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Маъқул бўлувчи ҳоллар сони урна ичидаги қора шарлар сонига тенг: $m=10$. Тенг имкониятли воқеаларнинг умумий сони (битта шарни чиқариб олиш) урна ичидаги шарларнинг тўлиқ миқдорига тенг: $n=40$. Бу воқеалар ноўриндошдирлар, чунки ёлғиз биттагина шар чиқариб олинади. (88) дан

$P(A)=10/40=1/4$ га эгамиз.

2-мисол. Ўйин соққасини ташлаганда жуфт сон чиқиб қолиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Соққа ташланганда олтита тенг имкониятли ноўриндош воқеалар амалга оширилади: битта 1, 2, 3, 4, 5 ёки 6 рақамнинг пайдо бўлиши, яъни $n=6$. 2, 4 ёки 6 рақамлардан биттасининг тушиши: $m=3$ маъқул ҳоллардан бири бўлади. Изланувчи эҳтимоллик

$$P(A)=m/n=3/6=1/2.$$

(87) ва (88)-воқеалар эҳтимоллигининг таърифидан маълум бўлишича барча воқеалар учун $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

Берилган синашлар вақтида вужудга чиқолмаган воқеаларга *имконсиз* воқеалар дейилади; уларнинг эҳтимоллиги нолга тенг. Масалан, оқ ва қора шарли урна ичидан қизил шар чиқариб олиш имконияти йўқ, ўйин соққасида 7 рақамни олиш имконияти ҳам йўқ.

Берилган синашда албатта вужудга келадиган воқеага *ишончли (достоверный)* воқеа дейилади, унинг эҳтимоллиги 1 га тенг. Ичида фақат оқ шарлар бўлган урнадан оқ шарни чиқариб олиш ишончли воқеа мисолидандир.

Қатор ҳолларда воқеа эҳтимоллигини ҳисоблаш, агар унга соддароқ воқеалар комбинацияси деб қараладиган бўлса, анча осонлашади. Бу мақсад учун эҳтимоллик назариясининг баъзи теоремалари хизмат қилади.

3. Эҳтимолликларни қўшиш теоремаси

Бир неча ноўриндош воқеалардан битта воқеанинг (қайси воқеа бўлишидан қатъи назар) пайдо бўлиш эҳтимоллиги улар эҳтимоллигининг йиғиндисига тенг. Бу икки ноўриндош воқеалар учун қуйидагича ёзилади:

$$P\,(A \text{ ёки } B)=P\,(A)+P\,(B). \qquad (89)$$

Бу теоремани исботлаймиз. n — синашларнинг умумий сони, m_1 — A воқеага қулай ҳоллар сони, m_2 — B воқеага қулай ҳоллар сони. Ё A воқеанинг ёки B воқеанинг вужудга келиши учун қулай бўлган ҳоллар сони m_1+m_2 га тенг.

$$P\,(A \text{ ёки } B)=(m_1+m_2)/n=m_1/n+m_2/n$$

ни ёзиш мумкин.

Бундан, (88)-ни ҳисобга олиб,

$$P\,(A \text{ ёки } B)=P\,(A)+P\,(B) \text{ га эга бўламиз.}$$

1-мисол. Ўйин соққасини ташлаганда 1 ва 6 тушиш эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. А воқеа (1 нинг тушиши) ва B воқеа (6 нинг тушиши) тенг имкониятлидирлар: $P\,(A)=P\,(B)=1/6$, шунинг учун (89)-дан топамиз:

$$P\,(A \text{ ёки } B)=1/6+1/6=1/3.$$

Эҳтимолликларни қўшиш фақат иккитаси учун эмас, балки исталганча ноўриндош воқеалар учун ҳам тўғри келади.

2-мисол. Урна ичида 50 шар бор: 10 та оқ, 20 та қора, 5 та қизил ва 15 та кўк. Урнадан бир карра шар олиш операцияси вақтида оқ ёки қора ёки қизил шарнинг пайдо бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Оқ шар чиқариш (A воқеа) эҳтимоллиги $P\,(A)=10/50=1/5$ га тенг, қора шар чиқаришнинг эҳтимоллиги (B воқеа) — $P\,(B)=20/50=2/5$ ва қизил шарники (С воқеа) — $P\,(C)=5/50=1/10$. Бундан эҳтимолликларни қўшиш формуласи бўйича: $P\,(A \text{ ёки } B \text{ ёки } C)=P\,(A)+P\,(B)+P\,(C)=1/5+2/5+1/10=7/10$.

Агар бирдан-бир бўлиши мумкин бўлган икки воқеа ноўриндош бўлса, уларга *қарама-қарши* воқеалар дейилади. Бундай воқеаларни, масалан, A ва $\bar{A}$ қилиб белгилаш қабул этилган. Икки қарама-қарши воқеалар эҳтимолликларининг йиғиндиси, эҳтимолликларни қўшиш теоремасига мувофиқ, бирга тенг:

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \qquad \textbf{(90)}$$

(90)-нинг тўғрилигини илгариги мисолда кўрсатамиз. Айтайлик, оқ ёки қора ёки қизил шарнинг чиқарилиши A_1 воқеа бўлсин, $P(A_1)=7/10$. Кўк шарнинг чиқарилиши қарама-қарши ($\bar{A}_1$) воқеа бўлади. Кўк шарлар 15 та, шарларнинг умумий сони эса 50 бўлгани учун,

$P(\bar{A}_1)=15/50=3/10$ ва $P(A_1)+P(\bar{A}_1)=7/10+3/10=1$ бўлади.

3-мисол. Урнада оқ, қора ва қизил шарлар бор. Қора ёки қизил шарни чиқариш эҳтимоллиги 0,4 га тенг. Урнадан оқ шарни чиқариш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Қора ёки қизил шарни чиқариш воқеасини A билан белгилайлик, $P(A)=0{,}4$; оқ шарни чиқариш қарама-қарши $\bar{A}$ воқеа бўлади, шунда (90) га асосан бу воқеанинг эҳтимоллиги $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}4=0{,}6$ бўлади.

Синаш вақтида $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ воқеалар системасидан ёлғиз биттаси юз берса, бу воқеалар системаси *тўлиқ* система дейилади. Тўлиқ системани ташкил қилувчи воқеалар эҳтимолликларининг йиғиндиси бирга тенг.

4-мисол. Урна ичида 40 та шар бор: 20 та оқ, 15 та қора ва 5 та қизил. Оқ шарнинг пайдо бўлиши (А воқеа) эҳтимоллиги $P(A)=20/40=1/2$ га тенг, қора шар учун (B воқеа) — $P(B)=15/40=3/8$ ва қизил шар учун (C воқеа) — $P(C)=5/40=1/8$. Бу ҳолда A_1, A_2, A_3 воқеалар системаси тўлиқ бўлади; $P(A)+P(B)+P(C)=1/2+3/8+1/8=1$ бўлганига ишониш мумкин.

4. Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремаси

Эркин воқеаларнинг биргаликда пайдо бўлиш эҳтимоллиги улар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг. Икки воқеа учун қуйидагига эгамиз:

$$P(A \text{ ва } B)=P(A)\cdot P(B). \qquad \textbf{(91)}$$

Бу теоремани исбот қиламиз. A ва B воқеалари эркин бўлганликлари учун A га қулай бўлган m_1 ҳоллардан ҳар бирига B га қулай бўлганларидан m_2 таси мос келадиган бўлади. Шундай қилиб, A ва B воқеаларнинг биргаликда пайдо бўлишига қулай бўлган ҳолларнинг умумий сони $m_1 \cdot m_2$ га тенг. Шунга ўхшаш тенг имкониятли воқеаларнинг умумий сони $n_1 \cdot n_2$ га тенг, бу ерда n_1 ва n_2 тегишлича A ва B учун тенг имкониятли воқеалар:

$$P(A \text{ ва } B)=\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=P(A)\cdot P(B) \qquad \textbf{(92)}$$

га эга бўламиз.

1-м и с о л. Бир урнада 5 та қора ва 10 та оқ шар бўлиб, иккинчисида — 3 та қора ва 17 та оқ шар бор. Ҳар бир урнадан биринчи чиқарилган шарларнинг иккови ҳам: 1) қора бўлиши, 2) оқ бўлиши, 3) биринчи урнадан чиқарилган шарнинг қора бўлиши, иккинчидан — оқ бўлиши, 4) биринчи урнадан оқ шар чиқарилиши, иккинчисидан эса — қора чиқарилиш эҳтимолликларини топинг.

Е ч и ш. Биринчи урнадан қора шарни чиқариб олиш (A воқеа) эҳтимоллиги $P(A)=5/15=1/3$ га тенг, иккинчи урнадан қора шарни (B воқеа) — $P(B)=3/20$ га, оқ шарни биринчи урнадан (A' воқеа) — $P(A')=10/15=2/3$ га ва оқ шарнинг биринчи урнадан чиқарилиш (B' воқеа) эҳтимоллиги $P(B')=17/20$ га тенг. (91)-формула бўйича икки эркин воқеанинг биргаликда пайдо бўлиш эҳтимоллигини топамиз:

1) шарларнинг иккови ҳам қора,

$$P(A \text{ ва } B)=P(A)\cdot P(B)=\ (1/3)\cdot(3/20)=3/60;$$

2) шарларнинг иккови ҳам оқ,

$$P(A' \text{ ва } B')=P(A')\cdot P(B')=\ (2/3)\cdot(17/20)=17/30;$$

3) биринчи урнадан қора, иккинчисидан — оқ шар чиқарилганда,

$$P(A \text{ ва } B')=P(A)\cdot P(B')=\ (1/3)\cdot(17/20)=17/60;$$

4) биринчи урнадан оқ шар, иккинчисидан — қора шар чиқарилганда,

$$P(A' \text{ ва } B)=P(A')\cdot P(B)=(2/3)\cdot\ (3/20)=1/10.$$

Барча бўлиши мумкин бўлган тўртта A ва B, A' ва B', A ва B', A' ва B ҳол тўлиқ воқеалар системасини ташкил этади, шунинг учун

$$P(A \text{ ва } B)+P(A' \text{ ва } B')+P(A \text{ ва } B')+P(A' \text{ ва } B)=$$
$$=3/60+17/30+17/60+1/10=1.$$

2-м и с о л. Оиладаги учта боланинг ҳаммаси ўғил бўлиш эҳтимоллиги топилсин. Ўғил туғилиш эҳтимоллигини 0,515 га тенг ва ҳар бир кейин туғилган боланинг жинси илгариги болаларнинг жинсига боғлиқ эмас деб ҳисоблансин.

Е ч и ш. Эҳтимолликларни кўпайтиш теоремасига асосан:

$P(A \text{ ва } B \text{ ва } C)=0{,}515\cdot0{,}515\cdot0{,}515\approx0{,}14.$

3-м и с о л. Биологик системага ионловчи нурланиш таъсирини тушунтиришда нишон назариясидан фойдаланадилар. Масалан, ионловчи зарра уриладиган «нишон» сифатида қараш мумкин. Ҳужайра N та нишонга эга ва L та заррача таъсирига дучор бўлади. Муайян заррачанинг муайян нишонга урилиш эҳтимоллиги $P(A)$ га тенг бўлган ҳолда ҳеч бир нишоннинг шикастланмаслик эҳтимоллигини топинг. Заррачаларнинг нишонга урилишлари эркин воқеалардир деб фараз этилади.

Ечиш. Муайян нишоннинг берилган зарра томонидан шикастланмаслигининг эҳтимоллиги $1-P(A)$ га тенг. Нишонга бошқа зарралар урилишлари мумкин. Берилган нишонга ҳеч бир зарра урилмаслигининг эҳтимоллиги L та $[1-P(A)]$ кўпайтувчининг кўпайтмасига, яъни $[1-P(A)]^L$ га тенг. Барча нишонларни ҳисобга олиш учун охирги ифодани ўз-ўзига N марта кўпайтириш керак, пировардида $[1-P(A)]^{LN}$ га эга бўламиз.

Агар иккита ўзаро боғлиқ бўлиб, биргаликда пайдо бўлувчи воқеалардан иборат воқеа эҳтимоллиги аниқланадиган бўлса, эҳтимолликларни кўпайтириш теоремаси мураккаблашади. B воқеа А воқеа ўринли бўлгандагина бажариладиган ҳолда, бу икки воқеанинг биргаликда пайдо бўлиш эҳтимоллиги

$$P(A \text{ ва } B)=P(A)\cdot P(B/A) \tag{93}$$

га тенг, бу ерда $P(B/A)$ *шартли эҳтимоллик,* яъни A воқеа амалга ошгандан сўнг B воқеанинг рўй бериш эҳтимоллиги.

Мисол. Урна ичида 5 та шар бор: 3 таси оқ, 2 таси қора. Кетма-кет урнадан бирин-кетин қора ва оқ шарлар чиқарилишининг эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Биринчи бўлиб қора шар (А воқеа) чиқарилиш эҳтимоллиги $P(A)=m/n=2/5$ га тенг. Қора шар чиқарилгандан кейин урна ичида 4 шар қолади: 3 та оқ ва 1 та қора. Бу ҳолда оқ шарнинг чиқарилиш (A воқеа бажарилгандан сўнг юз берувчи B воқеа) эҳтимоллиги $P(B/A)=3/4$ га тенг. (93) ни ишлатиб,

$$P(A \text{ ва } B) = (2/5)\cdot(3/4)=3/10 \text{ ни оламиз.}$$

§ 14. ТАСОДИФИЙ КАТТАЛИК. ТАҚСИМОТ ҚОНУНИ. СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАР

1. Тасодифий катталикнинг таърифи

Кўпгина тасодифий воқеалар тасодифий катталиклар сифатида миқдоран баҳоланишлари мумкин. *Тасодифий* деб эгалланган қийматлари мавжуд, тасодифий шароитларга боғлиқ бўлган *катталикка* айтилади; унга врач қабулидаги беморлар сони, аудиториядаги студентлар сони, шаҳардаги туғилишлар сони, айрим киши умрининг узоқлиги, молекуланинг тезлиги, ҳавонинг температураси, бирор катталикни ўлчашда қилинган хато ва бошқалар киради. Агар урна ичидаги шарлар, тахминан, спортлото тиражи ўйналгандагидек, номерланган бўлсалар, у ҳолда урнадан шарнинг ихтиёрий чиқарилиши тасодифий катталик бўлган сонни кўрсатади.

Дискрет ва узлуксиз тасодифий катталикларни ажратадилар. Саноқли тўпламдек қийматларга эга тасодифий катталикка *дискрет* дейилади: ихтиёрий олинган саҳифадаги ҳарфлар сони, атомдаги электрон энергияси, одам бошидаги сочнинг сони, бошоқдаги донлар сони, ажратилган газ ҳажми ичидаги молекулалар сони ва шунга ўхшашлар.

Узлуксиз тасодифий катталик бирор интервал ичида исталган қийматларни қабул қилади: муайян вақт бўлаги давомидаги ҳаво температураси, буғдой бошоқларидаги донлар массаси, бир тўдадаги молнинг ўлчови, ўқнинг мўлжалга урилиш жойининг координатаси (ўқни моддий нуқта ҳисоблаймиз) ва бошқалар.

2. Дискрет тасодифий катталик тақсимоти

Агар бўлиши мумкин бўлган қийматлари ва уларга мос эҳтимолликлари кўрсатилган бўлса, шунда дискрет тасодифий катталик берилган ҳисобланади. Дискрет тасодифий катталикни X, унинг қийматларини x_1, $x_2, \ldots$, эҳтимолликларни эса $P(x_1)=p_1$, $P(x_2)=p_2$ ва ҳ.к билан белгилаймиз. X ва P тўпламга *дискрет тасодифий катталик тақсимоти* дейилади:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	. . .
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	. . .

Дискрет тасодифий катталикнинг бўлиш имкониятига эга барча қийматлари тўлиқ системани ташкил қилганлари учун § 13 га қаранг) эҳтимолликлар йиғиндиси бирга тенг бўлиши керак, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1; \tag{94}$$

бу ерда дискрет тасодифий катталик n та қийматга эга деб фараз этилади. 94-ифодага *нормалаш шарти* дейилади.

1-мисол. Ўйин соққасининг юқори ёғида тушувчи очколар сони тасодифий катталикдир. Шу тасодифий катталик тақсимоти кўрсатилсин.

Ечиш.

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2-мисол. Спортлото ўйинида спорт турининг номери тасодифий катталикдир. Турларнинг умумий миқдори 49 га тенг. Шу тасодифий катталик тақсимоти кўрсатилсин.

Ечиш.

X	1	2	3	. . .	49
P	1/49	1/49	1/49	. . .	1/49

3. Биномиал тақсимот

Бирорта синаш уч карра ўтказилади ва шу вақтда A воқеа l марта рўй беради дейлик; l — тасодифий катталик бўлиб, у уч марта синаш вақтида 0,1,2 ва 3 га тенг қийматларга эга бўлади. А воқеанинг вужудга келиш эҳтимоллиги Р (A) га тенг; A воқеанинг вужудга келиш эҳтимоллиги $P(A)$ га тенг; A воқеанинг вужудга келмаслик эҳтимоллиги, яъни ($\bar{A}$) қарама-қарши воқеанинг ўринли бўлиши $[1—P\ (A)]$ га тенг.

$l=0$ қиймат А воқеанинг кетма-кет уч марта вужудга келмаган ҳолга мосдир. Бу мураккаб воқеанинг эҳтимоллиги эҳтимолликларни кўпайтишнинг (91) теоремаси бўйича қуйидагига тенгдир:

$$P\ (\bar{A}\ \text{ва}\ \bar{A}\ \text{ва}\ \bar{A})=[1-P\ (A)]\cdot[1-P\ (A)]\cdot[1-P\ (A)]=[1-P\ (A)]^3.$$

$l=1$ қиймат A воқеанинг учта синашлардан биттасида вужудга келган ҳолда тегишлидир. (91)-формула бўйича оламиз:

$$P\ (A\ \text{ва}\ \bar{A}\ \text{ва}\ \bar{A})=P\ (A)\cdot[1-P\ (A)]\cdot[1-P\ (A)]=$$
$$=P\ (A)\cdot[1-P\ (A)]^2.$$

$l=1$ бўлган вақтда яна иккита бошқа мураккаб ($\bar{A}$ ва A ва $\bar{A}$) ва ($\bar{A}$ ва $\bar{A}$ ва A) воқеалар ҳам вужудга келадиган бўлгани учун (89) — эҳтимолликларни қўшиш теоремасидан фойдаланиб, $l=1$ га оид тўлиқ эҳтимолликни олиш зарур:

$$P\ (A\ \text{ва}\ \bar{A}\ \text{ва}\ \bar{A}\ \text{ёки}\ \bar{A}\ \text{ва}\ A\ \text{ва}\ \bar{A}\ \text{ёки}\ \bar{A}\ \text{ва}\ \bar{A}\ \text{ва}\ A)=$$
$$=3P\ (A)\cdot[1-P(A)]^2.$$

$l=2$ қиймат А воқеанинг учта синашдан иккитасида вужудга келган ҳолга тегишлидир. Юқорида келтирилганларга ўхшаш мулоҳазалар билан бу ҳол учун қуйидагича тўлиқ эҳтимолликни оламиз:

$$P\ (\bar{A}\ \text{ва}\ A\ \text{ва}\ A\ \text{ёки}\ A\ \text{ва}\ \bar{A}\ \text{ва}\ A\ \text{ёки}\ A\ \text{ва}\ A\ \text{ва}\ \bar{A})=$$
$$=3P^2\ (A)\cdot[1-P(A)].$$

$l=3$ бўлганда A воқеа синашнинг учаласида ҳам пайдо бўлади. Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремасидан фойдаланиб,

Р (A ва A ва A) $=P^3$ (А) ни топамиз.

Натижада тўрт ҳадга эга бўлган биномиал тақсимотни оламиз;

l	0	1	2	3
P	$[1-P(A)]^3$	$3P(A)\cdot[1-P(A)]^2$	$3P^2(A)\cdot[1-P(A)]$	$P^3(A)$

Биномиал тақсимот умумий ҳолда n синаш вақтида A воқеанинг l марта вужудга келиш эҳтимоллигини аниқлашга имкон беради:

$$P_{ln} = \frac{n(n-l)\cdots(n-l+l)}{l!}p^l(1-p)^{n-l}, \text{ бунда } P(A)=p. \qquad (95)$$

Мисол. Кўп йиллар давомида ўтказилган кузатишларга асосан берилган уйга врач чақирилиш эҳтимоллиги 0,5 га тенг. 6 кун давомида врачнинг 4 марта чақирилиш эҳтимоллигини аниқланг.

Ечиш. $P(A)=0{,}5$; $n=6$; $l=4$. (95)-формуладан фойдаланамиз:

$$P = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot(0{,}5)^4\cdot(0{,}5)^2 = 0{,}234.$$

4. Дискрет тасодифий катталикнинг сонли характеристикалари

Кўп ҳолларда тасодифий катталик тақсимоти билан бир қаторда ёки унинг ўрнида бу катталиклар ҳақидаги информацияни тасодифий катталикларнинг сонли характеристикаси деб аталувчи сонли параметрлар бериши мумкин. Улардан энг кўп ишлатиладиганларини кўриб чиқамиз:

Тасодифий катталикнинг *математик кутилиши* (ўртача қиймати) унинг барча бўлиши мумкин қийматларининг шу қийматлар эҳтимолликлари билан бўлган кўпайтмаларнинг йиғиндисидир:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{l=1}^{n} x_l p_l \qquad (96)$$

Фараз қилайлик, дискрет X тасодифий катталик, синашлар сони n катта бўлганда тегишлича $m_1, m_2, \ldots, m_n$ марта синашда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларни қабул қилсин. Ўртача қиймат

$$\overline{X} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_n x_n}{n} = x_1\frac{m_1}{n} + \cdots + x_n\frac{m_n}{n} \text{ га тенг.}$$

Агар n катта бўлса, у ҳолда нисбий частоталар $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots$ эҳтимолликка, ўртача миқдор эса — математик кутишларга интилади. Худди шунинг учун математик кутилишни ўртача қиймат ўрнида қабул этадилар.

1-мисол. Ўйин соққаси ташланганда унинг ёғидаги рақам билан берилувчи дискрет тасодифий катталик учун математик кутилишни топинг.

Ечиш. (96)-ни ишлатамиз:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

2-мисол. Спортлото тиражи бўйича аниқланувчи дискрет тасодифий катталик учун математик кутилишни топинг.

Ечиш. ((96)-га мувофиқ

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{49}+2\cdot\frac{1}{49}+\cdots+49\cdot\frac{1}{49}=25 \text{ ни топамиз.}$$

Дискрет тасодифий катталикнинг мумкин бўлган қийматлари унинг математик кутилиши атрофида сочилган бўлади, уларнинг бир қисми $M(X)$ дан катта, бир қисми эса $M(X)$ дан кичик бўлади. Тасодифий катталикнинг унинг ўртача қийматига нисбатан фарқланиш даражасини қандай баҳолаш мумкин? Бундай масалани ечиш учун барча тасодифий катталикларнинг унинг математик кутилишидан фарқланишларини, яъни $X-M(X)$ ни, сўнгра бу фарқланишларнинг математик кутилишини (ўртача қийматини), яъни $M[X-M(X)]$ ни ҳисоблаш керакдек кўринади. Бу катталикнинг нолга тенг эканини исботсиз таъкидлаб ўтамиз, чунки тасодифий катталикларнинг математик кутилишдан фарқланишлари ҳам мусбат, ҳам манфий қийматларга эга бўлади. Шунинг учун фарқланишларнинг ё абсолют қийматлари: $M[X-M(X)]$ ни ёки уларнинг квадратлари: $M[X-M(X)]^2$ ни ўрталаш мақсадга мувофиқдир. Иккинчи вариант маъқулроқ бўлар экан; мана шундай қилиб тасодифий катталик дисперсияси тушунчасига келинади.

Тасодифий катталик дисперсияси деб тасодифий катталикнинг ўз математик кутилишидан фарқланиш квадратининг математик кутилишига айтилади:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2 \qquad \textbf{(97)}$$

Дисперсияни ҳисоблашга қулай бўлган формулани чиқармасдан келтирамиз.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2. \qquad \textbf{(98)}$$

Бу, X тасодифий катталик квадратининг математик кутилиши билан унинг математик кутилишининг квадрати орасидаги айирмага тенг, демакдир.

Мисол. Ўйин соққасини ирғитганда унинг ёғидаги рақам билан берилувчи тасодифий катталикнинг дисперсиясини топинг.

Ечиш. Бу тақсимотнинг математик кутилиши 3,5 га тенг. Тасодифий катталикларнинг математик кутилишдан фарқланиш квадратларининг қийматларини ёзайлик: $(1-3{,}5)^2=6{,}25$; $(2-3{,}5)^2=2{,}25$; $(3-3{,}5)^2=0{,}25$; $(4-3{,}5)^2=0{,}25$; $(5-3{,}5)^2=2{,}25$ $(6-3{,}5)^2=6{,}25$. (96) ни ҳисобга олиб (97)-формула бўйича дисперсияни топамиз:

$$D(X)=6{,}25\cdot(1/6)+2{,}25\cdot(1/6)+0{,}25\cdot(1/6)+0{,}25\cdot(1/6)+$$
$$+2{,}25\cdot(1/6)+6{,}25\cdot(1/6)\approx 2{,}9167.$$

(98)-формуладан фойдаланиб, дисперсияни ҳисоблаймиз.

$$[M(X)]^2=3{,}5^2=12{,}25;$$

$$M(X^2) = 1^2 \cdot (1/6) + 2^2 \cdot (1/6) + 3^2 \cdot (1/6) + 4^2 \cdot (1/6) + 5^2 \cdot$$
$$\cdot (1/6) + 6^2 \cdot (1/6) = 15,1667;$$
$$D(X) = 15,1667 - 12,25 = 2,9167.$$

(97)-дан келиб чиқишича, дисперсия тасодифий катталик ўлчамининг квадратидай ўлчамга эгадир. Тасодифий катталикнинг сочилишини (тарқалишини) худди шу ўлчам бирликларида баҳолай билиш учун *ўртача квадратик фарқланиш* тушунчасини киритадилар. Ўртача квадратик фарқланиш деб дисперсия квадрат илдизига айтилади:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \qquad (99)$$

5. Узлуксиз тасодифий катталик тақсимоти ва характеристикалари

Узлуксиз тасодифий катталикни дискрет катталик бериладиган тақсимот қонуни билан бериш мумкин эмас. Бу ҳолда қуйидагича иш қилинади. Фараз қилайлик, dP узлуксиз тасодифий X катталикнинг x ва $x+dx$ ораликда қабул қиладиган эҳтимоллиги бўлсин. Умумий мулоҳазалардан маълумки, dx интервал қанча катта бўлса, dP эҳтимоллик ҳам шунча катта бўлади: $dP \sim dx$. Бундан ташқари эҳтимоллик интервал яқинидаги тасодифий катталикнинг ўзига ҳам боғлиқ бўлиши керак, шунинг учун

$$dP = f(x)\,dx \text{ ни оламиз.} \qquad (100)$$

$f(x)$ функцияга *эҳтимоллик зичлиги* ёки *эҳтимолликлар тақсимоти функцияси* дейилади. У, тасодифий катталикнинг интервал бирлигига нисбатан олинган эҳтимоллигининг шу катталикнинг ўзининг қийматига боғлиқ бўлган ҳолда қандай ўзгаришини кўрсатади:

$$f(x) = dP/dx. \qquad (101)$$

(100)-ифодани тегишли чегараларда интегралласак, тасодифий катталикнинг (ab) интервал ичидаги бирор қийматни эгаллаш эҳтимоллигини топамиз:

$$P_{ab} = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (102)$$

Узлуксиз тасодифий катталик учун нормалаш шарти қуйидаги шаклга эгадир:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (103)$$

Математикада эҳтимоллик зичлиги билан бир қаторда *узлуксиз тасодифий катталикнинг тақсимот $F(x)$ функцияси* ҳам ишлатилади, бу функция

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad (104)$$

ифода бўйича аниқланади.

(104)-дан маълум бўлишича, бу функция тасодифий катталикнинг x дан камроқ қийматларни эгаллаш эҳтимоллигига тенг:

$$F(x) = P(-\infty < X < x).$$

Узлуксиз тасодифий катталик учун математик кутилиш ва дисперсия мос равишда қуйидаги шаклда ёзилади:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad (105)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx. \qquad (106)$$

6. Нормал тақсимот қонуни

Эҳтимолликлар ва хатоликлар назарияларида, турли амалий татбиқотларда *нормал тақсимот қонуни (Гаусс қонуни)* муҳим роль ўйнайди. Агар эҳтимоллик зичлиги

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} \qquad (107)$$

шаклга эга бўлса, тасодифий катталик бу қонун бўйича тақсимланади, бу ерда $a = M(X)$ — тасодифий катталикнинг математик кутилиши, σ — ўртача квадратик фарқланиш.

Нормал тақсимот қонунининг эгри чизиғи, $x = a$ тўғри чизиққа (сочилиш марказига) нисбатан симметрик қўнғироқсимон шаклга эга бўлади. $x = a$ нуқтада функция максимумга етади: $f(x)_m = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$. $|x|$ ошиб борган сари $f(x)$ функция нолга асимптотик яқинлаша бориб, монотон камайиб кетади. σ камайиши билан эгри чизиқ борган сари ўткир тепаликли бўлади. σ доимий бўлган ҳолда a нинг ўзгариши эгри чизиқ формасига таъсир этмасдан фақатгина уни абсцисса ўқи бўйлаб силжитади. Эгри чизиқ тагидаги юза, нормалаш шартига биноан, бирга тенг.

Бу ҳол учун (104)-тақсимот функциясини ҳисоблаймиз:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx.$$

Бу интегралда ўзгарувчини алмаштирсак:

$$(x-a)/\sigma=t,\ dx=\sigma dt,$$

тақсимотнинг нормал функциясини оламиз:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2}\,dt=\Phi(t)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (108)$$

Одатда, (108)-интеграл элементар функциялар орқали ифодалана олмайдиган бўлгани учун $\Phi(t)$ функция қийматларини махсус тузилган жадваллардан топадилар.

Мисол. Тасодифий катталик нормал қонун бўйича тақсимланган, унинг математик кутилиши $a=25$, ўртача квадратик фарқланиши $\sigma=10$. Тасодифий катталикнинг 15 дан камроқ бўлган қийматни эгаллаш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. (108)-дан фойдаланамиз:

$$F(15)=\Phi\left(\frac{15-25}{10}\right)=\Phi(-1).$$

Нормал тақсимот функциянинг $\Phi(-t)=1-\Phi(t)$ хоссага эга бўлганлигини эслатиб ўтамиз. Жадвалдан[1] $\Phi(+1)=0{,}8413$ ни топамиз, бундан $\Phi(-1)=1-0{,}8413=0{,}1587$.

7. Масквелл тақсимоти

Компонентлари бўйича молекулалар тезликларининг Максвелл тақсимоти қонунига мувофиқ тақсимланиши тасодифий катталикнинг нормал тақсимланиш мисоли бўла олади: молекуланинг v_x тезлик компонентига эга бўлиш эҳтимоллигининг зичлиги қуйидагича ёзилади:

$$f(v_x)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT}. \qquad (109)$$

Бу функцияни билгач, тезлик v_x компонентининг ўртача ва энг эҳтимолли қийматларини ҳисоблаш мумкин. Ўзгарувчи v_x бўйича олинган эҳтимоллик зичлиги ҳосиласини нолга тенглаштирсак, унинг энг эҳтимоллик қийматини топамиз:

$$\frac{d}{dv_x}\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT}\right]=0;\quad \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_{x\text{в}}^2/2kT}\,\frac{2mv_{x\text{в}}}{2kT}=0.$$

Бундан $v_{x\text{в}}=0$ эканлиги келиб чиқади.

(105) ва (109)-лардан фойдаланиб ўртача қийматни (математик кутилишни) топамиз:

$$\bar{v}_x=\int v_x f(v_x)\,dv_x=\int_{-\infty}^{+\infty} v_x\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT}\,dv_x=0.$$

---

[1] Масалан, Н. Л. Лобоцкая, «Основы высшей математики» (Минск, «Вышэйшая школа, 1973) китобидаги (338-бет) 10-жадвалга қаранг.

Тезлик компонентининг ўртача ва энг эҳтимолли қийматларининг нолга тенглиги бу ҳали компонент нолга тенг деган гап эмас. Бунинг сабаби тезлик ташкил этувчиларининг мусбат ва манфий йўналишлари тенг эҳтимолли бўлишларидадир. Тезлик компоненти модулининг ўртача қиймати эса нолга тенг бўлмайди.

Молекулалар ҳаракатининг фазодаги барча йўналишлари тенг эҳтимолли бўлгани учун молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимоти изотроп ва ҳамма координаталар учун бир хилда бўлади. Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремасига асосан ва ҳар бир координата бўйича ҳаракатни эркин деб ҳисоблаб, молекуланинг компонентлари v_x интерваллари: $v_x + dv_x$; $v_y + dv_y$; v_z, $v_z + dv_z$ ларда ётган тезликларга эга бўлиш эҳтимоллигини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$f(v_x) f(v_y) f(v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/kT} dv_x\, dv_y\, dv_z. \qquad (110)$$

Қийин ҳисоблашларни ташлаб юбориб, (110)-дан тезликларнинг абсолют қийматлари бўйича Максвелл тақсимот функциясини ва молекула тезлиги қийматининг v дан то $v+dv$ гача бўлган интервал ичида бўлиш эҳтимоллигини топиш мумкинлигини айтиб ўтамиз:

$$f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv. \qquad (111)$$

(111)-ни молекулаларнинг умумий сонига кўпайтирсак, Максвел тақсимотини IX бобнинг § 3-да кўрсатилган шаклда оламиз, у тезликлари v дан то $v+dv$ гача бўлган интервал ичида ётган молекулалар сонини ифодалайди.

(111)-ни ишлатиб молекула тезлиги модулининг қийматини топамиз:

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2kT} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^2 = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}.$$

($v_{\text{кв}}$) тезликнинг ўртача квадратик қийматини ҳисоблаймиз. Аввал тезлик квадратининг ўртача қийматини ҳисоблайлик.

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 df(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2kT} dv = 3kT/m.$$

Бундан

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3kT/m}$$ га эга бўламиз.

8. Больцман тақсимоти

IX бобнинг § 5-да чиқарилган формулалардан газ молекуласининг h дан то $h+dh$ гача бўлган баландликлар интервалида туриш эҳтимоллиги

$$dP(h) = ae^{-mgh/kT}\, dh \qquad (112)$$

га тенг эканлиги тўғрисида хулоса чиқариш мумкин. a пропорционаллик коэффициентини (103)-нормалаш шартидан аниқлаш мумкин:

$$\int_0^\infty ae^{-mgh/kT}\, dh = 1,\ a = \frac{mg}{kT}. \qquad (113)$$

Масала мазмуни бўйича интеграллаш 0 (Ер юзи) дан то чексизликкача бўлган чегаралар ичида бажарилади, чунки молекуланинг бу чегаралар ичида бўлиши ишончлидир.

a ни (112)-га қўйсак,

$$dP(h) = \frac{mg}{kT}\, e^{-mgh/kT}\, dh \text{ га эга бўламиз} \qquad (114)$$

(114)-дан фойдаланиб, газ молекуласининг бир жинсли Ер майдони ичида турган ўртача баландлигини ҳисоблаймиз:

$$\overline{h} = \int_0^\infty h\,dP(h) = \int_0^\infty \frac{mg}{kT}\, he^{-mgh/kT}\, dh = kT/mg.$$

Бундан шундай молекуланинг ўртача потенциал энергиясини ҳам ёзиш мумкин:

$$\overline{E}_p = mg\overline{h} = mg(kT/mg) = kT.$$

ПРЕДМЕТ КЎРСАТКИЧ

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ РЕМИЗОВ

КУРС ФИЗИКИ

Для медицинских институтов

Изд-во «Медицина» УзССР — 1979 — Ташкент, Навои, 30

Перевод с издания издательства «Высшая школа», Москва, 1976.

Муҳаррирлар *А. Қосимов, Ҳ. Зокиров*
Бадиий муҳаррир *О. Аҳмаджонов*
Рассом *Е. В. Жиркова*
Техмуҳаррир *В. Мещерякова*
Корректор *М. Ҳайдарова*

Москва «Высшая школа» нашриётининг 1976 йилги нашридан таржима

ИБ № 266

Теришга берилди 6/X-1978 й. Босишга рухсат этилди 14/VI-1979 й. Формати $60\times90^1/_{16}$. Қоғоз № 3. Л1. Юқори босма. Босма л. 15,125. Шартли босма л. 15,125. Нашр. ҳисоб л. 15,49. Нашр. № 17—78. Тиражи 10 000. Заказ № 990.

Баҳоси 55 т.

Ўзбекистон ССР Нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари бўйича Давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмаси 3-босмахонасининг 1-цехи. Тошкент, Радиал пр., 10.