АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В. И. РОМАНОВСКОГО
ИНСТИТУТ ВОСТОКОВЕДЕНИЯ ИМЕНИ АБУ РАЙХАНА БЕРУНИ

МУХАММАД ИБН МУСА
АЛ-ХОРЕЗМИ

◆

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРАКТАТЫ

Ответственный редактор
академик АН УзССР С. Х. СИРАЖДИНОВ

ТАШКЕНТ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» УЗБЕКСКОЙ ССР
1983

УДК 51(09)

В книгу вошли арифметический и алгебраический трактаты ал-Хорезми, оказавшие огромное влияние на развитие математических наук в Европе: первый положил начало арифметике, базирующейся на десятичной позиционной системе счисления, второй явился основой алгебры как науки — само слово «алгебра» происходит от названия трактата «Ал-джабр ва ал-мукабала». Издание включает также тригонометрические главы из зиджа ал-Хорезми, научные статьи и развернутые комментарии.

Для читателей, интересующихся историей точных наук.

Табл. 2. Ил. 61. Библиогр. 319.

Рецензенты:
академик АН УзССР В. П. ЩЕГЛОВ,
член-корреспондент АН УзССР Т. А. АЗЛАРОВ

$\frac{1602000000-2306}{М355(04)-83}$ 123—83

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1983 г. научная общественность нашей страны и других стран мира отмечает по решению ЮНЕСКО 1200-летний юбилей великого среднеазиатского ученого Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми, труды которого оставили глубокий след в истории различных отраслей науки. Ему принадлежали сочинения по математике, астрономии, географии, истории. Особенно важны его заслуги в развитии арифметики и алгебры. Трактаты ал-Хорезми «Книга об индийском счете» и «Краткая книга алгебры и алмукабалы» в течение нескольких столетий оказывали сильное влияние на ученых Востока и Запада и служили образцом при написании учебников математики.

Математические и астрономические труды ал-Хорезми издавна привлекали внимание исследователей и неоднократно издавались на разных языках. В 1964 г. в Ташкенте был опубликован русский перевод его математических трактатов. Это издание принесло большую пользу для популяризации научного наследия одного из крупнейших ученых Средней Азии. Однако к настоящему времени назрела настоятельная необходимость в новом, более полном издании трудов ал-Хорезми. Оно предпринято Академией наук Узбекской ССР (Институтом математики им. В. И. Романовского и Институтом востоковедения им. Абу Райхана Беруни) в связи с 1200-летним юбилеем ученого.

В настоящее издание, которое состоит из двух книг, включены сочинения ал-Хорезми по арифметике, алгебре и астрономии. Текст сопровождается комментариями и исследовательскими статьями, которые помогут читателю оценить научное наследие ал-Хорезми с современной точки зрения.

Первая книга содержит математические труды ал-Хорезми. В ней переиздается перевод этих трудов, опубликованный в 1964 г., с комментариями, значительно дополненными по сравнению с первым изданием.

Перевод «Книги об индийском счете» выполнен Ю. Х. Копелевич с сохранившегося средневекового латинского текста по фотокопии рукописи, хранящейся в библиотеке Кембриджского университета (шифр: I.i6.5, лл. 102—109 об.). Приводится также факсимиле этой рукописи с фотокопии, любезно предоставленной нам А. П. Юшкевичем. Авторы комментариев к арифметическому трактату ал-Хорезми — А. П. Юшкевич и Б. А. Розенфельд.

Перевод алгебраического трактата, сохранившегося в арабской рукописи (Бодлеянская библиотека Оксфордского университета, шифр рукописи: Hunt. 214, лл. 1—34), принадлежит Б. А. Розенфельду, комментарии составлены Б. А. Розенфельдом и Г. П. Матвиевской.

Перевод тригонометрических глав из зиджа ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити и комментарии принадлежат Б. А. Розенфельду; соответствующий раздел из трактата Ибн ал-Мусанны переведен и прокомментирован Г. П. Матвиевской.

Важным дополнением к комментариям является работа А. П. Юшкевича «О труде по арифметике Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми», в которой дан исчерпывающий анализ арифметического трактата и показана огромная роль ал-Хорезми в истории математики. Той же цели служит статья Г. П. Матвиевской «Выдающийся математик Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми и литература о нем», содержащая обзор исследований об ал-Хорезми, опубликованных в европейской печати начиная с XVI в. В статью включена аннотированная библиография, насчитывающая 318 названий на русском и иностранных языках.

Вторая книга посвящена астрономическому творчеству ал-Хорезми. Она содержит выполненный А. А. Ахмедовым комментированный перевод зиджа ал-Хорезми, который сохранился в обработке ученого X—XI вв. Масламы ибн Ахмада ал-Маджрити. Перевод основан на двух более ранних изданиях указанной обработки труда ал-Хорезми: полном тексте средневекового латинского перевода, изданном в 1914 г. Г. Зутером, и английском комментированном переводе, опубликованном О. Нейгебауером в 1962 г. Как и О. Нейгебауер, мы не приводим таблиц, которые даются в издании Г. Зутера.

Академик АН УзССР *С. Х. Сираждинов*

Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми

КНИГА ОБ ИНДИЙСКОМ СЧЕТЕ

Сказал Алгоризми[1]: Вознесем достойную похвалу богу, правителю
и защитнику нашему, воздадим ему должное и хвалу умножим
прославлением, помолимся ему, чтобы направил он нас по 104
стезе справедливости, чтобы вел нас дорогой истины, чтобы помог
нам исполнить то, что мы решили разъяснить об индийском счете с помощью .IX. букв[2], которыми они выражали любое свое число для легкости и краткости, облегчая дело тому, кто изучает арифметику, т. е. число самое большое и самое малое, и все, что есть в нем от умножения и деления, сложения, вычитания и прочее.

Сказал Алгоризми: Когда увидел я, что индийцы[3] составляли из .IX. знаков любое свое число, благодаря расположению, какое они установили, я пожелал раскрыть, если будет угодно богу, что получается из этих букв для облегчения изучающему. Если индийцы именно того хотели и смысл для них в этих .IX. буквах был тот, который мне открыт, да направит меня бог на это. Если же они делали это по другой причине, кроме той, которую я указал, из моего изложения и эту причину можно будет найти точно и без всякого сомнения. И она легче откроется наблюдающему и изучающему.

Пишут же они .IX. букв, фигуры которых такие... В фигурах их имеются также различия у разных людей: такое различие бывает в фигуре буквы пять и шесть, а также семь и восемь. Но в этом нет никакой помехи. Ведь это знаки, выражающие число, а фигуры, в которых имеются различия, следующие...[4] Я уже открыл в книге алгебры и алмукабалы, т. е. восполнения и противопоставления[5], что всякое число является составным и что всякое число составляется из единиц. Итак, единица находится в каждом числе. И об этом говорится в другой книге по арифметике. Единица есть корень всякого числа, и она находится вне чисел. Корень числа она потому, что через нее определяют всякое

число. Вне чисел она потому, что определяется сама по себе, т. е. без какого-либо другого числа. Остальные же числа не могут быть найдены без единицы. Ведь когда ты говоришь «единица», то она для определения своего не нуждается в другом числе, а остальные числа нуждаются в единице, потому что не можешь сказать «два» или «три», если этому не предшествует единица. Итак, число есть не что иное, как собрание единиц, и когда мы говорили, что ты не можешь сказать «два» или «три», если не предшествует единица, то мы говорили не о словах, а, так сказать,
104 о существе дела. Ведь не || может быть два или три, если
об. уничтожить единицу. Единица же может быть без второго и третьего. Итак, два есть не что иное, как удвоенность или удвоение единицы. Таким же образом три не что иное, как утроение той же единицы. И так же следует понимать прочие числа. А теперь вернемся к книге[6].

Я нашел, говорит Алгоризми, все, что можно назвать из чисел, т. е. все, что сверх единицы и до .IX., т. е. то, что между .IX. и единицей, если единица удваивается, то будет два, утраивается та же единица — будет три, и так далее до .X. Затем на место единицы ставится X и удваивается .X. и утраивается, как это делалось с единицей, и получается из их удвоения .XX., из утроения .XXX , и так до .XC. Затем следует .C. на место единицы и удваиваются там и утраиваются, как это делалось с единицей и .X., и получается из них .CC., .CCC. и так далее до .CCCC. Далее ставятся тысячи на место единицы, и удвоением и утроением, как мы говорили, получаются из них таким же образом .II. тысячи, .III. тысячи и далее до бесконечного числа[7] в соответствии с этим способом. И я нашел, какие действия производили индийцы с этими разрядами. Из них первый — это разряд единиц, в котором удваивается и утраивается все, что стоит между единицей и .IX. Второй — разряд десятков, в котором удваивается и утраивается все, что от .X. до девяноста. Третий — разряд сотен, в котором удваивается и утраивается все, что от .C. до .DCCCC. Четвертый же — разряд тысяч, в котором удваивается и утраивается все, что от тысячи до .IX. M. Пятый разряд .$\overline{\text{X}}$. Таким образом, всякий раз, когда возрастает число, прибавляются разряды, и будет расстановка числа такая: всякая единица в высшем разряде будет в низшем, который перед ним, .X., а та, что была .X. в низшем, будет единицей в высшем, который предшествует ему[7a]. Начало разрядов будет справа от пишущего. И это будет первый из них, и состоит он из единиц. Если же они ставили .X. вместо единицы, и были они во втором разряде, и была их фигура изображением единицы, то была необходима им фигура десятков, подобная фигуре единицы, чтобы было известно из нее, что это .X. Итак, они ставили перед нею один разряд и ставили в нем маленький кружок, наподобие о, чтобы по нему знали, что разряд единиц пуст и что нет в нем никакого числа, кроме маленького кружка, который, как мы говорили, его занимает[8]. И этим показано, что число, которое стоит в следующем разряде, будет десятки и что это второй разряд, т. е. разряд десятков. После кружка они ставили в указанном втором разряде все, что хотели, из числа десятков, т. е. из того, что есть между .X. и .XC., и это есть фигуры десятков. Фигура .X. такая... Фигура .XX. ... И таким же образом фигура .XXX. такая[9] || и так 105 до .IX. Следовательно, кружок будет в первом разряде, а цифра, относящаяся к самому числу, во втором разряде. Но следует знать, что цифра, означающая в первом разряде единицу, во втором означает .X., в третьем .C., в четвертом .M. Точно так же та, которая означает в первом разряде два, во втором означает .XX., в третьем .CC., в четвертом .II, и то же самое разумей о других. Мы же вернемся к книге[10].

После разряда десятков следует разряд сотен, в котором удваивается и утраивается все, что есть от .C. до .DCCCC., и фигура сотни такая, как фигура единицы, поставленная в третьем разряде, т. е. .100., фигура двухсот такая, как фигура двух, поставленная точно так же в третьем разряде, т. е. .200., фигура трехсот также есть фигура трех, поставленная в третьем разряде, т. е. .300.[11], и так далее до девятисот. За этим следует разряд тысяч, в котором таким же образом удваивается и утраивается все, что от тысячи до .IX.. Фигура ее как фигура единицы, поставленная в четвертом разряде, т. е. .1000., фигура двух тысяч такая, как фигура двух, поставленная в четвертом разряде, т. е. .2000., и так далее до .IX. тысяч. В четвертом разряде перед цифрой ставятся три кружка, чтобы показать, что это в четвертом разряде, точно так же, как во втором разряде ставится один кружок, а в третьем два, чтобы показать, что это разряды десятков и сотен. Так происходит, когда перед самим числом нет еще другого числа в том же разряде. Если же с числом, которое ставится в этих разрядах, имеется еще другое число ниже его, оно должно ставиться в том разряде, который ему причитается. Например, если имеется с .X. какое-нибудь число из тех, которые ниже его, допустим, .XI. или .XII., ставится так: 11, т. е. в первом разряде, где стоял кружок, ставится единица, а во втором разряде ставится также единица, которая означает .X.. Подобным же образом, если имеется с .C. другое число из тех, которые ниже его, то оно ставится в разряде, какой ему причитается. Это мы покажем на некотором примере и посмотрим, каким будет число .CCC.XXV. Если мы захотим расставить его по своим разрядам, расставим так. Начнем справа от пишущего и поставим в первом разряде .V., во втором, идя налево от пишущего, .XX., а в третьем разряде .CCC., каждое число в своем разряде, т. е. единицы в разряде единиц, который является первым, десятки в разряде десятков, который является вторым, сотни в разряде сотен, который является третьим, и так получается фигура .325.[12] То же самое будет в других разрядах в том же порядке, т. е. сколько бы ни прибавлялось число и ни возрастали разряды, ставится каждый род числа в своем разряде, какой ему причитается. Если же в каком-нибудь разряде собралось .X. или больше, то они выдвигаются в высший разряд, и будет из каждых .X. в высшем разряде единица. Опять-таки, если в том разряде, в который перешло число при возрастании, было уже другое число, то оно прибавляется к нему и соединяется с ним; а если стало в нем .X. или большее, то станет из каждых .X. единица и выдвигается в высший разряд, т. е. если в первом разряде собралось десять, || 105 об. станет из них единица, и она ставится во втором разряде, а если в этом же разряде также было число, оно соединяется с ним, и если было там .X., станет из них единица, и она выдвигается в третий разряд. Например, если в первом разряде, т. е. в разряде единиц, ты имеешь .X., сделай из них единицу и поставь ее во втором разряде. В первом же разряде поставь кружок, как мы сказали, чтобы показать, что есть два разряда. Если же будет .XI., сделай из .X. единицу, поставь ее во втором разряде, как выше, и оставь единицу в первом. Если же во втором разряде, где ты поставил то число, которое сделал из .X., найдешь еще какое-нибудь число, соедини его с ним. И если получится .X. или больше, сделай из .X. единицу и снова поставь в третьем разряде, а что осталось сверх десяти, пусть остается на своем месте. Когда мы говорим «большее .X.», то это относится к большим числам. Например, если будет во втором или третьем разряде большее число, допустим, если ты найдешь в третьем разряде, который есть разряд сотен, .IX., и если будет во втором разряде .X., ты сделаешь из .X. единицу и переставишь ее в третий разряд, где соединишь ее с .IX. и будет .IX.; сделаешь единицу из этих десяти, переставишь ее в четвертый разряд, и там будет тысяча. Если же ты нашел во втором разряде .XX., сделаешь из них два, прибавив два к .IX. в третьем разряде, и получишь .XI.; сделаешь снова из .X. единицу и переставишь ее в четвертый разряд, где станет тысяча, и останется единица в третьем разряде, и это значит «десять или больше». И нужно знать, почему, когда ты переставляешь число и ставишь его в следующий разряд, ты должен ставить его в своих цифрах, т. е., если было .X., ставишь вместо них цифру, которая означает в первом разряде единицу, а если было .XX., ставишь вместо них цифру, означающую в первом разряде два, и так разумей об остальных. Если же осталось в том разряде, из которого ты переставил число, что-нибудь от числа, оставь его также в своей цифре, т. е., если осталась единица или два, оставь их там в цифрах, означающих то же число, т. е., если осталась единица, напишешь там цифру единица, если осталось два, напишешь там цифру два и так далее. Но каждая отдельная фигура будет иметь то или иное значение в зависимости от того, в каком она разряде, т. е. в первом разряде она будет означать единицы, во втором десятки, в третьем сотни и так далее, как это было сказано выше[13].

Если же будет большое число и ты захотел бы знать, каково оно или сколько разрядов в нем, чтобы записать его в книге или чтобы произнести его, знай, что не будет ни в одном разряде больше .IX. и меньше единицы, если только нет здесь кружка, который есть ничто. Итак, если ты захочешь это знать, сосчитай разряды, начиная от первого с правой стороны, т. е. разряда единиц. Остальные разряды будут написаны последовательно влево от пишущего. Из них второй будет разряд десятков, третий сотен, четвертый тысяч, пятый .X. тысяч, шестой разряд будет .C. тысяч, седьмой тысяча тысяч, VIII будет .X. тысяч тысяч, || 106 девятый .C. тысяч тысяч, десятый тысяча тысяч тысяч три раза[14], одиннадцатый .X. тысяч тысяч тысяч три раза, двенадцатый .C. тысяч тысяч тысяч три раза, XIII тысяча тысяч тысяч тысяч четыре раза, и таким образом ты в каждом разряде прибавляешь из разрядов числа со своим названием. Так как сверх трех разрядов, т. е. десятков, сотен и тысяч, остается еще единица, то будет .X. тысяч самих тысяч, которые получились у тебя в сказанном. Если же останется два, будет .C. тысяч самих тысяч. И я составил тебе образец, из которого ты можешь знать и которым можешь показать, как что-либо к числу прибавляется или от него отнимается. И такова будет его фигура...[15].

Две буквы, если ты сложишь их согласно тому, что мы говорили об этих знаках, будет число тысяч этих знаков тысяч тысяч [тысяч] тысяч пять раз, согласно числу цифр у них; и сто тысяч тысяч тысяч тысяч четыре раза, согласно числу цифр у них, и восемьдесят тысяч тысяч тысяч тысяч четыре раза, согласно их цифрам. Далее семьсот тысяч тысяч тысяч три раза, согласно числу цифр у них; и три тысячи тысяч тысяч три раза и пятьдесят одна тысяча тысяч два раза; и четыреста тысяч, и девяносто две тысячи и восемьсот шестьдесят три.

Если ты хочешь прибавить число к числу или отнять число от числа, поставь оба числа в два ряда, т. е. одно под другим, и пусть будет разряд единиц под разрядом единиц и разряд десятков под разрядом десятков. Если захочешь сложить оба числа, т. е. прибавить одно к другому, то прибавишь каждый разряд к разряду того же рода, который над ним, т. е. единицы к единицам, десятки к десяткам. Если в каком-нибудь из разрядов, т. е. в разряде единиц или десятков, или каком-нибудь другом соберется десять, ставь вместо них единицу и выдвигай ее в верхний ряд, т. е. если ты имеешь в первом разряде, который есть разряд единиц, десять, сделай из них единицу и подними ее в разряд десятков, и там она будет означать десять. Если от числа осталось что-нибудь, что ниже десяти, или если само число ниже десяти, оставь его в том же разряде. А если ничего не останется, поставь кружок, чтобы разряд не был пуст; но пусть будет в нем кружок, который займет его, чтобы не случилось так, что если || он будет пуст, разряды уменьшатся и второй будет принят за первый, и так ты обманешься в своем числе. То же самое ты сделаешь во 106 об.

всех разрядах. Подобным же образом, если соберется во втором разряде .X., сделаешь из них единицу и поднимешь ее в третий разряд, и там она будет означать сто, а что остается ниже .X., останется здесь. Если же ничего в других не остается, ставишь здесь кружок, как выше. Так ты сделаешь в других разрядах, если будет больше. Если же ты захочешь отнять одно от другого, т. е. число от числа, отнимай каждый разряд от другого разряда того же рода, который над ним, как это было сказано выше. Если же в верхнем разряде не будет такого числа, из которого ты сможешь вычесть число нижнего разряда, т. е., если там будет меньше или нуль, ты возьмешь из следующего высшего верхнего разряда единицу и сделаешь из нее десять и из этого вычтешь то, что должен, а что останется, поставишь в том же верхнем разряде. А если ничего не останется, поставишь там кружок, как выше; если же во втором разряде сверху не было ничего, возьми единицу из третьего разряда, и будет .X. во втором. И снова из этих .X. возьми единицу, и поступи с нею так, как выше, и останется во втором .IX.; и начинай всегда при сложении и вычитании с более высокого разряда, а затем от следующего, который идет за ним, ибо так будет труд полезнее и легче, если угодно будет богу. Чтобы легче это понять, необходимо показать это на примере, и мы покажем тремя способами, чтобы никто не запутался в каком-нибудь способе. Итак, составим какое-нибудь число и скажем, например: поставим шесть тысяч четыреста двадцать два в своих разрядах и скажем, что мы хотим отнять от них три тысячи двести одиннадцать. Итак, поставим в первом разряде, который находится справа, два, во втором .XX., в третьем четыреста, в четвертом шесть тысяч, поставим также то число, которое мы хотим отнять от него, под ним подобными же разрядами так: поставим единицу под двумя в первом разряде, .X. под .XX. во втором, двести под четырьмястами в третьем и три тысячи под .VI. тысячами в четвертом, и такова будет их фигура... Если же мы захотим отнять одно число от другого, а именно, меньшее от большего, начнем с высшего разряда, т. е. с четвертого. Итак, отнимем .III. от .VI., и останется три в четвертом разряде. Отнимем также два от .IIII., и останется в третьем разряде два. Отнимем также единицу от .II., и останется единица во втором разряде. Таким же образом останется в первом разряде единица, если мы отнимем единицу от двух, которые были над
107 нею, || и фигура того, что останется, будет такая...[16].

Поставим снова другое число другим образом так, чтобы от его разрядов ничего не осталось. Пусть будет наше число тысяча сто сорок четыре, от которых отнимем C.XLIIII. и поставим каждое из них под другим таким образом...[17].

Если ты захочешь раздвоить какое-нибудь число[18], начни с первого разряда и раздвой его; если в нем было число нечетное, раздвой четное, и останется единица, которую раздвоишь, т. е. разделишь на две половины, и одну половину составят тридцать частей из шестидесяти, составляющих единицу[19], и поставишь под тем же разрядом XXX, затем раздвоишь следующий разряд, если число его было четным; если же оно нечетное, возьми половину четного и поставь ее на ее место, и составь как половину оставшейся единицы пять и поставь их в предыдущем разряде. Однако, если в том же разряде, который ты хочешь раздвоить, нет ничего, кроме единицы, ставь на ее место кружок и ставь пять в предыдущем разряде. И таким же образом действуй во всех разрядах. И если хочешь удвоить, начни с высшего разряда и удваивай, а если число, возрастая, превысит .X., сделай из десяти единицу и поставь ее в следующий разряд, и ты найдешь, если будет угодно богу.

Я показал уже в книге, что при умножении числа на какое-либо другое число необходимо повторить одно из них соответственно единицам другого[20]. И если ты захочешь умножить какое-нибудь число на другое с помощью индийских букв, необходимо запомнить умножение чисел, которые имеются между единицей и .IX., друг на друга, совпадают ли эти числа, или они различны[21]. Если же ты хочешь умножить число на другое, поставь одно из них, согласно количеству его позиций на доске или на каком-нибудь другом предмете, каком тебе угодно[22]. Затем поставь первый разряд второго числа под высшим разрядом первого. И будет первая позиция этого числа под крайней позицией первого числа, какое ты поставил. И будет вторая позиция предшествовать первому числу налево, чему пример будет: если бы мы захотели умножить две тысячи триста .XXVI. на .CCX.IIII. и поставили две тысячи триста .XXVI. индийскими буквами в IIII разрядах, будет в первом разряде, который справа, .VI., во втором два, что есть .XX., в третьем три, что есть триста, и в четвертом два, что есть две тысячи. После этого поставим под двумя тысячами .IIII., затем в предшествующем налево единицу, что есть .X., после этого в третьем два, что есть двести, и фигура их будет такая...[23].

После этого начинай от крайнего верхнего разряда и умножай его на крайний разряд нижнего числа, который под ним, или, что получится от умножения, напиши сверху. После этого напишешь также в следующем разряде, идя в правую сторону нижнего числа. Затем сделаешь таким же образом, пока не перемножишь крайний разряд верхнего числа на все разряды нижнего числа; а когда ты это завершишь, сдвинь нижнее число на один разряд вправо. И будет первый разряд нижнего числа под следующим направо разрядом числа, которое ты умножал. Затем поставь остальные разряды в их последовательности. После этого будешь умножать также само число, под которым ты поставил первый разряд нижнего числа в крайней позиции нижнего числа; затем на тот, который следует за ним, пока не завершишь все так же, как делал это в первом разряде. Или все, что сложилось из умножения каждого разряда, напишешь над разрядом, который 107 об.

находится над ним; или, когда ты это сделаешь, сдвинешь также это число, т. е. твое, на один разряд, и сделаешь с ним то, что сделал в первых разрядах, и не перестанешь это делать, пока не завершишь все разряды. И так будешь умножать каждое верхнее число на каждое нижнее число. Если же получится так, что первый разряд нижнего числа окажется под каким-нибудь разрядом, в котором нет никакого числа, т. е. в котором был кружок, сдвинем его к следующему разряду направо, в котором было число. Поскольку каждый кружок, умноженный на какое-либо число, есть ничто, т. е. из него не возникнет никакое число, то и из умножения на кружок подобным же образом не получается ничего. Когда же мы сдвинули разряды направо, а затем перемножили само верхнее число на каждый разряд нижнего числа, то, что получилось у нас от умножения, прибавим к разряду, стоящему над тем разрядом, на который мы умножали. А когда с возрастанием числа соберется у нас в каком-нибудь разряде .X., сделаем из них единицу и поставим ее в следующий разряд налево, и, если что-нибудь останется, обозначим это на своем месте, если же ничего не останется, поставим вместо этого кружок, чтобы не убавилось что-нибудь от разрядов. И когда дошло умножение до первого разряда нижнего числа, сотрем то, что было в разряде, который над ним, и вместо него обозначим то, что получилось у нас от умножения. И так будем делать, пока не перемножим все разряды верхнего числа на все разряды нижнего. Так будем
118 умножать || число из них по числу единиц другого, и завершится умножение. И такова будет фигура числа, которое получилось у нас от умножения двух тысяч трехсот двадцати шести на двести .XIIII., что составляет четыреста тысяч и девяносто семь тысяч и семьсот .LXIIII.[24].

Если ты хочешь знать, нашел ли ты или ошибся в своем удвоении или умножении, возьми число, которое ты хотел удвоить, и раздели его на .IX. и .IX., и то, что останется меньше .IX., удвой; если в нем было .IX, отбрось их, а что осталось, сохрани. После этого удвой твое число, т. е. число, которое ты хотел удвоить, и раздели его на .IX. и .IX., и если то, что останется, будет сходно с тем, что оставалось раньше, когда ты удваивал его, то значит, ты нашел; если же нет, то ошибся. А если ты хочешь помножить какое-нибудь число на другое и хочешь проверить, как выше, раздели число, которое удвоил, на .IX., а что осталось ниже .IX., сохрани. Снова раздели другое число на .IX. и что осталось ниже .IX., сохрани. Затем умножь то, что осталось от первого, на то, что осталось у тебя от второго; из того, что получилось, отбрось .IX., если там они есть, а если там нет .IX., тогда то, что получилось, будет обозначено. Если же там есть .IX., отбрось .IX. и сохрани, что осталось; и разумей, зачем это будет обозначено. После этого помножь один множитель на другой и раздели то, что получилось, на .IX., и если то, что осталось, сойдется с тем, что я сказал тебе обозначить, знай, что ты нашел. Если же не сойдется, разумей, что ошибся[25].

При делении[26] расставь число, которое хочешь делить, по его разрядам. Затем поставь само число, на которое хочешь делить, под ним. И пусть будет крайний разряд числа, на которое ты делишь, под крайним разрядом верхнего числа, которое делишь. Если же число, являющееся крайним разрядом числа, которое ты хочешь делить, будет меньше того, которое есть крайний разряд нижнего числа, на которое ты делишь, сдвинь сам разряд вправо, так как чисел верхнего разряда будет больше I: поставь крайний разряд нижнего числа, на которое ты делишь, под вторым разрядом, следующим за крайним разрядом верхнего числа. После этого посмотри на первый разряд числа, на которое ты хочешь делить, и поставь прямо над ним над верхним числом, которое ты делишь, или прямо под ним, под этим числом, какое-нибудь || 108 об. число, которое затем умножь на крайний разряд нижнего числа, на которое ты делишь, и оно будет сходно с тем числом, которое было в верхнем разряде, или близко к нему, но меньше его. И когда ты определишь его, умножь его на крайний разряд нижнего числа, и отними то, что получится у тебя от умножения, от того, что находится над ним из нижнего числа, которое делится. Снова умножь его на второй разряд, который следует за крайним разрядом вправо, и отними его от того, которое над ним, и производи вычитание так, как мы делали в начале книги, если хотели отнять какое-нибудь число от какого-нибудь числа. И поступай таким образом, пока не умножишь его на все разряды нижнего числа, на которое делишь. После этого сдвинь все разряды нижнего числа, на которое делишь, на один разряд вправо и поставь на прямой с его первым разрядом, подобно тому, что ставил раньше. И когда ты это умножишь на крайний разряд нижнего числа, на которое делишь, оно даст в итоге то, что над ним или что близко к нему; и умножь то, что ты поставил на прямой с ним, на крайний разряд нижнего числа. И отними то, что получилось у тебя от умножения, от того, что над ним; и так будешь поступать во всех разрядах, и если останется от разрядов верхнего числа, которое ты делишь, что-нибудь, что должно быть разделено, всегда сдвигай разряды нижнего числа на один разряд до тех пор, пока будет первый разряд его на прямой с каким-нибудь разрядом верхнего числа; если же в каком-нибудь из разрядов числа, которое ты делишь, будет кружок, и сдвиг дойдет до него, не переходи его, как ты делал это при умножении, но поставь прямо над ним что-нибудь, что будешь множить, так, как мы рассказывали. Когда же ты все это завершишь, то, что получится у тебя из разрядов прямо над числом, которое ты делишь, то и причитается одному. А если что-нибудь останется, это будет часть единицы из того числа, которое ты делишь, и оно никогда не останется, если только не будет меньше того, которое ты делишь. Если же останется больше, знай, что ты ошибся.

И знай, что деление подобно умножению, однако обратно ему, так как при делении мы вычитаем, а там складываем, т. е. в умножении есть пример тому. Если бы мы захотели разделить сорок шесть тысяч четыреста шестьдесят восемь на триста .XXIIII., поставим сначала с правой стороны восемь, потом поставим шесть слева, что есть шестьдесят, затем .IIII., что есть четыреста, потом шесть, что есть .VI. тысяч, потом .IIII., что есть сорок тысяч. Крайний из этих разрядов будет слева, а первый из 109 них, восемь, || справа. После этого напишешь под ними число, на которое делишь, и напишешь крайний разряд числа, на которое делишь, т. е. фигуру трех, означающую триста, под крайним разрядом верхнего числа, т. е. .IIII., потому что это меньше того, что над ним; если же оно было бы больше, мы подвинули бы его на одну позицию и поставили бы его под шестью; после этого поставим в нем следующую за тремя фигуру двух, что есть .XX., под шестью; после этого поставим в ней .IIII., следующие за [двумя, под] четырьмя, и фигура их будет...[27].

После этого условно напишем прямо над первым разрядом числа, на которое делим, над верхним числом, которое делим, т. е. над четырьмя, единицу; и если мы поставили бы ее под четырьмя, было бы то же самое. Умножим ее на три и отнимем от того, что над ним, останется единица. Затем умножим ее на два и отнимем от того, что над нею, т. е. от .VI. и останется .III. После этого умножим ее снова на .IIII. и отнимем от того, что над нею, т. е. от IIII, и ничего не останется, и поставим на это место кружок. После этого переставишь начало числа, на которое делишь, т. е. .IIII., под .VI., и будет два под кружком и .III. под .IIII. Затем напишешь прямо над нижним числом что-нибудь в ряду единицы, т. е. .IIII., что умножишь на три, и будет .XII., и отнимешь их от того, что над тремя, т. е. от .XIIII., и останется .II.; после этого умножишь также .IIII. на два, которые следуют за тремя, и будет .VIII., которые отнимешь от того, что над ним, т. е. от .XX., и останется .XII., а именно,— .II. над двумя и единица над тремя. Снова умножишь .IIII. на .IIII., которые следуют вправо, и будет .XVI.; отнимешь их от того, что над ними, т. е. от .CXXVI., и останется над .IIII. кружок и над двумя единица и над тремя единица. Снова сдвинешь число, на которое делишь, т. е. будет .IIII., под .VIII., два под кружком и три под единицей; после этого поставишь прямо над .IIII. над верхним числом, которое делишь, в ряду с .IIII. и единицей три, которые умножишь на три и будет .IX., отнимешь их от того, что над тремя, т. е. от .XI., и останется над тремя два. Помножишь также три на два, которые следуют за тремя, и будет .VI., которые отнимешь от того, что над тремя, т. е. от .XX., и останется .XIIII. Снова умножишь упомянутые три на IIII, которые следуют за двумя, и будет .XII., и отнимешь их от того, что над ними, т. е. от .CXXVIII., и останется над .IIII. шесть, и над двумя три, и над тремя единица, и получится у нас то, что причитается одному из них, и это будет .CXLIII. и .CXXXVI. частей из .CCCXXIIII. частей единицы. И такова их фигура...[28]

|| И если ты хочешь разделить многие разряды на один, допустим, тысячу .DCCC. на .IX., напиши тысячу восемьсот, фигура которых будет такова, что ты поставишь справа два кружка, потом .VIII. и дальше единицу; после этого поставишь .IX. под .VIII., потому что они больше .VIII.; затем напишешь прямо над ними над восемью что-нибудь, что при умножении на .IX. даст в итоге то, что над ними, т. е. даст .XVIII., которые над .IX., и ты найдешь, что это будет два, которые ты умножишь на .IX.; и будет .XVIII.; отнимешь их от того, что сверху, и не останется ничего. Затем сдвинешь .IX. на один разряд вправо и они окажутся над кружком. И поставишь сверху что-нибудь, что при умножении на .IX. даст ничто, поскольку над .IX. стоит кружок и там нет никакого числа. Итак, поставишь кружок прямо над .IX. в ряду с двумя и умножишь .IX. на кружок, и будет кружок, т. е. ничто. После этого сдвинь также .IX. к разряду, который перед ними, т. е. к первому разряду, и будет .IX. под кружком. Сделай с ними то, что ты сделал с кружком, который был [над] ними. И будут там два кружка, после которых будут два, т. е. двести, и это есть то, что причитается одному, и от того, что делится, не останется ничего. И всякий раз, когда ты будешь делить одно число на другое, и от того, которое делится, останутся кружки, перед которыми нет никакого числа, возьми то, что было в остатке от кружков с начала разрядов делимого числа с правой стороны и прибавь это к тому, что получилось от деления, и что получится, есть то, что причитается одному. И это некоторое ближайшее сокращение. Ведь первый ряд есть ряд действия, примером чего может служить то, что когда мы пишем тысяча .DCCC., будут два кружка и .VIII. в третьем разряде и единица в четвертом. Мы поставили .IX. под .VIII. потому, что они больше того, что стоит в крайнем разряде, и фигура их была такая...[29] Когда же мы написали прямо над .IX. и над .VIII. два и умножили их на .IX., получилось .XVIII., и когда мы отняли их от того, что над .IX., осталось два кружка, не имеющих перед собой никакого числа. Итак, мы написали два кружка в ряду с двумя, которые стоят над .IX., и будет .CC., фигура которых такая...[30] 109 об.

Это все, что необходимо людям при делении и умножении для тех чисел, которые были целыми. А теперь, если будет угодно богу, приступим к разбору умножения дробей, их деления и извлечения корней.

Знай, что дроби имеют многие названия, бесчисленные || и бесконечные, как половина, треть, четверть, одна девятая, одна десятая, одна часть из .XIII., одна часть из .XVIII. и т. д.[31]. Но индийцы основывали свои дроби на шестидесяти: они делили единицу на .LX. частей[32], которые называли минутами[33], каждую 110 минуту снова на .LX. частей, которые называли секундами[34], так что одна часть из .LX. будет минутой, а одна часть из трех тысяч шестисот будет секундой; каждая секунда снова делится на .LX., и будет одна часть из двухсот шестнадцати тысяч терцией[35]; каждая терция также делится на .LX. кварт[36] и такие разряды будут до бесконечности. Итак, первым будет разряд градусов[37], в котором находится целое число, а на второй позиции будут минуты, на третьей — секунды, на четвертой — терции и так до .IX. и .X. позиций. Знай, что всякое целое число при умножении на целое число дает целое число и всякое целое число, умноженное на какую-нибудь дробь, дает дробь такого же рода, что и та дробь; и два градуса, умноженные на две минуты, будут .IIII. минуты, и три градуса на шесть терций — .XVIII. терций. Минуты на минуты будут секунды, и секунды на секунды—кварты, и терции на терции—сексты, и кварты на кварты—октавы[38], ибо ты соединяешь оба разряда, которые множишь друг на друга, и то, что получится из числа дробей, подобно тому, что получится из целого числа, взаимно умноженного. Например, шесть минут, умноженные на .VII. минут, будет .XLII. секунды, так как минуты есть .LX. части одного целого, и когда ты умножишь .LX. части на .LX., будет то, что получится от умножения .LX. на .LX., т. е. три тысячи шестьдесят; и точно так же .VII. секунд на .IX. минут будет .LX. три терции; и образуют каждые .LX. из них одну секунду, и останется три терции; так как минуты есть .LX. части, а секунды — три тысячи шестисотые. Итак, если умножить их друг на друга, получатся части из двухсот шестнадцати тысяч, т. е. терции, и будут это LX от частей из трех тысяч шестисот.

Если же ты хочешь умножить полтора на полтора[39], преврати полтора в минуты, и будет .XC. Снова преврати полтора, которые хочешь множить, в те же минуты, и будет точно так же .XC. Умножь одно из них на другое, и будет .VIII. тысяч и .C. секунд.
110 Раздели секунды на .LX., и будут минуты, поскольку каждые ||
об. .LX. секунд образуют одну минуту. Получится у тебя .C.XXX.V. минут; раздели их на .LX., и будут градусы, ибо каждые .LX. минут образуют один градус, т. е. целую единицу из чисел; и получится у тебя два и .XV. минут, которые составляют четверть единицы.

Если ты хочешь умножить две целых [единицы], т. е. два градуса, и .XLV. минут на три целых, .X. минут и .XXX. секунд, преврати две целых в минуты, т. е. умножь их на LX, и будет .CXX., к которым прибавишь указанные выше .XLV. минут, и будет .CLXV. минут. Сохрани их, так как ты довел их уже до крайнего разряда. После этого преврати упомянутые три градуса в минуты, помножив их на .LX., как выше. К ним прибавь .X. упомянутых минут и будет .C.XC. минут, затем преврати эти .C.XC. минут в секунды, снова умножив на .LX., пока не доведешь их до крайнего разряда, т. е. до секунд. Будет .XI. тысяч четыреста, к которым прибавишь .XXX. секунд, стоящих вместе с ними, и будет .XI. тысяч четыреста [XXX] секунд. И так превратишь их в крайний род дроби того же числа. Умножь все это на .CLXV. минут, и будет тысяча тысяч и восемьсот восемьдесят пять тысяч и девятьсот пятьдесят терций; поскольку ты умножал их, т. е. секунды на минуты, получились терции. Их разделишь на .LX., и получатся секунды. Будет у тебя .XXXI. тысяча и четыреста .XXXII. секунды и останется .XXX. терций. Снова разделишь секунды на .LX., и получатся минуты. Будет у тебя пятьсот .XX. три минуты и сверх того будет .LII. секунды. Снова раздели минуты, чтобы получились градусы, т. е. целое число. И будет .VIII., и останется .XLIII. минуты. И будет все, что получилось от умножения, восемь градусов, .XLIII. минуты, .LII. секунды и .XXX. терций[40]. Точно так же ты будешь поступать со всеми другими дробями, а именно, превратишь каждую из них, которую хочешь множить, в другой низший разряд, какой был в каждой из них. После этого умножай одну из них на другую и сохрани, что получишь, и посмотри, в каком оно разряде. Затем дели на .LX. так, как я сказал тебе, и доведешь их до градусов, и они дойдут до них из разрядов, которые ниже градусов, и что получится, будет то самое, что вышло у тебя из умножения одной из них на другую. Есть для этого и другой способ, более короткий, но это тот порядок, который применяли индийцы при своем счете[41].

Знай, что, когда хочешь разделить число с дробью на другое число с дробью, или число с дробью на целое число, или целое число на число с дробью, ты должен сделать оба числа одного рода, т. е. преврати оба числа в низший разряд. Например, если низший разряд был из секунд, преврати оба числа в секунды. Если же были в одном из них терции, в другом секунды, преврати оба в терции; если в каком-нибудь были кварты или сексты или что-нибудь, что ниже этих разрядов, а другое было целое число, преврати оба в тот разряд, который был низшим для обоих, затем дели то, что хотел, на то, что хотел, после того, как ты сделал оба числа одного рода; что || получится, будут градусы, 111
т. е. целое число, поскольку всякие два числа одного рода, если разделить одно на другое, дадут в том, что получится от деления, целое число. Например, если разделить .XV. третей на шесть третей, получится от деления два с половиной, так как .XV. третей составляют .V. целых, которые при делении на .VI. третей, составляющих две целых, дадут два с половиной; и таким же образом делятся половины на половины, четверти на четверти, а также минуты на минуты, секунды на секунды, терции на терции[42]. И если ты хочешь разделить .X. секунд на .V. минут, преврати минуты в секунды, чтобы они были одного рода и одного разряда, и будет триста секунд. Если ты хочешь разделить на них .X. секунд, окажется невозможным разделить .X. на триста. Итак, знай, что не получится одного целого, поэтому поставь кружок на место целого, и умножь .X. на .LX., и будет шестьсот; если ты разделишь их на триста, получится два, т. е. две секунды, и

это есть то, что причитается одному. Ибо, когда ты множил ее на .XL., а потом делил, ты уже уменьшил ее на один разряд, а это есть секунды. И знай, что при делении всякого числа на какое-нибудь число, если умножить то, что получилось от деления, на то, на какое ты делил, то это даст первоначальное число, т. е. число, которое делилось. Пример этому: когда ты делишь .L. на .X., получится то, что причитается одному,— пять. Когда же ты умножишь то, что получилось у тебя от деления, т. е. пять, на то, что ты делишь, т. е. на .X., снова будет у тебя первоначальное число, т. е. .L. Следовательно, когда мы делили .X. секунд на .V. минут, получилось то, что причитается одному,— две минуты. И когда мы умножим две минуты, т. е. то, что получилось у нас от деления, на то, на что мы делили, т. е. на .V. минут, получится .X. секунд, и это есть проверка деления[43]. Точно так же, если ты хочешь разделить .X. минут на .V. терций, преврати минуты в терции, и будет .XXXVI. тысяч терций, и разделишь на .V. терций, и будет .VII. тысяч двести градусов, и это есть то, что причитается одному. Если ты хочешь это проверить, умножь .VII. тысяч двести градусов на .V. терций, и получится .XXXVI. тысяч, которые при делении на .LX. дадут .VI. сотен секунд, а когда снова поделишь .VI. сотен секунд, получится десять минут[44].

Если ты хочешь сложить целое число и дроби, поставь целое число в высшем разряде, затем поставь то, что было из первого разряда, т. е. минуты, под целым числом и секунды под минутами; и точно так же терции под секундами, и прочие из разрядов, какие пожелаешь. Пример этому: если бы мы захотели составить .XII. градусов и XXX. минут, и еще .XLV. секунд и .L. кварт, поставим .XII., потом поставим под ними .XXX. в разряде минут, а под .XXX. поставим .XLV. в разряде секунд. В разряде же терций поставим кружки, так как терции отсутствуют, и чтобы было понятно, что еще остались кварты. Дальше мы поставим под кружками пятьдесят в разряде кварт, и фигура их будет такая...[45]

Таким образом [при сложении дробей] ставим все разряды дробей один под другим, и всякий раз, когда соберется в какой-нибудь позиции .LX. или больше, поставим вместо них, т. е. в их разряде, то, что остается сверх .LX., и сделаем из каждых .LX.
111 единицу || и поставим ее в верхний разряд[46]. Таким же образом,
об. если бы мы захотели найти дроби [получающиеся при вычитании], начнем с верхнего разряда и будем отнимать каждый разряд от того, который над ним. Если [число] в этом верхнем разряде меньше того, которое ты хочешь отнять от него, или если в нем был кружок, отними единицу от разряда, который над ним, и эта единица будет .LX. частями дроби, с которой производишь действия, и отними от нее то, с чем производишь действия, а то, что останется, прибавь к неполному разряду. А если был над этим разрядом кружок, отними от разряда, который над ним, единицу и сделай из нее .LX. частей в разряде, который под ним, затем снова отними от него еще единицу и, как выше, сделай из нее

части в разряде, где ты хотел. Потом отнимай от него, что хотел, а то, что останется, поставь в том разряде, которым заканчивается то, что отнимается от него[47].

И если [хочешь] удвоить какое-нибудь число или дробь, начни с высшего разряда, а затем с того, который за ним следует. А если собралось в каком-нибудь разряде больше числа его частей, оставь излишек в этом разряде и подними единицу в разряд, который над ним. При раздвоении же начинай с низшего разряда и раздваивай его, затем следующий и если найдешь там единицу, поступи с нею так, как я указал тебе в начале книги.

Если же захочешь умножить дроби и число, а также дроби помимо минут или секунд, например, четверти и седьмые и другие подобные им части, и разделить их друг на друга, то действия с ними будут такие же, как с минутами и секундами. И я составлю себе пример, если будет угодно богу. Я уже открыл тебе в умножении минут, секунд и терций о двух числах, которые ты хочешь умножить друг на друга, т. е. одно на другое, что ты должен сделать их одного рода, иначе говоря, превратить их в род крайнего разряда, т. е., если крайний был из секунд, преврати их [в] секунды, а если он был из терций,— в терции, и так далее. То же самое сделаешь в частях, т. е. если крайний разряд был из пятых или из седьмых, приведи твое число к роду этой же части. После этого ты умножишь их друг на друга и что получится, поднимешь до целого числа, т. е. разделишь его на подобное того же рода, умноженное на другой род, как если бы ты хотел умножить .III. седьмых на .IIII. девятых и эти седьмые и девятые были бы в первом разряде дроби, как бы минуты; и ты умножил бы их друг на друга, и они стали бы в своем разряде [как бы] из рода секунд. Если же ты хочешь поднять их до целого числа, раздели их на оба разряда, каковые есть седьмые и девятые. Если оно будет раздельно из них,— то, что получится от деления, будет целое число. Если же оно не может делиться, будут части единицы и того же рода, на какой ты делил. И будет три седьмых на .IIII. девятых.— .XII. частей из .LX. трех частей единицы[48]. Таким образом, если ты хочешь умножить три с половиной на .VIII. и три части из .XI., напиши три и поставь под ними единицу, а под единицей два. И ты уже написал три с половиной, так как половина есть одна часть из двух, точно так же, как одна минута есть одна часть из .LX. частей единицы. Потом напишешь в другой части .VIII. и под ними три, и под тремя .X., и так составишь .VIII....[49].

Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми

КРАТКАЯ КНИГА ОБ ИСЧИСЛЕНИИ АЛГЕБРЫ И АЛМУКАБАЛЫ[1]

1об. || Во имя Аллаха милостивого, милосердного.

Это — *книга, которую написал Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми.*

Он начал ее тем, что сказал: восхвалим Аллаха за его благодеяния словами, которых он достоин. Исполняя то, что он заповедал своим творениям, поклоняющимся ему, мы воздаем ему благодарность и стараемся заслужить еще больших милостей и этим избавляемся от опасности перемен. Мы признаем его господство, преклоняемся перед его величием и смиряемся перед его могуществом. Он послал Мухаммада, да благословит Аллах и да приветствует его и его род, и сделал его пророком в то время, когда давно уже не было пророков, не признавалась истина и был утрачен правильный путь. Посредством его он сделал слепых зрячими, посредством его спас [людей] от гибели, посредством его умножил малое, посредством его собрал разрозненное. Благословен Аллах, господь наш, велико его величие, священны его имена и нет божества, кроме него. Да благословит Аллах и да приветствует пророка Мухаммада и его род.

Ученые прошлых времен и ушедших народов не переставали писать книги по различным разделам науки и отраслям философии, имея в виду тех, кто будет после них, рассчитывая на награду соразмерно своим силам и надеясь, что они будут вознаграждены славой и памятью и им достанется из правдивых уст похвала, по сравнению с которой ничтожны взятые ими на себя труды и тяготы, принятые ими для раскрытия сокровенных тайн науки. Один из них опередил других в том, что не разрабатывалось до него, и оставил это в наследие тем, кто придет после него. Другой комментирует труды его предшественников и этим облегчает трудности, открывает закрытое, освещает путь и делает это более доступным. Или же это человек, который находит в некоторых книгах изъяны и соединяет разъединенное, думая хорошо о своем предшественнике, не заносясь перед ним и не гордясь тем, что сделал[2].

Мне придало смелости то, что Аллах, даровав имаму ал-Ма'муну[3] сан халифа, доставшийся ему по наследству, оказав ему милость, облачив его и украсив этим саном, вместе с тем вложил в него любовь к науке и стремление приближать к себе ученых, простирая над ними крыло своего покровительства и помогая им в разъяснении того, что для них неясно, и в облегчении того, что для них затруднительно. Поэтому я составил краткую книгу об исчислении алгебры и алмукабалы[4], заключающую в себе простые и сложные вопросы арифметики, ибо это необходимо людям при дележе наследств, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов, || 2
строительстве[5] и прочих разновидностях подобных дел.

Я приступаю к этому с добрыми намерениями, надеясь на то, что сведущие люди обратят к этому то, чем одарил их всевышний Аллах, великолепный и преславный. Мой успех в этом, как и во всем, зависит от Аллаха. Я прибегаю к нему, ибо он — господин великого престола, да будет благословение Аллаха над всеми пророками и посланниками.

Когда я рассмотрел то, что нужно людям при счете, я нашел, что все это есть число[6]. Я нашел, что все числа составляются из единиц, и единица входит в состав всех чисел. Я нашел также, что все числа, превышающие единицу и до десяти, мы называем единицами. Затем десяток удваивается и утраивается, подобно тому, как это делается с единицей, и получаются двадцать, тридцать и так далее до полной сотни. Затем сотня удваивается и утраивается, подобно тому, как это делается с единицей и десятком, до тысячи. Затем тысяча повторяется таким же образом в каждом сочетании до конца познаваемого из чисел.

Я нашел, что числа, в которых нуждаются при исчислении алгебры и алмукабалы, бывают трех видов: корни, квадраты и простое число, не отнесенное ни к корню, ни к квадрату. Корень — это всякая вещь, умножаемая на себя, будь то число, равное или большее единицы, или дробь, меньшая ее[7]. Квадрат — это то, что получается из корня при его умножении на себя[8]. Простое число — это всякое число, называемое словами без отношения к корню или к квадрату[9].

Среди этих трех видов имеются такие, которые равны друг другу. Так, например, ты говоришь: квадраты равны корням, квадраты равны числу или корни равны числу[10].

[ПЕРВАЯ ГЛАВА]

Что касается квадратов, равных корням, то если, например, ты скажешь: квадрат равен пяти своим корням, то корень квадрата — пять, а квадрат — двадцать пять, что равно пяти его корням[11]. Если ты скажешь: треть квадрата равна четырем корням, то целый квадрат равен двенадцати корням, т. е. он равен ста сорока четырем и корень его — двенадцать[12]. Если, например, ты скажешь: пять квадратов равны десяти корням, то один квадрат равен двум корням, корень квадрата — два, т. е. квадрат — четыре[13]. И, таким образом, будь квадратов много или мало[14], они приводятся к одному квадрату, и так же поступают с равными им корнями, которые приводятся к тому же, к чему приводятся квадраты.

[ВТОРАЯ ГЛАВА]

Что касается квадратов, равных числу, то если, например, ты скажешь: квадрат равен девяти, то девять — квадрат, а его корень — три[15]. Если ты скажешь: пять квадратов равны восьмидесяти, то один квадрат — пятая часть восьмидесяти, т. е. шест-
2об. надцать, а его корень — четыре[16]. Если ты скажешь: || половина квадрата равна восемнадцати, то квадрат равен тридцати шести и его корень — шесть[17]. И таким же образом все квадраты с избытком или недостатком приводятся к одному квадрату и, если они меньше квадрата, их увеличивают, пока не получится полный квадрат, и так же ты поступишь с равными ему числами.

[ТРЕТЬЯ ГЛАВА]

Что касается корней, равных числу, то, если скажешь: корень равен числу три, то корень — три, а квадрат его — девять[18]. Если ты скажешь: четыре корня равны двадцати, то один корень — пять, а квадрат его — двадцать пять[19]. Если ты скажешь: половина корня равна десяти, то корень равен двадцати, а квадрат его — четыреста[20].

Я нашел, что эти три вида, т. е. корни, квадраты и числа, соединяются по три и имеются три рода соединений, а именно: квадраты и корни равны числу, квадраты и число равны корням, корни и число равны квадратам[21].

[ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА]

Что касается квадратов и корней, равных числу, то если, например, ты скажешь: квадрат и десять его корней равны тридцати девяти дирхемам[22], то это означает, что если добавить к некоторому квадрату то, что равно десяти корням, получится тридцать девять. Правило таково: раздвой [число] корней, получится в этой задаче пять, умножь это на равное ему, будет двадцать пять. Прибавь это к тридцати девяти, будет шестьдесят четыре. Извлеки из этого корень, будет восемь, и вычти из этого половину [числа] корней, т. е. пять, останется три: это и будет корень квадрата, который ты искал, а квадрат есть девять[23]. Так же

[поступают] и если указаны два квадрата, три или меньше или больше — ты приводишь их к одному квадрату, а корни и число, [данные] с ним, приводишь к тому же, что и квадрат. Подобно этому, если ты скажешь: два квадрата и десять корней равны сорока восьми дирхемам, то это означает, что если сложить два квадрата и прибавить к ним равное десяти корням одного из них, получится сорок восемь дирхемов. Нужно привести два квадрата к одному, а ты знаешь, что квадрат есть половина двух квадратов. Поэтому ты приводишь каждую вещь в этой задаче к ее половине, как если бы было сказано: квадрат и пять корней равны двадцати четырем дирхемам, что означает: если прибавить к квадрату пять его корней, получится двадцать четыре. Тогда раздвой [число] корней, получится два с половиной, умножь это на равное ему, получится шесть с четвертью. Затем прибавь это к двадцати четырем, будет тридцать дирхемов с четвертью. Извлеки || корень из этого, будет пять с половиной. Вычти 3
из этого половину [числа] корней, т. е. два с половиной, останется три: это и будет корень квадрата, а квадрат есть девять[24]. Так же, если сказано: половина квадрата и пять корней равны двадцати восьми дирхемам, это означает: если добавить к половине квадрата равное пяти его корням, получится двадцать восемь дирхемов. Ты хочешь дополнить твой квадрат так, чтобы он стал полным квадратом, т. е. удвоить его. Удвой его и также удвой все, что имеется у тебя из равного этому. Получится: квадрат и десять корней равны пятидесяти шести дирхемам. Раздвой [число] корней, получится пять. Умножь это на равное ему, будет двадцать пять. Прибавь это к пятидесяти шести, будет восемьдесят один. Извлеки корень из этого, будет девять. Вычти из этого половину [числа] корней, т. е. пять, останется четыре, это и будет корень квадрата, который ты искал, а квадрат — шестнадцать и половина его — восемь[25]. Таким же образом поступай всегда, когда встретишься с квадратами, корнями и равным им числом, если Аллах пожелает.

[ПЯТАЯ ГЛАВА]

Что касается квадратов и чисел, равных корням, то если, например, ты скажешь: квадрат и число двадцать один дирхем равны десяти его корням, то это означает: если прибавить к квадрату двадцать один дирхем, получится равное десяти корням этого квадрата. Правило его таково: раздвой [число] корней, получится пять. Умножь это на равное ему, будет двадцать пять. Вычти из этого двадцать один, которые, как сказано, были с квадратом, останется четыре. Извлеки из этого корень, будет два. Вычти это из половины [числа] корней, т. е. пяти, останется три: это и будет корень квадрата, который ты искал. Его квадрат — девять; если хочешь прибавить этот корень к половине [числа] корней, будет семь, это [тоже] корень квадрата, который ты искал; его квадрат — сорок девять[26]. Если тебе встретится задача, приводящая тебя к этой главе, попробуй найти ее правильное решение при помощи сложения, если же это не получится, то необходимо вычитание. В этой главе применяется и сложение, и вычитание, чего нет в остальных из тех трех глав, в которых нужно раздваивать [число] корней. Знай, что если в этой главе ты раздвоил [число] корней и умножил его на равное ему, и произведение оказалось меньше числа дирхемов, сложенных с квадратом, задача невозможна[27]. А если оно в точности равно [числу] дирхемов, корень квадрата равен половине [числа] корней без сложения и вычитания[28]. Всегда, когда тебе встречаются два квадрата, или больше или меньше, приведи их к одному квадрату, подобно тому, как я объяснил тебе в первой главе.

[ШЕСТАЯ ГЛАВА]

3об. *Что касается корней* || *и числа, равных квадрату, то если,* например, ты скажешь: три корня и число четыре равны квадрату, то правило таково: раздвой [число] корней, получится полтора, умножь это на равное ему, будет два с четвертью. Прибавь к четырем, будет шесть с четвертью. Извлеки из этого корень, получится два с половиной. Прибавь это к половине [числа] корней, т. е. к полутора, получится четыре: это и будет корень квадрата, а квадрат есть шестнадцать[29]. Все, что больше квадрата или меньше, приведи к одному квадрату.

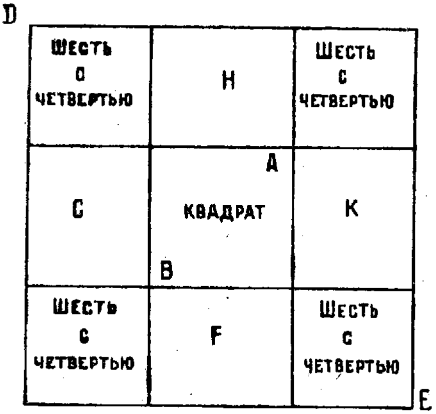
Таковы те шесть видов, которые я упомянул в начале этой моей книги. Я истолковал их и сообщил о том, что в трех из этих видов нет раздвоения [числа] корней и объяснил необходимое для них правило. Что же касается [случаев], когда необходимо раздвоение [числа] корней в трех остальных главах, то я достоверно изложил их в [этих] главах и начертил для каждой главы чертеж, объясняющий причину раздвоения.

[ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРАВИЛЬНОСТИ ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЫ]

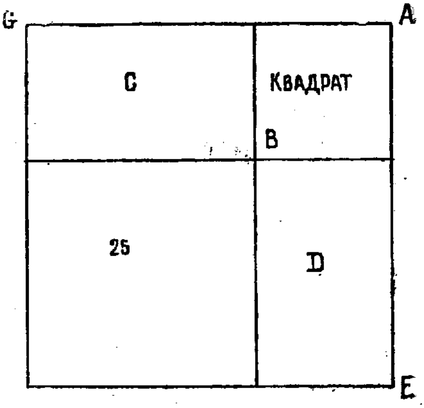
Что касается причины [правила для вида:] квадрат и десять корней равны тридцати девяти дирхемам, то чертеж этого таков: квадратная плоская фигура с неизвестными сторонами — это тот квадрат, который ты хочешь узнать вместе с его корнем. Это — плоская фигура *AB*, каждая сторона которой — корень [квадрата], а если умножить каждую его сторону на некоторое число, это число есть число корней. Всякий корень подобен корню этой плоской фигуры. Поэтому когда говорится, что к квадрату прибавлены десять корней, возьмем четверть от десяти [корней], т. е. два с половиной [корня], построим каждую из этих четвертей на одной из сторон плоской фигуры так, что они будут вместе с первой фигурой, т. е. фигурой *AB*, причем их ширина есть два с половиной, это будут поверхности *H, F, K, C*.

Получится плоская фигура с равными неизвестными сторонами, в каждом из четырех углов которой недостает [фигуры размером] два с половиной на два с половиной. Таким образом, чтобы [вся] эта фигура превратилась в квадратную, к ней нужно добавить четыре раза фигуру [размером] два с половиной на равное этому, все это вместе — двадцать пять. Мы знаем, что первая фигура, т. е. фигура квадрата, вместе с окружающими ее фигурами, представляющими десять корней, составляет число тридцать девять. Если мы прибавим к ней двадцать пять, т. е. четыре квадрата в углах фигуры *AB*, бóльшая фигура превратится в квадрат, т. е. фигуру *DE*. Мы знаем, что вся эта фигура равна шестидесяти четырем и каждая ее сторона, т. е. корень, равна восьми. || Если 4 мы вычтем два раза из восьми равное четверти десяти, т. е. [вычтем] пять от концов стороны самой большой фигуры, т. е. фигуры *DE*, остаток стороны есть три: это — корень этого квадрата. А это мы и делали, когда раздваивали десять корней, умножали это на равное ему, и прибавляли это к числу, т. е. тридцати девяти, дополняя большую фигуру тем, что недоставало в ее четырех углах. Так как четверть всякого числа, умноженная на равное ей, а затем на четыре, равна произведению половины [числа] на равное ей, мы умножали половину [числа] корней на равное ей вместо [умножения] четверти [числа корней] на равное ей, а затем на четыре.

Вот чертеж этого [рис. 1].



[Рис. 1].

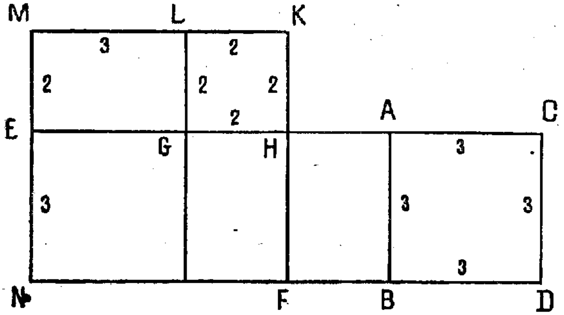


[Рис. 2].

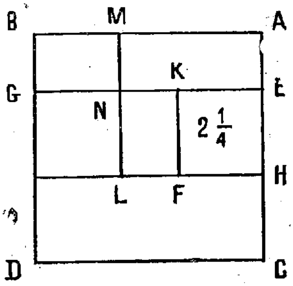
Имеется и другой чертеж, передающий смысл этого. Это плоская фигура *AB*, являющаяся квадратом. Мы хотим прибавить к ней равное десяти ее корням. Для этого раздваиваем десять [корней], получается пять, строим [полученные] две плоские фигуры на двух сторонах фигуры *AB*, это будут фигуры *C*, *D*, причем длина каждой из этих фигур — пять, т. е. половина десяти корней, а ширина их равна стороне фигуры *AB*. У нас осталась квадратная фигура в одном из углов фигуры *AB* [размером] пять на пять, а [пять] — половина десяти корней, построенных на сторонах первой фигуры. Мы знаем, что первая фигура — квадрат и что две фигуры на ее сторонах составляют десять корней. Все это вместе составляет тридцать девять. До полной самой большой фигуры остается квадратная фигура [размером] пять на пять, т. е. двадцать пять. Прибавим это к тридцати девяти, чтобы дополнить большую фигуру, т. е. фигуру *CE*. Все это вместе составляет шестьдесят четыре. Извлечем корень, это восемь. Это одна сторона самой большой фигуры. Если мы вычтем из нее равное тому, что мы прибавляли, т. е. пять, останется три. Это сторона фигуры *AB*, являющейся квадратом, т. е. корень, а квадрат его есть девять. Вот чертеж этого [рис. 2].

[ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРАВИЛЬНОСТИ ПЯТОЙ ГЛАВЫ]

Что касается [*вида*] *квадрат и двадцать один дирхем равны десяти корням,* то построим квадрат в виде квадратной плоской фигуры с неизвестными сторонами, это будет фигура *AD*. Затем пририсуем к ней плоскую фигуру с параллельными сторонами, 4об. ширина которой || равна одной стороне фигуры *AD*, это сторона *EN*. Получится фигура *EB*. Длина этих двух фигур вместе — сторона *CE*. Мы знаем, что эта длина есть число десять, так как для каждой квадратной фигуры с равными сторонами и углами одна сторона, умноженная на единицу, есть корень этой фигуры, [умноженная] на два — два ее корня. Так как было сказано, что квадрат и двадцать один равны десяти его корням, мы знаем, что длина стороны *EC* есть число десять, так как сторона *CD* — корень квадрата. Раздвоим сторону *CE* точкой *H*, тогда очевидно, что линия *EH* равна линии *HC*. Нам ясно также, что линия *HF* [перпендикуляр, опущенный из точки *H* на линию *DN*] равна линии *CD*. Прибавим к линии *HF* в ее направлении равное разности между *CH* и *HF* так, чтобы [наша] фигура превратилась в квадратную. Тогда линия *FK* будет равна линии *KM*. Получилась квадратная фигура с равными сторонами и углами — фигура *MF*. Как нам уже стало ясно, линия *FK* — пять, этому равны и [другие] ее стороны. Поэтому эта фигура равна двадцати пяти. Это — произведение половины [числа] корней на равное ей, так как пятью пять — двадцать пять. Ранее нам было ясно, что фигура *EB* — это двадцать один, складывающиеся с квадратом. Теперь отсечем от фигуры *EB* ее [часть] линией *FK*, являющейся одной из сторон фигуры *MF*, останется фигура *AF*. Отложим на линии *KM* линию *KL*, равную линии *HK*. Ясно, что линия *FH* равна линии *ML*. Если отсечь от линии *MK* линию *LK*, равную линии *KH*, образуется фигура *MG*, равная фигуре *FA*. Очевидно, что если прибавить к фигуре *EF* фигуру *MG*, [получится фигура], равная фигуре *EB*, т. е. двадцати одному. Но фигура *MF* есть двадцать пять, поэтому, если вычесть из фигуры *MF* фигуру *EF* и фигуру *MG*, составляющие вместе двадцать один, останется малая фигура — фигура *GK*, являющаяся разностью между двадцатью пятью и двадцатью одним, т. е. равная четырем. Ее корень — это линия *GH*, равная линии *HA*; это два. Если отнять ее от линии *HC*, являющейся половиной [числа] корней, остается линия *AC*; это — три; эта линия является корнем первого квадрата. Если прибавить к линии *CH*, являющейся половиной [числа корней], то, что получилось, получится семь,



[Рис. 3].



[Рис. 4].

т. е. линия *GC*; это — корень квадрата, большего, чем этот, [но] если прибавить к нему двадцать один, получится равное десяти квадратам[30]. Вот чертеж этого [рис. 3]. Это и есть то, что мы хотели доказать.

|| [ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРАВИЛЬНОСТИ ШЕСТОЙ ГЛАВЫ] 5

Что касается [*вида*] *три корня и число четыре равны квадрату,* то построим квадрат в виде квадратной плоской фигуры с неизвестными сторонами и равными сторонами и углами — это фигура *AD*. Эта фигура состоит из трех корней и [числа] четыре. В каждой квадратной фигуре одна из сторон, [умноженная] на единицу, есть ее корень. Отсечем от фигуры *AD* фигуру *ED* и сделаем одну из ее сторон, а именно *EC*, равной трем, т. е. числу корней. Она равна *GD*. Ясно, что фигура *EB*—это четыре, складывающиеся с корнями. Раздвоим сторону *EC*, равную трем корням, точкой *H*. Затем построим на ней квадратную фигуру, а именно, фигуру *EF*, равную произведению половины [числа] корней, т. е. полутора, на равное ей. Это — два с четвертью. Затем прибавим к линии *HF* равное линии *AE*, это будет линия *FL*. Тогда линия *HL* равна линии *AH*, и линия *KN* равна линии *FL*. Получилась квадратная фигура с равными сторонами и углами, это фигура *HM*, [так как], очевидно, что линия *AH* равна линии *ML*, и линия *AH* равна линии *HL*. Оставшаяся линия *NG* равна линии *NL*, а линия *MN* равна линии *FL*. Отсечем от фигуры *EB* равное фигуре *KL*. Мы знаем, что фигура *AG* является четырьмя, складывающимися с тремя корнями. Фигура *AN* вместе с фигурой *KL* станет равной фигуре *AG*, т. е. числу четыре. Нам ясно, что фигура *HM* есть половина [числа] корней, т. е. полтора, умноженная на равное ей, т. е. два с четвертью, к чему прибавлено [число] четыре, т. е. фигура *AN* и фигура *KL*. От стороны первого квадрата, т. е. фигуры *AD*, являющейся квадратом, у нас осталась половина [числа] корней, т. е. полтора, являющаяся линией *HC*. Если прибавить это к линии *AH*, являющейся корнем фигуры *HM*, т. е. к двум с половиной, получим четыре. Это линия *AC*, т. е. корень квадрата, являющегося фигурой *AD*. Вот чертеж этого [рис. 4]. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Мы нашли, что все, нужное для действий исчисления алгебры и алмукабалы, необходимо приводит тебя к одной из шести глав, изложенных и разъясненных мной в этой моей книге. Знай это.

ГЛАВА ОБ УМНОЖЕНИИ

5об. Я сообщу тебе, как умножать вещи, || являющиеся корнями, одну на другую, если они [стоят] отдельно, если к ним прибавлены числа, если из них вычтены числа или если они вычтены из чисел, а также, как прибавлять их друг к другу и вычитать их друг из друга.

Знай, что для того, чтобы умножить число на число, необходимо взять одно из двух чисел кратным столько раз, сколько единиц в другом. Если имеются сочетания[31], к которым прибавлены единицы или из которых вычтены единицы, то нужно умножать четыре раза: сочетания на сочетания, сочетания на единицы, единицы на сочетания и единицы на единицы[32]. Если единицы, находящиеся при сочетаниях, прибавляются или вычитаются, то четвертое произведение также прибавляется, если одни из них прибавляются, а другие вычитаются[33], четвертое произведение вычитается.

Например, если десять с единицей [умножены] на десять с двумя, то десять на десять — это сто, единица на десять — это прибавляемые десять, два на десять — это прибавляемые двадцать, а единица на два — это прибавляемые два, и все это вместе — сто тридцать два[34].

Если десять без единицы [умножаются] на десять без единицы, то десять на десять — это сто, вычитаемая единица на десять — это вычитаемые десять, снова вычитаемая единица на десять — это вычитаемые десять, все это вместе — восемьдесят, а вычитаемая единица на вычитаемую единицу — это прибавляемая единица, и все это вместе — восемьдесят один[35].

Если десять и два [умножаются] на десять без единицы, то десять на десять — это сто, вычитаемая единица на десять — это вычитаемые десять, прибавляемые два на десять — это прибавляемые двадцать, и все это вместе — сто десять, а прибавляемые два на вычитаемую единицу — это вычитаемые два, следовательно, все это вместе — сто восемь[36]. Я объяснил это для обоснования умножения вещей друг на друга, если к ним прибавлено число, или они вычтены из числа, или из них вычтено число.

Если тебе скажут: десять без вещи, где вещь означает корень, [умножены] на десять, то умножь десять на десять, это — сто, а вычитаемая вещь[37] на десять — это вычитаемые десять корней, поэтому ты скажешь: сто без десяти вещей[38].

Если скажут: десять с вещью умножены на десять, то произведение десяти на десять — это сто, а вещь на десять — это прибавляемые десять вещей, и получится сто и десять вещей[39].

Если скажут: десять с вещью [умножены] на равное им, то скажи: десять на десять — это сто, десять на вещь — это десять вещей, снова десять на вещь — это десять вещей, вещь на вещь —
это прибавляемый квадрат, поэтому || все это вместе — сто дирхемов, 6
двадцать вещей и прибавляемый квадрат[40].

Если скажут: десять без вещи [умножены] на десять без вещи, то скажи: десять на десять — это сто, вычитаемая вещь на десять — это вычитаемые десять вещей, [снова] вычитаемая вещь на десять — это вычитаемые десять вещей и вычитаемая вещь на вычитаемую вещь — это прибавляемый квадрат, поэтому все это вместе — сто и квадрат без двадцати вещей[41].

Если тебе скажут: дирхем без одной шестой [умножен] на дирхем без одной шестой, т. е. пять шестых на равное ему, то это — двадцать пять тридцать шестых дирхема, т. е. две трети и одна шестая одной шестой. *Правило этого* [таково]: умножь дирхем на дирхем, получится дирхем, вычитаемая одна шестая на дирхем — это вычитаемая одна шестая, [снова] вычитаемая одна шестая на дирхем — это вычитаемая одна шестая, получится две трети, а вычитаемая одна шестая на вычитаемую одну шестую — это прибавляемая одна шестая одной шестой, и все это вместе — две трети и одна шестая одной шестой[42].

Если скажут: десять без вещи [умножены] на десять с вещью, скажи: десять на десять — это сто, вычитаемая вещь на десять — это вычитаемые десять вещей, вещь на десять — это прибавляемые десять вещей, вычитаемая вещь на вещь — это вычитаемый квадрат, и все это вместе — сто дирхемов без квадрата[43].

Если скажут: десять без вещи [умножены] на вещь, скажи: десять на вещь — это десять вещей, вычитаемая вещь на вещь — это вычитаемый квадрат, и все это вместе — десять вещей без квадрата[44].

Если скажут: десять и вещь [умножены] на вещь без десяти, скажи: вещь на десять — это прибавляемые десять вещей, вещь на вещь — это прибавляемый квадрат, вычитаемые десять на десять — это прибавляемый квадрат, вычитаемые десять на десять — это вычитаемые сто дирхемов, вычитаемые десять на вещь — это вычитаемые десять вещей; поэтому ты скажешь: квадрат без дирхемов, после того как ты противопоставил десять прибавляемых вещей десяти вычитаемым вещам, т. е. уничтожил их[45], останется квадрат без ста дирхемов[46].

Если скажут: десять дирхемов и половина вещи [умножены] на половину дирхема без пяти вещей, то скажи: половина дирхема на десять — это прибавляемые пять дирхемов, половина дирхема на половину вещи — это прибавляемая четверть вещи, вычитаемые пять вещей на десять дирхемов — это вычитаемые пятьдесят корней, получатся пять дирхемов без сорока девяти и трех четвертей корня, далее умножь вычитаемые пять корней на прибавляемую половину корня, это — вычитаемые два с половиной квадрата, и все это вместе — пять дирхемов без двух с половиной квадратов и без сорока девяти и трех четвертей корня[47].

Если скажут: десять с вещью умножены на вещь без десяти, 6об. то это — как если бы сказали: вещь и десять || [умножены] на вещь без десяти. Скажи: вещь на вещь — это прибавляемый квадрат, десять на вещь — это прибавляемые десять вещей, вычитаемые десять на вещь — это вычитаемые десять вещей, тогда прибавляемое с вычитаемым уйдут и останется квадрат, а вычитаемые десять на десять — это сто, вычитаемые из квадрата. Поэтому все это вместе — квадрат без ста дирхемов[48]. Всякий раз при умножении прибавляемого и вычитаемого, например, прибавляемой вещи и вычитаемой вещи, произведение — всегда вычитаемое. Знай это, и Аллах поможет тебе.

ГЛАВА ОБ УВЕЛИЧЕНИИ И УМЕНЬШЕНИИ

Знай, что корень из двухсот без десяти, прибавленный к двадцати без корня из двухсот,— десять[49]. Корень из двухсот без десяти, вычтенный из двадцати без корня и двухсот,— тридцать без двух корней из двухсот, а два корня из двухсот — корень из восьмисот[50]. Сто и квадрат без двадцати корней, прибавленные к пятидесяти и десяти корням без двух квадратов,— сто пятьдесят без квадрата и без десяти корней[51]. Сто и квадрат без двадцати корней, из которых вычтены пятьдесят и десять корней без двух квадратов,— пятьдесят дирхемов и три квадрата без тридцати корней[52]. Причину этого я объясню тебе на чертеже, передающем смысл этого правила, если захочет всевышний Аллах. Знай, что если хочешь удвоить любой корень квадрата, известный или иррациональный[53], то твое удвоение означает, что ты умножаешь на два, для чего ты должен умножить на два, а затем на квадрат. Тогда корень из всего этого равен двум [корням] данного квадрата[54]. Если ты хочешь утроить его, умножь три на три, а затем на квадрат. Тогда корень из всего этого равен трем корням первого квадрата[55]. Точно так же следуй правилу этого примера при увеличении кратности или при уменьшении ее. Если ты хочешь взять половину корня квадрата, ты должен умножить половину на половину, будет четверть, далее [умножь это] на квадрат. Тогда корень из всего этого равен половине корня данного квадрата[56].

Точно так же треть, четверть, меньше этого или больше, до бесконечности при уменьшении или увеличении.

Пример этого: если ты хочешь удвоить корень из девяти, умножь два на два, а затем на девять, это будет тридцать шесть, извлеки корень, это шесть, это и есть удвоенный корень из девяти[57]. Точно так же, если ты хочешь утроить корень из девяти, умножь три на три, а затем на девять, получится восемьдесят один, извлеки корень, это — девять, это и есть утроенный корень из || девяти[58]. Если ты хочешь найти половину корня из девяти, 7 умножь половину на половину, получится четверть, затем умножь четверть на девять, получится два с четвертью, извлеки корень, это — полтора, это и есть половина корня из девяти[59]. Таков способ и тогда, когда [корень] прибавляемый, и тогда, когда он вычитаемый, и тогда, когда [корень] известный, и тогда, когда он иррациональный.

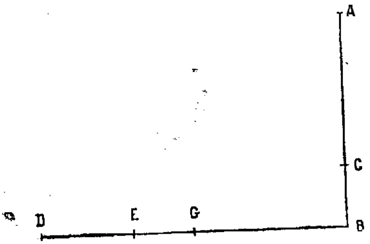
Деление: если ты хочешь разделить корень из девяти на корень из четырех, раздели девять на четыре, получится два с четвертью, корень из этого сравним с единицей[60], это — полтора[61]. Если ты хочешь разделить корень из четырех на корень из девяти, раздели четыре на девять, будет четыре девятых единицы, корень из этого сравним с единицей, это — две трети единицы[62]. Если ты хочешь разделить два корня из девяти на корень из четырех или другого квадрата, удвой корень из девяти, согласно тому, как я учил тебя производить произвольное умножение, и раздели это на четыре или на то, на что хочешь разделить, поступая так, как поступал я. Точно так же, если ты хочешь [получить] три корня из девяти или больше, или половину корня из девяти, или меньше, поступай по этому правилу и ты обретешь успех, если захочет всевышний Аллах.

Если ты хочешь умножить корень из девяти на корень из четырех, умножь девять на четыре, получится тридцать шесть и извлеки корень, получится шесть; это и есть произведение корня из девяти на корень из четырех[63]. Точно так же, если ты хочешь умножить корень из пяти на корень из десяти, умножь пять на десять и корень из того, что получится, и есть вещь, которую ты ищешь[64].

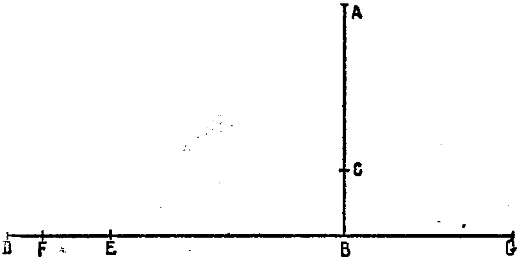
Если ты хочешь умножить корень из трети на корень из половины, умножь треть на половину, получится одна шестая; корень из одной шестой есть произведение корня из трети на корень из половины[65].

Если ты хочешь умножить два корня из девяти на три корня из четырех, извлеки два корня из девяти, как мы тебе изложили, т. е. узнай, корнем какого квадрата являются они и точно так же поступи с тремя корнями из четырех, т. е. узнай, корнем какого квадрата являются они, и умножь один из этих квадратов на другой. Корень из того, что у тебя получилось, и есть два корня из девяти, умноженные на три корня из четырех[66]. Поступай как с прибавляемыми корнями, так и с вычитаемыми, как мы сказали в этом примере.

Что касается причины [*вида*]: *корень из двухсот без десяти, прибавленный к двадцати без корня из двухсот,* то чертеж его таков: линия *AB* — это корень из двухсот, а [линия] от [точки] *A* 7об. до точки *C* — десять, тогда остаток от корня из двухсот || — остаток от линии *AB*, т. е. линия *CB*. Далее проведи из точки *B* линию до точки *D*, так чтобы эта линия была двадцатью, она равна двум линиям *AC*, равным десяти, а [линия] от точки *B* до точки *E* равна линии *AB*, т. е. также является корнем из двухсот. Остаток от двадцати — [линия] от точки *E* до точки *D*. Поэтому мы хотим прибавить остаток от корня из двухсот после вычитания десяти, т. е. линию *CB* к линии *ED*, т. е. двадцати без корня из двухсот. Отсечем от линии *BE* равное линии *CB*, это линия *GE*. Тогда очевидно, что линия *AB*, т. е. корень из двухсот, равна линии *BE*, а линия *AC*, т. е. десять, равна линии *BG* и остаток линии *AB*, т. е. *CB*, равен остатку линии *BE*, т. е. *GE*. Прибавим к линии *ED* линию *GE*. Очевидно, что, отнимая от линии *BD*, т. е. от двадцати, равное линии *AC*, т. е. десять, получаем линию *BC*, и у нас остается линия *DG*, т. е. десять. Это и есть то, что мы хотели доказать[67]. Вот чертеж этого [рис. 5].



[Рис. 5].



[Рис. 6].

Что касается причины [*вида*]: *корень из двухсот без десяти, вычтенный из двадцати без корня из двухсот,* то его чертеж таков: линия *AB*, являющаяся корнем из двухсот, и [линия] от [точки] *A* до точки *C*, равная десяти, известны. Проведи из точки *B* линию до точки *D* и сделай ее равной двадцати. Проведи от [точки] *B* до точки *E* линию, равную корню из двухсот, т. е. равную линии *AB*. Очевидно, что линия *DE* — это остаток от двадцати после вычитания корня из двухсот. Мы хотим вычесть линию *CB* из линии *ED*. Проведем от точки *B* до точки *G* линию, равную линии *AC*, т. е. десяти. Тогда очевидно, что линия *GD*, равная сумме линии *GB* с линией *BD*, есть тридцать. Отсечем от линии *ED* равное линии *CB*, эта линия *EF*. Очевидно, что линия *FD* есть остаток линии *GD*, т. е. тридцати. Очевидно [также], что линия BE — корень из двухсот, а линия GB и линия BC — также корень из двухсот. Поэтому линия EF равна линии CB, которая, очевидно, получается вычитанием из линии GD, т. е. тридцати, двух корней из двухсот, т. е. корня из восьмисот. Это и есть то, что мы хотели доказать[68]. Вот чертеж этого [рис. 6].

Что касается [*вида*]*: сто и квадрат без двадцати корней,* прибавленные к пятидесяти и десяти корням без двух квадратов, то для него не построен чертеж, так как здесь три различных рода — || квадраты, корни и числа и нет того, чему они равны; 8
мы могли бы дать чертеж и этого случая, но он не был бы ясен. Словесное доказательство просто. Ты знаешь, что у тебя сто и квадрат без двадцати корней и если прибавить к ним пятьдесят и десять корней, получится сто пятьдесят и квадрат без десяти корней, так как эти десять корней восполнят[69] вычитаемые двадцать корней до десяти корней. Останется сто пятьдесят и квадрат без десяти корней. Но вместе с сотней был квадрат. Поэтому, если ты вычтешь из ста два квадрата, вычитаемые из пятидесяти, то квадрат уйдет благодаря квадрату, и у тебя останется квадрат и получится сто пятьдесят без квадрата и без десяти корней. Это и есть то, что мы хотели доказать[70].

ГЛАВА О ШЕСТИ ЗАДАЧАХ

Предпошлем главам о вычислениях и их случаях шесть задач в качестве примеров к шести главам начала этой моей книги, из которых три, как я сообщил, без раздвоения числа корней. Я упомянул, что исчисление алгебры и алмукабалы приводит тебя к одной из этих глав. Я теперь изложу эти задачи, которые приблизят тебя к пониманию и облегчат усвоение, если захочет всевышний Аллах.

Первая из задач. Если тебе скажут: ты разделил десять на две части, умножил одну из частей на другую, а затем умножил одну из них на себя, тогда произведение на себя стало равно одной из частей, умноженной на другую и взятой четыре раза[71]. *Правило этого* таково: прими одну из частей за вещь, тогда другая есть десять без вещи. Умножь десять на десять без вещи, будет десять без вещей без квадрата. Далее умножь это на четыре, так, как тебе сказано: четыре раза. Получится четыре произведения одной из частей на другую, т. е. сорок вещей без четырех квадратов. Затем умножь вещь на вещь, т. е. одну из частей на себя. Получится: квадрат равен сорока вещам без четырех квадратов. Восполни это четырьмя квадратами и прибавь их к квадрату. Получится: сорок вещей равны пяти квадратам. Поэтому один квадрат равен восьми корням, это шестьдесят четыре. Корень его — восемь. Это одна из частей, умноженная на себя. Остаток от десяти — два, это другая часть. Эта задача привела тебя к одной из шести глав, а именно: квадраты равны корням. Знай это.

Вторая задача. Ты разделил десять на две части и умножил 8об. каждую часть на себя, || а затем умножил десять на себя. Произведение десяти на себя равно одной из частей, умноженной на себя и взятой два и семь девятых раза, или равно другой из частей, умноженной на себя и взятой шесть с четвертью раз[72]. *Правило этого* таково: прими одну часть за вещь, а другую — за десять без вещи, умножь вещь на себя, будет квадрат, а затем на два и семь девятых, будет два и семь девятых квадрата. Затем умножь десять на равное этому, будет сто, что равно двум и семи девятым квадрата. Приведи это к одному квадрату, это будет: девять двадцать пятых, т. е. одна пятая и четыре пятых одной пятой. Извлеки корень из одной пятой ста и четырех пятых одной пятой их, что составляет тридцать шесть, т. е. этому равен квадрат. Корень из этого — шесть. Это одна из частей, а другая — четыре. И эта задача необходимо привела тебя к одной из шести глав, а именно: квадраты равны числу.

Третья задача. Ты разделил десять на две части, затем разделил одну из них на другую и частное от деления есть четыре[73]. *Правило этого* таково: прими одну из частей за вещь, а другую — за десять без вещи, затем раздели десять без вещи на вещь, будет четыре. Ты знаешь, что когда умножишь частное от деления на делитель, получится имущество, которое делилось. Частное в этой задаче есть четыре, а делитель — вещь, поэтому произведение четырех на вещь, т. е. четыре вещи, равно имуществу, которое делилось, т. е. десяти без вещи. Поэтому восполним десять вещью и прибавим ее к четырем вещам, получится: пять вещей равны десяти, а одна — двум. Это одна из частей. И эта задача привела тебя к одной из шести глав, а именно: корни равны числу.

Четвертая задача. Ты умножил треть имущества и дирхем на четверть имущества и дирхем и получилось двадцать[74]. *Правило этого* таково: [прими твое имущество за вещь, затем] умножь треть вещи на четверть вещи, будет половина одной шестой квадрата, умножь дирхем на треть вещи, будет треть вещи, и дирхем на четверть вещи, будет четверть вещи, и [умножь] дирхем на дирхем, будет дирхем. Поэтому половина одной шестой квадрата, треть вещи, четверть вещи и дирхем равны двадцати дирхемам. Если вычесть из двадцати дирхемов дирхем, останется девятнадцать дирхемов, равные половине одной шестой квадрата, трети вещи и четверти вещи. Сделай твой квадрат полным: сделай это, умножив все, что у тебя есть, на двенадцать. Тогда у тебя будет: квадрат и семь корней равны двумстам двадцати восьми дирхемам. Половина [числа] корней, умноженная на равное ей, 9 || — двенадцать с четвертью, если прибавить к этому число, т. е. двести двадцать восемь, получится двести сорок с четвертью. Извлеки корень из этого, получится пятнадцать с половиной. Вычти из этого половину [числа] корней, т. е. три с половиной, останется двенадцать, это и есть имущество. И эта задача привела тебя к одной из шести глав, а именно: квадраты и корни равны числу.

Пятая задача. Ты разделил десять на две части, а затем умножил каждую часть на себя и сложил это, получилось пятьдесят восемь дирхемов[75]. *Правило этого* таково: прими одну из частей за вещь, а другую — за десять без вещи, умножь десять без вещи на равное этому, будет сто и квадрат без двадцати вещей, затем умножь вещь на равное ей, будет квадрат, затем сложи все это, у тебя получится: сто и два квадрата без двадцати вещей равны пятидесяти восьми дирхемам. Восполни сто и два квадрата отнимаемыми двадцатью вещами и прибавь их к пятидесяти восьми, получится: сто и два квадрата равны пятидесяти восьми дирхемам и двадцати вещам. Приведи это к одному квадрату, т. е. возьми половину того, что имеется у тебя, получится: пятьдесят дирхемов и квадрат равны двадцати девяти дирхемам и десяти вещам. Противопоставь то, что ты вычтешь из пятидесяти, двадцати девяти, останется: двадцать один и квадрат равны десяти вещам. Половина [числа] корней есть пять, произведение этого на себя — двадцать пять. Вычти из этого двадцать один, которые находятся с квадратом, останется четыре. Извлеки корень из этого, это два. Вычти это из половины [числа] корней, т. е. пяти, останется три, это одна из частей, а другая — семь. И эта задача привела тебя к одной из шести глав, а именно: квадраты и число равны корням.

Шестая задача. Ты умножил треть имущества на его четверть и получилось имущество, к которому прибавлены двадцать четыре дирхема[76]. *Правило этого* таково: прими твое имущество за вещь, затем умножь треть вещи на четверть вещи. Получится: половина шестой квадрата равна вещи и двадцати четырем дирхемам. Затем умножь половину шестой квадрата на двенадцать так, чтобы сделать твой квадрат полным, умножь также вещь на двенадцать, получится двенадцать вещей, умножь также двадцать четыре на двенадцать, у тебя получится: двести восемьдесят восемь дирхемов и двенадцать корней равны квадрату. Половина [числа] корней равна шести, произведение этого на себя, прибавленное к двумстам восьмидесяти восьми, — триста двадцать четыре. Извлеки корень из этого, будет восемнадцать. Прибавь это к половине [числа] корней, т. е. шести, это будет двадцать четыре. Это и есть имущество. И эта задача привела тебя к одной из шести глав, а именно: корни и число равны квадрату.

|| ГЛАВА О РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧАХ

90б.

Если спрашивающий спросит: ты разделил десять на две части, затем умножил одну из них на другую, и получился двадцать один дирхем, *то ты знаешь,* что одна из частей десяти есть вещь, а другая — десять без вещи. Умножь вещь на десять без вещи, получится: десять вещей без квадрата равны двадцати одному. Восполни десять вещей квадратом и прибавь его к двадцати одному, получится: десять вещей равны двадцати одному дирхему и квадрату[77]. Вычти половину [числа] корней, останется пять, умножь их на равное им, будет двадцать пять, вычти из этого двадцать один, которые [прибавлены] к квадрату, останется четыре. Извлеки корень, это два. Вычти это из половины корней, т. е. пяти, останется три. Это и есть одна из частей. Если хочешь, прибавь корень из четырех к половине корней, будет семь, это [также] одна из частей. Эта задача, которая решается при помощи сложения и вычитания.

Если скажут: ты разделил десять на две части, умножил каждую часть на себя, а затем вычел меньшую из большей и осталось сорок[78], то *правило этого* таково: умножь десять без вещи на равное этому, получится сто и квадрат без двадцати вещей. Умножь вещь на вещь, получится квадрат. Вычти его из ста и квадрата без двадцати вещей, останется сто без двадцати вещей, равные сорока дирхемам. Восполни сто двадцатью вещами и прибавь их к сорока, получится: сто равно двадцати вещам и сорока дирхемам. Вычти сорок из ста, останется: шестьдесят дирхемов равны двадцати вещам. Поэтому одна вещь равна трем. Это и есть одна из частей.

Если скажут: ты разделил десять на две части, затем умножил каждую часть на себя, затем сложил их и прибавил к ним разность между частями до умножения, и в сумме получилось пятьдесят четыре дирхема, *то правило этого* таково: умножь десять без вещи на себя, будет сто и квадрат без двадцати вещей, умножь вторую часть десяти на себя, будет квадрат, затем сложи это, получится сто и два квадрата без двадцати вещей. И, как сказано, прибавь к этому разность между ними до умножения. Поэтому скажи, что разность между ними есть десять без двух вещей. Сумма всего этого составляет сто десять и два квадрата без двадцати двух вещей, что равно пятидесяти четырем дирхемам. После восполнения и противопоставления ты скажешь: сто десять дирхемов и два квадрата равны пятидесяти четырем дирхемам и двадцати двум вещам. Приведи два квадрата к одному квадрату, т. е. возьми половину всего, что у тебя. Получится:
10 пятьдесят || пять дирхемов и квадрат равны двадцати семи дирхемам и одиннадцати вещам. Вычти двадцать семь из пятидесяти пяти, останется двадцать восемь дирхемов и квадрат, равные одиннадцати вещам[79]. Половина вещей — пять с половиной. Умножь это на равное ему, получится тридцать с четвертью. Вычти из этого двадцать восемь, находящихся с квадратом, останется два с четвертью. Извлеки корень, получится полтора. Вычти это из половины числа корней, останется четыре. Это и есть одна из частей.

Если скажут: ты разделил десять на две части и разделил одну на другую и наоборот и в сумме все это оказалось двумя и одной шестой дирхема, *то правило таково:* если ты умножишь каждую из частей на себя, то сумма этого будет равна одной из частей, умноженной на другую, а затем умноженной на сумму, [имевшуюся] у тебя до умножения, т. е. на [сумму] частных, т. е. на два и одну шестую. Поэтому умножь десять без вещи на равное этому, получится сто и квадрат без двадцати вещей, умножь вещь на вещь, будет квадрат, сумма всего этого составляет сто и два квадрата без двадцати вещей, что равно вещи, умноженной на десять без вещей, т. е. десяти вещам без квадрата, умноженным на частное от деления, т. е. на два и одну шестую. Получится: двадцать одна и две трети вещи без двух квадратов и одной шестой равны ста и двум квадратам без двадцати вещей. Восполни это и прибавь два и одну шестую квадрата к ста и двум квадратам без двадцати вещей, прибавь двадцать вещей, вычитаемых из ста и двух квадратов, к двадцати одной и двум третям вещи, у тебя получится: сто с четырьмя и одной шестой квадрата равны сорока одной и двум третям вещи. Приведи это к [одному] квадрату. Ты знаешь, что один квадрат по отношению к четырем и одной шестой квадрата есть одна пятая и одна пятая одной пятой[80]. Возьми одну пятую и одну пятую одной пятой от того, что имеется у тебя, у тебя получится: двадцать четыре и квадрат равны десяти корням, так как десять по отношению сорока одной и трети вещей есть одна пятая и одна пятая одной пятой[81]. Половина [числа] корней — пять, если умножить их на себя, получится двадцать пять. Вычти из этого двадцать четыре, находящиеся с квадратом, останется один. Извлеки корень, получится один. Вычти это из половины [числа] корней, т. е. пяти, останется четыре. Это и есть одна из частей. *Знай,* что если ты разделишь любые две вещи одну на другую и наоборот и умножишь полученные частные друг на друга, всегда будет || единица[82]. 10 об.

Если скажут: ты разделил десять на две части, затем умножил одну из частей на пять и разделил ее на другую, затем половину того, что у тебя получилось, прибавил к умноженному на пять, и получилось пятьдесят дирхемов, *то правило этого таково:* возьми вещь, [являющуюся частью] десяти, умножь ее на пять, будет пять вещей, раздели это на остаток от десяти, т. е. на десять без вещи, раздвой это; известно, что если ты разделишь пять вещей на десять без вещи и раздвоишь частное, получится то же, как если ты разделишь половину пяти вещей на десять без вещей, а если ты раздвоишь пять вещей, получится две с половиной вещи, которые и следует разделить на десять без вещей. [Частное] равно пятидесяти без пяти вещей, так как в задаче сказано: прибавь это к одной из частей, умноженной на пять, и это будет пятьдесят. Ты знаешь, что если умножить частное от деления на делитель, имущество восстановится. Твое имущество — две с половиной вещи. Поэтому умножь десять без вещи на пятьдесят без пяти вещей, получится пятьсот дирхемов и пять квадратов без ста вещей, что равно двум с половиной вещам. Приведи это к одному квадрату, получится: сто дирхемов и квадрат без двадцати вещей равны половине вещи. Восполни сто и прибавь двадцать вещей к половине вещи, у тебя получится: сто дирхемов и квадрат равны двадцати с половиной вещам[83]. Умножь половину [числа] вещей на себя, вычти из этого сто и извлеки корень, а то, что останется, вычти из половины [числа] корней, т. е. десяти с четвертью. Останется восемь, это и есть одна из частей.

Если скажут: ты разделил десять на две части и умножил одну из частей на себя, это оказалось равно другой, взятой восемьдесят один раз, *то правило таково:* десять без вещи на равное этому — это сто и квадрат без двадцати вещей, что равно восьмидесяти одной вещи. Восполни сто и квадрат двадцатью вещами и прибавь их к восьмидесяти одной [вещи], получится: сто и квадрат равны ста одному корню[84]. Половина [числа] корней — пятьдесят с половиной. Умножь это на себя, получится две тысячи пятьсот пятьдесят с четвертью. Вычти из этого сто, останется две тысячи четыреста пятьдесят с четвертью. Извлеки корень из этого, получится сорок девять с половиной. Вычти это из половины [числа] корней, т. е. пятидесяти с половиной, останется единица. Это и есть одна из частей.

11 *Если скажут:* ты купил десять мер пшеницы || или ячменя, каждую из них по [своей] цене, затем сложил стоимости и все это оказалось равным разности между их ценами и [разности] между их количествами[85], *то возьми,* что ты хочешь, пусть ты взял четыре и шесть [мер], это безразлично. Ты скажешь, что купил каждую из четырех [мер] за вещь, и умножишь четыре на вещь, получится четыре вещи, ты [также] купил шесть [мер], каждую за половину вещи, за которые ты купил четыре [меры], или, если хочешь, за треть, или, если хочешь, за четверть, это безразлично. Пусть ты купил другие за половину вещи. Умножь половину вещи на шесть, получится три вещи, которые вместе с четырьмя вещами составляют семь вещей, равные [разности] между количествами, т. е. двум мерам, и разности между ценами, т. е. половине вещи. Получится: семь вещей равны двум и половине вещи. Вычти половину вещи из семи вещей, останется шесть с половиной вещей, равных двум дирхемам. Поэтому одна вещь — четыре тринадцатых дирхема. Были куплены шесть [мер], каждая по две тринадцатых дирхема, поэтому всего это двадцать восемь тринадцатых дирхема, это равно разности между двумя количествами, т. е. двум мерам, что равносильно двадцати шести тринадцатым и разности между двумя ценами, т. е. двум тринадцатым, а это и есть двадцать восемь тринадцатых[86].

Если скажут: ты разделил меньшее на большее из двух имуществ, отличающихся на два дирхема, а частное от деления оказалось половиной дирхема, *то* прими одно из имуществ за вещь, а другое — за вещь с двумя дирхемами. Поэтому ты разделишь вещь на вещь с двумя дирхемами и частное от деления — половина дирхема. *Ты* знаешь, что если ты умножишь твое частное на делитель, восстановится твое имущество, которое делилось, т. е. вещь. Поэтому умножь вещь и два дирхема на половину, т. е. частное, получится половина вещи и дирхем, равные вещи. Вычти половину вещи из половины вещи, останется: дирхем равен половине вещи. Удвой это, будет вещь равна двум дирхемам, а другая — четырем[87].

Если скажут: ты разделил десять на две части, затем умножил одну из них на десять, а другую часть умножил на себя, и они оказались равными, *то правило этого:* умножь вещь на десять, получится десять вещей, затем умножь десять без вещи на равное этому, получится сто и квадрат без двадцати вещей, равные десяти корням. Сопоставь это с тем, что я описал тебе[88].

Точно так же, если скажут: ты разделил десять на две части, затем умножил одну из них на другую, затем разделил произведение || на разность между частями перед умножением одной из **11**
них на другую, и частное оказалось равным пяти с четвертью, **об.**
то правило этого: прими за вещь [одну] из [частей] десяти, останется десять без вещи, умножь одну из них на другую, будет десять вещей без квадрата, это произведение одной из частей на другую, затем раздели это на разность между двумя частями, т. е. десять без двух вещей. Частное от этого деления есть пять с четвертью. Если ты умножишь пять с четвертью на десять без двух вещей, у тебя получится произведение [двух частей] имущества, т. е. десять вещей без квадрата. Умножь пять с четвертью на десять без двух вещей, получится, [что] пятьдесят два с половиной дирхема без десяти с половиной корней равны десяти корням без квадрата. Восполни пятьдесят два с половиной десятью с половиной корнями, прибавь их к десяти корням без квадрата, далее восполни это квадратом. Получится: квадрат и пятьдесят два с половиной дирхема. У тебя будет: двадцать с половиной корней равны пятидесяти двум с половиной дирхемам и квадрату. Сопоставь это с тем, что мы объяснили в начале этой книги[89].

Если скажут: квадрат, две трети одной пятой которого равны одной седьмой корня, *то* весь квадрат равен одному и половине одной седьмой корня. Поэтому корень есть четырнадцать пятнадцатых квадрата. Правило этого таково: умножь две трети одной пятой квадрата на семь с половиной, чтобы сделать квадрат полным. Умножь то, что имеется у тебя, т. е. одну седьмую корня, на равное этому, получится: квадрат равен одному и половине одной седьмой корня, поэтому его корень есть один с половиной одной седьмой, а квадрат есть один и двадцать девять сто девяносто шестых дирхема. Две трети одной пятой этого квадрата равны тридцати ста девяносто шестым, а одна седьмая его корня также равна тридцати ста девяносто шестым[90].

Если скажут: квадрат, три четверти одной пятой которого равны четырем пятым его корня, *то правило этого:* прибавь к трем четвертям одной пятой равное четверти этого, чтобы сделать корень целым, получится три и три четверти двадцатых: раздели каждую из этих двадцатых на четыре, тогда получится пятнадцать восьмидесятых. Раздели восемьдесят на пятнадцать, будет пять с третью; это и есть корень квадрата, а квадрат есть двадцать восемь и четыре девятых[91].

Если скажут: ты умножил имущество на четыре равных ему, получилось двадцать, *то правило этого:* если бы ты умножил его на себя, получилось бы пять, [имущество] есть корень из пяти[92].

Если скажут: ты умножил имущество на треть равного ему, получилось десять, *то правило этого:* если бы ты умножил его на себя, получилось бы тридцать, поэтому скажи: имущество есть корень из тридцати[93].

Если скажут: ты умножил имущество на четыре равных ему, получилась треть первого имущества, *то правило этого:* если бы
12 ты || умножил на двенадцать равных ему, имущество восстановилось бы. Поэтому это — половина одной шестой [или четверть] трети[94].

Если скажут: ты умножил имущество на его корень, получилось три первых имущества, *то правило этого:* если бы ты умножил корень на треть имущества, имущество восстановилось бы. Потому скажи: имущество равно трем своим корням, т. е. девяти[95].

Если скажут: ты умножил четыре корня квадрата на три его корня и квадрат восстановился с избытком в сорок четыре дирхема, то правило этого: умножь четыре корня на три корня, получится двенадцать квадратов, равные квадрату и сорока четырем дирхемам. Раздели их на одиннадцать, получится четыре, это и есть квадрат[96].

Если скажут: ты умножил четыре корня квадрата на пять корней и восстановились два квадрата с избытком в тридцать шесть дирхемов, *то правило этого:* умножь четыре корня на пять корней, получится двадцать квадратов, равные двум квадратам и тридцати шести дирхемам. Вычти из двадцати квадратов два квадрата за счет двух квадратов, останется восемнадцать квадратов, равные тридцати шести дирхемам. Раздели тридцать шесть дирхемов на восемнадцать, частное есть два, это и есть квадрат[97].

Точно так же, если скажут: ты умножил корень квадрата на четыре его корня и восстановились три квадрата с избытком в пятьдесят дирхемов, *то правило этого:* умножь корень на четыре корня, получится четыре квадрата, равные трем квадратам и пятидесяти дирхемам. Вычти три квадрата из четырех квадратов, останется один квадрат, равный пятидесяти дирхемам. Это корень из пятидесяти, умноженный на четыре корня из пятидесяти же, т. е. двести, есть три квадрата с избытком в пятьдесят дирхемов[98].

Если скажут: квадрат с избытком в двадцать дирхемов равен двенадцати корням, *то правило этого:* скажи, что квадрат и двадцать дирхемов равны двенадцати корням, раздели [число] корней пополам, умножь это на себя, получится тридцать шесть, вычти из этого двадцать дирхемов, извлеки корень из остатка и вычти из половины корней, т. е. шести; то, что останется, есть корень квадрата, это два дирхема, а квадрат — четыре[99].

Если скажут: ты умножил остаток имущества от вычитания его трети и трех дирхемов на себя и имущество восстановилось, *то правило этого:* если вычесть треть его и три дирхема, останется две трети его без трех дирхемов, это корень. Умножь две трети вещи без трех дирхемов на равное этому и скажи: две трети [вещи] на две трети [вещи] — это четыре девятых квадрата. Вычитаемые три дирхема на две трети вещи есть [вычитаемые] два корня, [снова] вычитаемые три дирхема на две трети вещи — это [вычитаемые] два корня, вычитаемые три дирхема на вычитаемые три дирхема есть девять дирхемов. У тебя ‖ получится: четыре девятых квадрата и девять дирхемов без четырех корней равны корню. Прибавим четыре корня к корню, получится пять корней, равных четырем девятым квадрата и девяти дирхемам. Сделай твой квадрат полным, т. е. умножь четыре девятых на два с четвертью, получится квадрат и произведение девяти дирхемов на два с четвертью, т. е. двадцать с четвертью, затем умножь пять корней на два с четвертью, получится одиннадцать с четвертью вещи. У тебя получится: квадрат и двадцать с четвертью дирхема равны одиннадцати с четвертью корня[100]. Сопоставь это с тем, что я описал тебе о делении [числа] корней пополам, да будет на то воля Аллаха. 12 об.

Если скажут: ты умножил треть имущества на его четверть и имущество восстановилось, *то правило этого:* умножь треть вещи на четверть вещи, получится половина одной шестой квадрата, равная вещи. Поэтому квадрат равен двенадцати вещам. Это — корень из ста сорока четырех[101].

Если скажут: ты умножил треть имущества и дирхем на четверть имущества и два дирхема, и восстановилось имущество с избытком в тринадцать дирхемов, *то правило этого:* умножь треть вещи на четверть вещи, получится половина одной шестой квадрата, умножь два дирхема на треть вещи, получится две трети вещи, умножь дирхем на четверть вещи, получится четверть корня, умножь два дирхема на дирхем, получится два дирхема. Поэтому половина одной шестой квадрата и одиннадцать двенадцатых корня равны корню и тринадцати дирхемам. Вычти два дирхема из тринадцати за счет двух дирхемов, останется одиннадцать дирхемов, вычти одиннадцать двенадцатых корня, останется: половина одной шестой корня и одиннадцать дирхемов равны половине одной шестой квадрата. Сделай его полным, умножив его на двенадцать и умножив все, что имеется у тебя, на двенадцать, получится: квадрат равен ста тридцати двум дирхемам и корню[102]. Сопоставь это, если захочет всевышний Аллах, с тем, что я описал тебе.

Если скажут: полтора дирхема разделены между человеком и несколькими людьми, так что человеку достается равное тому, что достается двум из нескольких, *то правило этого:* скажи, что человек и несколько [человек] — это единица и вещь. Поэтому сказано, что полтора дирхема [разделены] между единицей и вещью и доля единицы — две вещи. Поэтому умножь две вещи на единицу и вещь, получится: два квадрата и две вещи равны полутора. Приведи это к одному квадрату, т. е. возьми половину от всего, что имеется у тебя. Скажи: квадрат и вещь равны трем четвертым дирхема и сопоставь это с тем, что мы сообщили тебе в начале этой книги[103].

Если скажут: ты умножил остаток имущества от вычитания трети его, четверти его и четырех дирхемов, на равное этому, и имущество восстановилось с избытком в двенадцать дирхемов, *то правило его:* возьми вещь и вычти треть ее и четверть ее, останется пять двенадцатых вещи. Вычти из этого четыре дирхема, **13** останется пять || двенадцатых вещи без четырех дирхемов. Умножь это на равное ему, тогда пять частей дадут двадцать пять частей, произведение двенадцати на равное им есть сто сорок четыре, поэтому получится двадцать пять сто сорок четвертых квадрата. Затем умножь два раза четыре дирхема на пять двенадцатых вещи, получится сорок двенадцатых вещи, четыре дирхема на четыре дирхема есть прибавляемые шестнадцать дирхемов. Сорок двенадцатых корня — это отнимаемые три и одна треть корня. Поэтому у тебя получится: двадцать пять сто сорок четвертых квадрата и шестнадцать дирхемов без трех и одной трети корня равны первому имуществу, т. е. вещи и двенадцати дирхемам. Восполни вещь и двенадцать дирхемов тремя и одной третью корня и прибавь их, получится четыре и одна треть корня и двенадцать дирхемов, противопоставь этому двенадцать дирхемов, отнимаемых из шестнадцати, останется: четыре дирхема и двадцать пять сто сорок четвертых квадрата равны четырем и одной трети корня. Сделай твой квадрат полным, для чего умножь все, что имеется у тебя, на пять и девятнадцать двадцать пятых. Умножь двадцать пять [сто сорок четвертых квадрата] на пять и девятнадцать двадцать пятых, получится квадрат. Умножь четыре дирхема на пять и девятнадцать двадцать пятых, получится двадцать три и одна двадцать пятая. Умножь четыре и одну треть корня на пять и девятнадцать двадцать пятых, получится двадцать четыре и двадцать четыре двадцать пятых корня. Половина [числа] корней есть двенадцать и двенадцать двадцать пятых. Произведение ее на себя — это сто пятьдесят пять и четыреста шестьдесят девять шестьсот двадцать пятых. Вычти из этого двадцать три и одну двадцать пятую дирхема, находящиеся с квадратом, останется сто тридцать два и четыреста сорок [четыре] шестьсот двадцать пятых. Извлеки корень, получится одиннадцать и тринадцать двадцать пятых дирхема. Прибавь это к половине [числа] корней, т. е. двенадцати и двенадцати двадцать пятым дирхема, получится двадцать четыре. Это и есть то имущество, что если вычесть из него его треть, его четверть и четыре ‖ дирхема, а затем умножить остаток на себя, имущество восстановится с избытком в двенадцать дирхемов[104]. 13 об.

Если скажут: произведение имущества на две трети его — пять, *то правило этого:* умножь вещь на две трети вещи, получится две трети квадрата, равные пяти. Сделаем квадрат полным, прибавив равное половине этого, т. е. прибавив к пяти равное их половине. У тебя получится: квадрат равен семи с половиной. Извлеки корень, это и есть та вещь, что если умножить ее на ее две трети, получится пять[105].

Если скажут: ты разделил меньшее из двух имуществ, отличающихся на два дирхема, на большее и частное от деления — половина дирхема, *то правило этого:* умножь вещь с двумя дирхемами на частное, т. е. на половину, получится половина вещи и дирхем, равные вещи. Вычти [из вещи] половину вещи за счет половины вещи, [находящейся с дирхемом], останется: дирхем равен половине вещи. Удвой это, у тебя получится: вещь равна двум дирхемам. Это и есть одно из имуществ, другое имущество — четыре[106].

Если скажут: ты разделил дирхем между людьми, каждому из которых достается вещь, затем к ним присоединился человек и ты разделил дирхем между всеми ними, и каждому из них достается меньше, чем при первом разделе, на одну шестую дирхема, *то правило этого:* умножь число первых людей, т. е. вещь, на то, что им недоставало, затем умножь это на число первых и вторых людей и раздели это произведение на разность между первыми и вторыми людьми. Частное и есть твое имущество, которое делилось. Умножь число первых людей, т. е. вещь, на одну шестую, т. е. на разность, получится одна шестая корня, затем умножь это на число первых и вторых людей, т. е. вещь и единицу, получится: одна шестая квадрата и одна шестая корня, деленные на дирхем, равны дирхему. Сделаем имеющийся у тебя квадрат полным, умножив [все] на шесть. У тебя получится квадрат и корень. Умножь дирхем на шесть, получится шесть дирхемов. Поэтому получится: квадрат и корень равны шести дирхемам. Раздвой [число] корней и умножь на равное ему, будет четверть. Прибавь это к шести и извлеки корень из суммы. Вычти из этого половину [числа] корней, которая была умножена на равное ей, т. е. половину. То, что останется, и есть число первых людей, т. е. в этой задаче — два человека[107].

Если скажут: имущество умножено на две трети его и получилось пять, *то правило этого:* если бы оно было умножено на равное ему, получилось бы семь с половиной. Поэтому скажи: это корень из семи с половиной, [умноженный] на две трети корня из семи с половиной. Умножь две трети на две трети, полу-

чится четыре девятых; [умножь] четыре девятых на семь с половиной, получится три и одна треть. Поэтому корень из трех и од-
14 ной трети — две трети корня из семи || с половиной. Умножь три
и одну треть на семь с половиной, получится двадцать пять, а корень из этого есть пять[108].

Если скажут: ты умножил квадрат на три его корня, получилось равное пяти первым квадратам, *то это то же, что сказать:* квадрат, умноженный на корень, был бы равен первому квадрату и двум третям его. Поэтому корень квадрата — один и две трети дирхема, а квадрат — два и семь девятых дирхема[109].

Если скажут: возьми из квадрата треть его, умножь остаток на три корня первого квадрата и восстановится первый квадрат, *то правило этого:* если ты умножишь первый квадрат, до вычитания двух третей его, на три его корня, получится полтора квадрата, так как две трети его, [умноженные] на три корня квадрата, есть квадрат и весь он, [умноженный] на три корня, есть полтора квадрата. Поэтому весь он, [умноженный] на один корень, есть половина квадрата. Поэтому корень квадрата — половина, сам квадрат — четверть, две трети квадрата — одна шестая, три корня квадрата — полтора дирхема, и если ты умножишь одну шестую на полтора дирхема, произведение есть четверть, т. е. квадрат[110].

Если скажут: ты вычитаешь из квадрата четыре его корня, затем берешь треть остатка, получается равное четырем корням, то квадрат есть двести пятьдесят шесть, и *правило этого* состоит в том, что ты знаешь, что треть остатка равна четырем корням, поэтому остаток равен двенадцати корням; прибавь к нему четыре корня, будет шестнадцать корней, и это есть [число] корней квадрата[111].

Если скажут: ты вычел из квадрата его корень и прибавил к его корню корень из остатка, получилось два дирхема, то *это* то же, что: корень квадрата и корень квадрата без корня равны двум дирхемам. Вычти из этого корень квадрата и вычти из двух дирхемов корень квадрата, получится два дирхема без корня, [умноженные] на равные этому, т. е. четыре дирхема и квадрат без четырех корней равны квадрату без корня. Противопоставь это и получится: квадрат и четыре дирхема равны квадрату и трем корням. Вычти квадрат за счет квадрата, останется: три корня равны четырем дирхемам и корень равен одному и одной трети дирхема. Это и есть корень квадрата, а сам квадрат есть один и семь девятых дирхема[112].

Если скажут: ты вычтешь из квадрата три его корня, а затем умножишь остаток на равное ему, и восстановится квадрат, *то ты знаешь,* что остаток есть снова корень и квадрат есть четыре корня, т. е. шестнадцать[113].

ГЛАВА О СДЕЛКАХ

Знай, что сделки людей, как покупка и продажа, обмен и на-
ем, а также другие, имеют дело с четырьмя числами, устанавли-
ваемыми спрашивающим,— мерой, ценой, количеством и стои-
мостью. Число, равное мере, стоит против || числа, равного стои- 14
мости, а число, равное цене, стоит против числа, равного коли- об.
честву[114]. Из этих четырех чисел три всегда известны, а одно не-
известно, и о нем-то говорящий говорит «сколько» и спрашивает
спрашивающий. *Правило этого таково:* ты рассматриваешь три
известных числа, среди них обязательно имеются два, каждое из
которых стоит против другого. Умножь каждое из двух стоящих
друг против друга известных чисел на другое, а произведение
раздели на другое известное число, стоящее против неизвестного.
Если у тебя есть это частное, оно есть неизвестное число, о ко-
тором спрашивает спрашивающий, оно стоит против числа, на
которое ты делил[115].

Пример этого в [одном] случае. Если тебе сказано: десять относится к шести, сколько у тебя так же относится к четырем, то тем самым говорят, что десять — это число меры, шесть — это цена, сколько у тебя, т. е. неизвестное число — это число, равное количеству, четыре — число, равное стоимости. Число меры, т. е. десять, стоит против равного стоимости, т. е. четырех, поэтому умножь десять на четыре, эти два данные [числа] стоят друг против друга, получится сорок. Раздели на другое данное число, равное цене, т. е. на шесть, получится шесть и две трети. Это и есть неизвестное число, о котором говорящий говорит: сколько; это количество, оно стоит против шести, равных цене[116].

Второй случай. Говорящий говорит: десять относится к восьми, какая стоимость относится так же к четырем? Часто говорят: какова стоимость четырех от этого? Десять — это число меры, оно стоит против числа, равного неизвестной стоимости, о которой сказано «сколько», восемь это число, равное цене, оно стоит против данного числа, равного количеству, т. е. четырем. Умножь одно на другое два данные числа, которые стоят друг против друга, т. е. четыре и восемь, получится тридцать два, и раздели это на другое известное число — стоящее, т. е. десять, получится три и одна пятая. Это и есть число, равное стоимости, оно стоит против десяти, на которые ты делил[117]. Таковы же все сделки людей и таково их правило, да будет на то воля всевышнего Аллаха.

Если спрашивающий говорит: работник, месячный заработок
которого десять дирхемов, работал шесть дней, какова его доля,
то ты знаешь, что шесть дней есть одна пятая месяца и что его
доля дирхемов || такова же, как доля проработанного им [време- 15
ни] от месяца. *Правило таково:* если, как сказано, месяц есть
тридцать дней — это мера, десять дирхемов есть цена, шесть дней
есть количество и [спрашивается], какова доля, т. е. стоимость,
умножь цену, т. е. десять, на количество, которое стоит против

этого, т. е. шесть, получится шестьдесят и раздели на тридцать, т. е. на известное число — меру, получится два дирхема, это и есть стоимость[118].

Таковы же сделки людей в вопросах обмена, объема или веса.

ГЛАВА ОБ ИЗМЕРЕНИИ

Знай, что [выражение] единица на единицу означает измерение, оно означает локоть на локоть[119]. Каждая плоская фигура с равными сторонами и углами, каждая сторона которой есть единица, является фигурой, которая вся есть единица. Фигура с равными сторонами и углами, каждая сторона которой — два, равна четырем фигурам [размерами] локоть на локоть. Точно так же три на три и так далее, увеличивая, а также уменьшая, [например] половину на половину, т. е. четверть, и для [других] дробей. Каждая квадратная фигура, каждая сторона которой — половина локтя, равна четверти фигуры, каждая сторона которой — локоть, и точно так же треть на треть, четверть на четверть, одна пятая на одну пятую, две трети на половину или меньше этого или больше согласно этому исчислению.

Каждая квадратная фигура с равными сторонами [и углами] такова, что ее сторона — это ее корень, [если сторона умножена] на два,— это два ее корня, будет ли эта фигура мала или велика.

Каждый треугольник с равными сторонами таков, что если перемножить высоту и половину основания, на которое падает высота, получится площадь этого треугольника[120].

Каждый ромб с равными сторонами таков, что если ты умножишь одну из диагоналей на половину другой, получится его площадь.

Каждый круг таков, что если ты умножишь диаметр на три и одну седьмую, получится окружность, ограничивающая его. Это выражение не необходимо. У геометров по этому вопросу имеются два другие выражения. Одно из них: ты умножишь диаметр на равное ему и на десять и извлечешь корень из того, что получилось, получится окружность. Второе выражение — астрономов: ты умножаешь диаметр на шестьдесят две тысячи восемьсот тридцать два, а затем делишь это на двадцать тысяч, тогда частное — это окружность. Все это близко друг к другу[121]. Если разделить окружность на три и одну седьмую, получится диаметр.

Каждый круг таков, что половина диаметра, [умноженная] на 15 об. || половину окружности,— [его] площадь, так как всякий многоугольник с равными углами и сторонами, как треугольник, квадрат, пятиугольник и т. д., таков, что если ты умножишь половину его обвода на половину диаметра наибольшего круга, вписанного в него, то получится его площадь. Каждый круг таков, что если ты умножишь его диаметр на себя и вычтешь из этого одну седьмую и половину одной седьмой, получится его площадь, соответствующая первому правилу[122].

Каждый сектор круга измеряется дугой, которая равна половине окружности или меньше половины окружности или больше половины окружности, что определяется с помощью стрелы дуги[123], если она равна половине хорды, дуга равна половине окружности, если она меньше половины хорды, дуга меньше половины окружности, если стрела больше половины хорды, дуга больше половины окружности. Если ты хочешь узнать, каков ее круг, умножь половину хорды на себя, раздели это на стрелу и прибавь частное к стреле, сумма — это диаметр круга этой дуги[124]. Если ты хочешь узнать площадь дуги, умножь половину диаметра круга на половину дуги и запомни произведение, затем вычти стрелу дуги из половины диаметра круга, если дуга меньше половины окружности, а если она больше половины окружности, вычти половину диаметра круга из стрелы дуги. Далее умножь остаток на половину хорды дуги и вычти это из запомненного, если дуга меньше половины окружности, и прибавь к этому, если дуга больше половины окружности. То, что получится после сложения или вычитания, и есть площадь дуги[125].

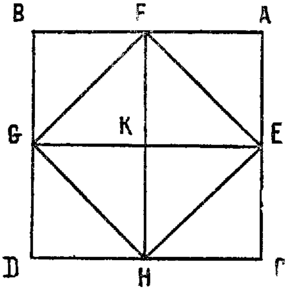
Каждое четырехугольное тело[126] таково, что если умножить длину на ширину, а затем на высоту, получится объем. Если же [тело] не четырехугольное, а круглое, треугольное или иное, но его грани параллельны высоте, его мера такова: измерь его плоскую фигуру, т. е. узнай ее площадь, умножь это на глубину и получится объем[127].

Что касается конусов треугольного, квадратного и круглого, то они таковы, что произведение трети площади их основания на высоту есть их объем[128].

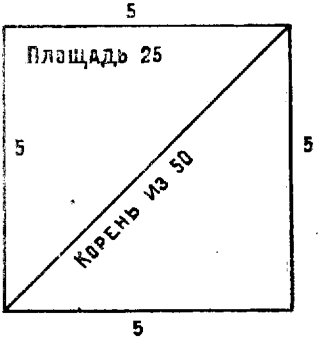
Знай, что каждый прямоугольный треугольник таков, что если умножить каждую из его коротких сторон на себя, то сумма произведений равна произведению длинной стороны на себя. *Доказательство таково:* построим квадратную фигуру || с равными 16
сторонами и углами *ABCD,* затем рассечем сторону *AC* пополам в точке *E* и восставим [перпендикуляр] до *G,* затем рассечем сторону *AB* пополам в точке *F* и восставим [перпендикуляр] до *H*. Фигура *ABCD* будет [состоять] из четырех фигур с равными сторонами и углами, это будут фигуры *AK, CK, BK* и *DK*. Далее проведем из точки *E* к точке *F* линию, рассекающую фигуру *AK* пополам, так что образуются две треугольные фигуры, а именно, *AFE* и *EKF*. Очевидно, что *AF* есть половина *AB,* а *AE* равна ей и является половиной *AC,* а линия *FE* стягивает их под прямым углом. Точно так же проведем линии от *F* к *G*, от *G* к *H* и от *H* к *E*. Из всех квадратов образуется восемь равных треугольников. Очевидно, что четыре из них составляют половину большой фигуры *AD*. Очевидно [также], что линия *AF,* [умноженная] на себя,— это площадь двух треугольников и *AE,* [умноженная на себя],— площадь равных им треугольников. Поэтому сумма этих

площадей — это четыре треугольника, а сторона *EF*, [умноженная] на себя,— также площадь четырех других треугольников. Поэтому очевидно, что произведение *AF* на себя и произведение *AE* на себя вместе равны произведению *FE* на себя. Это и есть то, что мы хотели доказать[129]. Вот чертеж этого [рис. 7].

Знай, что четырехугольников пять видов, *среди них:* [первый] с равными сторонами и прямыми углами, *второй:* с прямыми углами и разными сторонами, его длина больше его ширины, *третий,* называемый ромбом, у которого равные стороны и разные углы, *четвертый:* ромбоид, у которого длина и ширина разные и углы разные, но две длины равны и две ширины также равны[130], и *пятый:* с разными сторонами и углами.



[Рис. 7].

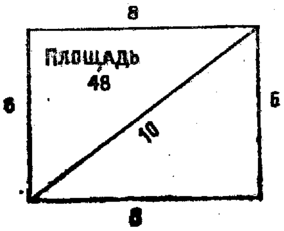


[Рис. 8].

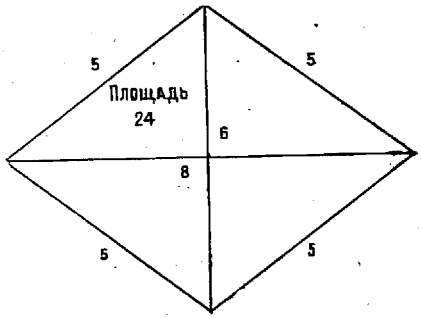
Что касается четырехугольников с равными сторонами и прямыми углами или с разными сторонами и прямыми углами, то [чтобы получить] их площадь, умножь длину на ширину, то, что получится, и есть площадь. Например, каждая сторона четырехугольного [участка] земли есть пять локтей, тогда его площадь — двадцать пять локтей. Вот чертеж этого [рис. 8].

16 об. *Второй:* длина четырехугольного [участка] земли — восемь локтей и восемь локтей, а ширина — шесть и шесть. Тогда, чтобы получить его площадь, умножь шесть на восемь, получится сорок восемь локтей. Это и есть его площадь. Вот чертеж этого [рис. 9].

Что касается ромба, все равные стороны которого по пять локтей, одна из диагоналей — восемь, а другая — шесть локтей, то знай, что его площадь определяется по его двум диагоналям или по одной из них. Если известны обе диагонали, то произведение одной из них на половину другой есть площадь, т. е. умножь восемь на три или четыре на шесть, получится двадцать четыре локтя, это и есть площадь. Если же известна одна диагональ, то тебе известны два треугольника, у каждого из которых две стороны по пяти локтей, а третья сторона — диагональ, их [площадь] вычисляется согласно [правилам] вычисления [площадей] треугольников. Вот чертеж этого [рис. 10].



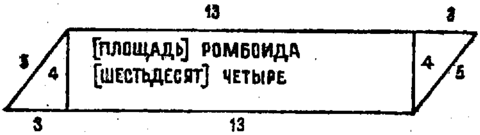
[Рис. 9].



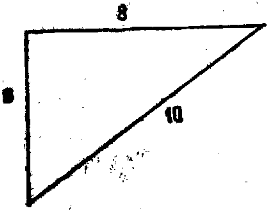
[Рис. 10].

Что касается ромбоидов, то они подобны ромбам.

Что касается других четырехугольников, то определение их площади сводится к правилам вычисления площадей треугольников при помощи диагоналей. Знай это. Вот чертеж ромбоида [рис. 11].



[Рис. 11].



[Рис. 12].

Что касается треугольников, то их три вида: прямоугольные, остроугольные и тупоугольные. Что касается прямоугольных треугольников, то если ты умножишь каждую из их коротких сторон на себя, то сумма [равна произведению длинной стороны на себя. Что касается остроугольных треугольников, то если ты умножишь каждую из их коротких сторон на себя, то сумма будет] больше произведения длинной стороны на себя. Что касается тупоугольных треугольников, то если ты умножишь каждую из их коротких сторон на себя, то сумма будет меньше длинной стороны, умноженной на себя.

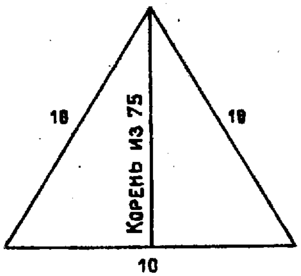
Что касается прямоугольного [треугольника], то в нем имеются || два катета и гипотенуза[131], он является половиной [прямо- 17
угольного] четырехугольника. Для определения его площади ум-

ножь одну из сторон, содержащих прямой угол, на половину другой и из них произведение и есть его площадь. Пример этого: сторона прямого угла — шесть локтей, [другая] его сторона — восемь локтей, а гипотенуза — десять, вычисление таково: умножь шесть на четыре, получится двадцать четыре локтя, это и есть его площадь. Если хочешь, можешь вычислить это с помощью высоты, опущенной на длинную сторону, так как короткие стороны — сами высоты; если хочешь, умножь высоту на половину основания, это и есть его площадь. Вот чертеж этого [рис. 12].

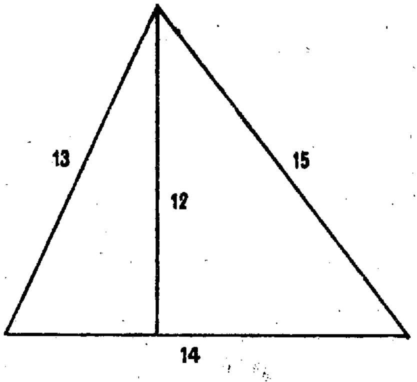
Что касается второго рода, то если у треугольника равные стороны и острые углы, а каждая сторона его по десять локтей, то его площадь определится при помощи его высоты и места падения камня[132]. Знай, что в каждом треугольнике с двумя равными сторонами высота, проведенная от них к основанию, падает под прямым углом и попадает в точности в середину основания; если же стороны разные, то место падения камня не совпадает с серединой основания. Мы знаем, что у треугольника, все стороны которого одинаковы, место падения камня попадает в середину основания, это пять локтей. Потому для определения высоты умножь пять на себя, умножь одну из сторон на себя, т. е. десять, получится сто и вычти из этого произведение пяти на себя, т. е. двадцать пять, получится семьдесят пять. Извлеки корень, это и будет высота. Она является стороной двух прямоугольных треугольников. Если ты хочешь [узнать] площадь, то умножь корень из семидесяти пяти на половину основания, т. е. пять, или, умножив пять на равное им, [умножь] корень из семидесяти пяти на корень из двадцати пяти. Умножь семьдесят пять на двадцать пять, получится тысяча восемьсот семьдесят пять. Извлеки корень, получится его площадь. Это сорок три с небольшим[133]. Вот чертеж этого [рис. 13].

Если у треугольника острые углы и разные стороны, то знай, что его площадь определится при помощи места падения камня и высоты. Пусть у треугольника одна сторона — пятнадцать локтей, другая сторона — четырнадцать локтей, [третья] — тринадцать || локтей. Если ты хочешь узнать место падения камня, 17 об.
прими какую-нибудь сторону за основание, если хочешь, примем за него [сторону в] четырнадцать [локтей] и место падения камня будет на ней. Место падения камня попадет на [расстоянии, равном] вещи от одной из двух сторон, какой ты хочешь, пусть эта вещь примыкает к [стороне в] тринадцать [локтей], умножим ее на равное ей, получится квадрат, отнимем это от тринадцати, [умноженных] на равное этому, т. е. ста шестидесяти девяти, получится сто шестьдесят девять без квадрата. Мы знаем, что корень из этого — это высота. То, что осталось у нас от основания, т. е. четырнадцать без вещи, умножь на равное этому, получится сто девяносто шесть и квадрат без двадцати восьми вещей. Вычтем это из пятнадцати, [умноженных] на себя, останется двадцать девять дирхемов и двадцать восемь вещей без квадрата.

Корень из этого — высота. Так как корень из этого — высота, а корень из ста шестидесяти девяти без квадрата — также высота, мы знаем, что они равны. Противопоставь их друг другу, тогда квадрат встретится с квадратом и оба квадрата уничтожатся, останется: двадцать девять и двадцать восемь вещей равны ста шестидесяти девяти. Вычти двадцать девять из ста шестидесяти девяти, останется: сто сорок равно двадцати восьми вещам и одна вещь — это пять, это и есть место падения камня, примыкающее к [стороне в] тринадцать [локтей]. Дополнение основания, примыкающее к другой стороне, есть девять[134]. Если ты хочешь узнать высоту, умножь эти пять на равное им и вычти из примыкающей стороны, умноженной на равное ей. Это — тринадцать, останется сто сорок четыре, корень из этого — высота, это — двенадцать. Высота всегда падает под двумя прямыми углами и называется поэтому перпендикуляром[135]. Умножь высоту на половину основания, т. е. семь, будет восемьдесят четыре. Это и есть площадь треугольника. Вот чертеж этого [рис. 14].



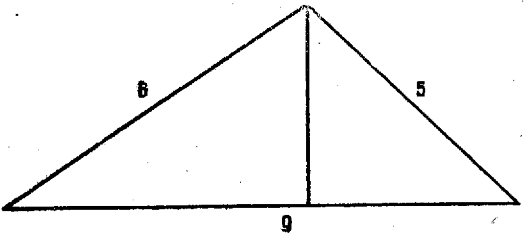
[Рис. 13].



[Рис. 14].

Третий вид — тупоугольные [треугольники], т. е. у них один угол тупой. Это треугольник, у которого все стороны различны, а именно, стороны в шесть, пять и девять [локтей]. Определение его площади [производится] с помощью высоты и места падения камня. Место падения камня в этом треугольнике попадает внутрь его только на длинной стороне. Примем ее за основание. Если бы приняли за основание одну из коротких сторон, место падения камня оказалось бы вне его. Определение места падения камня и высоты в этом примере [производится] по такому же правилу, как когда ты определял их в остроугольном [треугольнике]. || Вот чертеж этого [рис. 15]. 18

Что касается кругов, то мы освободились уже от описания их длины и площади в начале книги. Если диаметр круга есть семь локтей, то его окружность есть двадцать два локтя. Для определения площади умножь половину диаметра, т. е. три с половиной, на половину ограничивающей его окружности, т. е. на одиннадцать, получится тридцать восемь с половиной, это и есть его площадь. Если хочешь, можешь умножить диаметр, т. е. семь, на равное ему, получится сорок девять, и вычти из этого одну седьмую и половину этой одной седьмой, т. е. десять с половиной: останется тридцать восемь с половиной, это и есть площадь. Вот чертеж этого [рис. 16].



[Рис. 15].

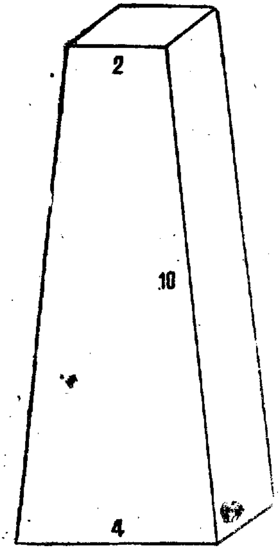
[Рис. 16].

Если говорят, что нижнее основание пирамиды — четыре локтя на четыре локтя, а высота — десять локтей, а ее верхнее основание — два локтя на два локтя[136], то нам известно, что каждая пирамида с острой вершиной такова, что треть площади ее основания, умноженная на ее высоту, есть ее объем. Поэтому, так как эта пирамида не имеет вершины, мы хотим узнать, насколько нужно сделать ее выше, чтобы восстановить ее вершину. У нее нет вершины, но мы знаем, что эти десять [локтей] относятся ко всей ее длине, как два к четырем[137]. Но два есть половина четырех, поэтому если отношение то же, десять — это половина длины и вся длина — двадцать локтей. Таким образом, мы знаем длину. Возьмем треть основания, т. е. пять с третью, умножим это на длину, т. е. двадцать локтей, произведение этого — сто шесть с двумя третями локтей. Мы хотим вычесть из этого то, что мы добавили к нему до [полной] пирамиды, т. е. треть площади [размером] два на два, на десять или тринадцать с третью, это есть тот объем, который добавили, чтобы получить [полную] пирамиду. Если мы вычтем это из ста шести с двумя третями локтей, останется девяносто три с третью. Это и есть объем пирамиды[138]. Вот чертеж этого [рис. 17].

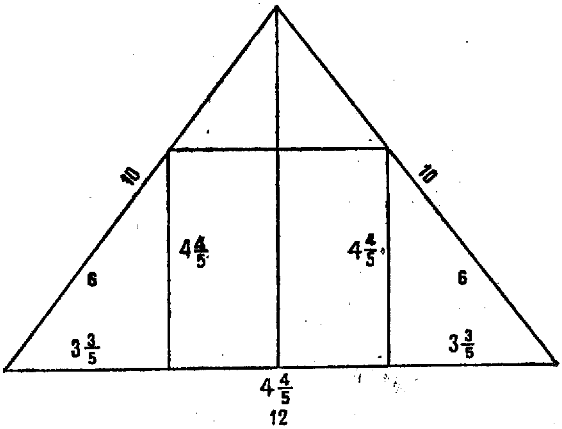
В случае круглого конуса вычти из произведения его диаметра на себя одну седьмую его и половину этой одной седьмой; то, что останется, есть площадь [основания].

Если скажут: у треугольного [участка] земли две стороны десять и десять локтей, а основание — двенадцать локтей; внутри

него квадратный [участок] земли. Какова каждая сторона квадрата? *Правило этого таково:* || узнай высоту треугольника, т. е. 18
умножь ее на половину его основания, т. е. шесть, на равное этому, получится тридцать шесть, и вычти это из одной из коротких об.
сторон, умноженных на равное им, т. е. ста, остается шестьдесят четыре; извлеки корень из этого, [это] восемь; это высота и его площадь — сорок восемь локтей, для чего умножь высоту на половину основания, т. е. шесть. Примем одну из сторон квадрата за вещь, умножим ее на равное ей, получится квадрат; запомним это. Далее мы знаем, что у нас остаются два треугольника по сторонам квадрата и треугольник над ним. Что касается треугольников, находящихся по сторонам квадрата, то они равны, так как у них одинаковы высоты и оба треугольника — прямоугольные. Их площади таковы, что умножь вещь на шесть без половины вещи, получится шесть вещей без половины квадрата, это и есть общая площадь треугольников, находящихся по сторонам квадрата. Что касается площади верхнего треугольника, то умножь восемь без вещи, т. е. высоту, на половину вещи, получится четыре вещи без половины квадрата. Сложим все это, т. е. площадь квадрата и площади трех треугольников. Получится: десять вещей равны сорока восьми, это и есть площадь большого треугольника. Поэтому одна вещь есть четыре и четыре пятых локтя, таковы все стороны квадрата[139]. Вот чертеж этого [рис. 18].



[Рис. 17].



[Рис. 18].

КНИГА О ЗАВЕЩАНИЯХ

ГЛАВА О НАЛИЧНОСТИ И ДОЛГЕ

Человек умер, оставив двух сыновей, и завещал треть своего имущества другому человеку. Он оставил десять дирхемов наличными и отданное в долг, [равное доле] одного из сыновей. *Правило:* прими получаемое из долга за вещь и прибавь ее к наличности, т. е. десяти дирхемам. Получится десять и вещь. Вычти из этого третье, так как человек завещал треть своего имущества, это три дирхема с третью и треть вещи. Останется шесть дирхемов с двумя третями и две трети вещи. Раздели это между сыновьями. Тогда доля каждого сына — три дирхема с третью и треть вещи. Это равно получаемой вещи. Противопоставь здесь треть вещи с третью вещи. Останется: две трети вещи равны трех дирхемам и одной трети. Ты нуждаешься в восполнении вещи [прибавь к этому равное его половине и прибавь к трем с третью равное их половине, получится пять дирхемов. Это и есть вещь], которая получается из долга[140].

Если он оставил двух сыновей, десять дирхемов наличными и отданное в долг, [равное доле] одного из сыновей, и завещал одному человеку одну пятую своего имущества и дирхем, то *прави-*
19 *ло:* || прими получаемое из долга за вещь и прибавь это к наличности. Получится вещь и десять дирхемов. Вычти из этого одну пятую, так как завещалась одна пятая имущества. Это два дирхема и одна пятая вещи. Останется восемь дирхемов и одна пятая вещи. Затем вычти дирхем, который завещался. Останется семь дирхемов и четыре пятых вещи. Раздели это между сыновьями. Тогда у каждого из них будет три с половиной дирхема и две пятых вещи. [Это равно вещи. Противопоставь ей две пятых вещи]. Останется: три пятых вещи равны трем с половиной дирхемам. Восполни вещь, т. е. прибавь к ней равное двум третям от нее и прибавь к трем с половиной равное двум третям, т. е. два дирхема с третью. Получится пять и пять шестых. Это вещь, которая получается из долга[141].

Если он оставил трех сыновей и завещал одну пятую своего имущества без дирхема, причем он оставил десять дирхемов в наличности и отданное в долг, [равное доле] одного из сыновей, то *правило:* прими получаемое из долга за вещь и прибавь это к десяти. Будет десять и вещь. Вычти одну пятую этого как завещанное. Это два дирхема и одна пятая вещи. Останется восемь дирхемов и четыре пятых вещи. Затем прибавь дирхем, так как было сказано: без дирхема. Получится девять дирхемов и четыре пятых вещи. Раздели это между сыновьями. У каждого сына будет три дирхема и одна пятая с третью одной пятой вещи, Это равно вещи. Противопоставь одну пятую с третью одной пятой вещи [одной] вещи. Останется: одиннадцать пятнадцатых вещи равны трем дирхемам. Ты нуждаешься в дополнении вещи.

Прибавь к ней четыре пятнадцатых вещи и прибавь равное этому к трем дирхемам. Это дирхем с одной одиннадцатой. Поэтому четыре и одна одиннадцатая дирхема равны вещи. Это и есть то, что получается из долга[142].

ДРУГАЯ ГЛАВА О ЗАВЕЩАНИЯХ

Человек умер, оставив свою мать, свою жену, двух своих братьев и двух своих сестер от того же отца и матери, и завещал другому человеку одну девятую своего имущества. *Правило таково:* ты установишь [число] частей необходимого наследства, если возьмешь их сорок восемь. Ты знаешь, что если от всего имущества ты вычтешь одну девятую, останется восемь девятых, и то, что отнимается, равно одной восьмой того, что остается. Прибавь к восьми девятым одну восьмую этого и к сорока восьми — одну восьмую этого для того, чтобы твое имущество стало полным, это шесть. Получится пятьдесят четыре. Тот, кому завещана одна девятая, получит из этого шесть, т. е. одну девятую всего имущества. То, что остается, т. е. сорок восемь, [делится] между наследниками по их долям[143].

Если говорится: женщина || умерла, оставив своего мужа, сына и трех дочерей и завещав человеку одну восьмую и одну седьмую своего имущества, то *правило:* ты установишь [число] частей необходимого наследства, если возьмешь их двадцать. Возьми имущество и вычти его одну восьмую и одну шестую. Останется имущество без одной восьмой и одной седьмой его. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к нему пятнадцать сорок первых. Умножь [число] частей необходимого, т. е. двадцать, на сорок один, получится восемьсот двадцать. Прибавь к этому пятнадцать сорок первых [этого], т. е. триста, получится все, это будет тысяча сто двадцать. Тот, кому завещано, получит одну седьмую и одну восьмую этого. Одна седьмая этого и одна восьмая этого — триста, так как одна седьмая — сто шестьдесят, а одна восьмая — сто сорок. Оставшиеся восемьсот двадцать [делятся] между наследниками по их долям[144]. 19 об.

ЕЩЕ ОДНА ГЛАВА О ЗАВЕЩАНИЯХ

Это в том случае, когда от одних наследников ничего не требуется, а от других требуется, причем завещанное больше трети. Знай, что закон таков, что если от некоторых наследников требуется больше трети завещанного, это входит в их долю, те же, от кого ничего не требуется, во всяком случае отдают треть.

Пример. Женщина умерла, оставив своего мужа, сына и мать, и завещала одному человеку две пятых своего имущества, а другому человеку — четверть своего имущества. Она потребовала от сына, чтобы он отдал [ту же долю] обоим, кому завещано, от матери, чтобы она отдала половину ее доли, а от мужа не потребо-

вала ничего, кроме трети. *Правило таково:* ты установишь [число] частей необходимого наследства, если возьмешь его равным двенадцати: сын получит семь частей, муж — три части и мать — две части. Но ты знаешь, что от мужа требуется отдать треть, поэтому то, что останется в его руках, в два раза больше того, что от него требуется из его доли завещания, т. е., если в его руках было три части завещания, у него останется две. От сына требуется, чтобы он отдал [ту же долю, что и она] обоим, кому завещаю, т. е. от него берутся две пятых и четверть всего имущества и в его руках остается семь частей из двадцати, если всего было двадцать частей. У матери в руках остается столько же, сколько нужно взять из ее рук, т. е. одна часть, так как всего у нее было две. Возьми имущество, у четверти которого есть треть, а у одной шестой — половина, и то, что остается, можно разделить на двадцать. Это двести сорок. Мать получит одну шестую этого, т. е. сорок, двадцать из этого идет в завещанное, и у нее остается двадцать. Муж получает четверть этого, т. е. шестьдесят, в завещанное из этого идет двадцать, у него остается сорок. Для сына остается сто сорок, в завещанное из этого идет две пятых и четверть, т. е. девяносто один. Остается сорок девять. Все за-
20 вещанное есть сто тридцать один, || оно должно быть разделено между двумя человеками, которым оно завещано. Один из них тот, кому завещаны две пятых, получает восемь тринадцатых, а тот, кому завещают четверть, получает пять тринадцатых. Если ты хочешь, чтобы доли людей, которым завещано, были целыми, умножь части необходимого на тринадцать, тогда все [имущество] — три тысячи сто двадцать[145].

Если требуется от сына две пятых для того, кому завещаны две пятых, и ничего не требуется для другого человека, а от матери требуется четверть для того, кому завещана четверть, и ничего не требуется для другого, а от мужа не требуется ничего, кроме трети, то знай, что эта треть идет обоим этим людям вместе и у наследников все умножается: для того, кому завещаны две пятых,— на восемь тринадцатых, а для того, кому завещана четверть,— на пять тринадцатых, [число же] частей необходимого наследства устанавливается, как я указал тебе выше, оно равно двенадцати: муж получит четверть, мать — одну шестую, а сын — то, что остается. Правило: ты знаешь, что от мужа требуется, чтобы он во всяком случае отдал треть той доли, которая в его руках, а в его руках три части, и что от матери требуется, чтобы она также отдала треть того, что в ее руках, каждому из них по их долям, так что от нее требуется для того, кому завещана четверть и его доля ее доли и разность между четвертью и его долей ее доли, т. е. девятнадцать из ста пятидесяти шести частей, так как вся ее доля есть сто пятьдесят шесть частей, и его доля от трети ее доли есть двадцать частей, а от нее требуется для него четверть ее доли, т. е. тридцать девять и, так как треть того, что в ее руках, требуется для них обоих, девятнадцать частей требуется для него одного. Далее от сына требуется для того, кому завещаны две пятых, разность между двумя пятыми его доли и долей того, кому завещаны две пятых от трети его доли, т. е. тридцать восемь сто девяносто пятых доли сына, помимо трети, которая от него требуется для них обоих. Из трети ему требуется восемь тринадцатых, т. е. сорок [сто девяносто пятых], и из двух пятых доли сына — тридцать восемь, это составляет семьдесят восемь. Таким образом, от него требуется шестьдесят пять как треть его имущества для обоих и, кроме того, тридцать восемь для одного. Если ты хочешь, чтобы доли были целыми, сделай их целыми, получится двести двадцать девять тысяч триста двадцать[146].

ЕЩЕ ОБ ОДНОМ ВИДЕ ЗАВЕЩАНИЙ

Человек умер, оставив четырех сыновей и жену, и завещал одному человеку равное доле одного сына без равного доле жены. Установи [число] частей необходимого наследства, это тридцать два. Доля жены — одна восьмая, т. е. четыре части, поэтому доля каждого сына — семь. Отсюда ты узнаешь, что тому, кому завещано, требуется три седьмых доли сына. ‖ Поэтому прибавь 20
к необходимому наследству завещанное, т. е. три седьмых доли об.
сына, т. е. три [части], получится тридцать пять. Тот, кому завещано, получит три части из тридцати пяти, останется тридцать две части. Они [делятся] между наследниками по их долям[147].

Если он оставил двух сыновей и дочь и завещал одному человеку равное доле третьего сына, если бы он его имел, этот вид можно рассматривать, как если бы сыновей было трое, доли здесь такие же. Примем долю за семь. Возьмем за [число частей] необходимого количества наследства то, одна пятая чего есть семь, а одна седьмая — пять. Это тридцать пять. Прибавь к нему две седьмых его, т. е. десять. Получится сорок пять. Тому, кому завещано, из этого требуется десять, каждому сыну — четырнадцать, а дочери — семь[148].

Если он оставил мать, трех сыновей и дочь и завещал одному человеку равное доле одного сына без равного доле другой дочери, если бы она была, то установи число частей необходимого наследства и прими его за такую вещь, которую можно разделить и между наличными наследниками и между ними, если бы среди них была другая дочь. Прими это за триста тридцать шесть. Тогда доля другой дочери, если бы она была,— тридцать пять, а доля сына — восемьдесят долей и разность между ними сорок пять, это и есть завещанное. Прибавь это к тремстам тридцати шести, получится триста восемьдесят один. Это и есть число частей имущества[149].

Если он оставил трех сыновей и завещал одному человеку долю одного сына без доли дочери, если бы она была, и другому человеку треть того, что останется от трети, то *правило таково:*

установи [число] частей необходимого наследства как вещь, которую можно разделить и между наличными наследниками и между ними, если бы среди них была дочь. Прими это за двадцать один. Тогда, если бы среди наследников была дочь, она получила бы три, а доля сына есть семь. Поэтому человеку было завещано четыре седьмых доли сына и две трети того, что останется от трети. Возьми треть и вычти из нее четыре седьмых доли сына. Останется треть имущества без четырех седьмых доли сына. Затем вычти треть из того, что остается от трети, т. е. одну девятую имущества без одной седьмой доли сына и без трети одной седьмой этой доли. Останется две девятых имущества без двух седьмых доли сына и без двух третей одной седьмой этой доли. Прибавь это к двум третям имущества, получится восемь девятых имущества без двух седьмых доли сына и без двух третей одной седьмой этой доли, т. е. без восьми двадцать первых этой доли. Все это равно трем долям. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к восьми девятым равное одной девятой, а к трем долям — равное их одной восьмой. У тебя получится: имущество
21 равно трем долям и сорока пяти пятьдесят шестым доли. || Поэтому доля будет равна пятидесяти шести частям, имущество — двумстам тринадцати частям, первое завещанное — тридцати двум частям, а второе завещанное — тринадцати. Остается сто шестьдесят восемь, т. е. для каждого сына по пятьдесят шесть частей[150].

ЕЩЕ ОБ ОДНОМ ВИДЕ ЗАВЕЩАНИЙ

Женщина умерла, оставив двух дочерей, мать и мужа, и завещала одному человеку равное доле матери и другому человеку — одну девятую всего имущества. *Правило таково*: установи [число] частей необходимого наследства, это тринадцать частей, для матери из них две части. Теперь ты знаешь, что завещанное есть две части и одна девятая всего имущества. Остается от него восемь девятых имущества без двух частей для наследников. Восполни твое имущество, считая восемь девятых без двух частей тринадцатью частями, т. е. прибавь к этому две части, так что получится: пятнадцать равно восьми девятым имущества. Затем прибавь к этому одну восьмую его, и к пятнадцати — их одну восьмую, т. е. одну и семь восьмых части, для того, кому завещана одна девятая, ему одна и семь восьмых доли. Другому, кому завещана доля матери,— две части. Останутся тринадцать частей, они [делятся] между наследниками по их долям. Это станет целым, если будет сто тридцать пять частей[151].

Если она завещала равное доле мужа и одну восьмую и одну десятую имущества, установи [число] частей необходимого наследства, их будет тринадцать. Затем прибавь к этому равное доле мужа, т. е. три, будет шестнадцать. Это останется от имущества после выделения из него одной восьмой и одной десятой, т. е. девяти сороковых. После выделения одной восьмой и одной десятой останется тридцать одна сороковая, это равно шестнадцати частям. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к нему девять тридцать первых. Умножь шестнадцать на тридцать один, получится четыреста девяносто шесть. Прибавь к этому девять тридцать первых этого, т. е. сто сорок четыре, получится шестьсот сорок. Вычти из этого одну восьмую и одну десятую, т. е. сто сорок четыре, и долю мужа, т. е. девяносто три, останется четыреста три. Муж из этого получит девяносто три, мать — шестьдесят два, а каждая из дочерей — по сто двадцать четыре[152].

Если необходимое наследство было то же самое, и она завещала одному человеку равное доле мужа без одной девятой и одной десятой того, что останется от имущества после выделения этой доли, *правило таково:* установи [число] частей необходимого наследства, взяв тринадцать частей. Завещанное составляет три части всего имущества, останется имущество без трех частей. || 21 об.
Затем исключи одну девятую и одну десятую того, что останется от имущества, т. е. одну девятую и одну десятую имущества без одной девятой и одной десятой трех частей, т. е. без девятнадцати тридцатых частей. Получится: имущество и одна девятая и одна десятая его без трех и девятнадцати тридцатых частей равны тринадцати частям. Восполни твое имущество тремя и девятнадцатью девятыми частями и прибавь к тринадцати равное этому. Получится имущество и одна девятая и одна десятая его равны шестнадцати и девятнадцати тридцатым частям. Приведи это к одному квадрату, т. е. отними от этого девятнадцать сто девятых. Останется: имущество равно тринадцати и восьмидесяти сто девятым частям. Раздели каждую часть на сто девятых частей и умножь тринадцать на сто девять частей и прибавь к этому восемьдесят частей. Получится тысяча четыреста девяносто семь. Доля мужа — триста двадцать семь[153].

Если кто-то оставил двух сестер и жену и завещал одному человеку равное доле одной сестры без одной восьмой того, что остается от имущества после выделения завещанного, *правило таково:* установи [число] частей необходимого наследства, взяв двенадцать частей, причем для каждой сестры — треть того, что останется после выделения завещанного. Это имущество без завещанного. Знай, что одна восьмая того, что остается, вместе с завещанным равна доле сестры. Одна восьмая того, что остается, есть одна восьмая имущества без одной восьмой завещанного. Поэтому одна восьмая имущества без одной восьмой завещанного равна доле сестры. Это одна восьмая имущества и семь восьмых завещанного. Поэтому все имущество равно трем восьмым имущества и трем и пяти восьмым завещанного. Отбросим от имущества три восьмых его, останется: пять восьмых имущества равны трем и пяти восьмым завещанного. Поэтому целое имущество равно пяти и четырем пятым завещанного. Поэтому имущество есть двадцать девять, завещанное — пять, а доля — восемь[154].

ЕЩЕ ОБ ОДНОМ ВИДЕ ЗАВЕЩАНИЙ

Человек умер и оставил четырех сыновей и завещал одному человеку равное доле одного сына и другому — четверть того, что останется от трети после выделения доли. Знай, что в этом виде завещанное берется из трети имущества. *Правило*: возьми треть имущества и отними от нее долю, останется треть имущества без доли. Затем вычти из этого четверть того, что остается от трети, т. е. четверть трети без четверти доли. Останется: четверть имущества без трех четвертей доли. Прибавь к этому две трети имущества. Получится: одиннадцать двенадцатых без трех четвертей доли равны четырем долям. Восполни это тремя 22 четвертями доли || и прибавь это к четырем долям. У тебя получится: одиннадцать двенадцатых имущества равны четырем и трем четвертям доли. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к четырем и трем четвертям доли их одну одиннадцатую. Получится: пять и две одиннадцатых доли равны имуществу. Прими долю за одиннадцать, а имущество — за пятьдесят семь. Тогда треть его есть девятнадцать. Вычти из этого долю, т. е. одиннадцать, останется восемь. Для того, кому завещано, отсюда — два, остальные шесть возвращаются к двум третям, т. е. к тридцати восьми. Полученные сорок четыре [делятся] между четырьмя сыновьями, каждому сыну — по одиннадцать частей[155].

Если он оставил четырех сыновей и завещал одному человеку долю сына без одной пятой того, что остается от одной трети после выделения доли, *завещанное* берется из трети. Возьми треть и вычти из нее долю. Останется треть без доли. Затем приведи к этому то, что было исключено, т. е. одну пятую трети·одной пятой доли. Получится треть и одна пятая трети, т. е. две пятых, без одной и одной пятой доли. Прибавь это к двум третям имущества. Получится: имущество и одна пятая трети имущества без одной и одной пятой доли равны четырем долям. Восполни имущество одной и одной пятой доли и прибавь это к четырем долям. Получится: имущество и одна пятая трети имущества равны пяти и одной пятой доли. Приведи это к одному имуществу, отняв от того, что у тебя, половину одной восьмой, т. е. одну шестнадцатую. У тебя получится: имущество равно четырем и семи восьмым доли. Прими имущество за тридцать девять, тогда треть имущества — тринадцать, а доля — восемь. Останется от одной трети [после выделения доли] пять, одна пятая этого — единица. Вычти [из доли] единицу, которая была исключена из завещанного, останется завещанное, равное семи. От трети останется шесть. Прибавим к этому две трети имущества, т. е. шесть, и двадцать частей. Получится тридцать два для четырех сыновей, для каждого сына — восемь[156].

Если он оставил трех сыновей и дочь и завещал одному человеку равное доле дочери [после выделения доли дочери] и другому человеку одну пятую и одну шестую того, что остается от двух седьмых имущества, *завещанное* в этом виде берется из двух седьмых имущества. Возьми две седьмых имущества и вычти из них долю дочери. Останутся две седьмые без доли дочери. Вычти из этого второе завещанное, т. е. одну пятую и одну шестую, останется одна седьмая и четыре пятнадцатых одной седьмой [имущества] || без девятнадцати тридцатых доли. Прибавь к этому 22 об. остальные пять седьмых имущества, получится: шесть седьмых имущества и четыре пятнадцатых одной седьмой имущества без девятнадцати тридцатых доли равны семи долям. Восполним это девятнадцатью тридцатыми и прибавим их к семи долям. Получится: шесть седьмых имущества и четыре пятнадцатых одной седьмой имущества равны семи долям и девятнадцати тридцатым доли. Восполни твое имущество, т. е. прибавь ко всему, имеющемуся у тебя, одиннадцать девяносто четвертых. У тебя получится: имущество равно восьми и девяносто девяти сто восемьдесят восьмых доли. Считай, что все имущество есть тысяча шестьсот три доли. Тогда доля есть сто восемьдесят восемь. Затем возьми две седьмых, т. е. четыреста пятьдесят восемь, и вычти из этого долю, т. е. сто восемьдесят восемь, останется двести семьдесят. Вычти одну пятую и одну шестую этого, т. е. девяносто девять частей. Останется сто семьдесят одна часть. Прибавь к этому пять седьмых имущества, т. е. тысячу сто сорок пять. Полученные тысяча триста шестнадцать частей делятся между семью долями, каждая по сто восемьдесят восемь частей, это доля дочери, а доля сына вдвое больше этого[157].

Если необходимое наследство было то же самое, и он завещал [одному человеку] равное доле дочери и другому человеку четверть и одну пятую того, что остается от двух пятых после выделения доли, *правило таково же,* как когда завещанное — из двух пятых. Возьми две пятых имущества и вычти из них долю, останется: две пятых имущества без доли. Затем вычти из этого четверть и одну пятую того, что остается, т. е. девять двадцатых от двух пятых без равного доле. Останется одна пятая и одна десятая одной пятой имущества без одиннадцати двадцатых доли. Прибавь к этому три пятых имущества, получится: четыре пятых и одна десятая одной пятой имущества без одиннадцати двадцатых доли равны семи долям. Восполни это одиннадцатью двадцатыми доли и прибавь их к семи, получится: это равно семи и одиннадцати двадцатым доли. Восполни твое имущество, т. е. прибавь ко всему, что у тебя, девять сорок первых. Получится у тебя: имущество равно девяти и семнадцати восемьдесят вторым доли. Считай, что доля есть восемьдесят две части, тогда всего частей будет семьсот пятьдесят пять, две пятых этого есть триста два, затем вычти из этого долю, т. е. || восемьдесят два, 23 останется двести двадцать. Затем вычти из этого четверть и одну пятую, т. е. девяносто девять частей, останется сто двадцать один. Прибавь к этому три пятых имущества, т. е. четыреста пятьдесят три. Полученные пятьсот семьдесят четыре [делятся] между семью долями, каждая по восемьдесят две. Это доля дочери, а доля сына вдвое больше этого[158].

Если необходимое наследство было то же самое, и он завещал одному человеку равное доле сына без четверти и одной пятой того, что остается от двух пятых после выделения доли, *завещанное* берется из двух пятых. Вычти из этого две доли, так как сын получает две такие доли, останется две пятых имущества без двух долей. Прибавь то, что было исключено, к этому, получится четверть двух пятых и одна пятая их без девяти десятых доли. Это пять и девять десятых одной пятой имущества без двух и девяти десятых доли. Прибавь к этому три пятых имущества. Получится: имущество и девять десятых одной пятой имущества без двух и девяти десятых доли равны семи долям. Восполни эти две и девять десятых долей и прибавь это к долям. У тебя получится: имущество и девять десятых одной пятой имущества равны девяти и девяти десятым доли. Приведи это к одному квадрату, т. е. вычти из того, что у тебя, девять пятьдесят девятых. Останется: имущество равно восьми и двадцати трем пятьдесят девятым доли. Поэтому доля — пятьдесят девять частей, частей необходимого — четыреста девяносто пять, две пятых этого — сто девяносто восемь. Вычти из этого две доли, т. е. сто восемнадцать, останется восемьдесят частей. Вычти из этого то, что было исключено, т. е. четверть двух пятых и одну пятую их, т. е. тридцать шесть частей. Останется для того, кому завещано, восемьдесят две доли. Вычти их из частей имущества, т. е. из четырехсот девяноста пяти долей. Оставшиеся четыреста тринадцать частей [делятся] между семью частями, для дочери пятьдесят девять, а для каждого сына — равное [вдвое большему], чем это[159].

Если он оставил двух сыновей и двух дочерей и завещал одному человеку равное доле дочери без одной пятой того, что останется от трети после выделения доли, а другому — равное доле дочери без трети того, что останется после выделения всего этого, и еще одному человеку половину одной шестой имущества, и если это завещанное разделено на трети, возьми треть имущества и вычти из нее долю дочери. Останется треть имущества без доли. Затем прибавь к этому то, что исключено, т. е. одну пятую трети без одной пятой доли. Получится || треть и одна пятая трети без одной и одной пятой доли. Затем вычти из этого долю другой дочери. Останется треть и одна пятая трети без двух и одной пятой доли. Затем прибавь к этому то, что исключено. Получится треть и три пятых трети без двух и четырнадцати пятнадцатых доли. Затем вычти из этого половину одной шестой всего имущества. Останется двадцать семь шестидесятых имущества без того, что вычтено из долей. Прибавь к этому две трети имущества и восполни это тем, что вычтено из долей, а также прибавь это к долям. У тебя получится: имущество и семь шестидесятых имущества равны восьми и четырнадцати 23 об.

пятнадцатым доли. Приведи это к одному имуществу, т. е. вычти из того, что у тебя, семь шестьдесят седьмых. Получится, что доля есть двести один, а все имущество — тысяча шестьсот восемь[160].

Если необходимое наследство было то же самое, и он завещал равное доле дочери и одну пятую того, что остается от трети после выделения доли, и [другому человеку] равное доле другой дочери и треть того, что остается от четверти после выделения одной доли, *правило таково:* здесь завещанные берутся из четверти и из трети. Возьми треть имущества и вычти из нее долю. Останется треть имущества без доли. Затем вычти одну пятую того, что осталось, т. е. одну пятую трети без одной пятой доли. Останется четыре пятых трети без четырех пятых вещи. Затем возьми также четверть имущества и вычти из нее долю. У тебя останется четверть имущества без доли. Затем вычти треть того, что остается от четверти. Останется две трети четверти без двух третей доли. Прибавь это и к тому, что осталось от одной трети. Получится: двадцать шесть шестидесятых имущества без одной и двадцати восьми шестидесятых доли. Затем прибавь к этому то, что остается после того, как ты взял из этого треть и четверть, т. е. четверть и одну шестую. Получится: семнадцать двадцатых имущества равны семи и семи пятнадцатым доли. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к долям, имеющимся у тебя, три семнадцатых. У тебя получится: имущество равно восьми и ста двадцати сто пятьдесят третьим. Прими долю за сто пятьдесят три. Тогда имущество есть тысяча триста сорок четыре. Завещанное, остающееся от трети, после выделения доли, есть пятьдесят девять, а завещанное, остающееся от четверти, после выделения доли, есть шестьдесят один[161].

Если он оставил шестерых сыновей и завещал одному человеку || равное доле сына и одну пятую того, что остается от четверти [после выделения доли], и другому человеку равное доле другого сына без четверти того, что остается от трети после выделения двух первых завещанных и другой доли, *правило таково:* вычти из четверти имущества долю. Останется четверть без доли. Затем вычти одну пятую того, что останется от четверти, т. е. половину одной десятой имущества без одной пятой доли. Затем вернись к трети и вычти из нее половину одной десятой имущества и четыре пятых доли и другую долю. Останется треть без половины одной десятой имущества и без одной и четырех пятых доли. Прибавь к этому четверть того, что останется, т. е. то, что исключено, и прими треть за восемьдесят. Если ты вычтешь половину одной десятой имущества, от этого останется шестьдесят восемь без одной и четырех пятых доли. Прибавь к этому четверть этого, т. е. семнадцать частей без четверти того, что вычитается из долей. Это восемьдесят пять без двух с четвертью долей. Прибавь это к двум третям имущества, т. е. ста шестидесяти. У тебя получится: одно и одна шестая одной восьмой иму- 24 щества без двух с четвертью долей равны шести долям. Восполни это тем, что вычитается из этого, и прибавь это к долям. Получится: одно и одна шестая одной восьмой имущества равны восьми и одной четверти доли. Приведи это к одному имуществу, т. е. вычти из долей одну сорок девятую всех их. Получится: имущество равно восьми и четырем сорок девятым доли. Прими долю за сорок девять. Тогда имущество есть триста девяносто шесть, доля — сорок девять, завещанное, остающееся от четверти,— десять, а исключенное из второй доли — шесть. Пойми это[162].

ГЛАВА О ЗАВЕЩАНИЯХ С ДИРХЕМОМ

Человек умер, оставив четырех сыновей и завещал одному человеку долю одного из них, четверть того, что остается от трети [после выделения доли], и дирхем. *Правило таково:* возьми треть имущества и вычти из него долю. Останется треть без доли. Затем вычти четверть того, что останется у тебя, т. е. четверть трети без четверти доли, и вычти также дирхем. У тебя останется: три четверти трети имущества, т. е. четверть имущества без трех четвертей доли и без дирхема. Прибавь это к двум третям имущества. У тебя получится: одиннадцать двенадцатых имущества без трех четвертей доли и без дирхема равны четырем долям. Восполни это тремя четвертями доли и дирхемом. Получится: одиннадцать двенадцатых имущества равны четырем и трем четвертям доли и дирхему. Восполни твое имущество, т. е. прибавь 24 к долям и дирхему их одну одиннадцатую. У тебя получится: ‖ об. имущество равно пяти и двум одиннадцатым доли и одному и одной одиннадцатой дирхема. Если ты хочешь получить дирхем целым, не восполняй имущества, а вычти из одиннадцати единицу в качестве дирхема и раздели оставшиеся десять на четыре и три четверти доли. Получится два и две девятнадцатые дирхема. Прими имущество за двенадцать [дирхемов], тогда каждая доля есть два и две девятнадцатые дирхема. Если ты хочешь получить долю целой, восполни твое имущество. Тогда дирхем будет равен одиннадцати имуществам[163].

Если он оставил пятерых сыновей и завещал одному человеку равное доле одного из них и треть того, что остается от трети [после выделения доли] и дирхем и четверть того, что остается после [выделения] этого от трети, и дирхем, возьми треть и вычти из нее долю. Останется треть без доли. Затем вычти из этого то, что осталось у тебя, т. е. треть трети без трети доли, затем вычти из того, что осталось, дирхем. У тебя останется две трети трети без двух третей доли и без дирхема. Затем вычти из того, что у тебя, четверть этого, т. е. одну шестую трети без одной шестой доли и без четверти дирхема и затем отними другой дирхем. У тебя останется половина трети без половины доли и без одного и трех четвертей дирхема. Прибавь к этому две трети имущества. Получится: пять шестых имущества без половины доли и без одного и трех четвертей дирхема равны пяти долям. Восполни это половиной доли и одним и тремя четвертями дирхема и прибавь их к долям. У тебя получится: пять шестых имущества равны пяти с половиной долям и одному и трем четвертям дирхема. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к долям и одному и трем четвертям дирхема равное одной пятой их. У тебя получится: имущество равно шести и трем пятым доли и двум и одной десятой дирхема. Прими долю за десять и дирхем за десять. Тогда имущество будет равно восьмидесяти семи. Если ты хочешь получить дирхем целым, возьми треть и вычти из нее долю. Получится треть без доли. Прими треть за семь с половиной. Затем **вычти** треть того, что у тебя, т. е. треть трети [без трети доли]. У тебя останется две трети трети без двух третей доли, т. е. пять дирхемов без двух третей доли. Вычти единицу, считая ее дирхемом. У тебя останется четыре дирхема без двух третей доли. Затем вычти четверть того, что у тебя, т. е. одну часть без одной шестой доли, и вычти одну часть в качестве дирхема. У тебя останется две части без половины доли. Прибавь ‖ это к двум третям 25 имущества, т. е. пятнадцати. Получится: семнадцать без половины доли равны пяти долям. Восполни это половиной доли и прибавь это к пяти. Получится: семнадцать частей равны пяти с половиной долям[164]. Раздели сем[надцат]ь на пять с половиной долей. Получится доля. Это три и одна одиннадцатая дирхема, и треть [имущества] есть семь с половиной [дирхемов].

Если он оставил четырех сыновей и завещал одному человеку равное доле одного сына без четверти того, что остается от трети после [выделения] доли, и другому треть того, что остается от трети, и дирхем, тогда завещанное [определится] по трети. Возьми треть имущества и вычти из нее долю. Останется треть без доли. Затем прибавь к тому, что у тебя, четверть этого. Получится: треть и четверть трети без доли, и четверти доли. Вычти дирхем. Останется треть и четверть трети без дирхема и без доли и четверти доли. Затем вычти треть того, что у тебя останется, из второго завещанного. У тебя останется от трети пять шестых трети имущества без двух третей дирхема и без пяти шестых доли. Затем вычти другой дирхем. У тебя останется пять восемнадцатых имущества без одного и двух третей дирхема и без пяти шестых доли. Прибавь к этому две трети имущества. У тебя получится: семнадцать восемнадцатых имущества без одного и двух третей дирхема и без пяти шестых доли равны четырем долям. Восполни это тем, чего недостает, и прибавь равное этому к долям. Получится: семнадцать восемнадцатых имущества равны четырем и пяти шестым доли и одному и двум третям дирхема. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к четырем и пяти шестым доли и одному и двум третям дирхема одну семнадцатую доли и один и три семнадцатых дирхема. Считай, что доля состоит из семнадцати частей и что дирхем также есть семнадцать. Тогда имущество есть сто семнадцать. Если ты хочешь определить дирхем целым, поступай так, как я показал тебе, если будет на то воля всевышнего Аллаха[165].

Если он оставил трех сыновей и двух дочерей и завещал одному человеку равное доле дочери и дирхем, другому [человеку] — одну пятую того, что остается от одной четверти [после выделения первого завещанного], и дирхем, и еще одному — четверть того, что остается от трети после выделения всего этого, и дирхем, и еще одному — одну восьмую всего имущества, разделяя это между наследниками, *правило этого* с определением дирхема целым есть самый красивый способ. Возьми четверть имущества и прими ее за шесть [дирхемов], а все имущество будет равно двадцати четырем. Вычти из четверти долю, останется шесть без до-
25 ли. Затем || вычти дирхем. Останется пять без доли. Вычти одну
об. пятую того, что останется. Останется четыре без четырех пятых доли. Затем вычти другой дирхем. У тебя останется три без четырех пятых доли. Ты узнал, что завещанное из четверти есть три без четырех пятых доли. Затем вернись к трети, т. е. к восьми, и вычти из этого три и четыре пятых доли. Останется пять без четырех пятых доли. Вычти для [получения] завещанного еще четверть этого и дирхем. У тебя останется две и три четверти части без трех пятых доли. Затем вычти одну восьмую имущества, т. е. три, у тебя останется после выделения трети четверть части и три пятых доли. Вернись к двум третям, т. е. к шестнадцати, вычти из этого одну четверть [дирхема] и три пятых доли. От имущества останется: пятнадцать и три четверти части без трех пятых доли [равны восьми долям]. Восполни это тремя пятыми доли и прибавь их к долям, которых восемь. Получится: пятнадцать и три четверти части равны восьми и трем пятым доли. Раздели одно на другое. Частное от деления есть доля имущества, она равна двадцати четырем [дирхемам]. Каждой дочери приходится одна и сто сорок три сто семьдесят вторых части.

Если ты хочешь определять доли целыми, возьми четверть имущества, вычти из него долю, останется четверть имущества без доли. Затем вычти из этого дирхем, затем вычти одну пятую того, что остается от четверти, т. е. одну пятую четверти имущества без одной пятой доли и без одной пятой дирхема, и вычти дирхем еще раз. Останется четыре пятых четверти без четырех пятых доли и без одного и четырех пятых дирхема. Завещанное из четверти есть двенадцать двести сороковых имущества и четыре пятых доли и один и четыре пятых дирхема. Возьми треть, т. е. восемьдесят, и вычти из этого двенадцать, четыре пятых доли и один и четыре пятых дирхема, затем вычти четверть того, что у тебя осталось, и дирхем. У тебя останется от трети пятьдесят один без трех пятых доли и без двух и семи двадцатых дирхема. Затем вычти из этого одну восьмую имущества, т. е. тридцать, останется: двадцать один без трех пятых доли и без одного и семи двадцатых дирхема и две трети имущества равны восьми долям. Восполни это тем, чего нехватает, и прибавь это к восьми долям. У тебя получится: сто восемьдесят одна || двести сороковая имущества равна восьми и трем пятым доли и двум и семи двадцатым дирхема. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к тому, что у тебя, пятьдесят девять сто восемьдесят первых. Получится, что доля есть триста шестьдесят два и дирхем также есть триста шестьдесят два, а имущество есть пять тысяч двести пятьдесят шесть, завещанное из четверти [вместе с первым завещанным] есть тысяча двести четыре, [завещанное] из трети есть четыреста девяносто девять, а одна восьмая есть шестьсот пятьдесят семь[166]. 26

ГЛАВА О ДОПОЛНЕНИИ

Женщина умерла и оставила восемь дочерей, свою мать, своего мужа, завещала одному человеку дополнение до одной пятой имущества доли дочери и другому человеку — дополнение доли матери до четверти имущества. *Правило таково:* установи [число] частей необходимого наследства, получится тринадцать частей. Возьми имущество и вычти из него его одну пятую без части, т. е. доли дочери, это первое завещанное. Затем вычти из него также четверть без двух долей, т. е. доли матери, это второе завещанное. Останется: одиннадцать двадцатых имущества и три части равны тринадцати частям. Вычти из тринадцати частей три части за три части, у тебя останется одиннадцать двадцатых имущества равны десяти частям. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к десяти частям девять одиннадцатых их. У тебя получится: имущество равно восемнадцати и двум одиннадцатым части. Примем часть за одиннадцать, тогда имущество есть двести, часть — одиннадцать, первое завещанное — двадцать девять, а второе завещанное — двадцать восемь[167].

Если необходимое наследство было то же самое, и она завещала одному человеку дополнение доли мужа до трети, другому человеку — дополнение доли матери до четверти и еще одному человеку — дополнение доли дочери до одной пятой, разделяя это между наследниками. *Установи* необходимое наследство и прими его за тринадцать [частей]. Затем возьми имущество и вычти из него его треть без трех частей, т. е. доли мужа. Затем вычти его четверть без двух частей, т. е. доли матери. Затем вычти его одну пятую без одной части, т. е. доли дочери. Останется: тринадцать шестидесятых имущества и шесть частей равны тринадцати частям. Вычти шесть от тринадцати частей. Останется: тринадцать шестидесятых имущества равны семи частям. Восполни твое имущество, т. е. умножь семь частей на четыре и восемь тринадцатых. У тебя получится: имущество равно тридцати двум и четырем || тринадцатым части. Поэтому имущество есть четыреста двадцать[168]. 26 об.

Если необходимое наследство было то же самое, и она завещала одному человеку дополнение доли матери до четверти имущества, другому [человеку] — дополнение доли дочери до одной пятой того, что осталось от имущества после выделения первого завещанного. *Установи* части необходимого и прими его за тринадцать частей. Затем возьми имущество и вычти из него его четверть без двух частей. Затем вычти одну пятую того, что у тебя осталось от имущества без части. Затем посмотри, что остается от имущества после выделения частей. Прими это за три пятых имущества, это и две и три пятых части равны тринадцати частям. Вычти две и три пятых части от тринадцати частей. Останется: десять и две пятых части равны трем пятым имущества. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к имеющимся у тебя частям их две трети. У тебя получится: имущество равно семнадцати с третью части. Прими часть за три. Тогда имущество есть пятьдесят два, часть — три, первое завещанное — семь, а второе — шесть[169].

Если необходимог наследство было то же самое, и она завещала одному человеку дополнение доли матери до одной пятой имущества, а другому [человеку] — одну шестую того, что остается от имущества. *Частей* — тринадцать. Возьми имущество и вычти из него его одну пятую без двух частей, затем вычти одну шестую того, что у тебя осталось. Останется: две трети имущества и одна с третью часть равны тринадцати частям. Вычти одну с третью часть от тринадцати, останется: две трети имущества равны одиннадцати с третью частям. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к долям их половину. У тебя получится: имущество равно семнадцати частям. Прими имущество за восемьдесят пять, а часть — за пять. Тогда первое завещанное — семь, второе [завещанное] — тринадцать и наследникам остается шестьдесят пять частей[170].

Если необходимое наследство было то же самое, и она завещала одному человеку дополнение до трети имущества доли матери без дополнения доли дочери до четверти — того, что остается от имущества после выделения дополнения. Частей — тринадцать. Возьми имущество и вычти из него треть без двух частей и прибавь к тому, что у тебя остается, четверть этого без части. У тебя получится: пять шестых имущества и полторы части равны тринадцати частям. Вычти из тринадцати частей полторы части, останется: одиннадцать с половиной частей равны пяти шестым имущества. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к частям их одну пятую. Получится: имущество равно тринадцати и четырем пятым части. Прими часть за пять. Тогда имущество 27 есть шестьдесят девять, а завещанное — четыре части[171].

Человек умер, || оставив сына и пять дочерей, и завещал одному человеку дополнение до одной пятой и одной шестой доли сына без четверти того, что остается от трети после выделения дополнения. *Возьми* треть имущества и вычти его одну пятую и одну шестую без двух [седьмых] частей. У тебя останутся две части без четырех сто двадцатых имущества. Затем прибавь к этому исключенное, т. е. половину части без одной [сто двадцатой имущества]. У тебя останутся две с половиной части без пяти сто двадцатых имущества. Прибавь к этому две трети имущества. Получится: семьдесят пять сто двадцатых имущества и две с половиной части равны семи частям. Вычти две с половиной части из семи. У тебя останется: семьдесят пять сто двадцатых имущества равны четырем с половиной частям. Восполни твое имущество, т. е. прибавь к частям их три пятых. Получится: имущество равно семи и одной пятой части. Прими одну часть за пять, тогда имущество есть тридцать шесть, доля — пять, а завещанное — единица[172].

Если он оставил свою мать, свою жену и четырех сестер и завещал одному человеку дополнение до половины [имущества] доли матери и сестры без двух седьмых того, что остается от трети после выделения дополнения, то *правило таково:* если ты вычтешь из половины треть, у тебя останется одна шестая. Это — то, что исключается, т. е. доля матери и сестры. Это пять [тринадцатых] частей. Поэтому от трети остается пять частей без одной шестой имущества. Две седьмых, которые были исключены, это две седьмые от пяти частей без двух седьмых одной шестой имущества. У тебя получится шесть и три седьмых части без одной шестой и двух седьмых одной шестой имущества. Прибавь к этому две трети имущества. У тебя получится: девятнадцать сорок вторых имущества и шесть и три седьмых части равны тринадцати частям. Вычти из этого те части. Останется: девятнадцать сорок вторых [имущества] равны шести и четырем седьмым части. Дополни твое имущество, т. е. два и четыре девятнадцатых его. У тебя получится: имущество равно четырем и семидесяти сто тридцать третьим частям. Прими часть за сто тридцать три. Получится: [число] частей необходимого — тысяча девятьсот тридцать две части, одна часть равна ста тридцати трем, дополнение — триста один, исключенное из трети — девяносто восемь, остается завещанное — двести три, а для наследников — тысяча семьсот двадцать девять[173].

ИСЧИСЛЕНИЕ КРУГООБОРОТОВ[174]

|| ГЛАВА О БРАКЕ ПРИ БОЛЕЗНИ

27 об.

Человек, будучи смертельно больным, женился на женщине за сто дирхемов и не имел имущества, кроме этого, ее брачный выкуп был равен десяти дирхемам. Затем женщина умерла, завещав треть своего имущества. Затем умер муж. *Правило:* возьми от ста, имеющихся у нее, брачный выкуп, т. е. десять дирхемов. У нее остается девяносто дирхемов, из чего берется завещанное. Прими завещанное за вещь и вычти ее из этого. Останется девяносто без вещи. В ее руках окажется десять дирхемов и вещь. Она завещала треть своего имущества, т. е. три с третью дирхема и треть вещи. Останется шесть и две трети дирхема и две трети вещи. Из этого возвращается к мужу его наследство — половина, т. е. три с третью дирхема и треть вещи. В руках наследников мужа окажется девяносто три с третью дирхема без двух третей вещи. Это есть удвоенное завещанное женщины, т. е. вещь, так как женщина имеет право завещать треть того, что оставил муж. Удвоенное ее завещанное есть две вещи. Восполни девяносто три с третью двумя третями вещи и прибавь это к двум вещам. Получится: девяносто три с третью дирхема равны двум и двум третям вещи. Одна вещь есть три восьмых этого, т. е. она равна трем восьмым девяносто трех с третью, т. е. тридцати пяти дирхемам[175].

Если задача та же самая, но женщина имеет десять дирхемов долга и завещала треть своего имущества, *правило таково:* если заплатить женщине десять дирхемов ее брачного выкупа, у нее останется девяносто, из чего берется завещанное. Прими завещанное за вещь. Останется девяносто без вещи. В руках женщины окажется десять дирхемов и вещь. Вычти из этого долг, т. е. десять дирхемов. У нее останется вещь. Из этого она завещала треть, т. е. треть вещи. Останется две трети вещи. Из этого возвращается к мужу его наследство — половина этого, т. е. треть вещи. В руках наследников мужа окажется девяносто дирхемов без двух третей вещи. Это есть удвоенное завещанное, т. е. [так как завещанное есть] вещь, это — две вещи. Восполни девяносто двумя третями вещи и прибавь их к двум вещам. Получится: девяносто дирхемов равны двум и двум третям вещи. Вещь есть три восьмых этого, т. е. тридцать три и три четверти дирхема. Это и есть завещанное[176].

Если он женился на ней за сто дирхемов, брачный выкуп — десять дирхемов, и он завещал одному человеку треть своего имущества, *правило* таково: если заплатить женщине ее брачный выкуп, т. е. десять дирхемов, останется девяносто дирхемов. Затем заплати из этого ее наследство, т. е. вещь. Затем заплати
28 тому, кому завещана треть, || это тоже вещь, так как треть делится между ними пополам, а женщина берет что-нибудь, только если муж берет равное этому. Поэтому заплати мужу треть, т. е. также вещь. Затем возврати наследникам мужа их наследство от женщины, т. е. пять дирхемов и половину вещи. В руках наследников мужа останется девяносто пять без полутора вещей. Это равно четырем вещам. Восполни это полутора вещами. Останется: девяносто пять равно пяти с половиной вещам. Раздели каждую вещь пополам, получится одиннадцать половин, раздели и каждый дирхем пополам, получится: сто девяносто половин [дирхемов] равны одиннадцати [половинам] вещей. Поэтому одна вещь равна семнадцати и трем одиннадцатым дирхема. Это и есть завещанное[177].

Если он женился на ней за сто дирхемов и ее брачный выкуп — десять дирхемов, а затем она умерла прежде мужа, оставив десять дирхемов и завещав треть своего имущества, а затем умер муж, оставив сто двадцать дирхемов и завещав одному человеку треть своего имущества, *правило* [таково]: заплати женщине ее брачный выкуп, т. е. десять дирхемов, в руках наследников мужа останется сто десять дирхемов. Из этого берется завещанное женщиной, т. е. вещь. Останется сто десять дирхемов без вещи. В руках наследников женщины окажется двадцать дирхемов и вещь. Завещанное из этого — треть этого, т. е. шесть и две трети дирхема и треть вещи. Из этого возвращается мужу его наследство — половина того, что остается, т. е. шесть и две трети дирхема и треть вещи. В руках наследников мужа окажется сто шестнадцать и две трети дирхема и две трети без трети вещи. Из этого завещается треть этого, т. е. вещь. Сто шестнадцать и две трети дирхема и одна и две трети вещи равны удвоенным двум завещанным, т. е. четырем вещам. Восполни это. Получится сто шестнадцать и две трети дирхема равны пяти и двум третям вещи. Поэтому одна вещь равна двадцати и десяти семнадцатым дирхема. Это и есть завещанное. Знай это[178].

ГЛАВА ОБ ОТПУЩЕНИИ РАБОВ ПРИ БОЛЕЗНИ

Если человек, будучи больным, отпустил двух рабов и умер, оставив сына и дочь, а затем умер один из рабов, оставив имущество, большее, чем его цена, и дочь, возьми две трети его цены и то, что возвращает [в качестве выкупа] другой раб. Наследство хозяина делится между сыном и дочерью так, что сын получает как две дочери, если раб умирает перед хозяином. Если же раб умирает после хозяина, возьми две трети его цены и то, что возвращает другой раб, и раздели между сыном и дочерью так, что сын получает так, как две дочери. То же, что остается после, || 28 об. распределяется следующим образом: половина наследства раба — дочери раба, а половина по праву наследования — сыну хозяина, а его дочь не получает ничего. Таким же образом [поступают] и если человек освобождает своего раба, будучи смертельно больным, не имея никакого имущества, кроме этого, а затем раб умирает перед хозяином.

Если человек отпустил раба, будучи больным и не имея никакого имущества, кроме этого, раб возвращает [в качестве выкупа] две трети своей цены. Если хозяин уже взял две трети цены раба и истратил их, а затем хозяин умер, раб возвращает две трети того, что остается. Если же он взял всю цену раба и истратил ее, к рабу никакого требования, так как он заплатил всю свою цену.

Если человек отпустил раба, будучи смертельно больным, ценой в триста дирхемов и не имея никакого имущества, кроме этого, а затем умер раб, оставив триста дирхемов и дочь, *правило* [таково]: прими завещанное рабу за вещь. Он возвращает то, что остается от его цены, т. е. триста без вещи. В руках хозяина окажется выкуп, т. е. триста без вещи. Затем раб умирает и оставляет вещь и дочь. Она получает половину этого, т. е. половину вещи, а хозяин получает равное этому. Поэтому в руках наследников хозяина окажется триста без половины вещи. Это равно удвоенному завещанному, т. е. вещи. Это две вещи. Восполни триста половиной вещи и прибавь ее к двум вещам. Получится: триста равны двум с половиной вещам. Поэтому вещь есть две пятых этого, т. е. сто двадцать. Это и есть завещанное, а выкуп есть сто восемьдесят[179].

Если он отпустил раба, будучи больным, и цена его — триста дирхемов, а затем [раб] умер, оставив четыреста дирхемов и десять дирхемов долга и двух дочерей, и завещал одному человеку треть своего имущества, хозяин имел долг в двадцать дирхемов, *правило таково:* прими завещанное рабу из этого за вещь, его выкуп — то, что остается от его цены, т. е. триста без вещи. Раб умирает и оставляет четыреста дирхемов и из этого берется выкуп для хозяина, т. е. триста без вещи. В руках наследников раба остается сто дирхемов и вещь. Из этого платится долг, т. е. десять дирхемов. Остается девяносто дирхемов и вещь. Из этого завещается треть этого, т. е. тридцать и треть вещи. После этого у наследников раба остается шестьдесят дирхемов, и две трети вещи. Из этого две дочери получают две трети, т. е. сорок дирхемов и четыре девятых вещи, а хозяин — двадцать дирхемов и две девятых вещи. Поэтому в руках наследников хозяина окажется триста двадцать без семи девятых вещи. Из этого платится долг хозяина, т. е. двадцать дирхемов. Остается триста без семи девятых вещи. Это равно удвоенному завещанному || рабу, т. е. вещи. 29
Это две вещи. Восполни триста семью девятыми вещи и прибавь это к двум вещам. Останется: триста равны двум и семи девятым вещи. Поэтому вещь есть девять двадцать пятых [от трехсот], т. е. сто восемь. Это и есть то, что было [завещано] рабу[180].

Если он отпустил двух рабов, будучи больным, и не имел имущества, кроме этого, и цена каждого из них — триста дирхемов. Хозяин взял у одного из них две трети его цены и истратил их. Затем хозяин умер; ему принадлежит треть цены того, у которого отнято, а [все] имущество хозяина — сумма цены того, у которого не отнималось, и трети цены того, у которого отнято, равной ста дирхемам. Это — четыреста дирхемов. Треть этого разделена пополам между ними, это сто тридцать три с третью дирхема, а каждому из них приходится шестьдесят шесть и две трети дирхема. Тот, у которого отнято две трети его цены, платит тридцать три и треть дирхема, так как у него из ста шестьдесят шесть и две трети, а то, что останется от ста, есть завещанное. Другой [раб] платит двести тридцать три с третью дирхема[181].

Если он отпустил двух рабов, будучи больным, и цена одного из них — триста дирхемов, а цена другого — пятьсот дирхемов, и тот, цена которого — триста дирхемов, умер, оставив дочь, и хозяин [умер], оставив сына, причем раб оставил четыреста дирхемов, сколько выкупа отдал каждый из них? *Правило* [таково]:

если ты примешь завещанное рабу, цена которого триста дирхемов, за вещь, то его выкуп есть триста без вещи. Прими завещанное рабу, цена которого пятьсот дирхемов, за одну и две трети вещи, тогда его выкуп есть пятьсот дирхемов без одной и двух третей вещи, так как его цена равна одной и двум третям цены первого [раба], и если выкуп одного есть вещь, то выкуп другого есть одна и две трети вещи. Тот, цена которого триста дирхемов, умер и оставил четыреста дирхемов. Из этого заплачен его выкуп, т. е. триста без вещи. В руках его наследников остается сто дирхемов и вещь. Половина этого приходится его дочери, это пятьдесят дирхемов и половина вещи. У наследников хозяина остается пятьдесят дирхемов и половина вещи, прибавленные к тремстам без вещи. Получится триста пятьдесят без половины вещи. Они берут выкуп и от другого, это пятьсот дирхемов без одной и двух третей вещи. В их руках окажется восемьсот пятьдесят дирхемов без двух и одной шестой вещи. Это равно сумме двух завещанных, т. е. двум третям вещи. Восполни это. Получится: восемьсот пятьдесят дирхемов равны семи с половиной вещам. Сопоставь это. Получится: одна вещь равна || ста тринадцати 29 об. с третью дирхемам, это завещанное рабу, цена которого триста дирхемов. Завещанное другому рабу равно этому и двум третям этого, т. е. ста восьмидесяти восьми и восьми девятым дирхема, а его выкуп есть триста одиннадцать и одна девятая дирхема[182].

Если он отпустил двух рабов, будучи больным, и цена каждого из них триста дирхемов, затем умер один из них и оставил пятьсот дирхемов и дочь, а хозяин умер, оставив сына, *правило* [таково]: прими завещанное каждому из них за вещь, тогда выкуп каждого из них есть триста без вещи. Возьми наследство того, который умер, т. е. пятьсот дирхемов, и вычти его выкуп, т. е. триста без вещи. Останется от наследства двести и вещь. Хозяину возвращается в качестве наследства сто дирхемов и половина вещи. В руках наследников хозяина окажется четыреста дирхемов без половины вещи. Они берут от другого раба выкуп триста дирхемов без вещи. В их руках окажется семьсот дирхемов без полутора вещей. Это равно удвоенному завещанному, равному двум вещам, это четыре вещи. Восполни это полутора вещами. Получится: семьсот дирхемов равны пяти с половиной вещам. Сопоставь это. Получится: одна вещь есть сто двадцать семь и три одиннадцатых дирхема[183].

Если он отпустил раба, будучи больным, и цена его триста дирхемов, и хозяин взял у него двести дирхемов и истратил их, затем раб умер до смерти хозяина и оставил дочь и триста дирхемов, *правило* [таково]: возьми оставленное рабом, т. е. триста, и прибавь истраченное хозяином, т. е. пятьсот дирхемов. Вычти из этого выкуп, т. е. триста без вещи, так как завещанное равно вещи. Останется двести дирхемов и вещь. Из этого дочери приходится половина, т. е. сто дирхемов и половина вещи, а к наследникам хозяина возвратится в качестве наследства половина, т. е. сто дирхемов и половина вещи. В их руках из трехсот дирхемов без вещи сто дирхемов без вещи, так как двести истрачены. После отбрасывания истраченных двухсот в их руках остается двести дирхемов без половины вещи, это составляет удвоенное завещанное рабу. Половина этого, т. е. сто без четверти вещи, равна завещанному рабу, т. е. вещи. Восполни эту четверть вещи. Получится: сто дирхемов равны одной с четвертью вещи. Ведь есть четыре пятых этого, т. е. восемьдесят дирхемов, это — завещанное. 30 Выкуп есть двести || двадцать дирхемов. Сложи наследство раба, т. е. триста, и двести, истраченные хозяином. Это пятьсот дирхемов. Хозяин получает выкуп, т. е. двести двадцать, останется двести восемьдесят. Дочери приходится половина этого, т. е. сто сорок дирхемов. Вычти это из наследства раба, т. е. трехсот. В руках наследников останется сто шестьдесят дирхемов. Это — удвоенное завещанное рабу, т. е. вещь[184].

Если он отпустил раба, будучи больным, и цена его — триста дирхемов, и хозяин взял у него пятьсот дирхемов, затем раб умер до смерти хозяина и оставил тысячу дирхемов и дочь, а у хозяина остался долг в двести дирхемов, правило [таково]: возьми оставленное рабом, т. е. тысячу дирхемов, и пятьсот, которые истрачены хозяином. Из этого [вычти] выкуп, т. е. триста без вещи. Останется тысяча двести и вещь. Половина этого приходится дочери раба, это шестьсот дирхемов и половина вещи. Вычти это из оставленного рабом, т. е. тысячу дирхемов, останется четыреста дирхемов без половины вещи. Заплати из этого долг, т. е. двести дирхемов, останется: двести дирхемов без половины вещи равны удвоенному завещанному, которое равно вещи, т. е. это равно двум вещам. Восполни это половиной вещи. Получится: двести дирхемов равны двум с половиной вещам. Сопоставь это. Тогда вещь равна восьмидесяти дирхемам. Это завещанное. Сложи оставленное рабом и то, что взял у него хозяин, это тысяча пятьсот дирхемов. Вычти из этого выкуп, т. е. двести двадцать дирхемов. Останется тысяча двести восемьдесят дирхемов. Из этого дочери приходится половина, т. е. шестьсот сорок дирхемов. Вычти это из оставленного рабом, т. е. тысячи дирхемов, останется триста шестьдесят дирхемов. Заплати из этого долг хозяина, т. е. двести дирхемов. В руках наследников его останется сто шестьдесят дирхемов. Это и есть удвоенное завещанное[185].

Если он отпустил раба, будучи больным, и цена его пятьсот дирхемов, и взял у него шестьсот дирхемов и истратил их, и у хозяина долг в триста дирхемов, а затем раб умер, оставив мать и хозяина и тысячу семьсот пятьдесят дирхемов и двести дирхемов долга, *правило* [таково]: возьми наследство раба, т. е. тысячу семьсот пятьдесят дирхемов, и то, что взял хозяин, т. е. шестьсот дирхемов. Это две тысячи триста пятьдесят дирхемов. Заплати из этого долг, т. е. двести дирхемов, и заплати из этого выкуп, т. е. пятьсот дирхемов без вещи, так как завещанное есть

вещь. Останется тысяча шестьсот пятьдесят дирхемов и вещь. ‖ 30 об.
Треть этого приходится матери, это пятьсот пятьдесят и треть вещи. Заплати долг, т. е. двести дирхемов, из действительно оставленного рабом, т. е. тысячи семисот пятидесяти. Остается тысяча дирхемов без трети вещи. Затем заплати из этого долг хозяина, т. е. триста дирхемов. Останется семьсот дирхемов без трети вещи. Это составляет удвоенное завещанное рабу, которое равно вещи. Поэтому половина этого, т. е. триста пятьдесят без одной шестой вещи, равна вещи. Восполни эту одну шестую вещи. Получится: триста пятьдесят равны одной и одной шестой вещи. Поэтому вещь есть шесть седьмых от трехсот пятидесяти, т. е. триста дирхемов. Это завещанное. Возьми оставленное рабом и то, что истратил хозяин, это две тысячи триста пятьдесят дирхемов, и вычти из этого долг, т. е. двести дирхемов, затем вычти выкуп, т. е. цену раба без завещанного, равную двумстам дирхемам. Останется тысяча девятьсот пятьдесят дирхемов. Из этого матери приходится треть, т. е. шестьсот пятьдесят дирхемов. Отними это и долг, т. е. двести дирхемов, из действительно оставленного рабом, т. е. тысячи семисот пятидесяти дирхемов. Останется девятьсот дирхемов. Заплати из этого долг хозяина, т. е. триста. Останется шестьсот дирхемов. Это и есть удвоенное завещанное[186].

Если он отпустил раба, будучи больным, и цена его — триста дирхемов, а затем раб умер, оставив дочь и триста дирхемов, а затем умерла дочь и оставила мужа и триста дирхемов, а затем умер хозяин, *правило* [таково]: возьми оставленное рабом, т. е. триста дирхемов, и вычти выкуп, т. е. триста без вещи, останется вещь. Дочери приходится половина этого, а половина — хозяину. Прибавь долю дочери, т. е. половину вещи, к ее наследству, т. е. тремстам, получится триста дирхемов и половина вещи. Из этого ее мужу приходится половина, а половина возвращается хозяину. Это сто пятьдесят и четверть вещи. Всего в руках хозяина получится четыреста пятьдесят без четверти вещи. Это равно двум завещанным, а половина этого равна завещанному, поэтому двести двадцать пять дирхемов и одна восьмая вещи равны вещи. Восполни эту одну восьмую вещи и прибавь ее к вещи. Получится: двести двадцать пять дирхемов равны одной и одной восьмой вещи. Сопоставь это. Тогда одна вещь есть восемь девятых от двухсот двадцати пяти. Это двести дирхемов[187].

Если он отпустил раба, будучи больным, и цена его — триста дирхемов, а раб умер, оставив пятьсот дирхемов ‖ и дочь и завещав треть своего имущества, а затем умерла дочь, оставив мать и триста дирхемов и завещав треть своего имущества, *правило* [таково]: вычти из оставленного рабом его выкуп, т. е. триста дирхемов без вещи, останется двести дирхемов и вещь. Он завещал треть своего имущества, т. е. шестьдесят шесть и две трети дирхема и треть вещи. К хозяину возвращается в качестве наследства шестьдесят шесть и две трети дирхема и треть вещи, а до- 31 чери приходится равное этому. Прибавь это к тому, что она оставила, т. е. к тремстам дирхемам, получится триста шестьдесят шесть и две трети дирхема и треть вещи. Она завещала треть своего имущества, т. е. сто двадцать два и две девятых дирхема и одну девятую вещи. Останется двести сорок четыре и четыре девятых дирхема и две девятых вещи. Из этого матери приходится треть, т. е. восемьдесят один и четыре девятых, и треть одной девятой дирхема и две трети одной девятой вещи. То, что остается, возвращается хозяину, это сто шестьдесят два и восемь девятых и две трети одной девятой дирхема и одна с третью девятая вещи, как его доля в наследстве. В руках наследников хозяина окажется пятьсот двадцать девять и семнадцать двадцать седьмых дирхема без четырех с двумя третями от одной девятой вещи. Это равно удвоенному завещанному, которое равно вещи. Поэтому половина этого, т. е. двести шестьдесят четыре и двадцать два двадцать седьмых дирхема без семи двадцать седьмых вещи, равна вещи. [Восполни это семью] двадцать седьмыми и прибавь их к вещи. Получится: двести шестьдесят четыре и двадцать две двадцать седьмых дирхема равны одной и семи двадцать седьмым вещи. Сопоставь это, и чтобы получить одну вещь, вычти из этого семь тридцать четвертых этого. Поэтому одна вещь равна двумстам десяти и пяти семнадцатым. Это и есть завещанное[188].

Если он отпустил раба, будучи больным, и цена его — сто дирхемов и отдал одному человеку рабыню, цена которой — пятьсот дирхемов, а вознаграждение за сожительство с ней — сто дирхемов, и тот, кому она была отдана, жил с ней. *Абу Ханифа*[189] *сказал,* что отпущение более важно, поэтому займись им сначала. *Правило* [*таково*]: возьми цену рабыни, т. е., как сказано, пятьсот дирхемов, и цену раба, т. е. сто дирхемов. Прими завещанное 31 об. владельцем рабыни за вещь. || Отпущение раба, цена которого сто дирхемов, уже состоялось. Он завещал подарившему вещь. Прибавь вознаграждение за сожительство, т. е. сто дирхемов без одной пятой вещи. В руках наследников окажется шестьсот дирхемов без одной и одной пятой вещи. Это равно удвоенным ста дирхемам и вещи. Это равно завещанному обоих, т. е. тремстам без трех пятых вещи. Восполни триста тремя пятыми вещи и прибавь равное этому к вещи. Получится: триста дирхемов равны одной и трем пятым вещи и ста дирхемам. Вычти из трехсот сто за сто [на другой стороне]. Останется: двести дирхемов равны одной и трем пятым вещи. Сопоставь это для нахождения вещи, равной пяти восьмым этого. Найди пять восьмых от двухсот, это сто двадцать пять. Это — вещь, это и есть завещанное тем, кто отдал рабыню[190].

Если он отпустил раба, цена которого сто дирхемов, и отдал одному человеку рабыню, цена которой пятьсот дирхемов, а вознаграждение за сожительство с которой — сто дирхемов, и тот, кому она была отдана, жил с ней, и отдавший завещал еще одному человеку треть своего имущества, *правило этого, по словам Абу Ханифы, таково,* что от [первого] владельца рабыни не может быть взято больше трети и эта треть делится между ними пополам. *Правило* [таково]: возьми цену рабыни, т. е. пятьсот дирхемов. Из этого берется завещанное, т. е. вещь. В руках наследников из этого окажется пятьсот дирхемов без одной вещи. Вознаграждение за сожительство есть сто без одной пятой вещи. В их руках окажется шестьсот без одной и одной пятой вещи. Одному человеку завещана треть его имущества, что равно тому, что завещано владельцу рабыни, т. е. вещи. В руках наследников останется шестьсот без двух с половиной вещей. Это равно удвоенному завещанному обоих, т. е. цене раба и двум вещам, завещанным ими. Поэтому половина этого равна их наследствам, т. е. тремстам и одной и одной десятой вещи. Восполни это одной и одной десятой вещи. Получится: триста равны трем и одной десятой вещи и ста. Вычти сто из трехсот. Останется: двести равны трем и одной десятой вещи. Сопоставь это. Вещь есть десять тридцать первых дирхема, завещанное есть именно это от двухсот, это шестьдесят четыре и шестнадцать тридцать первых дирхема[191].

Если он отпустил рабыню, цена которой — сто дирхемов, и отдал одному человеку рабыню, цена которой пятьсот дирхемов, а вознаграждение за сожительство с которой — сто дирхемов, и тот, кому она была отдана, жил с ней, и отдавший завещал одному человеку четверть своего имущества. *Абу Ханифа* сказал, что от владельца рабыни не может быть взято больше трети, || 32 а от владельца четверти берется четверть. *Правило* [таково]: цена рабыни — пятьсот дирхемов. Из этого берется завещанное, т. е. вещь. Останется пятьсот дирхемов без одной вещи. Вознаграждение за сожительство — сто дирхемов без одной пятой вещи. В руках наследников получится шестьсот дирхемов без одной и одной пятой вещи. Затем вычти завещанные владельцу четверти три четверти вещи, так как если треть есть вещь, то четверть есть три четверти [вещи]. Останется шестьсот дирхемов без одной и тридцати восьми сороковых вещи. Это равно двум завещанным и половина этого, равная завещанному, есть триста дирхемов без тридцати девяти сороковых вещи. Восполни их этими сороковыми. Получится: триста дирхемов равны ста дирхемам и двум и двадцати девяти сороковым вещи. Вычти сто из трехсот. Останется: двести дирхемов равны шестидесяти и двадцати девяти сороковым вещи. Сопоставь их. Получится: вещь равна семидесяти трем и сорока трем ста девятых дирхема[192].

ГЛАВА О ВОЗНАГРАЖДЕНИИ ЗА СОЖИТЕЛЬСТВО ПРИ КРУГООБОРОТАХ

Человек отдал одному человеку рабыню, будучи смертельно больным, и не имел имущества, кроме нее. Затем он умер. Ее цена — триста дирхемов, а вознаграждение за сожительство с ней — сто дирхемов; человек, которому ее отдали, жил с ней. *Правило* [таково]: прими завещанное человеку, которому отдана рабыня, за вещь. Вычти это из отданного, [получится] триста без вещи. Возврати наследникам отдавшего треть разности в качестве вознаграждения за сожительство, так как вознаграждение за сожительство есть треть цены. Это сто дирхемов без трети вещи. В руках наследников отдавшего будет четыреста без одной и одной трети вещи. Это равно двум завещанным, равным вещам, т. е. это есть две вещи. Восполни четыреста одной и одной третью вещи и прибавь это к двум вещам. Получится: четыреста равны трем и одной трети вещи. Отсюда вещь есть три десятых этого, т. е. двадцать дирхемов. Это и есть завещанное[193].

Если, как сказано, он отдал ее, будучи больным, ее цена — триста, вознаграждение за сожительство с ней — сто, и отдавший ее жил с ней, а затем умер, *правило* [таково]: прими завещанное за вещь. Остаток есть триста без вещи. Так как отдавший жил с ней, вознаграждение за сожительство необходимо принадлежит ему. Оно есть треть завещанного, так как вознаграждение за сожительство есть треть цены, т. е. треть вещи. В руках наследников отдавшего окажется триста без одной и одной трети вещи. Это равно удвоенному завещанному, равному вещи, т. е. это две вещи. Восполни это одной и одной третью вещи и прибавь это
32 к двум вещам. Получится: триста || равны трем с третью вещи.
об. Одна вещь есть три десятых этого, т. е. девяносто дирхемов. Это и есть завещанное[194].

Если задача та же самая, но живут с ней и отдавший, и тот, кому она отдана, *правило* [таково]: прими завещанное за вещь. Остаток есть триста без вещи. Отдавший должен дать тому, кому она отдана, так как он с ней живет, в качестве вознаграждения за сожительство треть вещи, а тот, кому подарили, должен отдать ему [в качестве вознаграждения за сожительство] треть разности, т. е. сто без трети вещи. Поэтому в руках наследников отдавшего окажется четыреста без одной и двух третей вещи. Это равно удвоенному завещанному. Восполни четыреста одной и двумя третями вещи и прибавь их к двум вещам. Получится: четыреста равны трем и двум третям вещи. Отсюда вещь есть три одиннадцатых от четырехсот, т. е. сто девять и одна одиннадцатая дирхема. Это завещанное. Остаток есть сто девяносто и десять одиннадцатых дирхема. *Абу Ханифа* сказал: ты принимаешь за вещь завещанное, но то, что при этом получается как вознаграждение за сожительство, также есть завещанное[195].

Если задача та же самая, причем отдавший жил с ней и завещал треть своего имущества, то, как сказал Абу Ханифа, треть делится между ними пополам. *Правило* [таково]: прими завещанное тем, кому отдана рабыня, за вещь. Останется триста без вещи. Затем прибавь вознаграждение за сожительство, т. е. треть вещи. Получится триста без вещи и трети вещи. Поэтому завещанное, по словам Абу Ханифы, есть одна и одна треть вещи, а по словам другого, вещь. Так, кому завещана треть, получает равное первому завещанному, т. е. одну и одну треть вещи. В его руках остается: триста без двух и двух третей вещи равны удвоенным двум завещанным, равным двум и двум третям вещи. Половина этого равна двум завещанным, это сто пятьдесят без одной и одной трети вещи. Восполни это одной и одной третью вещи и прибавь это к двум завещанным. Получится: сто пятьдесят равно четырем вещам. Поэтому вещь есть четверть этого, т. е. тридцать семь с половиной[196].

Если, как сказано, живут с ней и отдавший и тот, кому она отдана, и отдавший завещал треть своего имущества, *тогда правило,* по словам Абу Ханифы, [таково]: прими завещанное за вещь. Остается триста без вещи. Возьми за вознаграждение за сожительство сто без трети вещи. В руках его получится четыреста дирхемов и одна и одна треть вещи. Прибавь вознаграждение за сожительство, т. е. треть вещи. Тот, кому завещана одна треть, получает равное первому завещанному, т. е. одну и одну треть вещи. Остается: четыреста дирхемов без трех вещей равны удвоенным двум завещанным, || равным двум и двум третям ве- 33 щи. Восполни это тремя вещами. Получится: четыреста равны восьми и одной трети вещи. Сопоставь это. Получится: одна вещь равна сорока восьми дирхемам[197].

Если сказано: человек отдал [другому] человеку рабыню, будучи больным, ее цена — триста дирхемов, вознаграждение за сожительство с ней — сто дирхемов. Тот, кому она отдана, жил с ней. Затем тот, кому она отдана, будучи больным, отдал ее снова тому, кто отдал ее ему, и отдавший [первый раз] также жил с ней, то сколько получает каждый из них и сколько остается? *Правило* [таково]: возьми ее цену, т. е. триста дирхемов, завещанное, [которое берется] из этого, есть вещь. В руках наследников отдавшего остается триста без вещи, а в руках того, кому она отдана, окажется вещь. Тот, кому она отдана, отдает отдавшему ее некоторую часть вещи и в его руках остается вещь без некоторой части вещи. Он возвращает отдавшему сто без трети вещи и берет вознаграждение за сожительство — треть вещи без трети некоторой части вещи. В руках его окажется одна с третью вещь без ста дирхемов и без одной с третью некоторой части вещи. Это равно удвоенной некоторой части вещи, а половина этого равна некоторой части вещи, это пять шестых вещи без пятидесяти дирхемов и без двух третей некоторой части вещи. Восполни это двумя третями некоторой части вещи и пятидесятью дирхемами. Получится: пять шестых вещи равны одной и двум третям некоторой части вещи и пятидесяти дирхемам. Приведи это к некоторой части вещи для ее определения, т. е. возьми три пятых этого. Поэтому некоторая часть вещи и тридцать дирхемов равны половине вещи. Поэтому половина вещи без тридцати равна некоторой части вещи, завещаемой тем, кому отдана

рабыня, отдавшему ее. Знай это. Затем возвратись к тому, что оставалось в руках отдавшего, т. е. тремстам без вещи. К этому прибавляется некоторая часть вещи, т. е. половина вещи без тридцати дирхемов. В его руках окажется двести семьдесят без половины вещи. Он берет вознаграждение за сожительство, т. е. сто дирхемов без трети вещи, и возвращает вознаграждение за сожительство, т. е. треть того, что остается от вещи после возвращения из этого некоторой части вещи, это одна шестая вещи и десять дирхемов. В его руках окажется триста шестьдесят без вещи. Это равно удвоенным вещи и возвращенному вознаграждению за сожительство. Половина этого есть сто восемьдесят без половины вещи, это равно вещи и вознаграждению за сожительство. Восполни это половиной вещи и прибавь ее к вещи и вознаграждению за сожительство, равному одной шестой вещи с десятью дирхемами. Вычти десять за десять. Останется: сто семьдесят дирхемов равны одной и двум третям вещи. Приведи это [к одной вещи] для определения вещи, т. е. возьми три пятых
33 этого. Получится: сто два равны || вещи, являющейся завещанным
об. отдавшего рабыню, тому, кому она отдана. Завещанное того, кому отдана рабыня, отдавшему ее, есть половина этого без тридцати дирхемов, т. е. двадцать один. Аллах знает лучше[198].

ГЛАВА ОБ ОТДАЧЕ В ЗАЛОГ ВО ВРЕМЯ БОЛЕЗНИ

Если человек отдает, будучи больным, тридцать дирхемов в залог за продовольствие, стоящее десять дирхемов, а затем умирает от этой болезни, и если наследникам умершего возвращается заложенное, а они возвращают десять дирхемов, то *правило* [таково]: если возвращается залог ценой десять дирхемов и у наследников остается двадцать дирхемов, то завещанное, [которое берется] из оставшегося, есть вещь. В руках наследников окажется двадцать без вещи и залог. Все это вместе есть тридцать дирхемов без вещи и равно двум вещам, т. е. удвоенному завещанному. Восполни тридцать вещью и прибавь это к двум вещам. Получится: тридцать равны трем вещам. Отсюда вещь есть треть этого, т. е. десять дирхемов, это и есть часть, [получаемая] из оставленного[199].

Если он отдает некоторому человеку, будучи больным, двадцать дирхемов в залог за то, что стоит пятьдесят дирхемов, затем он, все еще будучи больным, отказывается, а затем умирает, и возвращаются четыре девятых залога, [так что остается] одиннадцать и одна девятая дирхема, *правило* [таково]: ты знаешь, что цена залога равна двум с половиной ценам отданного, поэтому он возвращает из капитала только равное двум с половиной этого. Прими то, что возвращается из залога, за две с половиной вещи и прибавь это к тому, что остается от двадцати, т. е. двадцати без вещи. Поэтому в руках наследников умершего окажется двадцать дирхемов и полторы вещи. Завещанное равно

половине этого, это десять дирхемов и три четверти вещи. Это
треть имущества, т. е. шестнадцать и две трети дирхема. Вычти
десять из шестнадцати. Останется: шесть и две трети дирхема
равны трем четвертям вещи. Восполни вещь, т. е. прибавь к этому
треть этого и прибавь к шести и двум третям [дирхема] треть
их, т. е. два и две девятых дирхема. Получится: восемь и восемь
девятых дирхема равны вещи. Посмотрим теперь, сколько составляют
восемь и восемь девятых дирхема от капитала, т. е.
двадцати дирхемов. Ты найдешь, что это — четыре девятых его.
Возврати четыре девятых залога и пять девятых от двадцати.
Цена четырех девятых залога есть двадцать два и две девятых
дирхема, а пять девятых от двадцати есть одиннадцать и одна
девятая дирхема. Поэтому в руках наследников окажется тридцать
три с третью дирхема, т. е. две трети от пятидесяти || дирхемов. 34
Аллах знает лучше[200].

Книга кончается во славу Аллаха и при его помощи и поддержке.

Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

I. ЗИДЖ АЛ-ХОРЕЗМИ В ОБРАБОТКЕ МАСЛАМЫ АЛ-МАДЖРИТИ

(отрывок)

ГЛАВА 6

О подразделении кругов[1]

Следует предпослать [дальнейшему] с надлежащим вниманием [главу] о кругах планет. Круг, который арабы называют фелек[2], подразделяется на XII знаков [Зодиака][3], знак [Зодиака] — на XXX градусов[4], некоторые называют их частями[5], градус — на LX минут[6], минута — на LX секунд[7], секунда — на IX терций[8], и таким образом величина [делений] круга уменьшается сколько угодно, хотя бы до бесконечности[9]. Хотя эти части, если исходить из ощущений, кажутся мелкими, на самом деле, если следовать логическому рассуждению, они не так уж незначительны, иначе нам непременно пришлось бы прийти к выводу, что какие-то части этих частей являются неделимыми[10].

ГЛАВА 23

Нахождение синуса по дуге и обратно

Здесь следует знать, что синус[11] бывает плоский и обращенный[12]. Плоский синус любого места находится таким образом: с имеющимся значением[13] [дуги] войдем в столбец синусов[14] и установим, что соответствует ему. Если значение [дуги] сопровождается минутами, то следует войти [в столбец синусов] второй раз, увеличив градусы значения на один градус. Если представить себе, как относится второй синус к первому, будет ясно, сколько из него приходится на эти минуты. Поэтому, если второй синус больше первого, нужно прибавить к первому столько, сколько приходится на эти минуты, а если он меньше, то нужно это же отнять от первого [синуса][15]. Таким образом искомый синус будет найден.

Если же ты захочешь найти обращенный синус и если значение, с которым входят [в столбец синусов], меньше девяноста градусов, то это значение нужно отнять от девяноста, далее нужно найти [плоский] синус остатка и отнять этот синус от шестидесяти[16]. То, что останется, и есть то, что ты ищешь. Если же первое значение будет больше девяноста градусов, самим девяноста [градусам] дается соответствующий им плоский синус, а остатку — относящийся к нему, а затем этот относящийся [синус] нужно прибавить к шестидесяти, все это вместе и есть то, что называется обращенным синусом[17].

Подобным образом можно и обратно перейти от синуса к дуге, как это указано в следующей таблице[18].

Всякий, кто стремится познать астрономическую науку, изучит это изложение со всем вниманием. В нем устанавливается правило, как складывать и вычитать [результаты] исследования и как вводить значения [в столбец синусов] и находить места[19]. Если же кто-нибудь спросит, каким образом таким-то значениям приписываются такие-то синусы и наоборот, пусть знает, что по поводу причины этого правила следует обратиться к «Алмагесту» Птолемея[20].

ГЛАВА 28

Каким образом по высоте Солнца[21] определяется плоская тень[22] любого тела[23]

С высотой, т. е. дневной высотой Солнца, следует войти в [столбец] синусов, затем отнять высоту от *XC* и с тем, что останется, снова войти в [столбец] синусов. Этот второй синус умножается на двенадцать, и произведение делится на первый синус[24]. Если же там имеются минуты, то они умножаются на шестьдесят, и произведение снова делится, как выше. Мы утверждаем, что число частного равно числу дюймов[25] тела, содержащихся в тени, если считать, что всякое тело разделено на XII дюймов.

Каким образом по тени определяется высота Солнца

Если ты будешь определять высоту по тени, то тень умножается на себя, затем к произведению прибавляется CXLIIII и находится корень[26] суммы, т. е. сторона квадрата. Этот корень — диаметр этой тени[27]. Далее тень умножается на LX, и произведение делится на упомянутый диаметр. [По частному] находится дуга. Далее найденная дуга отнимается от *XC*. Остаток указывает искомую высоту.

Каким образом по высоте Солнца определяется обращенная тень[28]

С той же высотой [входят] в тот же столбец синусов, далее отнимают [высоту] от *XC* и с остатком снова входят в [столбец] синусов. Затем [первый синус] умножается на двенадцать и произведение делится [на] второй синус. Если имеются минуты, то они умножаются на шестьдесят, а произведение делится, как указано выше. Тогда, в частности, мы получим дюймы и минуты, указывающие обращенную тень[29].

Таким образом, вхождение в приведенную ниже таблицу теней таково: по каждой высоте Солнца, введенной в эту таблицу, соответствующее ей указывает ее тень.

Таблица синусов[30]

Столбцы чисел								Синусы		
знаки Зодиака	градусы	знаки Зодиака	градусы	знаки Зодиака	градусы	знаки Зодиака	градусы	части	минуты	секунды
0	1	5	29	6	1	11	29	1	2	50
0	2	5	28	6	2	11	28	2	5	38
0	3	5	27	6	3	11	27	3	8	24
0	4	5	26	6	4	11	26	4	11	7
0	5	5	25	6	5	11	25	5	13	46
0	6	5	24	6	6	11	24	6	16	18
0	7	5	23	6	7	11	23	7	18	43
0	8	5	22	6	8	11	22	8	21	2
0	9	5	21	6	9	11	21	9	23	9
0	10	5	20	6	10	11	20	10	25	8
0	11	5	19	6	11	11	19	11	26	54
0	12	5	18	6	12	11	18	12	28	29
0	13	5	17	9	13	11	17	13	29	49
0	14	5	16	6	14	11	16	14	30	55
0	15	5	15	6	15	11	15	15	31	45
0	16	5	14	6	16	11	14	16	32	17
0	17	5	13	6	17	11	13	17	32	32
0	18	5	12	6	18	11	12	18	32	27
0	19	5	11	6	19	11	11	19	32	2
0	20	5	10	6	20	11	10	20	31	16
0	21	5	9	6	21	11	9	21	30	7
0	22	5	8	6	22	11	8	22	28	35
0	23	5	7	6	23	11	7	23	26	38
0	24	5	6	6	24	11	6	24	24	15
0	25	5	5	6	25	11	5	25	21	25
0	26	5	4	6	26	11	4	26	18	7
0	27	5	3	6	27	11	3	27	14	22
0	28	5	2	6	28	11	2	28	10	6
0	29	5	1	6	29	11	1	29	5	19
1	0	5	0	7	0	11	0	30	0	0
1	1	4	29	7	1	10	29	30	54	8
1	2	4	28	7	2	10	28	31	47	43
1	3	4	27	7	3	10	27	32	40	41
1	4	4	26	7	4	10	26	33	33	6
1	5	4	25	7	5	10	25	34	24	53
1	6	4	24	7	6	10	24	35	16	2

Столбцы чисел								Синусы		
знаки Зодиака	градусы	знаки Зодиака	градусы	знаки Зодиака	градусы	знаки Зодиака	градусы	части	минуты	секунды
1	7	4	23	7	7	10	23	36	6	32
1	8	4	22	7	8	10	22	36	56	23
1	9	4	21	7	9	10	21	37	45	33
1	10	4	20	7	10	10	20	38	34	2
1	11	4	19	7	11	10	19	39	21	49
1	12	4	18	7	12	10	18	40	8	52
1	13	4	17	7	13	10	17	40	55	12
1	14	4	16	7	14	10	16	41	40	46
1	15	4	15	7	15	10	15	42	25	35
1	16	4	14	7	16	10	14	43	9	37
1	17	4	13	7	17	10	13	43	52	52
1	18	4	12	7	18	10	12	44	35	19
1	19	4	11	7	19	10	11	45	16	58
1	20	4	10	7	20	10	10	45	57	46
1	21	4	9	7	21	10	9	46	37	43
1	22	4	8	7	22	10	8	47	16	50
1	23	4	7	7	23	10	7	47	55	5
1	24	4	6	7	24	10	6	48	32	28
1	25	4	5	7	25	10	5	49	8	57
1	26	4	4	7	26	10	4	49	44	32
1	27	4	3	7	27	10	3	50	19	13
1	28	4	2	7	28	10	2	50	52	53
1	29	4	1	7	29	10	1	51	25	48
2	0	4	0	8	0	10	0	51	57	41
2	1	3	29	8	1	9	29	52	28	38
2	2	3	28	8	2	9	28	52	58	37
2	3	3	27	8	3	9	27	53	27	37
2	4	3	26	8	4	9	26	53	55	40
2	5	3	25	8	5	9	25	54	22	42
2	6	3	24	8	6	9	24	54	48	46
2	7	3	23	8	7	9	23	55	13	49
2	8	3	22	8	8	9	22	55	37	52
2	9	3	21	8	9	9	21	56	0	53
2	10	3	20	8	10	9	20	56	22	54
2	11	3	19	8	11	9	19	56	43	52
2	12	3	18	8	12	9	18	57	3	48
2	13	3	17	8	13	9	17	57	22	42
2	14	3	16	8	14	9	16	57	40	32
2	15	3	15	8	15	9	15	57	57	20
2	16	3	14	8	16	9	14	58	13	4
2	17	3	13	8	17	9	13	58	27	44
2	18	3	12	8	18	9	12	58	41	20
2	19	3	11	8	19	9	11	58	53	51
2	20	3	10	8	20	9	10	59	5	18
2	21	3	9	8	21	9	9	59	15	41
2	22	3	8	8	22	9	8	59	24	58
2	23	3	7	8	23	9	7	59	33	11
2	24	3	6	8	24	9	6	59	40	16
2	25	3	5	8	25	9	5	59	46	19
2	26	3	4	8	26	9	4	59	51	14
2	27	3	3	8	27	9	3	55	55	4
2	28	3	2	8	28	9	2	59	57	49
2	29	3	1	8	29	9	1	59	59	27
3	0	3	0	9	0	9	0	60	0	0

Таблица теней[31]

Число, т.е. высота	Тень		Число, т. е. высота	Тень		Число, т. е. высота	Тень	
	дюймы	минуты		дюймы	минуты		дюймы	минуты
1	687	29	10	68	3	19	34	51
2	343	38	11	61	44	20	32	58
3	228	58	12	56	27	21	31	15
4	171	36	13	51	58	22	29	42
5	137	10	14	48	9	23	28	16
6	114	10	15	44	47	24	26	57
7	97	44	16	41	51	25	25	44
8	85	22	17	39	15	26	24	36
9	75	45	18	36	55	27	23	33
28	22	34	49	10	25	70	4	22
29	21	39	50	10	4	71	4	9
30	20	47	51	9	43	72	3	54
31	19	58	52	9	42	73	3	40
32	19	13	53	9	2	74	3	26
33	18	29	54	8	44	75	3	13
34	17	47	55	8	24	76	2	59
35	17	8	56	8	5	77	2	46
36	16	30	57	7	47	78	2	32
37	15	55	58	7	29	79	2	19
38	15	21	59	7	13	80	2	6
39	14	49	60	6	55	81	1	54
40	14	18	61	6	39	82	1	41
41	13	48	62	6	24	83	1	28
42	13	20	63	6	7	84	1	15
43	12	52	64	5	51	85	1	2
44	12	25	65	5	36	86	0	50
45	12	0	66	5	21	87	0	37
46	11	35	67	5	6	88	0	25
47	11	11	68	4	51	89	0	12
48	10	48	69	4	36	90	0	0

II. КОММЕНТАРИЙ ИБН АЛ-МУСАННЫ К ЗИДЖУ АЛ-ХОРЕЗМИ (отрывки)[32]

Эта книга Ахмада ибн ал-Мусанны ‘Абд ал-Карима[33], написанная для его брата Мухаммада ибн ‘Али ибн Исма‘ила[34], была составлена, чтобы объяснить таблицы ал-Хорезми.

Ты упомянул, пусть Бог пошлет тебе успех, о некоторых противоречиях, которые ты заметил в таблицах, и о том, что авторы этих таблиц не добавили доказательства или обсуждения правил, которым они учат нас следовать, и не известили нас, почему они учат нас поступать таким образом, как они это делают. Они оставили эти вопросы нам и представили их как нечто, переданное по традиции, без какого-либо довода. И поскольку трактаты составлены таким способом, они ведут к неправильному пониманию из-за краткости, которая требовалась. Придирчивый читатель сказал бы, что автор слышал какие-то утверждения, которых он не понял. Другой читатель, который пытается извинить краткость автора, сказал бы, что автор относился с большим уважением к почтенной науке астрономии и не хотел раскрывать ее явно. Действительно, мы уже видели, что некоторые ученые вне этой ветви науки, в чьих познаниях сомнений нет, шли подобным путем. Например, ал-Ахфаш составил трактат об искусстве грамматики, озаглавленный «Среднее» (ал-Авсат), который был настолько краток, что преподаватели грамматики объявили, что книга не годится ни для преподавателей, ни для учащихся.

Далее ты упомянул, пусть Бог пошлет тебе успех, свое открытие относительно того, что ал-Хорезми принадлежал к тем, для кого обычны краткость и кто не давал объяснения в своей трактовке большинства вопросов. Ты упомянул, пусть вознаградит тебя Творец, что нашел книгу, приписываемую ал-Фаргани[35], которая касается таблиц ал-Хорезми, не отличающуюся полнотой и недостаточную для желанной тебе цели: и что ты нашел, что он объясняет вещи, которые ясны, хорошо известны и легки, но избегает обсуждать трудные и непонятные вопросы.

Так как ты просил разъяснить тебе доводы, я сделаю так, чтобы ничто не оказалось потерянным. Я открыл тебе смысл всего того, о чем ты спрашиваешь. Это будет угодно тебе и поможет твоему пониманию, и таким же образом оно будет угодно всем людям науки и геометрии, если Бог меня поддержит. Ты упомянул, пусть поможет тебе Творец, что ты нашел объяснения в трактате ал-Фаргани лишенными полноты: я также читал его и нашел их такими же. Но при чтении других книг ал-Фаргани мне стало ясно, что он был знающим ученым, так что мне пришло в голову, что он занимался написанием своего комментария, когда смерть оторвала его от завершения книги. Однако кто-то скопировал его заметки и решил, что они представляют собой полный комментарий. Вторая возможность состоит в том, что ал-Фаргани закончил свой комментарий перед кончиной, но что часть его потерялась при передаче текста, и третья — в том, что некто скупой намеренно уничтожил отрывки из его комментария. Но Бог запрещает нам сомневаться в его мудрости, ибо, действительно, никто не может понять этих вопросов, если у него нет понимания геометрии.

Сейчас я предлагаю тебе мои комментарии к избранным темам, представленные в форме вопросов и ответов, для того чтобы облегчить твое понимание этих таблиц и чтобы помочь тебе познать и сохранить это учение. Я надеюсь, с помощью Создателя, что эта книга удовлетворит твоему требованию.

Вопрос [35]. Что представляют собой две таблицы, которые он предлагает для подразделений синуса и склонения, и что означают эти термины? Почему он учит нас также, каким образом выводить синус, как если бы этих двух таблиц было недостаточно?

Ответ. Мы уже дали объяснение синусу и склонению согласно методу Птолемея. Я считаю, что в геометрических доказательствах диаметр круга[36] есть 120, как в нашей книге, [адресованной] Мухаммаду ибн ‘Аббасу, вычислителю. Мы установили синус и склонение согласно методу индийцев. Эти две таблицы в действительности представляют собой шесть таблиц из-за шести подразделений соответственно максимуму синуса. Они относятся к шести делениям круга[37]. Ты уже знаешь, что такое деление, и почему он располагает наибольший синус против шестого деления. Ты знаешь, что синус — это перпендикуляр к диаметру, который проходит из угла, синус которого ты хочешь знать. Перпендикуляр пересекает диаметр под прямым углом. Длина перпендикуляра от окружности круга до диаметра меньше, чем его длина от точек, делящих круг на четыре части. Так как перпендикуляры из точек, делящих круг на четыре части, падают в центр круга, то это самые удаленные точки круга. Мы объяснили, что каждый круг подразделяется на 360 частей, так что четверть круга есть 90. Ал-Хорезми применяет интервалы в 15°, как он поступал с уравнением Солнца. Наибольший синус находится против шестого деления, потому что там синус достигает своего максимума.

Начертим чертеж этого[38]. Проведем (рис. 19) круг *ABGD* с центром *E* и проведем диаметр *DB* через центр круга. Диаметр круга делит его на две равные половины. Мы уже объяснили, что круги подразделяются на 360°, так что диаметр делит круг на две равные дуги по 180°. Разделим также дугу *DB* на две части в точке *A*, так что и дуга *DA*, и *AB* равняется 90° или четверти круга. Если мы хотим узнать синус дуги *DA*, то опустим перпендикуляр из *A* на диаметр *DB*, т. е. перпендикуляр *AE*. Эта дуга есть 90°, и никакой перпендикуляр к диаметру *DB* не длиннее, чем перпендикуляр *AE*, который является наибольшим синусом, синусом 90°. Так как *E* есть центр круга, то *AE* равен *EB*, каждый из которых есть радиус круга. Так как диаметр *DB* есть хорда дуги *DB*, то синус 90° есть половина хорды 180°, и таким же образом синус какого-либо угла равен половине хорды двойного угла. Если мы хотим узнать синус 30, разделим дугу *AD* на три части, так что каждая дуга есть 30°, а именно, дуги *DZ*, *ZH*, *HA*. Затем опустим перпендикуляр *ZK* из *Z*, так что *ZK* есть синус 30°. Если мы хотим знать синус 60, то опустим перпендикуляр *HT* из точки *H*, и *HT* есть синус 60°.

Мы хотим узнать величину синусов и их отношение к диаметру, и мы выведем остальные синусы из синусов шести делений. Мы объяснили, что синус какой-либо дуги равен половине хорды двойного угла, и мы хотим знать величину синуса 30°, а именно, линию *ZK*. Продолжим перпендикуляр *ZK* до точки *L* на дуге *GD*. Так как линии *AE* и *ZK* перпендикулярны к линии *DB*, то они параллельны. Отрезок дуги *DG*, который был отделен при продолжении *ZK*, равен дуге *DZ*, и он назван *DL*, или 30°. Линия *ZL* — это хорда 60, а линия *ZK* равна линии *KL*. Следовательно, обе они являются половинами хорды 60°, а это то, что мы хотели разъяснить.

После того как мы дали доказательства, объясним теперь, как можно найти величины этих линий, почему они [индийцы] принимали полный синус за 150 минут и почему не пользовались всей величиной диаметра. Я говорю, что между дугами и хордами нет совсем никакого отношения. Величина, взятая в качестве диаметра, не имеет значения для вычислителей. Индийцы считали диаметр состоящим из 300 частей, тогда как другие, следуя Птолемею, рассматривают диаметр состоящим из 120 частей; еще иные могут видеть в нем как больше, так и меньше, чем эта величина. Это не влияет на синус, потому что хорды выводятся из диаметра и имеют свое отношение к нему. При вычислении синусов данных дуг величина диаметра не имеет значения, так как хорды выведены из диаметра и находятся к нему в определенном отношении. При переходе от синусов обратно к дугам также не играет роли, какая величина была взята в качестве диаметра, и индийцы решили рассматривать диаметр как 300 частей. Этот диаметр можно разделить на части круга, так что для них легче вывести отношения, из которых большинство являются точными. Люди же Запада и Птолемей рассматривали диаметр как 120 частей, а это число делится на части круга.

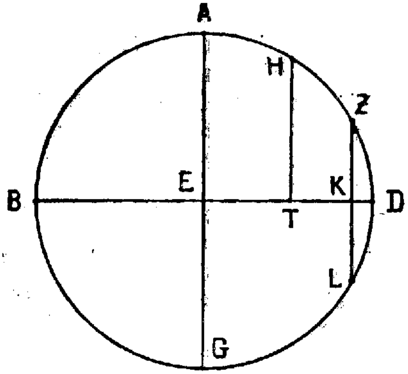


Рис. 19.

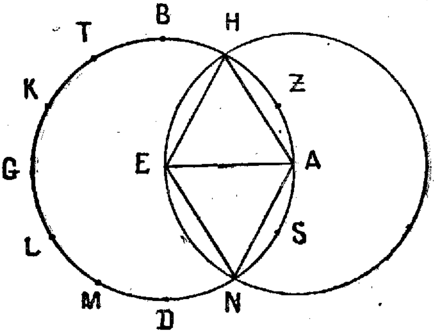


Рис. 20.

Мы уже упомянули в нашем трактате, что радиус каждого круга равен хорде шестой части его окружности. Мы объяснили это с помощью доказательства в нашей книге, [адресованной] Мухаммаду ибн ʻАббасу. Далее мы говорим, чтобы обосновать то, что мы сказали, а именно, что если два равных круга расположены так, что расстояние между их центрами равно их радиусу, то отсекаемая дуга равна третьей части окружности. Чтобы доказать это, мы рассматриваем линию *AE* как общий радиус. Построим круг около *E* радиусом *AE*, а именно, *ABGD* (рис. 20). Разделим [окружность] круга на двенадцать равных частей — *AZ, ZH, HB, BT, TK, KG, GL, LM, MD, DN, NS, SA*. Затем рассмотрим точку *A* как центр и опишем круг опять радиусом *EA*, а именно, круг *HEN*. Ал-Хорезми объяснил[39], что сумма дуг *HE* и *EN* равна дуге *NAH*, так как расстояние между их центрами есть одна и та же линия, и должно быть так, что оба круга отсекают равные дуги на другом, а именно, дугу *NAH*, которая является одной третью круга *ABGD*, и дугу *HEN*, которая является одной третью ее круга. Я утверждаю, таким образом, что радиус каждой из них равен хорде одной шестой его окружности. Чтобы доказать это, проведем линии *EH, EN, NA, AH*. Линии *AH* и *AN* равны линиям *EN* и *EH*, так как все они равны *EA*. Поскольку все они равны общему радиусу двух кругов, они равны одна другой. Каждая из этих линий отсекает две части круга, а две части круга равны одной шестой круга; итак, хорда одной шестой круга равна его радиусу.

Ясно, что синус какого-либо угла равен половине хорды его удвоенного угла. Синус 30° есть четверть диаметра круга, поскольку это — половина хорды 60°. Известно также, что полный синус является половиной диаметра. Синус 30° известен, а именно, [он равен] четверти диаметра. Мы хотим узнать дополнение синусов для конечных точек отрезков. Мы уже знаем, что во всяком прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого катета. Построим круг *ABGD* и проведем два диаметра, которые пересекаются в точке *E* (рис. 21). Разделим дугу *AD* на три равные части так, что каждая из них есть 30°; [пусть это] — дуги *DZ, ZH, HA*. Проведем линии *EZ, ZT, ZK* так, чтобы получить прямоугольник *TK*. В этом прямоугольнике имеется два прямоугольных треугольника *ZEK* и *ZKE* с прямыми углами при *T* и *K*, и их гипотенуза — линия *EZ*, которая является радиусом круга. Катет *ZK* есть синус 60°, как было разъяснено, и он равен катету *TE*. Катет *ZT* есть четверть диаметра, который является синусом 30°, и он равен *EK*.

Если мы хотим узнать величину линии *ZK*, которая является синусом 60°, умножим синус 30° на себя и отнимем это от произведения радиуса на себя. Возьмем квадратный корень из разности и результат — это линия *ET*, синус 60°. Отнимем четверть диаметра, что является синусом 30°, или синусом Овна, а именно, линию *EL* от линии *ET* и останется синус Тельца, а именно, линия *LT*. Расположим эти синусы в таблице соответственно против Овна и Тельца. Затем отнимем синус 60° от радиуса, так что остаток есть синус Близнецов, а именно, дуга *TD*, и поместим его рядом с Близнецами. Таким образом, мы получили три синуса, и вот их таблица*. Так как ты хочешь узнать синусы шести подразделений, т. е. когда каждый зодиакальный знак разделен

---

* В рукописи таблицы нет.

на две части, мы, следуя индийскому методу, построим чертеж и проведем *DZ,* хорду 30, а ее половина есть синус 15° (рис. 22). Мы хотим найти линию *DZ,* которая является хордой 30°, так что мы можем взять ее половину и поместить ее против первого деления. Линия *ZD* есть хорда прямого угла *T.* Умножим *DT,* являющуюся синусом Близнецов, на себя и сложим это с произведением синуса Овна на себя. Затем извлечем квадратный корень из суммы, [и получим] линию *DZ,* т. е. хорду 30°. Возьмем ее половину, которая является синусом 15°, и поместим ее против первого из шести делений. Поместим это в таблицу и вычтем его из синуса Овна, так что остаток соответствует второму делению Овна, и поместим его вслед за ним. И вот вид таблицы*.

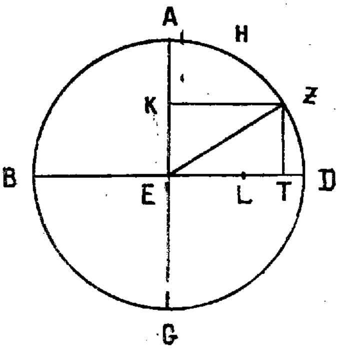


Рис. 21.

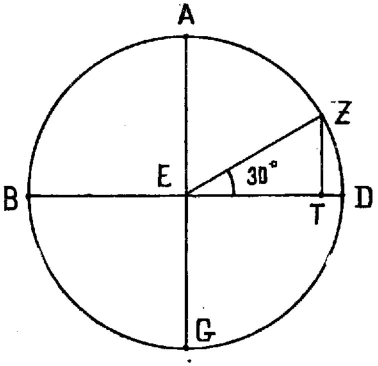


Рис. 22.

Мы хотим, чтобы ты знал, какой синус соответствует третьему делению. Опять нарисуем чертеж (рис. 23), разделив дугу *AD* на две половины в *N,* и проведем линии *AD, NM, NO.* Мы хотим знать величину линии *NO,* которая является синусом 45°. Мы объяснили в предыдущих главах, что синус какого-либо угла — это половина хорды его удвоенного угла. Умножим радиус на себя, т. е. умножим *AE* на себя и запишем это. Затем умножим *ED* на себя и извлечем квадратный корень из суммы, так что результат — это линия *AD,* которая является хордой 90°, а половина этого есть синус 45, т. е. линия *EM,* так как *EM* равняется *NO* и *NM.* Поскольку мы знаем синус 45, мы можем отнять синус Тельца от него, и остаток будет синусом третьего деления. Затем отнимем синус 45 от синуса Овна и Тельца, так что остается линия *MT,* которая является синусом четвертого деления, и поместим каждый синус против его деления.

Мы хотим разъяснить синус, который принадлежит третьему делению, [т. е. от 60 до 90°]. Необходимо применить доказа-

---

* В рукописи таблицы нет.

тельства, которые мы сообщим, а они соответствуют предыдущей части нашего труда. Построим круг *ABGD* и два его диаметра, которые пересекаются в *E* под прямыми углами (рис. 24). Отделим дугу 15° от дуги *AD*, а именно, дугу *AZ*. Проведем линию *ZH* от точки *Z* параллельно одному из диаметров, и она отделит 30° на окружности. Дуга *AZ* — это 15°, а мы хотим узнать величину линии *ZT*, которая является синусом 75°. Проводим линию *EZ* и получаем прямоугольный треугольник *ZET*, в котором сторона *ET* есть синус 15°, сторона *ZE* — радиус, а сторона *ZT* — синус 75°, равный *EK*. Умножим *ET* на себя и отнимем это от произведения радиуса на себя. Извлечем квадратный корень из разности, так что результат есть линия *EK*, которая равна *ZT*. Отнимем от нее синус Овна и Тельца, чтобы найти синус пятого деления. Поместим каждый синус против его подразделения, и это — правило индийцев[40].

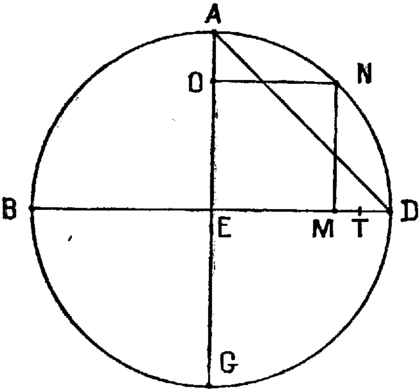


Рис. 23.

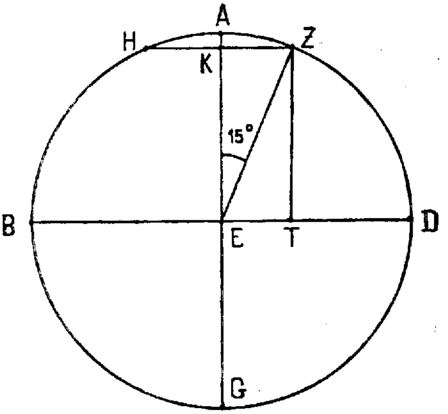


Рис. 24.

Если мы хотим разделить эту дугу на большее число делений, то можем разделить четверть круга на двенадцать подразделений, так что каждый знак Зодиака содержит четыре части. Чтобы выяснить это, опять построим чертеж (рис. 25). Начертим круг *ABGD* с центром *E* и проведем его диаметры, которые пересекаются под прямым углом в точке *E*. Отметим дугу *AZ*, равную 15°, так, что дуга *DZ* есть 75°. Проведем линии *ZH*, *ZT*, *ZA* так, что линия *ZH* есть синус 15°, линия *ZT* — синус 75°, линия *AZ* — хорда 15°, а линия *ZT* равна *EH*. Мы хотим узнать величину хорды 15°, а именно, *AZ*, так что можем взять ее половину, синус $7\frac{1}{2}^{\circ}$. Угол *H* — прямой угол. Умножим синус 15° на себя и прибавим к этому произведение линии *HA*, которая является одним из шести подразделений, на себя и извлечем из суммы квадратный корень. Результат — это дуга 15°, половина которой есть синус $7\frac{1}{2}^\circ$, и мы поместим его против первого из двенадцати подразделений. Затем отнимем его от 15°, так что остаток есть синус второго подразделения, и поместим его против второго подразделения. Если мы хотим узнать третью часть Овна, проведем круг *ABGD*, как сказано, и разделим дугу *AD* на две части в точке *Z* так, что каждая дуга есть 45° (рис. 26). Проведем

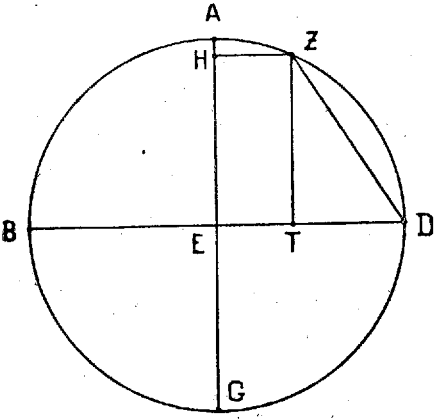


Рис. 25.

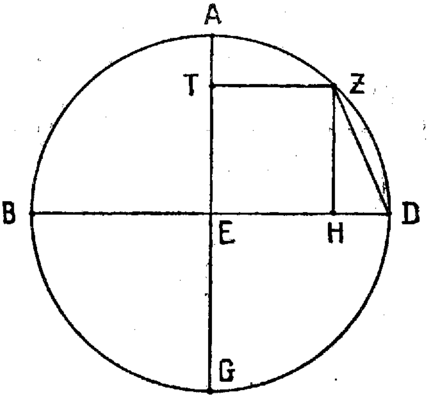


Рис. 26.

линии *ZH*, *ZT* и *ZD*; как *ZH*, так и *ZT* равны синусу 45°, тогда как *ZD* есть хорда 45°, так как ее половина есть синус $22\frac{1}{2}^\circ$. Линия *ZT* равна *EH*, и они равны линиям *ZH* и *ET*. Линия *DH* есть разность между радиусом и синусом 45°. Умножим синус 45° на себя и умножим также *DH* на себя и из суммы извлечем квадратный корень. Результат — это хорда 45°, половина которой есть синус $22\frac{1}{2}^\circ$. Отнимем от него синус 15°, так что остаток — это синус третьей части из двенадцати частей, и поместим его против этой части. Далее отнимем синус $22\frac{1}{2}^\circ$ от синуса Овна, так что остаток есть синус четвертой части.

Если мы хотим узнать пятую часть из двенадцати частей, то снова используем чертеж (рис. 27). Отметим синус 15° на линии *ED*, а именно, линию *EZ*, и из точки *Z* проведем линию, параллельную *AE*, а именно, *ZH*. Затем проведем линию *HT*, равную *EZ*, а обе они равны синусу 15°. Дуга *HA* — это 15°, а дуга *HD* — 75°. Линия *DH* есть хорда 75°, а линия *DZ* — разность между полным синусом и синусом 15°. Угол *Z* — прямой, линия *ZH* параллельна *AE*, и мы хотим найти хорду 75°, половина которой есть синус $37\frac{1}{2}^\circ$. Умножим синус 75° на себя и сохраним это. Затем вычтем синус 15° от полного синуса и умножим остаток на себя. Сложим два произведения и извлечем квадратный корень из суммы. Результат — это хорда 75°, которая есть линия

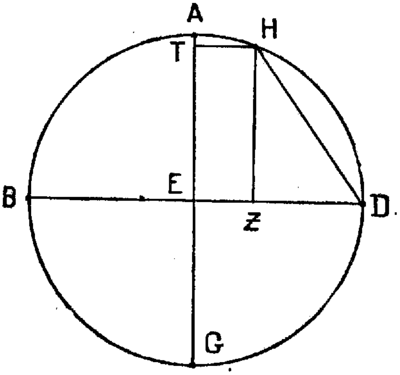


Рис. 27.

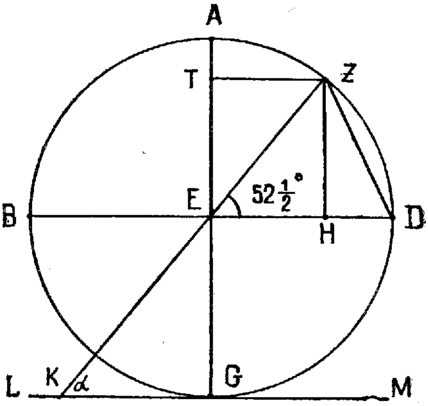


Рис. 28.

HD. Возьмем ее половину и вычтем синус 30° из этой величины. Затем вычтем это из 45°, что дает шестую часть.

Если мы хотим найти синус седьмой части, то опять начертим круг (рис. 28) и отделим $37\frac{1}{2}^\circ$ от дуги *AD*, а именно, дугу *AZ*, так что *ZD* есть $52\frac{1}{2}^\circ$. Проведем линии *ZE*, *HZ* и *ZT*. Линия *ZH* есть синус $52\frac{1}{2}^\circ$, линия *ZT* — синус $37\frac{1}{2}^\circ$, равна *EH*, а *EZ* — это радиус круга. Если мы хотим узнать синус $52\frac{1}{2}^\circ$, то умножим синус $37\frac{1}{2}^\circ$ на себя и отнимем это от произведения радиуса на себя. Извлечем квадратный корень из разности, и результат — это линия *ZH*, которая является синусом $52\frac{1}{2}^\circ$. Отнимем синус 45° от него и остаток есть синус седьмой части, который мы поместим против нее. Затем отнимем синус $52\frac{1}{2}^\circ$ от синуса Овна и Тельца и синуса 60°, и остаток есть синус восьмой части, который поместим против нее. Если мы хотим узнать [синус] девятой части, то опять начертим круг (рис. 29). Отделим $22\frac{1}{2}^\circ$ от дуги *AD*, а именно, дугу *DH*, и проведем линии *HT*, *HK* и *HE*. Линия

HK — это синус $22\frac{1}{2}^\circ$, линия *HT* — синус $67\frac{1}{2}^\circ$, а линия *HE* — радиус круга. Линия *HK* равна линии *ET*. Мы хотим найти величину *HT*, которая является синусом $67\frac{1}{2}^\circ$. Умножим *HK*, синус $22\frac{1}{2}^\circ$, на себя и вычтем это из произведения радиуса на себя. Извлечем квадратный корень из остатка, чтобы найти линию *KE*, синус $67\frac{1}{2}^\circ$, а она равна *HT*. Отнимем синус 60°, и остаток — это синус девятой части, который мы помещаем против ее деления.

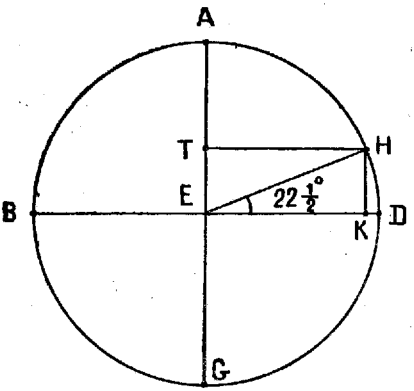


Рис. 29.

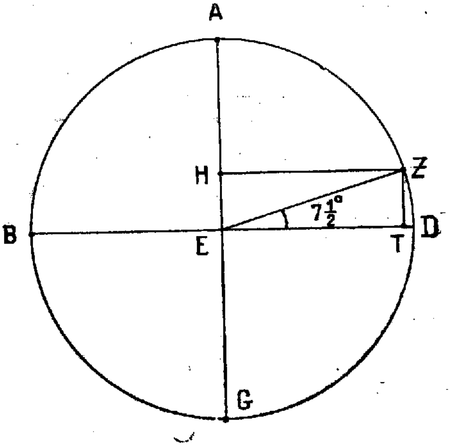


Рис. 30.

Затем отнимем синус $67\frac{1}{2}^\circ$ от синуса 75°, так что остаток — это [синус] десятой части, который поместим против ее деления.

Если мы хотим найти синус одиннадцатой части, то начертим круг снова (рис. 30). Отделим $7\frac{1}{2}^\circ$ от дуги *AD*, а именно, дугу *DZ*, так что дуга *AZ* есть $82\frac{1}{2}^\circ$, и проведем линии *ZE*, *ZH* и *ZT*. Линия *ZT* есть синус $7\frac{1}{2}^\circ$, *ZH* — синус $82\frac{1}{2}^\circ$, а *DE* — радиус; и *ZH* равна *ET*. Чтобы найти *TE*, синус $82\frac{1}{2}^\circ$, умножим *ZT*, который является синусом $7\frac{1}{2}^\circ$, на себя и вычтем это из произведения радиуса на себя. Извлечем из остатка квадратный корень, который есть синус $82\frac{1}{2}^\circ$. Отнимем синус 75° от этого, так что остаток есть синус одиннадцатой части, который мы поместим против ее деления. Затем отнимем синус $82\frac{1}{2}^{\circ}$ от полного синуса, так что остаток — это двенадцатая часть, и поместим ее против соответствующего деления. Если ты хочешь составить таблицу, более точную, чем эта, используй больше, чем двенадцать подразделений, а процедура будет та же самая. Ал-Хорезми, как и другие, кто измерял синус посредством градусов, поступали таким же способом, как при составлении таблиц поправок. Некоторые из них исправляли планеты для интервалов в десять дней*, тогда как другие применяли иные величины. Они делили эти подразделения на их градусы и составляли таблицы для градусных интервалов.

Склонение, которое он помещает в таблицу подразделений, отличается от простого склонения в его таблицах для каждого градуса, потому что склонения против его подразделений соответствуют методу индийцев. Склонение, согласно индийцам, есть 24°, и ал-Хорезми полагает 24° в своих таблицах склонения. В простых таблицах он рассматривает склонение 23; 51°, следуя Птолемею[41]. Что есть склонение? Это наклон сферы Зодиака по отношению к сфере экватора. Мы разъяснили это в нашей книге, [адресованной] Мухаммаду ибн ‘Аббасу, вычислителю. Мы сказали, кроме того, что Солнце делает круг в своем движении по небу, который называется поясом Зодиака, потому что Солнце никогда не сбивается со своего пути; другие планеты немного отклоняются от этого пути как на север, так и на юг.

День и ночь отличаются, увеличиваясь или уменьшаясь для населенных пунктов в соответствии с их расстоянием к северу от экватора, но день и ночь равны дважды в году, посредством чего становится известно, что Солнце в это время находится на своем пути по экватору. Горизонты населенных пунктов отличаются один от другого, а также отличаются от горизонта экватора. Известно также, что если день длиннее, то Солнце отклоняется к северу, тогда как если день короче, Солнце отклоняется к югу. Нужно знать величину этого наклона для последовательных вычислений. Люди Индии думали, что этот наклон есть 24°, тогда как Птолемей считал, что он есть 23; 51°. Ученые «Исправленного зиджа» (мумтаҳан зӣдж), которые производили наблюдения для халифа Ма’муна, нашли, что он [равен] 23; 33°. Все это сообщение было передано нам, так что каждый может удивляться относительно маленького несоответствия между этими величинами, что не замечалось, так как это количество минут не наблюдается с помощью астролябии, даже если инструмент так велик, как он может быть сделан.

Каждый, кто хочет, может построить такой инструмент, чтобы узнать правдивость этих сообщений[42]. Возьми инструмент, кото-

---

* Имеется в виду «градусов», а не «дней».

рый упомянут в нашей книге, точно квадратный, как это требуется, и с гладкими гранями. Затем поставь точку в данный угол и рассматривай ее как центр, около которого описана четверть круга. Чем больше инструмент, тем шире круг, а следовательно, он становится точнее и свободнее от ошибок. Какой бы величины он ни был построен, раздели квадрант на 90 частей, каждую часть — на минуты как можно точнее, оберегая себя от ошибки. Затем сделай два шпиля, равных по толщине и имеющих одну и ту же длину. Помести один шпиль в центр круга, а другой [подвижный шпиль] — на дугу квадранта, в то место, из которого ты начал деление.

Направь этот инструмент по меридиану и помести шнур так, чтобы он висел на шпиле, который находится в центре круга. Если шнур падает на другой шпиль, то ты знаешь, что расположил инструмент точно в плоскости меридиана. Затем найди меридиан для твоего города и расположи инструмент на меридиане строго перпендикулярно; остерегайся ошибки. Центр квадранта выше всего, так что линия, от которой ты начал подразделения, направлена на юг, а место для надписей на квадранте — на запад. Затем наблюдай Солнце в полдень во время летнего и зимнего солнцестояний, наблюдай, куда падает тень Солнца в центре квадранта, и сохрани это. Заметь: если Солнце находится в летнем солнцестоянии, которое начинается в Раке, то вычти широту города из числа, которое ты сохранил, так что разность есть наклонение эклиптики. Если ты направишь инструмент к высоте полюса, то тебе не понадобится ни увеличение, ни уменьшение. Если ты хочешь использовать этот инструмент для того, чтобы узнать, когда Солнце вступает в равноденствие, то посмотри на Солнце, когда оно находится в одной из точек равноденствия, т. е. когда у него нет склонения. Отклонения от подвижного шпиля нет, потому что тень центрального шпиля будет падать на подвижный шпиль в том месте, от которого ты начал нумеровать подразделения. Именно поэтому инструмент был направлен на высоту полюса. Если это не так, то тень от шпиля будет падать на величину высоты полюса твоего города, которая является широтой города. Инструмент показан на чертеже (рис. 31).

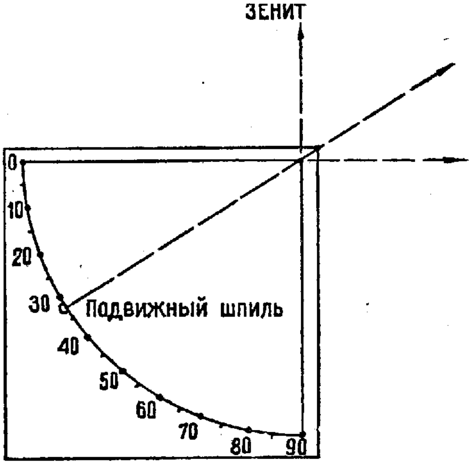


Рис. 31.

Наше вычисление склонения следует указанию ал-Хорезми. Если ты хочешь узнать склонение какого-либо градуса[43], то сначала рассмотри полное склонение как синус; ты знаешь его величину из наблюдения и сообщений. Рассмотри также градусы, склонение которых хочешь узнать как синус. Затем умножь синус полного склонения на синус градуса и раздели произведение на полный синус. Результаты — это синус склонения градуса, а соответствующая дуга — склонение этого градуса. Это действие произведено согласно правилам пропорции и не отличается от [действия] Птолемея, так как отношение полного синуса к синусу полного склонения равно отношению синуса градусов к синусу склонения. Эти четыре числа образуют пропорцию: первое — полный синус, второе — синус полного склонения, третье — синус градуса, а четвертое — синус склонения градуса, который неизвестен. Мы уже упомянули, что произведение первого и четвертого числа, будучи разделено на второе число, дает третье число. Если ты разделишь произведение второго и третьего чисел на первое число, ты найдешь четвертое число, а это — данный случай. Мы разъяснили смысл синуса и склонения и способ получения их с помощью градусов. Если ты хочешь получить склонение, как получил синус, ты должен следовать моим указаниям. Знай, что все упомянутое ал-Хорезми вплоть до этого момента — я имею в виду вплоть до склонения для каждого градуса — следует методу, наблюдениям и выводам индийцев[44]; это было также верно для уравнений. Вывод склонения, как и то, что находится дальше в таблицах ал-Хорезми, соответствует методу Птолемея, за исключением того, что иногда ал-Хорезми следует лишь принципам, которые изложил Птолемей. Мы разъясним содержание каждого раздела точно так, как разъяснил бы его Птолемей, если Бог пожелает.

Вопрос [36]. Что представляет собой 900, на что он учил нас делить результат умножения при получении синуса и склонения?

Ответ. Мы объяснили, что это — 900 минут, которые равны одному подразделению, т. е. это число минут в 15°. Это действие подобно тому, которое он дал нам для получения поправок для Солнца и Луны[45].

Вопрос [37]. Что такое обращенный синус?

Ответ. Мы сказали, что синус — это линия, проведенная от градуса, синус которого мы хотим найти, к диаметру, и синус перпендикулярен диаметру. Этот перпендикуляр, синус, отделяет отрезок диаметра, который обращен к окружности. Остаток диаметра есть обращенный синус[46] (рис. 32, *а*). Это случай, когда рассматриваемый градус меньше, чем 90. Если он есть 90, то его прямой синус, т. е. линия, которая попадает в центр круга, есть половина диаметра, и половиной диаметра будет также обращенный синус (рис. 32, *б*).

Если градусы превышают 90, плоский синус меньше, чем половина диаметра, тогда как обращенный синус больше, чем половина диаметра; и плоский синус отделяет для обращенного синуса больше, чем половина диаметра, до тех пор, пока градусы не достигнут 180, а в этой точке обращенный синус равняется полному диаметру. Эта величина больше, чем наибольшая величина плоских синусов, а именно, половина диаметра. Обращенный синус может достичь величины полного диаметра (рис. 32, *с*).

[Вопрос 38]. Почему он сказал в связи с нахождением широты мест: узнай высоту экватора в твоем городе, т. е. когда Солнце находится в начале Овна или Весов, вычти это из 90°, и остаток есть широта твоего города. Если Солнце не находится ни в одном из этих мест, вычти склонение Солнца из высоты в случае более южных знаков и прибавь его к высоте в случае более северных знаков. Затем вычти результат из 90, так что остаток есть широта, которую ты хочешь установить.

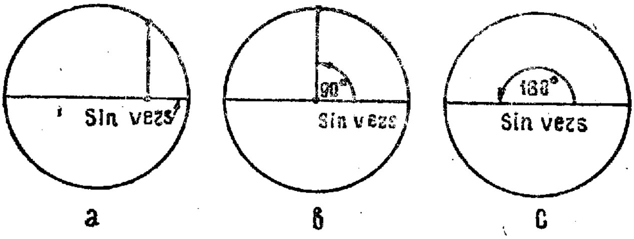


Рис. 32.

Ответ. Когда Солнце вступает в первую минуту Овна или Весов, оно не имеет склонения, так что его высота, наблюдаемая с экватора, есть 90°, и оно находится там в зените[47].

Для городов, которые отклонены от экватора, небесный экватор отклоняется от зенита на величину, равную высоте полюса, согласно их расположению. Отними от 90° высоту полюса, которая равна широте города. Если Солнце не находится в начале Овна или Весов, ты должен дать ему второе наклонение соответственно величине склонения градуса Солнца. Если Солнце находится в южных градусах, т. е. от начала Весов до начала Овна, это склонение происходит к югу, и оно вычитается из высоты экватора, который проходит через начало Овна и Весов. Если Солнце находится к северу, т. е. от начала Овна к началу Весов, то это склонение — к северу, и оно больше, чем высота экватора на величину того склонения, которое имеется у градуса Солнца.

По этой причине ал-Хорезми сказал: заметь, что если Солнце находится в северном знаке, вычти склонение из высоты Солнца; но если оно в южном знаке, прибавь склонение к его высоте. Результат — это высота Овна для города. Затем вычти его из 90°, и остаток есть широта твоего города, потому что высота Солнца в Овне вместе с высотой полюса всегда есть 90° для любого города, не больше и не меньше. Что касается сказанного им о том, что если у тебя нет с собой инструмента, возьми трость и ты сможешь найти высоту, то он хотел, чтобы ты знал, как вывести равные часы и высоту с помощью теней, но не объяснил этого[48]. Мы это объясним, когда дойдем до этого предмета, если Бог захочет.

[Вопрос 39]. Почему он сказал при выводе широты города, что какая-либо звезда, полярное расстояние которой меньше, чем широта города, не будет заходящей для этого города? Для каждой звезды, которая не заходит, сравни ее самую большую и самую малую высоты. Знай эти две высоты, возьми половину их суммы и это будет широта города.

Ответ. То, что он написал, верно. Сфера неподвижных звезд вращается вокруг полюсов экватора. Большинство обитаемых городов расположено к северу от экватора. Только для того, кто находится на средине сферы, [т. е. на экваторе], полюсы экватора находятся на его горизонте, как если бы они касались земли, и все звезды будут восходить и заходить. Если кто-нибудь передвигается от середины сферы к северу, то один полюс становится выше, а другой ниже, чем горизонт, так что он видит северный полюс, а южный полюс исчезает из его поля зрения. Те звезды, которые расположены вблизи северного полюса, всегда видимы, и они вращаются вокруг полюса, тогда как звезды, близкие к южному полюсу, никогда не видны, а звезды, находящиеся в промежуточном положении, являются видимыми только часть времени. Время их видимости и невидимости изменяется соответственно их расстоянию от полюса.

Звезды, близкие к северному полюсу, видимы в течение более долгого времени, чем они скрыты, тогда как звезды, находящиеся дальше к югу, являются видимыми более короткое время, чем они скрыты. Звезды, которые всегда видимы,— я имею в виду те, которые никогда не заходят,— вращаются вокруг полюса точно так же, как все звезды, причем иногда они кажутся поднимающимися над полюсом, а иногда полюс кажется поднимающимся над звездой. В первом случае звезда восточнее полюса, во втором случае она западнее. Для звезды, которая всегда видима, имеется наибольшая высота, на которую она поднимается над полюсом, и наименьшая высота, когда полюс поднимается по отношению к ней. Ал-Хорезми учит нас брать половину суммы этих двух предельных величин высоты, так как средняя точка есть истинное положение полюса, и это вне сомнения.

[Вопрос 40]. Почему он сказал: чтобы найти полуденную высоту Солнца, узнай сначала положение Солнца на [поясе] Зодиака; затем возьми его склонение и сохрани его. Если оно к северу, вычти склонение из широты города, а если оно к югу, прибавь его к широте города. После того как ты сложил или вычел, отними эту величину от 90°, и результат будет полуденной высотой Солнца.

Ответ. Мы объяснили ранее, что широта каждого города вместе с высотой Овна или Весов, которые лежат на экваторе, составляет в сумме 90°. Для городов, не лежащих на экваторе, широта города есть разность между высотой Овна или Весов и 90°. Так как Солнце находится где-нибудь на Зодиаке, оно имеет склонение. Если оно [склонение] к югу, то его полуденная высота будет меньше, чем высота Овна или Весов. Но если его склонение к северу, его полуденная высота больше, чем у Овна или Весов. Он учит нас вычитать, если склонение направлено к югу, и складывать, если к северу, так что широта города вместе с результатом будет равняться 90°. Это действие противоположно выводу широты городов, потому что при этой процедуре ты выводил широту из высоты, тогда как здесь ты выводишь высоту Солнца из широты городов. В обоих случаях имеется общее склонение и вычисление сходно.

[Вопрос 41]. Почему он говорит, касаясь вывода градусов восхождения по прямой сфере: возьми синус полного склонения и сохрани его; это — первый синус. Затем вычти полное склонение из 90°, возьми синус остатка и сохрани его; это — второй синус. Затем возьми склонение какого-либо градуса, прямое восхождение которого ты хочешь узнать, возьми его синус и сохрани его; это — третий синус. Затем вычти склонение градуса от 90 и возьми синус остатка; это — четвертый синус. Теперь умножь второй синус на третий синус, раздели произведение на первый синус, умножь результат на полный синус и раздели его на четвертый синус, так что результат есть синус дуги прямого восхождения градусов, которые ты хотел найти для прямой сферы[49].

Ответ. Все круги на сфере пересекаются между собой, и все эти круги называются большими кругами. Сфера неподвижных звезд — наибольшая сфера, и она включает в себя все другие. На этой сфере имеется много равных кругов, каждый из которых носит специальное название. Один такой круг называется кругом экватора, а другие — кругом меридиана, кругом Зодиака и кругом горизонта. Они и все другие имеют одну и ту же величину. Некоторые круги начинаются от полюса и отделяют дуги от Зодиака, а также дуги, которые поднимаются вместе с ними по кругу экватора, а затем возвращаются к полюсу. Дуга экватора, которая отсечена вместе с дугой круга Зодиака,— это ее прямое восхождение. Круги меридиана начинаются у зенита и затем возвращаются к нему. Мы дадим разъяснение этим кругам, когда подойдем к вопросу о них.

Круги, которые имеют ту же величину, что и экватор,— это большие круги, и так они и называются. Такие круги должны пересекать друг друга и делить друг друга на дуги. Дуги имеют хорды и синусы, которые пропорциональны друг другу, но могут не иметь отношения к дугам. Те, кто получает их отношения, пользуются приближением, и вывод одних из других возможен, как мы объяснили, благодаря применению чисел, которые образуют пропорцию. Если это невозможно, надо пользоваться геометрическими приспособлениями. Если даны два числа, между которыми находится число, то отношение одного числа ко второму составлено из двух отношений, отношения первого числа к чужому, которое находится между ними, и отношения чужого ко второму числу. Существуют числа, которые и не упорядочены, и не лишены порядка. Но отношение первого числа ко второму составлено из четырех чисел[50].

Например, мы хотим узнать отношение 8 к 12. Поместим между ними 6 в таком виде: 8 6 12. Я говорю, что отношение 8 к 12 составлено из двух отношений, а именно, из отношения 8 к 6, присоединенного к отношению 6 к 12. Отношение одного из двух чисел ко второму составлено из четырех чисел, так что всего имеется шесть чисел. Чтобы проверить то, что мы сказали, заметь отношение 8 к 6, которое, как мы нашли, равно 6, сложенному с одной третью 6*. Мы нашли, что отношение 6 к 12 равно половине. Отношение 6 к 12 то же самое, что и отношение половины к единице. Умножим $1\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{2}$ и результат есть $\frac{2}{3}$; таким образом, говорю, что отношение 8 к 12 равно отношению $\frac{2}{3}$ к 1. Другой пример: если мы хотим найти отношение 9 к 7, то поместим 5 между ними. Говорим, что отношение 9 к 7 составлено из двух отношений, а именно, отношения 9 к 5 и отношения 5 к 7, и вот их вид: 9 5 7. Доказательство состоит в том, что отношение 9 к 5 равно ему самому и $\frac{4}{5}$ от него, и мы говорим, что 9 к 5 имеет то же самое отношение, что $1\frac{4}{5}$ к 1. Далее мы заметим отношение 5 к 7, которое как мы находим, равно $\frac{5}{7}$. Мы говорим, таким образом, что отношение 5 к 7 равно отношению $\frac{5}{7}$ к 1. Умножим $1\frac{4}{5}$ на $\frac{5}{7}$ и результат есть $1\frac{2}{7}$. Итак, говори, что отношение 9 к 7 равно отношению $1\frac{2}{7}$ к 1.

Теперь мы утверждаем, что невозможно найти отношения дуг тех кругов, которые мы упоминали, без введения числа между ними. Мы нашли дуги между пересечениями дуг, применяя отношения синусов дуг согласно методу, который мы упомянули, а именно, с помощью двух чисел, отношение которых было необходимо найти. Пересечение двух дуг с двумя другими дугами делит каждую из них на две дуги. Например, пусть дуги AB и AG пересекают дуги BD и EG в точке Z (рис. 33). Я говорю, что от-

---

* $8=6+\frac{1}{3}\cdot 6$.

ношение синуса дуги *BE* к синусу дуги *EA* составлено из двух отношений, а именно, из синуса дуги *BZ* к синусу дуги *ZD* вместе с отношением синуса дуги *GD* к синусу дуги *AG*. Итак, чтобы найти отношение двух дуг, было необходимо применить шесть дуг, каждая из которых имеет синус. Эти шесть чисел расположены так, как мы упомянули[51]. Поскольку это так, мы объясним, каким образом эти дуги пересекают друг друга и какое восхождение имеется для прямой сферы, а затем для всех городов.

Сначала мы разъясним восхождение для прямой сферы. Начертим круг, представляющий горизонт экватора, *ABGD* и проведем к нему круг сферы зодиака, дугу *BED*, а также половину

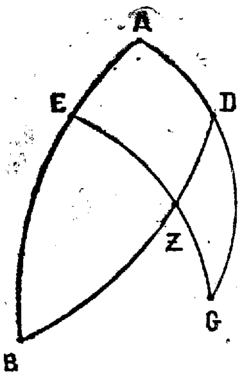


Рис. 33.

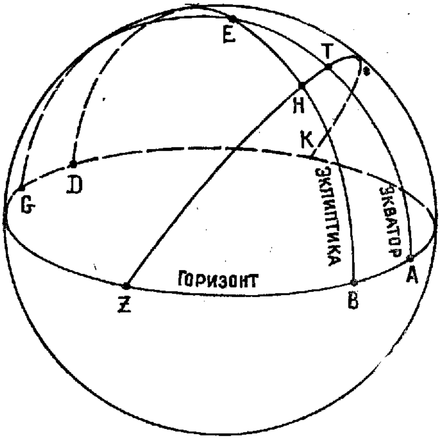


Рис. 34.

круга экватора, дугу *AEG* (рис. 34). Проведем полукруг *ZHTK*, который представляет собой часть большого круга, начинающегося у полюса и отсекающего дугу Зодиака с ее восхождением на экваторе. Рассмотрим точку *E* — начало Овна и примем дугу *AZ* за 90°, так что точка *Z* есть полюс экватора, поскольку между полюсом и экватором должно быть 90°. Дуга *AB* есть наклонение эклиптики, а *BZ* — ее дополнение. Отделим [дугу] *EH*, равную 30°, которая представляет собой [знак] Овна, так что *HT* — это склонение Овна, дуга *ZH* — дополнение склонения, а дуга *ET* на экваторе — прямое восхождение Овна. То, что имеется в виду при такой процедуре, это дуга *ET*, которая является прямым восхождением Овна, как мы разъяснили. Дуга *ET* восходит вместе с дугой *HE* и является ее прямым восхождением, так как прямое восхождение [знака] Зодиака есть дуга экватора, которая восходит вместе с ним от горизонта по прямой сфере.

Большие круги, которые проходят через полюс, отделяют дуги экватора для каждой дуги Зодиака, и каждый из этих кругов действительно является горизонтом по прямой сфере. Я говорю с помощью примера, что если начало Тельца находится на горизонте, то эти круги отделяют прямое восхождение на экваторе, начиная от горизонта, и эта дуга по величине равна прямому восхождению; это не вызывает сомнения. Ясно, что дуга *ET* на экваторе восходит от горизонта вместе с дугой Овна, а именно, с дугой *HE*. Мы хотим найти величину *ET*. Дуги *AZ, AE* и дуги *BE, ZT* пересекаются в точке *H*. Я говорю, что отношение синуса дуги *AB*, который представляет собой полный синус склонения, к синусу дуги *BZ*, которая является ее дополнением, составлено из двух отношений, отношения синуса дуги *HT*, являющегося синусом склонения Овна, к синусу дуги *ZH*, которая является ее дополнением, и отношения синуса дуги *AE*, которая представляет собой полный синус, к синусу искомой дуги, а именно, *ET*, прямого восхождения Овна. Это — шесть синусов шести дуг. Первая — это дуга полного склонения; вторая — дуга его дополнения; третья — дуга градуса, прямое восхождение которого мы ищем; четвертая — дуга его дополнения; пятая — дуга 90° на экваторе и шестая — дуга экватора, которая восходит вместе с Овном.

Имеются шесть дуг, которые имеют шесть синусов, образующих требуемую пропорцию, из которой здесь получается искомое отношение. Пять из этих синусов известны; синус дуги прямого восхождения неизвестен. Такова их форма в таблице, потому что эта фигура применяется для нахождения неизвестной — синуса прямого восхождения. Отношение одного из двух чисел на фигуре (рис. 34) к другому составлено из отношения четырех чисел. Если мы возьмем одно из двух чисел и соединим его с другим отношением, то останутся только два числа вместо четырех. Отношение одного из них ко второму равно отношению одного из четырех известных чисел к другому числу, которое неизвестно.

Подобным же образом синус дополнения полного склонения на этом чертеже есть 137 минут и 10 секунд. Раздели это на отношение 146 минут 54 секунд к 30 минутам и 17 секундам; результат — это 27 минут и 17 секунд. Отношение синуса полного склонения к этим минутам равно отношению полного синуса к синусу градусов Зодиака, который неизвестен. С помощью этого отношения, которое мы вывели, [получаем, что] отношение прямого восхождения 30° к полному синусу, который составляет 150 минут, равно отношению 67 минут 27 секунд к 150 минутам.

Мы уже объяснили, что неизвестная — это синус градуса склонения Овна, который является особым градусом. Заметь синус градуса и возьми его дугу; ты найдешь, что это — 27 градусов 54 минуты. Итак, это — прямое восхождение Овна.

Ал-Хорезми не применял этого метода[52], но провел вычисление, чтобы сделать эту процедуру более ясной для изучающего, так как найти это отношение трудно для того, кто является знатоком геометрии, и еще более трудно для учащегося. Необходимо найти число из этих отношений так, чтобы отношение синуса неизвестной к нему было равно отношению полного синуса к синусу полного склонения. Умножь третье число на второе и раздели на первое число; результат — это такое число, что отношение неизвестного синуса, который является вторым из четырех чисел, к нему равно отношению полного синуса, который является первым из четырех чисел, к синусу полного склонения. В результате этого действия имеются четыре вместо шести чисел, поскольку отбрасывается то, что умножается и делится, так что остаются только три из первоначальных шести чисел. Первое из них — это полный синус, второе — синус неизвестной, третье — синус полного склонения.

Из этого действия получаются четыре числа, образующие пропорцию: первое — это полный синус, второе — синус [полного склонения], третье — синус неизвестной, а четвертое получается из вычисления. Итак, одно из чисел, третье, является неизвестным. Произведение первого числа, которое представляет собой полный синус, на четвертое число он вычисляет, разделив на синус полного склонения, который является вторым числом, и получает неизвестную, и вот таблица*.

Он составил таблицу восхождений по прямой сфере для каждого градуса. Она построена согласно этому методу, и он помещает требуемый градус в таблицу для каждого градуса Зодиака до 90°. Времена восхождений Овна, Тельца и Близнецов по прямой сфере равны временам восхождений Рака, Льва и Девы и подобным же образом для других квадрантов, так как восхождение каждого квадранта по прямой сфере есть 90°. Когда он достигал 90°, этого было достаточно, поскольку время восхождения начала каждого квадранта то же самое, что и конца предыдущего квадранта. Например, время восхождения Весов равно времени восхождения Девы; то же самое — для времен восхождения остальных квадрантов. Время восхождения Овна равно времени восхождения конца Рыб. Таким путем составляют таблицу — градус за градусом.

[Вопрос 42]. Почему он начинает таблицу времен восхождения прямо от Козерога, а не от какого-либо другого знака Зодиака?

Ответ. Козерог расположен у зимнего солнцестояния; вообще, примеры Птолемея взяты у него, и ал-Хорезми хотел находиться в согласии с ним. Также для вычисления двенадцати домов ал-Хорезми учил нас находить градусы восхождения от Овна к восходящему градусу, применяя таблицу прямого восхождения, начиная от Козерога. Он хотел, чтобы этот вопрос был легким для пользующегося таблицей. Итак, прямое восхождение в таблице вычислено от Козерога. Но то, что он поместил его в начале своей таблицы, не имеет значения, так как она начинается от одного

---

* В английском переводе таблица опущена, так как в оригинале в некоторых колонках нет цифр.

из солнцестояний или равноденствий, поскольку время восхождения каждого квадранта есть 90° для прямой сферы, как мы объяснили.

[Вопрос 43]. Почему он говорит относительно вывода времен восхождений для городов: возьми широту какого-либо города и рассмотри ее синус, который является первым синусом. Затем вычти широту от 90° и рассмотри синус остатка, [и это — второй синус. Затем возьми синус градуса склонения, и это — третий синус. Наконец, возьми синус дополнения склонения], и это — четвертый синус. Затем умножь первый синус на третий синус, раздели произведение на второй синус, умножь результат на 150, который является полным синусом, и раздели результат на четвертый синус. Дуга, которая получается в результате, является понижением времени восхождения для твоего особого градуса по отношению к прямому восхождению.

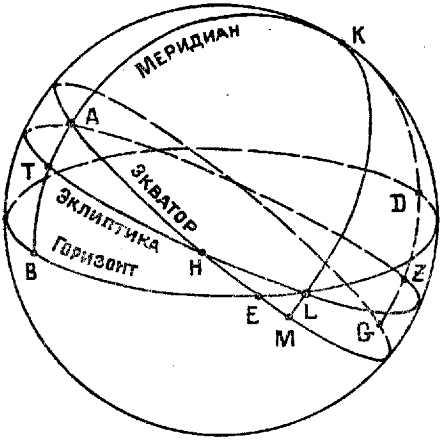


Рис. 35.

Ответ. Знай, что эта операция подобна процедуре для вывода времени восхождения по прямой сфере, за исключением того, что вместо полного склонения ты должен взять широту города, а вместо дополнения полного склонения —дополнение широты. Причина состоит в том, что экватор имеет только один наклон— от сферы Зодиака. Но в случае городов, которые отклонены от экватора, имеются два наклона: наклон сферы Зодиака и наклон полюса сферы, который является широтой каждого города. Времена восхождения отличаются соответственно этому наклону широты, так как наше отклонение к северу является мерой нашего расстояния от экватора. Высота полюса становится больше, а если сфера наклоняется к югу, так что изменяется горизонт, а поэтому и времена восхождения.

Для иллюстрации этого начертим круг *BADG*, представляющий круг меридиана, и проведем полукруг экватора *AEG*, полукруг *BED* горизонта нашего города и полукруг *ZHT* сферы Зодиака (рис. 35). Рассмотрим точку *K* как полюс экватора. Проведем линию через *K* и поместим *L* в том месте, где Зодиак пересекает горизонт, и пусть точка *L* будет началом Тельца. Мы объясним для тех, кто исследует эту проблему, что дуга экватора, которая восходит с Овном по прямой сфере, это *HM*, но для данного города — дуга *HE*. Тогда на дуге *AE* [дуга] *EM* является понижением времени восхождения для данного города от прямого восхождения. Мы объясняем также, что дуга *LM* — это склонение Овна, а точка *К* — полюс экватора. Расстояние полюса от горизонта для нашего города равно величине широты города, т. е. дуге *DK*, а расстояние от *К* до экватора есть 90°. Поэтому дуга *KG* есть 90°, и вот их чертеж (рис. 35).

На чертеже дуги *KG*, *EG* пересекают дуги *ED*, *MK* в точках *L*, *M*. Отношение синуса дуги *KD*, которая является широтой города, к синусу дуги *GD*, являющейся дополнением ее склонения, составлено из двух отношений: отношения синуса дополнения требуемого градуса, которое есть дуга *LK* на чертеже, к синусу склонения градуса, которое есть дуга *LM*, и отношения полного синуса, который есть синус дуги *EG*, к синусу дуги *EM*, т. е. неизвестной, которая является понижением прямого восхождения. Необходимо соединить отношение синуса широты города к синусу ее дополнения [так!] с отношением синуса дополнения склонения частного градуса к его синусу, так что здесь получается отношение полного синуса к этой неизвестной.

Это не соответствует методу Птолемея. Но мы следуем методу, который ал-Хорезми применил при нахождении времен восхождения по прямой сфере: умножается синус широты города на синус склонения градуса и это делится на синус дополнения широты. Итак, здесь получается число, отношение которого к синусу дополнения склонения градуса равно отношению неизвестной к полному синусу. Теперь имеются четыре числа, которые образуют пропорцию. Умножь найденное число на полный синус, который составляет 150, и раздели это на дополнение склонения градуса, тогда здесь получается синус неизвестной дуги, которая является понижением времени восхождения этого частного градуса от времени восхождения по прямой сфере.

[Вопрос 54]. Почему он сказал, находя тень по высоте[53]: возьми высоту, рассмотри ее синус и сохрани его; затем вычти высоту из 90° и возьми синус остатка; умножь это на 12 и раздели на синус высоты. Результат есть число дюймов тени.

Ответ. Причина в том, что отношение гномона к тени равно отношению синуса высоты к синусу дополнения. Этот метод близок к методу Птолемея, рассматривавшего гномон как 60 частей, которые составляли полный синус. Однако индийцы принимали полный синус за 150 минут. Ал-Хорезми и те, кто рассматривал гномон как 12 частей, не допускали ошибки, а синус, который получается, будет того же рода, что и гномон, который они рассматривали как полный синус. Итак, нужно сказать, что если он считал гномон состоящим из 60 частей, то синусы давались в частях; если он считал его состоящим из 150 частей, то синусы давались в минутах; если он считал его состоящим из 12 частей, результат давался в двенадцатиричных дюймах, которые называются двенадцатью пальцами. Что касается длины одного дюйма, то, по мнению Птолемея, она составляет одну пятую часть полного синуса, а по мнению индийцев,—две пятые от одной пятой части полного синуса. Неважно, что он выбрал в качестве гномона, так как он рассматривает отношение двух соответствующих сторон подобных треугольников, а поэтому тень, которая получается, будет той же самой.

Чтобы доказать это, мы начертим круг $ADGB$ — круг высоты и проведем его диаметры, которые пересекаются в E (см. рис. 28). Рассмотрим радиус круга EG как гномон и проведем через G линию LGM, параллельную BD. Заметим высоту Солнца — дугу DZ и проведем луч E из Z через начало гномона, который будет линией ZEK. Проведем линию ZH, являющуюся синусом высоты, и линию ZT, которая является синусом дополнения высоты, так как дуга AD есть 90°. Таким образом, TZ равна EH. Этим путем получаются два подобных треугольника ZHE и EGK.

Неважно, какой величины гномон ты возьмешь, т. е. примешь и ты его равным 12 дюймам, или 60 частям, или 150 минутам, потому что в результате получится тень того же рода, что и гномон. Поскольку треугольники подобны, отношение гномона к тени равно отношению синуса высоты к синусу ее дополнения. Отсюда ты получаешь четыре числа, находящиеся в пропорции, где неизвестной является тень. Поэтому умножь синус высоты на гномон и раздели это на синус дополнения высоты, чтобы получить тень.

[Вопрос 55]. Почему он говорит относительно нахождения высоты Солнца по тени[54]: умножь тень на себя и прибавь к этому 144; затем извлеки квадратный корень из суммы, и результат будет диаметром тени. Затем возьми дугу с этим синусом и отними ее от 90 градусов, чтобы найти высоту Солнца.

Ответ. Знай, что легче найти тень по высоте, чем обратно. Если ты знаешь дугу высоты, то ты знаешь также ее синус и синус ее дополнения. Более того, ты знаешь одну сторону треугольника — гномон. Из отношения этой стороны к другой, т. е. любой стороне треугольника, можно найти неизвестную сторону треугольника, если известна только одна сторона. Но если отношение неизвестно, то невозможно установить зависимость между сторонами. Вместо этого ты должен использовать приспособление, чтобы найти синус высоты по сторонам треугольника. Обратимся опять к чертежу (см .рис. 28). Тебе известны стороны EG и GK в треугольнике EGK и сторона ZE в треугольнике ZHE, которая есть полный синус, так как является радиусом круга. В треугольнике EGK угол G прямой, линия KG — тень, а EG — гномон. В каждом прямоугольном треугольнике гипотенуза больше, чем каждый из его катетов.

Мы хотим найти EK в треугольнике EGK, и ал-Хорезми предлагает умножить тень, а именно, линию KG, на себя и прибавить к этому произведение гномона на себя. Это число есть 144, согласно тому, что гномон составляет 12 дюймов. Если ты извлечешь квадратный корень из суммы, то результат есть линия EK, которая называется диаметром тени. Теперь ты знаешь диаметр тени *EK*, а также тень *KG*. У другого треугольника известна сторона *ZE*, и она равна полному синусу, или 150 минутам, так как она представляет собой радиус. Далее можно найти сторону *EH* — синус дополнения высоты. Более того, можно найти дугу этого синуса, образовав пропорцию из четырех чисел, из которых три известны. Он предложил умножить тень на 150 и разделить это на диаметр тени, чтобы найти синус дуги, дополняющий высоту. По этому синусу он находит его дугу, а затем вычитает дугу из 90°. Тем самым находит дугу высоты, потому что отношение *EK* и *KG* равно отношению *ZE* к *EH*, где неизвестной является *EH*. Сделай это и, если умножишь гномон на 150 и разделишь это на диаметр тени, ты найдешь синус высоты. По этой причине [ал-Хорезми] заметил: если хочешь, раздели 1800 на диаметр тени, так как результат будет синусом, а высота находится по дуге. Поскольку он полагает, что гномон есть 12, и умножает его на 150, т. е. на полный синус, то получается 1800.

ПРИМЕЧАНИЯ К АРИФМЕТИЧЕСКОМУ ТРАКТАТУ

[1] Алгоризми, в рукописи algorizmi, т. е. Algorizmi,— транскрипция имени ал-Хорезми. В издании Бонкомпаньи [5] в двух случаях это имя транскрибируется algoritmi, в третьем случае — algorizmi, в рукописи во всех трех случаях это имя пишется одинаково. Отметим, что математик XII в. Иоанн Севильский в заголовке своей «Книги Алгоризма о практике арифметики» [5, с. 25—90] транскрибировал это имя algorismi, а в написанной в том же веке рукописи некоего магистра А. (Аделарда из Бата?) «Книга введения Алхоризма в астрономическое искусство» (Liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam a magistro A. compositus) дана транскрипция alchorismi [132].

В рукописи трактат не имеет заглавия. Название «Алгоризм об индийском счете» (у Бонкомпаньи Algoritmi de numero indorum), под которым этот трактат известен в историко-математической литературе, взято из первого абзаца трактата. По всей вероятности, в оригинале сочинение было озаглавлено «Книга об индийском счете» (см. статью А. П. Юшкевича в настоящем издании).

Имя ал-Хорезми в форме Algorismus и Algorithmus (последнее, по-видимому, под влиянием греческого слова aritmos — «число») стало в средневековой Европе синонимом десятичной системы счисления, с которой европейцы познакомились по этому трактату, а впоследствии превратилось в слово «алгорифм» («алгоритм»), обозначающий любой регулярный вычислительный процесс.

[2] В рукописи почти все числительные записаны общепринятыми в то время в Европе римскими цифрами; в арабской рукописи на месте римских цифр, разумеется, стояли индийские цифры, изложению счета с которыми, собственно, и посвящен трактат.

[3] Первое указание на создание индийцами новой системы счисления имеется в рукописи сирийского епископа Севера Себохта, жившего в VII в. в монастыре в Кеннешре в верховьях Евфрата. В рукописи, датированной 622 г., Себохт, возражая тем, кто относится с презрением к ученым, не пользующимся греческим языком, в качестве примера крупных научных достижений таких ученых приводит систему счисления индийцев: «Я не стану касаться науки индийцев, народа, отличного от сирийцев, их замечательных открытий в астрономии, более глубоких, чем открытия греков и вавилонян, их системы счисления, превосходящей все описания. Я хочу лишь сказать, что счет производится при помощи девяти знаков. Если бы об этих вещах узнали те, кто думает, будто достиг пределов науки только потому, что говорит по-гречески, то они убедились бы, что имеются и другие знающие кое-что «(см. F. Nau, Notes d'astronomie syrienne, Journal Asiatique, 6-éme série, t. 16. 1910, p. 225). К 686 г.

относится свидетельство индийского грамматика Санкары, писавшего, что один и тот же знак, «помещенный в различных местах, обозначает различные понятия, выражаемые словами единица, десяток, сотня, тысяча и т. д.». (см. B. Datta. Early history of the principle of place value, Scientia, vol. 50, 1931).

[4] В рукописи фигуры девяти цифр отсутствуют. В арабских рукописях цифры имели вид

١٢٣٤٥٦٧٨٩.

В данной рукописи встречаются только цифры, обозначающие 1, 2, 3 и 5 (см. примеч. 11 и 12).

Варианты цифр в рукописи также отсутствуют. Говоря ниже о различии в изображениях пяти и шести, семи и восьми, ал-Хорезми, по-видимому, имеет в виду различие между восточно-арабскими и западно-арабскими цифрами (подробнее см. ниже в статье А. П. Юшкевича). Заметим, что разнобой в форме «индийских цифр» существенно задержал их распространение в Европе, так как давал повод к злоупотреблениям в денежных документах.

[5] «Книга алгебры и алмукабалы, т. е. восполнения и противопоставления»,— алгебраический трактат ал-Хорезми. «Алгебра и алмукабала» (Algebra et almucábala) — транскрипция арабских слов ал-джабр (восполнение) и ал-мукабала (противопоставление). Здесь имеются в виду слова этого трактата: «Когда я рассмотрел то, что нужно людям при счете, я нашел, что все это есть число. Я нашел, что все числа составлены из единиц и единица входит в состав всех чисел» (см. с. 21 настоящего издания). Ссылка на алгебраический трактат указывает на то, что арифметический трактат ал-Хорезми был написан позже алгебраического.

[6] Предложения от слов «И об этом говорится в другой книге по арифметике» до слов «А теперь вернемся к книге» являются явной вставкой переписчика. «Другая книга по арифметике» — это, возможно, «Книга о сложении и вычитании», которую, как свидетельствуют средневековые арабские источники, написал ал-Хорезми (подробнее — в статье А. П. Юшкевича).

Утверждение о том, что единица не является числом, высказывалось еще Аристотелем («Наименьшее число, взятое вообще, есть двойка».— Аристотель. Физика, перевод В. П. Карпова. М., 1937, с. 97). Следует отметить близость цитируемых слов ал-Хорезми: «Всякое число составляется из единиц» и «Все числа составлены из единиц» и определения числа у Евклида: «Число же — множество, составленное из единиц» (Евклид. Начала, 2-е определение VII книги, т. II, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.—Л., 1949, с. 9).

[7] «...До бесконечного числа...»: этот оборот речи не дает оснований приписывать автору рукописи идеи о бесконечно большом числе. (Подробнее — в статье А. П. Юшкевича). Ниже для пятого разряда переписчик применяет знак, изображающий десять, с чертой наверху.

[7a] В тексте ал-Хорезми здесь, по-видимому, стояло «следующий за ним», а слова «который предшествует ему» ошибочно внесены переводчиком или переписчиком.

[8] Индийцы и арабы обозначали нуль маленьким кружком или точкой. Возможно, что первоначально десятичная позиционная система у индийцев не имела знака нуля. При пользовании счетной доской для обозначения отсутствовавшего разряда можно было просто оставлять пустой столбец счетной доски, как это и делали китайцы, пользовавшиеся при вычислениях на счетной доске десятичной позиционной системой без нуля. Наиболее раннее появление знака нуля в виде точки и маленького кружка засвидетельствовано в Кампучии и Индонезии на Суматре в записях 605 и 608 г. по эре сака, начало которой обычно относят к 78 г. н. э. (по мнению некоторых ученых, начало этой эры было в 128 г.; см. G. Coedès. A. propos de l'origine des chiffres arabes, Bulletin of the London School of Oriental Studies, vol. 6, 1931).

Об употреблении в Индии нуля в виде точки писал около 725 г. работавший в Китае индийский буддист Гаутама Сидхарта, известный в Китае под именем Цюйтань Сида (см. J. Needham and Wang Ling Science and civilisation in China, vol. 3. Mathematics and the sciences of the heavens and the earth. Cambridge, 1959, p. 12).

Весьма вероятно, что обозначение нуля в виде кружка заимствовано индийцами у александрийских астрономов, которые пользовались этим знаком при обозначении отсутствующих разрядов шестидесятиричных дробей. Шестидесятиричные цифры обозначались при помощи греческой буквенной нумерации, нуль — буквой «о» (омикрон) с черточкой сверху. Числовое значение этой буквы, равное 70, не могло привести к недоразумениям. Существует предположение, что знак «о» является первой буквой греческого слова οὐδέν — «ничто» и что его употреблял Птолемей ок. 100 г. Индийские ученые познакомились с александрийской астрономией в V в., когда в Индии появилась книга «Учение Пулисы» (Пулиса-сиддханта), являвшаяся, по-видимому, переводом книги александрийского ученого IV в. Паулоса.

В Европе наименование нуля «кружком» или «цифрой» распространилось в XIII в. Термин «цифра», восходящий к арабскому «ас-сифр» (перевод санскритского названия нуля «шунья», т. е. пустое, отсутствующее), применялся иногда в этом значении до конца XVIII в. В XV—XVI вв. слово cifra приобрело смысл знака для чисел 0, 1, 2, ..., 9. С этого же времени в некоторых европейских языках (немецком, русском) за нулем постепенно закрепилось латинское слово nulla — никакая, пустая. В романских и английских языках название нуля является производным от латинских вариантов термина «ас-сифр» (французское zero, английское zero и cipher).

[9] В рукописи обозначения 10, 20 и 30 при помощи индийских цифр отсутствуют (римские цифры X, XX и XXX здесь, очевидно, заменяют арабские числительные, написанные словами).

[10] Слова «Мы же вернемся к книге» указывают на то, что здесь кончается еще одна вставка переписчика. Начинается эта вставка, по-видимому, со слов «но следует знать».

[11] Цифры, обозначающие сто, двести и триста, в рукописи обозначены 100, 200, 300. Здесь переписчик, по-видимому, пытается воспроизвести цифры арабской рукописи ал-Хорезми. В издании Бонкомпаньи вместо 200 ошибочно напечатано 300 [5, с. 4].

[12] Цифрой 325 в рукописи обозначен § 29. В издании Бонкомпаньи вместо 325 ошибочно напечатано 335 (см. [5, с. 5]). Цифры 4, 6, 7, 8 и 9 в рукописи не встречаются.

[13] Предложения от слов «Если же в каком-нибудь разряде собралось X или больше», также, по-видимому, являются вставкой переписчика. Такое разъяснение нужно при изложении операции сложения, что и производится в соответствующем месте в других выражениях. В рукописи Иоанна Севильского (см. примеч. 1) такого отступления при изложении позиционной системы нет (подробнее — ниже в статье А. П. Юшкевича).

[14] Такие громоздкие наименования применялись всеми математиками стран ислама, а в Европе ими пользовались еще в XVI в. Например, немецкий математик Адам Ризе (ок. 1525 г.) выражал число 86 789 325 178 так: «восемьдесят шесть тысяч тысяч тысяч, семьсот тысяч тысяч, восемьдесят девять тысяч тысяч, триста тысяч, двадцать пять тысяч, одна сотня, семьдесят восемь».

Слово «миллион» (от итальянского millione — увеличительное от mille — «тысяча») впервые употребил Марко Поло для описания сказочных богатств Китая; современники Поло, не верившие этим рассказам, дали ему прозвище «Марко Миллионе». В математику этот термин, был введен в XV в. Лукой Пачоли. В конце того же века Никола Шюке ввел термины «биллион», «триллион» и т. д. до «нониллиона» для 2-й, 3-й, ..., 9-й степени миллиона; термины Шюке с несущественными изменениями применяются и в настоящее время, однако большей частью не для степеней миллиона, а для 3-й, 4-й, ..., 10-й степени тысячи.

[15] Пример многозначного числа, записанного «индийскими цифрами», отсутствует в рукописи; как видно из следующего абзаца, это число есть ?? 180 703 051 492 863; знаком ?? мы обозначаем отсутствущие в рукописи «две буквы», которые указывают коэффициент при 1000^5.

[16] Первый пример вычитания у ал-Хорезми 6422—3211=3211, когда каждая цифра уменьшаемого больше соответственной цифры вычитаемого. Цифровая

запись уменьшаемого и вычитаемого, записанных друг над другом, и запись разности в рукописи отсутствуют.

[17] Второй пример вычитания у ал-Хорезми 1144—144=1000, когда некоторые цифры вычитаемого совпадают с соответственными цифрами уменьшаемого («так, чтобы от его разрядов ничего не осталось»). Цифровая запись уменьшаемого и вычитаемого и запись разности отсутствуют в рукописи. Третий упомянутый выше пример вычитания в рукописи пропущен; этот пример, несомненно, относится к тому случаю, когда некоторые цифры вычитаемого больше соответственных чисел уменьшаемого; в «Книге Алгоризма о практике арифметики» Иоанна Севильского, являющейся обработкой арифметического трактата ал-Хорезми, приведены примеры вычитания 12025—3604 и 10000—15 [5, с. 33—34]. Как видно из подробных объяснений Иоанна, вычитание производилось путем постепенного стирания цифр уменьшаемого и записи на их месте цифр разности. Например, при вычитании 12025—3604 вычитаемое располагалось под уменьшаемым; так как из 2 нельзя вычесть 3, из высшего разряда заимствовалась единица, которую стирали; из 12 вычитали 3 и остаток 9 писали на месте стираемых 2, так что на месте уменьшаемого оказывалось число 9025. Чтобы вычесть 6 из 0, занималась 1 и на месте 9 писали 8, далее из 10 вычитали 6 и на месте 0 писали 4, на месте уменьшаемого оказывалось число 8425. Наконец, из 5 вычитали 4 и на месте уменьшаемого оказывалась разность 8421.

Отсутствие в рукописи третьего примера и недостаточно внимательное чтение этой рукописи привели некоторых историков математики к неправильному мнению о том, что ал-Хорезми не объясняет, как производить вычитание в случае, когда цифра вычитаемого больше одной из цифр уменьшаемого (см., например, [86]).

[18] Ал-Хорезми считает раздвоение (mediatio), т. е. деление пополам и удвоение (duplicatio), особыми арифметическими действиями. Возможно, что эти действия заимствованы из египетских источников, так как в древнем Египте умножение производилось путем последовательного удвоения множимого и сложения результатов удвоения. Как известно, всякое натуральное число можно записать в виде суммы чисел вида 2^m, где m изменяется от нуля до некоторого натурального числа. Это представление равносильно записи данного числа в двоичной системе (например, $37=32+4+1$), а деление производилось раздвоением $\left(\text{например, частное от деления 19 на 8 представлялось в виде } 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$. Иоанн Севильский указывал, что «раздвоение есть вид деления, а удвоение — вид умножения» и выделение их в отдельные действия объясняется только тем, что они «необходимы при нахождении корня, который находится с помощью удвоения и раздвоения. По этой причине они здесь приведены самостоятельно, хотя и должны были бы быть приведены более подобающим образом после разбора умножения и деления» [5, с. 38]. По-видимому, этого же мнения придерживался и ал-Хорезми.

[19] Слова «тридцать частей из шестидесяти составляющих единицу» означают, что ал-Хорезми записывал дробную часть результата раздвоения в шестидесятиричных дробях. Иоанн Севильский записывал результат раздвоения числа 9783 в виде $\begin{matrix}4890\\30\end{matrix}$ (см. примеч. 45).

[20] Мы переводим словами «было взято кратным» слово duplicetur, букв. «удвоилось». В арабском тексте здесь, несомненно, стоял глагол тада‘афа, означающий и «удваиваться» и «быть взятым кратным»; латинский переводчик перевел этот глагол в его первом значении.

Слова «я показал уже в книге» — указание на алгебраический трактат ал-Хорезми, где умножение определяется аналогично: «Для того чтобы умножить число на число, необходимо взять одно из двух чисел кратным столько раз, сколько единиц в другом» (см. с. 28 этого издания).

[21] Здесь ал-Хорезми считает необходимым для умножения чисел знать наизусть таблицу умножения однозначных чисел до 9×9. Иоанн Севильский также рекомендует часто упражняться в умножении однозначных чисел и держать

наготове результаты этих умножений; у него приводится и таблица умножения [5, с. 103].

[22] Слова «на доске или на каком-нибудь другом предмете, где тебе угодно» (in tabula, vel in qualibet re alia quam volueris) указывают на то, что ал-Хорезми производил вычисления на доске, по-видимому, покрытой песком или пылью. Вычисления на доске, покрытой песком или пылью, были широко распространены на средневековом Востоке, в частности, такие вычисления описаны в арифметических трактатах Ахмада ан-Насави (ум. ок. 1030) «Достаточное об индийской арифметике» [67], рукопись которого хранится в Лейденской университетской библиотеке (Cod. or. 556/6), и Насир ад-Дина ат-Туси (1201—1274) «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли», рукопись которого хранится в Институте востоковедения АН УзССР (№ 8990/6).

[23] В рукописи запись сомножителей друг под другом отсутствует; как видно из текста, эти числа должны быть записаны так:

2326
214

[24] Как видно из текста, умножение указанных чисел производится следующим образом: сначала умножается на 214 число тысяч множимого, т. е. 2, и произведение 428 записывается над 214, причем 2 стирается:

428326
214

Затем число 214 передвигается вправо на разряд:

428326
214

Далее умножается на 214 число сотен множимого, т. е. 3. Первые две цифры произведения 642 складываются с соответственными цифрами 28 первого произведения и сумма 64+28=92 записывается над 21, а оставшаяся цифра 2 записывается вместо числа сотен множимого:

492226
214

Число 214 передвигается вправо еще на один разряд:

492226
214

и на число 214 умножается число десятков множимого, т. е. 2. Первые две цифры произведения 428 складываются с соответственными цифрами 22. Сумма двух первых произведений и сумма 42+22=64 записывается над 21, а цифра 1 этой суммы складывается с 8. Оставшаяся цифра 8 записывается вместо числа десятков множимого:

496486
214

Число 214 передвигается вправо еще на один разряд:

496486
214

и на число 214 умножаются единицы множимого, т. е. 6. Первые три цифры произведения 1284 складываются с соответственными цифрами 648 суммы трех первых произведений и сумма 648+128=776 записывается над 21, оставшаяся цифра 4 записывается вместо единиц множимого. Таким образом получается произведение 497764.

[25] Здесь ал-Хорезми излагает способ проверки операций удвоения и умножения при помощи девятки и указывает, что если остаток от деления на 9 результата удвоения остатка от деления на 9 данного числа или произведения остатков от деления на 9 данных сомножителей не совпадает с остатком от деления на 9 результата удвоения данного числа или произведения данных сомножителей, то вычисление произведено неправильно. Как и многие позднейшие авторы, ал-Хорезми не отмечает, что совпадение указанных остатков не гарантирует правильности вычисления, являясь лишь необходимым и недостаточным условием правильности вычисления.

[26] В рукописи определение деления отсутствует; однако ниже, при объяснении действия деления, частным от деления несколько раз называется «то, что причитается одному», а после изложения действия деления говорится: «деление подобно умнежению, но оно обратно ему».

[27] В рукописи запись делимого и делителя друг над другом отсутствует; как видно из текста, эти числа должны быть записаны в виде

46468
324

[28] Из текста следует, что деление указанных чисел производится следующим образом. Первая цифра частного 1 записывается над последним разрядом делителя:

1
46468
324

Далее произведения 1 на цифры делителя 324 вычитаются из соответственных цифр делимого и разность записывается вместо этих цифр делимого:

1
14068
324

Затем число 324 передвигается вправо на разряд:

1
14068
324

Вторая цифра частного, равная 4, записывается над единицами делителя:

14
14068
324

Далее произведения 4 на цифры делителя вычитаются из соответственных цифр числа 14068, и разность 1406—1296=110 записывается вместо числа 1406:

14
1108
324

Число 324 передвигается вправо еще на один разряд:

14
1108
324

Третья цифра частного, равная 3, записывается над единицами делителя:

143
1108
324

Далее произведения 3 на цифры делителя вычитаются из соответственных цифр числа 1108, и разность 1108—974=136 записывается вместо числа 1108:

143
136
324

Эта общепринятая у математиков стран ислама запись числа с дробью равносильна нашей записи $143\frac{136}{324}$. Эта дробь и выражает частное от деления. Выражением «136 частей из 324 частей единицы» здесь переведено арабское словесное выражение дроби $\frac{136}{324}$ (ср. примеч. 31).

[29] Пропущенная в рукописи запись делимого и делителя имеет вид

1800
9

[30] Здесь пропущена запись числа 200 — частного от деления 1800 на 9.

[31] В арабском языке имеются специальные названия для долей единицы от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{10}$; названия дробей от $\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{10}$ производятся определенным способом из названий соответственных целых чисел (3 = с̱ала̄с̱, $\frac{1}{3}$ = с̱улс̱;

4 = арба‘, $\frac{1}{4}$ = руб‘, 5 = х̬амс, $\frac{1}{5}$ = х̬умс, 6 = ситт, $\frac{1}{6}$ = судс, 7 = саб‘, $\frac{1}{7}$ = суб‘, 8 = с̱ама̄н, $\frac{1}{8}$ = с̱умн, 9 = тис‘, $\frac{1}{9}$ = тус‘, 10 = ‘ашар, $\frac{1}{10}$ = ‘ушр). Дроби вида $\frac{1}{n}$ при $n > 10$ выражаются оборотами вида „одна часть из n“.

[32] Ал-Хорезми говорит о шестидесятиричных дробях, с которыми он познакомился по известному в VIII—IX вв. в Багдаде арабскому переводу одного из индийских астрономических трактатов, носивших общее название «сиддхант» (сиддханта — «учение»; перевод был известен под названием «Синдхинд», представляющим собой арабское искажение слова сиддханта). В V—VII вв. в Индии был написан целый ряд таких сиддхант, последняя из которых «Усовершенствованное учение Брахмы» — Брахма-спхута-сиддханта — была написана крупным ученым VII в. Брахмагуптой, а первая «Пулиса-сиддханта», написанная под влиянием астрономического труда Птолемея, по-видимому, является переводом книги александрийского ученого Паулоса, переселившегося в IV в. из Александрии в Индию. Александрийские астрономы, в свою очередь, заимствовали шестидесятиричные дроби и деление круга на 360 градусов у астрономов Вавилона, где шестидесятиричная система счисления и шестидесятиричные дроби были распространены с глубокой древности.

[33] Минута — minuta, букв. «уменьшенная» — $\frac{1}{60}$, перевод арабского слова дак̣ӣк̣а и греческого слова lepta (индийские астрономы называли минуты словом «липта», являющимся искажением слова lepta).

[34] Секунда — secunda, букв. «вторая» (т. е. вторая уменьшенная) — $\frac{1}{60^2}$, перевод арабского с̱анийа.

[35] Терция — tertia, букв. «третья» — $\frac{1}{60^3}$, перевод арабского с̱а̄лис̱а.

[36] Кварта — quarta, букв. «четвертая» — $\frac{1}{60^4}$, перевод арабского ра̄би‘а.

[37] Градус — gradus, букв. «степень», перевод арабского дараджа.

[38] Секста — sexta и октава — octava, букв. «шестая» и «восьмая» — $\frac{1}{60^6}$ и $\frac{1}{60^8}$, переводы арабских с̱адиса и с̱а̄мина. В рукописи вместо «кварты», «997 сексты» и «октавы» ошибочно написано соответственно «терции», «кварты» и «квинты» (квинта — quinta, букв. «пятая» — $\frac{1}{60^5}$, перевод арабского х̮а̄миса).

[39] В рукописи вместо вторых «полутора» ошибочно написано «два с половиной». Здесь выполняется действие $1^\circ 30' \cdot 1^\circ 30' = 90' \cdot 90' = 8100'' = 135' = 2^\circ 15'$, т. е. $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$.

[40] Здесь выполняется действие $2^\circ 45' \cdot 3^\circ 10' 30'' = 165' \cdot 1143'' = 1885950''' = 31432'' 30''' = 523' 52'' 30''' = 0^\circ 43' 52'' 30'''$.

[41] Другой способ, по-видимому, способ умножения шестидесятиричных дробей, аналогичный нашему способу умножения десятичных дробей. Этим способом пользовались александрийские астрономы, от которых его могли заимствовать авторы индийских «сиддхант».

[42] Деление $\frac{15}{3} = 5$ на $\frac{6}{3} = 2$ и указание на деление половин и четвертей, вероятно, отсутствовали в арабском тексте, так как абзац посвящен делению шестидесятиричных дробей; вероятно, в арабском тексте рассматривалось деление 15 терций на 6 терций, а переводчик перевел слово «терция» словом

«треть», а затем добавил, что $\frac{15}{3}=5$ и $\frac{6}{3}=2$. У Иоанна Севильского в соответственном месте нет деления половины, третей и четвертей, и говорится только, что «при делении необходимо делить подобные дроби на подобные, т. е. минуты на минуты, секунды на секунды и так далее, чтобы получившееся было целым числом» [5, с. 53].

[43] Здесь выполняется действие $10''\cdot 5'=2'$; в рукописи ошибочно вместо «две минуты» два раза написано «две секунды». Та же ошибка имеется и в соответственном месте у Иоанна Севильского.

[44] Здесь выполняется действие $10':5'''=7200$.

[45] Отсутствующее в рукописи изображение суммы 12°, $30'$, $45''$ и $50'''$ у Иоанна Севильского имеет вид

градус	12
минута	30
секунда	45
терция	00
кварта	50

(см. [5, с. 54]). В нашей рукописи вместо XLV первый раз ошибочно написано XLVI.

[46] По-видимому, здесь имеется в виду, что одна из дробей записана указанным способом, а затем каждый разряд второй дроби складывается с соответственным разрядом первой дроби, причем этот разряд первой дроби стирается и заменяется соответственным разрядом суммы.

[47] При вычитании ал-Хорезми, по-видимому, записывает на счетной доске и уменьшаемую, и вычитаемую дроби; возможно, что они записываются не вертикально, а горизонтально.

[48] Здесь ал-Хорезми переходит к умножению простых дробей и выполняет действие $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}=\frac{12}{63}$. Следует отметить, что седьмые и девятые доли он рассматривает как первые разряды, «как бы минуты» (quasi minutae), а шестьдесят третьи доли — как второй разряд.

[49] Рукопись обрывается на умножении дробей $3\frac{1}{2}\cdot 8\frac{3}{11}$, которые ал-Хорезми записывает в виде

3		8
1	и	3
2		11

(с аналогичной записью мы встречались выше, см. примеч. 28).

О содержании не дошедшей до нас части арифметического трактата ал-Хорезми можно судить по переработке Иоанна Севильского, которая содержит подробное изложение умножения и деления обыкновенных дробей, а также извлечение квадратного корня, упоминавшееся ал-Хорезми при переходе от арифметики целых чисел к арифметике дробей.

В разделе, посвященном умножению и делению дробей, Иоанн вводит понятия знаменателя дроби (denominatio fractionis, букв. «наименование дроби»), числителя дроби (numerus fractionis, букв. «число дроби») и общего знаменателя (numerus denominationum — «число наименований» и numerus communis — «общее число»), который находится простым перемножением знаменателей всех слагаемых; «числом наименований» Иоанн называл общий знаменатель дробных частей одного числа, а «общим числом» — общий знаменатель двух дробных чисел. Текст Иоанна здесь отличается от текста ал-Хорезми, что видно из слов Иоанна: «это и есть также то, что, как известно, говорит Алхоризм (alchorismus dicere videtur) об умножении и делении дробей, хотя и по-иному» [5, с. 68], однако из этих же слов следует, что разделы об умножении и делении обыкновенных дробей имеются и у ал-Хорезми. В частности, у Иоанна доведен до конца пример умножения $3\frac{1}{2}\cdot 8\frac{3}{11}=28\frac{21}{22}$, на котором обрывается наша рукопись; результат сформулирован в виде: «28 целых и 20 одна двадцать вторая одной целой» [5, с. 68] (здесь исправлена ошибка Бонкомпаньи, который принял выражение et 20 за число 720).

Раздел, посвященный извлечению квадратного корня, у Иоанна Севильского начинается с указания на важность этой операции: «Учение об этом крайне необходимо не только в геометрии и астрономии, но и во всем квадривии» [5, с. 72]. Под квадривием понималась совокупность математических наук, к которым в средние века как в странах ислама, так и в Европе, помимо геометрии и астрономии, относились арифметика и музыка; из восточных квадривиев упомянем квадривий великого среднеазиатского ученого Абу Али ибн Сины (980—1037), входящий в состав его энциклопедического трактата «Книга исцеления», написанный в начале XI в. Далее Иоанн дает определение квадратного корня из данного числа как числа, которое будучи умноженным на себя, дает данное число, и разбирает некоторые свойства чисел, которые используются при извлечении квадратного корня. Для извлечения квадратного корня из данного числа Иоанн разбивает данное число на группы по два разряда, считая справа, и находит первую цифру корня как число, квадрат которого равен числу, стоящему в первой слева группе, или является ближайшим к нему по недостатку. Например, при извлечении корня из 5625 группами разрядов являются 56 и 25 и первой цифрой корня является 7. Иоанн записывает данное число и найденное число 7 следующим образом:

5625
7,

а затем производит вычитание 56—7=49, 56—49=7 и записывает 7 вместо 56:

725
7

Далее нижняя семерка удваивается и сдвигается на разряд вправо:

725
14

Затем находится число, которое, «будучи умноженным на удвоенное число и на себя, дает число, равное верхнему, или ближайшее к нему меньшее» [5, с. 75], т. е. в данном случае 5. Найденное число записывается внизу, справа от 14:

725
145

Далее из 25 вычитаются произведения 100·5, 20·5 и 5·5, причем после первых двух из этих вычитаний число 725 заменяется соответственно на 225 и 25, а после третьего вычитания из числа 725 не остается ничего, что указывает на то, что корень извлечен нацело. После этого в числе 145 число 14 снова заменяется его половиной, т. е. 7, и полученное число 75 является искомым корнем.

Как мы видим, при извлечении квадратного корня Иоанн действительно пользуется операциями удвоения и раздвоения (см. примеч. 18).

В случае, когда корень не извлекается нацело, Иоанн рекомендует прибавить к его целой части последний остаток, разделенный на удвоенную целую часть корня, что равносильно формуле

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a},$$

где a^2 — наибольший целый квадрат, содержащийся в N.

Для проверки извлечения квадратного корня Иоанн также пользуется правилом девятки (75 при делении на 9 дает остаток 3, квадрат этого остатка равен 9, а 5625 делится на 9 без остатка). Отметим, что индийцы, наряду с квадратными корнями, умели извлекать и кубические корни, из математиков стран ислама впервые извлечение кубических корней мы находим в X в. у ан-

Насави [67], проверка извлечения квадратных и кубических корней при помощи девятки впервые встречается в арифметической части упомянутого выше квадривия Ибн Сины. Во второй половине того же XI в. среднеазиатский ученый и поэт Омар Хайям (1048 — ок. 1130) в не дошедших до нас «Проблемах арифметики» строго доказал правильность методов индийцев извлечения квадратных и кубических корней при помощи арифметических книг «Начал» Евклида и показал, «как определять ребра квадрато-квадратов, квадрато-кубов, кубо-кубов и так далее, сколько угодно, чего раньше не было» (Омар Хайям. Трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича. Вступит. статья и комментарии Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. М., 1964, с. 74—75. В дальнейшем: Омар Хайям. Трактаты).

ПРИМЕЧАНИЯ К АЛГЕБРАИЧЕСКОМУ ТРАКТАТУ

[1] В противоположность «Книге об индийской арифметике» ал-Хорезми его алгебраический трактат сохранился в арабском варианте. Данный перевод выполнен по рукописи (рис. 36), переписанной в 1342 г. (743 г. хиджры) и хранящейся в Оксфорде (Бодлеянская библиотека Оксфордского университета, Hunt. 214, лл. 1—34).

Арабский текст был впервые издан в 1831 г. вместе с английским переводом Ф. Розеном [21]. Критический пересмотр этого издания осуществил в 1917 г. Ю. Рушка [255]. Он отметил, что английский перевод не всегда дословен, имеются вставки издателя (например, названия глав, отсутствующие в рукописи, и т. д.) и что из-за некоторой свободы перевода возможно неверное толкование математического смысла. Ю. Рушка дал более точный (немецкий) перевод некоторых отрывков.

Арабский текст трактата по той же рукописи был переиздан в 1939 г. в Каире [16] и не раз переводился — полностью или в отрывках — на европейские и восточные языки (см. аннотированную библиографию).

До недавнего времени оксфордская рукопись считалась уникальной, но сейчас имеются сообщения еще о двух: одна из них находится в анонимной рукописи Берлинской библиотеки (№ 5955, 6, лл. 60—95 об.), другая — в египетской библиотеке Шибин ал-Ком [98].

Алгебраический трактат ал-Хорезми пользовался широкой популярностью на Ближнем и Среднем Востоке и в средневековой Европе. Он относился к числу первых сочинений, переведенных с арабского языка на латынь. Имеются два латинских перевода «Алгебры» ал-Хорезми, выполненных в XII в. в Испании выдающимися переводчиками: Герардо Кремонским (1114—1187 гг.) и Робертом из Честера (XII в.). Перевод Роберта из Честера, законченный в Сеговии в 1145 г., по-видимому, более ранний. Оба перевода неполны: в них отсутствуют главы о геометрии и разделе наследства.

Перевод Герардо Кремонского был опубликован в 1838 г. Г. Либри [5, с. 253—297] без указания имени переводчика. Принадлежность его Герардо Кремонскому доказал в 1905 г. А. Бьёрнбо [103]. Латинский текст Роберта Честерского вместе с английским переводом издал в 1915 г. Л. Ч. Карпинский [10] по рукописям Колумбийского университета (Нью-Йорк), Венской и Дрезденской библиотек.

В арабской рукописи трактат не имеет заглавия. Название «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы», под которым он известен в историко-математической литературе, взят из третьего абзаца трактата.

Латинские переводы трактата имеют различные заголовки: нью-йоркская рукопись перевода Роберта Честерского, опубликованного Л. Ч. Карпинским, озаглавлена: «Книга алгебры и алмукабалы, содержащая доказательства правил уравнений алгебры» (Liber Algebrae et Almucabalae, continens demonstrationes aequationum regularum Algebrae). Венская рукопись того же перевода озаглавлена: «Книга исчисления восполнения и противоположения» (Liber restaurationis et oppositionis numeri), дрезденская рукопись не имеет заголовка. Перевод Герардо Кремонского, изданный Либри, озаглавлен: «Книга Маумета

Рис. 36.

сына Моиса Алхоаризми об алгебре и алмукабале» (Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala). Часть этого трактата, переведенная Иоанном Севильским, озаглавлена: «Извлечение из книги, именуемой глеба мутабилиа» (Exceptiones de libro, qui dicitur gleba mutabilia); последнее название, очевидно, также является искажением слов «алгебра и алмукабала».

Роберт Честерский называет автора трактата Mahomet filius Mosi Algaurizin, а также Algoarizin и Algoarizim.

Между арабским и латинскими текстами сочинения ал-Хорезми имеются различия: в последних отсутствует геометрический раздел и «Книга о завещаниях», составляющая почти половину трактата. Латинские переводы также несколько отличаются друг от друга. Герардо Кремонский более точно следует арабскому оригиналу, чем Роберт Честерский.

Слова о том, что Аллах «послал Мухаммада... и сделал его пророком в то время, когда давно уже не было пророков», заимствованы из Корана, где говорится: «Знающие Писание! к вам пришел посланник наш: он ясно укажет вам промежуток времени, в который не было посланников, чтобы вы не говорили: к нам не приходил ни благовестник, ни обличитель» (Коран, арабский текст и русский перевод Г. С. Саблукова. Казань, 1907, гл. V, стих 22, с. 201). Согласно Корану, Мухаммад — шестой пророк («посланник»): первые пять — Адам — первый человек, Нух — библейский Ной, Ибрахим — библейский Авраам, Муса — библейский Моисей и Иса — Евангельский Иисус.

Заметим, что первые слова латинского текста трактата ал-Хорезми «Об индийском счете», которые мы передаем словами «Вознесем достойную похвалу богу», очевидно, являются переводом той же формулы, которой начинается и «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы».

На полях первой страницы рукописи в правом верхнем углу написано: «Это — первая книга, написанная об алгебре и алмукабале в (странах) ислама».

[2] К словам ал-Хорезми о трех типах ученых на полях рукописи приведено примечание: «Как Архимед, как обладающие наукой медицины и геометрии, как имам Абу Ханифа». Обладающие наукой медицины — это, вероятно, Гиппократ и Гален, обладающий наукой геометрии — Евклид. Абу Ханифа Ну'ман ибн Сабит (690—767 гг.) — известный арабский законовед из г. Куфы, на которого имеются ссылки в трактате ал-Хорезми (см. ниже).

[3] Ал-Ма'мун — халиф из династии Аббасидов, правивший, с 813 по 833 г. Был известен как покровитель наук, создал в Багдаде «Дом мудрости» (байт ал-хикма), вокруг которого группировались выдающиеся ученые того времени. К ним принадлежал и ал-Хорезми, а также несколько других крупных математиков и астрономов — уроженцев Средней Азии (ал-Фаргани, ал-Марвази, ал-Мерверруди, ал-Джаухари и др.). Возможно, они объединились при дворе ал-Ма'муна в Мерве, где находилась его резиденция как наместника Хорасана, и позднее вместе с ним переселились в Багдад.

[4] Алгебра и алмукабала (у ал-Хорезми — ал-джабр ва-л-мукабала) — первоначально термины, обозначающие две алгебраические операции — перенос вычитаемых выражений из одной части равенства в другую в виде прибавляемых членов (при этом первая часть «восполняется») и сокращение равных слагаемых в обеих частях равенства (при этом сокращающиеся члены «противопоставляются»). Ал-Хорезми называет алгебру «исчислением алгебры и алмукабалы», так как при помощи этих операций алгебраические уравнения приводятся к канонической форме, для которой ал-Хорезми располагал определенными правилами решения. Название «алгебра и алмукабала» вскоре стало названием алгебры как науки. Ю. Рушка [225, с. 13] отметил, что уже в «Посланиях братьев чистоты» (рисала ихван ас-сафа), составленных около 1000 г., термин «ал-джабр» был употреблен для образования слова «алгебраист», которым обозначался специалист-математик, располагавший — наряду с геометром — определенными методами для решения задач. Как общепринятый термин, «алгебра и алмукабала» фигурирует и в других сочинениях X—XI вв., посвященных решению уравнений.

В Западной Европе алгебра называлась вначале algebra et almucabala, а затем просто algebra.

Алгебру называли также «большим искусством» (ars major) в противоположность «малому» (ars minor), т. е. практической арифметике. Часто вплоть до XVI в. за ней сохраняли арабское название «Algebra et almuchabala», а иногда ее именовали «Ars rei et census», что означает дословно «искусство вещи и имущества» и также соответствует арабской терминологии.

[5] Возможно, что под термином «хандаса» здесь понимается инженерное искусство, так как слово «мухандис» до настоящего времени как в арабском языке, так и во многих других восточных языках означает «инженер». Обычно это слово переводится как геометрия.

[6] По поводу этих слов ал-Хорезми см. примеч. 7 к арифметическому трактату.

[7] «Корень» (джизр, букв. корень растения) — название неизвестной величины, которую требуется определить из уравнения. Этот термин, по-видимому,— перевод санскритского слова «мула» — «корень растения», применявшегося индийскими учеными для обозначения квадратного корня. Первоначально неизвестная величина называлась «имуществом» (мāл, ср. с примеч. 8), позднейшие арабоязычные математики стали называть ее «вещью» (шай), возможно, под влиянием слов ал-Хорезми: «Корень — это всякая вещь, умножаемая на себя». Названия неизвестной res и cosa, применявшиеся европейскими алгебраистами,— переводы термина «шай» на латинский и итальянский языки.

[8] «Квадрат» (мал, букв. имущество) — название квадрата корня уравнения. Первоначально этим словом обозначалась неизвестная в линейных уравнениях, а именно, в задачах, где требовалось определить некоторое имущество; позднее при решении квадратных уравнений это название закрепилось за квадратом неизвестной. Средневековые математики Европы называли квадрат неизвестной census и substantia — переводами слова мāл.

[9] Под «простым числом» ал-Хорезми понимает натуральное число, что видно из его слов: «Все числа составляются из единиц», «Число, равное или большее единицы, или дробь, меньшая ее».

[10] Это — уравнения $cx^2=bx$, $cx^2=a$, $bx=a$, где a, b, c — положительные числа. Предлагаемая ал-Хорезми классификация линейных и квадратных уравнений объясняется тем, что он требовал, чтобы в обеих частях уравнения стояли положительные члены: так как по представлениям его времени отрицательных чисел не существовало, уравнение в противном случае не имело смысла.

[11] $x^2=5x$, $x=5$, $x^2=25$. Тот факт, что ал-Хорезми, наряду со значением корня, указывает значение его квадрата, говорит о том, что основным неизвестным для него все еще является «имущество» (мāл — квадрат), а корень (джизр) рассматривается только как корень из этого «имущества» (ср. примеч. 8).

[12] $\frac{1}{3}x^2 = 4x$, $x^2 = 12x$, $x = 12$, $x^2 = 144$.

[13] $5x^2 = 10x$, $x^2 = 2x$, $x = 2$ ($x^2 = 4$).

[14] **Т. е. если квадрат умножен на число или дробь.**

[15] $x^2=9$, $x=3$.

[16] $5x^2=80$, $x^2=16$, $x=4$.

[17] $\frac{1}{2}x^2 = 18$, $x^2 = 36$, $x = 6$.

[18] $x=3$, $x^2=9$.

[19] $4x=20$, $x=5$, $x^2=25$.

[20] $\frac{1}{2}x = 10$, $x = 20$, $x^2 = 400$.

[21] Это квадратные уравнения $cx^2+bx=a$, $cx^2+a=bx$, $bx+a=cx^2$, где a, b, c — положительные числа. У последователей ал-Хорезми (ал-Караджи, Омар Хайям, Леонардо Пизанский) они назывались «составными», а рассмотренные ранее уравнения (см. примеч. 10) обозначались как «простые». Аналогичная классификация кубических уравнений, содержащая 19 типов, была произведена в XI в. Омаром Хайямом (Омар Хаййам. Трактаты, с. 73—74); классификацию уравнений четвертой степени дал в XV в. ал-Каши, но она не

была закончена (Джемшид Гиясэддин ал-Каши. Ключ арифметики. Трактат об окружности, перевод Б. А. Розенфельда. М., 1956, с. 192).

Задачи, сводящиеся к квадратным уравнениям, решались еще древними вавилонянами, которым были известны общие правила числового решения этих уравнений. Древние греки решали задачи, сводящиеся к квадратным уравнениям, при помощи «геометрической алгебры». В частности, решаемая при помощи предложений II книги «Начал» Евклида задача о построении прямоугольника с данной суммой сторон, равновеликого данному квадрату, равносильна решению квадратного уравнения общего вида. Задачи, сводящиеся к квадратным уравнениям, решались наряду с более сложными задачами и в китайской «Математике в девяти книгах», законченной во II в. до н. э. Специально квадратными уравнениями занимались индийские математики Ариабхатта (V в.) и Брахмагупта (VII в.), сформулировавшие общие правила решения этих уравнений; при этом Ариабхатта рассматривал те же три случая, что и ал-Хорезми, а Брахмагупта, пользовавшийся отрицательными числами, объединил эти три правила в общее правило решения уравнения $cx^2+bx=a$, где c — положительное число, a и b могут быть и положительными, и отрицательными.

[22] Дирхем — серебряная монета на средневековом Востоке, название которой происходит от греческой драхмы.

[23] Решение этого уравнения обошло чуть ли не все средневековые арабские и западноевропейские учебники алгебры. В современных обозначениях уравнение имеет вид $x^2+10x=39$, и решение ал-Хорезми может быть записано в виде

$$x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}=\sqrt{25+39}-5=\sqrt{64}-5=8-5=3.$$

[24] $2x^2+10x=48$. Уравнение сводится к $x^2+5x=24$, и решение проводится по следующему правилу: $x=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+24}-\frac{5}{2}=\sqrt{6\frac{1}{4}+24}-2\frac{1}{2}=\sqrt{30\frac{1}{4}}-2\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}=3$ Таким образом, неизвестная есть 3, а ее квадрат — 9.

[25] $\frac{1}{2}x^2+5x=28$, $x^2+10x=56$, $x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+56}-\frac{10}{2}=\sqrt{25+56}-5=\sqrt{81}-5=9-5=4$. Итак, $x=4$, $x^2=16$.

[26] $x^2+21=10x$. Этот пример, как и $x^2+10x=39$, приводится почти во всех средневековых книгах об алгебре. Решение проводится по следующему правилу: $x=\frac{10}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-21}=5\mp\sqrt{25-21}=5\mp\sqrt{4}=5\mp2$. Рассматриваются оба корня уравнения $x_1=3$, $x_2=7$ (так как в этом случае они положительны), а также их квадраты: $x_1^2=9$, $x_2^2=49$.

[27] Уравнение $x^2+a=bx$ при $\left(\frac{b}{2}\right)^2<a$ имеет два мнимых корня.

[28] Уравнение $x^2+a=bx$ при $\left(\frac{b}{2}\right)^2=a$ имеет один корень $x=\frac{b}{2}$.

[29] $3x+4=x^2$, $x=\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+4}=1\frac{1}{2}+\sqrt{2\frac{1}{4}+4}=1\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{1}{4}}=1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}=4$, $x^3=16$.

Геометрическое доказательство правильности решения уравнений $x^2+10x=39$ и $x^2+21=10x$, которое ал-Хорезми приводит ниже, основывается на 5-м предложении II книги «Начал» Евклида[1].

30 Второй случай в арабской рукописи не разобран, но в нью-йоркской рукописи латинского перевода, принадлежащего Роберту из Честера, приведено построение для этого случая, хотя на чертеже отсутствуют буквы. Приводим указанный чертеж, дополнив его буквами и цифрами, аналогичными буквам и цифрам чертежа арабской рукописи для первого случая (рис. 37). Здесь

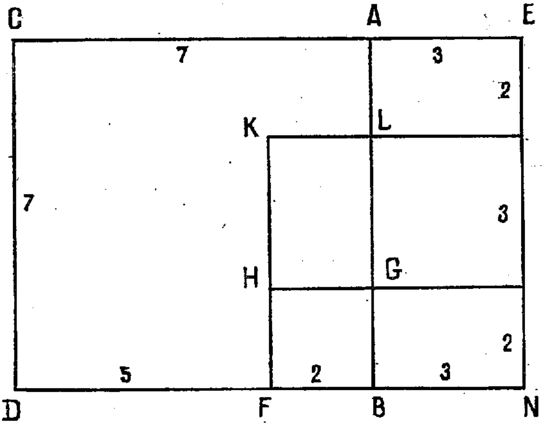


Рис. 37.

$DN=10$ — число корней, $ABNE=21$ — свободный член, $ABDC=x^2=49$, $BD=$ $=x=7$.

Соответствующий текст в переводе Роберта из Честера кончается словами: «Мы объяснили эти вещи кратко с помощью геометрии для того, чтобы то, что необходимо для понимания этой отрасли науки, можно было сделать более простым. Вещи, которые с некоторым трудом постигаются оком души, становятся ясными благодаря геометрическим фигурам» [10, 2-е изд., с. 89].

31 ʿук̣ӯд — букв. «узлы».

32 При умножении $x \pm a$ на $y \pm b$ нужно знать произведения xy, xb, ay, ab.

33 Мы переводим словами «прибавляются» и «вычитаются» термины зāид и нāк̣ис, дословно «избыточный» и «недостающий».

34 $(10+1)\cdot(10+2)=10\cdot 10+1\cdot 10+10\cdot 2+1\cdot 2=100+10+20+2=132$.

35 $(10-1)\cdot(10-1)=10\cdot 10-1\cdot 10-10\cdot 1+1\cdot 1=100-10-10+1=81$. Здесь ал-Хорезми формулирует «правило знаков» для чисел: «вычитаемая единица на вычитаемую единицу есть прибавляемая единица». Ал-Хорезми не пользуется отрицательными числами в чистом виде, но пользуется ими под видом «вычитаемых чисел». Аналогичное «правило знаков» сформулировано в «Арифметике» Диофанта (III в.): «Недостаток, умноженный на недостаток, дает наличие; недостаток же, умноженный на наличие, дает недостаток» (книга I, определение IX)[2].

36 $(10+2)\cdot(10-1)=10\cdot 10+2\cdot 10-10\cdot 1-2\cdot 1=100+20-10-2=108$.

---

[1] Евклид. Начала. Перевод и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. Т. I—III. М.—Л., 1948—1950.

[2] Диофант Александрийский. Арифметика и Книга о многоугольных числах. Перевод И. Н. Веселовского под ред. и с комментариями И. Г. Башмаковой. М., 1974.

[37] Мы переводим словами «отнимаемая вещь» термин илла̄ шай — «без вещи».

[38] $(10-x)\cdot 10 = 10\cdot 10 - 10\cdot x = 100 - 10x.$

[39] $(10+x)\cdot 10 = 10\cdot 10 + 10\cdot x = 100 + 10x.$

[40] $(10+x)\cdot(10+x) = 10\cdot 10 + 10\cdot x + 10\cdot x + x\cdot x = 100 + 20x + x^2.$

[41] $(10-x)\cdot(10-x) = 10\cdot 10 - 10x - 10\cdot x + x\cdot x = 100 - 20x + x^2.$
Здесь ал-Хорезми формулирует «правила знаков» для «вещей»: «вычитаемая вещь на вычитаемую вещь есть прибавляемый квадрат».

[42] $$\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right) = 1\cdot 1 - \frac{1}{6}\cdot 1 - \frac{1}{6}\cdot 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \\ + \frac{1}{36} = \frac{2}{3} + \frac{1}{36} = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

[43] $(10-x)\cdot(10+x) = 10\cdot 10 - 10\cdot x + 10\cdot x - x\cdot x = 100 - x^2.$

[44] $(10-x)\cdot x = 10\cdot x - x\cdot x = 10x - x^2.$

[45] В оригинале глаголы ķа̄бала, соответствующий существительному ал-муķа̄бала (см. примеч. 4), и дараха̣, букв. «зарыл в могилу».

[46] $(10+x)\cdot(x-10) = 10\cdot x + x\cdot x - 10\cdot 10 - 10\cdot x = x^2 - 100.$

[47] $$\left(10+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-5x\right) = \frac{1}{2}\cdot 10 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} - 5\cdot 10x - \frac{x}{2}\cdot 5x = 5 - 2\frac{1}{2}\times \\ \times x^2 - 49\frac{3}{4}x.$$

[48] $(10+x)\cdot(x-10) = (x+10)\cdot(x-10) = x^2 + 10\cdot x - 10\cdot x - 10\cdot 10 = x^2 - 100.$

[49] $(\sqrt{200} - 10) + (20 - \sqrt{200}) = 10.$

[50] $(20 - \sqrt{200}) - (\sqrt{200} - 10) = 30 + 2\sqrt{200} = 30 + \sqrt{800}.$

[51] $(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - x^2 - 10x.$

[52] $(100 + x^3 - 20x) - (50 + 10x - 2x^2) = 50 + 3x^2 - 30x.$

[53] Иррациональный корень — джиз̱р асам, дословно «глухой корень».

[54] $2\sqrt{x} = \sqrt{2\cdot 2x} = \sqrt{4x}.$

[55] $3\sqrt{x} = \sqrt{3\cdot 3x} = \sqrt{9x}.$

[56] $\frac{1}{2}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x} = \sqrt{\frac{1}{4}x}.$

[57] $2\sqrt{9} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 9} = \sqrt{36} = 6.$

[58] $3\sqrt{9} = \sqrt{3\cdot 3\cdot 9} = \sqrt{81} = 9.$

[59] $\frac{1}{2}\sqrt{9} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 9} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}.$

[60] Сравним с единицей — йус̣ӣбу ал-ва̄хид, дословно «попадает на единицу».

[61] $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}.$

[62] $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$

[63] $\sqrt{9}\cdot\sqrt{4} = \sqrt{9\cdot 4} = \sqrt{36} = 6.$

[64] $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{50}.$

[65] $\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}}.$

[66] $2\sqrt{9}\cdot 3\sqrt{4} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{36} = 36.$

[67] $AB = \sqrt{200}$, $AC = 10$, $BC = AB - AC = \sqrt{200} - 10$, $BD = 20$, $BE = \sqrt{200} = AB$, $ED = BD - BE = 20 - \sqrt{200}$, $GB = CB = \sqrt{200} - 10$, $BG = BC - GE =$

$= AB - CB = AG = 10$, $DG = ED + GE = (20 - \sqrt{200} + BE) + (\sqrt{200} - 10) = BD - BG = 20 - 10 = 10$.

[68] $AB = \sqrt{200}$, $AC = 10$, $BC = AB - AC = \sqrt{200} - 10$, $BD = 20$, $BE = \sqrt{200} = AB$, $ED = BD - BE = 20 - \sqrt{200}$, $BG = AC = 10$, $GD = BG + BD = 10 + 20 = 30$; $EF = CB = \sqrt{200} - 10$, $FD = ED - EF = ED - BC = (20 - \sqrt{200}) - (\sqrt{200} - 10)$, $BG + BC = AC + BC = AB = \sqrt{200} = BG + EF$, $FD = GD - (BG + EF + BE) = 30 - \sqrt{200} - \sqrt{200} = 30 - 2\sqrt{200} = 30 - \sqrt{800}$.

[69] В оригинале глагол джабара, соответствующий существительному ал-джабр (см. примеч. 1).

[70] $(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - x^2 - 10x$.

[71] $x^2 = 4x(10 - x)$, $x^2 = 40x - 4x^2$, $5x^2 = 40x$; $x^2 = 8x$, $x = 8$, $10 - x = 2$.

[72] $10^2 = 2\frac{7}{9} \cdot x^2$, $100 = \frac{25}{9} x^2$, $x^2 = \frac{9}{25} \cdot 100 = \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 100 = 20 + 16 = 36$, $x = 6$, $10 - x = 4$.

[73] $\frac{10 - x}{x} = 4$, $10 - x = 4x$, $10 = 5x$, $x = 2$, $10 - x = 8$.

[74] $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20$, $\frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 1 = 20$, $\frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 19$, $x^2 + 7x = 228$, $x = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 228} - \frac{7}{2} = \sqrt{12\frac{1}{4} + 288} - \frac{7}{2} = \sqrt{240\frac{1}{4}} - \frac{7}{2} = 15\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 12$.

[75] $(x + 10)^2 + x^2 = 58$, $x^2 + 100 - 20x + x^2 = 58$, $2x^2 + 100 - 20x = 58$. $2x^2 + 100 = 58 + 20x$, $x^2 + 50 = 29 + 10x$, $x^2 + 21 = 10x$, $x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2$, $x_1 = 7$, $x_2 = 3$.

[76] $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = x + 24$, $\frac{x^2}{12} = x + 24$, $x^2 = 12x + 288$, $x = \sqrt{288 + \left(\frac{12}{2}\right)^2} + \frac{12}{2} = \sqrt{288 + 36} + 6 = \sqrt{324} + 6 = 18 + 6 = 24$.

[77] $x(10 - x) = 21$, $10x - x^2 = 21$, $10x = 21 + x^2$, $x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2$. $x_1 = 7$, $x_2 = 3$.

[78] $(10 - x)^2 - x^2 = 40$, $100 + x^2 - 20x - x^2 = 40$, $100 - 20x = 40$, $100 = 20x + 40$, $60 = 20x$. $x = 3$.

[79] $(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54$, $100 - 20x + x^2 + x^2 + 10 - x - x = 54$, $100 - 20x + 2x^2 + 10 - 2x = 54$, $110 - 22x + 2x^2 = 54$, $110 + 2x^2 = 54 + 22x$, $55 + x^2 = 27 + 11x$, $28 + x^2 = 11x$, $x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 28} = 5\frac{1}{2} \pm \sqrt{30\frac{1}{4} - 28} = 5\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4}} = 5\frac{1}{2} \pm 1\frac{1}{2}$, $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, **но в случае $x = 7$ оказывается, что $(10 - x) - x$ отрицательно, вследствие чего ал-Хорезми не рассматривает этого корня.**

[80] $4\frac{1}{6}=\frac{25}{6}$, $\frac{6}{25}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}$.

[81] $\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$, $(10-x)^2+x^2=2\frac{1}{6}\cdot x(10-x)$, $100+x^2-20x+x^2=2\frac{1}{6}(10x-x^2)$, $100+2x^2-20x=21\frac{2}{3}x-2\frac{1}{6}x^2$, $100+4\frac{1}{6}x^2=41\frac{2}{3}x$, $\frac{6}{25}100+x^2=\frac{6}{25}\cdot 41\frac{2}{3}x$, $24+x^2=10x$, $x=\frac{10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-24}=5\pm\sqrt{25-24}=5\pm\sqrt{1}=5+1$, $x_1=4$, $x_2=6$.

[82] $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=1$.

[83] $\frac{1}{2}\cdot\frac{5x}{10-x}+5x=50$, $\frac{2\frac{1}{2}x}{10-x}=50-5x$, $2\frac{1}{2}x=(50-5x)(10-x)=500+5x^2-100x$, $100+x^2-20x=\frac{1}{2}x$, $100+x^2=20\frac{1}{2}x$, $x=\frac{20\frac{1}{2}}{2}-\sqrt{\left(\frac{20\frac{1}{2}}{2}\right)^2-100}=10\frac{1}{4}-\sqrt{\left(10\frac{1}{4}\right)^2-100}=10\frac{1}{4}-\sqrt{105\frac{1}{16}-100}=10\frac{1}{4}-\sqrt{5\frac{1}{16}}=10\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}=8$.

[84] $(10-x)^2=81x$, $100+x^2-20x=81x$, $100+x^2=101x$, $x=\frac{101}{2}-\sqrt{\left(\frac{101}{2}\right)^2-100}=50\frac{1}{2}-\sqrt{\left(50\frac{1}{2}\right)^2-100}=50\frac{1}{2}-\sqrt{2550\frac{1}{4}-100}=50\frac{1}{2}-\sqrt{2450\frac{1}{4}}=50\frac{1}{2}-49\frac{1}{2}=1$.

[85] По поводу терминов «меры», «цена», «количество» и «стоимость» см. примеч. 114.

[86] Если a и b — количества пшеницы и ячменя, а x и y—цены одной меры пшеницы и ячменя, то $ax+by=b-a+x-y$. В задаче $a=4$, $b=6$, $y=\frac{x}{2}$. Тогда $4x+6\frac{x}{2}=6-4+x-\frac{x}{2}$, $7x=2+\frac{x}{2}$, $6\frac{1}{2}x=2$, $x=\frac{4}{13}$.

[87] $\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2}$, $\frac{x}{2}+1=x$, $\frac{x}{2}=1$, $x=2$, $x+2=4$.

[88] $10x=(10-x)^2$, $10x=100-20x+x^2$, $30x=100+x^2$, $x=\frac{30}{2}-\sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2-100}=15-\sqrt{225-100}=15-\sqrt{125}=15-5\sqrt{5}$.

[89] $\frac{x(10-x)}{10-2x}=5\frac{1}{4}$, $10x-x^2=52\frac{1}{2}-10\frac{1}{2}x$, $20\frac{1}{2}x=x^2+52\frac{1}{2}$

$$x=20\frac{1}{2}-\sqrt{\left(\frac{20\frac{1}{2}}{2}\right)^2-52\frac{1}{2}}=10\frac{1}{4}-\sqrt{105\frac{1}{16}-52\frac{1}{2}}=10\frac{1}{4}-$$
$$-\sqrt{52\frac{9}{16}}=10\frac{1}{4}-7\frac{1}{4}=3.$$

90 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{7}x,\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{15}=\frac{1}{7\frac{1}{2}},\quad x^2=7\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}x=\frac{15}{14}x=1\frac{1}{14}x,$

$x=1\frac{1}{14},\quad x^2=\left(\frac{15}{14}\right)^2=\frac{225}{196}=1\frac{29}{196},\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{7}x=\frac{30}{196}.$

91 $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{4}{5}x;\quad \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{20}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{20}=\frac{3\frac{3}{4}}{20}=\frac{15}{80},\quad \frac{15}{80}x^2=x,$

$\frac{15}{80}x=1,\quad x=\frac{80}{15}=5\frac{1}{3},\quad x^2=\left(\frac{16}{3}\right)^2=\frac{256}{9}=28\frac{4}{9}.$

92 $x\cdot 4x=20,\quad 4x^2=20,\quad x^2=5,\quad x=\sqrt{5}.$

93 $x\cdot\frac{x}{3}=10,\quad \frac{x^2}{3}=10,\quad x^2=30,\quad x=\sqrt{30}.$

94 $x\cdot 4x=\frac{x}{3},\quad 4x^2=\frac{x}{3},\quad 12x^2=x,\quad 12x=1,\quad x=\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}.$

95 $x\sqrt{x}=3x,\ \sqrt{x}=3,\ x=9.$

96 $4x\cdot 3x=x^2+44,\ 12x^2=x^2+44,\ 11x^2=44,\ x^2=4,\ x=2.$

97 $4x\cdot 5x=2x^2+36,\ 20x^2=2x^2+36,18x^2=36,\ x^2=2,\ x=\sqrt{2}.$

98 $x\cdot 4x=3x^2+50,\ 4x^2=3x^2+50,\ x^2=50,\ x=\sqrt{50}.$

99 $x^2+20=12x.\ x=\frac{12}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2-20}=6\pm\sqrt{36-20}=6\pm\sqrt{16}=6\pm 4,$

$x_1=10,\ x_2=2,\ x_1^2=100,\ x_2^2=4.$ Корень $x=10$ ал-Хорезми упустил.

100 $\left[x-\left(\frac{x}{3}+3\right)\right]^2=x,\ \left(\frac{2x}{3}-3\right)^2=x,\ \frac{4}{9}x^2-4x+9=x,\ x^2+2\frac{1}{4}\times$

$\times 9=2\frac{1}{4}5x,\ x^2+20\frac{1}{4}=11\frac{1}{4},\ x=\frac{11\frac{1}{4}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{11\frac{1}{4}}{2}\right)^2-20\frac{1}{4}}=5\frac{5}{8}\pm$

$\pm\sqrt{31\frac{41}{64}-20\frac{1}{4}}=5\frac{5}{8}\pm\sqrt{11\frac{25}{64}}=5\frac{5}{8}\pm 3\frac{3}{8},\ x_1=9,\ x_2=2\frac{1}{4}.$

101 $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{4}=x,\ \frac{x^2}{12}=x,\ x^2=12x,\ x=12,\ x^2=144.$

102 $\left(\frac{x}{3}+1\right)\left(\frac{x}{4}+2\right)=x+13,\ \frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}x+2=x+13,\ \frac{1}{12}x^2+\frac{11}{12}x+2=x+13,\ \frac{1}{12}x^2=\frac{1}{12}x+11,\ x^2=x+132,\ x=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+132}=\frac{1}{2}+\sqrt{132\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+11\frac{1}{2}=12.$

103 $\frac{1\frac{1}{2}}{1+x}=2x,\ 1\frac{1}{2}=2x+2x^2,\ \frac{3}{4}=x+x^2,\ x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{1}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$ „Несколько человек“ оказываются равными... половине человека!

104 $\left(x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-4\right)^2=x+12,\ \left(\frac{5}{12}x-4\right)^2=x+12,\ \frac{25}{144}x^2+16-3\frac{1}{3}x=x+12,\ \frac{25}{144}x^2+4=4\frac{1}{3}x,\ x^2+5\frac{19}{25}\cdot4=5\frac{19}{25}\cdot4\frac{1}{3}x,\ x^2+23\frac{1}{25}=24\frac{24}{25}x,\ x=\sqrt{\left(\frac{24\frac{24}{25}}{2}\right)^2-23\frac{1}{25}}+\frac{24\frac{24}{25}}{2}=\sqrt{\left(12\frac{12}{25}\right)^2-23\frac{1}{25}}+12\frac{12}{25}=x\sqrt{155\frac{469}{625}-23\frac{1}{25}}+12\frac{12}{25}=\sqrt{132\frac{444}{625}}+12\frac{12}{25}=11\frac{13}{25}+12\frac{12}{25}=24.$

105 $x\cdot\frac{2}{3}x=5,\ \frac{2}{3}x^2=5,\ x^2=7\frac{1}{2},\ x=\sqrt{7\frac{1}{2}}.$

106 $\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2}(x+2),\ x=\frac{1}{2}x+1,\ \frac{1}{2}x=1,\ x=2,\ x+2=4.$

107 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}x(x+1)=(x+1)-x,\ \frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x=1,\ x^2+x=6,\ x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+6}-\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}+6}-\frac{1}{2}=\sqrt{6\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=2.$

[108] $x \cdot \frac{2}{3} x = 5,\ \frac{2}{8} x^2 = 5,\ x^2 = 7\frac{1}{2},\ x = \sqrt{7\frac{1}{2}},\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7\frac{1}{2} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3},\ \sqrt{3\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{7\frac{1}{2}},\ 3\frac{1}{3} \cdot 7\frac{1}{2} = 25,\ \sqrt{7\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3}\sqrt{7\frac{1}{2}} = \sqrt{7\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}} = \sqrt{25} = 5.$

На этой задаче заканчивается текст латинского перевода этого трактата, принадлежащего Герардо Кремонскому и опубликованного Либри [210].

[109] $x^2 \cdot 3x = 5x^2,\ x^2 \cdot x = \frac{5}{3} x^2 = 1\frac{2}{3} x^2,\ x = 1\frac{2}{3},\ x^2 = 2\frac{7}{9}.$

[110] $\left(x^2 - \frac{1}{3} x^2\right) \cdot 3x = x^2,\ \frac{2}{3} x^2 \cdot 3x = x^2,\ x^2 \cdot 3x = 1\frac{1}{2} x^2,\ x^2 \cdot x = \frac{1}{2} x^2,\ x = \frac{1}{2},\ x^2 = \frac{1}{4},\ \frac{2}{3} x^2 = \frac{1}{6},\ 3x = 1\frac{1}{2},\ \frac{1}{6} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

[111] $\frac{x^2 - 4x}{3} = 4x,\ x^2 - 4x = 12x,\ x = 16x,\ x = 16,\ x^2 = 256.$

[112] $\sqrt{x^2 - x} + x = 2,\ \sqrt{x^2 - x} = 2 - x,\ x^2 - x = 4 + x^2 - 4x,\ x^2 + 3x = 4 + x^2,\ 3x = 4,\ x = 1\frac{1}{3},\ x^2 = 1\frac{7}{9}.$

[113] $(x^2 - 3x)^2 = x^2,\ x^2 - 3x = x,\ x^2 = 4x,\ x = 4;\ x^2 = 16.$

[114] Разница между словами «цена» — си‘р и «стоимость» — с̣аман состоит в том, что «цена» есть стоимость единицы товара, а «стоимость» относится ко всему товару. Поэтому мы переводим слово муса“ар, букв. «оцениваемое», означающее единицу товара, словом «мера», а слово мус̣амман, букв. «стоящее», означающее весь товар,— словом «количество» (мер). Так как количество относится к стоимости как мера к цене, задачи на «сделки» у ал-Хорезми — задачи на тройное правило. В оригинале слова «стоимость» и «количество» стоят в обратном порядке.

[115] Если $a : b = c : d$, то $ad = bc$, $c = \frac{ad}{b}$ или $b = \frac{ad}{c}$,

[116] $10 : 6 = x : 4,\ 40 = 6x,\ x = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}.$

[117] $10 : 8 = 4 : x,\ 32 = 10x,\ x = \frac{32}{10} = 3\frac{1}{5}.$

[118] $30 : 10 = 6 : x,\ 60 = 30x,\ x = 2.$

На этом заканчивается текст латинского перевода этого трактата, опубликованного Л. Ч. Карпинским [186]. Заметим, что автор этого перевода Роберт Честерский оставил термины си‘р, муса“ар, с̣аман и мус̣амман без перевода и транскрибировал их соответственно alsrian, almuzahar, alchemon и almuhen.

[119] Локоть (з̱ира̄’) — мера длины, «локоть на локоть» — то, что мы назвали бы квадратным локтем,— мера площади, площадь квадрата, каждая сторона которого равна локтю. Ал-Хорезми называет эту меру площади также локтем.

[120] Утверждение ал-Хорезми относится не только к равносторонним, но и к любым треугольникам.

[121] По первой формуле $C = 3\frac{1}{7} D = 3{,}1428\, D$, по второй — $C = \sqrt{10} D = 3{,}16227 D$, по третьей — $C = \frac{62832}{20000} D = 3{,}1416\, D$. Значение $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ было

известно еще Архимеду, значение $\pi \approx \frac{62832}{20000}$ — индийскому математику V в. Ариабхатте, значение $\pi \approx \sqrt{10}$ — индийскому математику VII в. Брахмагупте.

[122] $S = \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) D^2 = \frac{11}{14} D^2$, что соответствует $C = 3\frac{1}{7} D$ (первой формуле для C). Рассуждение ал-Хорезми о том, что площадь круга равна произведению его радиуса на полуокружность, так как площадь всякого правильного многоугольника равна произведению радиуса вписанного в него круга на половину его периметра, показывает, что ал-Хорезми рассматривал круг как правильный многоугольник с очень большим числом сторон или как результат некоторого предельного перехода от таких многоугольников.

[123] Стрела дуги (сахм ал-ҡавс) — высота сегмента, определяемого дугой (слово ҡавс — «дуга» в то же время означает «лук», а слово ватар — «хорда» в то же время означает «тетива»). Этот отрезок называется также «обращенным синусом» (см. примеч. 12 к тригонометрическим таблицам).

[124] Так как хорда делит перпендикулярный ей диаметр на такие две части, что половина этой хорды является средним геометрическим полученных частей диаметра, то дополнение стрелы до диаметра равно отношению квадрата половины хорды к стреле.

[125] Под площадью дуги ал-Хорезми понимает площадь сегмента, определяемого этой дугой. Эта площадь равна разности между площадью сектора, определяемого данной дугой и площадью треугольника, ограниченного хордой, стягивающей данную дугу, и радиусами-векторами ее концов. Если дуга стягивается центральным углом α, площадь сектора равна $\frac{D^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{2}$, а треугольник имеет основание $D \sin \frac{\alpha}{2}$ и высоту $\left|\frac{D}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right|$ так, что его площадь равна $\frac{D^2}{4} \sin \frac{\alpha}{2} \left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|$; так как стрела дуги равна $\frac{D}{2}\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$, высота треугольника может быть записана в виде $\left|\frac{D}{2} - \frac{D}{2}\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)\right| = \frac{D}{2} \left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|$. Поэтому „площадь дуги“ равна $\frac{D^3}{4} \cdot \frac{\alpha}{2} - \frac{D^2}{4} \sin \frac{\alpha}{2} \left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|$, т. е. при $\alpha < \pi$ $\frac{D^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{2} - \frac{D^2}{4} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$, при $\alpha > \pi$ $\frac{D^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{2} + \frac{D^2}{4} \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2}$.

[126] Под четырехугольным телом ал-Хорезми понимает параллелепипед и говорит, что его объем равен произведению его измерений.

[127] Под круглым, треугольным и т. д. телом, грани которого параллельны высоте, ал-Хорезми понимает круглый цилиндр, треугольную призму и т. д. и говорит, что объем цилиндра или призмы равен произведению площади основания на высоту.

[128] Под треугольным, квадратным и т. д. конусом ал-Хорезми понимает треугольную, квадратную и т. д. пирамиду и говорит, что объем конуса или пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

[129] Это предложение — теорема Пифагора, доказывается ал-Хорезми только для случая равнобедренного прямоугольного треугольника.

[130] Ромбоидом ал-Хорезми называет параллелограмм, не являющийся прямоугольником. Это определение имеется у Евклида (Евклид. Начала, 22-е определение 1-й книги, т. I, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.—Л., 1948, с. 13).

[131] Ал-Хорезми называет катеты «перпендикулярами» (ʻамӯд) — переводами греческого слова kathetos — «отвес», а гипотенузу — хордой (ватар) — переводом греческого слова hypothenousa — «стягивающая».

[132] Место падения камня (масқат̣ ал-х̮аджар) — расстояние точки основания, на которую падает высота, от одного из его концов.

[133] $\sqrt{1875} = 5\sqrt{75} = 25\sqrt{3} = 43{,}3\ldots$.

[134] $13^2 - x^2 = 152 - (14 - x)^2$; $169 - x^2 = 225 - (196 - 28x + x^2)$; $169 - x^2 = 29 + 28x - x^2$, $169 = 29 + 28x$. $140 = 28x$, $x = 5$. $14 - x = 9$.

[135] $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$. Ал-Хорезми называет высоту треугольника „перпендикуляром„ (ʻамӯд).

[136] Ал-Хорезми называет пирамиду «конусом» (махрут); неусеченную пирамиду он называет конусом с острой вершиной, а усеченную — с нижним и верхним основанием.

[137] Высота усеченной пирамиды относится к высоте неусеченной пирамиды с тем же основанием как разность между сторонами верхнего и нижнего оснований к стороне нижнего основания, или $10 : h = 2 : 4$, откуда $h = 20$.

[138] Объем большой неусеченной пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 20 = \frac{1}{3} \cdot 320 = 106\frac{2}{3}$, объем малой неусеченной пирамиды равен $106\frac{2}{3} - 13\frac{1}{3} = 93\frac{1}{3}$.

[139] Высота большого треугольника равна $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$; площадь большого треугольника $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$; площадь квадрата — x^2; площади боковых малых треугольников $\frac{1}{2}\left(6 - \frac{x}{2}\right) \cdot x = 3x - \frac{1}{4}x^2$; площадь верхнего малого треугольника $\frac{1}{2}(8 - x)\,x = 4x - \frac{1}{2}x^2$. Поэтому $48 = 3x - \frac{1}{4}x^2 + 3x - \frac{1}{4}x^2 + 4x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 = 10x$, $x = \frac{48}{10} = 4\frac{4}{5}$.

[140] Здесь начинается часть трактата, посвященная решению задач, возникавших в юридической практике и связанных с разделом наследства согласно мусульманскому законодательству. Большой объем «Книги о завещаниях» свидетельствует о том значении, которое придавал этим задачам ал-Хорезми. Так как более ранние арабские источники такого рода неизвестны, не исключено, что он был первым, кто применил алгебраические правила к их решению. Во многих позднейших сочинениях, посвященных «науке о разделе наследства» (ʻилм ал-фараид), алгебра излагалась в кратком введении и рассматривалась только как вспомогательное средство.

В средневековых латинских переводах трактата раздел о делении наследства отсутствует.

В историко-научной литературе этот раздел долго не освещался. Считалось, что с математической точки зрения он не представляет интереса, а ограничения, которые ставятся в условии, многие считали произвольными. Впервые «Книгу о завещании» исследовал в 1917 г. Ю. Рушка [255], а затем Г. Вилейтнер [310] и С. Гандц [157].

Большинство задач этого раздела сводится к решению линейного уравнения, некоторые — к решению неопределенных уравнений. В единственном случае (см. с. 79—90) речь идет о решении системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

В данной задаче, если принять отданное в долг за x, то все имущество равно $10 + x$. Так как оба сына и тот, кому завещано, получают поровну, каждый из них получает $\frac{10 + x}{3} = x$, откуда $\frac{10}{3} = \frac{2}{3}x$ и $x = 5$. У ал-Хорезми вместо „отданное в долг“ написано „десять дирхемов долга“.

[141] Если принять отданное в долг за x, все имущество снова равно $10 + x$.

Тот, кому завещано, получает $\frac{1}{5}$ имущества и дирхем и, следовательно, каждый из сыновей получает по $\frac{4}{5}(10+x)-1$, откуда $\frac{7}{2}=\frac{3}{5}x$ и $x=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$. Тот, кому завещано, получает $\frac{1}{5}\left(10+\frac{35}{6}\right)+1=4\frac{1}{6}$. У ал-Хорезми в формулировке задачи та же описка, что и в предыдущей задаче.

[142] Если принять отданное в долг за x, то все имущество снова есть $10+x$. Тот, кому завещано, получает $\frac{1}{5}$ имущества без дирхема и, следовательно, каждый из сыновей получает по $\frac{\frac{4}{5}(10+x)+1}{3}=x$, откуда $3=\frac{11}{15}x$, $x=\frac{45}{11}=4\frac{1}{11}$. Тот, кому завещано, получает $\frac{1}{5}\left(10+\frac{45}{11}\right)-1=1\frac{9}{11}$. У ал-Хорезми в формулировке задачи та же описка, что и в двух предыдущих задачах.

[143] Принципы мусульманского права по вопросам наследования имуществ изложены в Коране следующим образом: «Бог в отношении детей ваших заповедует вам: доля сына равна доле двух дочерей, если будет женского пола детей более двух, то им — треть из оставшегося после него имущества: если будет одна, то ей — половина. И родителям его, каждому из них, шестая часть из оставленного им имущества, если у него есть дети, а если не было у него детей, то наследниками ему будут родители его, и в этом случае матери его — треть. Если у него есть братья, то матери его шестая часть из того, что останется после выдачи того, что в завещании он завещал, или после уплаты долга» (Коран, гл. IV, стих 12, с. 143). «Вам половина того, что оставили жены ваши, если нет у них детей; но если есть у них дети, то вам четвертая часть из того, что оставили они, после выдачи по завещанию из того, что завещали они кому-либо после уплаты долга» (там же, стих 13). «Также им (местоимение женского рода, т. е. «им» означает «женам» — Б. Р.) четвертая часть из того, что оставите вы после себя, если нет у вас детей, а если есть у вас дети, то им осьмая часть из того, что оставите вы после себя, после выдачи по завещанию вашему того, что завещаете вы кому-либо или после уплаты долга» (там же, стих 14).

Так как, согласно мусульманскому праву, мать получает $\frac{1}{6}$ имущества, а жена — $\frac{1}{8}$, необходимое наследство, т. е. то, что оставляется матери, жене, братьям и сестрам, делится на 48 частей, из которых 8 идет матери, 6 — жене, а остальные части делятся между братьями и сестрами. Так как необходимое наследство есть $\frac{8}{9}$ имущества, все имущество делится на $\frac{9}{8}\cdot 48=54$ части, из которых 9 идет тому, кому завещано, 8 — матери, 6 — жене, а остальные части делятся между братьями и сестрами.

[144] Так как, согласно мусульманскому праву, муж при наличии детей получает $\frac{1}{4}$ имущества, а сын — вдвое больше дочери, необходимое наследство делится на 20 частей, из которых 5 идет мужу, 6 — сыну и по 3 — каждой из трех дочерей. Так как тот, кому завещано, получает $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{15}{56}$ иму-

щества, необходимая часть есть $\frac{41}{56}$ имущества, все имущество составляет $\frac{56}{41}\cdot 20 = \frac{1120}{41}$ $20 \cdot x$ частей; если считать, что имущество состоит из 1120 частей, муж получает $5\cdot 41 = 205$, сын — $6\cdot 41 = 246$, каждая из трех дочерей — $3\cdot 41 = 123$. Тот, кому завещано, — $\frac{15}{56}\cdot 1120 = 300$ частей.

[145] Так как мать получает $\frac{1}{6}$ имущества, а муж — $\frac{1}{4}$, необходимое наследство делится на 12 частей, из которых 2 идут матери, 3 — мужу, а 7 — сыну. В данном случае мать получает $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, муж — $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$, а сын — $\left(1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{7}{2} = \frac{7}{20}\cdot\frac{7}{12} = \frac{49}{240}$. Для тех, кому завещано, остается $1 - \frac{49}{240} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = \frac{131}{240}$; эта сумма делится между ними в отношении $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} = 8 : 5$, т. е. один из них получает $\frac{8}{13}\cdot\frac{131}{240} = \frac{1048}{3120}$, а другой — $\frac{5}{13}\cdot\frac{131}{240} = \frac{655}{3120}$.

[146] Необходимое наследство также делится на 12 частей, из которых 2 идет матери, 3 — мужу и 7 — сыну. В данном случае муж по-прежнему получает $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$, мать отдает одному из тех, кому завещано, $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$, а другому — $\frac{8}{13}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{8}{39}\cdot\frac{1}{6}$, т. е. она получает $\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{8}{39}\right)\cdot\frac{1}{6} = \frac{85}{156}\cdot\frac{1}{6}$, сын отдает одному из тех, кому завещано, $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}$ и другому — $\frac{8}{13}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{8}{39}\cdot\frac{1}{6}$, т. е. она получает $\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{8}{39}\right)\cdot\frac{1}{6} = \frac{85}{156}\cdot\frac{1}{6}$, сын отдает одному из тех, кому завещано, $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}$, а другому — $\frac{5}{13}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{12} = \frac{5}{39}\cdot\frac{7}{12}$, т. е. он получает $\left(1 - \frac{2}{5} - \frac{5}{39}\right)\cdot\frac{7}{12} = \frac{92}{195}\cdot\frac{7}{12}$. Наибольшим общим кратным всех знаменателей является 4680. Ал-Хорезми принимает имущество за $4680\cdot 49 = 229320$ (у ал-Хорезми ошибочно вместо 228320 написано 219320).

[147] Так как жена получает $\frac{1}{8}$ имущества, а остальное должно делиться между четырьмя сыновьями, необходимое наследство делится на 32 части, из которых 4 идут жене, и по 7 — каждому из четырех сыновей. Тот, кому завещано, получает $\frac{7}{32} - \frac{4}{32} = \frac{3}{32}$. Поэтому все имущество делится на 35 частей, из которых 4 идут жене, по 7 — каждому из сыновей и 3 — тому, кому завещано.

[148] Так как сын получает вдвое больше дочери, то если наследство оставляется двум сыновьям и одной дочери, дочь получает $\frac{1}{5}$ имущества, каждый сын по $\frac{2}{5}$, а если наследство оставляется трем сыновьям и одной дочери, каждый сын

получает по $\frac{2}{7}$. Поэтому все имущество делится на $32+3=35$ частей, из которых 7 идут дочери, по 14 — каждому из сыновей и 10 — тому, кому завещано.

[149] Так как мать получает $\frac{1}{6}$, а каждый сын получает вдвое больше дочери, необходимое наследство делится на 42 части, из которых 7 идут матери, 5 — дочери и по 10 — каждому из сыновей; если же было бы две дочери, «необходимое» делилось бы на 48 частей, из которых 8 шли бы матери, по 5 — каждой из двух дочерей и по 10 — каждому из трех сыновей. Тот, кому завещано, получает $\frac{10}{42}-\frac{5}{48}=\frac{45}{366}$. Поэтому все имущество делится на $336+45=381$ часть, из которых $7\cdot8=56$ идут матери, $5\cdot8=40$ — дочери, по $10\cdot8=80$ — каждому из трех сыновей и 45 — тому, кому завещано.

[150] Если имущество оставляется трем сыновьям, каждый сын получает по $\frac{1}{3}$ имущества, а если трем сыновьям и дочери — дочь получает $\frac{1}{7}$ имущества, а каждый сын — по $\frac{2}{7}$. Разность между долей сына и долей дочери, если бы она была, равна $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{4}{21}$. Если часть имущества завещается посторонним, каждый сын получает $\frac{1}{3}$ того, что остается после выделения завещанного. Если принять все имущество за x, а долю сына за y, все завещанное равно $x—3y$. В этом случае разность между долей сына и долей дочери, если бы она была, равна $\frac{4}{7}y$, а треть того, что остается от трети имущества после выделения $\frac{4}{7}y$, есть $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{7}y\right)=\frac{1}{9}x-\frac{4}{21}y$. Поэтому все завещанное равно $x-3y=\frac{4}{7}y+\frac{1}{9}x-\frac{4}{21}y=\frac{1}{9}x+\frac{8}{21}y$, т. е. $\frac{8}{9}x-\frac{8}{21}x=3y$, откуда $x=3\frac{45}{55}y$. Считаем, что $x=3\cdot56+45=213$, $y=56$: первая завещанная сумма равна $\frac{4}{7}y=32$, вторая — $\frac{1}{3}\left(\frac{213}{3}-32\right)=13$.

[151] Так как мать должна получить $\frac{1}{6}$ имущества, а муж — $\frac{1}{4}$, необходимое наследство следовало бы разделить на 12 частей, из которых 2 части получила бы мать, а 3 — муж; каждой дочери досталось бы $3\frac{1}{2}$ части; чтобы избегнуть дробей, ал-Хорезми делит необходимое имущество на 13 частей, причем мать и муж по-прежнему получают 2 и 3 части, а каждая дочь — по 4 части. Поэтому первая завещанная сумма, равная доле матери, есть 2 части, а вторая завещанная сумма, равная $\frac{1}{9}$ всего имущества, есть $\frac{1}{8}$ всей остальной части имущества, т. е. $\frac{1}{8}\cdot15=\frac{15}{8}$ частей. Общее число частей равно $16\frac{7}{8}=\frac{135}{8}$. Считая, что все имущество состоит из 135 частей, мы найдем, что мать получает 16 частей, муж — 24 части, каждая из дочерей — по 32 части, первая завещанная сумма равна 16, а вторая — 15.

[152] Необходимое наследство снова делится на 13 частей. Первая завещанная сумма здесь состоит из доли мужа, т. е. 3-х частей, что вместе с необходимым наследством составляет 16 частей. Вторая завещанная сумма, составляющая $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\frac{9}{40}$ всего имущества, равна $\frac{9}{31}$ всей остальной части иму-

щества, т. е. $\frac{9}{31}\cdot 16=\frac{144}{31}=4\frac{20}{31}$ частей. Общее число частей равно $20\frac{20}{31}=\frac{640}{31}$. Считая, что все имущество состоит из 640 частей, мы найдем, что мать получает 62 части, муж — 93 части, каждая из дочерей — по 124 части, первая завещанная сумма равна 93, а вторая — 144.

[153] Необходимое наследство снова делится на 13 частей. Если примем имущество за x, а долю необходимого наследства — за y, то $x=13y+3y-(x-3y)\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)=13y+3y-\frac{19}{90}(x-3y)$, т. е. $x\left(1+\frac{19}{90}\right)-3\left(1+\frac{19}{90}\right)y=13y$, или $x-3y=13\frac{90}{109}y$, или $x=3y+13\frac{90}{109}y=\frac{1497}{109}y$. Поэтому считаем, что $x=1497$, $y=109$. Следовательно, мать получает 218, муж — 327, каждая из дочерей — по 436, а завещанное равно $327-\frac{19}{90}(1497-327)$.

[154] Жена и сестры получают поровну — по $\frac{1}{3}$ того, что остается после выделения завещанного. Если принять имущество за x, а долю сестры — за y, то $x=3y+y-\frac{1}{8}\cdot 3y=3\frac{5}{8}y=\frac{29}{8}\cdot y$. Поэтому считаем, что $x=29$, $y=8$; завещанное равно 5.

[155] Сыновья получают по $\frac{1}{4}$ того, что остается после выделения завещанного. Если принять имущество за x, а долю сына — за y, то $x=4y+y+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}-y\right)$, т. е. $\frac{11}{12}x=4\frac{3}{4}y$, или $x=\frac{57}{11}y$. Поэтому считаем, что $x=57$, $y=11$; завещанные суммы равны 11 и $\frac{1}{4}(19-11)=2$.

[156] Если принять имущество за x, а долю сына — за y, то $x=4y+y-\frac{1}{5}\left(\frac{x}{3}-y\right)$, или $x=\frac{39}{8}y$. Поэтому считаем, что $x=39$, $y=8$; завещанное равно $8-\frac{1}{5}(13-8)=7$.

[157] Если принять имущество за x, а долю дочери — за y, то доля сына равна $2y$ и $x=7y+y+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{7}\cdot x-y\right)$, т. е. $x=\frac{1603}{188}y$. Поэтому считаем, что $x=1603$, $y=188$, и завещанные суммы равны 188 и $\frac{11}{30}\left(\frac{2}{7}\cdot 1603-188\right)=99$.

[158] Если принять имущество за x, то $x=7+1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{2}{5}\left(x-1\right)$, т. е, $x=\frac{755}{82}$. Поэтому делим имущество на 755 частей, из которых сыновья, дочь и те, кому завещано получают соответственно 164, , 164, 164, 82, 82 и $\frac{9}{20}\left(\frac{2}{5}\cdot 775-82\right)=99$.

[159] Если принять имущество за x, а долю дочера — за y, то доля сына равна $2y$ и $x=7y+2y-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x-2y\right)$, т. е. $x-\frac{465}{50}y$. Поэтому считаем, что $x=495$, $y=59$; завещанное равно $\frac{9}{20}\left(\frac{2}{5}\cdot 495-118\right)=82$.

[160] Если принять имущество за x, а долю дочери — за y, то доля сына равна $2y$ и $x = 6y + y - \frac{1}{5}\left(\frac{x}{3} - y\right) + y - \frac{1}{3}\left\{\frac{x}{3} - \left[y - \frac{1}{5}\left(\frac{x}{3} - y\right) + y\right]\right\} + \frac{x}{12}$, т. е. $x = \frac{1608}{201}y$. Поэтому считаем, что $x = 1608$, $y = 201$; завещанные суммы равны $201 - \frac{1}{5}(536 - 201) = 134$, $201 - \frac{1}{3}[536 - (134 + 201)] = 134$ и $\frac{1}{12} \cdot 1608 = 134$.

[161] Если принять имущество за x, а долю дочери — за y, то $x = 6y + y + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{3} - y\right) + y + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{4} - y\right)$, т. е. $x = \frac{448}{51}y$. Ал-Хорезми считает, что $x = 448 \cdot 3 = 1344$, $y = 51 \cdot 3 = 153$; завещанные суммы за вычетом доли дочери равны $\frac{1}{5}(448 - 153) = 59$ и $\frac{1}{3}(336 - 153) = 61$.

[162] Если принять имущество за x, а долю сына — за y, то $x = 6y + y + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{4} - y\right) + y - \frac{1}{4}\left[\frac{x}{3} - y - \frac{1}{5}\left(\frac{x}{4} - y\right) - y\right]$, т. е. $x = \frac{396}{49}y$. Считаем, что $x = 396$, $y = 49$; завещанные суммы равны $49 + \frac{1}{5}(99 - 49) = 59$ и $49 - \frac{1}{4}(132 - 59 - 49) = 43$.

[163] Если принять имущество за x, долю сына — за y, а дирхем — за z, то $x = 4y + y + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{3} - x\right) + z$, откуда $\frac{11}{12}x = \frac{19}{4}y + z$, или $x = \frac{57}{11}y + \frac{12}{11}z$. Если $x = 12z$, то $y = \frac{40}{19}z = 2\frac{2}{19}z$.

[164] Если принять имущество за x, долю сына — за y, а дирхем — за z, то $x = 5y + y + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} - y\right) + z + \frac{1}{4}\left\{\frac{x}{3} - \left[y + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} - y\right) + z\right]\right\} + z$, откуда $\frac{5}{6}x = \frac{11}{2}y + \frac{7}{4}z$. Если $y = z = 10$, то $x = 87$; если $\frac{x}{3} = 7\frac{1}{2}z$, то $y = \frac{34}{11}z = 3\frac{1}{11}z$.

[165] Если принять имущество за x, долю сына — за y, а дирхем — за z. то $x = 4y + y - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{3} - y\right) + z + \frac{1}{3}\left\{\frac{x}{3} - \left[y - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{3} - y\right) + z\right]\right\} + z$, откуда $\frac{17}{18}x = \frac{29}{6}y + \frac{5}{3}z$. Если $y = z = 17$, то $x = 117$.

[166] Если принять имущество за x, долю дочери — за y, а дирхем — за z, то доля сына равна $2y$; $x = 8y + y + z + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{4} - y - z\right) + z + \frac{1}{4}\left\{\frac{x}{3} - \left[y + z + \frac{1}{5}(x - y - z) + z\right]\right\} + z + \frac{x}{8}$, откуда $\frac{181}{240}x = \frac{43}{5}y + \frac{47}{20}z$. Если $x = 24z$, то $y = \frac{315}{172}z = 1\frac{143}{172}z$. Если $y = z = 362$, то $x = 5256$, завещанные суммы равны $362 \cdot 2 = 724$, $\frac{1}{5}(1314 - 724) + 362 = 480$, $\frac{1}{4}(1752 - 724 - 480) + 362 = 499$, $\frac{1}{8} \cdot 5256 = 657$; сумма первых двух завещанных сумм равна 1204.

167 Так как мать получает $\frac{1}{6}$ наследства, а муж — $\frac{1}{4}$, необходимое наследство следовало бы разделить на 12 частей, из которых 2 получила бы мать, а 3 — муж; каждой дочери досталось бы $\frac{7}{8}$ части; чтобы избегнуть дробей, ал-Хорезми делит необходимое на 13 частей, из которых мать и муж получают 2 и 3 части, а каждая дочь — по 1-й части. Если принять имущество за x, а долю дочери — за y, то $x = 13y + \left(\frac{x}{5} - y\right) + \left(\frac{x}{4} - 2y\right)$, т. е. $x = \frac{200}{11}y$. Считаем, что $x = 200$, $y = 11$; завещанные суммы равны $\frac{1}{5}\cdot 200 - 11 = 29$, $\frac{1}{4}\cdot 200 - 22 = 28$.

168 Необходимое наследство то же самое; если принять имущество за x, а долю дочери — за y, то $x = 13y + \left(\frac{x}{3} - 3y\right) + \left(\frac{x}{4} - 2y\right) + \left(\frac{x}{5} - y\right)$, т. е. $x = \frac{420}{13}y = 33\frac{4}{13}y$. Считаем, что $x = 420$, $y = 13$; завещанные суммы равны $\frac{1}{3}\cdot 420 - 39 = 101$, $\frac{1}{4}\cdot 420 - 26 = 79$, $\frac{1}{5}\cdot 420 - 13 = 61$.

169 Необходимое наследство то же самое; если принять имущество за x, а долю дочери — за y, то $x = 13y + \left(\frac{x}{4} - 2y\right) + \left\{\frac{1}{5}\left[x - \left(\frac{x}{4} - 2y\right) - y\right]\right\}$, т. е. $x = \frac{52}{3}y = 17\frac{1}{3}y$. Считаем, что $x = 52$, $y = 3$; завещанные суммы равны $\frac{1}{4}\cdot 52 - 6 = 7$, $\frac{1}{5}(52-7) - 3 = 6$.

170 Необходимое наследство то же самое; если принять имущество за x а долю дочери — за y, то $x = 13y + \left(\frac{x}{5} - 2y\right) + \frac{1}{6}\left[x - \left(\frac{x}{5} - 2y\right)\right]$, т. е. $x = 17y$. Считаем, что $x = 85$, $y = 5$; завещанные суммы равны $\frac{1}{5}\cdot 85 - 10 = 7$, $\frac{1}{6}(85-7) = 13$.

171 Необходимое наследство то же самое; если принять имущество за x, а долю дочери — за y, то $x = 13y + \left(\frac{x}{3} - 2y\right) - \left\{\frac{1}{4}\left[x - \left(\frac{x}{3} - 2y\right)\right] - y\right\}$, т. е. $x = \frac{69}{5}y = 13\frac{4}{5}y$. Считаем, что $x = 69$, $y = 5$; завещанное равно $\left(\frac{1}{3}\cdot 69 - 10\right) - \left\{\frac{1}{4}\left[69 - \left(\frac{1}{3}\cdot 69 - 10\right)\right] - 5\right\} = 4$.

172 Так как сын получает вдвое больше дочери, то если принять имущество за x, а долю дочери — за y, доля сына будет равна $2y$, а $x = 7y + \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)x - 2y\right] - \frac{1}{4}\left\{\frac{x}{3} - \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)x - 2y\right]\right\}$, т. е. $x = \frac{36}{5}y$. Считаем, что $x = 36$, $y = 5$; завещанное равно $\left(\frac{11}{30}\cdot 36 - 10\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\cdot 36 - \frac{11}{30}\cdot 36 + 10\right) = 1$.

[173] Необходимое наследство делится на 13 частей, из которых мать и жена получают по 3 и 2 части, а каждая сестра — по 2 части. Если принять имущество за x, а часть — за y, то $x = 13y + \left(\frac{x}{2} - 5y\right) - \frac{2}{7}\left[\frac{x}{3} - \left(\frac{x}{2} - 5y\right)\right]$, т. е. $x = \frac{276}{19}y$. Ал-Хорезми считает, что $x = 276 \cdot 7 = 1932$, $y = 19 \cdot 7 = 133$; завещанное равно $\frac{1}{2} \cdot 1932 - 5 \cdot 133 - \frac{2}{7}\left[\frac{1}{3} \cdot 1932 - \left(\frac{1}{2} \cdot 1932 - 5 \cdot 133\right)\right] = 203$.

[174] Под кругооборотами (ад-даур) ал-Хорезми понимает не предусмотренные ранее обстоятельства, меняющие местами положение лиц, участвующих в задаче, т. е., другими словами, перемену в судьбе (см. перевод в [255] и [310]). Таким кругооборотом является, например, внезапная смерть наследника раньше смертельно больного завещающего, при которой завещающий оказывается в роли наследника, а наследник — в роли завещающего. Задачи такого типа привели в Европе к задачам «на разделение ставки», которые сыграли существенную роль в возникновении теории вероятностей.

[175] По мусульманскому праву при женитьбе муж вносит определенную сумму, в которую входит брачный выкуп; жена распоряжается брачным выкупом и частью остального имущества. Если принять эту часть имущества, завещаемую женой, за x, то сумма, которой распоряжается жена, равна $10+x$, а сумма, которой распоряжается муж, равна $100-(10+x)=90-x$. Жена может завещать треть своего имущества, т. е. $\frac{1}{3}(10+x)$. Мужу достается половина остатка, т. е. тоже $\frac{1}{3}(10+x)$, а другую половину остатка получают ее наследники. Поэтому наследники мужа получают $90-x+\frac{1}{3}(10+x)$. С другой стороны, так как жена может распоряжаться только третью того, что оставил муж, то наследники мужа получают $2x$. Поэтому $90-x+\frac{1}{3}(10+x)=2x$, т. е. $x=35$.

[176] В этом случае брачный выкуп идет в уплату долга жены, т. е. жена распоряжается суммой, равной x, и завещает $\frac{x}{3}$, а муж по-прежнему распоряжается суммой, равной $90-x$. Поэтому наследники мужа получают $90-x+\frac{x}{3}=2x$, откуда $x = 33\frac{1}{4}$.

[177] В этом случае наследники мужа получают $90 - x + \frac{1}{2}(10+x)-x=4-x$, откуда $x = \frac{190}{11} = 17\frac{3}{11}$.

[178] В этом случае наследники мужа получают $110 - x + \frac{1}{3}(20 + x) - x = 4x$, откуда $x = \frac{350}{17} = 20\frac{10}{17}$.

[179] Под отпущением рабов ал-Хорезми имеет в виду отпущение рабов за выкуп. Выкуп меньше стоимости раба на сумму, которую ал-Хорезми называет «завещанным рабу». Если принять эту сумму за x, то из этого и дочь раба, и наследники хозяина получают по $\frac{x}{2}$. Кроме того, наследники хозяина получают выкуп, равный $300-x$. С другой стороны, так как завещанное явля-

ется третью имущества, то наследники хозяина получают $2x$. Поэтому $300-x+\frac{x}{2}=2x$, откуда $x=120$, и выкуп равен $300-120=180$.

[180] Если принять завещанное рабу за x, то наследники хозяина получают $300-x+\frac{12}{33}(100-10-x)-20=2x$, откуда $x=108$.

[181] **Так как завещанное является третью имущества, каждому из рабов** завещается по $\frac{1}{6}\cdot 400=66\frac{2}{3}$. Поэтому их выкупы соответственно равны $100-66\frac{2}{3}=33\frac{1}{3}$ и $300-66\frac{2}{3}=233\frac{1}{3}$.

[182] Если приинять завещанное первому рабу за x, и, следовательно, завещанное второму рабу — за $y=\frac{5}{3}x$, то наследники хозяина получают $(300-$ $-x)+\frac{1}{2}[400-(300-x)]+(500-y)=x+y$, откуда $850=\left(2\frac{1}{6}+2\frac{2}{3}\right)x=$ $=4\frac{5}{6}x$ и $x=175\frac{25}{29}$, $y=293\frac{3}{29}$. Ал-Хорезми ошибочно принимает $4\frac{5}{6}$ за $\frac{45}{6}=7\frac{1}{2}$.

[183] Если принять завещанное каждому рабу за x, то наследники хозяина получают $300-x+\frac{1}{2}[500-(300-x)]+300-x=4x$, откуда $x=\frac{1400}{11}=$ $=127\frac{3}{11}$.

[184] Если принять завещанное рабу за x, то наследники хозяина получают $300-(200-x)+\frac{1}{2}[300+200-(300-x)]=200-\frac{x}{2}=2x$, откуда $x=80$.

[185] Если принять завещанное рабу за x, то наследники хозяина получают $1000-\frac{1}{2}[1000+500-(300-x)]-200=200-\frac{x}{2}=2x$, откуда $x=80$.

[186] Если принять завещанное рабу за x, то наследники хозяина получают $1750-200-\frac{1}{3}[1750-200+600-(500-x)]-300=700-\frac{x}{3}=2x$, откуда $x=300$.

[187] Если принять завещанное рабу за x, то наследники хозяина получают $300-x+\frac{1}{2}[300-(300-x)]+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}[300-(300-x)]+300\right\}=450-\frac{x}{4}=2x$, откуда $x=200$.

[188] Если принять завещанное рабу за x, то наследники хозяина получают $300-x+\frac{1}{3}[500-(300-x]+\frac{2}{3}\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{3}[500-(300-x)]+300\right\}=529\frac{17}{27}-$ $-\frac{14}{27}x=2x$, откуда $x=\frac{3575}{17}=210\frac{5}{17}$.

[189] Абу Ханифа Ну‘ман ибн Сабит (690—767 гг.) — известный арабский законовед из г. Куфы.

[190] Под отдачей рабыни ал-Хорезми имеет в виду продажу. Продажная цена меньше цены рабыни на сумму, которую ал-Хорезми считает завещанной владельцем рабыни тому, кому она отдана. Ал-Хорезми считает вознаграждение за сожительство с рабыней (‘укр) пропорциональным ее цене, вследствие чего, если цена рабыни уменьшается с 500 до $500-x$, то и вознаграждение за

сожительство с ней уменьшается со 100 до $100-\frac{x}{5}$. Ал-Хорезми считает равными суммы, завещанные владельцем рабыни тому, кому он ее отдал, и отпущенному им рабу, т. е. разность между ценой этого раба и его выкупом. Далее ал-Хорезми приравнивает цену рабыни вместе с вознаграждением за сожительство с ней удвоенной сумме цены раба и завещанного ему, т. е. если принять суммы, завещанные владельцем рабыни, за x, то $500-x+100-\frac{x}{5}=2(100+x)$, откуда $x=\frac{5}{8}\cdot 200=125$.

[191] Цена рабыни, равная $500-x$, вместе с вознаграждением за сожительство с ней, равным $100-\frac{x}{5}$, за вычетом завещанного, равного x, приравнивается удвоенной сумме цены раба, равной 100, и двум завещанным суммам, т. е. $2x$. Поэтому $500-x+100-\frac{x}{5}=2(100+2x)$, откуда $x=\frac{2000}{31}=64\frac{16}{31}$.

[192] Цена отданной рабыни, равная $500-x$, вместе с вознаграждением за сожительство с ней, равным $100-\frac{x}{5}$, за вычетом завещанного, равного $\frac{3}{4}x$, приравнивается удвоенной сумме цены отпущенной рабыни, равной 100, и обеих завещанных сумм, т. е. x и $\frac{3}{4}x$. Поэтому $500-x+100-\frac{x}{5}-\frac{3}{4}x=2\left(100+x+\frac{3}{4}x\right)$, откуда $x=\frac{1000}{109}=73\frac{43}{109}$.

[193] Так как величина x, на которую уменьшается цена рабыни, считается завещанной владельцем рабыни тому, кому он ее отдал, владелец рабыни получает ее цену, равную $300-x$, и вознаграждение за сожительство с ней, равное трети цены, т. е. $100-\frac{x}{3}$. Так как завещанное принимается за треть имущества, то полученное владельцем рабыни приравнивается удвоенному завещанному, т. е. $2x$. Поэтому $300-x+100-\frac{x}{3}=2x$, откуда $x=120$.

[194] Так как живет с рабыней не тот, кому она отдана, а ее первоначальный владелец, он не получает вознаграждения за сожительство с рабыней от того, кому он ее отдал, а наоборот, сам должен отдать тому, кому подарена рабыня, в качестве вознаграждения за сожительство, сумму, равную разности между первоначальной величиной вознаграждения за сожительство с ней, т. е. 100, и величиной этого вознаграждения во время отдачи, т. е. $100-\frac{x}{3}$; поэтому вознаграждение за сожительство, отдаваемое владельцем рабыни, равно $\frac{x}{3}$, т. е. в этом случае $300-x-\frac{x}{3}=2x$, откуда $x=90$.

[195] Так как живут с рабыней и ее первоначальный владелец, и тот, кому она отдана, владелец получает вознаграждение за сожительство с ней от того, кому он ее отдал, равное $100-\frac{x}{3}$, и отдает вознаграждение за то, что сам живет с ней, равное $\frac{x}{3}$. Поэтому в этом случае $300-x-\frac{x}{3}+100-\frac{x}{3}=2x$, откуда $x=\frac{1200}{11}=109\frac{2}{11}$.

[196] Случай отличается от рассмотренного выше случая, когда с рабыней живет ее первоначальный владелец и не живет тот, кому он ее отдал, тем, что здесь завещанное равно не x, а $x+\frac{x}{3}$, причем это завещанное вычитается из суммы $300-x-\frac{x}{3}$ и полученная величина приравнивается не удвоенному, а учетверенному завещанному. Поэтому здесь $300-x-\frac{x}{3}-x-\frac{x}{3}=4\left(x+\frac{x}{3}\right)$, откуда $x=\frac{150}{4}=37\frac{1}{2}$.

[197] Случай отличается от предыдущего тем, что сумма $300-x-\frac{x}{3}$ заменяется суммой $300-x-\frac{x}{3}+100-\frac{x}{3}$, т. е. $300-x-\frac{x}{3}+100-\frac{x}{3}-x-\frac{x}{3}=4\left(x+\frac{x}{3}\right)$, откуда $x=48$.

[198] Эта задача — единственная в книге ал-Хорезми, которая сводится к двум уравнениям с двумя неизвестными; одно из них ал-Хорезми называет «вещью», а другое — «некоторой частью вещи». За первое неизвестное, которое мы обозначим через x, берется «завещанное первоначального владельца рабыни тому, кому она отдана», т. е. уменьшение цены рабыни при ее переходе от первого ко второму; за второе из этих неизвестных, которое мы обозначим через y, берется «завещанное того, кому отдана рабыня ее первоначальным владельцем», т. е. уменьшение цены рабыни при возвращении ее. Ал-Хорезми приравнивает, с одной стороны, находящуюся у наследников первого владельца рабыни цену рабыни, равную $300-x+y$, вместе с вознаграждением за сожительство с ней при первой передаче рабыни, равным $100-\frac{x}{3}$, без разности вознаграждений за сожительство с ней при первой и второй передачах рабыни, равной $\frac{x-y}{3}$, — удвоенной сумме первой завещанной суммы и разности вознаграждений за сожительство. С другой стороны, ал-Хорезми приравнивает находящиеся у второго владельца рабыни разность между ценами рабыни, т. е. $x-y$, без вознаграждения за сожительство с ней при первой отдаче, т. е. $100-\frac{x}{3}$, с разностью вознаграждений за сожительство с ней при первой и второй передачах рабыни, т. е. $\frac{x-y}{3}$, — удвоенной второй завещанной сумме. Таким образом, получаются два уравнения $300-x+y+100-\frac{x}{3}-\frac{x-y}{3}=2\left(x+\frac{x-y}{3}\right)$ и $x-y-\left(100-\frac{x}{3}\right)+\frac{x-y}{3}=2$, равносильные уравнениям $13x-6y=1200$, $5x-10y=300$, откуда $x=102$, $y=21$.

[199] В задачах об отдаче в залог предполагается, что наследникам умершего возвращается залог за вычетом цены продовольствия и некоторой суммы, которую ал-Хорезми называет завещанной залогодержателю. Так как завещанное должно быть равно трети имущества, ал-Хорезми приравнивает находящуюся у наследников умершего сумму залога за вычетом цены продовольствия, т. е. 20 дирхемов, и цену продовольствия, т. е. 10 дирхемов без завещанного, удвоенному завещанному или, если принять завещанное за x, $30-x=2x$, откуда $x=10$.

[200] Наследникам умершего возвращается 20 дирхемов без некоторой суммы, которую мы будем обозначать x. Кроме того, так как умерший отказался

от залога, в их руках находится сумма, относящаяся к x как получаемая в залог, т. е. 50, к залогу, т. е. 20; эта сумма равна $\frac{5}{2}x$. Ал-Хорезми приравнивает это двум третям имущества, т. е. $\frac{2}{3}\cdot 50$. Получается уравнение $2\frac{1}{2}+20-x=\frac{2}{5}\cdot 50$, откуда $x=\frac{80}{9}=8\frac{8}{9}$, что составляет $\frac{4}{9}$ от 20 дирхемов, называемых ал-Хорезми „капиталом“ (ра'с ал-ма̄л); разность $20-8\frac{8}{9}$ равна $11\frac{1}{9}$.

ПРИМЕЧАНИЯ К ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ТАБЛИЦАМ

[1] Астрономические таблицы (зидж) ал-Хорезми, из которых заимствован публикуемый в данном томе тригонометрический раздел, в первоначальном виде не сохранился. Известны лишь извлечения из него, включенные в другие зиджи, а также обработка этого сочинения ал-Хорезми, выполненная мадридским астрономом Масламой ал-Маджрити (ок. 1000 г.) и сохранившаяся в латинском переводе XII в. Латинский текст версии ал-Маджрити был опубликован вместе с комментариями Г. Зутером в 1914 г. [23], а комментированный английский перевод, основанный на этом издании,— О. Нейгебауером в 1962 г. [20]. Издание Г. Зутера, подготовленное А. Бьёрнбо и А. Бестгорном, воспроизводит рукописи Бодлеянской библиотеки Оксфордского университета (N° Cod. auct. F. 1.9), Шартрской Публичной библиотеки (№ 214/173) и Мадридской Национальной библиотеки (№ 10016).

Мы приводим тригонометрические главы и соответствующие таблицы зиджа ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити, пользуясь указанными выше публикациями. Впервые эти разделы зиджа были исследованы в 1909 г. А. Бьёрнбо [104], который опубликовал их перевод на датский язык.

В настоящей книге дается перевод 6-й главы «О подразделении кругов» [23, с. 7; 20, с. 17; л. 101 Оксфордской рукописи и л. 44 об. Шартрской рукописи], 23-й главы «Об определении синусов по дугам и обратно» [23, с. 17—18; 20, с. 44—45; л. 129 Оксфордской рукописи, л. 71 об. Шартрской рукописи, л. 37 Мадридской рукописи] и 28-й главы «Об определении котангенсов и тангенсов по дугам и обратно» [23, с. 21—23; 20, с. 55—56; лл. 132 об.—133 Оксфордской рукописи, л. 75 Шартрской рукописи], а также таблицы синусов [23, с. 169—170; лл. 129—129 об. Оксфордской рукописи, лл. 37 об.—38 об. Шартрской рукописи, лл. 71 об.—72 Мадридской рукописи] и таблицы котангенсов [23, с. 174; л. 133 Оксфордской рукописи, л. 75 об. Шартрской рукописи].

Известно, что ал-Маджрити при обработке зиджа внес в него существенные изменения и дополнения. Поэтому реконструкция подлинного текста сочинения ал-Хорезми составляет важную задачу историков астрономии (см., например, работы Э. С. Кеннеди [195—203]). Для ее решения привлекаются средневековые источники и прежде всего комментарии к зиджу ал-Хорезми. Его комментировали многие восточные ученые, в том числе ал-Фаргани и Абу Райхан Беруни, но большинство такого рода сочинений утеряно. Наиболее ранний известный сейчас комментарий, сохранившийся в латинском [15] и древнееврейском [9] средневековых переводах, составил в X в. испанский астроном Ахмад ибн ал-Мус̱анна ибн 'Абд ал-Карим. Этот трактат существенно дополняет обработку ал-Маджрити, так как его автор подробно разъясняет многие моменты из зиджа ал-Хорезми, доступного ему в подлиннике. В частности, он дает правила вычисления таблиц синуса, обращенного синуса, а также «таблицы разностей восхождений по наклонной сфере», которая отсутствует в версии ал-Маджрити, а также правила нахождения котангенса по аргументу и обратно. Последнее весьма важно, так как может служить свидетельством того, что правила, касающиеся «тени», имелись в зидже ал-Хорезми, а не являются вставкой ал-Маджрити.

Мы публикуем тригонометрический раздел комментария Ибн ал-Мусанны по английскому переводу в издании Б. Голдстейна [9].

Недавно обнаружена рукопись считавшегося утерянным раннего арабского комментария к зиджу ал-Хорезми, который был составлен ученым IX в. Ибн ал-Масруром (ок. 875 г.). Сведения об этом сочинении приводятся в работах Э. С. Кеннеди [199, 201], исследующего рукопись и готовящего текст к печати.

Астрономические таблицы ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити озаглавлены в Оксфордской рукописи ezich elkaurezmi, в Мадридской рукописи ezeig id est chanonum alghoarizmi (Шартрская рукопись не имеет заголовка). Здесь слова ezich и ezeig — искажения арабского слова аз-зидж — «астрономические таблицы», слова id est chanonum — искажение латинских слов id est canonum — т. е. «Канон».

Глава 6 астрономических таблиц ал-Хорезми озаглавлена De divisione rotarum.

[2] Felek, искажение арабского выражения фалак ал-бурӯдж (дословно «орбита знаков Зодиака»), обозначающего эклиптику, т. е. окружность большого круга на небесной сфере, являющуюся линией видимого годичного движения Солнца по небосводу. Эклиптика разделена на 12 равных участков — знаков Зодиака, проходимых Солнцем за месяц; каждый из них соответствует одному из 12 созвездий Зодиака.

[3] Знаки Зодиака — signa, букв. «знаки», перевод арабского слова бурӯдж. Здесь под знаками Зодиака подразумеваются не только $\frac{1}{12}$ эклиптики, но и $\frac{1}{12}$ любой окружности.

[4] Градус — gradus, перевод арабского слова дараджа; здесь $\frac{1}{30}$ знака Зодиака и $\frac{1}{360}$ окружности (см. примеч. 37 к арифметическому трактату).

[5] Части — partes (перевод арабского слова аджзā'), другое название градусов; частями называются также 60-е доли радиуса, которыми измеряются линии синуса (см. примеч. 16).

[6] Минута — dacaica, искажение арабского слова дак̣ӣка; здесь $\frac{1}{60}$ градуса (см. примеч. 33 к арифметическому трактату).

[7] Секунда — secunda, иногда elthenia, перевод или искажение арабского слова с̱āнийа (вторая); здесь $\frac{1}{60^2}$ градуса (см. примеч. 34 к арифметическому трактату).

[8] Терция — tertia; здесь $\frac{1}{60^3}$ градуса (см. примеч. 35 к арифметическому трактату).

[9] В рукописи буквально: «и таким образом величина круга уменьшается сколько угодно, хотя бы до бесконечности» (et ad hunc modum quantumlibet vel in infinitum rotae magnitudo descresit). В переводе О. Нейгебауера [20, с. 17] эта фраза разъяснена благодаря следующей вставке: «и таким образом величина [делений] круга уменьшается сколько угодно».

[10] Последнее предложение имеется только в Оксфордской рукописи и, как считает Г. Зутер [23, с. 7], является позднейшей латинской вставкой.

Вывод о неделимости (individentia) «каких-то частей этих частей» соответствует точке зрения греческого философа V в. до н. э. Демокрита и других атомистов, считавших, что пространство состоит из нечувствительно малых, но конечных принципиально неделимых частиц. В античной математике теория Демокрита была вытеснена представлением Аристотеля о потенциально неограниченной делимости пространства. На средневековом Востоке встречались приверженцы обеих теорий. Атомистические представления разделял основатель учения «мутакаллимов» ал-Аш‘ари (X в.) (см. С. И. Григорян. Из истории философии Средней Азии и Ирана (VII—XII вв.). М., 1960, с. 286—308), их защищал Абу Райхан Беруни (973—1048 гг.) в своей научной полемике с главой восточного аристотелизма Ибн Синой (980—1037 гг.) (см. Десять вопросов Бируни относительно «Книги о небе» Аристотеля и ответы Ибн Сины», Восемь вопросов Бируни относительно «Физики» Аристотеля и ответы Ибн Сины, перевод Ю. Н. Завадовского. Материалы по истории прогрессивной общественно-философской мысли в Узбекистане, под ред. И. М. Муминова. Ташкент, 1957, с. 128—162).

Спор между сторонниками и противниками атомизма велся и в средневековой Европе (см. В. П. Зубов. Развитие атомистических представлений до начала XIX в. М., 1965). Эта философская полемика нашла отражение в математике. Ее отзвуком является указанное примечание к тексту зиджа ал-Хорезми.

[11] Синус — в Оксфордской и Шартрской рукописях elgeib, в Мадридской рукописи sinus. Слово ал-джайб, искажением которого является elgeib, а переводом sinus, само является искажением санскритского слова джива — «тетива». Этим словом индийцы переводили греческое слово chorde — «тетива», или «хорда», которым александрийские астрономы называли хорды, игравшие в их астрономических вычислениях роль наших синусов (см. [48, 92]). Так, Птолемей рассматривал в круге радиуса $R=60$ (рис. 38) хорду AB дуги 2α. Очевидно, что

$$\text{хорда } 2\alpha=2R\sin\alpha.$$

Позже индийцы заменили в своих вычислениях хорды полухордами, т. е. линиями синуса; эти линии они называли сначала ард-джива — «полутетивами», а затем для краткости отбросили частицу «ард». Слово sinus является переводом, первоначального значения слова джайб — «впадина, пазуха».

[12] Плоский синус — elgeib planum, полуперевод арабского выражения алджайб ал-мустав, название обычного синуса в отличие от «обращенного синуса». Ал-Хорезми рассматривает круг с радиусом $R=60$. Под синусом понимается линия синуса, т. е. $AC=R\sin\alpha=60\sin\alpha$. Было введено понятие «полного синуса», соответствовавшего 90° и равного $R\sin 90°=R=60$.

Обращенный синус — elgeib diminutum или elgeib elmankuz, букв. «уменьшенный синус», полуперевод или транскрипция арабского выражения ал-джайб ал-манкус. Переводчик прочел таким образом арабское выражение ал-джайб ма'кус — «обращенный синус», которое впоследствии переводилось на латынь выражением sinus versus. Этот отрезок — высота сегмента, определяемого данной дугой (на рис. 38 $\sin\text{vers}\,\alpha=CD$), назывался также «стрелой дуги» (см. примеч. 123 к алгебраическому трактату).

[13] Значение — argumentum, впоследствии из этого термина произошел наш термин «аргумент».

[14] В столбец синусов — in semitas elgeib, в Мадридской рукописи слово semita, букв. «тропинка», заменено словом linea; этими словами переведено арабское слово ал-джадвал — «столбец».

[15] Здесь дается правило линейного интерполирования таблиц синусов.

[16] Шестьдесят — значение «полного синуса», т. е. радиуса. В таблицах синус приводился в шестидесятых долях радиуса Так как весь радиус считался равным 60, то при пользовании шестидесятиричными дробями значащие цифры — те же, что и в случае радиуса, равного 1; в частности, синус 30° и 90° соответственно равен 30 и 60 «частям»). Так, $\sin 6°=6^p 16'18''=6+\frac{16}{60}+\frac{18}{60^2}$.

[17] Если обозначить через $\mathrm{Sin}\,\alpha$ и $\mathrm{Sin\,vers}\,\alpha$ соответственно линию синуса и линию обращенного синуса дуги α окружности круга с радиусом $R=60$, то излагаемое здесь правило может быть записано в виде ($\mathrm{Sin}\,\alpha=\mathrm{R}\sin\alpha$)

$$\mathrm{Sin\,vers}\,\alpha=60—\mathrm{Sin}(90°—\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha<90°,$$

$$\mathrm{Sin\,vers}\,\alpha=60+\mathrm{Sin}(\alpha—90°) \quad \text{при} \quad \alpha>90°.$$

Эти правила равносильны нашему правилу $\sin\text{vers}\,\alpha=1—\cos\alpha$, где в первом случае $\cos\alpha>0$, а во втором — $\cos\alpha<0$.

[18] Имеются в виду астрономические таблицы, в которых задается дуга в функции синуса. В тексте эти таблицы отсутствуют.

[19] Нахождение «мест» — определение дуг по синусам.

[20] «Алмагест» Птолемея — elmagesti Ptolomaei — основной астрономический труд знаменитого астронома древности Клавдия Птолемея, работавшего во II в. н. э. в Александрии. Названия «Алмагест» и elmagesti — искажения арабского названия этого сочинения (ал-маджиста), в свою очередь, являющегося искажением одного из греческих названий этого сочинения Megiste syntaxis — «Величайшее построение». В I книге «Алмагеста» излагаются тригонометрия хорд и геометрические теоремы, равносильные формулам вычисления синуса суммы двух дуг, синуса удвоенной дуги, синуса половинной дуги и т. д., при помощи которых Птолемей вычислял таблицы хорд (одна из этих теорем — известная «теорема Птолемея»).

Данная ссылка свидетельствует о знакомстве автора зиджа с трудом Птолемея. По мнению А. Бьёрнбо [104], ал-Хорезми получил свои таблицы синусов из таблицы хорд Птолемея, перейдя в ней к половинным углам и полухордам. Г. Зутер [23, с. 70] считал возможным, что эти таблицы ал-Хорезми происходят из индийской сиддханты (см. [48]), где были даны 24 значения синуса для первой четверти круга через 3°45′. Он полагал также, что таблицы синуса через 1° составил в Багдаде еще до ал-Хорезми известный астроном Йа'куб ибн Тарик.

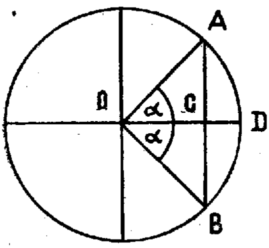


Рис. 38.

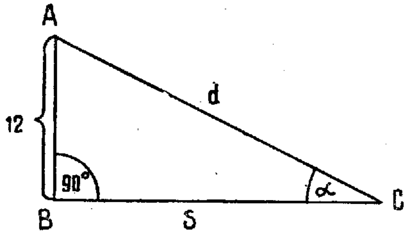


Рис. 39.

[21] Высота Солнца — artifa Solis, полуперевод арабского выражения иртифа аш-шамс, означавшего аргумент котангенса («плоской тени»).

[22] Плоская тень — umbra elmustevia, полуперевод арабского выражения аз-зилл ал-мустав, обозначавшего линию котангенса. Латинские переводчики называли плоскую тень также umbra recta, дословно «прямая тень»; вместо umbra иногда пишется adhel — искажение слова аз-зилл. Названия «высота Солнца» и «плоская тень» объясняются тем, что линия котангенса рассматривалась как тень на плоскости от вертикального измерительного шеста, который обычно подразделялся на 12 равных частей. Высота Солнца измерялась дуговыми градусами, «плоская тень» — частями измерительного шеста. Задачи на определение расстояний при помощи измерения тени вертикального шеста встречались у индийских астрономов V—VII вв.

[23] Глава 6 о подразделении кругов, глава 23 об определении синуса по дуге и обратно и таблица синусов, несомненно, имелись в первоначальных таблицах ал-Хорезми. Глава 28 об определении котангенса и тангенса по «высоте Солнца» и обратно и таблица котангенсов могут быть позднейшей вставкой ал-Маджрити. Однако аналогичная таблица котангенсов имелась уже у ал-Марвази — современника ал-Хорезми, поэтому наличие таблицы котангенсов и главы о тангенсах и котангенсах у ал-Хорезми вполне возможно. Эту возможность подтверждает и наличие соответствующих параграфов в комментарии Ибн ал-Мусанны (см. ниже).

[24] Пусть $AB=12$ — измерительный шест (рис. 39), α — высота Солнца, $BC=s$ — линия котангенса дуги α ($\operatorname{ctg}\alpha$, «плоская тень»). Тогда излагаемое здесь правило может быть записано в виде

$$s=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{Sin}(90^\circ-\alpha)}{\operatorname{Sin}\alpha}\,12.$$

Это правило равносильно нашему правилу $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Умножение на 12 указывает на то, что «плоские тени» измерялись в единицах, равных $\frac{1}{12}$ длины измерительного шеста.

[25] Дюймы — digiti, букв. «пальцы» (перевод арабского слова ис̣ба̄’) — единицы измерения плоских теней, равные $\frac{1}{12}$ длины измерительного шеста; в частности, котангенс 45° равен 12 дюймам.

[26] Корень elgidher, искажение арабского слова ал-джиз̱р.

[27] Диаметр тени — umbrae diametrus, перевод арабского выражения к̣ут̣р аз̣-з̣илл, обозначающего линию косеканса $AC=d$ (рис. 39). Если обозначить линию косеканса дуги α через $\csc\alpha$, то излагаемое здесь правило может быть записано в виде

$$d=\csc\alpha=\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+12^2},$$

что равносильно нашему правилу $\csc\alpha=\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}$.

Чтобы по известному котангенсу определить его аргумент, т. е. высоту Солнца α, предлагается выполнить следующие действия:

$$s\cdot s=\operatorname{ctg}^2\alpha,\quad \sqrt{s^2+144}=\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+144}=d.$$

Тогда

$$\operatorname{Sin}(90^\circ-\alpha)=\frac{sR}{d}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot 60}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+144}}.$$

Отсюда по таблице синусов находится $90^\circ-\alpha=\operatorname{arc}\operatorname{Sin}\dfrac{sR}{d}$, а затем — искомый угол α. Это равносильно правилу

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\csc\alpha}\cdot 60=\sin(90^\circ-\alpha)$$

или, если $R=1$, то $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\csc\alpha}=\cos\alpha$.

[23] Обращенная тень umbra elmankuz — полуперевод арабского выражения аз̣-з̣илл ал-манк̣ӯс, «уменьшенная тень»; таким образом переводчик прочел арабское выражение аз̣-з̣илл ал-ма‘к̣ӯс, «обращенная тень» (ср. примеч. 12). Этим термином называлась линия тангенса, которая рассматривалась как тень горизонтального шеста на вертикальной стене. Термины «тангенс» (tangens — «касающийся») и «секанс» (secans—«секущий») были введены в 1583 г. Т. Финком, а термины «котангенс», «косинус» и «косеканс» (т. е. тангенс, синус и секанс дополнения) были введены только в 1620 г. Э. Гунтером: до этого тангенсы и котангенсы назывались и в западно-европейской литературе «тенями», а секансы и косекансы — «диаметрами».

[29] Чтобы по высоте Солнца α, т. е. по аргументу котангенса определить тангенс, предлагается выполнить следующие действия: 1) по данному α с помощью таблиц определить $\operatorname{Sin}\alpha$; 2) определить $\operatorname{Sin}(90^\circ-\alpha)$; 3) умножить $\operatorname{Sin}\alpha$ на 12; 4) произвести деление $\dfrac{12\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(90^\circ-\alpha)}$.

Если обозначить линию тангенса дуги α через $\operatorname{tg}\alpha$, то излагаемое здесь правило может быть записано в виде

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)},$$

что соответствует нашему правилу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Как видно из приведенного правила, „обращенные тени" измерялись в долях единицы.

[30] Таблица синусов озаглавлена в Оксфордской рукописи tabula elgeib, Мадридской рукописи tabula sinus. «Столбцы чисел» — в Оксфордской и Шартрской рукописях semitae numerorum, в Мадридской рукописи linea numerorum, под числами понимаются числа градусов в дугах (рассматриваются только дуги, содержащие целое число градусов). «Синусы» — в Оксфордской и Шартрской рукописях elgeib, в Мадридской рукописи — sinus.

В таблицах, приведенных в разных рукописях, встречаются разночтения, что обусловлено ошибками переписчиков и переводчиков. Все разночтения указаны в публикации Г. Зутера [23], а также в русском издании таблиц [1, с. 128—129].

[31] Таблица теней — таблица плоских теней, т. е. котангенсов — имеется только в Оксфордской и Шартрской рукописях, в обеих рукописях таблица озаглавлена tabula umbrorum, а в Шартрской рукописи, кроме того, gedval adhel, что является искажением арабских слов джадвал аз̣-з̣илл, имеющих тот же смысл. Под числом здесь, как и в таблице синусов, понимается число градусов в дуге, которая здесь называется высотой Солнца (см. примеч. 21). Значения плоских теней выражены в дюймах (см. примеч. 24) и их шестидесятиричных дробях.

[32] Публикуемый нами перевод отрывков из комментария Ибн ал-Мусанны к зиджу ал-Хорезми выполнен по английскому изданию [9]. Сочинение построено в форме вопросов, в которых цитируется зидж ал-Хорезми, и ответов на них. Оно начинается с введения, содержащего некоторые сведения о тексте оригинала. В частности, отмечены краткость изложения и отсутствие детальных объяснений. Это, по-видимому, говорит о том, что версия ал-Маджрити достаточно верно соответствует тексту ал-Хорезми. Здесь же приводятся данные об утерянном сейчас комментарии ал-Фаргани к зиджу ал-Хорезми. Текст введения мы приводим полностью. Далее следует перевод отрывков, касающихся плоской и сферической тригонометрии (вопросы 35—41, 54, 55 и ответы на них). Ибн ал-Мусанна подробно разъясняет сформулированные в зидже ал-Хорезми тригонометрические правила и приводит примеры их применения к задачам астрономии.

[33] Полное имя автора комментария — Ах̮мад (или Мух̮аммад) ибн ал-Мус̱аннā ибн ‘Абд ал-К̣арим. Он жил в X в. и работал в Испании. Сведений о нем почти не сохранилось [9, с. 9; 290, с. 158—159]. Из его трудов известен лишь комментарий к зиджу ал-Хорезми, но в тексте этого сочинения Ибн ал-Мусанна упоминает также свою книгу геометрического содержания, написанную для некоего Мухаммада ибн ‘Аббаса.

[34] Мух̮аммад ибн ‘Али ибн Исма‘ӣл, которому адресован трактат, неизвестен. Высказано предположение [9, с. 185], что его можно идентифицировать со знатоком арифметики и грамматики ‘Алӣ ибн Мух̮аммадом ибн Исма‘илом, который родился в Антиохии, переехал из Сирии в Испанию в 963 г. и умер в 987 г. в К̣ордове [289, с. 64].

[35] Ах̮мад ибн Мух̮аммад ибн К̣ас̱ӣр ал-Фарг̣āнӣ — среднеазиатский астроном, уроженец Ферганы, работавший в Багдаде в одно время с ал-Хорезми [289, с. 18—19; 290, с. 160]. Ал-Фаргани — автор нескольких сочинений, в том числе книги о началах астрономии, которая была переведена в XII в. на латынь и пользовалась большой популярностью в Европе.

[36] В противоположность Птолемею, принимавшему диаметр тригонометрического круга за 120 частей, авторы индийских сиддхант придавали ему другие значения (см. [48]), в том числе и 300 минут.

[37] Имеются в виду подразделения дуги 90° на шесть равных частей по 15°, что составляет половину знака Зодиака (см. примеч. 3).

[38] Ниже, исходя из определения синуса угла как половины хорды двойного угла, автор с помощью геометрических рассуждений находит двенадцать значений синуса (выраженных через радиус круга) для дуг $7\frac{1}{2}^\circ$, 15°, $22\frac{1}{2}^\circ$, 30°, $37\frac{1}{2}^\circ$, 45°, $52\frac{1}{2}^\circ$, 60°, $67\frac{1}{2}^\circ$, 75°, $82\frac{1}{2}^\circ$, 90°. Дается правило для получения более точных таблиц. Следующий шаг в рассуждении даст значения синусов для 24 делений дуги 90° через интервал 3°45′ = 225′, что соответствует таблицам синусов, обычно приводившимся в индийских сиддхантах [48, с. 153—154].

[39] Из этих слов можно заключить, что доказываемая теорема фигурировала в зидже ал-Хорезми.

[40] Ссылка на «правила индийцев» говорит о том, что при составлении таблиц синусов ал-Хорезми пользовался индийскими методами [48, с. 158—159].

[41] Отсюда следует, что в зидже ал-Хорезми встречалось как значение наклонения эклиптики к экватору (ε), фигурировавшее в индийских сиддхантах (24°), так и значение этой величины по Птолемею (23°51′). Ниже приводится также значение $\varepsilon = 23°33′$, полученное багдадскими астрономами при ал-Ма'муне и включенное в «Исправленный зидж» (аз-зӣдж ал-мумтаҳан) [195, с. 132]. Отмечается, что указанное различие в минутах было несущественно для астрономов-практиков, пользовавшихся астролябией, которая не давала большой точности наблюдения.

[42] Ниже дается описание стенного квадранта, которое имелось в «Алмагесте» Птолемея. По-видимому, оно фигурировало и в тексте зиджа ал-Хорезми, но было опущено в версии ал-Маджрити.

[43] Приводится правило сферической тригонометрии для определения склонения δ некоторой точки эклиптики, соответствующее нашей формуле

$$\sin\delta = \frac{\sin\varepsilon\cdot\sin\lambda}{R},$$

где ε — наклонение эклиптики к экватору, λ — эклиптическая долгота точки, R — радиус сферы.

[44] Ибн ал-Мусанна отмечает, что до сих пор ал-Хорезми придерживался индийских методов, но далее следует Птолемею.

[45] Речь идет о правиле линейной интерполяции для получения промежуточных значений синуса и склонения.

[46] Разъясняются понятия синуса и обращенного синуса (см. примеч. 12) для дуг разной величины.

[47] Дается правило определения географической широты места φ. В формулировке вопросов 38—40, касающихся этой задачи, точно цитируется текст из 24-й главы версии ал-Маджрити [20, с. 40]. Географическая широта места определяется по правилу

$$\varphi = \frac{h_{\max} + h_{\min}}{2},$$

где $h_{\max}$, $h_{\min}$ — наибольшая и наименьшая высота какой-либо незаходящей звезды.

[48] Отсюда можно заключить, что в зидже ал-Хорезми понятия тангенса и котангенса были введены, но правила их вычисления подробно не обсуждались.

[49] Дается правило, по которому вычисляется прямое восхождение α. Оно соответствует нашему правилу

$$\sin\alpha = \frac{\sin(90° - \varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,\frac{\sin\delta}{\sin(90° - \delta)}\,R$$

или (при $R=1$)

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varepsilon}.$$

[50] В следующем ниже разделе кратко излагается теория составных отношений, отсутствующая у ал-Маджрити. На примерах $\frac{8}{12} = \frac{8}{6} \cdot \frac{6}{12}$ и $\frac{9}{7} = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{7}$ разъясняется правило «составления отношений»

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}.$$

[51] Приводится формулировка теоремы Менелая о полном четырехсторонннике, получившая в арабоязычной литературе название «фигуры секущих» (шакл ал-кит̣а‘). С ее помощью решались задачи сферической тригонометрии. Ибн ал-Мусанна применяет ее, чтобы определить прямое восхождение светила.

[52] Отсюда следует, что в тексте ал-Хорезми не было формулировки теоремы Менелая.

[53] Правило определения тени (т. е. котангенса) по высоте Солнца дословно совпадает с приведенным у ал-Маджрити (см. примеч. 24). Здесь оно явно приписано ал-Хорезми. Указано, что он считал гномон равным 12 дюймам. По-видимому, ал-Хорезми дал краткую формулировку правила, а следующее после нее доказательство принадлежит Ибн ал-Мусанне.

[54] Правило нахождения высоты Солнца по тени (см. примеч. 27) также приводится как цитата из текста ал-Хорезми.

Весьма существенно, что здесь, как и в предыдущем пункте, линии котангенса и косеканса рассматриваются по отношению к тригонометрическому кругу.

МУХАММАД ИБН МУСА АЛ-ХОРЕЗМИ

ТРАКТАТ О ПРИМЕНЕНИИ АСТРОЛЯБИИ

Сказал Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми: первое, что нужно тому, кто применяет астролябию, это определение высоты[44].

1. Чтобы определить высоту [Солнца], поверни астролябию спинкой к себе и повесь ее на свою правую руку; при этом Солнце находится над твоим левым плечом. Затем направь девяносто черточек [т. е. градуировку], которые находятся на спинке астролябии, к Солнцу. После этого постепенно поднимай алидаду до тех пор, пока не увидишь Солнце вступившим в оба отверстия. Затем посмотри, на какую из девяноста частей (джуз‘), находящихся на спинке астролябии, падает указатель, который имеется на алидаде,— он является ее заостренным концом. Это — высота Солнца к данному времени. Заметь себе это!

2. Для того чтобы определить гороскоп (т̣āли‘) и часы дня в его частях, которые истекли, определи высоту, как мы это тебе описали, и положение Солнца в

---

[43] Фотография и описание астролябии заимствованы из книги: Basserman — Jordan, Montres, horloges et pendules, p. 26.

[44] Нумерация задач дана И. Франком.

А. П. Юшкевич

О ТРУДЕ ПО АРИФМЕТИКЕ МУХАММАДА ИБН МУСЫ АЛ-ХОРЕЗМИ

Среди ученых, работавших в первой половине IX в. в Доме Мудрости, этой академии наук Багдадского халифата, выдающееся место принадлежит, как известно, Мухаммаду ибн Мусе ал-Хорезми. Труды его по арифметике, алгебре, астрономии и географии оказали во многом определяющее влияние на развитие науки в странах Ближнего и Среднего Востока, Северной Африки и средневековой Европы. Мы не знаем, какие открытия принадлежат лично ему, и, несомненно, что его труды содержали многое, полученное им от предшественников, о которых он говорит в начале своего алгебраического трактата, не называя никого по имени. Но столь же несомненно, что ал-Хорезми блестящим образом систематизировал, а в чем-то дополнил, обширный комплекс научных знаний и что свою главную задачу он видел в их широкой популяризации на пользу людям: эта цель явно высказана в вводных фразах его сочинений по алгебре и арифметике. Ниже речь идет только о втором из них, которое сыграло огромную роль в истории не только арифметики, но и всей мировой культуры как основной источник распространения десятичной позиционной системы счета и записи чисел, повсеместно заменившей гораздо менее совершенную алфавитную систему счисления греков, громоздкую римскую нумерацию, сложные китайские идеограммы и т. д.

Казалось бы, давно известный арифметический трактат ал-Хорезми должен был вызвать интерес исследователей. В действительности историки математики долгое время уделяли ему совершенно недостаточное внимание. Конечно, все авторы книг по средневековой математике сообщали о нем некоторые сведения, но допускали при этом существенные ошибки и в изложении содержания и в общей оценке. Сказанное относится к столь известным специалистам, как М. Кантор, Г. Цейтен (правильнее говорить: Сютен), Ф. Кеджори, И. Тропфке, а за ними ко всем, кто опирался на их труды. Только Г. Энестрем и Ю. Рушка ближе познакомились с арифметикой ал-Хорезми, но первый ограничился несколькими беглыми критическими замечаниями по адресу Кантора (1904), а второй коснулся лишь отдельных, относящихся к ней проблем (1917). Я имел случай указать на это обстоятельство в двух своих работах, посвященных арифметическому трактату ал-Хорезми [91, 180], использованных вместе с другой новой литературой и в новом свете в данной статье[1].

КЕМБРИДЖСКАЯ РУКОПИСЬ ПЕРЕВОДА ТРУДА АЛ-ХОРЕЗМИ

Арабский текст арифметического трактата ал-Хорезми до сих пор не обнаружен . Существует только одна латинская рукопись, два первых абзаца которой начинаются словами «Алгоризми сказал» (Dixit Algorizmi) и которая, несомненно, восходит к неизвестному нам арабскому прототипу. Единственный экземпляр рукописи, находившейся некогда в одном английском аббатстве, хранился в библиотеке Кембриджского университета под индексом MS I i.6.5.ff.102^R—109^V. Согласно каталогу рукописей, составленному в 1858 г., он был переписан мелким почерком XIII в. (written in small XIIIth century hands). В 1857 г. эту рукопись опубликовал с многочисленными неточностями и опечатками итальянский историк математики Б. Бонкомпаньи [5], и его изданием пользовались почти сто лет. Факсимиле и точную транскрипцию опубликовал в 1963 г. К. Фогель [25], только факсимиле — я, в приложении к статье [180, с. 55—63].

Кембриджская рукопись не представляет собой, однако, полный и точный перевод арабского оригинала. Она обрывается на примере умножения дробей $3\frac{1}{2}\cdot 8\frac{3}{11}$, содержит ряд несомненных пропусков и вставок, а также пустых мест, оставленных для записи вычислений с помощью «индийских» цифр; кроме того, переводчик или, быть может, переписчик более раннего перевода, приспособляясь к подготовке читателя, широко применил в своем тексте более распространенные тогда в Европе римские цифры.

Был ли исходный перевод аутентичен арабскому оригиналу,— неизвестно; при тогдашнем вольном обращении с рукописными текстами чужих трудов весьма возможно, как это отметил в свое время Ю. Рушка, что уже первоначальная латинская версия несколько отличалась от исходного арабского оригинала (или, быть может, его арабской же обработки) [255, с. 72—75]. Что касается времени написания оригинала и первого перевода, а также личности переводчиков, то здесь возможны только приблизительные датировки, предположения. Судя по немногим биографическим сведениям об ал-Хорезми и тому, что его алгебраический трактат упоминается в кембриджской арифметической рукописи, оригинальный текст ее был подготовлен около 825 г. Латинский же прототип кембриджской рукописи был изготовлен в первой половине XII в., во всяком случае ранее 1143 г., которым датируется древнейшая латинская рукопись, по содержанию родственная кембриджской,— о ней говорится далее.

С уверенностью можно сказать одно: уже в середине XII в. принципы и приемы действий десятичной позиционной арифметики, первым пропагандистом которых выступил в Багдаде ал-Хорезми, получили довольно широкую известность в Западной Европе, где в это время развернулась интенсивная деятельность блестящей группы переводчиков научной литературы с арабского на общепринятый здесь тогда — и еще много позднее — в ученом мире латинский язык. Предпосылкой этой переводческой деятельности явилось постепенное отвоевание испанцами у мавров территории Пиренейского полуострова (так, в 1085 г. был взят Толедо, ставший вскоре крупным научным центром) и южно-итальянскими норманами Сицилии (бывшей под владычеством арабов с конца IX в. до 1091 г.). Эта переводческая работа, сопровождавшаяся написанием важных компилятивных сочинений, имела международный характер, в ней участвовали принявшие христианство арабы, испанцы, в том числе выходцы из перешедших до того в мусульманство семей, испанские евреи, англичане, итальянцы, славяне, фламандцы. Так возникла огромная литература по «алгоризмам», ставшая одной из основ дальнейшего прогресса науки в Европе. В частности, выдающийся английский ученый Аделард из Бата, во время своих странствий побывавший на Ближнем Востоке и в Сицилии, перевел в 1126 г. астрономический труд ал-Хорезми в обработке мавританского математика и астронома второй половины X в. Абу-л-Касима ал-Маджрӣтӣ, а другой английский ученый, Роберт из Честера, в 1145 г. перевел в Сеговии алгебраический трактат ал-Хорезми. В промежутке между двумя названными датами, вероятно, и было переведено и арифметическое руководство ал-Хорезми. Не лишено правдоподобия, что его перевел один из этих двух ученых, переводивших другие труды ал-Хорезми, но вполне убедительных аргументов в пользу этой гипотезы, как справедливо пишет А. Аллар [96], не имеется.

О НАЗВАНИИ И СОДЕРЖАНИИ «КНИГИ ОБ ИНДИЙСКОМ СЧЕТЕ»

Кембриджская рукопись не имеет названия; Бонкомпаньи озаглавил ее публикацию «Algoritmi de numero indorum»[3], взяв слова из начала рукописи, где мы читаем, что автор намерен «изложить и разъяснить счет индусов с помощью .IX. букв» (л. 104, строки 6—7)[4]. Слово numerus по большей части обозначает в рукописи число, но здесь и в некоторых случаях употребляется также в смысле счета, нумерации и системы чисел[5], что находится в согласии с классической латынью, в которой множественное numeri означало также арифметику и даже астрономию. Цифры, как видно, называются в рукописи буквами, иногда фигурами (figure) и характерами (caracteres)[6]. Удивительным образом, в биобиблиографическом справочнике «Фихрист ал-улӯм», составленном около 990 г. багдадским историографом ал-Надӣмом, в краткой справке, посвященной ал-Хорезмӣ, арифметический трактат не упомянут, как впрочем, и алгебраический. Г. Зутер выдвинул предположение, что эти сочинения в дошедшем до нас тексте «Фихриста» были ошибочно приведены в непосредственно следующей справке о современнике ал-Хорезми Санада (или Синда) ибн Али, в которой названы, однако, наряду с трудом по алгебре, два арифметических руководства: «Китāб ал-джам‘ ва-т-тафрӣк», т. е. «Книга о сложении и вычитании» и «Китāб ал-хисāб ал-хинд», т. е. «Книга об индийском счете» [288, с. 36—39]. Рушка, со своей стороны, высказал мнение, что ал-Хорезми написал только одно сочинение по арифметике «Китāб ал-джам‘ ва-т-тафрӣк би'ҳисаб ал-хинд», т. е. «Книгу о сложении и вычитании согласно индийскому счету», приведя в заглавии две важнейшие операции, к которым приводятся другие [255, с. 18—19]. Два названия, приведенные в «Фихристе» рядом, возникли путем разделения первоначального более длинного заглавия. Гипотеза Рушка остроумна, но допускает наличие двух ошибок в справочнике ал-Надима, который, правда, вообще не полно отразил научную продукцию ал-Хорезмӣ. Информация, которой мы располагаем, не позволяет придти к какому-либо определенному заключению. Во всяком случае, если ал-Хорезмӣ написал два арифметических руководства, то на латинский язык было переведено одно и только оно было известно переводчикам XII в. Вероятно, оно и называлось в оригинале «Китāб ал-хисāб ал-хинд», т. е. «Книга об индийском счете».

Кембриджская рукопись не разделена на пункты с соответствующими заголовками. Содержание ее можно кратко резюмировать следующим образом:

1. Вводные замечания о пользе индийского счета.
2. Сведения об индийских (арабских) цифрах и о природе целых чисел.
3. Принципы десятичной позиционной нумерации.
4. Правила сложения целых чисел и их вычитания.
5. Правила раздвоения и удвоения.
6. Правило умножения.
7. Проверка удвоения и умножения с помощью 9.
8. Правило деления целых чисел.
9. О шестидесятиричных дробях.
10. Умножение шестидесятиричных дробей.
11. Деление дробей и проверка умножением.
12. Расположение шестидесятиричных дробей при сложении, вычитании, удвоении и раздвоении.
13. Умножение обыкновенных дробей.

На примере умножения смешанных чисел рукопись обрывается. Однако из текста ясно, что первоначальная рукопись содержала еще целый раздел. В самом деле, вслед за окончанием изложения ряда действий говорится: «А теперь, если будет угодно богу[7], приступим к разбору умножения дробей и их деления и извлечения корней» (л. 109 об., с. 30—32).

Мы можем частично восстановить с большой степенью вероятности полный текст «Книги об индийском счете», обратившись к двум другим близким к ней сочинениям, написанным лишь немногим позднее, чем ее латинский перевод. Каждая из них сохранилась в нескольких вариантах, между собой кое в чем различных; наиболее ранние из них представлены рукописями начала и середины XII в. и начала XIII в.

О ДВУХ ЛАТИНСКИХ РУКОПИСЯХ XII В., ПРИМЫКАЮЩИХ К АРИФМЕТИКЕ АЛ-ХОРЕЗМИ

Из только что упомянутых двух сочинений мы укажем сперва то, которое представлено наиболее древней рукописью и вместе с тем менее богато содержанием. Наиболее древний из ее 5 известных списков, уже упоминавшийся ранее, хранится в Вене и относится к 1143 г. [236] (ср. [166, 2-е изд., с. 24]); другой, хранящийся в Мюнхене и более полный, был скопирован между 1163 и 1168 г. [132]; третий, переписанный до 1180 г. и хранящийся в Париже, открывается словами «Начинается книга введений Ал-хорезми в астрономическое искусство, составленная магистром А.» (Incipit liber Ysagogarum Alchorismi in artem astronomicam a Magistro A. compositas) [96, с. 35] (ср. [210, т. 2, с. 298]). Критическое издание, основанное на сопоставлении всех рукописей, с указанием различных разночтений опубликовал впервые А. Аллар [96, с. 92—145].

Таинственный «магистр А.» назван автором данного сочинения только в парижской рукописи. Им мог быть Аделард из Бата, но Аллар, основываясь на некоторых различиях между рукописями, высказал в этом заслуживающие внимание сомнения и предложил называть его трактатом Аделарда только во избежание смешения с другими сочинениями по индийской арифметике[8]. Трактат магистра А. написан лаконично. В нем много общего с кембриджской рукописью, где многие вопросы разобраны подробнее. Числа в нем написаны новыми цифрами, имеется треугольная таблица умножения до 9.9 и описано извлечение квадратных корней.

Другое сочинение, в котором индийско-арабская система арифметики изложена более детально, дошло в 7 списках, самый ранний из которых восходит к началу XII в.; он хранится в Париже, где имеются еще три списка. В первых строках одного из них, переписанного около 1300 г., стоит: «Начинается пролог к книге Алгоаризми об арифметической практике. Изданный магистром Иоганном Испанским» — Incipit prologus in libro alghoarismi de pratica arismetrice. Qui editus est magistro Johanne Yspalensi. Эта рукопись, как и кембриджская, была — опять-таки со многими неточностями — опубликована Бонкомпаньи[9]. Имя магистра

Иоганна как автора имеется и в двух других парижских рукописях XIII в. (наиболее ранняя рукопись — анонимная). Судя по всему, магистр Иоганн был обратившийся в христианство еврей, занимавшийся переводческой и научно-литературной деятельностью в Толедо примерно в 1135—1153 гг.; как переводчик он сотрудничал с испанцем Доминго Гундисальво или Гонзалезом [263, т. II, с. 169—172]; в историю он вошел под именем Иоганна Испанского, а также Иоганна Толеданского или Севильского. В одном письме по вопросам астрономии он писал, как важно для занимающихся ею хорошо знать «тот род арифметики с помощью индусских букв, которым преимущественно пользуются сарацины, т. е. арабы, и который замечательным образом разъяснил достойный ал-Хорезми»[10]. Тут же он выражал намерение изложить далее или в другом месте этот род арифметики и с этими словами перекликается упомянутый выше краткий «пролог», где говорится, что всякий, желающий преуспеть в квадривиуме, прежде всего должен изучить науку о числах [96, с. 147][11].

Критическое издание арифметической части сочинения магистра Иоганна со многими разъяснениями, столь же тщательно выполненное, как и сочинение магистра А., имеется в многократно цитированном труде А. Аллара [96, с. 146—292]. Остается неизвестным, каким арабским источником располагал толедский ученый. Несомненно, что с поставленной им перед собой задачей он справился очень хорошо. Его изложение пространнее и богаче содержанием, чем в кембриджской рукописи и у магистра А. и (как, впрочем, и в последнем) разделено на параграфы со своими подзаголовками; общий план его (в арифметической части)[12] в главном сходен с кембриджской рукописью и имеются совпадающие числовые примеры. Это обстоятельство и общность источника существенно помогут нам в попытке реконструкции «Книги об индийском счете» ал-Хорезми. Мы будем пользоваться и другими трудами, непосредственно продолжавшими традиции, восходящие к арифметическому руководству ал-Хорезми.

Последнее замечание общего характера, прежде чем перейти к самой «Книге об индийском счете». Почему не уцелела, по-видимому, ни одна ее арабская рукопись, а несовершенный список ее латинского перевода сохранился в одном экземпляре и к тому же в английском аббатстве, столь далеком от первых центров распространения в Европе латинских переводов с арабского языка? Вероятно, причиной было то обстоятельство, что арифметическое руководство ал-Хорезми, содержание которого вошло в другие, более поздние труды, было ими вытеснено, так как они смогли быть написаны в более подходящей для позднейших читателей манере. Уже тот факт, что уцелело в общей сложности 12 списков арифметических руководств магистров А. и Иоганна, а наряду с ними в XII—XIII вв. появилось еще несколько латинских «алгоризмов», как стали называть «индийский счет», свидетельствует об их большей популярности, чем латинский перевод или обработка сочинения самого ал-Хорезми.

ОПИСАНИЕ «ИНДИЙСКОГО СЧЕТА»

Оставляя в стороне далекий от решения вопрос о возникновении десятичной позиционной системы в самой Индии [92, с. 118—124; 48, с. 22—30; 300, с. 40—45], мы заметим только, что в той или иной цифровой форме она сложилась не позднее VI в. и уже в 662 г. сирийский ученый Север Себохт, епископ в одном монастыре в верхнем течении Евфрата, восторженно отзывался о ее достоинствах. В арабских государствах, возникших в середине VII в. на ряде территорий Ближнего Востока и затем распространившихся на огромные районы Малой и Средней Азии, вплоть до Кавказа и долины Инда, а также на средиземноморское побережье Африки и большую часть Пиренейского полуострова, числа сперва записывались только словами или в греческой алфавитной нумерации, которую вскоре вытесняет алфавитная же арабская. «Индийский счет» стал известным в Багдадском халифате не позднее, чем между 760—770 гг., а в дальнейшем числа в арабской научной литературе записывались трояким образом: 1) с помощью числительных; 2) в алфавитной нумерации (шестидесятиричные — особо) и 3) в позиционной системе с помощью специальных десяти цифр, включая нуль. Такое сосуществование трех видов нумераций сохранялось долгие столетия и некоторые ученые в различных своих сочинениях пользовались различными приемами. Например, в алгебраическом трактате ал-Хорезми, судя по его арабской рукописи, законченной в 1342 г., цифры в тексте не употребляются; впрочем, как говорилось, этот трактат был написан до «Книги об индийском счете». Вообще, «индийский счет» не стал в арабской науке эпохи средних веков преобладающим, хотя за арифметикой ал-Хорезми последовал целый ряд аналогичных руководств выдающихся авторов. Первым или одним из первых среди них был известный философ и математик IX в. ал-Киндӣ, арифметическое руководство которого, однако, не сохранилось. Наиболее раннее после ал-Хорезми арабское сочинение об индийском счете, дошедшее до нас, было написано в Дамаске ал-Уклӣдисӣ в 952—953 гг. [258], после чего появились посвященные тому же предмету труды Кӯшиара ибн Лаббāна ал-Джӣлӣ (ок. 1000 г.) [208 а] и ан-Насавӣ (также ок. 1000 г.) [67]. Обратимся, однако, к трактату ал-Хорезмӣ и кембриджской рукописи.

Рукопись, как уже говорилось, начинается с упоминания автора и указания цели сочинения — облегчить изучение арифметики, объяснив счет индусов с помощью девяти букв, т. е. цифр[14], которыми они «для легкости и краткости» (л. 104, с. 7—8) выражают всякое число, а также все, что имеет место при умножении и делении, сложении и вычитании и прочем. Приступая далее к разъяснению индийского счета, автор говорит: «Пишут же они .IX. букв, фигуры которых такие» (л. 104, с. 18), и здесь мы наталкиваемся на первый из многих пропусков переписчика: цифры он не вписал, оставив для них пустое место, и так поступает очень часто. Во всей рукописи имеются, не считая знака нуля, только цифры для 1, 2, 3 и 5. Каковы они были в арабском оригинале и в латинском прототипе кембриджской рукописи, мы, разумеется, не знаем. Точно известно, что существовало различие между формами записи многих цифр, именно от двух до восьми, на арабском Востоке и арабском Западе; некоторые различия обнаруживаются и внутри каждой из этих двух систем. Чта касается ранних латинских рукописей, то в них цифровые знаки естественно близки к западно-арабским, начиная с древнейшей рукописи, относящейся к 976 г. и ныне хранящейся в Эскуриале. Внесенные

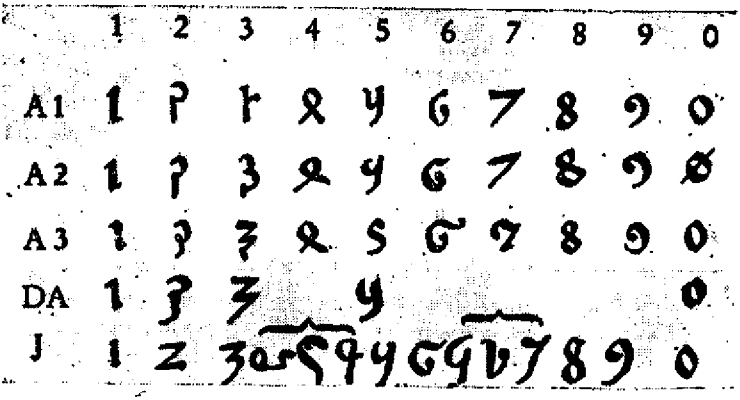


Рис. 40.

при переписке кембриджской рукописи цифры 1, 2, 3, 5 (и нуль) близки по форме к тем, какие имеются во всех списках рукописей магистров А. и Иоганна; сказанное, вероятно, относится и к другим цифрам, в кембриджской рукописи пропущенным.

В таблице[15] (рис. 40) даны изображения цифр в некоторых латинских «алгоризмах» XII—XIII вв. Буквой *А* помечены списки «рукописи магистра А.»: *А1* хранится в Национальной библиотеке в Вене Cod. Vind. 275 (1143 г.), *А2* — в Баварской государственной библиотеке в Мюнхене Cod. lat. mon 13021 (1163—1168), *А3* — в Национальной библиотеке в Париже: MS Paris 16208 (до 1180 г.) DA (Dixit algorizmi) хранится в Кембридже: Cambr. Univ. Lib. Ms Ii 6.5. Буквой *J* помечены цифры из двух списков «рукописи магистра Иоганна Испанского»: одна из них хранится в Национальной библиотеке в Париже Ms Paris 16202 (начало XIII в.), другая — там же MS Paris anc. fonds 7359 (около 1300 г). Все цифры заимствованы из более обширной таблицы в издании К. Фогеля [25, с. 51].

Вслед за пропущенной записью девяти «букв» говорится, что у разных людей форма пяти, шести, семи и восьми различна, «но в этом нет никакой помехи» (л. 104, с. 20—21). Однако в сохранившихся латинских рукописях отличия в цифрах для 5, 6, 7 и 8 незначительны; быть может, в прототипе имелось в виду сравнение западных цифр с восточными или же различных форм восточно-арабских цифр. Магистр Иоганн, записав «фигуры» девяти первых чисел от девяти до единицы (арабские тексты читаются справа налево), также отмечал, что многие изображают их поразному, приводя для примера четыре формы для семи и две для четырех; некоторые формы у него, несомненно, восточно-арабские [96, с. 152]. О различии между собою восточно-арабских форм писал ан-Насавӣ, приводя те, которые, по его словам, применяются большинством [67, с. 384].

Ознакомив с девятью «индийскими» цифрами, ал-Хорезми делает несколько замечаний о природе числа (целого). Уже в сочинении по алгебре, говорится в рукописи, он разъяснил, что всякое число составляется из единиц и что, значит, единица находится во всяком числе[16], как об этом «говорится в другой книге по арифметике» (л. 104, с. 24—25). Эта сделанная мимоходом ссылка на другую книгу говорит, кажется, в пользу того, что ал-Хорезми действительно написал два арифметических руководства, о возможности чего говорилось ранее. Быть может, «Книге об индийском счете» в самом деле предшествовала «Книга о сложении и вычитании», в которой не говорилось еще об «индийском счете»? Во всяком случае, вслед за цитированными словами начинается пассаж, написанный в духе древнегреческой концепции целого числа: единица находится вне чисел[17] и не нуждается в них для ее определения, между тем как другие числа без нее невозможны; «число есть не что иное, как собрание единиц» (л. 104, с. 30)[18], а два — удвоенность или удвоение (duplicitas vel geminatio), а три — утроение (triplicatio) единицы и так же следует понимать прочие числа (л. 104 об., с. 2—4). Очень близко по содержанию и формулировкам начало сочинения магистра Иоганна [96, с. 148]; у магистра А. всего этого нет. Однако этот пассаж кембриджской рукописи — вставка в первоначальный текст, ибо далее сказано: «А теперь вернемся к книге» (л. 104 об., с. 3—4)[19].

После вставки, с третьей ссылкой на ал-Хорезми (л. 104 об., с. 1), дается описание десятичной структуры числового ряда и способа наименования чисел, с учетом того, что в арабском языке специальные числительные имелись только для чисел 1—9, 10, 100 и 1000; при этом в рукописи эти числительные обозначаются римскими цифрами. Так удвоением, утроением и т. д. единицы образуются числа до. IX.; удвоением, утроением и т. д. десяти (X), как это делалось с единицей, образуются числа до .XC.; удвоением, утроением и т. д. ста (C) — числа до .DCCCC. Поступая так же с тысячами, автор получает .II. тысячи и .III. тысячи и так до бесконечности, или, по выражению, употребленному в рукописи,— «до бесконечного числа» — in infinitum numerum (л. 104 об., с. 14)[20]. Тут же вводится понятие о десятичных разрядах, именуемых differentiae (л. 104 об., с. 15 и след.),— в смысле разности этот термин в рукописи не применяется[21]. При описании четвертого по порядку разряда, т. е. тысяч, в рукописи появляется мультипликативное обозначение девяти тысяч в виде .IX.M., не принятое в римской нумерации, а говоря о пятом разряде, переписчик употребляет знак десяти с чертой сверху $\overline{X}$ (л. 104 об., с. 20)[22]. После этого формулируется принцип поместного значения: «Каждая единица в высшем разряде будет в нижнем, который перед ним, .X., а та, что будет .X. в нижнем, будет единицей в высшем, который ему предшествует; и начало разрядов будет справа от пишущего» (л. 104 об., с. 21—23). Эта формулировка соответствовала арабской манере писать справа налево. Так оно и есть в первой части цитаты. Но далее в кембриджской рукописи, неизвестно по чьей вине, допущена описка и сказано, что высший разряд предшествует низшему. В арифметиках магистров А. и Иоганна специальная формулировка самого позиционного принципа отсутствует, но соответствующие пояснения приема записи чисел имеются, причем у Иоганна более подробные [96, с. 96, 152—153]. Сказанное относится и к ан-Насавӣ [67, с. 384—385].

Почти сразу вслед затем ал-Хорезмӣ вводит знак нуля в виде «маленького кружка наподобие буквы .о.» — circulus parvulus in similitudine .o. litere (л. 104 об., с. 27—28) для выражения того обстоятельства, что какой-либо разряд пустой и в нем нет никакого числа, «кроме маленького кружка» (л. 104 об., с. 28—29). Употребление нуля должно было быть пояснено примерами чисел .X., .XX. и .XXX., но соответствующие записи новыми числами отсутствуют. У магистра А. знак нуля в виде кружка вводится без специальных объяснений, сразу вслед за знаками чисел от единицы до девяти, причем он называется здесь цифрой — ciffre [96, с. 96], но далее применяется термин «кружок, который обозначает ничто» (nichil) [96, с. 98].

Иоганн Испанский приводит записи чисел 20, 30 и 90 также без предварительного объяснения знака «кружка» [там же, с. 149]. Наименование нуля «кружком» или «цифрой» стало распространенным в XIII в.[23], и второй термин иногда применялся вплоть до конца XVIII в. Восходя к арабскому «ас̣-сифр», явившемуся переводом санскритского названия нуля «шунья», т. е. пустое, отсутствующее, слово cifra в XV—XVI вв. начинает приобретать смысл знака для чисел 0, 1, 2, ..., 9, и в это же время латинское слово nulla — никакая, пустая в различных формах закрепляется за нулем в некоторых европейских языках (например, в русском и немецком)[24]. Впрочем, выражение nullus numerus, т. е. «никакое число» в смысле нуля встречается и в кембриджской рукописи, именно при описании действия умножения (л. 107 об., с. 18—21), а также у магистра Иоганна [96, с. 162].

Что касается символа нуля, то наиболее раннее обозначение его точкой встречается в Кампучии в 605 г., а кружком — на Суматре в 608 г. Наряду с этим известно обозначение пустого разряда в шестидесятиричной системе, применявшейся александрийскими астрономами по примеру вавилонских, в виде О, т. е. греческой буквы «омикрон» с черточкой сверху в одной рукописи IX в.; существует предположение, что такой знак явился сокращением слова ουδέν — ничто и что его употреблял еще Птолемей около 100 г. Ясности в происхождении нашего, т. е. арабского знака нуля, не существует и несомненно одно: как в восточно- и западно-арабских, так и в латинских рукописях, восходящих к ал-Хорезми, нуль обозначался кружком, который со временем приобрел вид овала[25].

После пропущенной записи чисел 10, 20 и 30, а также замечания, что аналогично изображаются другие десятки, следует небольшая вставка, в которой вторично поясняется принцип поместного значения. Она начинается со слов: «Но следует знать» и кончается все той же фразой: «Мы же вернемся к книге» — Нос autem sciendum est... Nos autem redeamus ad librum (л. 105, с. 2—4). Тут же приводятся записи сотен и тысяч, причем здесь переписчик внес в свой текст цифровые изображения .100., .200., .300., а также .1000. и .2000. Такие же примеры и сходное изложение мы находим у магистра Иоганна, добавляющего цифровую запись сорока [96, с. 153—154]. Затем в кембриджской рукописи приводится изображение в новых цифрах числа .CCC.XXV., т. е. 325 (л. 105, с. 27); Иоганн Испанский приводит несколько других примеров трехзначных чисел [там же, с. 154—155]. Всего этого у магистра А. нет.

Вслед за написанием числа 325 в рукописи идет длинный пассаж, который я считаю еще одной вставкой, ибо в нем объясняется, как поступать, когда в каком-либо разряде собирается .X. или больше: все это относится уже к сложению, которое рассматривается позднее. Вставка начинается словами: «Если же в каком-либо разряде собралось» и кончается словами «как сказано выше» — cum autem collecti sunt... sicut supra dictum (л. 105, с. 29 — л. 105 об., с. 25). В конце вставки принцип поместного значения разъясняется в третий раз.

Описание индийского счета заканчивается поучением, как писать и произносить большие числа, причем высшим десятичным разрядом, для которого в арабском и латинском языках имелись особые числительные, являлись тысячи, а более высокие разряды назывались с их помощью, как это ясно из приема в кембриджской рукописи, где говорится о числе 1 180 703 051 492 863 (которое переписчик не вписал): «тысяча тысяча тысяча [тысяча] тысяч пять раз согласно числу цифр (caracterum) у них, и сто тысяч тысяч тысяч тысяч четыре раза согласно числу цифр у них, и восемьдесят тысяч тысяч тысяч тысяч четыре раза согласно их цифрам. Далее семьсот тысяч тысяч тысяч три раза согласно числу цифр у них и три тысячи тысяч тысяч три раза и пятьдесят одна тысяча тысяч два раза, и четыреста тысяч и девяносто две тысячи и восемьсот шестьдесят три» (л. 106, с. 10—18).

Существовавшие в Индии названия высших десятичных разрядов не имели эквивалентов в арабских числительных; в Западной Европе слово миллион появляется сперва у итальянцев в XIII—XIV вв., в конце XV в. добавляются слова биллион, триллион и т. п. (сперва как степени миллиона), в середине XVI в.— миллиард и как 10^{12}, и как 10^9. Но новые числительные входили в математический обиход медленно и, например, еще в 1525 г. А. Ризе по-немецки произносил число $8\overset{\vdots}{6}\,78\overset{:}{9}\,32\dot{5}\,178$ (точки принадлежат Ризе) совершенно сходно с только что приведенным примером в кембриджской рукописи. В русской математической литературе для высших десятичных разрядов, начиная с 10^5, употреблялись с XII в. свои особые термины, происхождение которых неизвестно, но они уже в начале XVIII в. были заменены западноевропейскими [92, с. 119—121; 300, с. 13—16].

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Действия с целыми натуральными числами изложены в кембриджской рукописи в таком порядке: сложение, вычитание, раздвоение, удвоение и деление. У магистра Иоганна удвоение предшествует раздвоению, а магистр А. начинает с умножения и прежде всего с треугольной таблицы умножения до 9.9. Умножение очень кратко поясняется на немногих примерах, о следующих затем сложении, вычитании, раздвоении и удвоении говорится в немногих строках; также весьма лаконично описано деление.

В технике вычислений ал-Хорезми следовал индийским образцам [92, с. 125—126], располагая при сложении и вычитании в первой строке первое слагаемое или уменьшаемое и под ним поразрядно — второе слагаемое или вычитаемое. Эти термины, впрочем, в рукописи отсутствуют так же, как термины для суммы и разности, и говорится о верхнем и нижнем числах, или о числе, которое хотим прибавить или отнять. Все описание приспособлено к употреблению доски, покрытой песком, на котором писали справа налево заостренной палочкой, причем результат изображали поразрядно в верхней строке, стирая ее использованные цифры,— это естественно диктовалось небольшим в сравнении с цифрами размером доски и отсутствием или дороговизной бумаги, которая начала производиться в арабских странах с VIII в., а в Европе — с XI—XII вв. Применение доски и стирания уже ненужных цифр было широко распространено еще в Индии и затем в странах ислама, так что ал-Хорезми вначале и не говорит об этом и лишь вскользь упоминает при описании умножения[26] (см. далее). Им пользовались некоторое время и в Европе[27].

Объясняя, как складывать — addere, colligere — числа (л. 106, с. 19, 22), составитель кембриджской рукописи обходится без примера, который, вероятно, имелся в арабском оригинале. Вместе с тем подробно разъясняется, как поступать, когда в каком-либо разряде сумма слагаемых равна или более десяти. Это и другие действия рекомендуется начинать с высшего разряда, ибо так удобнее и легче (л. 107 об., с. 17)[28]. Магистр Иоганн в параграфе, озаглавленном «Правила учения о сложении» (Regule de scientia agregandi) [96, с. 156], описывает сложение подробнее и разбирает пример 625+586=1211. Он употребляет термины: слагаемое число — numerus agregandus и, известный еще в древнем Риме, сумма — summa [там же, с. 156 и 159]. И он складывает, начиная с высшего разряда, причем советует в случае, когда сумма единиц какого-либо разряда превосходит десять, комбинировать стирание с надписыванием единицы высшего разряда над соответственным разрядом верхней строки, чтобы не забыть учесть эту единицу при продолжении действия [там же, с. 158]. Дополнительно он объясняет, как складывать, начиная с низшего разряда [там же, с. 160]. Так же складывал 5482+654=6136 ан-Насави [67, с. 386].

Вычитание в кембриджской рукописи описано с полной ясностью, в частности в случае, когда в каком-либо разряде верхнего числа стоит число, меньшее, чем в нижнем (имеется в виду и случай нуля). Ввиду важности этого случая для общей оценки «Книги об индийском счете» приведу соответствующий текст: «Если в верхнем разряде не будет такого числа, из которого ты сможешь вычесть число нижнего разряда, то есть если там будет меньше или нуль (nichil), ты возьмешь из следующего высшего верхнего разряда единицу и сделаешь из нее десять и из этого вычтешь то, что должен, а что останется, поставишь в том же верхнем разряде» (л. 106 об., с. 8—12). Общее правило в рукописи обещано пояснить на трех примерах — tribus modis, из которых в рукописи имеются только два, причем все «индийские» цифровые записи пропущены. В первом примере 6422—3211=3211, т. е. все числа верхней строки больше соответствующих в нижней; второй 1144—144 соответствует случаю нескольких совпадающих последних разрядов, но ответ не приведен. На этом и обрывается раздел рукописи, посвященный вычитанию целых чисел. Раздел «Правил учения о вычитании» — Regule de scientia diminuendi — у магистра Иоганна, который уже вводит термины уменьшаемое — minuendus и вычитаемое — minuens [96, с. 162], свободен от пробелов и правило разъясняется сразу же примером 12025—3604=8421[29]. Любопытно, что далее в рукописи магистра Иоганна приведен пример, сходный со вторым примером кембриджской рукописи, именно 1444—144=1300 [там же, с. 164], что свидетельствует о наличии общего источника. Иоганн приводит еще пример 10000—15=9985. Так же вычитал 2462 из 65274 ан-Насави [67, с. 388].

Раздел о вычитании целых чисел обратил на себя внимание многих историков математики конца XIX в. и первой трети XX в., но все они пропустили в нем основное содержание. М. Кантор, ссылаясь на Г. Энестрема, писал, что главная трудность при вычитании, правда, упоминается, но при этом он ставил вопрос, является ли пропуск третьего примера недостатком арабского оригинала или в нем повинен переводчик [116, с. 716—717]? Г. Цейтен писал, что случай, о котором идет речь, не объяснен [86, 2-е изд., с. 197] и такое же утверждение встречается у Ф. Кеджори [62, с. 112], а И. Тропфке в третьем издании своего многотомного труда по истории элементарной математики приписал не только ал-Хорезми, но и магистру Иоганну замену индийской манеры стирать использованные цифры их зачеркиванием (которое на самом деле стали применять, когда перешли к вычислениям на бумаге). Все это неверно, а на вопрос Кантора можно ответить, что пропуск третьего примера в арабском оригинале вовсе невероятен и мало вероятен в латинском прототипе, подготовленном квалифицированными переводчиками. Как и многие другие пропуски в кембриджской рукописи, он почти несомненно явился делом позднейших писцов или писца, изготовлявшего эту рукопись.

РАЗДВОЕНИЕ И УДВОЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Вслед за первыми двумя действиями в кембриджской рукописи очень кратко разъясняются операции раздвоения и удвоения. Раздвоение рекомендуется начинать с низшего разряда, причем в случае нечетного числа половину следует представить как тридцать шестидесятых, остальные же разряды в случае их нечетного числа раздваиваются в десятичной нумерации. Отсутствие примера затрудняет читателя так же, как и преждевременное появление шестидесятиричной дроби 30/60 вместо половины: далее шестидесятиричным дробям отведен целый раздел рукописи. Удвоение производится, начиная с высшего разряда. У магистра Иоганна раздвоение следует за удвоением и довольно подробно иллюстрируется примером раздвоения числа 9783, результат которого пишется в виде 4891 [96, с. 173—175] (о форме записи чисел и дробей см. далее). Представляя половину в виде тридцати шестидесятых, магистр Иоганн сразу говорит, что так поступают индийцы; им же приписано употребление шестидесятиричных дробей в кембриджской рукописи. Это неудивительно: с применением таких дробей в астрономии ученые Багдадского халифата познакомились во второй половине VIII в. по литературе, полученной из Индии, но на самом деле восходившей к греческим источникам. Порядок этих двух операций в кембриджской рукописи вызывает естественное удивление, но ему следовали многие ученые того времени, как магистр А. или же автор очень распространенного руководства, составленного около 1200 г., англичанин Джон Галифакс или Голивуд, более известный под латинизированным именем Иоганна Сакробоско. Другие ученые, например, ал-Насави, сперва писали об удвоении и затем о раздвоении, как магистр Иоганн.

Также удивляет некоторых историков науки выделение удвоения и раздвоения в особые действия. Известно, что они играли существенную роль в древне-египетской арифметике. Известно также, что на Востоке и в Европе их нередко применяли при устном счете для облегчения умножения и деления [88а, с. 88—89]. Вплоть до XV в. только немногие составители арифметических руководств не включали эти две операции, например, Абу-л-Вафа и Леонардо Пизанский. К каким истокам восходит традиция особо рассматривать удвоение и раздвоение, неизвестно. В Индии, насколько мы знаем, они не применялись, и, возможно, М. Кантор прав, считая, что мы имеем здесь дело с навыками, какими-либо путями перешедшими из древнего Египта [116, с. 717].

Г. Цейтен считал, что выделение ал-Хорезми и его последователями удвоения и раздвоения как особых операций не делает им чести [86, с. 21]. З. Гюнтер писал о «не заслуживающем одобрения благоприобретении арабов» [161, с. 200]. Эти упреки не разъясняют, однако, как понимали обе операции сами средневековые авторы и почему они их трактовали отдельно.

Прежде всего, нет сомнения в том, что арабские и европейские авторы не считали оба действия особыми операциями, а видели в них частные случаи умножения (или сложения) и соответственно — деления. В кембриджской рукописи об этом не говорится, но магистр Иоганн со всей определенностью писал: «Заметь, что удваивать и раздваивать содержится в учении об умножении и делении. Ибо раздваивать есть вид деления, а удваивать вид умножения» [96, с. 175][30]. Выделялись же эти действия особо не с целью их использования при умножении и делении, а ввиду их применения при извлечении квадратных корней. Это отчетливо высказано магистром Иоганном сразу вслед за только что цитированными словами: «И они потому помещены здесь самостоятельно, что необходимы при нахождении корня, который находится с помощью удвоения и раздвоения, хотя их более подобало бы поместить после изложения умножения и деления» [там же, с. 175 и 176]. В самом деле, при извлечении корня по индийскому способу приходится удваивать промежуточные результаты и раздваивать итог (см. далее). К этому можно добавить, что, рассматривая в своем трактате три вида трехчленных квадратных уравнений, ал-Хорезми также пользуется «раздвоением корней», т. е. делением пополам коэффициента при первой степени неизвестного (старший коэффициент он берет равным единице).

Думаю, что сохранение в «алгорифмических» руководствах удвоения и раздвоения объясняется всей тогдашней манерой обучения. Учащийся должен был вообще твердо запомнить все технические подробности вычислений, а ведь действие извлечения квадратного корня было среди них самым трудным, и надлежало тщательно описать каждый его этап. При этом удвоение и раздвоение предпосылались умножению и делению как более легкие операции. Быть может, здесь сыграла роль и традиция вычислений, распространенных среди торговцев, чиновников и т. д.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В отличие от предыдущих действий, которые в кембриджской рукописи не определяются[31], описание действия умножения начинается с его определения: «Я показал уже в книге, что при умножении всякого числа на какое-либо другое число необходимо повторить одно из них соответственно единицам другого»: Etiam patefeci in librum, quod necesse est omni numero, qui multiplicatur in aliquo quolibet numero, ut duplicetur unus ex eis secundum unitates alterium (л. 107, с. 18—20). Употребленный здесь глагол duplicare означает не только удваивать, но также повторять, умножать, увеличивать вообще.

Быть может, в арабском оригинале стоял глагол тада̄ʻафа, означающий «быть взятым кратно», но также «удваиваться». Книга, упоминаемая в цитате, это алгебраический трактат ал-Хорезми, где имеется такое же определение умножения, и здесь любопытно сходство с латинским переводом алгебры, сделанным Герардо Кремонским[32]. Определение магистра Иоганна высказано в несколько других словах: «Умножить какое-либо число, значит, перечислить (numerare) его соответственно единицам его самого или другого» [96, с. 177]. Магистр Иоганн сразу учитывает случай умножения числа на самого себя, но не высказывает, как это неявно делает ал-Хорезми, переместительное свойство операций.

Далее в кембриджской рукописи говорится, что для умножения с помощью «индийских букв» следует запомнить умножение чисел от единицы и до девяти, различных или одинаковых. То же самое рекомендует магистр Иоганн, но в обоих случаях не приведена таблица умножения, которая имелась у магистра А. [96, с. 97]. После этого начинается описание действия, которое производится «на доске или другом предмете, каком тебе угодно» (л. 107, с. 24). Техника умножения очень ясно изложена в кембриджской рукописи на примере 2326·214=497764, причем словесно и с применением латинских цифр — даже сомножители и произведение новыми цифрами не записаны (л. 107 об., с. 23— л. 108, с. 4)[33]. Особо оговорено, что «каждый кружок, умноженный на какое-либо число, есть ничто, т. е. из него не возникает никакое число (nullus numerus) и из умножения на кружок подобным же образом не получается ничего» (л. 107 об., с. 20—21).

М. Кантор писал, что частные произведения от умножения отдельных разрядов надписываются над множимым [116, с. 717]. Ф. Кеджори ошибочно добавлял, что использованные цифры не стираются, а зачеркиваются [62, с. 112], такую же неточность мы находим у Тропфке [299, т. I, с. 99]. Верно у всех трех авторов лишь одно, что здесь применяется один, притом особенно распространенный из индийских приемов. Это так называемый метод «капатасандхи», в переводе «соединение створок дверей» [48, с. 34—36; 300 с. 212—213]. Сомножители пишутся в две строки так:

2326
214,

причем младший разряд второго числа — под старшим первого. Затем разряды нижнего числа, начиная со старшего, поочередно умножаются на первый разряд верхнего, причем мы уничтожаем или стираем — delebimus (л. 107 об., с. 30) старший разряд верхнего. Произведение первых разрядов, т. е. 2·2=4, записывается в верхней строке над первым разрядом нижнего, или же, проводя часть выкладок в уме, произведение всего второго числа на первый разряд, т. е. 214·2=428, записывается поразрядно в свободном пространстве верхней строки. Затем нижнее число смещается на разряд вправо (при наличии в нем нуля — на два разряда и т. п.) и вся операция повторяется, т. е. нижнее число поразрядно умножается на стираемый второй разряд верхнего, причем, если требуется, изменяются цифры в постепенно возникающем в верхней строке произведении. Схема вычислений в случае, рассмотренном в кембриджской рукописи, была бы такой:

2326	428326	428326	488326	491326	492226	492226
214	214	214	214	214	214	214

496426	496486	496486	497686	497746	497764
214	214	214	214	214	214

Прием умножения в кембриджской рукописи, отнюдь не единственный в индийской, арабской и европейской литературе[34], изложен у магистра А. на примере 1024·306 [96, с. 101—102] и у магистра Иоганна — на примере 26.104 [там же, с. 179—182]. Он получил очень широкое распространение в арабской литературе, например, у ал-Уклӣдисӣ, который, впрочем, использует и другие приемы [300, с. 216—218], Кушиāра ибн Лаббāна (там же, с. 212—213), ан-Насавӣ [67, с. 391—392] и т. д.

Столь же тщательна в кембриджской рукописи инструкция деления (л. 108, с. 22 — л. 109 об., с. 24). О самой операции сказано в ходе рассмотрения первого примера, что «оно подобно умножению, однако обратно ему, так как при делении мы вычитаем, а там складываем» (л. 108 об., с. 26—28).

Абу-л-Вафā, работавший в Багдаде во второй половине X в., в руководстве по арифметике для писцов, деловых людей, вычислителей разного рода писал (в переводе М. И. Медового): «Что касается деления, то ни один из предшественников не упомянул о нем; самое большее, что они говорили о нем, это то, что оно обратно умножению». Эти слова, вероятно, следует понимать в том смысле, что предшественники Абу-л-Вафы, по его мнению, не определяли операцию деления должным образом. Собственное его определение гласит: деление — «это разделение одного из двух чисел по количеству единиц другого»[35]. Тогда же Ал-Уклӣдисӣ разъяснял, что разделить 144 на 6, это то же, что сказать: «На сколько умножить 6, чтобы получить 144» [300, с. 231]. Очень сходна с определением Абу-л-Вафы и дефиниция ан-Насавӣ, который добавлял, что «это нахождение того, что соответствует целой единице» [67, с. 393]. Наконец, магистр Иоганн характеризует эту операцию более пространно: «Делить (dividere) число на число — это разделить (partiri) большее соответственно количеству меньшего, именно столько раз вычесть меньшее из большего, сколько раз (quociens) оно может в нем находиться» [96, с. 184]. Магистр Иоганн уже пользуется терминами dividendus — делимое [там же] и dividens — делитель (они есть и у магистра А., наряду со словом divisor) [там же, с. 106]. Между тем в кембриджской рукописи терминология еще менее развитая и говорится только о «верхнем числе, которое делим» — numerus superior quem dividimus и «нижнем числе» — numerus inferior или «числе, на которое делишь» — numerus super quem dividis (л. 109, с. 1—8). Уже встретившееся в цитате из магистра Иоганна наречие quotiens, применяемое и магистром А. [96, с. 106], превратилось затем в существительное: частное.

В кембриджской рукописи, как и в рукописях магистров А. и Иоганна, разбираются два рода примеров. В одном из них число единиц старшего разряда делителя меньше числа единиц старшего разряда делимого, в другом оно больше. В первом случае старший разряд делителя пишется под старшим разрядом делителя, во втором делитель сдвигается на разряд вправо. После подбора первая цифра частного пишется сверх делимого над разрядом единиц делителя, в строке делимого вместо стираемых использованных цифр пишется соответствующий остаток. После того делитель сдвигается на разряд вправо, и процедура продолжается до тех пор, пока в делимом не остается ничего или (в случае деления с остатком) число, меньшее делителя. Вот несколько сокращенная схема деления в первом примере 46463:324 (в тексте все излагается словами и с помощью римских цифр):

	1	1	14	14	143	143
46468	46468	14068	14068	1108	1108	136
324	324	324	324	324	324	324

В последнем столбце стоит пропущенный переписчиком результат деления, в тексте записанный так: «.CXL.III и CXXXVI. частей из .CCCXXIIII. частей единицы. И такова их фигура», после чего следует пробел в рукописи (л. 109, с. 31—32). Нашему частному в рукописи соответствует выражение «то, что причитается одному»,— illud debetur uni (ср. выше определение ан-Насавӣ) (л. 108, об., с. 23; л. 109, с. 31). Примеры магистра А. и магистра Иоганна, вообще говоря, другие, но один, именно второй пример кембриджской рукописи 1800:9 (л. 109 об.) и второй пример магистра Иоганна [96, с. 195] совпадают, что вновь убеждает в наличии общего источника.

Описанный прием деления применялся и в Индии [48, с. 40]. У Кантора, Кеджори и Тропфке он изложен совершенно неадекватно[36].

Разбирая содержание кембриджской рукописи, мы пропустили следующий непосредственно за умножением небольшой раздел, в котором для проверки результата этого действия и удвоения рекомендуется проверка с помощью числа 9 (л. 108, с. 5—21). И эта процедура была заимствована, вероятно, из индийских источников: во всяком случае ее применял во второй половине X в. Ариабхатта II, и Ибн Сина в начале XI в., пользуясь ею при возведении в степень, определенно называл ее индийской; не исключено, что ею пользовались и греческие вычислители[37]. Проверка с помощью числа 9 основана на том, что остатки от деления как данного целого числа, так и суммы единиц, т. е. его цифр, разрядов одинаковы. Если назвать этот последний остаток «мерилом», как это было принято в арабской литературе, то, например, умножение проверяется следующим образом: мерило произведения должно быть равно мерилу произведения мерил сомножителей. В кембриджской рукописи описание правила не сопровождается примерами. Кроме того, не сказано, что равенство мерил есть необходимое, но недостаточное условие правильности результата. Это не отмечали и позднейшие ученые [214, с. 26—27]. Перевод кембриджской рукописи в этой части сомнителен: рекомендуется находить мерило делением самих чисел, а не сумм его цифр (л. 108, с. 13); кроме того, вводится деление на 9 до объяснения самой операции деления. Такая же методическая оплошность допущена в случае умножения магистром А. [96, с. 101, 105], который далее проверяет деление с помощью умножения [там же, с. 108]. Магистр Иоганн советует проверять каждую операцию с помощью ей обратной или путем вычитания девяток [там же, с. 182—183]; при делении он учитывает и случай, когда имеется остаток [там же, с. 197]. Проверка с помощью 9 долго удерживалась в руководствах арифметики; при стирании цифр или их зачеркивании, с которым связано было надписание сверху многих промежуточных результатов, было невозможно или затруднительно вновь обозреть весь ход действий. При этом считалось, что совпадение мерил гарантирует правильность результата, что может быть и неверным. Корректная формулирова (неравенство мерил свидетельствует об ошибочности результата) в арабской литературе встречается у Таки ад-Дӣна ал-Канбāли (1409) [214, с. 26—27] и Джемшида ал-Кāшӣ[38]. В Европе обоснование правила дал в 1202 г. Леонардо Пизанский, а недостаточность обычной формулировки специально отметили Никола Шюке (1484) и Лука Пачоли (1494).

Однако недостаточность общепринятого правила была известна европейским математикам до XV в. Мое внимание когда-то привлекли слова, содержащиеся в сочинении магистра Иоганна, опубликованном Бонкомпаньи. Там в совершенно неподходящем месте при описании проверки после первой же фразы и слова reserva напечатано: «Это правило показывает, когда умножение неверно, но не доказывает, что оно верно»[39]. Когда я сообщил об этом проф. К. Фогелю, он в письме от 22.VII. 1962 г. высказал предположение, что фраза должна была быть помещена на той же странице, но несколько далее, в конце описания правила (после слова reserva) и перед рекомендацией другого способа проверки с помощью деления; упоминая многочисленные неточности издания Бонкомпаньи, проф. К. Фогель подчеркивал необходимость обращения к другим рукописям. Теперь, когда Аллар сопоставил все известные списки сочинения магистра Иоганна, многое прояснилось. В трех наиболее ранних списках XIII в. этой фразы нет, в трех рукописях XIV и XV в. она вставлена — в двух случаях неуместно: так неуместно, как в издании Бонкомпаньи[40], в рукописи XV в.— в том, более естественном, месте, на какое указал проф. К. Фогель. Скорее всего, мы имеем здесь дело со вставкой вдумчивого переводчика или переписчика, сохранившейся на полях более ранних списков и перенесенной по своему усмотрению переписчиками трех более поздних списков. Во всяком случае все это было, по всей видимости, до Шюке и Пачоли[41].

ШЕСТИДЕСЯТИРИЧНЫЕ ДРОБИ

После примера с делением 1800:9 в кембриджской рукописи говорится: «Это все, что необходимо людям при делении и умножении, когда число было целым. А теперь, если соизволит господь, начнем трактовать об умножении дробей и их делении и извлечении корней» (л. 109 об., с. 29—32).

Дробь в рукописи называется fractio, от арабского каср, быть может, явившегося переводом санскритского бхинна, т. е. сломанный, разбитый; латинский глагол frangere означает ломать, разбивать, раздроблять, откуда его причастие fractum. Впрочем, у части математиков в ходу было и древнеримское название дроби minutia, которым пользовался магистр А. в разделе о дробях [96, с. 109 и след.], хотя далее он нередко пишет fractio [там же, с. 115 и след.]. Магистр Иоганн назвал соответствующий раздел «О дробях чисел» — De fractionibus numerorum.

Вообще учение о дробях изложено в кембриджской рукописи с большим числом описок и ошибок; здесь, очевидно, сказалась некомпетентность переписчиков или переписчика. Сперва говорится, что имеется бесчисленное множество названий дробей, как половина (medietas), треть (tercia), четверть (quarta), девятая (nona) и десятая (decima) и одна часть из .XIII. (una pars ex .XIII.), одна часть из .XVIII. и т. д. Все это — латинский перевод с арабского, в котором доли единицы от 1/2 до 1/10 именовались в соответствии с именами числительными из знаменателей, а меньшие доли единицы $\frac{1}{n}$, $n>10$, назывались „одна часть из n“. Далее в кембриджской рукописи говорится, что индийцы «основывали свои дроби на шестидесяти» — indi posuerunt exitum partium suarum ex sexaginta (л. 110, с. 2—3), а именно, делили единицу на .LX. минут (minuta), минуту на .LX. секунд, после чего аналогично следуют терции (tercia), кварты (quarta) и т. д. до бесконечности. Тут же сказано, что целые числа образуют разряд градусов (differentia graduum), минуты, секунды и т. д.— второй, третий и т. д. разряды — mansiones (л. 109, с. 34— л. 110, с. 11). Магистр А. прямо начинает с шестидесятиричной системы и, только покончив с нею, переходит к обыкновенным дробям [96, с. 109—115] и так же поступает магистр Иоганн, пишущий, что существует бесконечно много способов наименования (denominatio) дробей, но сразу добавляющий, что «индийцы наименования своих дробей производили от шестидесяти» — placuit tamen Indorum denominationem suarum fractionum facere a sexaginta. Сходство выражений с кембриджской рукописью бросается в глаза[42]. Как говорилось, шестидесятиричная система стала известной в Багдаде благодаря ознакомлению в конце VIII в. с индийской астрономической литературой, так называемыми сиддхантами; в Индии ее заимствовали у александрийских астрономов, а восходит она к древнему Вавилону.

После этого в кембриджской рукописи описаны операции в шестидесятиричной системе, причем сперва рассмотрено умножение $1\frac{1}{2}$ на $1\frac{1}{2}$, которое производится в шестидесятиричной системе, $1\frac{1}{2}$ это 90. При этом переписчик, очень слабый в действиях с дробями, допускает описку: он говорит об умножении $1\frac{1}{2}$ на $2\frac{1}{2}$ (л. 110, с. 29—30). Но последующий текст правильный: перемножаются 90.90 и затем .VIII. тысяч и .C. секунд переводятся в градусы и минуты. Ответ — правильный: «два и .XV. минут, которые суть четверть единицы» (л. 110, с. 29 — л. 110 об., с. 3).

Этому предмету предпосланы правила образования разрядов произведений, в частных случаях неверные, хотя общая формулировка правильна: «...ты соединяешь оба разряда, которые взаимно перемножаешь» — quia coniunctis utrasque differentias quas multiplices invicem (л. 110, с. 17—18). Но тут же, вслед за верными указаниями, что умножение на градусы не изменяет разряда и что минуты, помноженные на минуты, дают секунды, сказано, что от перемножения секунд на секунды возникают терции, терций на терции — кварты, а кварт на кварты — квинты (л. 110, с. 12—17). Эти ошибки повторяются и в числовых примерах. В более сложном примере (мы пользуемся принятыми теперь обозначениями) 2°45′·3°10′30″ оба множителя переводятся в свои низшие разряды и произведение при последовательных переводах в высшие разряды дает 165′·11430″ = 1885950‴ = 31432″30‴ = =523′52″30‴=8°43′52″30‴. «Есть,— говорится в рукописи,— и другой способ, более короткий, но это тот порядок, который применяют индийцы при своем счете»,— quo usi sunt indi super quem figurare numerum suum (л. 110 об., с. 26—27)[43].

Изложение у магистра А. и магистра Иоганна несколько иное, но в общем сходное. Особенно интересно совпадение ряда примеров, свидетельствующее о едином первоисточнике, которым мог быть один из вариантов сочинения самого ал-Хорезми. Магистр А. после общего правила образования разряда произведения шестидесятиричных дробей приводит соответствующую треугольную таблицу вплоть до нон на ноны [96, с. 110][44] и в качестве примера производит то же самое умножение 2°45′ на 3°10″30‴ [там же, с. 111—112]. Результат записывается, как это было принято в индийской и арабской литературе, столбиком, нисходящим от старших разрядов к младшим (так писал и ал-Насавӣ). Например, в данном случае произведение пишется в виде (цифры магистра А. заменены теперешними):

$$\begin{array}{|c|}\hline 8\\ 43\\ 52\\ 30\\ \hline\end{array}$$

Этого примера нет у магистра Иоганна. Зато у него есть умножение $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}$, проведенное точно так же, как в кембриджской рукописи, вплоть до того, что в конце концов результат 2°15′ выражается еще и как четверть единицы [там же, с. 203—204]. Такое же написание обыкновенных дробей и целых с дробями применялось и позднее. Нынешняя символика возникла отсюда, после того как западноарабский математик Мухаммад ибн ʼАбдаллах ал-Хассāр (XII—XIII вв.) и Леонардо Пизанский (1202) ввели разделительную черту между числителем и знаменателем[45]. При делении целых чисел или целых чисел с дробями в кембриджской рукописи предлагается прежде всего привести все числа к одному роду genus, именно перевести их в младший разряд (л. 35, с. 28—31). Если делитель содержит больше цифр, чем делимое, как в примере 10″:5′, то делимое выражается в низшем разряде терций (л. 111, с. 6—9). Вообще здесь текст кембриджской рукописи сильно искажен. Сперва утверждается, что при делении чисел одного рода получается целое число и следует пример деления 15 третьих (tercia) на 6 терций, что дает $2\frac{1}{2}$, ибо 15 терций есть 5 целых, а 6 терций — 2 целых. Затем сказано, что «таким же образом делятся половины на половины и четверти на четверти, а также минуты на минуты [эти последние повторены дважды.— А. Ю.], и секунды на секунды и терции на терции» (л. 111 об., с. 2—6). Следует полагать, что в прототипе речь шла о делении 15 терций на 6 терций — латинский термин для трети и терции в рукописи один и тот же — tercia. Тут же следует вторая ошибка: при делении 10″:5′, соответственно с общим правилом, поскольку 10 не делится на 300, 10″ переводятся в 600‴ и получается 600:300 или «два, которые суть две секунды» (л. 111, с. 11), вместо минут. Этот неверный результат проверяется обратным действием, которое впервые формулируется именно здесь:

«Ибо знай, что когда одно число делится на какое-нибудь другое число, что если умножить то, что получилось при делении, на то, какое ты делил, то это даст первое число, то есть число, которое делилось» (л. 111, с. 12—14). И вот при умножении $2''$ на $5'$, в рукописи получается $10''$ «и это проверка есть проверка деления» (л. 111, с. 19).

Но виновен ли в этой ошибке или описке какой-либо переписчик? Не было ли описки в латинском или даже арабском прототипе рукописи? Дело в том, что такое неверное деление $10''$ на $5'$ с частным $2''$ встречается в рукописи магистра Иоганна [96, с. 209]. Здесь этому примеру посвящены две строчки: задача и ответ. У магистра А. все изложено подробно, как у ал-Хорезми, и на цифрах и опять-таки с ошибочным ответом: $2''$ [там же, с. 113]. Можно ли после этого сомневаться в наличии общего источника всех трех рукописей?

Упомянем, что соответствующие разделы названы магистром Испанским «О делении дробей» и «О делении чисел с дробями или без дробей» [там же, с. 203 и 207]; это напоминает выражения в кембриджской рукописи.

Следующий пример деления $10':5'''=7200$ «градусов» решен и проверен правильно (л. 111 об., с. 19—24). Этого примера нет у магистров А. и Иоганна.

Лишь теперь в кембриджской рукописи объяснено, как записывать столбиком градусы и их нисходящее шестидесятиричные доли. Запись в новых цифрах, как обычно, отсутствует (л. 111, с. 25—33). Примечательно, что этот же пример полностью выписан у магистра Иоганна (в его цифрах):

градус	12
минута	30
секунда	45
терция	00
кварта	50

[96, с. 210—211]. Пример у магистра А. другой, но сходный (он начинается с градусов):

1225
30
45
00
50

[там же, с. 114]. Так же писали смешанные числа[46] еще во времена ал-Каши, т. е. в середине XV в.

После этого в кембриджской рукописи идет неаккуратное изложение поразрядного сложения и вычитания шестидесятиричных дробей, причем слово «сложение» вовсе не упомянуто[47], а вместо «вычитать» — minuere сказано «находить» — invenire: и «подобным же образом, если захотим найти дроби, начнем с высшего разряда и вычтем каждый разряд из того, который над ним» (л. 111 об., с. 2—4). Тут же поясняется, как поступать, когда в уменьшаемом нужно заимствовать из единиц высших разрядов.

Описание сложения и вычитания шестидесятиричных дробей у магистра А. совсем краткое [96, с. 114—115], у магистра Иоганна более подробно и ясно. Затем в кембриджской рукописи и сочинениях обоих магистров очень коротко говорится об удвоении, которое начинается с высших разрядов, и о раздвоении, которое производится, начиная с низшего (обе операции рассмотрены и ал-Насавӣ). После того составитель кембриджской рукописи обращается к обыкновенным дробям.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ[48]

«А если,— сказано в кембриджской рукописи,— захочешь умножать дроби и число, а также дроби помимо минут или секунд, каковы четверти и седьмые и другие подобные им части, и делить их друга на друга, то действие с ним такое же, как с минутами и секундами» (л. 111 об., с. 15—18). Это уподобление различных дробей единицы шестидесятиричным дробям имеет педагогическое назначение. В первом же примере, умножая «.III. седьмых» на «.IIII. девятых», автор рукописи рассматривает седьмые и девятые как бы минуты — quasi minuta, а их произведение относит к роду секунд — ex genere secundorum (л. 111 об., с. 26—28); учитывается и случай, когда в произведении можно путем деления выделить целую часть (но примера нет). Перед этим дается рекомендация перевести обе дроби в низший разряд (л. 111 об.). В прототипе это могло скорее относиться к делению, до которого переписчик кембриджской рукописи не дошел и при котором, судя по другим источникам, обе дроби приводились к общему знаменателю. После того начинается решение примера умножения «трех с половиной на .VIII. и три части XI», объяснено, как записывать оба числа в соседних параллельных столбиках — сперва целые, под ними числители и затем знаменатели. Словами «И так образуешь ...VIII.» — Sicque continues... .VIII. (л. 111 об., с. 34) рукопись обрывается.

Мы можем полностью восстановить учение об обыкновенных дробях в прототипе кембриджской рукописи по сочинениям магистра А. и магистра Иоганна, хотя оба они добавили, быть может, кое-что новое. У магистра А. примечательно совпадение обоих примеров с примерами кембриджской рукописи; он также перемножает сперва 3/7 с 4/9 и проводит аналогию с минутами и секундами [96, с. 115—116] и затем $3\frac{1}{2}$ с $8\frac{3}{11}$; впрочем расположение сомножителей у него другое[49]. Магистр Иоганн излагает учение об обыкновенных дробях более обстоятельно. Он вводит термины denominatio, т. е. имя дроби, ее знаменатель, numerus denominationis, т. е. числитель и numerus communis — общее число, именно общий знаменатель чисел, который получается простым перемножением их знаменателей [там же, с. 216—218][50]. Смешанные числа и дроби магистр Иоганн пишет на индийский манер и вводит еще «итоговое число» — numerus cellectionis, под которым понимается сумма числителей каждой смешанной дроби [там же, с. 219—220]. Все это излагается довольно сложно и в нескольких вариантах.

В первом примере умножения магистра перемножаются $8\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{5}$ с $3\frac{1}{3}\frac{1}{9}$ (доли единицы долгое время оставались в употреблении, особенно в общежитии). Нижеследующая схема из его сочинения наглядно выявляет ход и расположение вычислений; в правом углу записано произведение $30\frac{894}{1080}$ (здесь первое «итоговое число» есть 358, а второе — 95):

8		3
1		1
2		3
1		1
4		9
1		
5		
40		27
	1080	
358		93
	33294	
		30
		894
		1080

[96, с. 229]. Некоторые варианты действий не представляют интереса. Зато интересна «Глава о том же по-иному» — Capitulum de codem aliter, в которой прямо упоминается ал-Хорезми и решается его пример: «Это есть также то, что говорит Алхоризм об умножении и делении целых и дробей, когда он предложил умножить 8 целых и три одиннадцатых на три целых с половиной следующим образом:

3	8
1	3
2	11

— Hoc idem est illud etiam quod de multiplicatione et divisione integrorum et fractionum alchorismus dicere videtur et non aliter, cum 8 integros et tres undecimas in tres integros et unam mediatetem multiplicanda proponit hoc modo... [там же с. 241]. И далее магистр Иоганн проводит всю выкладку до результата 28 и 21/22, причем попутно называет начальные дроби как бы минутами — quasi minuta [там же, с. 242], совершенно так же, как ал-Хорезми. Здесь мы имеем, таким образом, решение примера, незаконченного в кембриджской рукописи: ясно, магистр Иоганн читал ее прототип. Более того, несколько далее следует пример умножения 3/7 на 4/9 [там же, с. 243], а в заключение предыдущий пример выписан в виде таблицы, вроде той, какая приведена выше:

3		8
$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{11}$
2		11
	22	
7		91
	637	

Вряд ли можно сомневаться и в том, что деление ал-Хорезми производил иначе, чем магистры А. и Иоганн, именно приводя делимое и делитель к дробям. Здесь обращает на себя внимание точное совпадение обоих единственных примеров у обоих магистров, которые $20\frac{2}{13}$ делят на $3\frac{1}{3}$ [там же, с. 120—121 и 246—248]. Вполне возможно, что и этот пример был заимствован из «Книги об индийском счете» ал-Хорезми. Обе дроби прежде всего приводятся к общему знаменателю. Мы ограничимся схемой магистра Иоганна (у магистра А. она выглядит иначе) [там же, с. 121]:

20		3
2		1
13		3
13		3
	39	
786		130
		6
		6
		130

[там же, с. 248]. Заметим, что магистр Иоганн добавляет несколько слов о необходимости приведения к общему знаменателю при сложении и вычитании и правило, которое мы можем записать формулой $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ [там же, с. 249]. В дошедших до нас текстах сочинения магистра А. о сложении и вычитании не говорится.

Обещанное правило извлечения квадратного корня в кембриджской рукописи не сохранилось. Мы может восстановить его с большой вероятностью по сочинению Иоганна Испанского, которое не только богаче содержанием и подробнее, но, как мы видели, во многом ближе к кембриджской рукописи. Оба магистра пользовались опять-таки одним источником: оба иллюстрируют извлечение квадратного корня на примерах 5625 [там же, с. 124—125 и с. 258—260] и из 2/39 [там же, с. 126—127 и 272 и след.).

Описание действия извлечения квадратного корня разделено в обоих сочинениях на несколько параграфов. Магистр Иоганн подчеркивает особую важность этого действия не только в геометрии и астрономии, но и для всего квадривия. Магистр Иоганн предпосылает ряд общих замечаний, объясняет термин «корень» — radix и пишет, что произведение двух квадратных чисел есть квадрат; а если частное двух чисел есть квадрат, то произведение делимого на делитель также квадрат, хотя бы данные числа и не были квадратами; например, $\frac{18}{8} = 2\frac{1}{4} = \left(1\frac{1}{2}\right)^2$ и $18.8 = 144 = 12^2$. Далее сказано, что единицы десятичных разрядов 1, 10, 100, 1000,..., находящиеся на нечетных местах, являются квадратами, а четные по порядку квадратов не имеют. С шестидесятиричными дробями $\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}, \frac{1}{60^3}, \ldots,$ дело обстоит наоборот: нечетные по порядку, т. е. минуты, терции и т. д., не суть квадраты, а четные, как секунды и т. д., ими являются. Подобным же образом обстоит дело с долями, имеющими иные знаменатели. Тут разъясняется, что имеются в виду не сами половины, третьи, пятые, шестые и т. п. доли, но их произведения на самих себя: доли, не происходящие из умножения других (на себя) не имеют корней и называются первыми разрядами (prima diffrentie), а те, которые возникают при умножении долей на самих себя, имеют корни и принадлежат ко второму разряду (secunde differentie). После нескольких замечаний подобного же рода заканчивается «Глава об отыскании корня чисел» [там же, с. 251—255] и начинается «Глава о правиле извлечения корней из чисел», именно целых чисел. Мы резюмируем довольно длинное описание операции извлечения квадратного корня из целого числа у магистра Иоганна [там же, с. 256—263]. Он разбивает цифры числа справа налево попарно и подбирает целое число, квадрат которого не больше крайнего левого двузначного или однозначного числа. Затем он пишет результат под единицами названного двузначного числа, вычитает из верхнего числа, удваивает его и передвигает на разряд вправо. Далее подбирает число, которое в произведении с найденным удвоенным результатом, к которому приписано это число, дает не больше, чем число из двух верхних цифр; использованные цифра или цифра верхнего числа стираются[51]. По существу используется правило «четверного умножения» — multiplicatio quadruplex) [там же, с. 258), которое можно выразить формулой

$$(10a+b)^2=(10)(10)+b\cdot b+(10a)b+b(10a).$$

Затем действие продолжается аналогично. Если данное число — квадрат, то остатка не будет, а удвоенный результат надлежит раздвоить.

Все это поясняется на первом примере извлечения корня из 5625. Вот основные выкладки, изложенные словами у магистра Иоганна и приведенные в виде схемы у магистра А., которому мы в данном случае и последуем:

5625	725	725	725
7	7	14	145

Поскольку 145·5 дает 725, то остатка нет, и остается разделить удвоенные 140, так что корень будет 75 [там же, с. 123—125, 258—260].

Сопоставление обоих примеров магистров А. и Иоганна позволяет думать, что он имелся и в прототипе кембриджской рукописи. Изложение у них обоих отличается несущественно, но не исключено, что текст магистра Иоганна ближе к прототипу, где все правила действий поясняются довольно многословно. Метод очень близок к индийскому, с тем отличием, что в последнем вторая цифра корня находилась просто делением, и так же поступали китайские вычислители [92, с. 54—55, 128—129]. При этом частное может оказаться больше, чем следует,— это выясняется в ходе дальнейших выкладок. У ал-Насавӣ, который следовал ал-Хорезми, действие расположено в три строки: цифры корня сразу пишутся над данным и раздвоение оказывается излишним [67, с. 395—397].

Если корень не извлекается нацело, то магистр Иоганн рекомендует приближение (с избытком), которое можно записать формулой

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\cong a+\frac{r}{2a},$$

где a — наибольший целый квадрат, содержащийся в N: «это есть почти корень» — quodes quasi radix [96, с. 260]. Ал-Насави дает другое приближение (с недостатком) $a+\frac{r}{2a+1}$ [67, с. 397]. Иоганн приводит дополнительно пример $\sqrt{91345}$ и результат приближенного вычисления записывает, сверху приводя поправку, а целочисленный результат ниже:

$$\begin{array}{|c|}\hline 141\\ 604\\ 302\\ \hline\end{array}$$

[96, с. 263]. Проверка действия осуществляется в случае точных квадратов по-прежнему с помощью 9: результат считается правильным, если мерило данного квадрата совпадает с мерилом квадрата мерила корня [там же, с. 267]. В рукописях сочинения магистра А. такая проверка вообще не встречается, а ан-Насави распространяет ее и на извлечение корней с остатком.

При извлечении корней из чисел с шестидесятиричными дробями или просто из таких дробей числа предварительно переводятся в младший разряд или следующий за ним, чтобы этот разряд составлял четные степени 1/60 [там же, с. 125—126 и с большей подробностью, с. 268—271]. Притом оба магистра указывают, что результат тем лучше, чем меньше берутся шестидесятиричные дроби.

Далее, при умножении смешанных чисел с обыкновенными дробями число переводится в дробь и затем применяется правило, равносильное формуле

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b},$$

или, если угодно достичь большей точности,—

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab^{2n}}}{b^{n+1}}.$$

Свой прием магистр Иоганн поясняет на числе $2\frac{1}{3}\frac{1}{13}=\frac{94}{39}$, умножая числитель и знаменатель сперва на 39, а затем на 39^2. Попутно он замечает, что, в отличие от целых чисел, корень из дроби больше дроби [там же, с. 273].

Сочинение заканчивается главой о другом способе извлечения квадратного корня «с помощью кругов», т. е. приписания к данному числу (четного) числа нулей соответственно нашей формуле

$$\sqrt{N}=\frac{1}{10^k}\sqrt{N\cdot 10^{2k}};$$

при этом, «чем больше добавишь кругов, тем легче сможешь найти истинный корень» [там же, с. 278]. Любопытно, что результат автор выражает не в десятичных, а шестидесятиричных дробях, видимо, учитывая интересы астрономов. Так, для $\sqrt{2}$ он пишет его приближенное значение вплоть до терций:

1
1
24
50
24

Несомненно, что магистр Иоганн знал о существовании иррациональных чисел: «И есть многие числа, корень которых ты не сможешь так найти, без того, чтобы всегда не осталось что-либо» [там же, с. 285—286]. Добавлю, что несколько ранее магистр Иоганн вычислил $\sqrt{2}$, умножив на 60^2, получив несколько менее точный результат 84 и «еще немного» [там же, с. 271]. Все эти вопросы затронуты и магистром А., но гораздо более поверхностно; в частности есть у него и второе приближение для $\sqrt{2}$ [там же, с. 125—126].

Мы не знаем, каково было содержание раздела об извлечении квадратного корня в прототипе кембриджской рукописи. Быть может, оно было менее пространным, чем у магистра Иоганна, но в главном, надо полагать, было довольно близким к нему.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной статьи было по возможности близко к оригиналу воссоздать «Книгу об индийском счете» ал-Хорезми, или, по крайней мере, прототип явно неудовлетворительной кембриджской рукописи. В мою задачу не входят анализ истории распространения десятичной позиционной нумерации с 10 «арабскими» цифрами в Европе и описание победоносной борьбы так называемых алгоритмиков с абацистами, сторонниками применения особого абака, подробно описанного Гербертом (папой Сильвестром II), и с приверженцами римской нумерации, которой в особых случаях мы пользуемся до сих пор. Я хотел только, пользуясь известным в среде историков геометрии выражением, очистить арифметический труд ал-Хорезми от пятен, свойственных кембриджской рукописи и упоминаемых столькими историками науки. Еще не так давно А. Миели писал, что опубликованная рукопись является относительно довольно верным переводом «Арифметики» великого математика [220, с. 84]. Это совершенно неверно. А Цейтен полагал, что «Нетрудно понять, что от перевода такой книги индусская математика не могла стать сразу доступной европейцам... В дальнейшем знакомство с ней могло распространиться благодаря этой книге, снабженной соответствующими разъяснениями» [86, с. 197]. Эта оценка очень сдержанная. Судя по всему сказанному, прототип кембриджской рукописи и одновременно рукописей магистров А. и Иоганна лег в основу коренного преобразования арифметики в Европе, ставшего основой дальнейшего математического развития и одним из главных элементов общечеловеческой культуры.

В данной статье полностью оставлен в стороне вопрос о том, каким образом ал-Хорезми познакомился с «индийским счетом». Какие-либо письменные санскритские тексты, содержащие изложение системы позиционной десятичной нумерации, предшествующие эпохе ал-Хорезми, отсутствуют. Весьма возможно, что здесь имела место устная передача традиции.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] При написании второй статьи [180] я располагал микрофильмом латинской рукописи, любезно присланным мне в 1962 г. директором Кембриджской университетской библиотеки.

[2] Печатный текст рукописи в [25] содержит около 20 опечаток, обнаруженных издателем; их перечень приложен к изданию на отдельном листке. Есть несколько опечаток, которые издатель не заметил. Я их учел.

[3] Ссылки даются на листы и строки кембриджской рукописи. В издании К. Фогеля [25] справа от этих листов читатель может найти полную построчную транскрипцию.

[4] У Бонкомпаньи ошибочно говорится Algoritmi вместо Algorizmi.

[5] Сходное словоупотребление встречается в средневековых русских арифметических рукописях: в них «великим числом» и «малым числом» обозначаются две различные системы наименования высоких десятичных разрядов. См. А. П. Юшкевич. История математики в России до 1917 г. М., 1968, с. 12—13.

[6] Это последнее слово греческого происхождения χαρακτήρ обозначало штемпель на монете, указание на признак какой-либо вещи и т. п. Лейбниц называл таким образом знаки своей «всеобщей характеристики».

[7] В арабском оригинале должно было, разумеется, стоять «Аллаху».

[8] См. [96, с. 17—19]. Мы будем говорить о магистре А.

[9] См. [5 ч. II, с. 23—136], Аллар, сравнивший все 7 наличных списков рукописей этого сочинения (XIII—XV вв.), хранящихся в Париже, Флоренции, Дрездене, Эрфурте и Саламанке и отличающихся в отношении полноты и ряда разночтений, изучил их взаимосвязи и составил схему их генеалогии. Вероятно, все они восходят, иногда через ряд звеньев, к неизвестному нам прототипу XII в. Наиболее полной и близкой к первоисточнику Аллар считает рукопись XII в., находящуюся в Парижской Национальной библиотеке (Bibl. Nat. Ms. Lat. 7359, f. 85 r — 101 v). См. [96, с. 60—90 и схему на с. 91]. Именно эту рукопись издал с многочисленными опечатками Бонкомпаньи.

[10] J. Millaz i Vallicrosa. Una obra desconida de Johannes Avendaut Hispanus. Osiris, vol. I, 1936, p. 460.

[11] В одной из рукописей рассматриваемого сочинения, хранящейся в Эрфурте и датируемой XIV в., сказано, что она переведена с арабского магистром Ги из Кремоны (a magistro Gi Cremonensi). Сартон высказал предположение, что этот текст подготовил известный переводчик XII в. Герардо из Кремоны [265, т. II, с. 169]. Такую возможность не исключает и К. Фогель [25, с. 43]. В действительности, переписчик просто допустил ошибку: в арифметической части эрфуртская рукопись не отличается от других, более ранних [96, с. 24]. Краткое архивное описание всех списков обоих трактатов магистров А. и Иоганна имеется и у К. Фогеля [25, с 43], а более детальное — у Аллара [96, с. 33—39].

[12] Речь идет именно об арифметической части, так как за нею в сочинении магистра Иоганна следует еще больший раздел (с. 93—136 в издании Бонкомпаньи [5]), где говорится об арифметических прогрессиях, пропорциях, тройном правиле, о квадратных уравнениях и т. д. Этот раздел публикации Бонкомпаньи особенно изобилует ошибками.

[13] Английский перевод в книге [208а].

[14] При описании индийского счета здесь говорится о девяти «буквах», т. е. цифрах, так как к ним не относится знак нуля; о девяти знаках в индийском счете писал еще Себохт. О слове «цифра» см. далее.

[15] В истории распространения и эволюции формы индийских цифр у арабских математиков и в Европе X—XII вв. много спорного и неясного. См. [92, с. 336—342] и [300, с. 53—67]. Все же вряд ли можно сомневаться в общем источнике восточно-арабских и западно-арабских цифр. Некоторые из них по форме очень близки, и даже между весьма различными на первый взгляд цифрами для 2 и 3, как заметил Г. Божуан (1948), обнаруживается сходство, если восточно-арабские повернуть на 90° против часовой стрелки [300, с. 54].

Таблица различных форм цифр, приведенная в тексте, составлена по таблицам в книге [300, с. 66—67] и факсимиле кембриджской рукописи. В текстах магистров А. и Иоганна, изданных Алларом, цифры воспроизведены по тем или иным старинным рукописям.

[16] К латинской формулировке этих предложений в кембриджской рукописи (л. 104, строки 23—24) очень близки соответствующие фразы в латинских переводах алгебраического трактата ал-Хорезми, выполненных Робертом Честерским [186, с. 66] и, вероятно, Герардо Кремонским [217, т. I, с. 253].

[17] По Аристотелю, например, наименьшим (целым) числом является два.

[18] Такое определение числа дает, например, Евклид.

[19] Наличие вставок в кембриджской рукописи отмечалось и ранее Наглем и Рушка.

[20] Этот оборот речи не дает оснований приписывать автору рукописи идеи об актуально бесконечно большом числе, хотя в кратком описании десятичной структуры ряда натуральных чисел в алгебраическом трактате ал-Хорезми также говорится о повторении процесса образования всех следующих за тысячами разрядов «до того, что можно постичь в окончании чисел» — de numeris ultime. Здесь цитируется перевод, приписанный Герардо Кремонскому [210, т. 1, с. 254]. Слову разряд в этом переводе соответствует articulus, т. е. раздел, ступень. В руководствах Аделарда Батского и Иоганна Испанского, также применявших термин differentia, говорится о продолжении разрядов «до бесконечности» — in infinitum [96, с. 96, 295]. Магистр Иоганн называл разряд также ordo, т. е. ряд, порядок, группа и чаще limes, т. е. граница или различие [там же, с. 151 и след.].

[21] В смысле «разности» слово differentia впервые применили, по-видимому, Леонардо Пизанский и Иордан Неморарий в начале XIII в. [300, с. 204]. Так называемые абацисты, производившие вычисления на особого рода счетной доске — абаке и не пользовавшиеся «арабскими цифрами», употребляли слово differentia в совсем другом смысле — как дополнение данного числа до ближайшего большего числа десятков или сотен и т. п. Иногда наряду со словом differentia в кембриджской рукописи разряд называется mansio (л. 107, с. 25—26), т. е. местонахождение.

[22] Этот же знак имеется в рукописи магистра Иоганна [96, с. 295, строка 10]. Черточки над римскими цифрами употреблялись и при описании абаков [92, с. 337]. На древнеримских абаках разряд десятков тысяч обозначался иначе — «I» [300, с. 34].

[23] У магистра А. этот термин употребляется неоднократно. Слово cifra применяется в XII в. также в рукописи латинского перевода астрономических таблиц ал-Хорезми [300, с. 17]. У магистра А. тут же приводится еще один своеобразный знак нуля, нигде далее (и более) не встречающийся [96, с. 96].

[24] Однако в романских и английском языках название нуля является производным от латинских вариантов «ас-сифр», например, французское zero или английское zero (а также cipher).

[25] Подробнее см. [92, с. 341—342, с. 16—18, 33, 45, 53—54]. В некоторых системах восточно-арабских цифр нуль изображается точкой в отличие от сходной с кружком цифры для пяти. См. Rida A. K. Irani. Arabic numeral forms., Centaurus, vol. 4, 1955, No. 1, p. 1—12.

[26] Так же вычисляли, например, ан-Насави, а позднее Насир ад-Дин ат-Туси, что указано даже в заглавии одного его сочинения, законченного в 1265 г.; «Джам'и ал-хисаб би-т-тахт ва-т-тураб», т. е. «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли».

[27] В «Книге абака» (Liber abaci, 1202) Леонардо Пизанский учил производить умножение «на побеленной доске, на которой цифры (littere) стираются легче». См. Scritti di Leonardo Pisano.., publicati da B. Boncompagni, vol. I, Roma, 1857, p. 7.

[28] Много позднее К. Ф. Гаусс и А. Н. Крылов держались мнения, что сложение удобнее вести от высших разрядов к низшим.

[29] [299, т. I, с. 91—92]. На доске, если следовать магистру Иоганну, последовательно появляются такие записи (в наших цифрах):

12025	9025	81025	8425	8421
1. 3604	2. 3604	3. 3604	4. 3604	5. 3604.

[30] Ан-Насави [67, с. 386] называл удвоение «вторым разделом сложения».

[31] У магистра Иоганна имеются своего рода определения сложения и вычитания, сводящиеся к объяснению математических терминов с помощью других, более привычных слов. Так, «складывать» (agregare), значит, собирать (colligere) какие-либо два или более числа в одно», «вычитать» (diminuere), значит, отнимать (se subtrahere) какое-либо число от большего» [96, с. 156, 162]. Сходные определения имелись у индийских, а перед тем у греческих математиков. См. [48, с. 32; 302, с. 378, 382].

Магистр Иоганн дает также определения удвоения и раздвоения [96, с. 169, 172].

[32] «Scias itaque impossibile esse quin unis omnium duorum numerorum quorum unus in alterum multiplicatur, duplicetur secundum quantitem unitatum que est in altero» [210, с. 90]. Перевод Роберта Честерского несколько отличается [186, с. 90]. Наиболее древнее дошедшее до нас определение умножения натуральных чисел есть в «Началах» Евклида; в очень сходных выражениях оно приводится затем индийскими и арабскими учеными. Ср., например, ан-Насави [67, с. 391].

[33] Термины «сомножители», «произведение» и другие в кембриджской рукописи отсутствуют. У магистра А. есть слово multiplicandus, т. е. множимый, и multiplicator, т. е. множитель [96, с. 98]; у магистра Иоганна совершенно аналогичные термины, а произведение называется summa multiplicationis — итог умножения или productum [там же, с. 177, 183]. Слово productum встречается затем у Сакробоско [300, с. 226]; наличие его у магистра Иоганна у Тропфке—Фогеля не отмечено.

[34] Различные приемы умножения и деления целых чисел приведены у Тропфке—Фогеля [300] и Володарского [48], а также в популярной книге В. Беллюстина [31].

[35] М. И. Медовой. Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы. Историко-математические исследования. Вып. XIII, 1960, с. 289. Умножение и деление Абу-л-Вафа связывает с теорией отношений для распространения этих действий на дроби. Основной интерес в руководстве Абу-л-Вафы представляет техника вычислений с дробями, в том числе шестидесятиричными и долями единицы (последние М. И. Медовой считает традиционными для арабской арифметики и не заимствованными у египтян [там же, с. 282]). Новыми цифрами, еще не получившими распространения у населения, Абу-л-Вафа не пользовался.

[36] См. [116, т. I, с. 717] (в дополнениях, помещенных в конце книги, на с. 912, М. Кантор исправил эту неточность, на которую указал в 1906 г. Г. Энестрем [145]), а также [62, с. 112] и [299, с. 106].

[37] Подробнее о проверке с помощью 9 см. [299, с. 81—83].

[38] Джемшид Гиясэддин ал-Каши. Ключ арифметики. Трактат об окружности. Пер. Б. А. Розенфельда, под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича. М., 1956, с. 45.

[39] Hec autem regula ostendit, quomode multiplicatio sit falsa; sed non probat, quandosit vera [5, 11, с. 41].

[40] Аллар полагает, что она была приписана уже в прототипе кем-то на полях, а потом внесена по их усмотрению в текст частью переписчиков [96, с. 86, 182].

[41] С. Гандц [151] высказал утверждение, что математики арабских стран пользовались какой-то разновидностью абака. Конкретных свидетельств в пользу этой гипотезы не имеется (см. об этом в моей статье [91, с. 105—107]). Во всяком случае, употребление абака ал-Хорезми и его последователями представляется маловероятным.

[42] Ан-Насави изменил этот порядок, начиная с обыкновенных дробей. Первое применение шестидесятиричных дробей вне Вавилона засвидетельствовано в «Алмагесте» Птолемея, использовавшего при этом алфавитную ионическую нумерацию. Градус (термин, вероятно, арабского происхождения) или единицу Птолемей делит на 60 частей, называя их частями или долями (minuta λεπτα — малость, а также самая мелкая монета в древней Греции), чаще же „шестидесятиричными“ или первыми шестидесятыми — πρῶτα

ἑξηκοντά, каждая из которых делится, в свою очередь, на вторые шестидесятые (δεύτερα ἑξηκοντά), затем идут третьи шестидесятые и т. д. Слово „минута", minuta, т. е. мелкая, маленькая, есть просто перевод с греческого. Сначала говорили prima minuta, minuta secunda, minuta tertia,..., потом стали говорить короче — минута, секунда, терция и т. д. Птолемей применил шестидесятиричное деление не только к дугам, но и к отрезкам, так что его шестидесятиричная система носила общий характер. Вполне вероятно, что эта система была введена греческими астрономами до Птолемея. См. М. Я. Выгодский. Арифметика и алгебра в древнем мире. М.—Л., ОГИЗ, 1941, с. 204—212; См. также [302].

[43] Быть может, этот другой способ состоял в непосредственном поразрядном перемножении обоих множителей в шестидесятиричной системе, подобном умножению в десятичной системе. В таком случае основные этапы вычислений таковы; они записаны в два столбца:

3°10′30″	8°15′10″30‴
2°45′	2°45′
8°42′30″30‴	8°43′52″30‴
2°45′	

Описание единой шестидесятиричной системы целых и дробей встречается в арабской литературе уже у Кушиара ибн Лаббана ал-Джили ок. 1000 г.; при этом использовались таблицы умножения до 59 · 59. См. [213]. Именно так производит умножение Теон Александрийский (ок. 370 г.) — один из комментаторов «Алмагеста» Птолемея, а также ряд арабских ученых.

[44] В своих астрономических таблицах ал-Хорезми, как и другие астрономы арабских стран, пользуется шестидесятиричными дробями и приводит таблицу произведений до разрядов секст включительно [23].

В описанной им десятичной арифметике ал-Хорезми в такой таблице не нуждался, ибо его правила автоматически указывали местоположение промежуточных произведений и цифр в произведении или частном.

[45] Такая запись дробей и смешанных чисел держалась долго. См., например, Джемшид ал-Каши, цит. соч., с. 47. Но шестидесятиричные числа ал-Каши писал уже в одну строку, отделяя разряды промежутками и нередко указывая только наименование младшего разряда. Шестидесятиричные дроби он изображал в особой алфавитной системе джумал, в которой комбинируются буквенные знаки для единиц, десятков и сотен. Подробнее см. там же, с. 73—74 и 339—340.

[46] Такая запись смешанных чисел — индийского происхождения. См. [48, с. 51].

[47] В этом случае переписчик, быть может, человек уже старый (ведь он не закончил переписку всего текста), допустил грубую ошибку, начав с безглагольной фразы: «И таким же образом все разряды дробей с обеих сторон» — Et similiter universas differentia fractionum sub se invicem (л. 111, с. 33), после чего сразу же разбирает случай, когда в каком-либо разряде соберется — collecta fuerint. LX или более и т. д. Напомним, что глагол «складывать» передавался в рукописи словами addere и colligere. О такой параллельной записи слагаемых свидетельствует раздел обыкновенных дробей у ан-Насави [67, с. 415] и у магистра Иоганна (см. далее).

[48] Маленький незаконченный отдел кембриджской рукописи об обыкновенных дробях историки математики раньше оставляли без внимания. М. Кантор упоминает только о применении в ней шестидесятиричных дробей [116, т. I, с. 718]. З. Гюнтер поступает так же, добавляя, что позднейшие ученые, например, ал-Кархи (ал-Караджи), оперировали с обыкновенными дробями [161, с. 200]. У магистра А. соответствующие разделы названы «Об умножении дробей различных родов» — diversorum generum [95, с. 115], у магистра А. «О дробях другого знаменателя» [там же, с. 215].

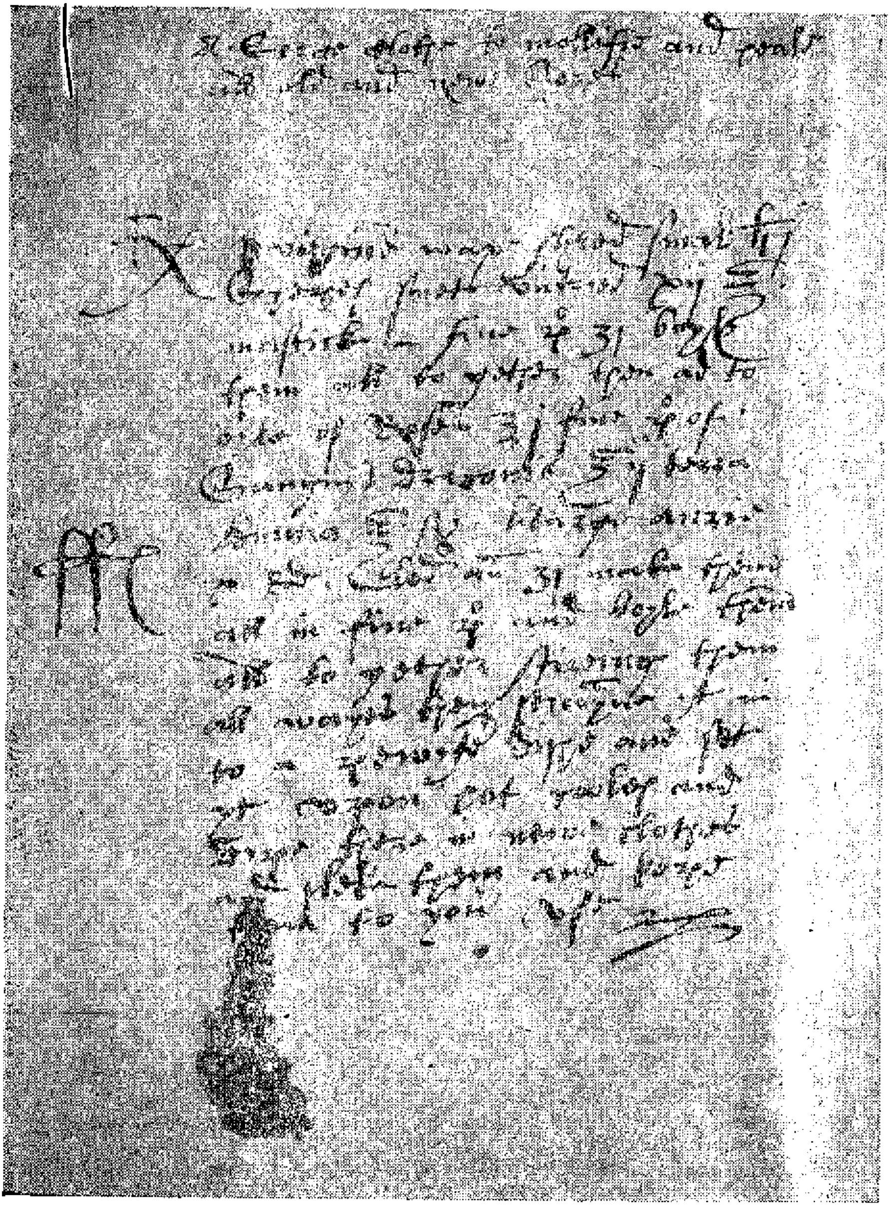


Рис. 41.

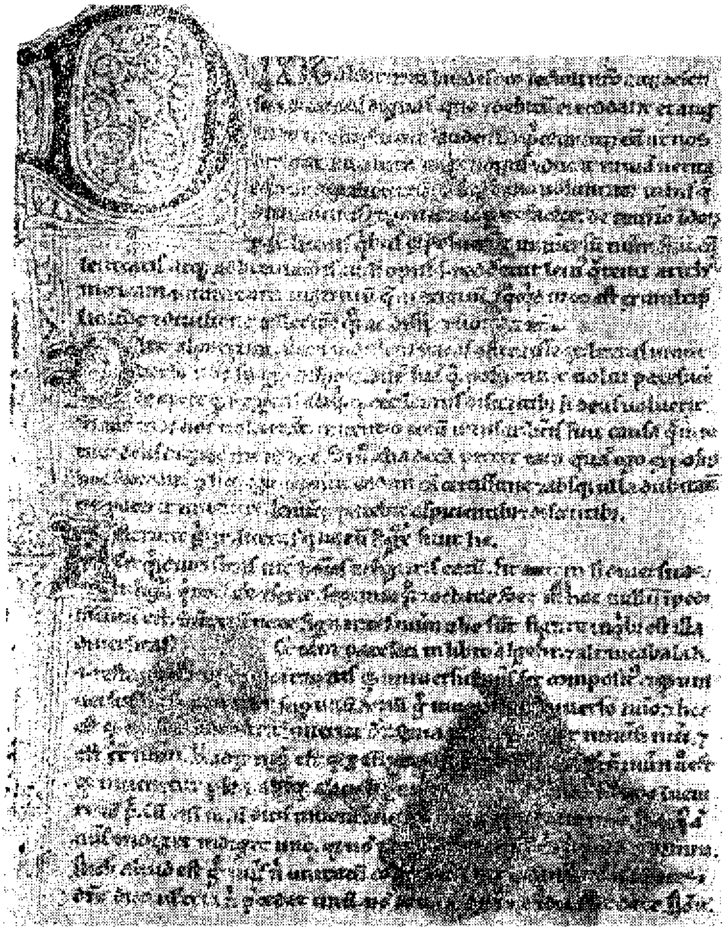


Рис. 42.

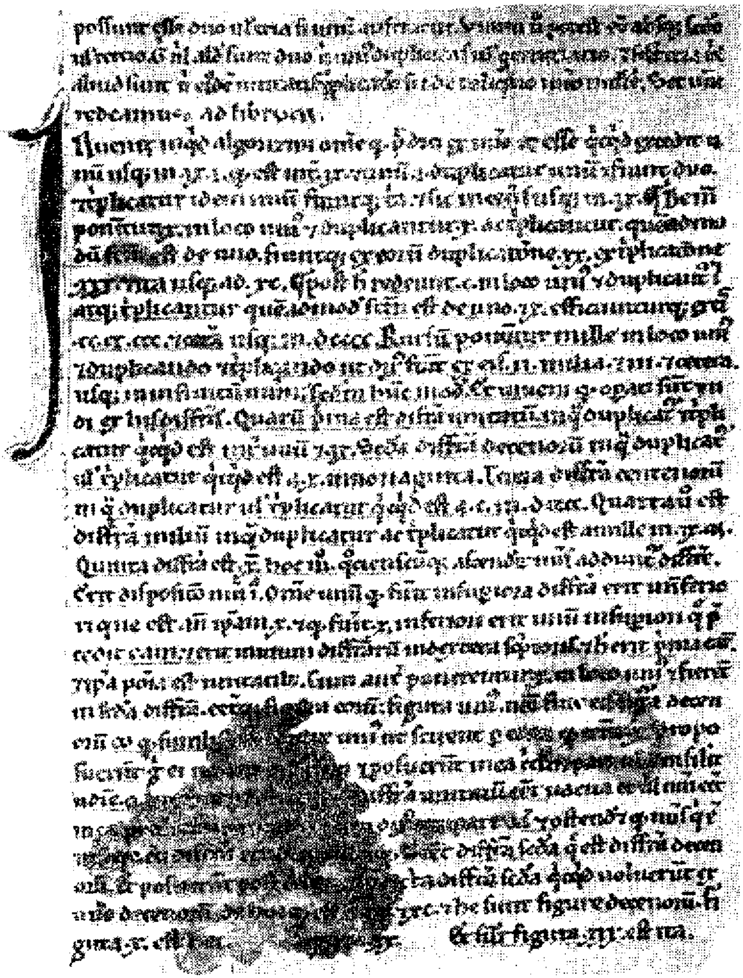


Рис. 43.

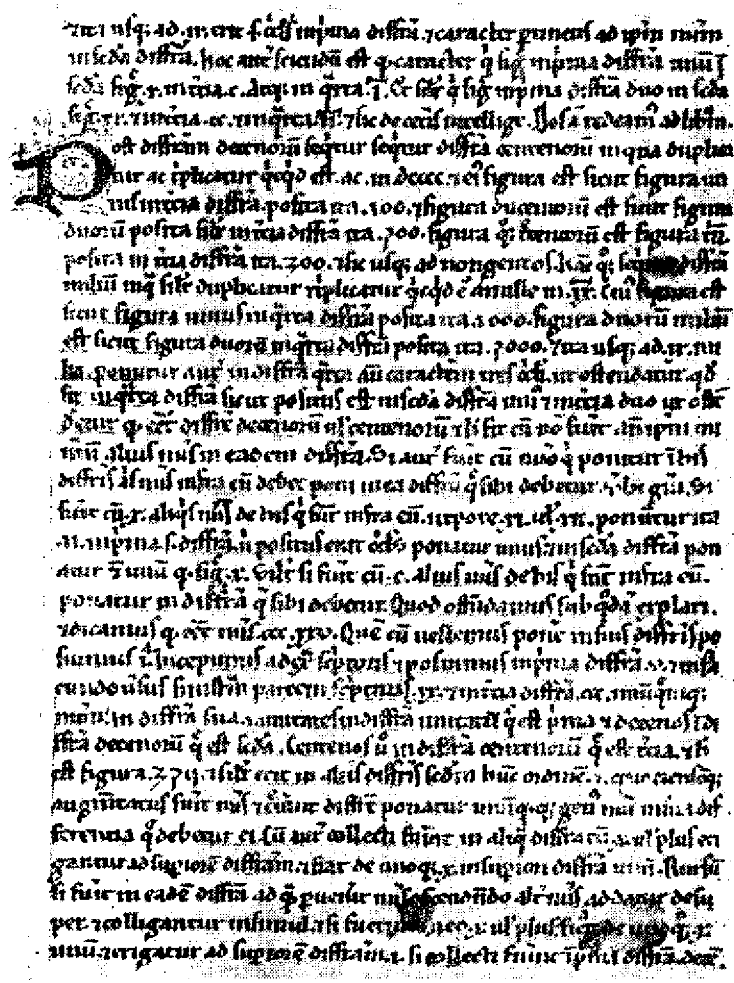


Рис. 44.

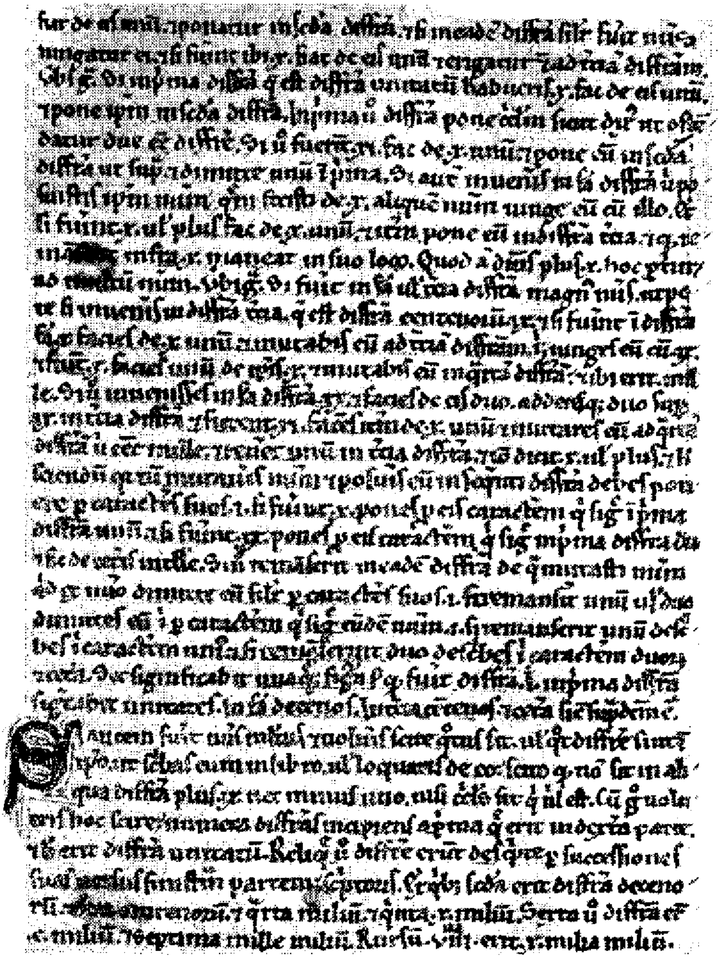


Рис. 45.

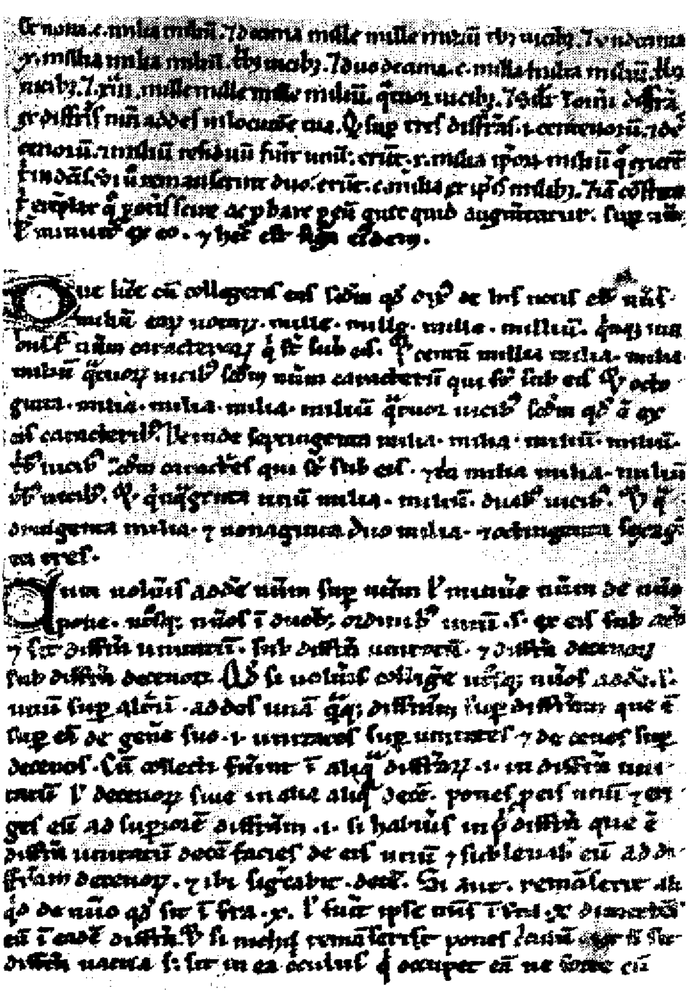


Рис. 46.

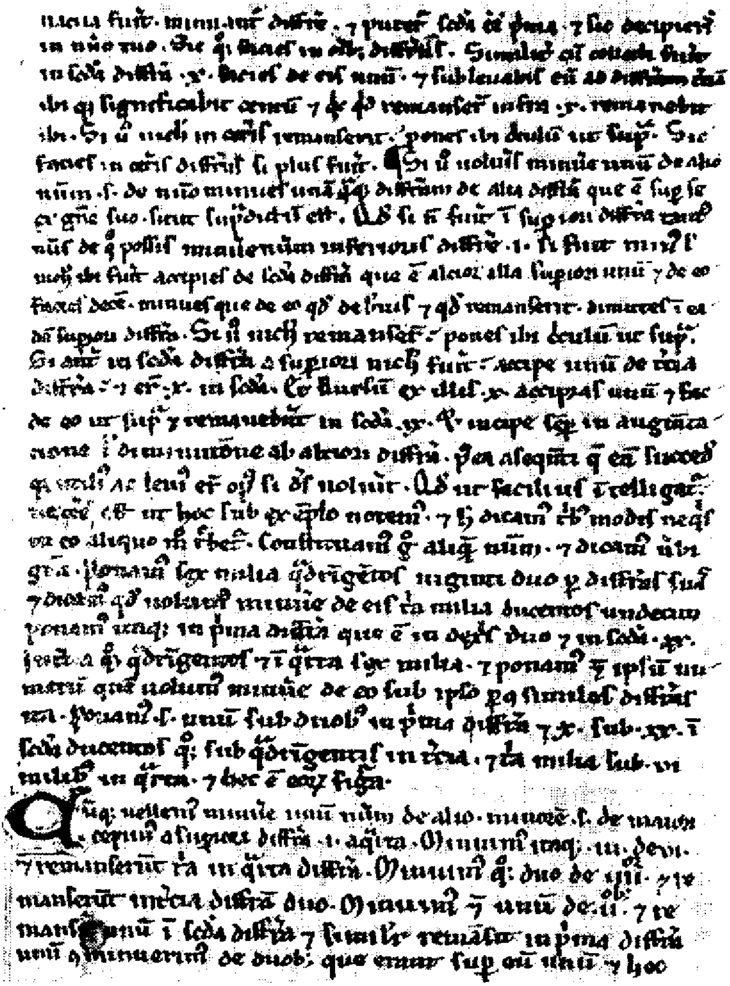


Рис. 47.

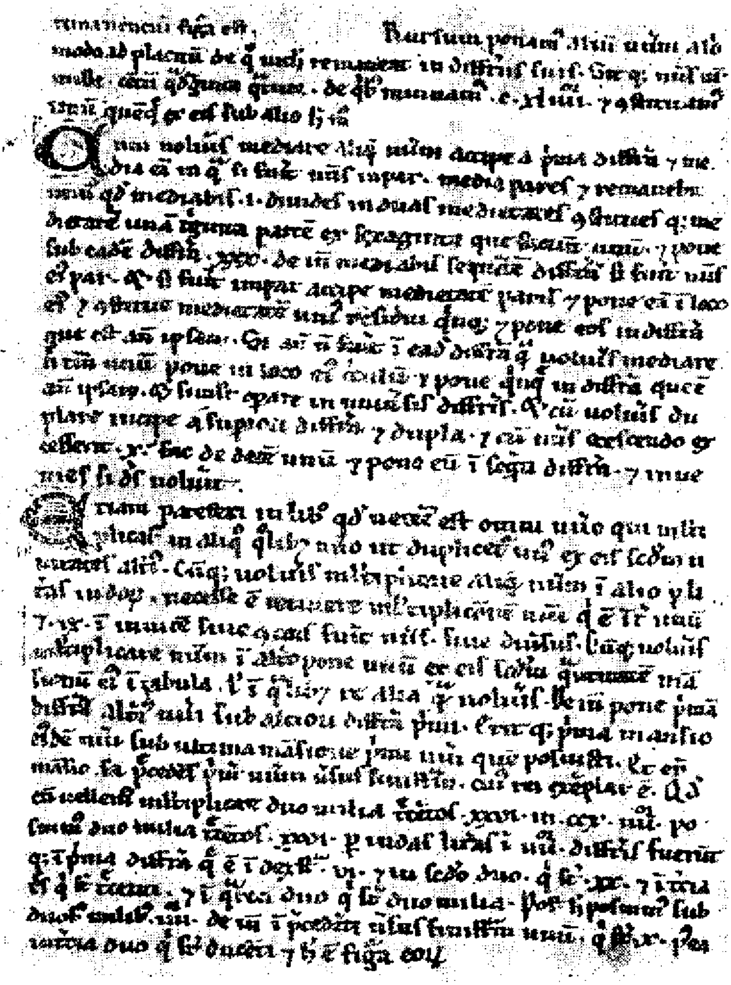


Рис. 48.

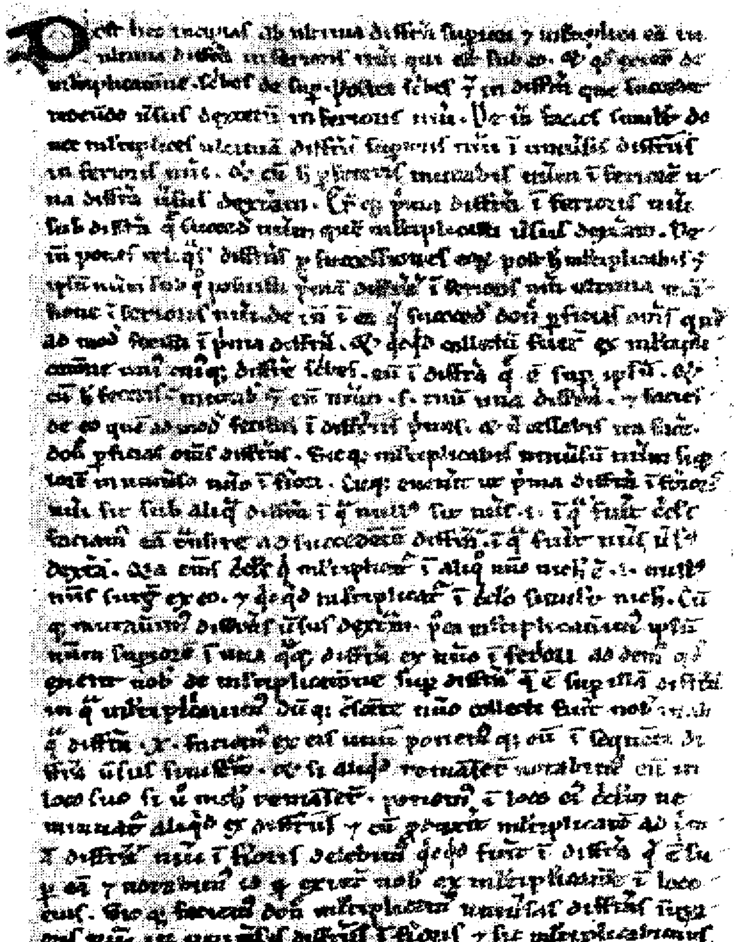


Рис. 49.

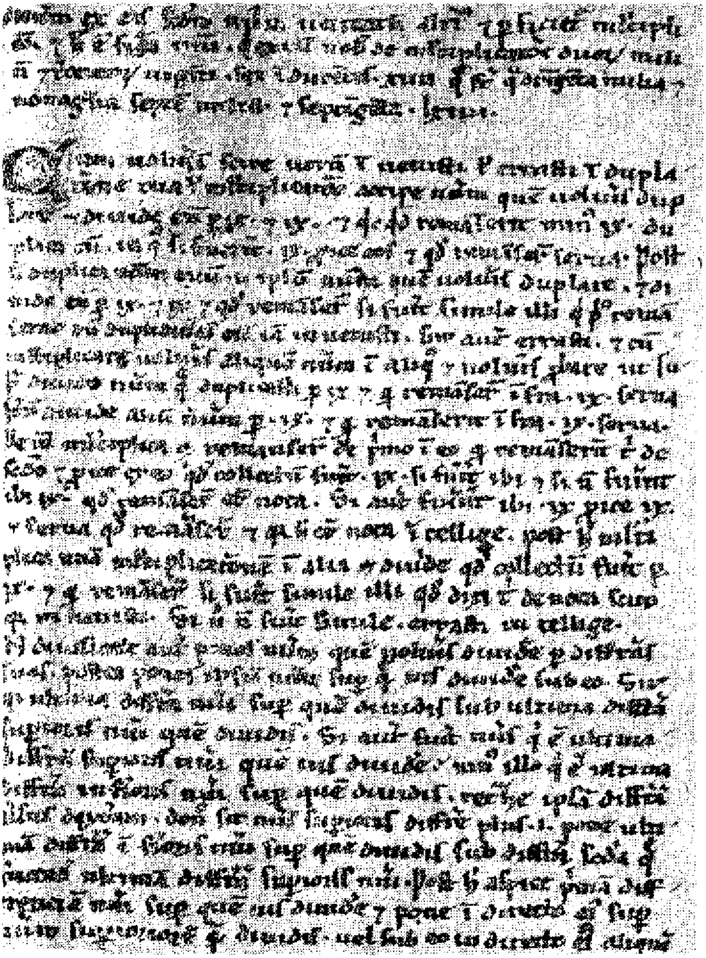


Рис. 50.

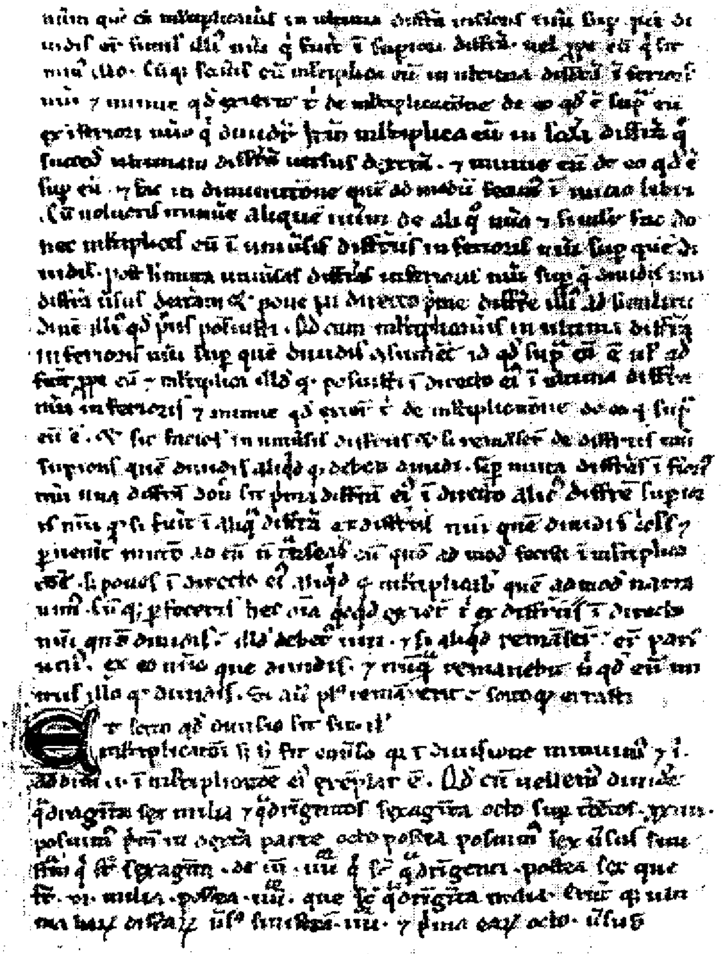


Рис. 51.

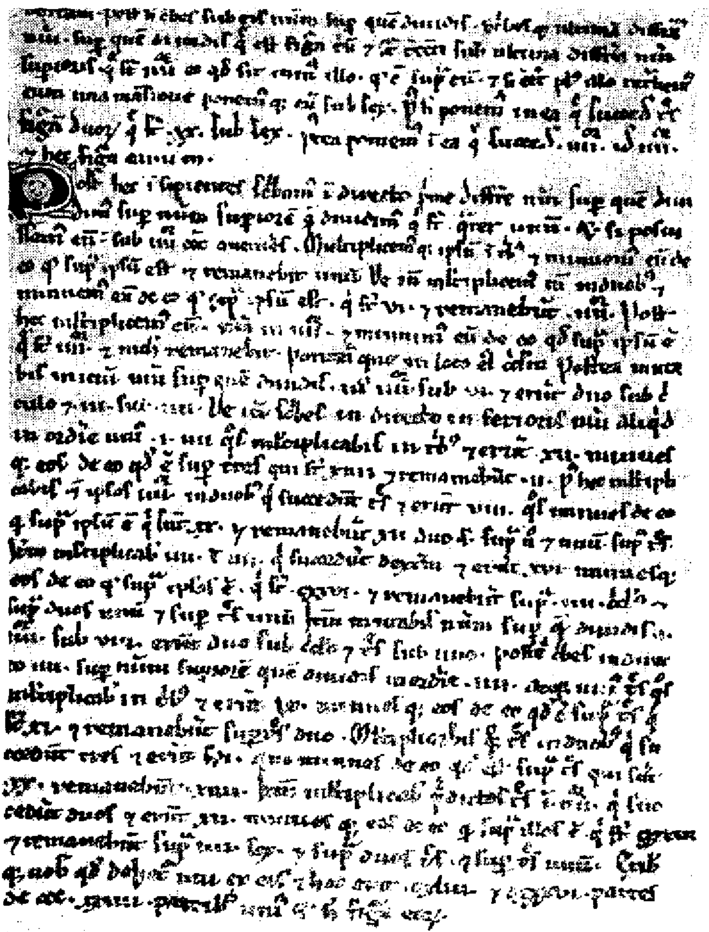


Рис. 52.

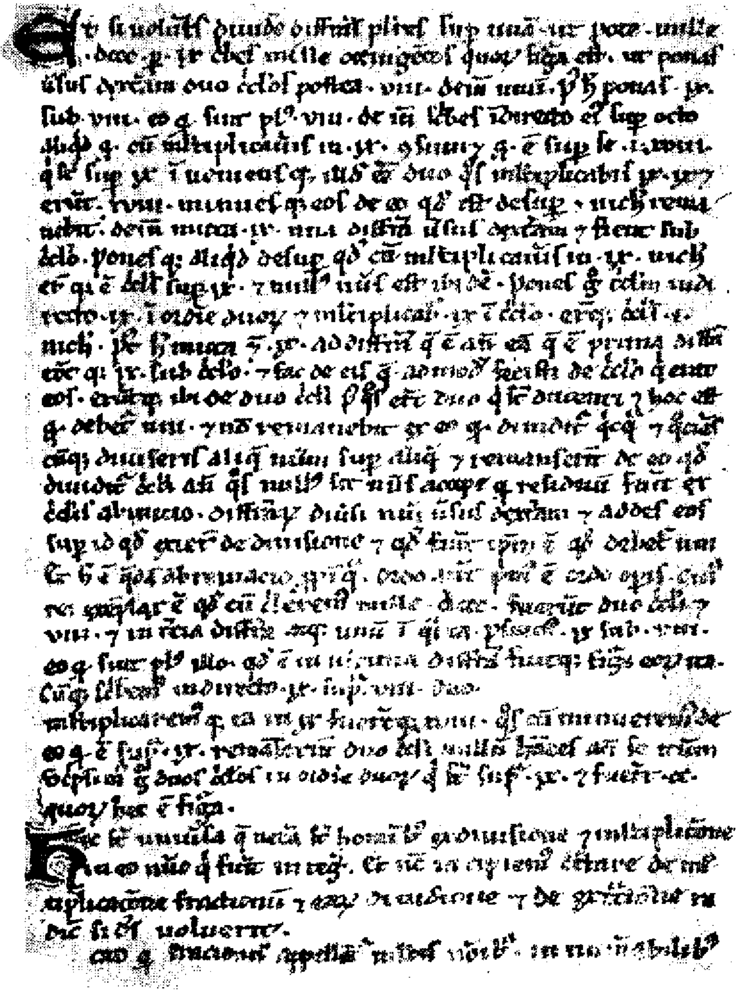


Рис. 53.

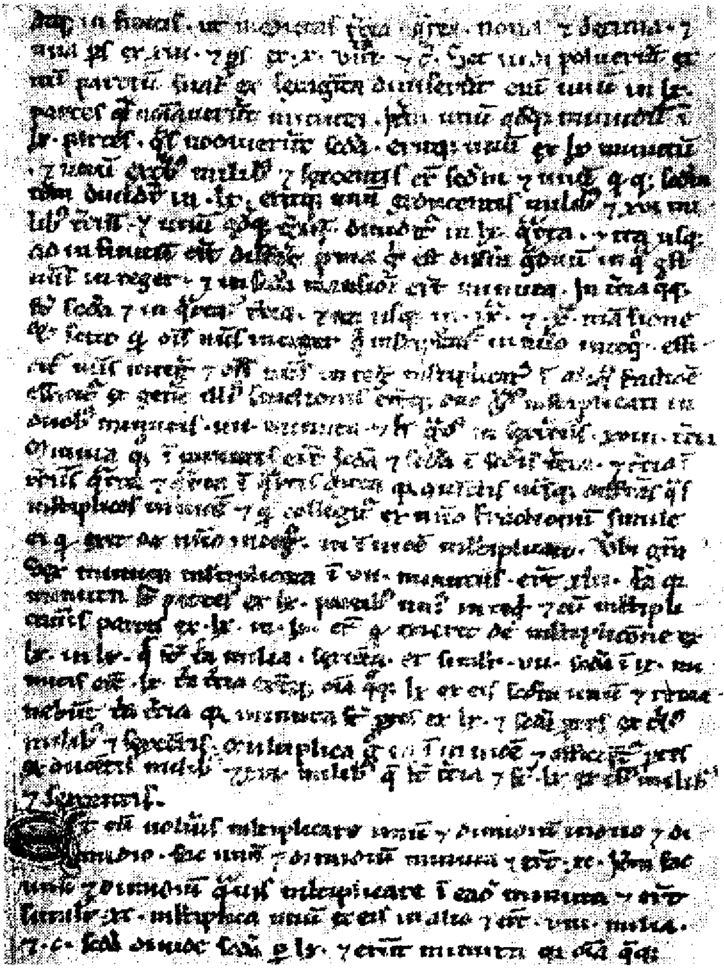


Рис. 54.

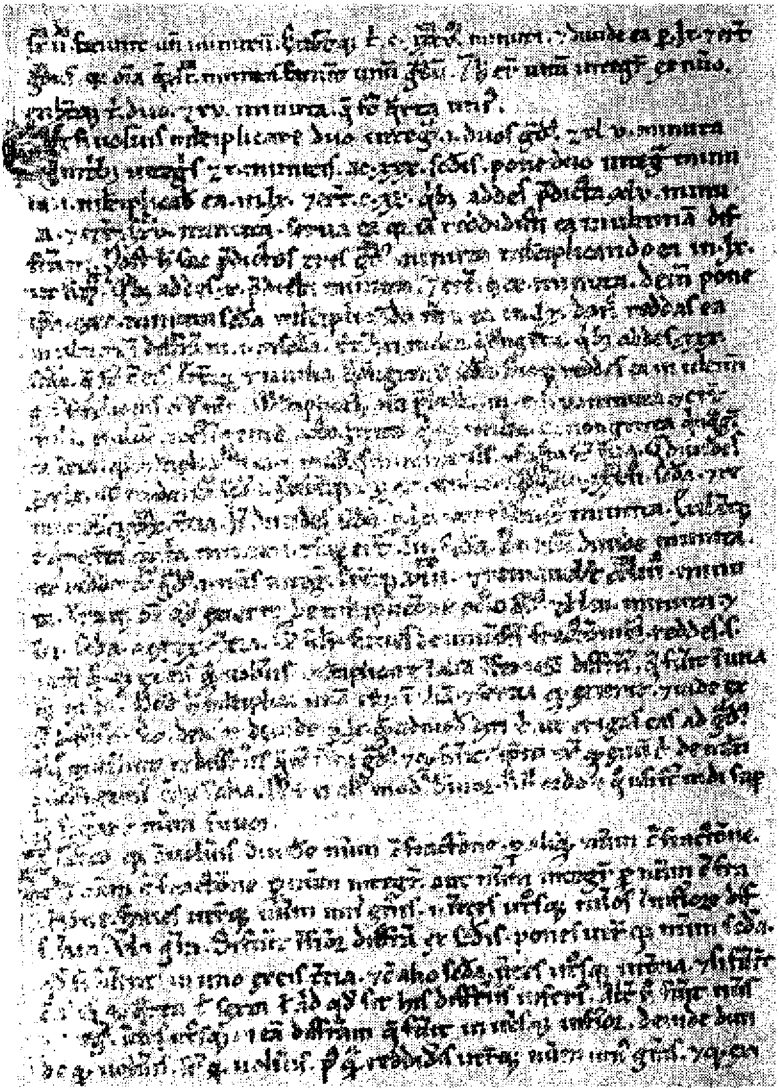


Рис. 55.

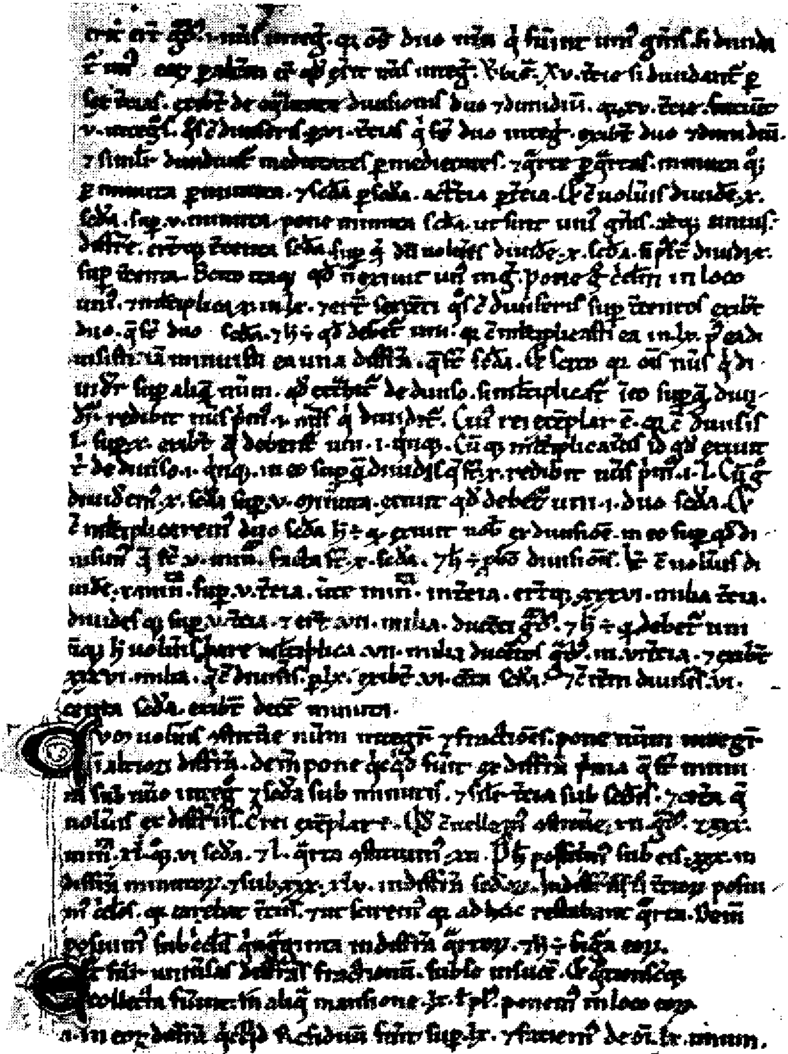


Рис. 56.

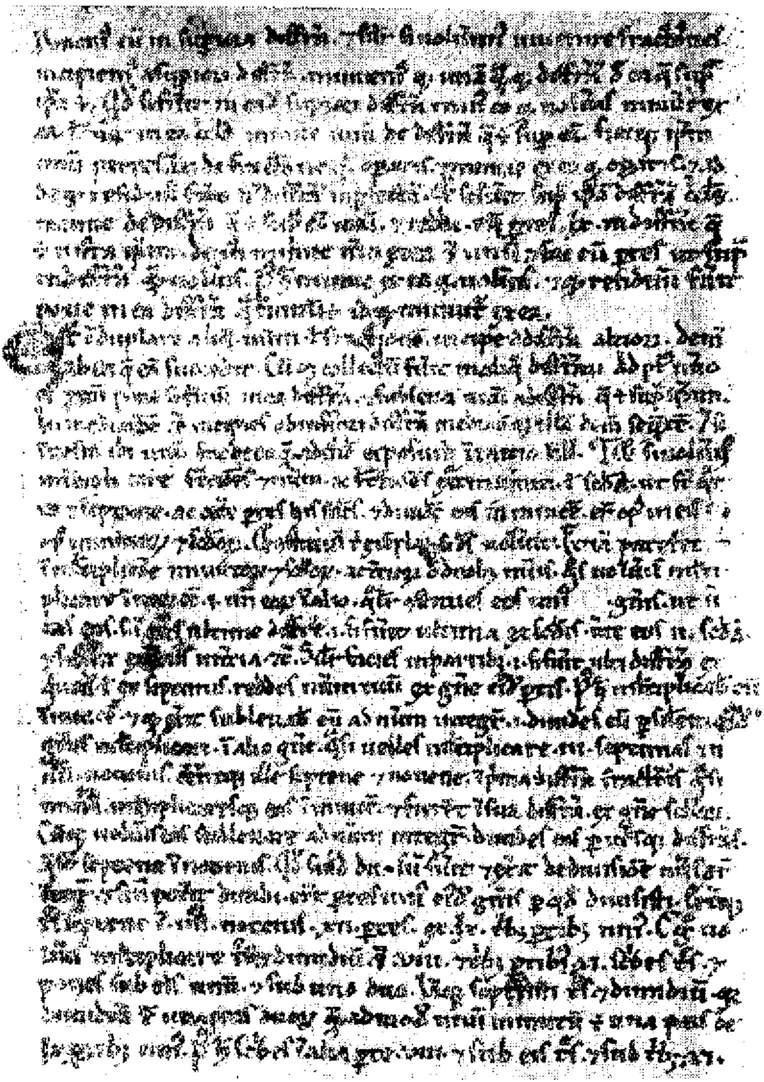


Рис. 57.

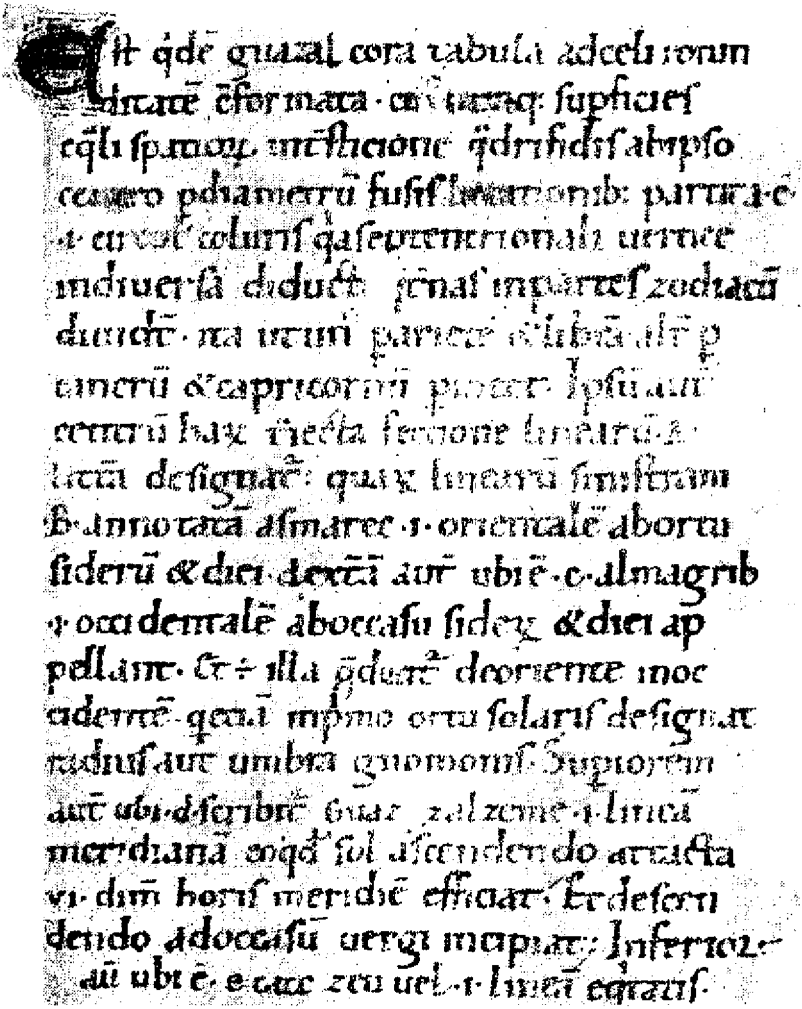
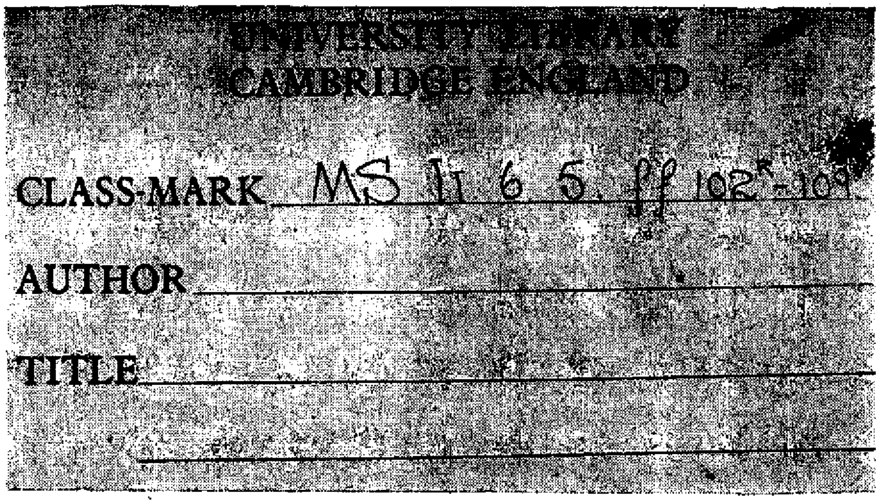


Рис. 58



UNIVERSITY LIBRARY
CAMBRIDGE ENGLAND

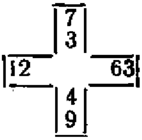
CLASS-MARK MS Ii 6 5. ff 102^{r}-109

AUTHOR

TITLE

Рис. 59.

[49] Вот пример записи произведения 3/7·4/9 у магистра А. [там же, с. 116]:



[50] Применение наименьшего общего знаменателя имеется у ал-Караджи (X—XI в.) и Леонардо Пизанского (1202).

[51] Здесь единицы названы digiti, букв. пальцы, а целые десятки articuli, суставы. Эти термины, возникшие из счета на пальцах, применялись в Европе еще ранее и удерживались довольно долго.

Выше приводятся факсимиле кембриджской рукописи алгебраического трактата (рис. 41—59).

Г. П. Матвиевская

ВЫДАЮЩИЙСЯ МАТЕМАТИК МУХАММАД ИБН МУСА АЛ-ХОРЕЗМИ И ЛИТЕРАТУРА О НЕМ

Абу 'Абдаллах или Абу Джа'фар Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми принадлежит к наиболее известным средневековым ученым, которые работали в области физико-математических наук. Его творчеству посвящена обширная литература, начиная от разделов в общих курсах истории науки и специальных исследований по истории математики, астрономии и географии и кончая популярными изданиями для школьников.

Интерес к личности и трудам ал-Хорезми обусловлен многими причинами. С его именем связано начало важного этапа в истории арифметики и алгебры. Он был одним из первых ученых, заложивших основу бурного подъема точных наук в странах Ближнего и Среднего Востока IX—XV вв. Сочинения ал-Хорезми, переведенные на латынь в XII столетии, сыграли огромную роль в развитии математики и астрономии в Европе. Кроме того, в творчестве ал-Хорезми отразились результаты, полученные предшественниками — древнегреческими и индийскими учеными. Поэтому исследование его трудов позволяет выяснить многие вопросы, касающиеся преемственности научных идей и взаимного влияния народов в процессе исторического развития. Наконец, в связи с биографией ал-Хорезми возникают проблемы, представляющие большой интерес для истории культурной жизни Средней Азии и, в частности, родины ученого — древнего Хорезма.

При обсуждении этих вопросов и исследовании трудов ал-Хорезми выявилось немало разноречивых и часто взаимоисключающих мнений. Разногласия касались и отдельных фактов его биографии, и источников его творчества, и оценки его роли в развитии науки, толкования текста его трактатов, терминологии и т. д. Это естественно, поскольку речь идет об ученом, которого отделяет от нас более чем тысячелетний период. Сведения о нем и его деятельности разбросаны по трудно обозримым средневековым источникам. Знакомство с ними происходило лишь постепенно, в процессе нелегкого востоковедческого труда. И хотя сейчас уже сложилась единая в основном точка зрения на ал-Хорезми и его научное наследие, некоторые проблемы все еще нельзя считать решенными окончательно.

Ниже мы приводим обзор литературы об ал-Хорезми, останавливаясь преимущественно на тех моментах, которые вызвали в свое время наиболее оживленные дискуссии. Как правило, в ходе этих дискуссий ставились и решались — хотя не всегда окончательно — часто по-новому, более общие проблемы, важные не только для правильного понимания творчества ал-Хорезми, но и для истории науки в целом[1].

I. О ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АЛ-ХОРЕЗМИ

Споры относительно личности ал-Хорезми и некоторых моментов его биографии вызваны прежде всего тем, что средневековые сообщения о нем не во всем согласуются между собой. Из них, например, не всегда ясно, имеется ли в виду именно этот ученый или другой, который жил тогда же и также носил имя Мухаммад ибн Муса.

В знаменитом биобиблиографическом труде ан-Надима (X в.) «Фихрист ал-‘улӯм» («Указатель наук»), содержащем наиболее ранние сведения об ал-Хорезми [235, с. 27; 288, с. 29], сказано следующее: «Мухаммад ибн Муса, родом из Хорезма, работал в библиотеке халифа при ал-Ма’муне. В течение его жизни и позже там, где производились наблюдения, люди привыкли полагаться на его [астрономические] таблицы, которые были известны под названием Синд-Хинд. Он написал «Книгу астрономических таблиц» (зӣдж) в двух изданиях, первом и втором, «О солнечных часах» (фӣ-р-рух̮āмāт), «О применении астролябии» (фӣ ‘амал би-л-аст̣урлāб), «О построении астролябии» (фӣ ‘амал ал-аст̣урлāб), «Книгу хроники» (китāб ат-та’рӣх̮).

Таким образом, ан-Надим свидетельствует, что ал-Хорезми был уроженцем Хорезма, работал в Багдаде при «Доме мудрости» (байт ал-х̣икма) халифа ал-Ма’муна (учреждении, выполнявшем функции академии наук) и славился своими астрономическими трудами. Однако он упускает некоторые сочинения ал-Хорезми, упоминавшиеся другими средневековыми историками и частично дошедшие до наших дней, а именно, книгу об алгебре и географический труд, которые сохранились в арабском оригинале, и трактат об индийской арифметике, известный сейчас в латинском переводе XII в.

Это не может не вызвать удивления, так как ан-Надим, несомненно, знал об алгебраическом трактате ал-Хорезми: несколь-

---

[1] В квадратных скобках даются ссылки на работы, фигурирующие в общем списке литературы об ал-Хорезми. Цитируемые исследования, которые не входят в этот список, приводятся в подстрочных примечаниях.

ко ниже он пишет, что этот трактат комментировал в X в. один из крупнейших математиков и астрономов средневекового Востока Абу-л-Вафа ал-Бузджани (940—997 гг.) [288, с. 39], а также его современники 'Абдаллах ибн ал-Хасан ас-Сайданани [там же, с. 36] и Синан ибн ал-Фатх ал-Харрани [там же, с. 37].

Здесь мы встречаемся с очевидной ошибкой переписчика (явлением, нередким для восточных рукописей), так как ученому IX в. Синду ибн 'Али, биография которого следует в «Фихристе» за биографией ал-Хорезми, приписаны заведомо ему не принадлежащие книга об алгебре, сочинение об индийской арифметике и трактат «Об увеличении и уменьшении» (или «О сложении и вычитании» фӣ-л-джам' ва-т-тафрӣқ). Ошибка вкралась уже в ранний экземпляр «Фихриста», так как она повторяется в «Истории мудрецов» (та̄'рӣх̮ ал-х̮укама̄') Ибн ал-Кифти (1173—1248 гг.) [177], который, по-видимому, пользовался либо указанным экземпляром, либо копией с него.

Выяснение этого и других вопросов, касающихся жизни и творчества ал-Хорезми, требовало большой работы над арабскими средневековыми источниками. Важная заслуга в обобщении и анализе разрозненных сведений об ал-Хорезми, разбросанных по разным историческим трудам, принадлежала выдающемуся швейцарскому историку математики Г. Зутеру (H. Suter, 1848—1922). В 1892 г. он опубликовал немецкий перевод того раздела «Фихриста», в котором речь идет о математиках и астрономах, и указал на упомянутую выше ошибку переписчика относительно списка трудов ал-Хорезми [288, с. 62].

В капитальной работе Г. Зутера «Математики и астрономы арабов и их труды» [289], вышедшей в свет в 1900 г., сообщение ан-Надима об ал-Хорезми дополнено данными из других источников: «Золотых лугов» (мурӯдж аз̱-з̱ахаб) ал-Мас'уди (ум. в 965 г.) [218] и «Истории династий» (кита̄б мух̮тас̣ар ад-дувал) Абу-л-Фараджа (1226—1286 гг.) [94].

В списке сочинений ал-Хорезми, который составил Зутер [289, с. 10—11], значатся следующие: зидж в двух изданиях, трактаты «Об индийской арифметике» и «Об увеличении и уменьшении» (или «О сложении и вычитании», «Книга об алгебре», а также сочинение по истории — «Книга хроники». Подтверждение того, что крупнейший математик и астроном восточного средневековья действительно был автором исторического труда, Зутер нашел у ал-Мас'уди, назвавшего Мухаммада ибн Мусу ал-Хорезми среди тех историков, на сообщения которых он опирался при написании «Золотых лугов».

Зутер указал местонахождение известных ему арабских рукописей трудов ал-Хорезми, их средневековых латинских версий и перечислил вышедшие к 1900 г. издания текстов, а также переводов на современные европейские языки.

В примечаниях [289, с. 208] кратко упомянута арабская рукопись географического труда ал-Хорезми — «Книги картины Земли» (кита̄б с̣ӯрат ал-'ард), которую обнаружил в 1878 г. в Каире ориенталист В. Спитта (W. Spitta). Более подробные данные об этой уникальной рукописи (время переписки — XI в.), хранящейся с 1883 г. в Страсбургской библиотеке (L. араb. Cod. Spittá 18), Г. Зутер приводит в 1904 г. в своих «Дополнениях и исправлениях к «Математикам и астрономам арабов и их трудам» [290, с. 158—160]. При этом он ссылается на весьма важную для изучения творчества ал-Хорезми работу К. Наллино [237], опубликованную в 1896 г., но не известную ему ранее; в ней впервые «Книга картины Земли» была подвергнута основательному анализу.

В «Дополнениях» Г. Зутер сообщает также сведения, относящиеся к X в., которые помогают уточнить год смерти ал-Хорезми: в историческом труде ат-Табари (839—923 гг.) он указан среди лиц, присутствовавших при кончине халифа ал-Васика в 847 г. Это последнее известное упоминание об ал-Хорезми свидетельствует о том, что он умер не ранее 847 г.

Г. Зутер подробно рассмотрел отдельные факты биографии ал-Хорезми, которые, по его мнению, нельзя считать вполне достоверными, хотя они заимствованы из солидных средневековых сочинений. Такие факты он обнаружил, сравнивая выдержки из географических трудов IX—X вв. (Ибн Хордадбеха, ал-Мукаддиси и др.), изданных в 1873—1894 гг. Ж. де Гуе (M. J. Goeje) под общим названием «Bibliotheca geographorum arabicorum» [159]. Выяснилось, в частности, что эти авторы, а тем более жившие позднее и основывавшиеся на их данных, нередко путали Мухаммада ибн Мусу ал-Хорезми с другим выдающимся ученым — Мухаммадом ибн Мусой ибн Шакиром, одним из трех знаменитых братьев Бану Муса, работавших в Багдаде почти одновременно с ал-Хорезми [289, с. 20—21]. Абу Джа'фар Мухаммад ибн Муса ибн Шакир также занимался математикой и астрономией, и к его имени часто прибавляли слово «ал-мунаджжим», т. е. астроном или астролог. Г. Зутер заключил, например, что поездку в Византию, которую, согласно Ибн Хордадбеху, предпринял в 864 г. ал-Хорезми, в действительности совершил Мухаммад ибн Муса ибн Шакир. Возможно, такой же вывод нужно сделать и в отношении посольства к правителю хазар Тархану, в котором, как сообщает ал-Мукаддиси, Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми ал-Мунаджжим принял участие по приказу халифа ал-Васика.

Следует заметить, кстати, что в историко-научной литературе есть и обратные примеры, когда труды ал-Хорезми приписываются другим ученым. Так, в 1877 г. Ф. Вюстенфельд, исследовавший средневековую рукопись латинской обработки зиджа ал-Хорезми, был введен в заблуждение тем, что в ней автором назван Абу Джа'фар, и доказывал, что это сочинение написал известный астроном Абу Ма'шар Джа'фар ибн Мухаммад ал-Балхи [316, с. 21—22].

Таким образом, благодаря работам Г. Зутера была в основных чертах восстановлена творческая биография ал-Хорезми. Но и по сей день остается немало вопросов, которые вызывают разногласия среди исследователей.

Много споров, например, возникло из-за того, что ат-Табари прибавил к имени ал-Хорезми слова «ал-маджӯсӣ ал-Кутруббулӣ», т. е. назвал его «магом из Кутруббула». Отсюда, во-первых, был сделан вывод о том, что предки ал-Хорезми (а может быть, и он сам в юности [238, с. 463]) были магами, т. е. жрецами зороастрийской религии, широко распространенной на территории Средней Азии в доисламский период. Во-вторых, здесь усматривается связь ал-Хорезми с городом Кутруббулом, расположенным на берегу Евфрата недалеко от Багдада.

По этому поводу высказывались различные мнения, включая предположение о том, что ал-Хорезми родился в Кутруббуле, куда переселились его предки. Однако большинство ученых не соглашается с таким выводом, противоречащим указанию ан-Надима на Хорезм как на родину ал-Хорезми. Недавно, например, А. Анбуба [98] предположил, что здесь имеет место ошибка переписчика рукописи ат-Табари, в результате которой объединены имена двух разных астрономов — Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми и некоего ал-Маджуси ал-Кутруббули.

Необходимо заметить, что если исследователи, обсуждая вопрос о месте рождения ал-Хорезми, иногда и приводят упомянутые слова ат-Табари, считая «вероятным», что из Хорезма переехали в Кутруббул предки ал-Хорезми, а не он сам (см., например, [238, с. 463; 298]), то в популярной литературе приходится встречаться с совершенно произвольными, но весьма категорическими утверждениями на этот счет. Так, С. Хунке в солидном издании энциклопедического характера «Великие люди истории» («Die Groβen der Weltgeschichte»), вышедшем в Цюрихе в 1973 г., пишет буквально следующее: «Из Хивы в Хорезме, из северо-восточной провинции империи Аббасидов его семья переехала ближе к столице Багдаду и поселилась в Кутриббуле, на запад от Тигра. Здесь — примерно в период молодости Гаруна ар-Рашида — родился сын, которому его отец Муса (Moses), уже перешедший в ислам, дал имя пророка Мухаммад» [174, т. III, с. 54]. Совершенно очевидно, что такого рода заявления делаются без всякого документального основания.

Наиболее убедительно обосновано общепринятое мнение, что ал-Хорезми родился, вырос, получил образование в Хорезме и, уже будучи зрелым ученым, попал в окружение ал-Ма'муна — сына халифа Харуна ар-Рашида (786—809 гг.), который долго был наместником халифа в Хорасане и жил в Мерве. Победив своего брата ал-Амина в борьбе за престол, ал-Ма'мун переехал в 813 г. в Багдад, куда вместе с ним переселились многие среднеазиатские ученые. Наряду с ал-Хорезми, к ним, по-видимому, относились выдающиеся астрономы Абу-л-'Аббас Ахмад ибн Мухаммад ал-Фаргани, происходивший из Ферганы, уроженец Мерва Ахмад ибн ‘Абдаллах ал-Марвази, известный под именем Хабаш ал-Хасиб, а также Халид ибн ‘Абд ал-Малик ал-Мерверруди и ал-Джаухари [41а].

Этим не ограничиваются неясные вопросы, возникающие при анализе немногочисленных средневековых сообщений об ал-Хорезми.

Например, не обошлось без осложнений изучение уникальной страсбургской рукописи его географического труда: время ее переписки (XI в.) сначала было принято за время написания самого сочинения. Это отразилось в некоторых серьезных востоковедческих работах (например, [110, т. I, с. 225; 61, т. I, с. 104, 110]). Появились утверждения о том, что «Книга картины Земли» написана не математиком и астрономом ал-Хорезми, а другим ученым с тем же именем, но жившим позднее (см. по этому поводу [60, с. 92]). Немало сомнений вызвала и кунья ал-Хорезми: если в большинстве источников он назван Абу ‘Абдаллахом, то в рукописи географического трактата имя автора — Абу Джа‘фар Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми. Тем не менее, сейчас доказано и является общепризнанным, что речь идет об одном и том же ученом, уроженце Хорезма, работавшем в Багдаде при «Доме мудрости» и отличавшимся обширными познаниями в разных областях науки — астрономии, математике, географии, истории.

II. ХОРЕЗМ И БАГДАД В ЭПОХУ АЛ-ХОРЕЗМИ

В историко-научной литературе XIX в. много внимания уделяется вопросу об источниках творчества ал-Хорезми. Мнения исследователей по этому поводу разделяются. Одни придают наибольшее значение влиянию индийской математики и астрономии, другие — древнегреческой. Говорится о своеобразном сочетании в трудах ал-Хорезми как индийских, так и греческих элементов. Наконец, корни его математического творчества ищутся в вавилонской традиции, сохранявшейся в науке Востока с древнейших времен. Сторонники каждой из этих точек зрения приводят веские доводы своей правоты, так что вполне очевидно, что поставленный вопрос достаточно сложен и не допускает однозначного решения.

С течением времени новые данные, полученные историками науки, востоковедами и археологами, позволили высказать дополнительные соображения относительно этой проблемы, внеся в нее определенную ясность. Речь идет о решающем влиянии на формирование ал-Хорезми как ученого традиций местной среднеазиатской науки. Сейчас ясно, что вопрос об источниках научного творчества ал-Хорезми неотделим от вопроса об уровне математических и астрономических познаний на его родине, в Хорезме, до IX в.

Конкретных свидетельств о состоянии науки в Средней Азии до захвата ее арабами сохранилось мало. Письменные памятники этой эпохи погибли в ходе войны, так как завоеватели, внедряя новую религию — ислам, стремились искоренить все связанное с религиями, которые были распространены на территории Средней Азии в домусульманский период. Подверглись уничтожению также памятники культуры и науки древнего Хорезма. Великий хорезмиец Абу Райхан Беруни (973—1048 гг.), который кратко изложил историю своей родины в знаменитых «Памятниках минувших поколений», писал, что арабский наместник в Средней Азии Кутейба ибн Муслим уничтожил «людей, которые хорошо знали хорезмийскую письменность, ведали их преданиями и обучали наукам, существовавшим у хорезмийцев, и подверг их всяческим терзаниям»[2]. По словам Беруни, Кутейба «погубил хорезмийских писцов, убил священнослужителей и сжег их книги и свитки», после чего «хорезмийцы остались неграмотными и полагались в том, что им нужно, на память»[3].

Несмотря на это, сейчас мы имеем все основания полагать, что зачатки математики и науки о звездном небе появились в Средней Азии и, в частности, в Хорезме, в весьма отдаленную эпоху. С одной стороны, можно привести немало доводов, косвенно доказывающих правильность такого заключения, с другой — оно подтверждается анализом материала, которым располагают история и археология. Особенно важны в этом отношении открытия советских археологов на территории древнего Хорезма, Мервского оазиса, Согда и других областей Средней Азии. Обнаруженные ими материальные памятники позволили восстановить многие забытые страницы истории и составить представление о древней культуре среднеазиатских народов.

В настоящее время установлено, что на территории Средней Азии находился один из древнейших очагов цивилизации. Среднеазиатские государства, располагавшиеся на пересечении важных торговых путей, отличались высоким уровнем развития экономики и культуры. Подобно другим странам Востока, базу хозяйственной жизни здесь составляло поливное земледелие с мощной системой оросительных каналов.

К этим районам непосредственно относится следующее высказывание К. Маркса, содержащее глубокий анализ основ экономики стран Азии. В работе «Британское владычество в Индии» К. Маркс пишет: «Климатические условия и своеобразие поверхности, особенно наличие огромных пространств пустыни, тянущейся от Сахары через Аравию, Персию, Индию и Татарию вплоть до наиболее возвышенных областей Азиатского плоскогорья, сделали систему искусственного орошения при помощи каналов и

---

[2] Бируни Абу Райхан. Избранные произведения. Т. I. Памятники минувших поколений. Пер. и примеч. М. А. Салье. Ташкент, 1957, с. 18 (Дальше в ссылках: Бируни. Памятники минувших поколений).

[3] Там же, с. 63.

ирригационных сооружений основой восточного земледелия. Как в Египте и Индии, так и в Месопотамии, Персии и других странах наводнения используют для удобрений полей: высоким уровнем воды пользуются для того, чтобы пополнять питательные ирригационные каналы. Это элементарная необходимость экономного и совместного использования воды, которая на Западе заставила частных предпринимателей соединяться в добровольные ассоциации, как во Фландрии и Италии, на Востоке,— где цивилизация была на слишком низком уровне и где размеры территории слишком обширны, чтобы вызвать к жизни добровольные ассоциации,— повелительно требовала вмешательства централизующей власти правительства. Отсюда та экономическая функция, которую вынуждены были выполнять все азиатские правительства, а именно, функция организации общественных работ. Такая система искусственного повышения плодородия почвы, зависевшая от центрального правительства и немедленно приходившая в упадок при нерадивом отношении этого правительства к ирригационным и осушительным работам, объясняет тот необъяснимый иначе факт, что мы видим теперь бесплодными и пустынными целые территории, некогда бывшие прекрасно возделанными... Этим же объясняется тот факт, что одна опустошительная война оказывалась способной обезлюдить страну на целые столетия и лишить ее всей цивилизации»[4].

Советские археологи, обнаружившие на территории Средней Азии остатки грандиозной сети ирригационных сооружений, строительство которых относят к первой половине I тысячелетия до н. э., получили, таким образом, доказательство процветания экономики в этих районах уже в весьма отдаленный период истории.

Особенно ценные данные археология получила при исследовании Хорезма, всегда игравшего важнейшую роль в экономической и политической жизни Средней Азии. Еще в 1911 г. известный русский востоковед К. А. Иностранцев высказал мысль о том, что в областях древнего Хорезма «естественно ожидать особенно важных и интересных материалов от данных археологических»[5]. Однако результаты систематических археологических исследований и изучения памятников материальной культуры, начатых в послереволюционное время, превзошли самые смелые надежды. После первых же раскопок, проведенных в Хорезме в 1928 г., А. Ю. Якубовский подчеркивал, что они обещают дать много нового материала не только для освещения истории Хорезма, но и всей Средней Азии[6]. В дальнейшем, благодаря трудам Хорезмской археолого-этнографической экспедиции, организованной

---

[4] Маркс К., и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е, т. 9, 1957, с. 132.

[5] Иностранцев К. А. О домусульманской культуре Хивинского оазиса.—Журнал Министерства народного просвещения, 1911, с. 284.

[6] Якубовский А. Ю. Городище Миздакхан.— Записки коллегии востоковедов при Азиатском музее АН СССР. Т. 5. Л., 1930.

С. П. Толстовым, были получены ценные сведения о жизни древнего Хорезма, позволившие по-новому осветить его историческое прошлое[7].

Анализ памятников материальной культуры дает неоспоримые свидетельства древности и высокого развития цивилизации этого государства. Они согласуются с указаниями средневековых восточных авторов и, в частности Абу Райхана Беруни, относившего начало летосчисления хорезмийцев к 1292 г. до н. э.[8]

Важные выводы были сделаны относительно античной истории Хорезма. В частности, С. П. Толстов в 1960 г., говоря о классическом периоде хорезмийской античности, называемом им «кангюйским» (IV в. до н. э.— I в. н. э.), утверждал, что в это время «материальная культура Хорезма достигает расцвета и характеризуется значительным своеобразием. Она является одной из тех локальных культур, которые сложились к этому времени на базе... единой, в основных чертах архаической культуры ираноязычных племен Средней Азии, Афганистана и Ирана»[9]. К «кангюйскому» периоду С. П. Толстов относит городища Джанбас-кала, Кургашин-кала, Базар-кала, Кюнерли-кала, Кой-Крылган-кала и др., которые были исследованы экспедицией к 1960 г.

Археологические материалы в сочетании с сообщениями письменных источников доказывают, что и в период средневековья Хорезм продолжал оставаться мощным экономическим и культурным очагом на Востоке.

Средневековые историки упоминают о больших, хорошо укрепленных городах Хорезма — его древней столице Кят (сейчас г. Бируни), Гургандже (современный г. Куня-Ургенч), Миздакхане, Даргане, Хазараспе, Замахшаре и др. Обнаруженные археологами развалины многочисленных крепостей с многоэтажными дворцами и другими постройками могут служить подтверждением этих указаний[10].

Советские исследователи, изучая имеющийся материал, приходят к интересным выводам относительно городской жизни средневекового Хорезма. Так, С. П. Толстов высказал и проводил в своих работах мысль о том, что в VII—VIII вв. она переживала упадок, города почти полностью исчезли, а в VIII—IX вв. начали слагаться вновь как торгово-ремесленные посады вокруг замков феодалов. Новые данные в значительной мере меняют этот взгляд[11]. Несомненно, однако, что в средние века существовали

---

[7] Толстов С. П. Древний Хорезм. М., 1948. Толстов С. П. По следам древнехорезмийской цивилизации. М.—Л., 1948. Толстов С. П. По древним долинам Окса и Яксарта. М., 1962.

[8] Бируни. Памятники минувших поколений, с. 47.

[9] Толстов С. П. По древним долинам Окса и Яксарта, с. 117.

[10] Толстов С. П. По древним долинам Окса и Яксарта. Воронина В. Л. Древняя строительная техника Средней Азии. Архитектурное наследство, 1953, № 3.

[11] Подробнее см.: Беленицкий А. М., Бентович И. Б., Большаков О. Г. Средневековый город Средней Азии. Л., 1973, с. 7, 171 и др.

центры активной городской жизни, объединявшие ремесленников, купцов, художников, скульпторов.

Имеются сообщения о древней столице Хорезма — г. Кяте, который располагался на правом берегу Амударьи. В центре находилась крепость — Фил (или Фир), описание которой мы находим у Беруни. Он пишет, что этот огромный замок, построенный в начале IV в., был окружен тремя рядами высоких стен и виднелся на расстоянии десяти миль[12]. По словам Беруни, бурная Амударья постепенно разбила и разрушила эту крепость, унося ее с собой каждый год «по кускам»[13]. Постепенно река смывала Кят и в конце X в. столица государства была перенесена в Гургандж. Раскопки, проводившиеся в 1952 г. на его территории (городище Куня-Ургенч), показали, что после полного разрушения этого города Тимуром был восстановлен квартал Таш-кала, который просуществовал до XVII в., когда население было переведено в новый Ургенч, находящийся близ Хивы[14]. Впервые древний Гургандж упоминается в китайских источниках, датируемых началом нашей эры[15].

Наиболее ранние сведения о Хиве относятся к X в. — о ней упоминает известный арабский географ ал-Мукаддиси как об обширном городе на краю пустыни, расположенном на берегу канала. Археологи обнаружили в наиболее древней части города, Ичан-кале, представлявшей некогда его крепость, остатки сооружений IX—X вв.[16]

Как и в других районах Средней Азии, в Хорезме уже в древности высокого развития достигли ремесла и, в частности, керамическое производство[17]. При раскопках найдены замечательные образцы прикладного искусства, великолепные произведения древних художников и скульпторов.

Хорезмийцы вели оживленную торговлю с другими странами — Индией и Китаем, государствами Ближнего Востока, Кавказа, Восточной Европы. В многочисленных литературных источниках отмечается, что хорезмийские купцы совершали далекие путешествия, свидетельствующие об их предприимчивости и любознательности. Они торговали мехами, скотом, рыбой. Среди вывозившихся товаров отмечаются также замечательные луки: натягивать их было под силу только очень сильным людям[18].

На базе искусственного орошения в Хорезме возникло развитое сельское хозяйство. При археологических раскопках обнару-

---

[12] Имеется в виду арабская миля, равная ~ 1973 м.

[13] Беруни. Памятники минувших поколений, с. 48.

[14] Толстов С. П. По древним долинам Окса и Яксарта, с. 269.

[15] Якубовский А. Ю. Развалины Ургенча. Л., 1930.

[16] Пугаченкова Г. А. Термез. Шахрисябз. Хива. М., 1976, с. 109—110.

[17] Тереножкин А. И. О древнем гончарстве в Хорезме.— Изв. Узб. филиала АН СССР. Т. 6. Ташкент, 1940. Керамика Хорезма. Труды Хорезмской археолого-этнографической экспедиции. Т. 4. М., 1959 и др.

[18] Иностранцев К. А. О домусульманской культуре Хивинского оазиса, с. 297, 306.

жены семена зерновых и бобовых культур, косточки фруктов, сохранившиеся с VIII в.[19]

О культурных достижениях хорезмийцев свидетельствует письменность, существовавшая у них в весьма отдаленную эпоху: памятники этой письменности, найденные археологами, относятся к IV—III вв. до н. э.[20] Это — документы на коже и дереве из царского архива, обнаруженные в развалинах дворца в городище Топрак-кала[21], коллекции документов из других раскопок на территории Хорезма. Дешифровка открытых памятников дает важный материал для истории культуры народов Средней Азии в домусульманский период[22].

Достоверных сведений о развитии точных наук у древних хорезмийцев не сохранилось. Но поскольку история научной мысли находится в неразрывной связи с социально-экономической и культурной историей общества, естественно думать, что основы этих наук в Хорезме, как и в других областях Средней Азии, были заложены уже в глубокой древности. Без определенных научных познаний вряд ли можно было добиться тех успехов в строительной технике, торговле, ремесле, которые были здесь достигнуты.

В отношении точных наук многочисленные подтверждения этому можно найти, если проанализировать сложные технические задачи, которые приходилось решать в связи с сооружением каналов, возведением крепостей и многоэтажных дворцов, с особенностями караванной торговли и т. д. Такие задачи возникали, например, при нивелировке поверхности или во время путешествия по пустыне (необходимость ориентироваться на местности). Решение их требовало не только системы практических навыков в области геометрии и механики, но и определенных теоретических обобщений. Достигнутые при этом успехи позволяют говорить о значительном развитии в Средней Азии до IX в. вычислительного и измерительного искусства.

Наиболее существенно характер экономики должен был сказаться на состоянии астрономических представлений народов Средней Азии. Потребности ирригационного земледелия, как известно, всегда вызывали у людей особый интерес к наблюдению Солнца и звезд: периодичность видимого движения светил сопоставлялась с сезонными изменениями погоды, с разливом рек и

---

[19] Воробьева М. Г. Из истории древнего Хорезма.— Советская археология, 1958, № 1.

[20] Толстов С. П. Хорезмская археологическая экспедиция (1940 г.).— Краткие сообщения Института истории материальной культуры АН СССР. Т. 12, 1946. Семенов А. А. Письменности, существовавшие на территории Средней Азии.— Изв. Тадж. филиала АН СССР, 1946, № 12. Фрейман А. А. Хорезмийский язык. М., 1951.

[21]. Топрак-кала. Труды Хорезмской археолого-этнографической экспедиции. Т. XII. М., 1981.

[22] Гудкова А. В., Лившиц В. А. Новые хорезмийские надписи из некрополя Ток-Калы и проблема «хорезмской эры».— Вестник Каракалпакского филиала АН УзССР. Вып. 1 (27). Нукус, 1967.

т. д., помогая предсказывать эти явления, что было первейшей жизненной необходимостью. Если обратить внимание на несомненную аналогию между природными и экономическими условиями в Средней Азии и в древних государствах Междуречья — Египте и Вавилоне, по праву считающихся родиной астрономической науки, то вывод о древности начатков астрономии у среднеазиатских народов представляется вполне естественным. Он находит вещественное подтверждение благодаря изучению имеющихся исторических источников и памятников материальной культуры.

Свидетельством определенных успехов астрономии на раннем этапе развития науки в Средней Азии могут служить астрологические представления, широко распространенные в древнем Хорезме и в Согде уже к началу нашей эры. Астрология, базировавшаяся на наблюдении светил, в известном смысле явилась родоначальницей научной астрономии, так как признание воздействия звезд на жизнь человека давало веский стимул к их изучению. Как и в Древнем Вавилоне (где при раскопках обнаружены тексты астрологического содержания, датированные четвертым тысячелетием до н. э.), в Средней Азии астрологией занимались служители религиозного культа. Их астрономические познания отражены в письменных памятниках зороастрийской и манихейской религий. Кроме того, сейчас высказано вполне обоснованное предположение о существовании в Средней Азии определенного местного культа, основанного прежде всего на почитании Солнца, Луны и пяти планет[23].

Наиболее ценные сведения о начальном этапе развития астрономии в Средней Азии получены археологами. Они обнаружили на территории Хорезма и Согда подлинные документы календарного содержания, подтверждающие сообщение Абу Райхана Беруни, который в «Памятниках минувших поколений» подробно описал календарь древних хорезмийцев и согдийцев и показал его отличия от календарей других народов. Возникновение календаря, необходимого при планировании цикла сельскохозяйственных работ в зависимости от сезонных изменений в природе, доказывает, что в III—VII вв. астрономия в среднеазиатских государствах уже достигла определенной самостоятельности по отношению к религиозным культам.

Важнейшее значение для истории астрономии в Средней Азии имеет исследование археологических памятников, представляющих собой древние астрономические наблюдательные пункты. К ним относится замечательный памятник культуры древнего Хорезма IV в. до н. э.— IV в. н. э. Кой-Крылган-кала[24]. Его цен-

---

[23] Беленицкий А. М., Бентович И. Б., Большаков О. Г. Средневековый город Средней Азии, с. 124—127.

[24] Кой-Крылган-кала — памятник культуры Хорезма IV в. до н. э.— IV в. н. э. Труды Хорезмской археолого-этнографической экспедиции. Т. 5. М., 1967.

тральное здание, имеющее форму цилиндра с диаметром 42 м, по всей видимости, выполняло одновременно функции храма и своего рода астрономической обсерватории; в пользу такого предположения говорят и обнаруженные на месте раскопок осколки керамических изделий, которые, вероятно, могли играть роль астрономического инструмента, подобного плоской астролябии[25].

Приведенные выше данные в сопоставлении с тем фактом, что народы среднеазиатских государств издавна находились в тесном торговом и экономическом общении со странами с высокоразвитой астрономией, могут служить веским доказательством достаточно высокого уровня развития астрономических знаний в Средней Азии к VIII в., т. е. ко времени захвата ее арабами и включения в состав арабского халифата.

Мы привели краткий очерк истории культуры и науки Хорезма до VIII в., чтобы яснее представить условия, в которых проходил начальный период жизни Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми. Можно думать, что во второй половине VIII в. древние культурные и научные традиции продолжали сохранять свою силу. К тому же следует учесть, что Хорезм был тесно связан экономически с соседними народами, а это предполагало и обмен научными идеями с сопредельными государствами Средней Азии — с Ираном, Индией, а возможно, и Китаем.

Естественно предположить, что ал-Хорезми воспринял прежде всего те познания в области математики и астрономии, которые соответствовали общему образовательному уровню на его родине. По всей вероятности, прежде чем покинуть ее, он уже сформировался как ученый и, возможно, приобрел известность.

Скудость сохранившихся сведений об ал-Хорезми не позволяет восстановить сколько-нибудь точно его биографию. Неизбежны допущения и предположения, но они, конечно, должны быть максимально обоснованными. Для этого следует исходить из известных фактов, касающихся либо самого ал-Хорезми, либо личностей, связанных с ним.

Такой личностью был ал-Ма'мун, сын халифа Харуна ар-Рашида, вначале являвшийся его наместником в Хорасане, а впоследствии (в 813 г.) отвоевавший у своего брата ал-Амина право на наследование престола. Как наместник халифа, он избрал резиденцией Мерв и провел в этом городе долгое время — с 809 по 818 г., до переселения в Багдад.

Мерв — один из наиболее значительных городов Мервского оазиса (сейчас Марыйская область Туркменской ССР), на территории которого в древности находилось мощное государство Маргиана. Крупнейшим центром экономической и культурной жизни Средней Азии он оставался и в средние века. Археологическое

---

[25] Воробьева М. Г., Рожанская М. М., Веселовский И. Н. Древнехорезмийский памятник IV в. до н. э. Кой-Крылган-кала с точки зрения истории астрономии.— В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. X. М., 1969, с. 15—34.

изучение развалин средневекового Мерва (в окрестностях г. Байрам-Али) дало чрезвычайно важный материал для изучения этого исторического периода[26].

Мерв находился на перекрестке торговых путей, соединявших различные районы Средней Азии и Ирана[27], и играл поэтому важную экономическую роль. Не меньшее значение он имел и в политическом отношении. Именно здесь в 40-х годах VIII в. находился центр антиомейядского движения, которое возглавлял военачальник Абу Муслим; в результате восстания власть в халифате перешла к династии Аббасидов.

В начале IX в. Мерв был фактически второй столицей государства, где правил ал-Ма'мун, хотя и провозглашенный халифом в 813 г., но продолжавший борьбу за власть еще пять лет. По словам О. Г. Большакова, «ал-Ма'мун смог свергнуть ал-Амина и воцариться в Багдаде только с помощью феодалов Хорасана и Мавераннахра, которые вместе с ним торжественно вошли в столицу халифата. В Багдаде возникли целые кварталы, заселенные воинами из хорезмийских, согдийских, ферганских и других отрядов»[28].

Ал-Ма'мун покровительствовал ученым и литераторам, славился интересом к древнегреческим сочинениям, и время его правления (813—833 гг.) считается периодом процветания науки. Эти склонности проявились у него, по-видимому, до переезда в Багдад. Поэтому, как отмечалось выше, нельзя не согласиться с предположением о том, что уже в Мерве вокруг ал-Ма'муна объединилась группа среднеазиатских ученых, разделявших его научные интересы и позднее переселившихся вместе с ним в Багдад. К ним, очевидно, принадлежал и ал-Хорезми.

Багдад, основанный в 762 г. вторым халифом династии Аббасидов ал-Мансуром, в VIII—IX вв. был крупнейшим центром интеллектуальной жизни Ближнего и Среднего Востока. Он подробно описан средневековыми историками. Сообщаемые ими сведения позволили осветить ход строительства города, воссоздать его первоначальный план, составить представление о нравах жителей столицы и обычаях того времени. Ясная картина жизни Багдада, современного ал-Хорезми, дана, например, в вышедшей в 1877 г. книге А. Кремера об истории культуры Востока при халифах[29],

---

[26] Пугаченкова Г. А. Старый Мерв. (Путеводитель по городищам и памятникам). Ашхабад, 1960. Массон М. Е. Из работ Южно-Туркменской археологической комплексной экспедиции Академии наук Туркменской ССР в 1962 г.— Изв. АН ТуркмССР, 1963, № 3. Куренной В. Н. К истории Старого Мерва.— Памятники Туркменистана, 1970, № 3 (10).

[27] Массон М. Е. Средневековые торговые пути из Мерва в Хорезм и Мавераннахр (В пределах Туркменской ССР). Труды Южно-Туркменской археологической комплексной экспедиции. Т. XIII. Ашхабад, 1966.

[28] Большаков О. Г. Город в конце VIII — начале XIII вв.— В кн.: Беленицкий А. М., Бентович И. Б., Большаков О. Г. Средневековый город Средней Азии. Л., 1973, с. 133.

[29] Kremer A. Culturgeschichte des Orients unter den Chalifen. Wien, 1877.

а позднее — в специальном исследовании Ле Стренджа, посвященном описанию Багдада периода Аббасидов в арабских и персидских источниках того времени[30].

Придя к власти после падения Омейядов, новая династия позаботилась о создании укрепленной столицы, населенной приверженцами и тщательно охраняемой. Было выбрано место на берегу Тигра в центре богатой, плодородной области, где пересекались важнейшие торговые пути Ближнего Востока, где издавна процветало сельское хозяйство и ранее находились такие крупные города, как Вавилон, Селевкия и др. Для строительства, как свидетельствуют письменные источники, были привлечены ремесленники, землемеры, зодчие из Сирии, Ирана и других районов халифата.

Городу придали необычную по тем временам форму круга с диаметром, равным ~ 2 км. Точно рассчитанный план сначала был отмечен на земле, а затем зафиксирован: вдоль проведенных линий расположили горючий материал и подожгли его. По оставшемуся четкому следу укладывались толстые стены из традиционного для этих мест материала — земляных кирпичей крупного размера.

Город был окружен двойной стеной с четырьмя равноотстоящими воротами, направленными на север, юг, запад и восток. Они имели прочные запоры. Согласно сообщениям историков, эти железные ворота были настолько массивными, что привести их в движение могло только несколько человек одновременно[31]. Ворота увенчивались позолоченным куполом, в котором находилось помещение для стражи. Вымощенная камнем прямая дорога вела от каждых ворот к центру города. Его занимала главная площадь, также имеющая круглую форму и обнесенная стеной с четырьмя воротами. Среди площади размещались дворец, мечеть и казармы дворцовой стражи, а вокруг — жилища приближенных халифа и административные помещения. Пространство между внешними стенами и центральной площадью было разделено на жилые кварталы, изолированные друг от друга. К каждым из внешних ворот примыкал обособленный пригород со своим базаром, мечетями, банями. Город был окружен садами. Вода подавалась по каналам, идущим от Тигра, Евфрата и их притоков.

Круглый город ал-Мансура сильно пострадал во время междоусобной войны, и ал-Ма'мун после переезда в Багдад жил вне его стен — в квартале на восточном берегу Тигра[32].

При ал-Ма'муне Багдад продолжал процветать. Из самых отдаленных областей халифата сюда съезжались представители разных национальностей и профессий. Город, многолюдный и оживленный, славился и своими базарами.

---

[30] Le Strange G. Baghdad during the Abbaside caliphate from contemporary Arabic and Persian sources. London, 1900.

[31] Kremer A. Цит. соч., с. 49.

[32] Le Strange G. Цит. соч., с. 310.

Здесь в это время была сосредоточена вся государственная власть. После смерти ал-Ма'муна, в 836 г. резиденцию халифа перевели в Самарру, расположенную примерно в 100 км севернее Багдада, и только в 892 г. он вновь стал столицей. Управление огромным государством ставило перед правителями много трудных хозяйственных и административных вопросов, связанных с торговлей, финансами, с усовершенствованием налоговой и юридической систем. Необходимость решать эти вопросы явилась важным стимулом для развития науки в странах Востока. Было ясно, что наука нужна для осуществления государственных, торговых и военных замыслов халифов, которые оказывали ей поэтому всемерную поддержку[33].

Бурное развитие науки происходило на фоне общего культурного подъема в халифате, в процессе унификации культуры разных его районов. Созданию единой культуры от Багдада до Ферганы способствовали, по словам О. Г. Большакова, «условия единого государства, единство религии (игравшее в средние века едва ли не бо́льшую роль, чем единство национальное), разнообразные и дальние экономические связи внутри этого государства и т. д. Многочисленные торговые поездки, странствия ученых «в поисках знания» расширяли кругозор людей и способствовали переносу достижений ремесла, науки и искусства»[34]. Научное общение народов облегчалось благодаря единому государственному языку, которым стал арабский язык, сблизивший между собой отдаленные области с различными традициями и культурным уровнем.

Уже во второй половине VIII в. проявилось внимание к древнегреческому научному наследию, особенно в области точных наук — математике, астрономии, геодезии, математической географии. Оно выразилось прежде всего в сборе, переводе и изучении античных трудов[35]. Центром переводческой деятельности стал Багдад. Эта работа, начатая при халифе ал-Мансуре, продолжалась и активизировалась во время правления его внука Харуна ар-Рашида и особенно при ал-Ма'муне.

Научные исследования в Багдаде приобрели в этот период небывалый до того размах. При ал-Ма'муне был основан «Дом мудрости», превратившийся в центр крупной научной школы, которая объединяла многих выдающихся ученых того времени, привлеченных в столицу халифата из разных его областей. В «Доме мудрости» находилась богатая библиотека, состоявшая

---

[33] Бартольд В. В. Ислам. Избранные сочинения. Т. VI. М., 1966. Мец А. Мусульманский ренессанс. М., 1966. Le Bon G. civilisation arabe. Paris, 1884. Sarton G. Introduction to the history of science, vol. I, Baltimore, 1937, Risler J. C. La civilisation arabe. Paris, 1955. Landau R. Arab contribution to civilization. San Franciscko, 1958.

[34] Большаков О. Г. Цит. соч., с. 133.

[35] Подробнее см.: Матвиевская Г. П. К истории математики Средней Азии. Ташкент, 1962. Матвиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Ташкент, 1967.

из древних книг на различных языках и постоянно пополнявшаяся. Средневековые историки единодушно подтверждают, что ал-Ма'мун посылал специальные научные посольства к императору Византии для приобретения рукописей трудов Платона, Аристотеля, Евклида, Птолемея, Гиппократа, Галена[36].

Большое внимание уделялось астрономическим наблюдениям, цель которых состояла в проверке и уточнении данных, полученных из древнегреческих и индийских сочинений. При ал-Ма'муне (829 г.) была построена обсерватория в багдадском пригороде Шаммасиййа. По его инициативе проводились важные геодезические работы, в результате которых была непосредственно измерена длина градуса земного меридиана. Они имели целью уточнить размеры Земли, найденные Эратосфеном (ок. 276—194 гг. до н. э.), так как оказалось неизвестным соотношение между древнегреческими и арабскими единицами длины.

Роль ал-Ма'муна в развитии науки его времени отметил во введении к алгебраическому трактату ал-Хорезми. Он писал: «Мне придало смелости то, что Аллах, даровав имаму ал-Ма'муну сан халифа, доставшийся ему по наследству, оказав ему милость, облачив его и украсив этим саном, вместе с тем вложил в него любовь к науке и стремление приближать к себе ученых, простирая над ними крыло своего покровительства и помогая им в разъяснении того, что для них неясно и в облегчении того, что для них затруднительно» [1, с. 26; настоящее издание, с. 21].

Неизвестно, насколько серьезным было в действительности личное участие ал-Ма'муна в научной работе. Но не вызывает сомнения, что ученые, работавшие при «Доме мудрости», внесли огромный вклад в математику, астрономию и другие науки.

III. УЧЕНЫЕ ЭПОХИ АЛ-ХОРЕЗМИ

Чтобы составить представление о деятельности ал-Хорезми в Багдаде, следует привлечь имеющиеся в литературе сведения об ученых, которые работали здесь в его время. Обзор их сочинений помогает понять, какие проблемы в науке того периода являлись наиболее актуальными, что, в свою очередь, позволяет сделать выводы, существенные для оценки творческого наследия ал-Хорезми.

Багдадская научная школа возникла одновременно с самим городом. Уже в измерениях, связанных с его закладкой и строительством, участвовали, как свидетельствуют источники, выдающиеся ученые своего времени ал-Наубахт (ум. ок. 777 г.) [289, с. 3], Машаллах ибн Асари (ум. ок. 815 г.) [там же, с. 5—6], Абу Хафс 'Умар ибн ал-Фаррухан ат-Табари (ум. ок. 815 г.)

---

[36] Eche Y. Les bibliothèques arabes publiques et semipubliques au Moyen Age. Damas, 1967, p. 28—41. Mazahéri A. So lebten die Muselmanem im Mittelalter. Stuttgart, 1957, p. 174.

[там же, с. 7—8], славившиеся своими астрономическими и астрологическими трудами.

Важная часть научной работы состояла в то время в переводе древнегреческих и персидских трудов. Первые арабские переводы появились уже при Омеййадах, однако никакой творческой работы в этот период по существу не велось [203, с. 378]. Положение изменилось при Аббасидах. Во время халифа ал-Мансура переводческая деятельность значительно расширилась. Известным переводчиком с греческого языка, автором переводов сочинений Аристотеля, Гиппократа, Галена, Птолемея, был, например, Абу Йахйа ибн Батрик (ум. ок. 800 г.).

С персидского на арабский язык переводил упомянутый выше астроном ‘Умар ибн ал-Фаррухан ат-Табари, опиравшийся на сочинения эпохи Сасанидов. К ним относились, в частности, астрономические таблицы (зидж), составленные в VII в. и носившие название «Шахский зидж» или «Зидж Шахриара». Он был переведен с пехлеви около 790 г. (автор перевода, вероятно, Абу-л-Хасан ‘Али ибн Зийад ат-Тамими) и оказал большое влияние на многочисленные зиджи более позднего времени, которые составили важный раздел средневековой арабоязычной астрономической литературы [195, с. 129—130; 203, р. 378].

С индийскими сочинениями багдадские астрономы познакомились, как гласит легенда, через одного из членов посольства Индии к халифу ал-Мансуру [289, с. 4—5]. Эту легенду подтверждает и Беруни в «Индии» [33, с. 362]. Индийский ученый по имени Канка (или Манка [289, с. 4]) привез с собой в Багдад сочинение — сиддханту — выдающегося астронома и математика VII в. Брахмагупты. Перевод его с санскрита на арабский язык осуществил один из виднейших представителей багдадской научной школы того времени Мухаммад ибн Ибрахим ал-Фазари (ум. ок. 880 г.) [289, с. 4—5]. На основе указанного перевода был составлен зидж, получивший название «Синдхинд» и сыгравший важную роль в пропаганде индийских астрономических методов.

Ал-Фазари и другой крупный ученый того времени Йа‘куб ибн Тарик (ум. ок. 796), который присутствовал при дворе ал-Мансура во время приема упомянутого выше посольства Индии [289, с. 4; 195, с. 134], положили начало глубокому изучению индийской астрономии, привлекавшей в Багдадской научной школе не меньшее внимание, чем греческая.

Астрономия занимала при первых Аббасидах главенствующее место среди научных дисциплин. Ее результаты находили широкое применение в разных областях практической жизни людей (определение точного времени и координат географических пунктов, ориентировка на местности в пустыне, нахождение направления Мекки и т. д.). Немалую роль для развития астрономии играла астрология, которая вызывала в то время повсеместный интерес.

С целью проверки греческих и индийских астрономических таблиц проводились непосредственные наблюдения звездного неба. В разных городах халифата строились обсерватории. Большое внимание уделялось конструированию и усовершенствованию астрономических инструментов. Появились многочисленные трактаты об устройстве и применении астролябии, армиллярной сферы, о солнечных часах разного вида. Создание первой в странах ислама астролябии средневековые историки приписывают отцу Мухаммада ал-Фазари — Ибрахиму ибн Хабибу ибн Сулайману ал-Фазари, автору нескольких астрономических сочинений [289, с. 3].

При Харуне ар-Рашиде и особенно при ал-Ма'муне работы, начатые при ал-Мансуре, продолжались и расширялись. Не только халифы покровительствовали наукам, но и их приближенные — семья Бармакидов, члены которой занимали высшие посты при дворе, везир ал-Ма'муна Абу-л-Аббас ал-Фадл ибн Сахл ас-Серахси (ум. в 818 г.), сам занимавшийся астрономией и др.

Еще больше внимания уделялось переводам трудов классиков античной науки. В этот период в Багдаде работал знаменитый переводчик математической и астрономической литературы Хаджжадж ибн Йусуф ибн Матар (ок. 786 — ок. 835) [289, с. 9]. Ему принадлежал арабский перевод «Алмагеста» Птолемея и «Начал» Евклида. В «Фихристе» ан-Надима упоминаются две его версии «Начал», из которых первая называлась «харуновой» в честь Харуна ар-Рашида, а вторая, посвященная ал-Ма'муну,— «ма'муновой».

Большое значение для освоения греческого научного наследия имела комментаторская деятельность астрономов и математиков этого времени. Почти к каждому из классических сочинений было написано несколько комментариев. Разъясняя древнюю теорию, восточный автор часто приходил к оригинальному решению вопроса. Нередко комментарии играли роль учебников, где изложение велось более упрощенно.

Очень яркую характеристику трудов древних авторов и комментаторов этих трудов мы находим у ал-Хорезми во вступительном разделе алгебраического трактата. В его словах отражена та высокая оценка, которую давали современные ему ученые наследию своих предшественников. Ал-Хорезми пишет: «Ученые прошлых времен и ушедших народов не переставали писать книги по различным разделам науки и отраслям философии, имея в виду тех, кто будет после них, рассчитывая на награду соразмерно своим силам и надеясь, что они будут вознаграждены славой и памятью и им достанется из правдивых уст похвала, по сравнению с которой ничтожны взятые на себя труды и тяготы, принятые ими для раскрытия сокровенных тайн науки» [1, с. 25; настоящее издание, с. 20].

Ал-Хорезми отмечает не только ученых, сочинения которых знаменовали новый шаг в развитии науки, но и тех, кто комментировал и разъяснял эти сочинения: «Один из них — пишет он,— опередил других в том, что не разрабатывалось до него, и оставил это в наследие тем, кто придет после него. Другой комментирует труды его предшественников и этим облегчает трудности, открывает закрытое, освещает путь и делает это более доступным. Или же это человек, который находит в некоторых книгах изъяны и соединяет разъединенное, думая хорошо о своем предшественнике, не заносясь перед ним и не гордясь тем, что сделал» [там же].

Среди крупных математиков и астрономов, работавших в Багдаде одновременно с ал-Хорезми, в средневековых источниках названы Йахйа ибн Аби Мансур (ум. ок. 830—832 гг.) [289, с. 8—9], Ахмад ибн Мухаммад ибн Қатир ал-Фаргани (ум. после 860 г.) [там же, с. 18—19], Ахмад ибн Мухаммад ан-Нахаванди (ум. ок. 835—845 гг.) [там же, с. 10], Халид ибн 'Абд ал-Малик ал-Мерверруди (1-я половина IX в.) [там же, с. 11—12], 'Аббас ибн Са'ид ал-Джаухари (1-я половина IX в.) [там же, с. 12], Ахмад ибн 'Абдаллах, известный под именем Хабаш ал-Хасиб ал-Марвази (ум. ок. 825—835 гг.) [там же, с. 12—13], 'Али ибн 'Иса ал-Астурлаби (IX в.) [там же, с. 13], Абу-л-Фадл 'Абд ал-Хамид ибн Васи ибн Турк ал-Хуттали (IX в.) [там же, с. 17—18] и др.

Они занимались одновременно астрономией и математикой, так как в рассматриваемый период границу между этими науками провести было трудно. Многие из них проводили астрономические наблюдения в разных городах халифата, в том числе и в самом Багдаде, где, как упоминалось, в 829 г. по приказу ал-Ма'муна была построена обсерватория около городских ворот ал-Шаммасийа. В это время были составлены зиджи, на которых основывались в своих исследованиях астрономы более позднего времени. Авторами наиболее ранних из них были Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми, Йахйа ибн Аби Мансур, Хабаш ал-Хасиб.

Важное значение имели геодезические исследования, проведенные учеными Багдадской школы. Представление о том, что Земля имеет форму шара, сложилось еще в середине I тысячелетия до нашей эры у греческих ученых. Они поставили задачу — вычислить размеры этого шара и, в частности, определить длину его меридиана. Уже в древности были разработаны некоторые методы решения указанной задачи.

Теоретическую основу для научного определения длины окружности Земли впервые дал Эратосфен (ок. 276/194 гг. до н. э.). Суть его метода состоит в следующем: на поверхности Земли измеряется расстояние между двумя пунктами, находящимися на одном меридиане. В этих пунктах одновременно определяется высота Солнца в полдень и находится разность полученных значений. Она выражает в градусах величину дуги меридиана между пунктами. Так как длина этой дуги известна, то, зная, какую часть окружности она составляет, можно найти длину всей окружности. Одним из пунктов, которые выбрал Эратосфен, была Александрия, вторым — город Сиена (теперь Ассуан). Он знал, что расстояние между ними равно 5000 стадиям[37], а найденная им величина дуги меридиана составляла $7\frac{1}{5}^\circ$, т. е. $\frac{1}{50}$ долю длины окружности. Он заключил, что, следовательно, длина окружности Земли равна 250 000 стадиям.

Методы, применявшиеся древними греками для определения размеров Земли, а также полученные ими результаты были известны багдадским ученым, работавшим при дворе халифа ал-Ма'муна. Но они не могли положить эти результаты в основу своих вычислений, потому что не знали соотношения между стадией и единицами длины, применявшимися в арабских странах. Это объяснялось тем, что в древности не было строго установленной длины стадии и, как теперь известно, в разных районах применялись различные единицы измерения с таким названием: насчитывалось до шести видов стадий, в большей или меньшей степени отличавшихся друг от друга.

Так как данные, полученные греческими учеными, доверия не вызывали, а точное знание длины земной окружности требовалось для решения многих теоретических и практических задач, было решено произвести независимые измерения. Их описал в своей «Геодезии» Абу Райхан Беруни [34, с. 211].

По приказу ал-Ма'муна искусные ремесленники специально изготовили соответствующие инструменты, а ученые занялись поисками места для проведения землемерных работ. В 827 г. была выбрана гладкая равнина около города Синджара, расположенного западнее Мосула. Здесь был определен пункт, в котором измерили полуденную высоту Солнца. Затем ученые разделились на две группы, из которых одна двинулась к северу, а другая — к югу. Первую возглавил Халид ал-Мерверруди. Второй группой руководил математик и астроном 'Али ибн 'Иса ал-Астурлаби. Двигаясь строго по меридиану, ученые измеряли пройденный путь и полуденную высоту Солнца, по которой определяется широта места. Каждая группа продвинулась на 1 градус широты и нашла определенное значение длины градуса земного меридиана. Оказалось, однако, что эти значения несколько расходились: согласно данным, полученным одной группой, один градус меридиана Земли равен 56 милям[38], вторая же группа нашла, что эта величина несколько больше, а именно, $56\frac{2}{3}$ мили.

Следует отметить, что для истории измерения Земли чрезвычайно важен тот факт, что багдадские ученые впервые непосредственно измерили длину отрезка меридиана, в противоположность

---

[37] Эратосфенова стадия — единица длины, равная ≈ 158—185 м (в среднем 172 м).

[38] Арабская миля равна ≈ 1973 м. Соответствующее значение 1 градуса земного меридиана (110488 м) достаточно близко к современному (около 111 км).

Эратосфену, который сам производил соответствующие астрономические наблюдения, но не проверял данных о расстоянии между Александрией и Сиеной. Полученные ими результаты отличались большой точностью. Это подтвердилось в XIX в. благодаря археологическим раскопкам, во время которых был найден эталон длины арабского локтя[39].

Судя по всему, в этих работах, которые, по мнению современных исследователей, знаменовали начало нового этапа в истории геодезии, принимал участие и ал-Хорезми. Хотя в письменных источниках его имя особо не упоминается, но трудно допустить, что он мог остаться в стороне от работ, теснейшим образом связанных с тематикой его трудов. Поэтому биографы ал-Хорезми смело причисляют его к ученым, занимавшимся геодезическими измерениями.

При ал-Хорезми начали свою научную деятельность его младшие современники: уже упоминавшиеся братья Бану Муса, выдающийся философ и ученый Йа'куб ибн Исхак ал-Кинди (ум. ок. 873 г.), знаменитый переводчик Хунайн ибн Исхак ал-Ибади (809/810—873), крупнейший математик и астроном Абу 'Абдаллах Мухаммад ибн 'Иса ал-Махани (ум. ок. 874—884).

Таким образом, ал-Хорезми жил и работал в эпоху расцвета восточной науки, в среде выдающихся ученых средневековья. Но, оценивая значение этого периода истории человеческой мысли, известный исследователь Дж. Сартон назвал его «временем ал-Хорезми» [263, с. 543—550]. Тем самым он определил историческую роль ал-Хорезми, который был, по его мнению, «величайшим математиком своего времени и, если учесть все обстоятельства, одним из величайших во все времена» [там же, с. 545].

IV. ТВОРЧЕСТВО АЛ-ХОРЕЗМИ В ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЕ

Ал-Хорезми работал в тот период, когда происходило усвоение древнегреческого и индийского научного наследия и активно развертывалась самостоятельная творческая деятельность ученых Багдадской школы. Его труды показывают, что он находился в центре умственной жизни своего времени и занимался наиболее актуальными в то время вопросами математики и астрономии.

Выше отмечалось, что сведения о его сочинениях, которые приводятся в трудах восточных историков, не всегда совпадают. Поэтому исследователи были вынуждены тщательно анализировать эти сведения, сопоставлять их с сохранившимися рукописями трудов ал-Хорезми, их средневековых латинских переводов, а также ранних восточных и европейских обработок этих трудов.

Сейчас установлено, что ал-Хорезми был автором следующих сочинений:

---

[39] Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии. Ч. II. М., 1942, с. 421.

1) Трактат об индийской арифметике. Арабский оригинал его не сохранился; сочинение известно по раннему латинскому переводу (XII в.) [5, 25]. Оно было, по-видимому, озаглавлено: «Книга об индийской арифметике» или «Книга об индийском счете» (Кита̄б фӣ-л-х̮иса̄б ал-хинд). Существуют и другие мнения относительно первоначального названия, опирающиеся на указания разных средневековых авторов. Во всяком случае сейчас большинство согласно с тем, что хотя в упоминавшемся выше списке трудов ал-Хорезми из «Фихриста» ан-Надима названы два арифметических трактата («Об индийской арифметике» и «О сложении и вычитании»), речь идет об одном сочинении. Возможно, оно называлось «Книга о сложении и вычитании с помощью индийской арифметики» («Кита̄б ал-джам‘ ва-т-тафрӣк̣ би х̣иса̄б ал-хинд») [298, 300].

2) «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы» (кита̄б ал-мух̮тас̣ар фӣ х̮иса̄б ал-джабр ва-л-мук̣а̄бала). Знаменитый алгебраический трактат ал-Хорезми дошел до нас в арабской рукописи, переписанной в XIV в. (см. ниже).

3) «Астрономические таблицы (зӣдж)». Сочинение также не сохранилось в первоначальном виде, но известно по арабской обработке, которая была сделана в X в. жившим в Испании астрономом Масламой ал-Маджрити [20, 23], а также по многочисленным цитатам из него в трудах средневековых восточных авторов. Кроме того, существует составленный в X в. комментарий Ибн ал-Мусанны [9, 15], позволяющий вместе с обработкой ал-Маджрити восстановить первоначальный текст зиджа ал-Хорезми. Решению этой задачи поможет также исследование недавно обнаруженного комментария IX в., принадлежащего Ибн ал-Масруру [195, 197, 201].

4) «Книга картины Земли» (кита̄б с̣ӯрат ал-ард̣) сохранилась в уникальной арабской рукописи, находящейся в Страсбурге [18].

5) «Книга о построении астролябии» (кита̄б фӣ ‘амал ал-ас̣турла̄б) не сохранилась и известна только по упоминаниям о ней в «Фихристе» ан-Надима и в других источниках.

6) «Книга о действии с помощью астролябии» (кита̄б фӣ ‘амал би-л-ас̣турла̄б). Имеется единственная (неполная) арабская рукопись этого трактата [7], включенная в сочинение ал-Фаргани.

7) «Книга о солнечных часах» (кита̄б ар-рух̮а̄ма̄т) долго считалась утерянной. Недавно в Стамбуле была обнаружена рукопись сочинения. Русский перевод готовится к печати.

8) «Трактат об исчислении эры евреев» (риса̄ла фӣ истих̮ра̄дж та̄'рӣх̮ ал-йахӯд) — трактат о еврейском календаре, по содержанию примыкающий к зиджу ал-Хорезми, известен по единственной арабской рукописи [11, 196].

9) «Книга хроники» (кита̄б ат-та̄'рӣх̮), упоминающаяся в источниках, не сохранилась. О ее содержании существуют различ-

ные предположения и, в частности, считают [300], что в ней, вероятно, исторические события описывались с точки зрения астронома, как в известном сочинении андалузского ученого Ибн ал-Хаййата (ум. в 1055 г.). Исследователи полагают, что есть возможность реконструировать текст с помощью цитат из него, которые приводятся в сочинениях других авторов.

Делались попытки датировать сочинения ал-Хорезми, основываясь либо на приведенных в них конкретных (чаще всего астрономических) данных, либо на дополнительных косвенных соображениях. Так, К. Наллино [238, с. 487] пришел к выводу, что географический труд был написан вскоре после 816 г.; он исходил при этом из упоминания местности Киман, которая ничем не замечательна и могла заслуживать внимания только в связи со сражением, происшедшим там в указанном году.

Результаты такого рода изысканий обобщил Дж. Тумер [298], заключивший, что все основные сочинения ал-Хорезми написаны во время правления ал-Ма'муна. Точно датируется — 823/824 годом — трактат о еврейском календаре, так как в тексте есть соответствующее указание. «Книга хроники» была написана после 826 г.: ат-Табари приводит цитату из нее, содержащую описание событий этого времени. В арифметическом трактате ал-Хорезми ссылается на свою «Алгебру», откуда следует, что она была написана раньше, чем этот трактат.

В связи с изучением трудов ал-Хорезми перед историками науки, начиная с середины XIX в., вставали различные вопросы как частного, так и общего порядка. В их числе можно назвать следующие: 1) о возникновении и распространении на Востоке и в Европе десятичной позиционной системы счисления и основанной на ней «индийской» арифметики; 2) об истории «арабских» цифр; 3) об источниках «Алгебры» ал-Хорезми»; 4) об арабской математической терминологии; 5) о влиянии трудов ал-Хорезми на развитие арифметики и алгебры в Европе; 6) об источниках зиджа ал-Хорезми; 7) о роли ал-Хорезми в истории географической науки.

В настоящее время литература по каждому из названных вопросов весьма обширна. Обзор основных исследований будет дан ниже — в аннотациях к списку литературы. Вначале, однако, коротко остановимся на истории изучения научного наследия ал-Хорезми в Европе.

Сочинения ал-Хорезми стали известны в Европе уже в XII в. Они принадлежали к первым трудам по математике и астрономии, переведенным с арабского языка на латынь и заложившим основу развития этих наук в европейских странах. Переводом трудов ал-Хорезми занимались крупнейшие ученые того времени, работавшие в Испании: Аделард из Бата, Герардо Кремонский, Роберт Честерский, Иоанн Севильский.

Испания, завоеванная арабами в VIII в., стала в XII и XIII вв. главным пунктом проникновения восточной науки в Европу.

Здесь возникла большая школа переводчиков, которые в сравнительно короткий срок перевели на латинский язык наиболее важные сочинения классиков античности, сохранившиеся в арабских версиях, а также популярные труды восточных авторов по медицине, философии, математике, астрономии.

Одним из пионеров изучения математической и астрономической литературы на арабском языке был выдающийся ученый XII в. англичанин Аделард из Бата. Ему принадлежал, в частности, сыгравший огромную роль в развитии математики в Европе перевод арабской версии «Начал» Евклида. В 1126 г. Аделард перевел зидж ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити. Есть основания полагать, что Аделард является также автором двух сочинений, положивших начало распространению в Европе «индийской» арифметики. Это — «Книга введения Алхоризма в астрономическое искусство, составленная магистром А» [132] и главное — перевод арифметического трактата ал-Хорезми, который начинается словами «Algorithmi de numero indorum» [5].

Автор последнего перевода точно не установлен. Наряду с Аделардом из Бата, его приписывают другому знаменитому переводчику Герардо Кремонскому (1114—1187 гг.), долго работавшему в Испании. Среди сочинений, переведенных им с арабского языка,— труды Аристотеля и ал-Фараби по философии, медицинские произведения Галена, Гиппократа, Ибн Сины и ар-Рази. Но особенно велика его заслуга в распространении математических и астрономических знаний: он перевел на латынь многие труды классиков античной науки и восточных авторов. Ему принадлежит и один из двух осуществленных в XII в. переводов алгебраического трактата ал-Хорезми [103, 144, 210].

Второй перевод «Алгебры» выполнил в 1145 г. Роберт из Честера [184—186], видный ученый XII в. Оба перевода алгебраического трактата ал-Хорезми быстро приобрели популярность и долго служили учебными пособиями. Об этом свидетельствует большое число их рукописных копий, сохранившихся в европейских библиотеках.

Аделард из Бата перевел с арабского на латынь также зидж ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити [23]. В XII в. в Европе стала известна и другая версия зиджа, принадлежащая Ибн ал-Мусанне. Ее перевел на латинский язык Гуго из Санкталлы, а на древнееврейский — Ибн Эзра. На основании обработки зиджа ал-Хорезми в XII в. было составлено астрономическое сочинение Германа из Каринтии.

С XIII в. в Европе начался подъем математического творчества. Первым выдающимся европейским ученым, труды которого в течение трех последующих столетий оказывали решающее влияние на развитие математики, является живший в первой половине XIII в. Леонардо Фибоначчи, известный также под именем Леонардо Пизанского. Его знаменитая энциклопедия математических знаний «Книга абака» («Liber abaci») [207] свидетельствует о хорошем знакомстве автора с сочинениями ал-Хорезми. Он разъясняет принципы «индийской» арифметики и практической геометрии, решает задачи «алгебры и алмукабалы», придерживаясь того плана изложения, который стал традиционным у восточных математиков после ал-Хорезми. На полях алгебраического раздела рукописи Леонардо Пизанского есть прямая ссылка на ал-Хорезми [65, с. 85].

Широкое распространение получили сочинения XIII в. «Трактат об искусстве чисел» («Tractatus de arte numerorum») И. Сакробоско и «Песнь об алгорисме» («Carmen de algorismo») Александра де Виледье [65], посвященные «индийской» арифметике, которую начали называть именем ал-Хорезми в латинизированной форме: «алгоритм» или «алгорисм». Внедрение новой арифметики происходило постепенно, в борьбе между ее сторонниками — алгоритмиками и приверженцами старых вычислительных приемов «абацистами». Это название происходит от специального прибора — абака, напоминающего современные счеты, с помощью которого раньше производились все практические вычисления.

С течением времени первоначальное значение термина «алгоритм» начало забываться и ему часто стали придавать самые фантастические значения. Позднее исследователи, изучавшие средневековые латинские рукописи (М. Шаль, М. Кантор и др.), собрали целую коллекцию таких толкований слова «алгоритм» (см., например, [115, с. 267—268]). Считали, что оно происходит или от греческих слов «alleos» (чужой) и «goros» (исследование) и означает чужой способ исследования, или от «ares» (сила) и «ritmos» (число), или от греческого «algos», означающего белый песок, полагая, что вычисления должны были производиться на песке. Связывали этот термин и с именем человека: то ученого из Индии Алгоруса, то кастильского короля Алгора, то какого-то, якобы знаменитого, философа по имени Альгус.

Однако нельзя утверждать, как это иногда случается, что европейские ученые полностью забыли Мухаммада ибн Мусу ал-Хорезми. В сочинениях XVI в. встречаются указания на то, что «искусство счисления» получило свое название от имени «философа Алгорисма» [175]. Великие математики эпохи Возрождения Дж. Кардано (1501—1576 гг.) и Н. Тарталья (1500—1557 гг.), труды которых ознаменовали начало нового этапа истории алгебры (связанного с решением кубического уравнения), неоднократно называют создателем этой науки «Мухаммада, сына араба Мусы» (Mahomet Mosis Arabis filius). Кардано в своем знаменитом алгебраическом труде «Великое искусство» поставил ал-Хорезми на восьмое место в ряду двенадцати выделенных им величайших гениев человечества [123, с. 205].

Высоко оценил роль ал-Хорезми в развитии науки и выдающийся математик XVII в. Дж. Валлис (1616—1703 гг.) в своем

«Трактате об алгебре» [305], содержащем один из первых очерков истории этой дисциплины (см. [226, 243]).

Более основательные исследования о личности и трудах ал-Хорезми появились в XVIII в. В это время началась активная работа по каталогизации и изучению восточных рукописей, проявился интерес к арабским энциклопедиям и биобиблиографическим словарям, первые издания которых вышли из печати уже в XVII в. (например, сочинение Абу-л-Фараджа [94]).

Так, в каталоге математических рукописей Бодлеянской библиотеки, опубликованном в Оксфорде в 1697 г., указана ставшая впоследствии знаменитой арабская рукопись «Алгебры» ал-Хорезми, переписанная в XIV в. На это указание ссылается в 1742 г. И. Хейльброннер — автор одного из наиболее ранних общих курсов истории математики с древнейших времен до XVI в. [167, с. 615].

Подробное обсуждение некоторых вопросов истории алгебры мы встречаем в монументальной «Истории математики» Ж. Монтюкла (J. E. Montucla, 1725—1799), вышедшей первым изданием в Париже в 1758 г. В ней сказано, что «наиболее древними авторами по алгебре у арабов являются Мохаммед бен Муса и Тебит бен Кора» [226, с. 383]. Монтюкла ссылается на Кардано, считавшего, что первый из них открыл решение уравнений 2-й степени, но добавляет, что не знает, на каком основании. Он пишет, что алгебраический трактат «Бен Мусы имеется в рукописях во многих библиотеках, а прозвище «хорезмиец» (Covaresmien), которое носит этот аналитик, убеждает нас в том, что он — тот же, который жил при Алмамуне» [там же]. Относительно деятельности багдадской научной школы Монтюкла высказывается в высшей степени одобрительно: «Город Багдад вплоть до X в. был главной ареной астрономии у восточных народов. Этот город, столица халифов, был Афинами арабов. И среди многих школ, которые здесь существовали, одна относилась к астрономии» [там же, с. 364]. Он сообщает также, что ал-Хорезми составил «зидж Синд-Хинд» и тригонометрические таблицы [там же, с. 369]. Не мешает, кстати, отметить, что Монтюкла впервые упомянул об алгебраическом трактате Омара Хайяма, в котором рассматриваются кубические уравнения. Основываясь на заглавии рукописи этого трактата, привезенной с Востока известным арабистом Я. Гоолом (1596—1667 гг.) и хранившейся в Лейденской библиотеке, он первым высказал сомнение в том, что «сведения арабов не простирались далее уравнений второй степени».

Большое внимание алгебраическому трактату ал-Хорезми уделил в 1797 г. итальянский исследователь П. Коссали в книге, специально посвященной возникновению и развитию алгебры [128]. Заявив, что «относительно начала алгебры у арабов не вызывает сомнения, что Мухаммед ибн Муса, хорезмиец, был первым, кто научил их ей» [128, с. 219], он поставил вопрос об истоках алгебры ал-Хорезми. Этот вопрос, обсуждавшийся многими историками математики XIX—XX вв., продолжает интересовать и современных исследователей.

Таким образом, уже в XVIII в. имя ал-Хорезми часто упоминалось в научной литературе, а о его трудах было уже в то время составлено общее впечатление.

Однако серьезное изучение научного наследия ал-Хорезми началось только в XIX в., когда историки математики обратились к сохранившимся арабским и латинским рукописям его трудов, их средневековых европейских переводов или обработок. Несколько таких рукописей было постепенно обнаружено в разных библиотеках Европы. Вначале, как правило, исследователи давали общее описание рассматриваемой рукописи, которое служило основой для предварительных выводов о сочинении и его научной ценности. На следующем этапе работы можно было приступить к детальному изучению текста и анализу содержания трактата.

При исследовании средневековых сочинений научного содержания приходится преодолевать серьезные трудности, связанные как с расшифровкой рукописного текста, так и со специальной терминологией. Возможны разночтения, а некоторые места иногда, вообще, удается понять только с большим трудом и не сразу. Поэтому важнейшее значение имеет публикация полного текста, благодаря которой сочинение становится доступным широкому кругу ученых. Постепенно они выявляют ошибки переписчика и издателя и восстанавливают текст в первоначальном виде. Он ложится в основу дальнейших историко-научных исследований и переводится на современные языки. К первым арабоязычным сочинениям, которые были изучены таким образом, относились труды ал-Хорезми. Из них внимание специалистов привлекла вначале его «Алгебра». Арабская рукопись трактата, как сказано выше, описана в каталоге арабских рукописей Бодлеянской библиотеки, опубликованном в Оксфорде в 1697 г., и была, следовательно, известна историкам математики. Но впервые ее внимательно рассмотрел Г. Колбрук (H. Colebrooke) в предисловии к изданным им в 1817 г. арифметическим и алгебраическим сочинениям индийских математиков Брахмагупты и Бхаскары [126]. Поставив вопрос о развитии алгебры на Востоке в средние века, он отметил роль ал-Хорезми как автора первого сочинения по алгебре на арабском языке, и привел английский перевод отрывка из трактата.

Подлинным пионером в изучении «Алгебры» явился Ф. Розен, издавший в 1831 г. арабский текст рукописи вместе с английским переводом [21]. Хотя впоследствии в этом переводе были обнаружены неточности, именно он явился стимулом глубокого исследования не только трактата ал-Хорезми, но и всей средневековой литературы по алгебре на арабском языке. Следующим важным шагом в этой области явилось исследование алгебраического трактата Омара Хайяма, который опубликован во французском переводе Ф. Вёпке в 1851 г.

Огромное значение для изучения научного наследия ал-Хорезми имела издательская деятельность известного итальянского историка математики Б. Бонкомпаньи (B. Boncompagni, 1821—1894). В 1857 г. он опубликовал [5] латинский текст средневекового перевода арифметического трактата ал-Хорезми с некоторыми примечаниями, касающимися отдельных неясных мест рукописи. В это издание включен также текст одной из наиболее ранних европейских обработок сочинения ал-Хорезми, выполненных в XII в. и принадлежащих либо Иоанну Севильскому (как указано в рукописи, опубликованной Бонкомпаньи), либо, судя по другим рукописям, Герардо Кремонскому.

Публикация Б. Бонкомпаньи сразу вызвала отклики историков математики. В 1859 г. вышло из печати посвященное ей исследование [314] Ф. Вёпке (F. Woepcke, 1826—1864) — видного немецкого математика и арабиста, работы которого сыграли важную роль в изучении истории восточной науки XIX в. Основное внимание он уделил проблеме возникновения десятичной позиционной системы нумерации и современной арифметики, назвав ее «одной из наиболее трудных и в то же время наиболее интересных проблем истории математических наук». Наряду с этим в работе затронуты и другие вопросы, связанные с математическим творчеством ал-Хорезми.

К середине XIX в. ученые познакомились и с астрономическим трудом ал-Хорезми, о котором, как говорилось выше, знал еще Ж.—Э. Монтюкла. Зидж ал-Хорезми упоминал также Ж. Деламбр в своей известной «Истории астрономии средних веков», вышедшей в 1819 г. [137]. Он отметил, что эти астрономические таблицы, носившие название «Алсендхенд», пользовались высоким авторитетом в течение долгого времени. Однако Деламбр располагал весьма ограниченным материалом об истории астрономии «арабов» и. в частности, о сочинении ал-Хорезми.

В 1846 г. М. Шаль (M. Chasles, 1793—1880), выдающийся французский геометр, с увлечением занимавшийся также историей математики, обнаружил две латинские рукописи зиджа в переводе Аделарда из Бата. Он внимательно изучил их и опубликовал результаты исследования в «Докладах Парижской Академии Наук» в 1846 г. [125]. М. Шаль дал очень высокую оценку роли ал-Хорезми в истории астрономии и тригонометрии. Он отметил, например, что в его зидже мы находим «в первый раз применение синуса вместо хорд, которыми пользовались греки в своей тригонометрии, и этому прославленному ученому принадлежит счастливая идея такого крайне полезного усовершенствования» [там же, с. 850]. В то время установление этого факта было важным историко-научным открытием. М. Шалю, неутомимому энтузиасту изучения истории средневековой науки на основе подлинных рукописных источников, принадлежало немало таких открытий. Его доклады и публикация заметок о результатах своей работы, отклики на чужие статьи и книги, постановка новых проблем — все это дало важный стимул для историко-математических и историко-астрономических исследований в XIX в.

Новый фактический материал, полученный в результате изучения рукописей, сразу нашел отражение в курсах истории математики, в которых раньше по поводу «арабского» периода говорилось лишь несколько малозначащих слов. Это можно заметить уже в «Опыте критической истории алгебры» Г. Нессельмана [243], вышедшей в 1842 г. в Берлине. Однако наиболее глубокий по тому времени анализ творчества математиков и астрономов Ближнего и Среднего Востока (и в том числе ал-Хорезми) дал известный математик Г. Ганкель (H. Hankel, 1839—1873). В его книге «К истории математики в древности и в средние века» [164], опубликованной в 1874 г., собраны все известные тогда сведения о математических трудах ал-Хорезми и дана их оценка. Особое внимание он уделил вопросу об истоках алгебры ал-Хорезми.

На книгу Г. Ганкеля в большой мере опирался М. Кантор (M. Cantor) в своих 4-томных «Лекциях по истории математики» [116] при написании раздела о математике в странах Ближнего и Среднего Востока. Он подробно обсудил вопросы, связанные с творчеством ал-Хорезми, которые возникли у исследователей к началу XX в. (происхождение терминов «ал-джабр» и «ал-мукабала», разбор применявшихся ал-Хорезми методов решения уравнений 2-й степени, происхождение «арабской» алгебры и т. д.). Отвечая на вопрос о корнях алгебры ал-Хорезми, М. Кантор высказался за преобладание в ней греческого элемента. Это вызвало в дальнейшем оживленную дискуссию среди историков математики.

Существенные поправки в раздел «Лекций» М. Кантора, содержащий анализ сочинений ал-Хорезми, внес Г. Энестрём (G. Eneström, 1852—1923) — внимательный исследователь, сыгравший важную роль в развитии истории математики средневековья. В своих «Кратких замечаниях к «Лекциям» Кантора» систематически публиковавшихся в издаваемом им журнале «Bibliotheca mathematica» [145—147], Г. Энестрём уточнил многие утверждения маститого историка математики, которого он обвинял в недостаточной точности и даже в поверхностности.

Особенно важную роль для подведения итогов уже проделанной работы по изучению творчества ал-Хорезми сыграла рассмотренная выше работа Г. Зутера «Математики и астрономы арабов и их труды» [289], вышедшая в 1900 г. И в других своих исследованиях этот замечательный ученый проявил большой интерес к ал-Хорезми. В частности, он принял активное участие в издании незаконченного труда выдающегося датского историка математики А. Бьёрнбо (A. Björnbo, 1874—1912), отдавшего много сил исследованию творчества ал-Хорезми. А. Бьёрнбо изучал латинские рукописи средневековых переводов его сочинений и сделал ряд важных выводов об их судьбе в Европе [103, 104]. Вместе с арабистом Р. Бестхорном (R. Besthorn) он подготовил к публикации латинский перевод зиджа ал-Хорезми, принадлежащий Аделарду из Бата. Этот перевод вместе с исследованием и комментариями издал в 1914 г. Г. Зутер [293]. Он установил, в частности, что перевод выполнен не с оригинального труда, а базируется на обработке Масламы ал-Маджрити.

К концу XIX в. представления о творческом вкладе ал-Хорезми в различные отрасли науки значительно расширились благодаря исследованию его географического труда — «Книги картины Земли». Рукопись этого сочинения приобрел в 1878 г. в Каире директор Хедивской библиотеки В. Спитта (W. Spitta) и опубликовал сообщения о ней в 1879 и 1882 г. [60, с. 93]. В 1881 г. в докладе на V Международном конгрессе востоковедов он выразил надежду на то, что, расшифровав рукопись и составив по ней карту, ученые смогут точно определить состояние географических знаний у арабов.

Большое значение для изучения этой стороны научной деятельности ал-Хорезми имели работы К. А. Наллино (С. А. Nallino, 1872—1938 гг.), который в 1896 г. дал первый серьезный анализ «Книги картины Земли» [237, 238]. Впоследствии ее исследовали А. Мжик (A. Mžik) [228—234], опубликовавший в 1926 г. арабский текст трактата [18], И. Ю. Крачковский (1883—1951 гг.) [60], Р. Вибер [306] и др.

В XX в. интерес к математическому наследию ал-Хорезми не только не угас, но продолжал возрастать. Много внимания уделил ему американский историк математики Л. Карпинский (L. Ch. Karpinski). Он исследовал латинский перевод «Алгебры» ал-Хорезми, принадлежащий Роберту Честерскому [184—186], и опубликовал его в 1915 г. [10]; работа была переиздана в 1930 г. Вводный раздел этого издания представляет собой самостоятельное исследование об алгебраическом трактате ал-Хорезми, о его источниках и влиянии на дальнейшую судьбу алгебры. Несколько работ Л. Карпинский посвятил средневековым сочинениям об «алгорисме» на латинском, итальянском, французском и других европейских языках и опубликовал текст нескольких таких трактатов [187, 189, 191—193].

Одно из наиболее глубоких исследований о математических трудах ал-Хорезми, не утратившее значения и поныне, принадлежит немецкому арабисту Ю. Рушка (J. Ruska, 1867—1949). Его работа «К древнейшей истории арабской алгебры и арифметики» [255], опубликованная в 1917 г., возникла в результате пересмотра перевода «Алгебры», данного в 1831 г. Ф. Розеном. Выяснилось, что этот перевод не всегда дословен и требует исправлений. Кроме того, он затронул также ряд других проблем истории алгебры и арифметики и пришел к важным выводам, которые прочно вошли в историко-научную литературу последующих лет.

Автором нескольких исследований [150—157] о математических трудах ал-Хорезми был С. Гандц (S. Gandz, 1887—1954), стремившийся по-новому ответить на вопрос об источниках этих трудов. Его точка зрения, действительно, оригинальна, но не все историки науки считают ее правильной. С. Гандц говорит о «негреческой» линии развития математики Ближнего и Среднего Востока и ищет ее корни непосредственно в древневавилонской математике. Он развивает выдвинутый М. Кантором тезис (впоследствии справедливо критиковавшийся) о том, что в IX в. в Багдаде происходила борьба двух антагонистических научных школ, одна из которых придерживалась греческих математических методов, другая — староарабских. Но если М. Кантор и его последователи считали ал-Хорезми сторонником «греческой» школы, то С. Гандц утверждает, что в «Доме мудрости» он как раз был представителем ученых, которые противились введению греческой математики, и «его геометрия производит на нас впечатление протеста против перевода Евклида и против всякой склонности к восприятию греческой науки» [154, с. 267]. Подтверждение он видит в том, что ал-Хорезми нигде не упоминает переводчика «Начал» Евклида — Хаджжаджа ибн Йусуфа ибн Матара. Он пишет: «Евклид и его геометрия, хотя и доступная в хорошем арабском переводе его коллеги, полностью им игнорируется, когда он пишет о геометрии. Напротив, в предисловии к своей алгебре ал-Хорезми четко определяет свою цель — написать такой популярный трактат, чтобы, в противоположность греческой теоретической математике, он служил практическим делам и нуждам людей. Следовательно, ал-Хорезми выступает перед нами не как ученик греков, но скорее наоборот, как антагонист ал-Хаджжаджа и греческой школы» [там же]. Сразу следует заметить, что в трактатах ал-Хорезми мы вообще не находим каких-либо ссылок на определенного автора, но он опирается на некоторые предложения «Начал».

С. Гандц отмечает, что в литературе существуют три взгляда на источники «арабской» математики: одни считают превалирующим индийское влияние, другие — греческое или смешанное индо-греческое, третьи говорят об определяющем значении древних восточных математических традиций. Себя он относит к последним и настаивает на том, что в трудах ал-Хорезми можно обнаружить лишь древневавилонский элемент — как в терминологии, так и в содержании.

Утверждения С. Гандца очень решительны, но его анализ страдает односторонностью, а выводы не всегда убедительны. Прежде всего, совершенно неверно считать, что в сочинениях ал-Хорезми нет влияния Евклида: его доказательства правил решения уравнений строго выдержаны в духе «Начал» (см. [86, 299] и др.). Далее Гандц вообще упускает из вида вопрос об индийской алгебре, теснейшим образом связанной с алгебраическими трудами арабоязычных математиков, тогда как более ранние исследователи [126, 253, 255, 314, 315] гораздо серьезнее изучали эту важную проблему. Наконец, одним из ключевых доводов Гандца является сходство геометрического раздела «Алгебры» ал-Хорезми с древнееврейским трактатом «Мишнат ха миддот», который он датировал примерно 150 годом. Он заключает отсюда, что ал-Хорезми заимствовал свои познания (либо непосредственно, либо через какое-то промежуточное звено) из этого трактата, представляющего, по его мнению, древневавилонскую традицию [152]. Однако и этот довод подвергается сомнению [298, с. 360], так как недавние исследования показали, что упомянутый трактат относится к раннему исламскому периоду и, вполне возможно, является, наоборот, адаптацией сочинения ал-Хорезми.

Историю развития арифметики и вычислительных методов на средневековом Ближнем и Среднем Востоке глубоко исследовал П. Люкей (P. Luckey, ум. в 1949 г.), затронувший также вопрос о роли сочинений ал-Хорезми [213, 214].

Разделы, посвященные творчеству ал-Хорезми, имеются во всех современных курсах истории математики и истории науки, опубликованы статьи о нем на разных языках мира (в том числе на русском и узбекском), вышедшие либо отдельными изданиями, либо в энциклопедиях, сборниках статей и т. д.

Русская литература об ал-Хорезми к настоящему времени весьма обширна. Сведения о нем приводились уже в дореволюционных работах В. В. Бобынина [35а] и М. Е. Ващенко-Захарченко [45]. Немало внимания уделили ему советские исследователи (А. П. Юшкевич, Т. Н. Кары-Ниязов, Б. А. Розенфельд и др.). В 1964 г. в Ташкенте был опубликован русский перевод математических трактатов ал-Хорезми [1].

Особенно важное значение для исследования математических трудов ал-Хорезми имеют работы А. П. Юшкевича. Творчество ал-Хорезми рассматривалось в его статье «О математике народов Средней Азии в IX—XV вв.» [90], вышедшей в 1951 г. Подробный анализ сочинения об «индийской» арифметике дан в работе А. П. Юшкевича «Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми» [91] (1954 г.), изданной в переработанном и дополненном виде в 1964 г. на немецком языке [180]. Сведения об ал-Хорезми приводятся и в других исследованиях А. П. Юшкевича, например, в его статье об «Алгебре» Омара Хайяма [89, с. 509—511], в написанных им главах работы о математике в странах Востока в период средневековья [93]. Все эти сведения обобщены в книге «История математики в средние века», вышедшей в 1961 г. [93] и переизданной в 1964 г. на немецком языке [181], в 1976 г. на французском (раздел о математике стран ислама [317], в 1977 г.— на чешском [182]. В последних изданиях автор отразил новые результаты, полученные историками математики относительно ал-Хорезми.

V. ОБ АРИФМЕТИЧЕСКОМ ТРАКТАТЕ АЛ-ХОРЕЗМИ

Как видно из приведеного выше обзора, книга ал-Хорезми об индийской арифметике интересует историков математики с различных точек зрения. С середины XIX в. большое внимание вызывает вопрос о средневековых латинских рукописях его перевода и обработок. Поскольку арабский текст трактата утерян, то чрезвычайно важно знать, какая из этих рукописей точнее воспроизводит содержание оригинала. Сравнивая различные сочинения об «алгорисме» между собой, можно проследить, как происходило внедрение индийской арифметики в Европе.

Огромную роль для изучения наследия ал-Хорезми и вообще истории арифметики в средние века сыграла упоминавшаяся в предыдущем разделе публикация 1857 г. Б. Бонкомпаньи [5]. Но уже до этого, в 1845 г., известный арабист Рейно [252] привлек внимание историков науки к личности и трудам ал-Хорезми, правильно объяснив происхождение термина «алгорисм». Он отметил, что этим термином («algorismus» или «algorithmus») в средневековых латинских трактатах, начиная с XII в., стала называться десятичная система нумерации; но, с другой стороны, так же звучит в латинской транскрипции имя ученого Мухаммада ибн Мусы, уроженца Хорезма, работавшего при ал-Ма'муне. Его известный труд по алгебре был переведен на латынь, а источники сообщают, что он занимался также наукой о числах. «Мне кажется,— писал Рейно,— что название, которое было дано новой системе нумерации, есть не что иное, как это лицо, труды которого, будучи переведены на латинский язык, продвинули знание этой системы на Запад». Правильность такого предположения, которое произвело на исследователей впечатление открытия, подтвердилась изданием текста, начинавшегося словами: «Сказал Алгоризми» (Dixit Algorizmj).

После публикации Б. Бонкомпаньи появилось несколько работ, посвященных ал-Хорезми и европейским сочинениям об «алгорисме». В блестящей работе Ф. Вёпке о введении индийской арифметики на Западе, опубликованной в 1859 г. [314], были поставлены проблемы, решением которых исследователи занимались впоследствии долгие годы. Работа начинается замечанием о том, что в истории точных наук имеются вопросы, которые при кажущейся простоте и ясности оказываются чрезвычайно трудными, когда делается попытка на них ответить. К ним (наряду с вопросом о возрасте некоторых астрономических памятников, обнаруженных в Египте) он относит вопросы об открытии алгебры и о распространении индийской арифметики на Западе. Проблему возникновения нашей системы нумерации и нашей арифметики Ф. Вёпке назвал одной из наиболее трудных, но в то же время наиболее интересных проблем истории математики. Для ее решения,— утверждал он,— необходимо изучать как восточные, так и латинские средневековые рукописи, подобные тем, которые опубликовал Б. Бонкомпаньи,—«Книгу Алгоризма об индийском счете» [5] и «Книгу абака» Леонардо Пизанского [207]. Новое — факсимильное — издание текста рукописи, обнародованной Б. Бонкомпаньи, предпринял в 1963 г. К. Фогель [25].

Уже в XII в. в Европе появились сочинения, представляющие собой обработки трактатов ал-Хорезми. К ним относится «Книга Алгорисма о практике арифметики («Liber algorismi de pratica arismetrice»). Автором ее является либо Герардо Кремонский [143], либо еще один плодотворно работавший ученый и переводчик XII в. Иоанн Севильский [5]. (Этот вопрос не решен окончательно, так как в некоторых средневековых рукописях трактат приписан первому из них, в других — второму, а иногда автор вообще не назван). Впервые, как уже говорилось, этот трактат издал в 1857 г. Б. Бонкомпаньи [5], новое — критическое — издание принадлежит А. Аллару [96].

К тому же времени относятся первые труды западноевропейских ученых об алгорисме. Они представляли собой изложение арифметического трактата ал-Хорезми, часто с заимствованными из него числовыми примерами. Самое раннее из них входит составной частью в трактат «Книга введения Алхорисма в астрономическое искусство, составленная магистром А». Возможно, автором его был Аделард из Бата. Вводная часть книги, где автор излагает основы средневекового квадривиума — арифметику, геометрию, музыку и астрономию, состоит из следующих разделов: 1) о целых числах; 2) о шестидесятиричных дробях; 3) об извлечении квадратных корней; 4) о музыкальных и геометрических отношениях; 5) о временах и движениях небесных тел. В первых двух разделах разъясняются способ записи чисел в десятичной позиционной системе счисления и правила действий в «индийской» арифметике.

Наиболее древняя рукопись этого трактата, датируемая 1143 г. и хранящаяся в Вене, была впервые изучена в 1889 г. А. Наглем, который опубликовал также фрагмент из нее вместе с исследованием вопроса о распространении в Европе «индийской» арифметики [236].

В середине XII в. или несколько позже переписчик, работавший в монастыре Прюфнинг около Регенсбурга, составил другой список трактата, который хранится в Мюнхене (Clm 13021). Арифметический раздел рукописи опубликовал в 1898 г. М. Курце, указавший на существование в Мюнхене еще одной рукописи рассматриваемого сочинения (Clm 18927); она датируется XIII в. [132]. В общей сложности известно пять средневековых списков этого трактата. Недавно (1975 г.) А. Аллар, сопоставив все рукописи, осуществил его критическое издание [96].

Исследованием латинских сочинений об «алгорисме» занимались в конце XIX — начале XX вв. такие известные историки математики, как Г. Энестрём [143, 147], Ч. Карпинский [187, 189, 191—193] и др., а в настоящее время — А. П. Юшкевич [91, 93, 180—182, 317], К. Фогель [25], А. Аллар [96, 96а].

Работа А. П. Юшкевича [91], вышедшая в 1954 г., сыграла в изучении арифметического трактата ал-Хорезми особую роль. Хотя заслуга ал-Хорезми в развитии арифметики постоянно отмечалась в курсах истории математики, где кратко излагалось содержание его сочинения, внимательный его разбор отсутствовал, вследствие чего допускались значительные фактические ошибки, и общая оценка труда оказывалась не вполне правильной. Эти существенные упущения были устранены в указанной работе, в которой впервые дан анализ всех латинских версий арифметического трактата ал-Хорезми. С существенными дополнениями она была издана в 1964 г. на немецком языке [180].

В настоящем издании помещена статья А. П. Юшкевича «О труде по арифметике Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми», обобщающая как предыдущие работы автора на эту тему, так и новые результаты, появившиеся в мировой литературе за прошедшие годы. В ней дается документально обоснованная реконструкция арифметического трактата ал-Хорезми.

VI. «АЛГЕБРА» АЛ-ХОРЕЗМИ

Алгебраический трактат Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми, как и его книга об индийской арифметике, упоминается сейчас в каждом курсе истории математики. Подробно он рассматривается в работах, посвященных истории алгебры [53, 164 и др.], и в целом ряде специальных исследований, предметом которых является этот труд ал-Хорезми. С него начинается описание путей развития средневековой алгебры на Ближнем и Среднем Востоке, фундаментом которой его с полным основанием считают. К нему возвращаются и при изложении истории математики в Европе в средние века и в эпоху Возрождения. Но с какой бы точки зрения ни подходил историк науки к анализу этого сочинения, оно всегда вызывает самую высокую оценку.

Очень характерно высказывание американского историка математики Л. Карпинского, подробно исследовавшего многие вопросы, связанные с творчеством ал-Хорезми. Он писал, что «Алгебра» ал-Хорезми «на протяжении столетий пользовалась широкой популярностью в оригинале, а в течение последующих веков ее популярность расширилась благодаря переводам и адаптациям. Изучение содержания этого труда представляет собой экскурс в средневековое мышление. При исследовании текста в форме, возможно более близкой к оригиналу, мы находим причину долго длившейся потребности в нем как для восточного, так и для западного ума, его интереса как для англичанина, немца и итальянца, так и для араба. Даже сегодня преподаватели элементарной математики могут найти эту книгу плодотворной: геометрические решения квадратных уравнений, предложенные арабским автором более тысячи лет назад, могут быть с пользой применены в наших школах» [185, с. 1].

Огромное значение труда ал-Хорезми в истории математики общепризнано с давних времен. Если вспомнить, что само название науки алгебры произошло от заглавия книги (слово «алгебра», как известно, представляет собой видоизменение термина «ал-джабр», фигурирующего в названии), то естественно, что это сочинение всегда вызывало особый интерес.

«Алгебра» ал-Хорезми сохранилась в арабской рукописи: это — копия с подлинника, переписанная в 1342 г. (743 г. хиджры) хорошим почерком, но почти без диакритических точек и хранящаяся в Бодлеянской библиотеке Оксфордского университета под шифром Huntington, 214 (лл. 1—34). Уже упоминалось, что она привлекала внимание исследователей еще в XVIII в. [167].

До недавнего времени эта рукопись считалась уникальной, но, согласно сообщениям А. Саили [265] и А. Анбубы [97, с. 67; 298, с. 364], имеются и другие копии «Алгебры» ал-Хорезми в анонимной рукописи Берлинской библиотеки под № 5955, 6 (лл. 60—95 об.), а также в египетской библиотеке Шибин ал-Ком и т. д. (см. [276]). Однако, они, по-видимому, до сих пор не изучались.

Как отмечено выше, оксфордскую рукопись впервые внимательно рассмотрел Г. Колбрук, поставивший вопрос о путях развития алгебры в Индии и на Ближнем и Среднем Востоке в средние века и положивший в основу решения этого вопроса рукописные источники на санскрите и арабском языке. Во введении к изданной им в 1817 г. книге об арифметике и алгебре Брахмагупты и Бхаскары [126, с. LXXXII—LXXIX] приводятся результаты изучения оксфордской рукописи и дается английский перевод отрывка из нее. Колбрук пишет, что Мухаммад ибн Муса, известный как автор астрономического сочинения, которое представляло собой сокращенную обработку более раннего труда, заимствованного у индийцев, и трактата об индийском способе арифметических вычислений, является также первым, кто познакомил арабов с алгеброй. Колбрук со ссылкой на П. Коссали [128] утверждает, что трактат ал-Хорезми об алгебре, переведенный на итальянский язык, имели в своих руках алгебраисты Италии вскоре после введения алгебры в эту страну Леонардо Пизанским (XIII в.).

Отметив, что «к счастью, копия арабского оригинала хранится в Бодлеянской коллекции», Колбрук описывает свою работу над этой рукописью. Она осложнялась тем, что, хотя доступ в библиотеку охотно разрешался, непривычный человек с трудом осваивался с температурой хранилища. Это препятствие было преодолено благодаря помощи арабиста А. Николла (A. Nicoll), в то время младшего библиотекаря, который специально переписал из рукописи большие отрывки. По ним Колбрук смог внимательно изучить текст и выяснить содержание книги. Он идентифицировал ее как несомненный труд ал-Хорезми, заметив, что хотя на титульном листе значится «Абу Абдаллах ибн Муса», речь здесь идет о том же самом ученом, который в «Истории мудрецов» историка X в. Ибн ал-Кифти выступает как Абу Джа'фар Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми. Обращается также внимание на то, что его не следует путать с совсем другим лицом — крупным ученым того же времени Абу Джа'фаром Мухаммадом ибн Мусой ибн Шакиром.

Колбрук подробно пересказал содержание трактата и дал перевод отрывка о правилах решения уравнений [126, с. LXXV—LXXIX]. Кроме того, он сравнил сочинение ал-Хорезми с трактатом ученого XVI в. Баха ад-Дина Амили «Сущность арифметики» (х̮улāс̣āт ал-х̣исāб), который был издан в 1812 г. в Калькутте. Это позволило придти к некоторым новым по тому времени выводам о развитии алгебры у мусульманских народов на протяжении шести столетий.

Таким образом, уже в 1817 г. был сделан решающий шаг в деле популяризации «Алгебры» ал-Хорезми. Однако действительно переломным моментом в истории изучения наследия ал-Хорезми и вообще математики восточного средневековья явился 1831 г., когда Ф. Розен опубликовал арабский текст алгебраического трактата вместе с его английским переводом и исследованием. Это издание служило и продолжает служить до сих пор основой всех работ, в которых затрагиваются вопросы, связанные с алгеброй ал-Хорезми. На него, например, опирался А. Марр, опубликовавший в 1846 г. французский перевод геометрического раздела сочинения [217] (работа была переиздана в 1866 г.). А. Марр сравнил этот раздел с соответствующим разделом трактата Баха ад-Дина Амили «Сущность арифметики», который он также перевел на французский язык.

Только спустя много лет, в 1917 г. появился серьезный труд арабиста Ю. Рушки, в котором издание Ф. Розена подверглось критическому пересмотру [255]. Новое исследование было предпринято после того, как при беглом обзоре Ю. Рушка выяснил, что в переводе, опубликованном в 1831 г., текст не воспроизводится буквально, а допускаются значительные вольности. Кроме того, относительно основ арабской алгебры к началу XX в. было высказано так много противоречивых и взаимно исключающих мнений, что, как он пишет, «об исчерпании предмета все еще нельзя вести речь» [там же, с. 4]. Поэтому Ю. Рушка привлек к исследованию другие алгебраические тексты и их переводы, и «таким образом возник ряд отдельных, более или менее связанных сообщений относительно истории древнейшей арабской алгебры» [там же]. По ходу работы был сделан более точный — немецкий — перевод некоторых фрагментов текста. В настоящее время историки науки, пользуясь переводом Ф. Розена, учитывают эти поправки.

Позднее С. Гандц, изучая арабский текст трактата по изданию 1831 г., дал английский перевод геометрического раздела и внес некоторые исправления в перевод Ф. Розена в части, касающейся деления наследства.

Однако не только перевод, но и арабский текст в издании 1831 г. страдает некоторыми недостатками — прежде всего вследствие неясностей в рукописи. Поэтому давно ощущалась необходимость в улучшенном издании, основанном на более тщательной расшифровке текста. Его осуществили в 1939 г. в Каире Али Мустафа Мушаррафа и Мухаммед Мурси Ахмад [16]; следует заметить, что и в нем отмечаются ошибки [98]. В настоящее время предпринято (А. Аллар и Р. Рашед) новое издание арабского текста «Алгебры» и ее средневековых латинских версий.

В 1964 г. был издан русский перевод сочинения ал-Хорезми [1].

Говоря об истории изучения «Алгебры» ал-Хорезми, следует рассматривать отдельно изучение арабского текста трактата, с одной стороны, и средневековых латинских переводов,— с другой. Алгебраический трактат ал-Хорезми принадлежит к числу первых сочинений по математике, переведенных в средние века с арабского языка на латинский. В XII в. было выполнено два перевода, которые принадлежат крупнейшим переводчикам, работавшим в Испании: итальянцу Герардо Кремонскому (1114—1187 гг.) и его современнику англичанину Роберту из Честера. Из этих двух версий более ранней является, по-видимому, та, которую выполнил Роберт из Честера [186, с. 33]. Обе они пользовались большой популярностью у европейских математиков и сохранились в нескольких рукописных копиях.

Перевод Герардо Кремонского опубликовал (без указания переводчика) Г. Либри (G. Libri) в 1838 г. в первом томе своей «Истории математических наук в Италии» [210, с. 253—257]. Вопрос об авторе перевода возник в начале XX в. В 1904 г. Г. Энестрём, большой знаток средневековой математики, много сделавший для выяснения различных сомнительных моментов истории науки этого периода, заметил мимоходом — в рецензии на французское издание «Энциклопедии математических наук», что опубликованный Г. Либри анонимный текст, возможно, принадлежит Герардо Кремонскому. Основанием для такого предположения служит прежде всего средневековый список его переводов (издан Б. Бонкомпаньи в 1851 г. в книге о жизни выдающегося переводчика [105]); в нем значится латинское название «Книги об алгебре и алмукабале» ал-Хорезми — «Liber alchoarismi de jebra et almucabala» [там же, с. 5], где арабское слово «ал-джабр» приняло искаженную форму «йабр». Кроме того, рукопись, которой пользовался Г. Либри, содержит главным образом переводы Герардо Кремонского.

С другой стороны, однако, существует еще один средневековый латинский трактат по алгебре, изданный Б. Бонкомпаньи в упомянутой книге о Герардо Кремонском; его рукопись находится в Ватиканской библиотеке под № 4606 (лл. 72—76 об.). В заглавии трактата указано, что это — перевод «магистра Герардо Кремонского, выполненный в Толедо». Полное название сочинения: «Книга, которая согласно арабам называется алгеброй и алмукабалой, а у нас — книгой восстановления» («Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala et apud nos liber restaurationis»). Г. Энестрём указал на большое сходство этого трактата и перевода, изданного Г. Либри, но заключил, что «нелегко понять, зачем Герардо Кремонский задал бы себе труд переводить два столь мало отличающихся сочинения об одном и том же предмете» [144, с. 404].

Это сомнение разрешил в 1905 г. известный историк математики средневековья А. Бьёрнбо в статье о выполненных Герардо Кремонским переводах «Алгебры» ал-Хорезми и «Начал» Евклида [103]. В ней была доказана принадлежность этому переводчику анонимного трактата, опубликованного Г. Либри. Согласившись с Г. Энестрёмом в том, что Герардо вряд ли стал бы переводить оба сочинения, А. Бьёрнбо утверждает, что, судя по языку, терминологии и другим характерным чертам, настоящим его переводом является именно указанный анонимный трактат. Подтверждение этому дал также И. Л. Гейберг (I. L. Heiberg): он прислал автору статьи содержание мадридской рукописи (№ Аа 30), в которой тот же текст носит название: «Книга Маумета, сына Мусы Алгорисми, об алгебре и алмихабале, переведенная магистром Герардо Кремонским в Толедо с арабского на латынь («Liber Maumet filii Moysi Algorismi de algebra et almichabala translatus a magistro Gerardo Cremonese in Toleto de arabico in latinum») [там же, с. 241].

Что касается трактата из Ватиканской рукописи № 4606, то он, хотя и приписан в заглавии Герардо Кремонскому, в действительности, вообще не является переводом, а представляет собой, как можно заключить по ряду внутренних признаков, обработку, составленную, возможно, на основе перевода Герардо. (Следует заметить, что высказывалось предположение о том, что автором ее был он сам [45, т. I, с. 463]). Придавать заглавию решающего значения в этом случае, по мнению А. Бьёрнбо, не следует, поскольку из биографии выдающегося переводчика известно, что он не подписывал своих работ, из-за чего при изучении рукописей не раз возникали недоразумения.

К упомянутому трактату из Ватиканской рукописи, имеющему важное значение для истории алгебры и алгебраической символики в Европе, исследователи возвращаются и сейчас. В 1975 г. его внимательно изучил В. Каунцнер (W. Kaunzner) [194], который привлек к исследованию еще одну рукопись, хранящуюся в Оксфорде (Bodl. Library, Ms Lyell, 52, fol. 42r—49v).

Перевод «Алгебры» ал-Хорезми, выполненный в 1145 г. в Сеговии другим видным средневековым переводчиком — Робертом из Честера и сохранившийся (полностью или в отрывках) в нескольких рукописях XIV—XVI вв., обратил на себя внимание в конце XIX в. По мнению Дж. Сартона, «можно сказать, что он означает начало европейской алгебры» [263, с. 176]. Его изучил и опубликовал американский историк математики Л. Ч. Карпинский: в 1911 г. он дал общий обзор этой версии трактата ал-Хорезми [184], а в 1915 г. издал латинский текст с английским переводом, примечаниями и исследованием [185]; второе издание было осуществлено в 1930 г. [186].

Л. Ч. Карпинский использовал три полные рукописи и два отрывка. Старейшая из рукописей (рис. 60) — дрезденская (Dresd. Codex C80, fol. 340a—348b) — происходит из Лейпцига и переписана в XV в. (а может быть, и раньше, как заметил недавно большой специалист по средневековым математическим рукописям В. Каунцнер [194]). Сведения о ней впервые появились в историко-математической литературе в 1887 г. [305 а]. Тогда же было отмечено, что в этой рукописи имеются пометки двух выдающихся немецких математиков XV—XVI вв. — Иоганна Видмана (род. ок. 1460 г.) и Адама Ризе (1492—1559 гг.), которые, по-видимому, изучали по ней алгебру.

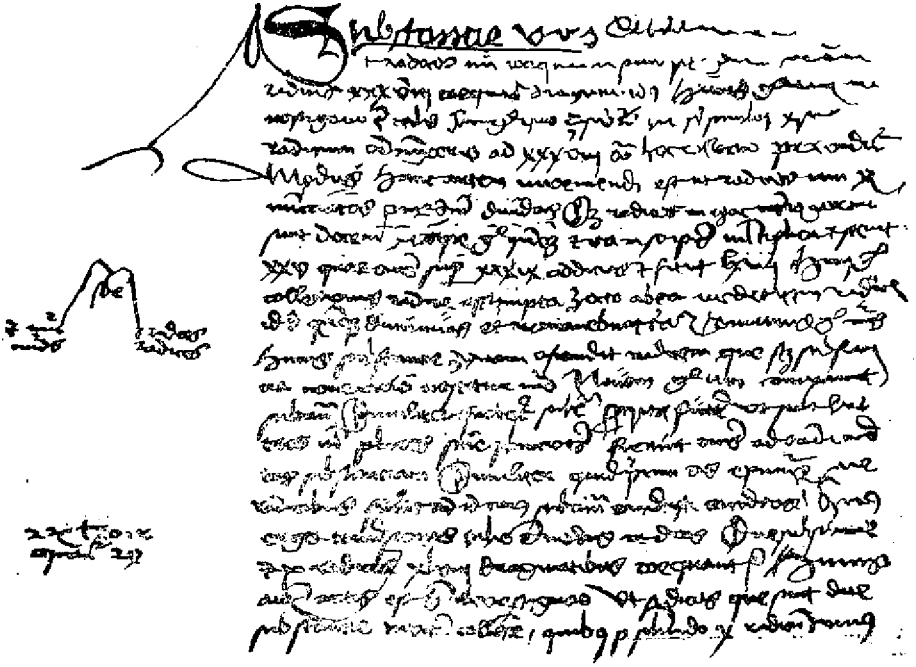


Рис. 60.

Вторая рукопись перевода Роберта из Честера, относящаяся к XV в. и хранящаяся в Вене (Codex Vindobonensis, 4770, fol. 1a—12b), содержит, кроме этого перевода, несколько других латинских трактатов, которые также представляют большой интерес для истории средневековой математики. Возможно [185, с. 52], что ею пользовались работавшие в Вене крупнейшие математики Георг Пейрбах (1423—1461 гг.) и Иоганн Региомонтан (1436—1476 гг.). При изучении этой рукописи М. Штейншнейдер в 1871 г. [283, с. 392—393] и М. Курце в 1899 г. [133, с. 289] отмечали важность публикации перевода алгебраического трактата ал-Хорезми.

Л. Ч. Карпинский опубликовал латинский текст по третьей рукописи, принадлежащей Колумбийскому университету (Columbia University Library Ms., X 512, Sch. 2, Q, fol. 71—122). Она переписана в 1550 г. известным немецким ученым Иоганном Шейбелем (I. Scheybel, 1494—1570 гг.), который готовил ее к печати. Текст сравнивался с текстом рассмотренных выше рукописей, а также с двумя фрагментами перевода. Один из них находится в Дрезденской рукописи, хранящейся под шифром C.80^m. Другой был включен в комментарий к «Алгебре» ал-Хорезми голландского математика Адриана ван Роумена (1561—1615 гг.); он был частично напечатан в 1599 г. в Вюрцбурге [107, 263].

Переводы алгебраического трактата ал-Хорезми, принадлежащие Герардо Кремонскому и Роберту из Честера, значительно различаются между собой. Первый из них более точно следует оригиналу. Очень характерно, что ни тот, ни другой не содержит второй части трактата — «Книги о завещаниях», в которой рассматриваются задачи на раздел наследства в соответствии с мусульманским каноническим правом.

Сопоставление арабского текста сочинения ал-Хорезми и обоих латинских переводов позволило не только полностью восстановить содержание трактата, но и сделать немало важных выводов о развитии алгебры в средние века на Востоке и в Европе.

Особенно большое внимание труду ал-Хорезми уделили Г. Ганкель [164], Ю. Рушка [255], а также С. Гандц [150—157] и Г. Вилейтнер [310], рассмотревшие подробно главу о делении наследства. Различные вопросы, связанные с алгебраическим трактатом ал-Хорезми, в частности, об его источниках и о влиянии на европейскую математику освещаются во многих работах XIX—XX вв. (Л. Родэ [253], Л. А. Седийо [275], А. Бьёрнбо [103], М. Кантор [116], Л. Карпинский [184—186], М. Симон [277], О. Нейгебауэр [68, 244], Г. Зутер [289], Г. Сартон [263], Ф. Сезгин [276], А. П. Юшкевич [89, 92, 181—182, 317], Г. Энестрём [143—145], А. Анбуба [97, 98], Р. Рашед [251] и др.).

При исследовании алгебраического трактата еще в начале XIX в. возник целый ряд спорных проблем, которые дискутируются в историко-математической литературе вплоть до наших дней. Из них можно указать следующие:

1) об источниках «Алгебры» ал-Хорезми;

2) о его роли в истории алгебры на средневековом Востоке (в частности, обсуждается вопрос о том, был ли он действительно автором первого сочинения по алгебре на арабском языке);

3) о геометрическом разделе «Алгебра» и его источниках;

4) о задачах на раздел наследства: анализ содержания и научное значение этой главы;

5) терминология ал-Хорезми (в особенности о терминах «алджабр» и «ал-мукабала»);

6) о средневековых латинских переводах «Алгебры» ал-Хорезми и их значении в истории математики в Европе.

Мы остановимся здесь на литературе по четвертой из указанных проблем, наименее освещенной в популярных работах.

Вторая часть алгебраического трактата ал-Хорезми, составляющая приблизительно половину сочинения, носит заглавие «Книга о завещаниях». Она посвящена решению задач на раздел наследства в соответствии с мусульманским каноническим правом. Объем этого раздела доказывает, какое важное значение придавал ему автор. По существу почти все задачи сводятся к решению линейного уравнения с одной неизвестной. Иногда речь идет о неопределенных условиях, а в единственном случае (см. настоящее издание, с. 79—80) решается система двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Разработке правил для решения такого рода юридических задач с помощью алгебры уделялось в эпоху ал-Хорезми большое внимание. Во многих арабских учебниках более позднего времени собственно алгебраическая часть рассматривалась только как введение к «науке о разделе наследства» (ʻилм ал-фараид). Примером могут служить широко распространенные в Средней Азии трактаты ученого XII в. Сирадж ад-Дина ас-Саджаванди[40].

Во всех латинских переводах и обработках сочинения ал-Хорезми «Книга о завещаниях» отсутствует (это немаловажное обстоятельство впервые отметил в 1911 г. Л. Карпинский [184]). Понятно, что у математиков средневековой Европы вопросы, связанные с мусульманской юриспруденцией, не должны были вызывать интереса.

Историки математики также долго не придавали большого значения этому разделу «Алгебры» ал-Хорезми. Издатель арабского текста Ф. Розен выразился весьма скептически о задачах «Книги о завещаниях», заметив, что с математической точки зрения они большей частью неверны. Он имел при этом в виду не неправильное решение уравнений, к которым они сводятся, а произвольность, с его точки зрения, тех допущений, которые приняты в условиях задач. Эти допущения, как ему казалось, имели целью «принудить решения к согласию с применявшимися у арабских юристов правилами наследования [21, с. 133]. Ф. Розен писал, что как юристы, так и автор трактата стремились прежде всего оградить наследников и ближайших родственников от посяга-

---

[40] См.: Г. П. Матвиевская. Математические и астрономические рукописи Института востоковедения Академии наук Узбекской ССР.— В кн.: Из истории точных наук на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Ташкент, 1972, с. 174—175.

тельств постороннего лица, которому завещатель оставил во время болезни часть своего имущества. Искусственными, по его мнению, были и ограничения, которые накладывались на волю завещателя в отношении освобождения рабов и размера выкупа за них.

В исследованиях по истории математики, появившихся в XIX в., «Книга о завещаниях» ал-Хорезми фактически не рассматривалась. Так, Г. Ганкель в своей замечательной книге «К истории математики в древности и в средние века» [164], в которой он обобщил все известные к 1874 г. данные относительно развития науки в «арабский» период, внимательно исследовал чисто алгебраический и геометрический разделы «Алгебры» ал-Хорезми, а задачи о разделе наследства оставил в стороне. Признавая их большое практическое значение в мусульманском мире, он считал, что никакого научного интереса они не представляют [164, с. 261].

Подобный взгляд выразил и М. Кантор в «Лекциях по истории математики» [116], вышедших первым изданием в 1892 г. После разбора первой половины трактата ал-Хорезми он говорит, что остальная часть, весьма важная в глазах автора, содержит набор необыкновенно запутанных задач о наследственном праве, об освобождении рабов и т. п. «Этот раздел,— пишет М. Кантор,— является, таким образом, насквозь арабским, и его следует рассматривать как основу многочисленных специальных работ более позднего времени, в которых речь идет исключительно о разделе наследства и встречающихся при этом вычислениях» [116, 3-е изд., 1907, с. 728].

Поскольку в «Лекциях» М. Кантора, которые пользовались значительным авторитетом, задачи на раздел наследства были оставлены без внимания и ни одна из них не рассматривалась, авторы многих курсов истории математики, основывавшиеся на его данных, часто высказывали по этому поводу совершенно ошибочные суждения. Это отметил в 1917 г. Ю. Рушка в упоминавшейся выше работе об «Алгебре» ал-Хорезми [255]. Он назвал «скоплением недоразумений» изложение содержания «Книги о завещаниях» в некоторых работах, например, в «Истории математики» З. Гюнтера, вышедшей в 1904 г. [161].

Ю. Рушка был по существу первым, кто обратился к серьезному изучению второй части алгебраического трактата ал-Хорезми. Его как арабиста привлекали главным образом вопросы терминологии. Математический анализ задач на раздел наследства, приведенных ал-Хорезми, дал сотрудничавший с ним известный математик и историк математики Г. Вилейтнер (H. Wieleitner), который посвятил этим задачам специальную статью, написанную в 1916 г., но опубликованную только в 1922 г. [310].

Г. Вилейтнер отмечает важность «Книги о завещаниях» не только с юридической, но и с историко-математической точек зрения, и называет причину, по которой этот раздел трактата ал-

Хорезми оставался неисследованным. Он видит ее в том, что задачи на деление наследства «не являются легко доступными и требуют для того, чтобы в них разобраться, многонедельного труда». В то же время они представляют, по его мнению, интерес как для историка математики, так и для современного преподавателя, излагающего теорию дробей. Поэтому Г. Вилейтнер дал подробный обзор всех девяти типов задач на раздел наследства, рассматривавшихся ал-Хорезми. В заключение он отметил, что поскольку неизвестны никакие более ранние арабские источники такого рода, то не исключено, что именно ал-Хорезми положил начало применению алгебры при делении наследства согласно каноническому праву, многие вопросы которого были разработаны жившим несколько раньше известным законоведом Абу Ханифой (690—767 гг.). Г. Вилейтнер пишет, что от ал-Хорезми «протянулась через столетия цепь математических обработок таких задач», и настаивает на необходимости их изучения. Он отмечает, в частности, что еще неизвестно, опирался ли ал-Хорезми на более ранние образцы; не ясно, какие усовершенствования были внесены его последователями; наконец, перешло ли что-либо из этого раздела арабской алгебры на латинский Запад и если да, то каким образом. Эти вопросы, несомненно, заслуживают внимания.

Несколько позже к изучению «Книги о завещаниях» вернулся С. Гандц, который в 1938 г. посвятил ей статью, написанную в весьма своеобразной манере, свойственной этому автору. Он яростно обрушивается на исследователей, которые недооценивали вторую половину «Алгебры», и ставит цель — «защитить» ал-Хорезми от них. Первым попадает под огонь его критики Ф. Розен, замечания которого о произвольности допущений в задачах на раздел наследства могут, по мнению С. Гандца, повредить репутации ал-Хорезми как математика и как ученого. Затем наступает черед М. Кантора и Г. Ганкеля, не придававших большого значения «Книге о завещаниях», и, наконец, Ю. Рушки и Г. Вилейтнера, которые не исправили Ф. Розена в отношении математической точности решения задач и даже будто бы присоединились к его высказыванию о произвольности принимаемых допущений. С. Гандц пишет: «Я стремлюсь защитить ал-Хорезми от этих клеветнических атак, длящихся более чем столетие (с 1831 г.) и грозящих стать укоренившейся традицией, передаваемой от поколения к поколению. Некоторые философы замечают, что произвола не существует, а его источник — в нашем собственном невежестве. Если мы не знаем более глубоких причин наших действий, мы считаем, что действуем произвольно. В нашем случае объявленная произвольность ал-Хорезми полностью вызвана невежеством его критиков» [157, с. 327]. Доказывая, что ал-Хорезми действовал не по произволу, а в строгом соответствии с мусульманскими правилами наследования, С. Гандц говорит, что те, кому предназначалось сочинение, знали эти правила из школы, и замечает: «Ему не снилось, что улеммы ('улама[41]) из Лондона и Гейдельберга будут изучать его книгу. Еще меньше могло ему сниться, что эти улеммы будут настолько глупы (foolish), что возьмутся изучать алгебру без того, чтобы понять сначала закон наследования» [там же, с. 328].

Столь необычная для историко-математического исследования эмоциональность не может не вызвать удивления. Речь идет всего лишь о разъяснении установленных мусульманским законодательством правил наследования, в которые не стали углубляться упомянутые историки математики. Сам С. Гандц последовательно рассматривает каждую задачу и объясняет со ссылками на Коран и арабские юридические источники ход решения, предложенного ал-Хорезми. Например, недоумение Ф. Розена вызвало то, что по условию задачи муж иногда наследует $\frac{1}{4}$, а иногда $\frac{1}{2}$ часть имущества жены. Он не знал, что, согласно закону, первое имеет место при наличии детей, а второе — в случае, если их нет. Так же просто решаются и другие вопросы, возникшие у историков математики, не знакомых с мусульманским наследственным правом и рассматривавших задачи с чисто алгебраической точки зрения.

VII. ОБ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ТРУДАХ АЛ-ХОРЕЗМИ

Кроме трудов ал-Хорезми по арифметике, алгебре и географии, не перестают вызывать интерес исследователей и его астрономические сочинения. В них обнаруживаются неизвестные ранее данные, одинаково важные для истории астрономии и математики, а также для изучения вопроса о путях распространения научных идей в средние века.

Подлинный текст большинства астрономических трудов ал-Хорезми не сохранился. Но некоторые из них известны по позднейшим обработкам и комментариям, а также цитатам, которые имеются в трудах других средневековых ученых. Это касается, в первую очередь основного астрономического сочинения — зиджа.

1. Зидж ал-Хорезми. Зиджи, или сборники астрономических и тригонометрических таблиц, необходимых для работы астрономов-практиков, составляли большой раздел арабской литературы по астрономии. В настоящее время имеются сведения о многих сочинениях такого рода, написанных в период между VIII и XV вв.; число их достигает ста [195]. Зиджи были построены по определенной схеме, которая повторяла в общих чертах оглавление «Алмагеста» Птолемея.

Помимо таблиц, с помощью которых решались повседневные задачи (определение точного времени, географических координат населенных пунктов, направление киблы, предсказание сол-

---

[41] 'Улама — ученые (ар.).

нечных и лунных затмений и т. п.), в зиджах содержались теоретические разделы. Сравнение этих разделов в разных зиджах позволяет понять, какие изменения вносились с течением времени в астрономическое учение в странах ислама и какой вклад в развитие науки внес тот или иной астроном.

Зидж ал-Хорезми принадлежит к числу первых по времени. Он был составлен в тот период, когда ученые Багдада осваивали астрономическую теорию греков, с одной стороны, и индийцев,— с другой. Был переведен на арабский язык «Алмагест» Птолемея, в котором обобщены результаты, полученные греческими астрономами. При халифе ал-Мансуре багдадский ученый Ибрахим ал-Фазари (по другим данным, Мухаммад ибн Ибрахим ал-Фазари) перевел с санскрита на арабский язык одно из индийских астрономических сочинений — сиддхант (точное значение: система). Автором сиддханты, послужившей основой этого перевода, был, по-видимому, великий астроном Индии Брахмагупта (VII в.). Перевод ал-Фазари получил в арабском ученом мире название «Большой Синдхинд».

Как сообщается в «Фихристе» ан-Надима, ал-Хорезми составил по приказу халифа ал-Ма'муна сокращенную версию этого перевода — «Малый Синдхинд». Другие источники упоминают также зидж ал-Хорезми, написанный на основе таблиц «Синдхинд» и известный в свое время в двух версиях. Некоторые средневековые авторы считают, что этот зидж и есть «малый Синдхинд». Однако выяснить этот вопрос в настоящее время, очевидно, уже невозможно [23, с. VIII]. Несомненным остается лишь факт, что ал-Хорезми при составлении зиджа в большой мере базировался на теории, применявшейся индийскими астрономами.

В то же время, как теперь установлено, в труде ал-Хорезми отразилось древнеперсидское астрономическое учение. Оно было изложено на языке пехлеви в специальных сочинениях, носивших название «зидж» (или «зик»), которое позднее перешло в арабскую литературу. Об их содержании сейчас судят по отрывкам, сохранившимся в трудах арабоязычных астрономов IX в. В частности, известны отрывки из «Шахского зиджа» («Зидж-и шах» или «Зик-и шахриар»), который был составлен во время последнего сасанидского правителя Йезигерда III (632—642 г.) [203, с. 378].

Зидж ал-Хорезми представлял традицию «синд-хинд», которая характерна соединением греческих и сасанидских элементов с материалом, заимствованным из индийских сочинений [248, 249]. Он пользовался большой популярностью у современников ал-Хорезми, а также у астрономов более позднего времени, хотя они в основном стали придерживаться традиции Птолемея.

Данные из сочинения ал-Хорезми приводят многие ученые, в том числе Абу Райхан Беруни, многократно ссылавшийся на него в своих трудах (например, дважды—в «Индии» [33, с. 413, 439]).

Зидж ал-Хорезми не раз комментировался. Имеются сведения о книге ал-Фаргани, в которой он был подвергнут критике, и о труде Абу-л-Фадла ибн Маша'аллаха, в котором сравнивались зиджи ал-Хорезми и Хабаша ал-Хасиба [195, с. 128], о комментарии 'Абд ал-'Азиза ал-Хашими.

В IX—X вв. комментарии к зиджу ал-Хорезми составили Абдаллах ибн Масрур ал-Хасиб (ок. 875 г.) и испанские ученые X в. Ибн ал-Мусанна и Маслама ибн Ахмад ал-Маджрити. Арабский текст комментария Ибн Масрура («Китаб илал аз-зиджат») был обнаружен недавно в Каире и изучается Э. С. Кеннеди [198]. Два других сохранились в средневековых переводах на латинский или древнееврейский языки.

Наибольшей известностью в Европе пользовался, по-видимому, комментарий ал-Маджрити в латинском переводе, выполненном в XII в. Аделардом из Бата. Маслама ибн Ахмад ал-Маджрити, живший в Испании в период правления халифов Хакима II (961—976 гг.) и Хишама II (976—1013 гг.) и работавший в Кордове, умер в 1007—1008 гг. [289, с. 76—77]. Он был крупным ученым своего времени, автором нескольких сочинений: трактатов о коммерческих вычислениях, о конструкции и применении астролябии, комментариев к «Планисферию» Птолемея и к зиджу ал-Баттани.

Его обработка зиджа ал-Хорезми представляет собой, по словам Г. Зутера, скорее переработку оригинала [23, с. VII]. Подтверждением служит приведенная Зутером цитата из труда «Разряды народов» («Табакāт ал-умам») испано-арабского историка Ибн Са'ида (ум. в 1070 г.), писавшего об ал-Маджрити: «Он занимался обработкой таблиц ал-Хорезми; он перевел его персидское летосчисление в арабское и определил средние положения планет для начала хиджры; он добавил к сочинению еще другие прекрасные таблицы, но точно ему следуя и не обращая внимания на ошибки в его труде».

Таким образом, ясно, что не все таблицы зиджа в версии ал-Маджрити принадлежат ал-Хорезми, но какие именно, установить трудно. Помимо того, что ал-Маджрити пересчитал для мусульманской эры таблицы ал-Хорезми, составленные для эры Йезигерда, он, как показало исследование Г. Зутера, ввел новый начальный меридиан, заменив меридиан Арин меридианом Кордовы.

Зидж ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити привлек внимание историков науки после того, как М. Шаль в 1846 г. обнаружил и исследовал две рукописи латинского перевода сочинения [125]. Однако следует заметить, что еще Ж.-Э. Монтюкла в 1758 г., ссылаясь на латинское издание «Истории династий» Абу-л-Фараджа, писал, что работавший в Багдаде «Мухаммад ибн Муса Хорезмиец составил астрономические таблицы, славившиеся долгое время под названием Зидж ал-Сенд» [226, с. 359]. В 1819 г. Ж. Деламбр [137, с. 3] также отмечал (видимо, на основании того же источника), что таблицы ал-Хорезми, озаглавленные «Алсендхенд», пользовались большим авторитетом.

М. Шаль дал обзор зиджа и указал, что ал-Хорезми первым ввел в употребление функцию синус[42]. Однако он заблуждался, полагая, что Аделард из Бата перевел с арабского на латинский язык оригинальный труд ал-Хорезми. На то, что подлинником служила обработка, принадлежащая ал-Маджрити, впервые в 1911 г. указал Ч. Хаскинс в статье об Аделарде из Бата (см. также [166]).

В это время сочинение ал-Хорезми вызвало интерес таких крупных историков науки, занимавшихся средневековой математикой и астрономией, как А. Бьёрнбо и Г. Зутер. А. Бьёрнбо исследовал три рукописи зиджа — оксфордскую (Бодлеянская библиотека, Cod. Auct. F.1.9), шартрскую (Публичная библиотека, № 214 (173)) и парижскую (Библиотека Мазарини, № 3642 (1258)). На основе их сравнения он подготовил текст к печати, пользуясь помощью датского арабиста Р. Бестгорна, который выяснил значение многих арабских терминов в латинском переводе.

Одновременно А. Бьёрнбо изучил тригонометрические таблицы ал-Хорезми [104] и дал перевод соответствующих разделов зиджа на датский язык. Ему принадлежит глубокий анализ этих разделов и определение роли ал-Хорезми в истории тригонометрии. Он рассмотрел описанные ал-Хорезми правила определения синуса по дуге и обратно с помощью таблицы синусов — первой в литературе на арабском языке. В качестве угловой единицы у ал-Хорезми служит «знак Зодиака», равный $\frac{1}{12}$ окружности круга, т. е. 30°; значения синусов даются в частях радиуса, который принимается равным 60, и выражаются в шестидесятиричных дробях.

А. Бьёрнбо разобрал также правила нахождения «обращенного синуса» (sinus versus), а также фигурирующие в обработке ал-Маджрити методы нахождения «прямой тени» (ctg) некоторого тела по высоте Солнца, высоты Солнца по тени, отбрасываемой телом, и «обращенной тени» (tg) по высоте Солнца. Он пришел к выводу, что значения для таблицы синусов были взяты у Птолемея и что, возможно, в оригинале имелась также таблица арксинусов (такая таблица фигурировала в зидже Абу-л-Хасана ‘Али ал-Маракиши (XIII в.) под названием «Таблицы ал-Хорезми»). Что касается таблицы тангенсов, то А. Бьёрнбо отметил, что они являются первыми в арабской литературе (если не были вставлены комментатором; на эту возможность указал Г. Зутер [23, с. 77]).

---

[42] Следует заметить, что тем не менее в историко-математической литературе долго бытовало утверждение, что эта важная заслуга принадлежит ал-Баттани.

Работа по изданию зиджа была прервана в 1911 г. смертью А. Бьёрнбо. Ее продолжил и завершил Г. Зутер, опубликовавший в 1914 г. латинский текст и таблицы со своими комментариями. К рассмотренным рукописям он добавил также рукопись, хранящуюся в Мадриде (Нац. библиотека, № 10016), а также снабдил издание необходимыми указателями. Г. Зутер подчеркнул, что Аделард из Бата перевел не оригинальный труд ал-Хорезми (как полагал А. Бьёрнбо), а обработку, принадлежащую ал-Маджрити.

Исследование сочинения было продолжено О. Нейгебауером. В 1962 г. он издал английский перевод латинского текста [20], который в предыдущем издании не был переведен, так как, по мнению Г. Зутера, читателю, незнакомому со средневековой астрономией, он бесполезен [23, с. XXIV]. Комментарии О. Нейгебауера к новому изданию, основывающиеся на современных данных, дополняют исследование Г. Зутера и представляют большой историко-научный интерес.

О. Нейгебауер обратил внимание на другую версию зиджа ал-Хорезми, которую составил Ахмад ибн Мусанна Абд ал-Карим — современник ал-Маджрити. Она базируется, по-видимому, на более полном и последовательном изложении материала, чем версия ал-Маджрити. В XII в. комментарий Ибн Мусанны был переведен на латинский язык известным переводчиком Гуго из Санкталлы и на древнееврейский — крупным ученым Ибн Эзрой. С рукописью перевода в свое время познакомился Г. Зутер, ошибочно принявший этот трактат за известный по литературным данным комментарий Абу Райхана Беруни к сочинению ал-Хорезми [291]; он придавал большое значение публикации и исследованию текста [23, с. 51]. Ошибку Г. Зутера относительно автора комментария, повторенную Ч. Хаскинсом [166, 2-е изд., с. 73], исправил испанский историк науки Х. Миййас Валликроза, изучивший и сравнивший имеющиеся рукописи.

Комментарий Ибн Мусанны известен в трех латинских рукописях, хранящихся в Оксфорде (Бодлеянская библиотека, Arch. Selden B 34; Savile, 15) и Кембридже (Gonvillee and Caius College, 456). Критическое издание этого текста осуществил в 1963 г. Э. Миййас Вендрелл [15].

Несколько позже, в 1967 г., была опубликована и древнееврейская версия комментария Ибн ал-Мусанны. Это издание выполнено Б. Голдстайном [9] по двум рукописным текстам, из которых один (находящийся в Парме: Bibl. Palatina 2636, olim De Rossi 212), несомненно, принадлежит Ибн Эзре, второй (Оксфорд, Бодлеянская библиотека, Ms Michael 400), хотя приписан ему же, представляет собой, по мнению издателя, труд другого переводчика. Издание сопровождается комментированным английским переводом.

Ибн Мусанна строит свое сочинение в форме вопросов и ответов. Он пытается объяснить индийские астрономические методы, предлагаемые ал-Хорезми, с помощью правил Птолемея, но не всегда его попытки успешны.

Тригонометрические разделы обеих редакций зиджа ал-Хорезми публикуются в настоящем томе (см. выше). К 1200-летнему юбилею ученого издается также том его астрономических трудов.

Исследование и сравнение всех сохранившихся версий зиджа ал-Хорезми позволят не только восстановить содержание оригинала, но и, как говорит Э. С. Кеннеди, «проследить распространение идей и методов между эллинистическим Средиземноморьем, Индией, Сасанидским Ираном и до Аббасидского Багдада» [199, с. 297]. На решение этих задач направлены многочисленные работы Э. С. Кеннеди и его учеников [195—203, 260 и др.], в течение долгого времени последовательно изучающих ранние зиджи разных авторов в сравнительном аспекте; полученные результаты составили новую главу в истории астрономии и математики периода средневековья и, в частности, добавили существенно новый материал о творчестве ал-Хорезми. Интересные новые данные, несомненно, даст исследование комментария Ибн ал-Масрура к зиджу ал-Хорезми. Важной проблемой взаимодействия и взаимовлияния астрономических учений эллинистических государств и стран Востока занимаются такие ученые, как Б. Л. Ван дер Варден [305а, 305б], О. Нейгебауер [68 и др.], Д. Пингри [249 и др.], И. Бурхард [112, 113] и др. В своих работах они неизменно касаются вопросов, непосредственно связанных с зиджем ал-Хорезми,— с его источниками, историей создания и дальнейшим развитием изложенных в нем методов.

2. Трактат ал-Хорезми о солнечных часах. Конструирование солнечных часов, широко применявшихся в быту и науке, было важной задачей ученых стран ислама. Описанию солнечных часов, основную деталь которых составляла обычно мраморная плита (отсюда их название: ар-рухамāт, дословно — мраморная плита), посвящены многочисленные астрономические сочинения. К числу первых принадлежал трактат ал-Хорезми «Книга о солнечных часах» (см., например, [268]).

Это сочинение до последнего времени считалось утерянным. Недавно его рукопись была обнаружена в Стамбуле Дж. ал-Даббахом, который готовит к печати русский перевод трактата.

3. Трактат ал-Хорезми о еврейском календаре. Трактат известен в единственной арабской рукописи, хранящейся в Банкипуре. Его текст был опубликован в Хайдарабаде в 1948 г. [11] среди сочинений предшественников и современников Абу Райхана Беруни. Содержание трактата исследовал Э. С. Кеннеди [196]. Русский перевод готовится к печати в томе астрономических трудов ал-Хорезми, посвященном 1200-летнему юбилею ученого.

4. Трактат о применении астролябии. Астролябии — универсальному астрономическому инструменту средних веков, ее устройству и применению посвящены сочинения многих ученых средневекового Ближнего и Среднего Востока [289]. Обширна и современная русская и иностранная литература о теории и истории астролябии (см., например, [72, 75, 77, 254, 267, 273]).

Ал-Хорезми, как и другие астрономы его времени, уделял этому чрезвычайно важному для практики инструменту большое внимание. Принадлежащие ему два трактата — о построении астролябии и о правилах действий с ней — относятся к числу первых, написанных багдадскими учеными. Автором первого сочинения об астролябии на арабском языке был ʻАли ибн Иса — современник ал-Хорезми (немецкий перевод опубликовал в 1920 г. Г. Шой).

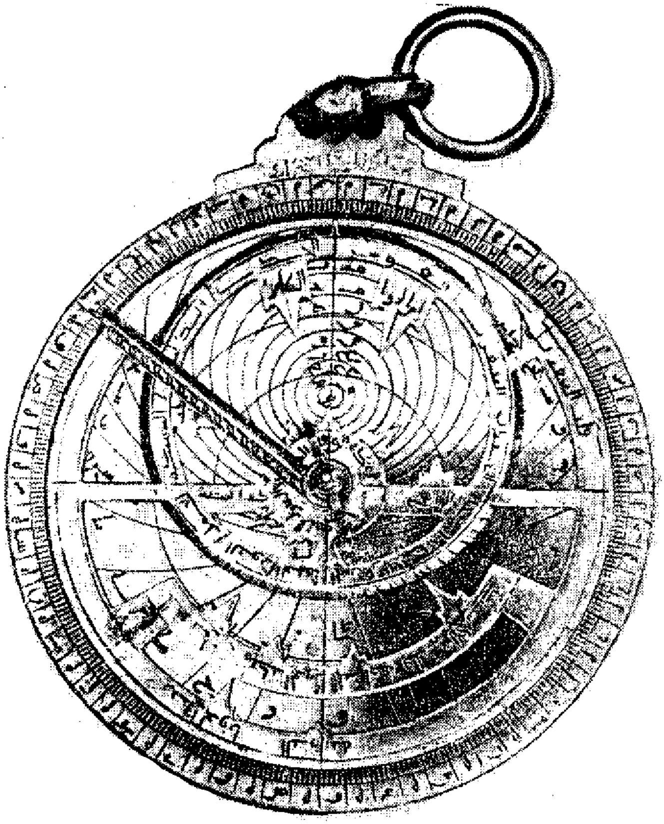


Рис. 61.

Во время ал-Хорезми быстро развивалось и производство астролябий — вид ремесла, граничившего с искусством. В Музее истории науки в Оксфорде хранится самая древняя из известных сейчас астролябий, датированная концом IX в. (рис. 61). Диаметр ее — 112 мм, материал — бронза; надпись указывает, что она была изготовлена Хафифом — учеником ‘Али ибн Исы[43].

Трактат ал-Хорезми о построении астролябии, насколько сейчас известно, утерян. Другой трактат — «Книга о действиях с помощью астролябии» — был обнаружен известным историком арабской науки Э. Видеманом в одной из рукописей Берлинской библиотеки. В этой рукописи (Б. Прусская библиотека, № 5793) содержатся сочинение ал-Фаргани об астролябии и другой трактат об этом инструменте, принадлежащий, по-видимому, тому же автору. Один из следующих разделов рукописи (лл. 81 об.— 88 об.) начинается словами: «Сказал Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми». В нем излагаются правила действий с помощью астролябии, и, по всей вероятности, это и есть упомянутый выше трактат или отрывок из него.

В 1922 г. он был опубликован в немецком переводе И. Франком [7], а небольшой отрывок о циркуле, с помощью которого определяли время молитв, опубликовали годом раньше Э. Видеман и И. Франк в совместной статье [309]. Трактат ал-Хорезми о применении астролябии рассматривается в работах Н. Д. Сергеевой [72, 75—77] и Б. А. Розенфельда [72].

Ниже мы приводим русский перевод трактата ал-Хорезми о применении астролябии — прибора, конструкция которого основана на теории стереографической проекции.

МУХАММАД ИБН МУСА АЛ-ХОРЕЗМИ

ТРАКТАТ О ПРИМЕНЕНИИ АСТРОЛЯБИИ

Сказал Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми: первое, что нужно тому, кто применяет астролябию, это определение высоты[44].

1. Чтобы определить высоту [Солнца], поверни астролябию спинкой к себе и повесь ее на свою правую руку; при этом Солнце находится над твоим левым плечом. Затем направь девяносто черточек [т. е. градуировку], которые находятся на спинке астролябии, к Солнцу. После этого постепенно поднимай алидаду до тех пор, пока не увидишь Солнце вступившим в оба отверстия. Затем посмотри, на какую из девяноста частей (джуз‘), находящихся на спинке астролябии, падает указатель, который имеется на алидаде,— он является ее заостренным концом. Это — высота Солнца к данному времени. Заметь себе это!

2. Для того чтобы определить гороскоп (ṭāли‘) и часы дня в его частях, которые истекли, определи высоту, как мы это тебе описали, и положение Солнца в

---

[43] Фотография и описание астролябии заимствованы из книги: Basserman — Jordan, Montres, horloges et pendules, p. 26.

[44] Нумерация задач дана И. Франком.

его знаке Зодиака и его градусе, как тебе известно [из таблиц]. Затем установи градус Солнца в соответствующем знаке Зодиака на этой высоте, а именно, на соответствующем альмукантарате на восточной стороне, предполагая, что измерение производится до полудня. Затем посмотри, какой знак Зодиака и какой из его градусов пересекает альмукантарат. Соответствующий градус этого знака Зодиака есть гороскоп.

а) Далее посмотри, на какой час приходится место, [противоположное градусу Солнца]; при этом начни отсчет часов на западной стороне; результат даст прошедшие часы дня и часть часа, если таковая имеется. Заметь себе целые (ṣаḥāḥ) часы!

б) Чтобы определить дробную часть [соответствующего] часа, т. е. избыток над целым часом, посмотри, на каком градусе подразделенного края лимба (ḥуджра) астролябии находится указатель в начале Козерога [на пауке]. Затем брось свой взгляд на градус, противоположный Солнцу, [поворачивая его,] пока не наложишь его на целый час; затем посмотри, на сколько отстоит указатель [на пауке] от места, на котором он стоял вначале. Соответствующие градусы покажут, на сколько он превышает целые часы; результат относится к доле дневного (нахāр) часа в этот календарный день (джаум).

в) Чтобы определить [дробную] часть дневного часа, перенеси градус Солнца на другой час [а именно, на конец еще не завершенного часа] с этого второго места; затем посмотри, на сколько передвинулся указатель с этого второго места. Результат дает часть [градуса экватора], соответствующую одному дневному часу. Заметь себе ее и соотнеси с ней эту дробную часть. Таким образом ты получишь ту [часть дня], которая истекла,— в часах и долях часа. Затем посмотри на линию середины неба, которая находится против рукоятки. Градус знака Зодиака, который она пересекает, есть градус середины неба. С «колышком» Земли дело обстоит точно так же.

г) Пример. Измеряем Солнце в Городе мира [т. е. Багдаде] и находим в качестве высоты 24° в начале дня [т. е. до полудня]. Солнце находилось в четырнадцатом градусе Скорпиона. Мы наложили градус Солнца на двадцать четвертый альмукантарат востока, так как высота была измерена в начале дня, т. е. до полудня, и нашли, что альмукантарат востока пересекает девятый градус зодиакального знака Стрельца. Тогда мы знаем, что гороскоп есть девятый градус Стрельца. Для середины неба мы находим двадцать второй градус Тельца и то, что он [т. е. противоположный градус] попадает на место у третьего часа. Смотрим далее на указатель для долей; он попадает на 263°. Заметим это. Затем повернем градус, противоположный Солнцу, и наложим его на второй целый час; находим, что указатель передвинулся от своего [первоначального] положения на 6°. Мы знаем, что 6° — это его избыток над двумя часами; он относится к продолжительности дневного часа. Мы нашли, что указатель стоял на

257° края [для двух часов]. Заметим это. Если хотим узнать продолжительность [в градусах экватора] для дневных часов, то поставим градус, противоположный Солнцу, на три целых часа и посмотрим на указатель; находим, что он стоит на 270°. Ищем разницу между этой величиной и 257° и находим, что это 13°. Тогда мы знаем, что из дня ушло 2 часа и 6 частей из 13 частей часа.

3. Чтобы определить гороскоп и часы ночью, проводя измерение по неподвижным звездам, повесь астролябию на свою правую руку и расположи оба отверстия алидады против звезды, которую ты хочешь измерить. Затем посмотри сквозь оба отверстия алидады [и поворачивай ее до тех пор], пока не увидишь звезду одним глазом. После этого посмотри, на какой градус [лимба] приходится указатель, а именно, указатель алидады; это высота звезды, которую ты измерял. Теперь переверни астролябию и поставь проекцию[45] соответствующей звезды на эту высоту с востока, если звезда не переходила линию середины неба, в противном случае — на соответствующую высоту на западной стороне. Затем посмотри, какой знак Зодиака и какой его градус пересекает восточный [начальный] альмукантарат. Это — гороскоп. Место, где линия пересекает середину неба, есть градус середины неба. Далее посмотри, на какой час падает градус Солнца; столько часов ночи прошло. Что касается дробных ночных часов, то поступай с градусом Солнца таким же образом, как поступал с градусом, противоположным Солнцу, днем.

4. Чтобы проверить безошибочность астролябии, определи гороскоп и количество истекших часов, как мы описали в начале книги; те же самые величины определи вычислительным способом с помощью таблиц (зйдж). Если последний результат согласуется с тем, что получено с помощью астролябии, то астролябия правильна.

Пример: наблюдаем Солнце, которое находится в пятнадцатом градусе Тельца. Мы находим, что его высота 44°. С помощью вычисления определим по таблице, сколько часов прошло. Будет 3 и одна шестая. Небо повернулось на 53°15′. Тем самым мы получим восхождение в Багдаде, которое приведено в таблице, и находим в ней [это число] против 24°2′ Рыбы на эклиптике; это — градус середины неба. Если с помощью астролябии ты найдешь то же самое значение, то астролябия правильна.

5. Чтобы определить дневную дугу в какой-либо [календарный] день, помести градус Солнца на восточном [начальном] альмукантарате; затем посмотри, куда попадет указатель [на лимбе] и сделай там отметку; потом поворачивай градус Солнца до тех пор, пока он не попадет на

---

[45] Ра'с ал-кавкаб, дословно «голова звезды» или «начало звезды»; во многих случаях речь идет о «заостренной голове звезды». Это всегда переводится как «проекция звезды», ибо ясно, что при этом имеется в виду острие малого выступа на пауке, которое соответствует проекции звезды (примечание Й. Франка).

западный [начальный] альмукантарат, и посмотри, куда доходит указатель. Затем посчитай градусы на лимбе между первым и вторым положениями указателя. Результат дает дневную дугу.

6. Чтобы определить ночную дугу, отними дневную дугу от 360°. Результат есть ночная дуга.

7. Чтобы найти число [равноденственных] часов дня, раздели дневную дугу на 15, результат есть число [часов]дня; затем отними число часов дня от 24. Остаток есть число часов ночи.

8. Чтобы определить восхождение по прямой сфере с помощью астролябии, помести начало Козерога на линию середины неба, затем [поворачивай паук до тех пор, пока конец Козерога не попадет на линию середины неба, и] посмотри, сколько градусов отсекает указатель на лимбе; они и являются градусами, восходящими вместе с Козерогом. Таким же образом поступай и с другими знаками Зодиака.

9. Чтобы определить восхождение для какого-либо места, помести тимпан, который соответствует широте места, вверху, затем возьми любой знак Зодиака и помести его начало на восточный альмукантарат, затем поворачивай его до тех пор, пока конец не достигнет [того же альмукантарата]. Затем посмотри, сколько знаков отсекает указатель [на лимбе]. Это то, что восходит с ним [т. е. вместе со всем знаком Зодиака]. Таким же образом поступай с другими знаками Зодиака.

10. Чтобы определить градус Солнца, определи [из таблицы] его наивысший подъем в этот день, затем обрати внимание на время года, в каком ты находишься, после чего поверни указатель знака Зодиака той четверти, в какой ты находишься [которая соответствует времени года], на линию середины неба. Солнце находится в том градусе, высота которого совпадает с высотой найденного тобой.

11. Чтобы определить градус Луны и пяти светил [планет], возьми наибольшую высоту Луны или одного из пяти светил [планет], затем возьми высоту одной неподвижной звезды одновременно с высотой Луны или упомянутой планеты. С помощью неподвижной звезды определи гороскоп, как я описал это в начале книги. Затем посмотри, в каком знаке Зодиака и в каком его градусе находится линия середины неба. [Луна или соответственно] светило находится на этом градусе.

12. Чтобы определить [произвольную] широту планеты, посмотри, какова высота планеты на линии середины неба, которую ты измерил и место которой ты определил. Если она больше, чем высота градуса, в котором ты нашел ее, то возьми разницу между обеими. Результат есть ее северная широта. Если высота светила [планеты] меньше, чем высота этого его градуса, то разность между обеими есть ее широта к югу.

13. Чтобы определить наклон какого-либо градуса [т. е. склонение соответствующей точки эклиптики], то

помести градус на линию середины неба, затем посмотри, какова высота, которую ты нашел, и заметь ее себе; затем осмотри круг на тимпане, по которому движутся начала Овна и Весов, и посмотри, на какой высоте он пересекает линию середины неба. Затем возьми разность между обоими [значениями]; это — склонение градуса. Если высота градуса больше чем высота Овна, то склонение северное; если же меньше, то оно южное.

14. Чтобы определить положение неподвижной звезды на астролябии, помести проекцию звезды на линию середины неба, затем посмотри, какой знак Зодиака и какой из его градусов совпадают с серединой неба. Это — положение звезды по долготе. Знай это.

15. Чтобы определить широту неподвижной звезды, посмотри, на какой высоте на линии середины неба расположен градус, в котором находится звезда, и заметь ее себе. [Кроме того, определи высоту звезды на середине неба]. Разница — это широта звезды. Если высота звезды больше, чем высота градуса, то она северная, если меньше, то она южная.

16. Чтобы определить, в каком градусе звезда восходит, помести проекцию [звезды] на восточный [начальный] альмукантарат. Затем посмотри, с каким знаком Зодиака и с каким из его градусов совпадает восточный альмукантарат. Звезда восходит одновременно с этим градусом.

17. Чтобы определить, с каким градусом [звезда] заходит, помести конец звезды [т. е. ее проекцию] на западный [начальный] альмукантарат и посмотри, с каким знаком Зодиака и с каким из его градусов совпадает западный альмукантарат.

18. Чтобы определить, с каким градусом звезда проходит (джара) через середину неба и какова ее высота в середине дня, помести ее проекцию на полуденную линию. Альмукантарат, с которым она совпадает, дает высоту звезды в полдень; это наибольшая высота, которую может достигнуть звезда на этом месте. Затем поверни эклиптику, и градус, который попадает на линию середины неба, будет тем, который при прохождении звезды [через середину неба] проходит ее вместе с ней.

19. Чтобы определить расстояние звезды от экватора [склонение], посмотри, какова высота проекции звезды и высота круга широт[46] Овна на линии середины неба, затем возьми разность между обеими; это — расстояние от экватора. Если проекция звезды лежит внутри круга широт Овна по направлению к полюсу, то ее склонение северное, если же она лежит снаружи по направлению к лимбу, то южное.

20. Чтобы определить обе дуги [дневную и ночную] для какой-либо произвольной звезды, по-

---

[46] Под кругом широт понимается проекция круга обращения.

мести ее проекцию на восточный [начальный] альмукантарат, посмотри, куда падает указатель [на лимбе], и заметь себе это. Затем поворачивай проекцию звезды до тех пор, пока не поместишь ее на западный [начальный] альмукантарат, и посмотри, куда попадет указатель. Затем подсчитай от первого положения до второго на круге широт звезды. Результат — это дневная дуга, [а отняв ее от 360°, получишь ночную дугу].

21. а) Чтобы определить тень по высоте и узнать, как ее строят, сделай следующее: помести указатель алидады на 45° высоты. Затем посмотри, на какое место [лимба] попадает конец указателя, а именно, на какое место круга на спинке астролябии, который предназначен для определения высоты. Там сделай отметку и проведи линию перпендикулярно той линии, которая находится против рукоятки астролябии и является диаметром круга. Далее проведи другую линию перпендикулярно к линии, проходящей через точки Востока и Запада. Каждую из этих [перпендикулярных] линий раздели на 12 равных частей. Это и есть его построение [а именно, построение квадрата теней].

б) Для определения тени применяй этот квадрат следующим образом: наблюдай Солнце [с помощью алидады], когда тебе угодно, и определи его высоту. Затем посмотри, на какую из обеих линий и на сколько делений попадает указатель, лежащий против высоты. Если высота меньше, чем 45°, то сосчитай деления от правого угла [по линии Восток — Запад] до указателя. Результат — это обращенная тень (кут̣р аз-з̣илл). Если высота больше 45°, то считай от правого угла [по вертикали]; результат — это плоская тень (з̣илл).

22. а) Чтобы определить широту места, измерь к полудню наибольшее возможное положение Солнца [во время солнцестояния] и заметь себе его, затем поверни астролябию и помести градус Солнца на линию середины неба[47]. Если он совпадает с высотой, которая получилась у тебя [из наблюдения] в полдень, то ты находишься в том климате, широта которого равна той, для которой сделан тот тимпан, на котором ты проводил измерение.

б) Если высота градуса Солнца другая, то возьми [на тимпане] разницу между высотой градуса Солнца и высотой восхождения Овна и заметь ее себе. Если Солнце находится к северу [т. е. имеет северное склонение], то вычти разницу между обеими высотами, которые ты заметил, из высоты, найденной с помощью наблюдения (к̣ийа̄с). Результат — это высота Овна в климате, в котором ты находишься. Если Солнце находится к югу, то прибавь то, что ты заметил себе, к высоте, которую наблюдал; результат — это высота Овна для места, в котором ты находишь-

---

[47] Следующий до конца раздела текст в рукописи отсутствует и соответственно дополнен.

ся. Результат сложения или вычитания отними от 90°. Таким образом ты получишь широту места.

23. Чтобы определить высоту [Солнца] по гороскопу (ṭāли‘), следи за гороскопом и помести его на восточный [начальный] альмукантарат. Затем посмотри, какую высоту имеет альмукантарат, на который попадает градус Солнца. Это — высота Солнца в этот час. Затем посмотри, [куда] следует поместить ее [высоту] — к западу или к востоку. И определи это.

24. Чтобы по гороскопу определить, сколько часов дня прошло, помести градус гороскопа на восточный [начальный] альмукантарат и посмотри, на какой час и какую его часть падает противоположный Солнцу градус, как я это объяснил тебе; столько часов дня прошло. Ночью посмотри, на какой час падает сам градус Солнца; столько часов ночи прошло.

25. Чтобы определить высоту Солнца, когда даны часы, помести противоположный Солнцу градус на желаемый час; затем посмотри, на какой соответствующий высоте альмукантарат падает градус Солнца, причем с востока на запад. [Порядковое число альмукантарата] есть высота.

26. Чтобы по гороскопу определить высоту звезды ночью, когда она находится над землей, помести градус гороскопа на восточный [начальный] альмукантарат, [затем посмотри, на какой альмукантарат попадает звезда], так что он дает высоту звезды в соответствующее время. Затем посмотри, следует ли взять высоту с востока или с запада.

27. Чтобы определить [высоту звезды] по часу, помести градус Солнца на желаемую часовую линию; затем взгляни на звезду, которая находится над землей [и посмотри, на какой альмукантарат она попадает]. Высота, которая соответствует ей с востока или запада, есть высота звезды к этому часу.

28. Чтобы по этой высоте звезды определить, имеет место ночь или день, так что говорится: «Эта высота есть известное [данное] число, и желательно знать, день или ночь сейчас», действуй следующим образом: помести проекцию звезды на [соответствующий] ее высоте альмукантарат, причем [на его восточную или западную] сторону, на которой она, т. е. звезда, находится. Затем посмотри на градус Солнца. Если он приходится на одно место[48] альмукантарата, то сейчас день, если же он попадает на другое место, то ночь[49].

29. Чтобы преобразовать равноденственные часы [которые прошли с начала дня] во временные и временные в равноденственные, помести

---

[48] Расположен под горизонтом, следовательно, на часовых линиях.

[49] Эта задача предполагает, что речь идет о высоте звезды над горизонтом, так как в большинстве случаев только для них начерчены альмукантараты, которые обеспечивают помещение звезды на определенную высоту.

противоположный градус Солнца на желаемый [косой] час. Затем посмотри, на какое место [лимба] попадает указатель, и заметь себе [отсчет], затем поворачивай противоположный градус Солнца до тех пор, пока не приведешь его на [начальный] альмукантарат Запада. Тогда посмотри, на какое место падает указатель, и ищи число градусов, которые находятся между обоими [отсчетами] на лимбе. На эту величину повернулось небо с восхода Солнца до настоящего времени. Это ты раздели на 15. Результат — это равноденственные часы.

30. Чтобы определить косые часы по прямым, возьми прямые часы и умножь их на 15. Заметь себе результат. Затем помести противоположный Солнцу градус на западный альмукантарат, посмотри, на какое место лимба попадает указатель, и заметь это себе. Затем поворачивай указатель по кругу широт неба (т. е. лимбу) до тех пор, пока ты не удалишь его от его места на столько градусов, сколько получилось у тебя от умножения равноденственных часов на 15. Затем посмотри, на какой час попадает противоположный градус Солнца. Это — косые часы. Если ты получаешь дроби, то поступи с градусом Солнца так, как [для ночных часов] с противоположным градусом Солнца.

31. Чтобы познакомиться с двенадцатью домами после того, как ты определил гороскоп и «колышки», возьми место, противоположное градусу гороскопа, и помести его на двухчасовую линию с западной стороны, затем посмотри, какой знак Зодиака пересекает линию середины неба; это — дом надежды (раджā). Затем помести место, противоположное градусу гороскопа, на четыре часа и посмотри, какой знак Зодиака пересекает линию середины неба; это — дом врагов (а'дā'). Затем помести место, противоположное гороскопу, на шесть часов и посмотри, какое место пересекает середину неба; это — гороскоп. Если он совпадает с исходным гороскопом, то ты получил правильное. Если же это не имеет места, то ты допустил ошибку. В таком случае повтори свою работу. Затем помести гороскоп на десять часов, отсчитываемых от запада, или на два часа — от востока, и посмотри, какой знак Зодиака и какой его градус пересекает линию середины неба; это — дом путешествия (сафар). Далее помести гороскоп на восемь часов от запада и посмотри, какой знак Зодиака пересекает линию середины неба; это — восьмой дом. Дом имущества (мāл) расположен против восьмого дома, дом братьев (иҳвāн) — против дома путешествия. Дом родителей (āбā) — против середины неба, дом детей (валад) — против дома надежды, дом болезни (марад) — против дома врагов и седьмой — против гороскопа.

Если это [определение противолежащих домов] ты охотнее делаешь с помощью астролябии, то ты должен определить один из домов на линии середины неба [т. е. нанести его на нее], и тогда то, что пересекает линия колышка Земли, является противоположным этому дому. Если будет воля Аллаха, а он превыше всего!

32. Определение места проектирования лучей с помощью астролябии. Помести градус [какой-либо планеты] на начальный альмукантарат и сделай у начала Козерога [на лимбе] значок [α]. К этому значку [α] добавь 60° и помести начало Козерога на сумму [α+60]. Точка [эклиптики], которая теперь попадает на восточный [начальный] альмукантарат, есть гексагональный аспект (нӯр ат-тасдӣс). Таким же образом поступи с квадратурой и тригональным аспектом. Точка [эклиптики], которая расположена против градуса гороскопа, есть градус захода.

33. Перемена годов рождения с помощью астролябии. Для этого определи, сколько полных лет рождения прошло, умножь их на 93°2′ и отними от результата [A] полный круг [360°], если таковой [в A] содержится [т. е. A>360°]. Заметь себе остаток [r]. Затем поворачивай паука до тех пор, пока гороскоп [рождения] не совпадет с восточным горизонтом. Затем определи место [z] на лимбе, которое противоположно указателю [на пауке], и прибавь к этому остатку [r]. На соответствующее место [$z+r$] помести указатель. Точка [эклиптики], которая [теперь] попадает на восточный горизонт, есть гороскоп рождения [соответствующего] года.

Чтобы найти гороскоп [данного] года с помощью астролябии, ищи [известный] гороскоп предшествующего года, помести его на восточный альмукантарат [и заметь градус z на лимбе, на который падает указатель]. При этом [к z] прибавь 93°, и результат есть гороскоп.

Чтобы получить гороскоп первой четверти, помести гороскоп года на [восточный] альмукантарат и отсчитай градус [z], на который падает указатель. При этом [к z] прибавь 49, помести указатель на соответствующее число и посмотри на восточный альмукантарат. Знак Зодиака, соответственно его градус, который он пересекает, есть гороскоп первой четверти. Прибавь к первой четверти его приращение и ты получишь вторую четверть. Таким же образом поступай с каждой четвертью, с которой ты хочешь произвести [это].

34. Определение того, расположен ли город, в котором ты находишься, южнее или севернее [другого]. Город, в котором ты найдешь бо́льшую высоту [экватора], расположен к югу, а тот, в котором ты найдешь меньшую,— к северу. Это ты узнаешь, если будешь наблюдать Солнце, когда оно входит в первый градус Овна. Пусть она [т. е. высота] равна 53°, а если ты ее в тот же день наблюдал в Куфе,— 58°. Разность есть 5°. Место с большей высотой расположено дальше к югу.

35. Определение восхода [начала] утренней зари и захода [конца] вечерней зари. Помести

противоположный градус Солнца на 18-й альмукантарат высоты от запада. Затем посмотри, на какую часовую линию падает градус Солнца. К соответствующему часу восходит утренняя заря.

Заход вечерней зари. Чтобы определить, когда кончается заход вечерней зари, помести противоположный градус Солнца на 18-й [альмукантарат] высоты от востока. Затем посмотри, на какую часовую линию падает градус Солнца. К этому часу вечерняя заря заходит.

36. а) Определение времени [молитв] з̣ухр и ʻас̣р. Для этого измерь высоту кульминации Солнца. От нее отними 7°; это даст з̣ухр. Для времени ʻас̣р возьми высоту кульминации Солнца в этот день и отними ее от 90°. От остатка возьми $\frac{1}{10}$ и прибавь ее к половине высоты кульминации. Результат — это высота ко времени ʻас̣р.

в) В другой рукописи я нашел [что говорит автор]: чтобы найти гороскоп года, добавь к гороскопу предыдущего года 93°15″. Между гороскопом года и первой четвертью лежат 49° и две трети, между гороскопом года и второй четвертью — 173°50′, а между гороскопом года и третьей четвертью — 171°15′.

37. Определение азимута с помощью астролябии. Определи высоту [Солнца] и помести градус Солнца на соответствующий альмукантарат на востоке или западе. Затем посмотри, какая линия азимута [на тимпане] совпадает с градусом Солнца. Полученная таким образом линия дает азимут для соответствующего времени. Если [число для] азимута, которое ты получил, находится между [линией] Востока экватора и линией, «идущей в глубь Земли», то азимут лежит между Востоком и Севером, а если число находится между линией востока и линией середины неба, то он лежит между востоком и югом. Если оно находится между линией запада земного экватора и линией середины неба, то он лежит между югом и западом, и если оно находится между [линией] запада и линией, «идущей в глубь Земли», то он лежит между западом и севером.

Применение азимута следующее. С его помощью определяется полуденная линия. Линия востока [экватора] отделяет линии азимутов на восточной стороне пространства между двумя «шестерками»[50] (ал-ва̄ваин), а линия запада экватора — линии азимута на западной стороне пространства между обеими «шестерками».

Чтобы определить время з̣ухр, помести градус Солнца на 14° азимута с запада. Затем посмотри, на какой альмукантарат попадает его высота [т. е. градуса Солнца]. Это даст конец времени з̣ухр на западе.

Чтобы получить конец времени ʻас̣р, вычти высоту кульминации от 90°. Одну десятую часть остатка прибавь к [половине] высоты кульминации. Результат дает высоту в конце ʻас̣р.

---

[50] «Шесть» означает порядковый номер шестой линии азимута.

38. Определение времени лунного восхода. Для этого определи градусы Солнца и Луны. Если между Луной и Солнцем меньше чем 180°, то раздели расстояние на длительность одного [косого] дневного часа. Таким образом получаются дневные часы, прошедшие до восхода Луны. Если между Луной и Солнцем больше чем 180°, то умножь длительность [дневного] часа на 12 и вычти произведение из расстояния между ними. Остаток раздели на длительность ночного часа. Результат дает ночные часы, прошедшие до восхода Луны. Расстояние между Солнцем и Луной измеряется восхождением градуса [по наклонной сфере]. Если дуга, проходящая между градусом Луны и градусом Солнца, меньше чем половина дневной дуги, и она ближе к восходу [Солнца], то отнеси оба [градуса] к восходу Солнца; если она ближе к полудню, то отнеси к полудню, а если она ближе к заходу Солнца, то отнеси к заходу. Если она [т. е. дуга] больше чем дневная дуга и меньше чем [дневная] и половина ночной дуги на величину, которая меньше половины ночной дуги, то отнеси к началу ночи. Если она ближе к полуночи, то отнеси к полуночи, а если ближе к восходу Солнца, то к утру. Это только приближенно. Если ты хочешь знать более точно, то получи для Солнца и Луны соответствующие дневные и ночные часы и поступай, как раньше.

Если ты хочешь знать, как долго после наступления ночи [Луна] остается видимой, то вычти из расстояния [δ] между ними [т. е. Луной и Солнцем] и дневной дуги [t] [дневную дугу Солнца T]. Остаток [$\delta+t-T$] раздели на продолжительность ночного часа и тогда ты получишь время, когда Луна остается взошедшей.

39. Определение гороскопа с помощью Луны. Возьми высоту Луны и определи, находится она с восточной или западной стороны. Затем определи долготу и широту Луны [из таблиц] к этому часу. Если последняя северная, то отними от высоты Луны величину, равную ее широте; если она южная, то прибавь ее к широте. Результат возьми в качестве высоты Луны. Помести градус Луны на соответствующую высоту к востоку, если Луна к этому времени находилась на востоке, и если она находилась на западе, то с западной стороны, как и у Солнца. Градус эклиптики, который совпадает с восточным горизонтом, есть гороскоп. И знай, что Луна, когда она перешла через голову, будет иметь северную широту до тех пор, пока не совпадет с хвостом, а когда она перешла через хвост, то будет иметь южную широту, пока не совпадет с головой.

40. Если ты хочешь определить разницу [времени] дня в двух городах, то возьми высоту Солнца с помощью двух отверстий на алидаде в полдень в одном из двух городов, затем в другом в тот же самый день и отними меньшую [высоту] от большей. Каждые 15° разницы представляют собой прямой час. Место с большей высотой лежит дальше к востоку.

Так, долгота Багдада 70°, долгота Дамаска 60°, а разница — $\frac{2}{3}$ часа.

41. **Указание причины, почему астролябия носит названия: совершенная, половина, одна треть, одна пятая, одна шестая.** Линии, которые даются на всех астролябиях одинаковым образом, это круги кругов широт [т. е. параллелей к экватору], а именно [круга широт] Рака, Овна и Козерога, линии меридианов и экватора. Круги же альмукантаратов различны. На совершенной астролябии 90 таких кругов. Инструмент, на котором их 45,— это половина; на котором их 30,— одна треть, ибо на нем для каждого третьего градуса проведен круг. На [астролябии], которая называется одной пятой, между каждыми двумя кругами находится пять градусов. Если всего имеется 15 кругов, то астролябия называется одной шестой; если их 9, то одной десятой, ибо на этой астролябии расстояние между двумя кругами — десять градусов. Совершенно таким же образом подразделяются знаки Зодиака.

42. **Определение места проектирования лучей с помощью астролябии.** Чтобы определить место проектирования лучей, возьми градус [светила] и помести его на альмукантарат горизонта. Если ты хочешь найти место исхода левого гексагонального аспекта, то сделай в начале Козерога [на лимбе] отметку, поверни ее на 60° и посмотри, на какой знак Зодиака и какой [его градус] падает альмукантарат горизонта. Это — место его левого гексагонального аспекта. Если ты хочешь иметь правый, то поверни начало Козерога с его места в противоположном направлении на 60°. [Место эклиптики], на которое попадает альмукантарат горизонта, это правый гексагональный аспект. Чтобы получить тригональный аспект, поверни на 120°, чтобы получить квадратуру,— на 90° направо и налево, как в первом случае.

43. **Подразделение земного шара на пять зон (тарйк) Птолемеем.** Первая зона, которая лежит к северу, это 36°9′, вторая —30°, третья, где день и ночь равны между собой, 23°51′ к северу и столько же к югу; четвертая — это 30° и пятая 36°9′, а все они вместе дают 180°.

АННОТИРОВАННАЯ БИБЛИОГРАФИЯ

I. ИЗДАНИЯ СОЧИНЕНИЙ АЛ-ХОРЕЗМИ

1. Аль-Хорезми Мухаммад. Математические трактаты. Перевод Ю. X. Копелевич и Б. А. Розенфельда, комментарии Б. А. Розенфельда, под ред. Г. П. Матвиевской. Ташкент, 1964.

Русский перевод арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми и тригонометрических разделов его зиджа.

2. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. Перевод П. С. Юшкевича. Вып. 1. Арифметика и алгебра. М.—Л., 1932, с. 25—31.

Перевод отрывков из «Алгебры» ал-Хорезми — по английскому тексту переводов Ф. Розена [21] и Ч. Л. Карпинского]10] (с. 26—28) и немецкому переводу Ю. Рушка [22] (с. 29—30).

3. Куббель Л. Е., Матвеев В. В. Арабские источники VII—X веков по этнографии и истории Африки южнее Сахары. Тексты и переводы. М.—Л., 1960, с. 269—292.

Перевод раздела об Африке из «Книги картины Земли» ал-Хорезми.

4. Хрестоматия по истории математики. Под ред. А. П. Юшкевича. Т. I. М., 1976, с. 49—55.

Отрывки из русского перевода [1] арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми.

5. Boncompagni B. Trattati d'Aritmetica publicati da Baldassare Boncompagni. I. Algoritmi de numero indorum. II. Joanni Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice. Roma, 1857.

I. Текст средневекового латинского перевода арифметического трактата ал-Хорезми. Перевод выполнен в XII в. Герардо Кремонским или Аделардом из Бата. Публикуемая рукопись, переписанная в XIV в., хранится в Кембридже под шифром Ji 6,5 (fol. 102 r. — 109v).

II. Текст латинского сочинения (с. 25—136), представляющего собой раннюю обработку трактата ал-Хорезми. Опубликован по рукописи Парижской Национальной библиотеки, в заглавии которой автором назван Иоанн Севильский (XII в.). В других библиотеках имеются рукописи, где тот же текст приписан Герардо Кремонскому (см. [143]).

6. Colebrooke H. T. Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhascara, London, 1817.

Во введении к книге об индийской алгебре и арифметике, посвященном истории алгебры, впервые был дан (с. XXV — XXIX) английский перевод отрывка из «Алгебры» ал-Хорезми по рукописи Бодлеянской библиотеки (Оксфорд), хранящейся под шифром Hunt, 214.

7. Frank J. Die Verwendung des Astrolabs nach al-Chwârizmi. Abhandlungen zur Geschichte der Naturwiss. und der Medizin, H. 3, Erlangen, 1922.

Немецкий перевод трактата ал-Хорезми о действиях с астролябией по берлинской рукописи (Cat. Ahlwardt, No 5790), которая была обнаружена Э. Видеманом, опубликовавшим введение к трактату [26].

8. Gandz S. The Mishnat ha Middot, the first Hebrew Geometry of about 150 c. e. and Geometry of Muhammad Ibn Musa al-Khowarismi, the first Arabic Geometry (c. 820), representation of the Mishnat ha Middot. «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik», Abt. A, Bd 2, Berlin, 1932.

Даются английский перевод геометрического раздела «Алгебры» ал-Хорезми, а также исследование этого раздела (см. [150]).

9. Goldstein B. R. Ibn al-Muthannā's commentary on the astronomical tables of al-Khwārizmi. New Haven and London, 1967.

Издание комментария астронома X в. Ибн ал-Мусанны к зиджу ал-Хорезми по средневековому еврейскому переводу; публикуется текст и английский перевод двух рукописей.

10. Karpinski L. C. Robert of Chester's Latin translation (1145) of the Algebra of Al-Khowarizmi, N. Y., 1915; 2nd ed. in: L. Ch. Karpinski and J. G. Winter, Contributions to the history of science, Ann — Arbor, 1930.

Публикация латинского перевода «Алгебры» ал-Хорезми, выполненного в 1145 г. Робертом Честерским. Издан вместе с английским переводом и исследованием (см. [185]).

11. Al-Khuwārizmī. Istikhrādj ta'rīkh al-yahūd wa a'yadhim. In: Rasa'il mutaffarika fī'l-hay'a li-l-mutakaddimin wa mu'asiray al-Bīrūnī. Osmania Oriental publications Bureau, Hyderabad — Deccan, 1948.

Арабский текст трактата ал-Хорезми о еврейском календаре.

12. Al-Khwārizmī Muhammad ibn Mūsā. Al-Jabr. Transl. from the Arabic by Husayn Khadyuijm. Tehran, 1969.

Персидский перевод «Алгебры» ал-Хорезми.

13. Libri G. Histoire des sciences mathématiques en Italie, t. 1. Paris, 1838, p. 253—297.

Латинский текст перевода «Алгебры» ал-Хорезми, принадлежащего, по всей вероятности, Герардо Кремонскому (см. [103]). Этот перевод более полный, чем выполненный Робертом Честерским [10].

14. Marre A. Le Messahat de Mohamed ben Moussa, extrait de son Algèbre. Trad. et annot. «Nouvelles annales de mathématiques», t. V, 1846, 557—581; 2 ad. «Annali di matem.», t. VII, 1866, p. 268—280.

Французский перевод геометрического раздела «Алгебры» ал-Хорезми.

15. Millás Vendrell E. El comentario de Ibn al-Mutannā' a las Tables astrónomicas de al-Jwārizmī. Madrid—Barcelona, 1963.

Критическое издание латинского перевода обработки Ибн ал-Мусанны зиджа ал-Хорезми, принадлежащего Гуго из Санкталлы (XII в.). (ср. [9]).

16. Musharrafa, Ali Muşṭafa and Ahmad, Muhammad Mursī. Kitāb al-jabr w'al-muqābala li-Muhammad bin Mūsā al-Khwārizmī. Cairo, 1939.

Новое издание арабского текста «Алгебры» ал-Хорезми по оксфордской рукописи (см. [21]).

17. Mžik H. v. Africa nach der arabischen Bearbeitung der Geographike hyphegesis des Claudius Ptolemaeus von Muhammad ibn Mūsā al-Hwārizmī. Wien, 1916.

Текст и немецкий перевод раздела об Африке из «Книги картины Земли» ал-Хорезми.

18. Mžik H. v. Das Kitāb surāt al-arḍ des Abū Ga'far Muhammad ibn Mūsā al-Huwārizmī. Hrsg. nach dem handschriftlichen Unikum der Bibliothèque de l'université et régionale in Strassburg (cod. 4247). Leipzig, 1926.

Публикация полного арабского текста «Книги картины Земли» ал-Хорезми по рукописи, переписанной в 1037 г. и хранящейся в Страсбурге (№ 4247). X. Мжик намеревается издать также немецкий перевод сочинения, но ввиду сложности задачи (многие места из-за недостатков рукописи с трудом поддаются расшифровке) он заключил, что она может быть разрешена только после предварительного подробного исследования отдельных разделов трактата. Это мнение разделял академик И. Ю. Крачковский [60, с. 94].

19. Nallino C. A. Al-Huwārismī e il suo rifacimento della Geografia di Tolomeo (Surāt al-ard). Roma, 1895; 2 ed. in : Nallino A. C. Raccolta di scritti editi e inediti, vol. 5, Roma, 1944, p. 452—532.

В работе, посвященной анализу «Книги картины Земли» ал-Хорезми, приводятся отрывки из этого сочинения.

20. Neugebauer O. The astronomical tables of al-Khwārizmī. Translation with commentaries of the Latin Version edited by H. Suter. Historisk — filosofske skrifter udgivet af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Bd 4, Nr. 2, Köbenhavn, 1962.

Английский перевод зиджа ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити и комментарии к нему. Перевод выполнен по латинскому тексту, изданному Г. Зутером [23]. Об исследовании зиджа см. [247].

21. Rosen F. The Algebra of Mohammed ben Mūsā. London, 1831.

Первое издание арабского текста «Алгебры» ал-Хорезми — по рукописи Бодлеянской библиотеки Оксфордского университета (Hunt., 214), ранее рассматривавшейся Колебруком [126]; оно сопровождается полным английским переводом. Хотя впоследствии выяснилось, что перевод не всегда буквально передает текст оригинала [22, 255], издание Ф. Розена сыграло огромную роль как в популяризации трактата ал-Хорезми, так и в уточнении взгляда историков математики на развитие алгебры в средние века.

22. Ruska J. Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst. «Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. der Wissenschaften», phil. — hist. Klasse, Jg 1917. Abh. 2. Heidelberg, 1917.

В работе, посвященной исследованию «Алгебры» ал-Хорезми, дается немецкий перевод отрывков, которые, по мнению автора, были переведены Ф. Розеном [21] неточно. О содержании работы подробнее см. [255].

23. Suter H. Die astronomischen Tafeln des Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī in der Bearbeitung des Maslama ibn Aḥmad al-Madjrītī und der latein. Übersetzung des Athelhard von Bath auf Grund der Vorarbeiten von Björnbo und R. Besthorn in Kopenhagen herausgegeben und kommentiert. «Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences et des Lettres de Danemark», sér 7 (Lettres), t. 3. Copenhagen. 1914.

Издание латинского перевода (переводчик — Аделард из Бата) зиджа ал-Хорезми в обработке испанского астронома ал-Маджрити, жившего ок. 1000 г. Рукопись была впервые обнаружена М. Шалем [125]. Публикацию осуществил Г. Зутер на основе подготовительной работы А. Бьёрнбо и А. Бестхорна: им проверен латинский текст, добавлены комментарии, указатель арабских терминов, именной и предметный указатели. Издание сыграло важную роль в изучении астрономического наследия ал-Хорезми. Английский перевод латинского текста опубликовал в 1962 г. О. Нейгебауер [20].

24. Tropfke J. Geschichte der Elementar—Mathematik, Bd III, Berlin — Leipzig, 1937, s. 205—206.

В курсе истории элементарной математики И. Тропфке приводит латинский текст (по [13]) и немецкий перевод отрывка из «Алгебры» ал-Хорезми относительно решения квадратного уравнения $x^2+21=10x$.

25. Vogel K. Mohammed ibn Mūsā Alchwārizmī' Algorismus. Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern. Aalen, 1963.

Факсимильное издание латинского перевода трактата ал-Хорезми об индийской арифметике, впервые опубликованного Б. Бонкомпаньи [5]. Исправлены многочисленные ошибки первого издания.

26. Wiedemann E. Einleitung zu arabischen astronomischen Werke. — «Weltall». Bd. 20, H. 3/4, 1919.

Немецкий перевод введения к трактату ал-Хорезми о применении астролябии (см. [7]).

27. Wiedemann E., Frank J. Zirkel zur Bestimmung der Gebetszeiten. «Sitzungsberichte d. phys. — med. Sozietät in Erlangen», Bd. 52/53, 1920—1921, Erlangen, 1922, s. 122—125.

Немецкий перевод отрывка с описанием циркуля для определения времени молитвы из трактата ал-Хорезми о применении астролябии (см. [7]).

II. ЛИТЕРАТУРА ОБ АЛ-ХОРЕЗМИ

28. Александров А. Д. Общий взгляд на математику. — В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. Т. I. М., 1956, с. 5—78.

В глубоком по содержанию очерке истории математических идей отмечена важная роль ал-Хорезми в развитии арифметики и алгебры.

28а. Ахмедов С. А. Из истории преподавания математики в Средней Азии (на узбекском языке). Ташкент, 1977.

Приводятся сведения об ал-Хорезми и его арифметическом и алгебраическом трактатах.

29. Бартольд В. В. История культурной жизни Туркестана. Л., 1927; Сочинения, т. II, ч. I. М., 1963, с. 169—433.

Отмечается преобладающее влияние уроженцев Средней Азии (Балха, Мерва, Хорезма) на развитие науки Ближнего и Среднего Востока в IX—X вв. и, в частности, подчеркнута важная роль ал-Хорезми в истории математики.

30. Бартольд В. В. Введение к изданию Худуд ал-'алам. Сочинения, т. VIII. М., 1973, с. 509—512.

Рассматривается «Книга картины Земли» ал-Хорезми как первое на арабском языке сочинение по географии.

31. Беллюстин В. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. М., 1940.

В работе значительное внимание уделено арифметическому трактату ал-Хорезми. Критические замечания — в работе А. П. Юшкевича [91].

32. Бируни Абу Рейхан. Избранные произведения, т. I, Памятники минувших поколений. Перевод и примеч. М. А. Салье. Ташкент, 1957.

Упоминаются (с. 375) астрономические наблюдения ал-Хорезми. Имеется также несколько ссылок на «Зидж Синдхинд».

33. Бируни Абурейхан. Избранные произведения, т. II. Индия. Перевод А Б. Халидова и Ю. Н. Завадовского, комментарии В. Г. Эрмана и А. Б. Халидова. Ташкент, 1963.

Сделаны ссылки на зидж ал-Хорезми в связи со способами определения диаметров Солнца и Луны (с. 413) и с описанием различного вида затмений (с. 439).

34. Бируни Абу Рейхан. Избранные произведения, т. III. Определение границ мест для уточнения расстояния между населенными пунктами (Геодезия). Исследование, перевод и примеч. П. Г. Булгакова. Ташкент, 1966.

Упоминаются результаты астрономических наблюдений, проводившихся самим ал-Хорезми (с. 125), а также его сочинения — зидж (с. 199, 223) и «Алгебра» (с. 222).

35. Беруни Абу Райхан. Избранные произведения, т. V, ч. I. Канон Мас'уда. Под ред. С. Х. Сираждинова и Г. П. Матвиевской. Вступительная статья, перевод и примеч. П. Г. Булгакова и Б. А. Розенфельда при участии М. М. Рожанской и А. Ахмедова. Ташкент, 1973, т. V, ч. 2. Перевод и примеч. Б. А. Розенфельда и А. Ахмедова при участии М. М. Рожанской, С. А. Красновой и Ю. П. Смирнова. Ташкент, 1976.

Имеются ссылки на данные, приведенные в зидже ал-Хорезми (ч. I, с. 113; ч. II. с. 225, 228).

35а. Бобынин В. В. Очерки истории развития математических наук на Западе. М., 1896.

Подробно освещается период освоения европейскими учеными математических знаний из арабской научной литературы.

36. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. Под ред. В. Д. Чистякова. Минск, 1974; 2-е изд. Минск, 1979.

Рассматриваются арифметический и алгебраический трактаты ал-Хорезми и дается оценка их роли в истории математики.

37. Боголюбов А. Н. Развитие математики и математических знаний в Средней Азии. — В кн.: История отечественной математики, т. I. Киев, 1966, с. 391—394.

В очерке истории математики в Средней Азии значительное место уделено творчеству ал-Хорезми. Дан подробный обзор его сочинений.

38. Бубнов Н. М. Происхождение и история наших цифр, палеографическая попытка. Киев, 1908.

В данной работе Н. М. Бубнова, как и в следующей, рассматривается вопрос о происхождении современных цифр и об истории арифметики в средневековой Европе, где под влиянием арифметического трактата ал-Хорезми происходило распространение «индийской арифметики» («алгорисм»).

39. Бубнов Н. М. Арифметическая самостоятельность европейской культуры, т. 1—2. Киев, 1908. См. [38].

40. Булгаков П. Г. Жизнь и труды Беруни. Ташкент, 1972.

Среди трудов предшественников великого среднеазиатского ученого Абу Райхана Беруни отмечены сочинения ал-Хорезми по математике и астрономии.

41. Булгаков П. Г. Беруни и Хорезми. — В кн.: Математика и астрономия в трудах ученых средневекового Востока. Ташкент, 1977, с. 117—122.

Статья посвящена анализу ссылок Абу Райхана Беруни на труды ал-Хорезми и в особенности на его зидж и «Книгу картины Земли». Проведено сравнение таблиц широт и долгот населенных пунктов в географическом трактате ал-Хорезми и в «Каноне Мас'уда» Беруни.

42. Булгаков П. Г. К истории среднеазиатской средневековой астрономии.— Общественные науки в Узбекистане, 1980, № 11, с. 54—56.

Рассматриваются сведения о работе ученых — уроженцев Средней Азии при дворе ал-Ма'муна в Мерве.

42а. **Булгаков П. Г.** Ибн Халдун и Абу Камил о Хорезми.— Общественные науки в Узбекистане, 1982, № 8, с. 40—41.

Приводятся данные из средневековых арабских источников, подтверждающих, что ал-Хорезми был основоположником арабоязычной алгебраической литературы.

43. **Ван дер Варден Б. Л.** Пробуждающаяся наука. Перевод с голландского И. Н. Веселовского. М., 1959.

В гл. II — история систем счисления, цифр и развитие техники счета — автор приводит сведения об ал-Хорезми (с. 79—80) и его арифметическом трактате. В гл. VIII рассматривается вопрос об источниках «Алгебры» ал-Хорезми (с. 376—379).

44. **Васильев А. В.** Целое число. Петроград. 1922, с. 71—73.

Сообщаются краткие сведения об ал-Хорезми и его сочинениях.

45. **Ващенко-Захарченко М. Е.** История математики. Киев, 1883, т. I, с. 233, 452—473.

Излагается содержание арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми, дается высокая оценка его роли в развитии математики. Очерк истории средневековой восточной математики сопровождается обзором литературы, посвященной трудам ученых этого периода, включая ал-Хорезми.

46. **Ващенко-Захарченко М. Е.** Характер развития математических наук у различных народов. Киев, 1882.

Затрагиваются вопросы истории арифметики и алгебры в средние века.

47. **Вилейтнер Г.** Хрестоматия по истории математики. Перевод П. С. Юшкевича. Вып. 1. Арифметика и алгебра. М.—Л., 1932, с. 25—31.

Наряду с переводом выдержек из «Алгебры» ал-Хорезми (см. [2]), даются историко-научные комментарии к ним.

48. **Володарский А. И.** Очерки истории средневековой индийской математики. М., 1977.

Отмечаются те вопросы, в которых индийская математика повлияла на творчество ал-Хорезми.

49. **Вороновский Д. Г.** Астрономы Средней Азии от Мухаммеда ал-Хаваризми до Улугбека и его школы (IX—XVI вв.). — В кн.: Из истории эпохи Улугбека. Ташкент. 1965, с. 100—172.

Среди других среднеазиатских астрономов, сведения о которых даны в статье, назван и ал-Хорезми (с. 105); приведена библиография (с. 146).

49а. **Глейзер Г. И.** История математики в школе. М., 1964.

Приводятся сведения об ал-Хорезми и его математических трудах.

50. **Григорьян А. Т., Рожанская М. М.** Механика и астрономия на средневековом Востоке. М., 1980.

В связи с проблемами небесной механики в средние века в книге сделаны многочисленные ссылки на зидж ал-Хорезми.

51. **Депман И. Я.** История арифметики. М., 1959.

Отмечена важная роль ал-Хорезми в развитии арифметики.

52. **Депман И. Я., Искаков М.** Мухаммед Хорезми. — В кн.: Великие ученые Средней Азии и Казахстана (VIII—XIX вв.). Под ред. К. Бесембиева и М. Сатбаева. Алма-Ата, 1965, с. 5—24.

Дан очерк жизни и научной деятельности ал-Хорезми.

53. **Депман И. Я.** Рассказы о старой и новой алгебре. Л., 1967.

В популярном очерке истории алгебры сообщаются сведения об «Алгебре» ал-Хорезми.

54. **Зутер Г.** История математических наук. Перевод с немецкого, СПб, 1905.

В разделах об «арабском» периоде истории математики упоминаются сочинения ал-Хорезми (см. [287]).

55. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия в трех томах. Под ред. А. П. Юшкевича, т. I. М., 1970.

Даются подробный очерк научной деятельности ал-Хорезми и оценка его роли в истории математики (с. 205—245, 328).

56. Кабулов В. К., Файзуллаев А. Ф. Ал-Хорезми, алгоритмы и развитие кибернетики. Труды XIII Междунар. конгресса по истории науки. Секции III, IV. М., 1974, с. 122—125.

Приведены сведения об ал-Хорезми, его трудах и их изучении историками науки. Основное внимание уделено развитию понятия «алгоритм».

57. Карра де Во Б. Арабские географы. Перевод О. Крауш, под ред. И. Ю. Крачковского. Л., 1941.

Среди арабских географических сочинений «Книга картины Земли» ал-Хорезми не названа, но дано описание измерения градуса меридиана, проводившегося при ал-Ма'муне.

58. Кары-Ниязов Т. Н. О культурном наследии узбекского народа. Ташкент, 1960, с. 14—18.

Приведены краткие сведения о жизни и научной деятельности ал-Хорезми.

59. Кары-Ниязов Т. Н. Астрономическая школа Улугбека. М., 1950. с. 13—14, 42—44.

Дан краткий очерк научной деятельности ал-Хорезми, главным образом в области алгебры.

60. Крачковский И. Ю. Арабская географическая литература. Избранные сочинения. Т. IV. М.—Л., с. 91—99.

В исследовании выдающегося советского востоковеда дан исчерпывающий анализ «Книги картины Земли» ал-Хорезми. Приводятся биографические и библиографические сведения.

61. Крымский А. Е. История арабов и арабской литературы. Т. I. М., 1914.

Труды ал-Хорезми ошибочно приписываются двум разным лицам: математику IX в. и географу XI в. Ошибка объясняется тем, что в начале XX в. географический трактат ал-Хорезми еще не был точно датирован (время переписки рукописи иногда принималось за время написания сочинения).

61а. Крысицкий В. Шеренга великих математиков. Перевод с польского Е. К. Шпак. Варшава, 1981.

Содержится краткий очерк об ал-Хорезми.

62. Кэджори Ф. История элементарной математики с указанием на методы преподавания. Перевод с английского под ред., с примечаниями и прибавлениями И. Ю. Тимченко. Одесса, 1917.

Имеются многочисленные упоминания об арифметическом и алгебраическом трактатах ал-Хорезми, в которых автор не видит «ничего оригинального» (с. 115). Говоря об источниках «Алгебры», он отмечает наличие в ней как индийских, так и греческих элементов, причем последние считает преобладающими (см. [114]).

63. Матвиевская Г. П. К истории математики Средней Азии IX—XV веков. Ташкент, 1962.

В числе очерков о среднеазиатских математиках и астрономах дается очерк об ал-Хорезми и его научной деятельности (с. 43—47). Приводится аннотированная библиография (издания трудов ал-Хорезми и литература о нем).

64. Матвиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Ташкент, 1967.

Сообщаются краткие сведения об ал-Хорезми и даются ссылки на литературу о нем (с. 80). В главах, посвященных практической арифметике (гл. IV) и алгебре (гл. V). рассматриваются его сочинения об индийской арифметике и алгебраический трактат. О латинских переводах и ранних европейских обработках этих сочинений речь идет в гл. VIII.

65. Матвиевская Г. П. Развитие учения о числе в Европе до XVII века. Ташкент, 1971.

Значительное место в книге занимают разделы, касающиеся судьбы арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми в средневековой Европе и об их влиянии на развитие математики в XII—XVI вв.

66. Материалы по истории прогрессивной общественно-философской мысли в Узбекистане. 2-е изд. Под ред. И. М. Муминова и М. М. Хайруллаева. Ташкент, 1976.

Приводятся общие сведения об ал-Хорезми и несколько выдержек из его математических трактатов (по изданию [1]).

67. Ан-Насави Абу-л-Хасан Али ибн Ахмад. Достаточное об индийской арифметике. Перевод М. И. Медового, примеч. М. И. Медового при участии Б. А. Розенфельда. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. XV. М., 1963, с. 381—430.

Сочинение ан-Насави (ум. 1030 г.) написано в традиции, начало которой положено арифметическим трактатом ал-Хорезми. В предисловии к тексту переводчик формулирует некоторые выводы об истории индийской арифметики, полученные при сравнении обоих трактатов.

68. Нейгебауер О. Точные науки в древности. Перевод с английского Е. В. Гохман. Под ред. и с предисловием А. П. Юшкевича. М., 1968.

В книге известного историка математики О. Нейгебауера (см. [244]). цель которой — дать «обзор исторических связей между математикой и астрономией в древних цивилизациях», затрагиваются многие вопросы, прямо или косвенно связанные с научным творчеством ал-Хорезми. Имеются ссылки на его зидж. (с. 174, 176) и алгебраический трактат (с. 177—178).

69. Райнов Т. И. Великие ученые Узбекистана (IX—XI в.). Ташкент, 1943, с. 25—29, 37—43.

В кратком, но содержательном очерке, на основании косвенных исторических данных воспроизводится биография ал-Хорезми. Рассматривается содержание «Алгебры» и дается оценка роли ал-Хорезми в истории математики.

70. Рожанская М. М. Механика на средневековом Востоке. М., 1976.

В главе о кинематике на средневековом Востоке (гл. V) в числе первоисточников широко использован зидж ал-Хорезми: дан общий обзор сочинения (с. 168), излагается его тригонометрический раздел (с. 177—180, 188—193), дано описание модели движения небесных тел по ал-Хорезми (с. 229—237) и т. д.

71. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в средние века. — Советское востоковедение, № 3, 1958, с. 102—104.

Дана характеристика деятельности ал-Хорезми в различных областях математики.

72. Розенфельд Б. А., Сергеева Н. Д. Об астрономических работах ал-Хорезми. — Историко-астрономические исследования, вып. 13. М., 1977, с. 201—218.

Подробно описаны астрономические сочинения ал-Хорезми, указано местонахождение сохранившихся рукописей, перечислены издания текстов и их исследований. Излагается содержание зиджа.

73. Рыбников К. А. История математики, 2-е изд. М., 1974.

В главе 4 (Развитие элементарной математики) дается характеристика математики народов Средней Азии и Ближнего Востока и рассматриваются, в частности, сочинения ал-Хорезми по арифметике и алгебре.

74. Салье М. А. Мухаммед аль-Хорезми — великий узбекский ученый. Ташкент, 1954; то же на узбекском языке. Ташкент, 1965.

Даны очерк жизни и деятельности ал-Хорезми и анализ современной ему исторической обстановки.

75. Сергеева Н. Д. Трактат ал-Хорезми об астролябии. — В кн.: Тр. XV научной конфер. аспирантов и мл. научных сотр. Ин-та истории ест. и техники АН СССР. М., 1972, с. 86—89.

Изложено содержание трактата ал-Хорезми об астролябии.

76. Сергеева Н. Д. Астрономические таблицы ал-Хорезми. — В кн. Тр. XVI научной конфер. аспирантов и мл. научн. сотр. Ин-та истории ест. и техники АН СССР. Секция ист. математики и механики. М., 1973, с. 35—42.

Дано описание зиджа ал-Хорезми.

77. Сергеева Н. Д. Астрономические труды ал-Хорезми и ал-Фергани. Автореф. канд. дис. М., 1973.

Исследованы зидж, «Книга картины Земли» и трактат об астролябии ал-Хорезми.

78. Сиддыков Х. Геометрия и ее преподавание в трудах ученых Древнего Востока и Средней Азии (на узбекском языке). Ташкент, 1981.

В параграфе, посвященном ал-Хорезми (с. 67—80), рассматривается геометрический раздел «Алгебры».

79. Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П. Абу Райхан Беруни и его математические труды. М., 1978.

Среди выдающихся среднеазиатских математиков — предшественников Беруни — назван ал-Хорезми. Приводятся сведения о его жизни и трудах (с. 13—15).

80. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики, изд. 2-е. Перевод с немецкого и дополнения И. Б. Погребысского. М., 1969.

Дана краткая характеристика трудов ал-Хорезми (с. 90—92). Отмечено, что они «сыграли важную роль в истории математики как один из главных источников, с помощью которых Западная Европа познакомилась с индийскими цифрами и арабской алгеброй» (с. 92).

81. Тропфке И. История элементарной математики в систематическом изложении. Перевод с немецкого, т. I. М., 1914.

Большое внимание уделено математическим трактатам ал-Хорезми (см. [299]).

82. Тешабаев М. Картографические и геодезические работы ал-Хорезми и Бируни. — Изв. Узб. филиала Географич. Об-ва СССР, т. 3, 1957, с. 181—186.

Дана оценка роли ал-Хорезми в географии и геодезии.

83. Файзуллаев А. Ф. Мухаммад Хорезми (на узбекском языке). Ташкент, 1965.

Дан очерк жизни и деятельности ал-Хорезми.

84. Фаццари Г. Краткая история математики с древнейших времен, кончая средними веками. Перевод с итальянского. М., 1923.

Излагается содержание арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми и дается оценка роли этих сочинений в истории математики.

85. Халилов А. А. Математическое наследие среднеазиатских ученых. Труды Туркменского гос. пед. ин-та, 1959, вып. 6, № 5, с. 6—9.

Наряду с творчеством других ученых Средней Азии характеризуется математическая деятельность ал-Хорезми.

86. Цейтен Г. История математики в древности и в средние века. Перевод П. С. Юшкевича с французского издания. М.—Л., 1932, с. 200—201; 2-е изд., 1938.

Рассматриваются арифметический и алгебраический трактаты ал-Хорезми. Отвечая на вопрос об источниках «Алгебры», Г. Цейтен присоединяется к сторонникам теории о преимущественном влиянии греческой математики (см. [318]).

87. Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. Перевод с французского. М., 1883.

В книге, вышедшей первым изданием в 1836 г. (см. [123]), выдающийся геометр и историк математики М. Шаль (1793—1880 гг.) останавливается на новых в его время историко-научных фактах, заставивших изменить бытовавший ранее взгляд на «арабскую» математику. Отмечены (с. 205—213) сочинения ал-Хорезми по арифметике и алгебре и указаны ссылки на них в трудах европейских ученых XV—XVI вв.: Тартальи, Кардано, Штифеля, Пелетье, Стевина.

88. Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. М., 1940.

В главе «Восточная математика индусов и арабов» рассматривается алгебраический трактат ал-Хорезми (с. 68—71) и приводится цитата из него как пример чисто риторической алгебры.

89. Юшкевич А. П. Омар Хайям и его «Алгебра». Тр. Ин-та истории естествознания АН СССР. Т. II. М., 1948, с. 499—534.

Рассматривая историю алгебры до Хайяма, автор выделяет в особенности творчество ал-Хорезми и отмечает, что в его алгебре отразились «новые черты: выделение ее в самостоятельную дисциплину, на геометрической базе строящую учение об уравнениях, приложение числовых уравнений к решению геометрических задач, наконец, сознательная разработка математики как основы многих практических искусств» (с. 511).

89а. Юсупов Н. С. Очерки истории развития арифметики на Ближнем Востоке. Казань, 1932.

Дается обзор средневековых арабоязычных сочинений по арифметике, в том числе арифметического трактата ал-Хорезми.

90. Юшкевич А. П. О математике народов Средней Азии в IX—XV вв. — В кн.: Историко-математические исследования, вып. IV. М., 1951, с. 455—488.

Среди важнейших результатов, полученных среднеазиатскими учеными IX—XV вв. в арифметике и алгебре, отмечены достижения ал-Хорезми в этих областях математики.

91. Юшкевич А. П. Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса-аль-Хорезми. Труды Института истории естествознания и техники АН СССР, т. I, М., 1954, с. 85—127.

Хотя заслуга ал-Хорезми в развитии арифметики постоянно отмечалась историками и в курсах истории математики излагалось содержание его арифметического трактата, до недавнего времени отсутствовал внимательный разбор этого сочинения, вследствие чего постоянно допускались значительные фактические ошибки, и общая оценка труда оказывалась не вполне правильной. Эти существенные для истории науки упущения были устранены данной работой. В ней впервые на основе сопоставления всех существующих средневековых вариантов сочинения ал-Хорезми даны анализ этого труда и правильная оценка его роли в распространении позиционной десятичной системы счисления. Дополненное издание статьи вышло в немецком переводе [180].

92. Юшкевич А. П. История математики в средние века. М., 1961.

В книге, содержащей наиболее полный в настоящее время обзор развития математики в странах Востока в средние века, дан исчерпывающий анализ математических трудов ал-Хорезми и определена их роль в развитии науки. Книга вышла в 1964 г. в немецком издании [181], в 1976 г. — во французском [317], в 1977 г. — в чешском [182].

93. Юшкевич А. П., Розенфельд Б. А. Математика в странах Востока в средние века. — В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока, вып. 1. М., 1960, с. 349—421.

На фоне общего развития математики стран Востока дана, в частности, характеристика творчества ал-Хорезми.

94. Apu-l-Faraj. Historia compendiosa dynastiarum authore Gregorio Abul-Pharagio Arabice edita et Latine versa ab E. Pocockio. Oxoniae, 1663, Suppl. 1672.

В раннем издании арабского текста и латинского перевода «Истории династий» Абу-л-Фараджа упоминание об ал-Хорезми см. на с. 248 (текст) и с. 161 (перевод). На это издание опирались историки математики в XVIII и начале XIX в.

95. Adnan A. Hârizmî. «Islam Ansiklopedisi», Istanbul, 5, 1958, 258—262.

В статье об ал-Хорезми из «Энциклопедии ислама» (стамбульское издание) содержатся сведения о его жизни и трудах.

96. Allard A. H. Les plus anciennes versions latines du 12-e siècle issues de l'arithumétique d'al-Khwārizmī. Histoire des textes suivie de l'edition critique des traités attribués á Adelard de Bath et Jean de Seville, et d'un remaniement de ce dernier, Louvain, 1975.

Критическое издание двух наиболее ранних (XII в.) латинских сочинений по «алгорисму», близких по содержанию к арифметическому трактату ал-Хорезми: одно из них, принадлежащее «магистру А», ранее исследовалось А. Наглем [236] и М. Курце [132], другое, приписанное

Иоанну Испанскому, было впервые опубликовано в 1857 г. [5]. Издание основано на изучении и сравнении всех известных рукописей. (Подробнее о содержании — в статье А. П. Юшкевича в настоящем издании).

96а. Allard A. H. Les algorismes Latins issus de l'Arithmétique d'al-Ḳhwārizmi: identification et classement. Abstracts of Session papers of the Second Int. Symposium for the History of Arabic Science (Un-ty of Aleppo, 5—12 apr. 1979). Aleppo, 1979, Supplement.

Рассмотрены и классифицированы средневековые латинские обработки арифметического трактата ал-Хорезми.

97. Anbouba A. Notes sur l'Algèbre d'al-Ḳhwarismi. Beyrouth, 1955.

Исследован алгебраический трактат ал-Хорезми.

98. Anbouba A. L'Algèbre arabe aux IX^e et X^e siècles. Aperçu général. «Journal for the History of Arabic Science», vol. 2, No. 1, May 1978, p. 66—100.

Работа посвящена истории алгебры в арабских странах в IX—X вв. В первом разделе (с. 66—78) речь идет об «Алгебре» ал-Хорезми, во втором (с. 79—88) — о его современниках и прямых последователях. Рассматриваются данные средневековых источников об ал-Хорезми, приводятся библиографические сведения о его трудах. Автор сообщает, что раздел «Алгебры» ал-Хорезми содержится в анонимной Берлинской рукописи (№ 5955/6: лл. 60—95). Отмечено, что все вышедшие до сих пор издания арабского текста трактата страдают существенными недостатками, и указаны некоторые ошибки в Каирском издании [16]. Дается анализ содержания трактата и обсуждается вопрос об источниках алгебры ал-Хорезми (с. 73—78).

99. Ansari R. M. Aryabhata and al-Ḳhwārizmī, fathers of mathematics in India and Arabia. Abstracts of Session papers of the Second Int. Symposium for the History of Arabic Science (Un-ty of Aleppo, 5—12 apr. 1979). Aleppo, 1979, p. 44—45.

В докладе сопоставляется научная деятельность Ариабхаты и ал-Хорезми как основоположников математики соответственно в Индии и арабских странах.

100. Arnaldez R., Massignon L., Youschkevitsch A. P. La science arabe.—In.: Histoire générale des sciences, publiée sous la direction de R. Taton, t. I (La science antique et médiévale). 2-ème ed., Paris, 1966, p. 440—525.

В разделе, посвященном точным наукам в странах Ближнего и Среднего Востока в средние века (с. 471—501), большое внимание уделено математическим трудам ал-Хорезми.

101. Arneth A. Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes. Stuttgart, 1852.

Сделана одна из первых попыток изложить историю математики в ее отношении к истории культуры. В разделе, посвященном арабоязычной математике, рассматривается «Алгебра» ал-Хорезми и подробно излагается содержание (с. 189—193). Рассматривается также вопрос о ее источниках.

102. Arnold Th., Guillaume A. (ed.). The Legacy of Islam. Oxford, 1931.

Книга представляет собой сборник статей о научном наследии стран ислама. Математике и астрономии посвящена работа Б. Карра де Во [122].

103. Björnbo A. Gerardo von Cremona Übersetzung von Alchwarizmis Algebra und von Euklids Elementen. «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd VI, H. 2, 1905, S. 239—248.

Доказано, что латинский перевод «Алгебры» ал-Хорезми, опубликованный Г. Либри [13], действительно, принадлежит Герардо Кремонскому, который является также автором обработки этого сочинения [105].

104. Björnbo A. Al-Chwārizmi's trigonometrisk tavler. Festkrift til H. G. Zeuten. Kōbenhavn, 1909, p. 1—26.

Впервые исследованы тригонометрические таблицы из зиджа ал-Хорезми. Проведено их сравнение с таблицами хорд Птолемея. Даны отрывки из латинского текста.

105. Boncompagni B. Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese traduttore del secolo duodecimo. Roma, 1851.

В работе о жизни и творчестве выдающегося средневекового ученого и переводчика с арабского языка на латынь Герардо Кремонского (1114—1187 гг.) приводится латинский текст принадлежащей, по всей вероятности, ему латинской обработки «Алгебры» ал-Хорезми.

106. Bortolotti E. L'Algebra nella storia e nella preistoria della scienza. «Osiris», vol. I, Bruges, 1936, p. 184—230.

Освещена история развития алгебры. Большое внимание уделено алгебраическому трактату ал-Хорезми.

107. Bosmans H. Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Mahumed ben Mûsâ el-Chowârezmî. Annales de la Soc. sci. do Bruxelles», 30:2, 1906, p. 267—287.

Приведены подробное описание и исследование рукописи выдающегося голландского математика Адриана ван Роумена (1561—1615 гг.), в которой содержался принадлежащий ему комментарий к «Алгебре» ал-Хорезми. Впоследствии, во время первой мировой войны, эта рукопись погибла (см. [262]) при разрушении библиотеки Лувенского университета, где она хранилась.

108. Boyer C. A history of mathematics. N. Y., 1968.

Книга представляет собой курс всеобщей истории математики, в котором трудам ал-Хорезми уделено значительное внимание.

109. Braunmühl A. Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Bd. I, Leipzig, 1900, S. 49, Note 1 und 2.

Сведения о тригонометрическом разделе зиджа ал-Хорезми, которые приводит в своем серьезном курсе истории тригонометрии А. Браунмюль, весьма кратки, так как во время написания книги это сочинение ал-Хорезми еще не было исследовано.

110. Brockelmann C. Geschichte der arabischen Litteratur, Bd. I—V. Weimar—Berlin—Leiden, 1898—1943; Supplementsbände I—III. 1937—1942.

В капитальном библиографическом труде К. Брокельмана об истории арабоязычной литературы собраны данные об ал-Хорезми и его сочинениях, известные во время написания книги.

111. Bruins E. M. De algebra der oudheid en der middeleevwen. «Euclides» (Nederl.), v. 34, 1959, No. 5, 131—159.

Дан общий обзор истории алгебры от древности до XVII в.

112. Burckhard J. J. Die astronomischen Tafeln von Al-Khwârizmî. «Verhandl. d. Schweiz. Naturforsch. Ges.», 1956, S. 73—75.

Рассматривается вопрос о зависимости зиджа ал-Хорезми от индийской астрономии. Сравниваются некоторые данные относительно средних движений Солнца, Луны и планет по ал-Хорезми и сиддханте Брахмагупты.

113. Burckhard J. J. Die mittleren Bewegungen der Planeten in Tafelwerk des Khwârizimî. «Vierteljahrsschrift d. Naturforsch. Ges. in Zürich», Bd 106. 1961, S. 215—231.

Исследован раздел о средних движениях планет из зиджа ал-Хорезми.

114. Cajori F. A History of Elementary Mathematics. New York, 1897.

См. аннотацию к русскому переводу книги [62].

115. Cantor M. Mathematische Beiträge zur Culturgeschichte der Völker. Halle, 1863.

В очерках о развитии математики в связи с историей культуры народов известный историк математики XIX в. М. Кантор отводит важное место арифметическому трактату ал-Хорезми (с. 264—175). Он отмечает, что этот труд служил образцом при написании всех более поздних сочинений на арабском Востоке и оказал не меньшее влияние на европейскую математику после перевода его на латинский язык.

116. Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd I. Leipzig, 1894.

Капитальный курс истории математики М. Кантора включает подробный очерк о математическом творчестве ал-Хорезми. Многие утверждения автора с современной точки зрения нуждаются в поправках (см. также [145—147]).

117. Cardano H. Hieronimi Cardani Artis Magnae sive de Regulis algebraicis liber unus, Norinbergae, 1545.

В этом сочинении крупнейшего итальянского алгебраиста эпохи Возрождения Дж. Кардано (1501—1576) ал-Хорезми (Mahomet Moisis Arabis filio) приписано создание алгебры как науки (с. 5).

118. Carmody F. J. Arabic astronomical and astrological sciences in Latin translation. Berkeley, 1956.

Исследованы ранние латинские переводы арабских сочинений по астрономии, в том числе зидж ал-Хорезми.

119. Carra de Vaux B. Sur le sens exact de mot «al-djebr», «Bibliotheca mathematica», F. 2, Bd 11, 1897, S. 1—2.

Статья посвящена выяснению точного значения слов «ал-джабр» и «ал-мукабала», применявшихся в средневековой восточной математике и впервые встречающихся в трактате ал-Хорезми.

120. Carra de Vaux B. Sur l'origin des chiffres. «Scientia», t. 21, Bologna, 1917, p. 273—282.

Рассматривается проблема происхождения современных цифр, широко обсуждающаяся в историко-математической литературе XIX—XX вв. в связи с исследованием арифметического трактата ал-Хорезми.

121. Carra de Vaux B. Les penseurs de l'Islam, t. 2 (Les géographes, les sciences mathématiques et naturelles), Paris, 1921.

Приведён обзор сочинений ученых средневекового Ближнего и Среднего Востока и арабоязычной Испании по географии, математическим и естественным наукам.

122. Carra de Vaux B. Astronomy and mathematics. — In: Legacy of Islam, ed. T. Arnold and A. Guillaume, Oxford, 1931, p. 379—398.

В общем обзоре истории восточной математики и астрономии рассматривается также математическое творчество ал-Хорезми. Статья содержит ряд спорных утверждений.

122а. Cassiri M. Bibliotheca arabico-hispalensis-Escurialensis. Matrite, 1760.

В одном из первых сочинений по истории математики восточного средневековья приводится латинский перевод выдержек из трудов арабских историков, в том числе отрывков, касающихся ал-Хорезми.

123. Chasles M. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Paris, 1837.

В своем историческом очерке возникновения и развития геометрических методов выдающийся математик XIX в. М. Шаль останавливается на вопросе о творчестве ал-Хорезми (см. аннотацию к русскому переводу [87]).

124. Chasles M. Histoire de l'arithmétique. Explication des Traités de l'Abacus et particulièrment du Traité de Gerbert. «Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sci.», Séances des 23 et 30 janvier, et 6 février, 1843.

Обсуждается проблема истории арифметики до введения десятичной нумерации и, в частности, значение «индийской арифметики».

125. Chasles M. Recherches sur l'astronomie indienne. «Compte rendu des séances de l'Akad. des sci.», séance du 2 nov. 1846, p. 845—854.

Дан первый в литературе обзор содержания зиджа ал-Хорезми по двум средневековым латинским рукописям, которые обнаружил сам М. Шаль. В частности, отмечено, что не ал-Баттани, а ал-Хорезми впервые заменил синусами хорды, которыми пользовались греки, и дана высокая оценка «этому крайне полезному усовершенствованию».

126. Colebrooke H. T. Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara. London, 1817.

Во вводной статье к книге, посвященной сочинениям Брахмагупты и Бхаскары, ставится вопрос об источниках и исторических путях развития алгебры. Для ответа на него автор приводит ряд очерков об алгебре в Древней Греции, Индии, странах Ближнего и Среднего Востока и в Европе. В обзоре научных исследований, проводившихся математиками Багдадской школы, дана высокая оценка трудам ал-Хорезми. Особое внимание уделено алгебраическому трактату: анализируется его содержание и приводится — впервые в литературе — английский перевод фрагментов по оксфордской рукописи (см. [6]).

127. Colerus E. Von Pythagoras bis Hilbert. Berlin, 1937.

В общем курсе истории математики значительное место занимает обзор творчества ал-Хорезми.

128. Cossali P. Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra, vol. 1, Parma, 1797.

Дан один из наиболее ранних обзоров истории алгебры, содержащий анализ алгебраического трактата ал-Хорезми. Ссылаясь на средневековые источники, П. Коссали утверждает, что «относительно начала алгебры у арабов не вызывает сомнения, что Мухаммед ибн Муса, хорезмиец, был первым, кто их научил ей». Он считает, что «Алгебра» ал-Хорезми продолжает индийские алгебраические традиции.

129. Crombie A. C. Augustine to Galileo. The history of science a. D. 400—1650, vol. 1—2, London—Melbourne—Toronto, 1952.

Рассматривается вопрос о происхождении и характере европейской науки в средние века и о ее развитии до XVII в. Подчеркивается значение арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми для истории математики в Европе. Отмечена практическая направленность этих сочинений.

130. Crombie A. C. Medieval and early modern science, vol. 1—2, Cambridge (Mass.), 1963.

Новое издание предыдущей книги.

131. Curtze M. Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fünfzehnten Jahrhundert. «Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik», H. 7. Leipzig, 1895, S. 31—74.

Работа содержит текст немецкого алгебраического трактата XV в. (по мюнхенской рукописи, датированной 1461 г.), в которой сделана ссылка на «Алгебру» ал-Хорезми. Порторяются данные им определения [«Мухаммад в книге «Алгебра и алмукабала» (Machmet in dem peuch algebra und almalcobula)использовал слова квадрат (census), корень (radix), число (numerus), и т. д.] и числовой пример $x^2+10x=39$.

132. Curtze M. Über eine *Algorismus — Schrift des XII. Jahrhunderts. «Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik», H. 8. Leipzig, 1898, S. 1—27.

Приводится текст арифметического раздела анонимного латинского трактата XII в., фрагмент которого был опубликован в 1889 г. А. Наглем [236] по другой рукописи XII в., хранящейся в Мюнхене (Clm 13021).

133. Curtze M. Eine Studienreise. «Centralblatt für Bibliothekwesen», Jhg 16, H. 6—7. Leipzig, 1890.

Приводятся сведения о латинской рукописи «Алгебры» ал-Хорезми в переводе Роберта Честерского, которая хранится в Вене (№ 4770).

134. Czeglédy K. Die Karte der Donaulandschaftsgruppe nach al-Huwārizmī. «Act. Or. Hung.», Bd I, 1950—1951, S. 46—79.

Рассматривается географическая карта из «Книги картины Земли» ал-Хорезми в части, касающейся придунайских областей (координаты: 48—82° долготы, 45—73°3′ широты).

135. Daniel N. The Arabs and medieval Europe. London — N. Y., 1975.

Идет речь о влиянии арабоязычной науки на европейскую. Прослеживается судьба трудов ал-Хорезми в Европе.

136. Daunicht H. Der Osten nach der Erdkarte al-Huwārizmīs. Beiträge zur historischen Geographie und Geschichte Asiens. Teil I. Rekonstruktion der Karte, Interpretation der Karte: Südasien. Teil II. Die ost — und südostasiatische Inselwelt und die Meere. Teil III. Der Süden des festländischen Ostasiens. Teil IV. Der Norden des festländischen Ostasiens und Nord —

und Mittelasien. «Bonner Orientalistische Studien», N. S., Bd. 19 (a—d). Bonn, 1968—1970.

Дается реконструкция и исследование той части географической карты из «Книги картины Земли» ал-Хорезми, которая охватывает восточные области изображаемой территории, включая моря и острова.

137. Delambre J. B. Histoire de l'astronomie du Moyen Âge. Paris, 1819.

Курс истории астрономии Деламбра — одно из наиболее ранних серьезных исследований такого рода. В нем содержатся те сведения об астрономии в Багдадской школе VIII—IX вв., которыми располагала наука в начале прошлого столетия.

138. Destombes M. Note sur. le catalogue d'etoiles du calife al-Mamun. Actes du VIII Congres Intern. d'histoire des sci., t. 1. Florence — Milane, 1956, p. 309—319.

Рассматриваются рукописи каталогов звезд, составленных багдадскими астрономами круга ал-Ма'муна.

139. Dumont M. Un prophesseur du mathématique au IX^e siècle Mohammed ibn Mousa al-Khowarismi. «Revue génerale des sciences pures et appliquées», t. 54 (ser. 2), 1947, No. 2, p. 7—13.

В работе, содержащей краткий популярный очерк об ал-Хорезми (без библиографии), дается обзор развития алгебры до ал-Хорезми, излагается содержание его алгебраического трактата и отмечается влияние последнего на европейскую математику.

140. Dunlop D. M. Muhammad b. Mūsā àl-Khwārizmī. «Journal of the Royal Asiatic Society», 1943, p. 248—50.

Приведены сведения об ал-Хорезми и его трудах.

141. Dunlop D. M. Arab civilization to A. D. 1500. London, 1971.

В разделе о восточных географах и путешественниках рассматривается (с. 150—153) «Книга картины Земли» ал-Хорезми и обсуждается вопрос о ее источниках.

142. Eche Y. Les bibliothéques arabes publiques et semi-publiques en Mésopotamie, en Syrie et en Egypte au Moyen Âge. Damaskus, 1967.

Приведены сведения о крупных средневековых библиотеках Месопотамии, Сирии и Египта. Среди них одной из крупнейших была библиотека при «Доме мудрости» халифа ал-Ма'муна в Багдаде, и ал-Хорезми принадлежал к числу ее руководителей (с. 41, 55, 351).

143. Eneström G. Über den Bearbeiter oder Übersetzer des von Boncompagni (1857) herausgegebenen «Liber algorismi de pratica arismetrice», «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd VI, 1905, S. 114.

Второй из латинских трактатов об алгорисме, опубликованных Б. Бонкомпаньи в 1857 г. [5], был приписан им Иоанну Севильскому на основании начальных фраз рукописи. Г. Энестрём указывает на то, что в Эрфурте имеется рукопись того же трактата (Ampl. Qu. 355, fol. 85—115), где в заглавии переводчиком назван Герардо Кремонский. Поэтому вопрос об авторе трактата требует, по его мнению, внимательного изучения.

144. Eneström G. Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse. «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd V, 1905. S. 404.

Сделано замечание о рукописи латинского перевода «Алгебры» ал-Хорезми, принадлежащего Герардо Кремонскому (см. [103, 210]).

145. Eneström G. Kleine Bemerkungen zur. 2. Auflage von M. Cantors «Vorlesungen.» «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd VI, 1906, S. 204—205; Bd VII, 1907, S. 284.

Уточняются высказывания М. Кантора о методе деления у ал-Хорезми, а также о том, что ал-Хорезми признавал существование двух корней уравнения $x^2+c=bx$. Приводится ссылка на исследование Л. Родэ [253], показавшего, что на практике ал-Хорезми пользовался только одним корнем $x=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$, а относительно $x=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$ лишь бегло упоминал, что он также является решением уравнения.

146. Eneström G. Kleine Mitteilungen (zur M. Cantors «Vorlesungen»). «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd VIII, 1907/1908, S. 182—186.

Вносится уточнение в данное М. Кантором описание правила умножения целых чисел по ал-Хорезми и подробно рассматривается это правило. Сделан вывод, что единственное отличие от современного способа умножения состоит в том, что действие начиналось слева и ненужные цифры стирались.

Рассматривается также вопрос об упоминавшейся в списках трудов ал-Хорезми «Книге об увеличении и уменьшении» (или «О сложении и вычитании». «Liber augmenti et diminutione»). Высказывается предположение, что это — раздел «Алгебры», и отмечается, что в нем идет речь не о «правиле двух ошибок».

147. Eneström G. Kleine Mitteilungen (zur M. Cantors «Vorlesungen»). «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd IX, 1908/1909, S. 144—145.

Отмечено, что «Liber algorismi de pratica arismetrice» является не переводом арифметического трактата ал-Хорезми, как это утверждает М. Кантор, а его обработкой. Г. Энестрём считает, что она составлена в XIII в. неким западным математиком, который не располагал ни арабским оригиналом, ни полным латинским переводом сочинения.

148. Frank J. Zur Geschichte des Astrolabs. «Sitzungsberichte d. phys.—med. Sozietät in Erlangen», Bd 50/51, 1918/1919, S. 275—305.

Разъясняется конструкция астролябии и рассматриваются посвященные ей сочинения ученых Ближнего и Среднего Востока.

149. Frank J. Die Verwendung des Astrolabs nach al-Chwârizmî. «Abhandlungen zur Geschichte der Naturwiss. und der Medizin», H. 3, Erlangen, 1922.

В предисловии к немецкому переводу трактата ал-Хорезми о применении астролябии [7] сообщаются сведения о конструкции этого инструмента и о рукописи рассматриваемого сочинения.

150. Gandz S. The origin of term Algebra. «Amer. Math. Monthly», vol. 33, 1926, p. 437—440.

Автор утверждает, что термин «ал-джабр» происходит от ассирийского слова «gabru», применявшегося в Древнем Вавилоне для обозначения науки об уравнениях. По его мнению, арабы должны были воспринять эту науку с оригинальным ассирийским названием от арамейцев и сирийцев, живших на вавилонской территории. Многие современные исследователи оспаривают эту гипотезу С. Гандца, в свое время завоевавшую известную популярность (см. [165], 261, 300]). Действительно, трудно предположить, что этот термин просуществовал до ал-Хорезми, не отразившись ни в каком другом научном языке.

151. Gandz S. Did the Arabs know the abacus?«Amer. Math. Monthly», vol. 34, 1927, p. 308—316.

Высказывается гипотеза о существовании в эпоху ал-Хорезми счетного устройства, подобного европейскому абаку. Критика этой гипотезы— в работе А. П. Юшкевича [91].

152. Gandz S. The Mishnat ha Middot, the first Hebrew Geometry of about 150 c. e. and Geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi, the first Arabic Geometry (c. 820), representation of the Mishnat ha Middot. «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik», Abt. A, Bd 2, Berlin, 1932.

В этой, как и в других работах С. Гандца, проводится идея о «негреческой» линии развития математики, а именно, от математики Древнего Вавилона непосредственно к арабоязычной науке IX в. По его мнению, первое геометрическое сочинение на древнееврейском языке «Мишнат ха миддот» является прямым источником геометрической части «Алгебры» ал-Хорезми и представляет собой связующее звено между древней восточной традицией и началом средневековой «арабской» науки. В настоящее время теория С. Гандца подвергается сомнению, так как на основе лингвистических исследований показано, что «Мишнат ха миддот»

написан после «Алгебры» ал-Хорезми (а не ок. 150 г., как считалось раньше) и, может быть, является ее позднейшей адаптацией (см. [298, с. 360]).

153. Gandz C. The Rule of Three in Arabic and Hebrew Sources. «Isis», vol. 22, 1934, No. 63—64, p. 220—222.

«Алгебра» ал-Хорезми (в части, посвященной разделу наследства) рассматривается как древнейший арабоязычный источник, содержащий «тройное правило», которое пользовалось большой популярностью в средневековой арифметике. Корни этого правила, по мнению С. Гандца, уходят в древнеегипетскую и древневавилонскую математику и были переданы в Индию и арабские страны арамейскими купцами.

154. Gandz S. The sources of al-Khowārismī's Algebra. «Osiris», vol. I, 1936. p. 263—277.

Дается обзор творчества ал-Хорезми и оценка его роли в истории алгебры. Исследуется вопрос об истоках алгебры ал-Хорезми. Автор считает, что их следует искать непосредственно в древневавилонской алгебре, а не в греческой или индийской математике; свидетельством этого является, в частности, термин «алгебра», который С. Гандц рассматривает как старый вавилонский термин для обозначения науки о решении уравнений. В статье имеется ряд заведомо спорных положений (например, о том, что в «Алгебре» ал-Хорезми нет никакого влияния Евклида, и т. п.).

155. Gandz C. The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra. «Osiris», vol. III, 1938, p. 405—557.

Дан очерк истории теории решения квадратных уравнений, в котором древневавилонская алгебра рассматривается как основа и древнегреческой, и арабской алгебры. С. Гандц считает, что даже Евклид и Диофант по существу придерживались древневавилонских правил решения квадратных уравнений. По его мнению, ал-Хорезми оставил в стороне их «блестящие, но устаревшие методы» и ввел новые методы, ставшие стандартными.

156. Gandz S. The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra. «Scientia», vol. 62, 1937, p. 249—257.

Кратко изложено содержание предыдущей статьи.

157. Gandz S. The Algebra of Inheritans. A rehabilitation of al-Khuwarizmi. «Osiris», vol. V, 1938, p. 319—391.

Рассматривается глава «Алгебры» ал-Хорезми о разделе наследства. С. Гандц утверждает, что многие авторы упрекали ал-Хорезми в неправильности составления и решения задач в этой части сочинения, и ставит цель — разъяснить соответствующие юридические правила, которые отразились в рассматриваемых задачах.

158. Gerhardt G. J. Geschichte der Mathematik in Deutschland. München, 1877.

В книге, посвященной развитию математики в Германии, отмечена историческая роль «Алгебры» ал-Хорезми, который дал правила решения уравнений 1-й и 2-й степени, остававшиеся «твердым каноном» в течение долгого времени.

159. De Goeje J. (ed.) Bibliotheca geographorum arabicorum, pars I—VIII, Lugduni Batavorum, 1873—1894.

В книге издано несколько арабских географических трудов IX—X вв., в которых встречаются сведения об ал-Хорезми.

160. Goldstein B. Ibn al-Muthanna's commentary on the astronomical tables of al-Khwarizmi. New Haven, 1967.

Наряду с текстом и английским переводом комментария Ибн Мусанны к зиджу ал-Хорезми [9] в книге приводится исследование этого сочинения.

161. Günther S. Geschichte der Mathematik. Teil I. Von ältesten Zeiten bis Cartesius. Leipzig, 1908.

В общем курсе истории математики, охватывающем период от древнейших времен до Декарта, значительное место уделено трудам ал-Хорезми по арифметике и алгебре.

162. Haddad F. J., Kennedy E. S. Geographical tables of medieval Islam. «Al-Abhath», vol. 24, 1971, n. 1—4, p. 87—102.

Рассматриваются географические таблицы из сочинений средневековых ученых Ближнего и Среднего Востока.

163. Haji Khalfa. Lexicon bibliographicum and encyclopaedicum a Mustafa ben Abdallah Katib Jelebi dicto et nomine Haji Khalfa celebrato compositum, ed J. Flügel, t. I—VII, Lipsiae, 1835—1838.

В монументальном библиографическом труде «Снятие покрывала с названий книг и наук» Хаджжи Халифы (1609—1657 гг.) часто упоминается ал-Хорезми как один из классиков средневековой восточной математики, и, в частности, как первый, кто писал об «алгебре и алмукабале» (т. II, с. 585; т. V, с. 67—69 и др.).

164. Hankel H. Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig, 1874.

Книга крупного математика и историка математики Г. Ганкеля (1839—1873) представляет собой наиболее серьезный ко времени ее написания обзор развития математики в древности и в средние века, основанный на анализе всех известных тогда фактов. В ней содержится основательная характеристика творчества ал-Хорезми, но с современной точки зрения выводы Г. Ганкеля требуют, естественно, поправок и дополнений. Поставив вопрос об источниках «Алгебры» ал-Хорезми, Г. Ганкель впервые высказал гипотезу о том, что у народов Ближнего и Среднего Востока уже до арабского завоевания на основе древних традиций под двойным влиянием греческой и индийской науки сложилась своеобразная алгебра, которая изложена в рассматриваемом трактате. Для обоснования своей гипотезы он считает необходимым снять «занавес, который покрывает культурную историю этих народов в домусульманский период» (с. 264).

165. Hartner W. Al-djabr wa'l-mukabala. In: Encyclopaedia of Islam, New ed., London — Leiden, Bd. 2, fasc 28, 1962. S. 360—362.

В статье о средневековой арабской алгебре (ал-джабр ва-л-мукабала) основное внимание уделено трактату ал-Хорезми как древнейшему сочинению, в котором излагаются основы этой науки. Дается обзор литературы о происхождении терминов «ал-джабр» и «ал-мукабала» (подвергнута критике теория С. Гандца), об источниках алгебры ал-Хорезми, о ее влиянии на науку более позднего времени.

166. Haskins C. H. Studies in the history of medieval science. Cambridge, 1924.

В книге, посвященной развитию средневековой европейской науки, затрагивается вопрос о влиянии на нее арабоязычной литературы и, в частности, о латинских переводах трудов ал-Хорезми.

167. Heilbronner J. C. Historia matheseos universae a mundo condito ad seculum XVI praecipuorum mathematicorum vitas, dogmata, scripta et manuscripta complexa. Lipsiae, 1742.

В одном из старейших курсов истории математики (на латинском языке) приведены некоторые известные к середине XVIII в. сведения о трудах ал-Хорезми и их рукописях.

168. Hochheim A. Kâfî fîl Hisâb des Abû Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhi. Halle, 1878—1880.

В «Достаточной книге об арифметике» выдающийся математик X—XI вв. ал-Караджи (или ал-Кархи) основывается на алгебраическом трактате ал-Хорезми при изложении алгебры и геометрии. Арифметический раздел написан в иной традиции, представленной Абу-л-Вафой ал-Бузджани (см. [64, 92]).

169. Hermelink H. Astronomie. In: Lexikon der Islamischen Welt. Stuttgart, 1974. S. 75—78.

В кратком очерке истории астрономии стран ислама отмечено важное место, которое занимал зидж ал-Хорезми в средневековой астрономической литературе.

170. Hermelink H. Mathematik. In: Lexikon der Islamischen Welt. Stuttgart, 1974, S. 153—155.

Подчеркивается роль трудов ал-Хорезми в истории математики стран ислама.

171. Hofmann J. E. Geschichte der Mathematik, Bd. I. Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes, Berlin, 1953.

Книга содержит обзор развития математики от древнейших времен до XVII в. Излагается содержание арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми и дается их оценка.

172. Honigmann E. Die sieben Klimata. Heidelberg, 1929.

В книге о древней и средневековой географии большое внимание уделено «Книге картины Земли» ал-Хорезми.

173. Hunke S. Allahs Sonne über den Abendland — Unser arabische Erbe. Stuttgart, 1960.

Книга посвящена культурным контактам средневековой Европы и стран Ближнего и Среднего Востока. Приводятся сведения об ал-Хорезми, его научных трудах и о влиянии последних на развитие европейской математики.

174. Hunke S. Al-Hwārismi. In: Die Groβen der Weltgeschichte, Bd. 3, Zürich, 1973, S. 52—64.

В популярном очерке жизни и деятельности ал-Хорезми дается также представление о состоянии культуры и науки его времени. Ссылок на первоисточники нет. Встречается много произвольных утверждений (например, о том, что ал-Хорезми родился в Кутруббуле) и неточностей. При рассмотрении математических трудов ал-Хорезми автор полностью опирается на книгу М. Кантора [116].

175. Hunrath K. Zum Verständnis des Wortes Algorismus. «Bibliotheca mathematica», F. 2, Bd. 1, 1887, S. 70.

Приведена цитата из сочинения XVI в., в которой говорится, что «искусство счисления» названо «алгорисмом» по имени «философа Алгорисма». Автор видит в ней доказательство того, что первоначальное значение этого термина не было забыто в средневековой Европе, как иногда утверждают историки математики.

176. Ibn Khaldun. The Muqaddimah or Introduction to history. Transl. F. Rosenthal. London, 1958, vol. 1—2.

В своем «Введении в историю» знаменитый арабский историк Ибн Халдун (1322—1406 гг.) говорит об ал-Хорезми как о первом ученом, написавшем алгебраическое сочинение на арабском языке.

176а. Ibn al-Qifti. Ta'rich el hukama. Ed. J. Lippert and A. Müller. Berlin, 1903.

В сочинении «История мудрецов» Ибн ал-Кифти (1172—1227 гг.) приводятся сведения о жизни и деятельности ал-Хорезми.

177. Islamic and Arab contribution to European Renaissance. Cairo, 1977.

Книга посвящена влиянию культурного и научного наследия народов стран ислама и, в частности, арабов на культуру европейского Возрождения.

178. Jâqût. Geographisches Wörterbuch, Hrsg. F. Wüstenfeld. Bd. 1—6, Leipzig, 1866—1873.

В «Географическом словаре» знаменитого географа и историка Йакута (1179—1229 гг.) имеются ссылки на ал-Хорезми (т. I, с. 16).

179. Jauiche Kh. Mathématiques arabes, «Atomes», t. 20, 1965, No. 225, p. 277—283.

Дана краткая характеристика математического наследия народов арабоязычного Востока.

180. Juschkewitsch A. P. Über ein Werk des Abū 'Abdallah Muhammad ibn Mūsā al-Huwārizmī al Mağusī zur Arithmetik der Inder. «Schriftenreihe Geschichte der Naturwissenschaften. Technik und Medizin», Beiheft, 1964. S. 21—63.

Работа представляет собой переработанный и расширенный вариант статьи А. П. Юшкевича об арифметическом трактате ал-Хорезми, опубликованный на русском языке в 1954 г. [91]. Содержит факсимиле текста.

181. Juschkewitsch A. P. Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig, 1964.

Немецкий перевод книги А. П. Юшкевича [92].

182. Juškevič A. P. Dějiny mathematiky ve středověku. Praha. Academia, 1977.

Чешский перевод книги [92].

183. Juschkewitsch A. P., Rosenfeld B. A. Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter. «Sowjetische Beiträge zur Geschichte d. Naturwiss»., hrsg. G. Harig. Berlin, 1960.

Немецкий перевод статьи [93].

184. Karpinski L. Ch. Robert of Chester's translation of Algebra of Al-Khowarizmi. «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd. XI, H. 2, 1911, p. 125—131.

Сообщаются предварительные сведения о латинском переводе «Алгебры» ал-Хорезми, выполненном в 1145 г. Робертом Честерским. Текст этого перевода и основательное исследование сочинения ал-Хорезми автор опубликовал в 1915 г. [10]; работа переиздана в 1930 г.

185. Karpinski L. Ch. Robert of Chester's Latin Translation (1145) of the Algebra of Al-Khowarizmi. New York, 1915.

Работа представляет собой комментированное издание латинского перевода «Алгебры» ал-Хорезми, принадлежащего Роберту Честерскому. Во введении, которое содержит серьезное исследование о роли ал-Хорезми в истории алгебры, рассматриваются вопросы: 1) алгебраический анализ до ал-Хорезми; 2) ал-Хорезми и его трактат об алгебре; 3) Роберт Честерский и другие переводчики с арабского языка на латынь; 4) влияние «Алгебры» ал-Хорезми на развитие математики; 5) арабский текст и переводы «Алгебры» ал-Хорезми.

186. Karpinski L. Ch. Robert of Chester's Latin Translation (1145) of the Algebra of Al-Khowarizmi, In· L. Ch. Karpinski and J. G. Winter. Contributions to the history of science. Ann. Arbor, 1930.

Переиздание предыдущей работы.

187. Karpinski L. Ch. The «Quadripartitum numerorum» of John of Meurs. «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd XI, 1910/1911, p. 125—131.

В статье, посвященной математическому трактату французского ученого Жана де Мер (ок. 1310 — ок. 1360 г.), показано, что он испытал непосредственное влияние «Алгебры» ал-Хорезми.

188. Karpinski L. Ch. Origines et développement de l'algébre. «Scientia», t. 26, 1919.

В статье, посвященной происхождению и развитию алгебры, значительное внимание уделяется сочинению ал-Хорезми.

189. Karpinski L. Ch. Two twelfth century Algorisms. «Isis», vol. 3, 1921, p. 396—413.

Отмечено, что для изучения истории арифметики в Европе чрезвычайно интересны ранние латинские сочинения по «алгорисму», базирующиеся на арифметическом трактате ал-Хорезми.

Дается обзор известных сочинений такого рода и приводится текст анонимного трактата, относящегося к XII в.

190. Karpinski L. Ch. The History of Arithmetic. Chicago—New York, 1925.

В курсе истории арифметики большое внимание уделено творчеству ал-Хорезми.

191. Karpinski L. Ch. An Anglo-Norman Algorism of the fourteenth century. «Isis», vol. 23, 1935, p. 121—151.

Статья относится к ряду работ того же автора, которые посвящены европейским сочинениям XII—XV вв. об «алгорисме», представляющим собой обработки арифметического трактата ал-Хорезми.

192. Karpinski L. Ch., Waters E. G. R. A thirteenth century algorism in French verse. «Isis», vol. 11, 1928, p. 45—85.

Рассматривается французский стихотворный трактат по «алгорисму», относящийся к XIII в.

193. Karpinski L. Ch., Waters E. G. R. A fifteenth century French algorism from Liège. «Isis», vol. 12, 1929, p. 194—235.

Исследован французский трактат по «алгорисму» XV в.

194. Kaunzner W. Über einen frühen Nachweis zum symbolischen Algebra. Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra. Wien, 1975.

Глубоко исследован латинский алгебраический трактат XII в., принадлежащий, по-видимому, Герардо Кремонскому и опубликованный в 1859 г. Б. Бонкомпаньи. Использована новая рукопись. Приводится основательный обзор литературы о средневековой европейской алгебре и в особенности — о латинских переводах трактата ал-Хорезми и их обработках.

195. Kennedy E. S. A survey of Islamic astronomical tables. «Transactions of the Amer. Philos. Soc.», New Ser., vol. 46, part 2, 1956.

В фундаментальном исследовании, в котором дается подробный обзор сведений об известных в настоящее время средневековых арабских и персидских астрономических таблицах — зиджах, приводятся (с. 128, 148—151) данные о зидже ал-Хорезми в сравнении с другими сочинениями этого рода.

196. Kennedy E. S. Al-Khwārizmī on the Yewish calendar. «Seripta mathematica», vol. 27, 1962, No. 1, p. 55—59.

Изложены результаты исследования трактата ал-Хорезми о еврейском календаре.

197. Kennedy E. S., Janjanian M. The crescent visibility table in Al-Khwārizmī's Zīj. «Centaurus», vol. 11, 1965, No. 2, p. 73—78.

Исследуются (с помощью ЭВМ) таблицы видимости молодого месяца, рассматриваемой как функция градуса эклиптики (22-я глава зиджа ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити). Показано, что эти таблицы составлены для долготы Мадрида.

198. Kennedy E. S., Ukashah W. Al-Khwārizmī's planetary latitude tables. «Centaurus», vol. 14, 1969. No. 1, h. 86—96.

Рассматриваются и проверяются таблицы широт планет из зиджа ал-Хорезми в версии ал-Маджрити. Во введении дана оценка зиджа, перечислены средневековые комментарии к нему и современные публикации. Далее описана индийская модель для широт планет и показано, что в версии ал-Маджрити одна группа таблиц соответствует этой модели, а во второй данные отличаются на постоянный множитель. Высказано предположение, что таблицы широт не входили в первоначальный зидж, а были добавлены ал-Маджрити.

199. Kennedy E. S. Recension: Ibn al-Muthannā's commentary on the astronomical tables of al-Khwārizmī. «Journal of the American Oriental Society», vol. 89, 1969, 297—298.

Работа представляет собой рецензию на издание [9] комментариев Ибн ал-Мусанны к зиджу ал-Хорезми.

200. Kennedy E. S. The Arabic heritage in the exact sciences. «Al-Abhath», vol. 23, 1970, No. 1—4, 327—344.

В статье, посвященной анализу арабского наследия в области точных наук, рассматриваются сочинения ал-Хорезми и дается их оценка.

201. Kennedy E. S., Faris N. The Solar eclipse technique of Yaḥyā b. Abī Manṣūr. «Journal for the History of Astronomy», vol. 1, 1970, p. 20-33.

В работе, посвященной астрономическому труду Йахьи ибн аби Мансура, современника ал-Хорезми, рассматриваются некоторые разделы его зиджа.

202. Kennedy E. S., Krikorian-Preisler H. The astrological doctrine of projecting the rays. «Al-Abhath», vol. 25, 1972, No. 1—4, p. 3—14.

Рассматривается астрологическое учение о «проекции лучей», излагаемое в средневековых арабских зиджах, в том числе в зидже ал-Хорезми.

203. Kennedy E. S. The exact sciences in Iran from the Arab invasion to the Saljuqs. In: The Cambridge History of Iran, vol. 4, Cambridge, 1975, 378—395.

Работа представляет собой раздел многотомной истории Ирана и посвящена развитию точных наук на Ближнем и Среднем Востоке от

арабского завоевания до эпохи Сельджуков. Рассматриваются труды ал-Хорезми и дана оценка их значения.

204. Kinge H. S. The background of astronomie. London, 1957.

В курсе истории астрономии определенное место отведено творчеству ал-Хорезми в этой области науки (с. 129—130).

204a. Knuth D. E. Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science. In: Lecture Notes in Computer Science, 122. Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science. Proceedings. Urgench. Uzbek SSR, September 16—22, 1979. Berlin—Heidelberg—New York, 1981, p. 82—99.

Вводная часть доклада содержит очерк жизни и деятельности ал-Хорезми и обзор его сочинений (со ссылками на новейшую литературу).

205. Kremer A. Kulturgeschichte des Orients unter der Chalifen. Wien, 1877.

Дана развернутая картина культурной жизни арабского халифата. В главе о науке и литературе в числе других математиков и астрономов упоминается ал-Хорезми и отмечается значение его арифметического и алгебраического трактатов для дальнейшего развития науки.

206. Kropp G. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Mannheim — Zürich, 1969.

В общем курсе истории математики автор уделяет значительное внимание арифметическому и алгебраическому трактатам ал-Хорезми.

207. Leonardo Pisano. Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo, publicati da Baldassare Boncompagni, vol. I, Liber Abaci, 1857.

Этот том сочинений знаменитого итальянского математика XIII в. Леонардо Пизанского содержит его «Книгу абака», в которой сказывается непосредственное влияние трудов ал-Хорезми и даны ссылки на его алгебраический трактат.

208. Le Strange G. Baghdad during the Abbasid caliphate from contempo rary Arabic and Persian sources. London, 1900.

На основании средневековых арабских и персидских источников автор дает подробное описание Багдада эпохи ал-Хорезми.

208a. Levey M., Petruck M. Kushyar ibn Labban. Principles of hindu reckoning. A translation with introduction and notes of Kitāb fī uṣūl ḥisāb al-hind. Madison and Milwaukee, 1965.

Английский перевод трактата об индийской арифметике Кушиара ибн Лаббана ал-Джили (ок. 1000 г.), непосредственно продолжившего традицию ал-Хорезми. Во введении дано сравнение обоих трактатов. См. также сочинения ал-Уклидиси [258] и ан-Насави [67].

209. Levey M. The Algebra of Abu Kamil. Madison — Milwaukee — London, 1966.

Во вводной статье к изданию «Алгебры» Абу Камила (ок. 850—930 гг.) проводится ее сравнение с алгебраическим трактатом ал-Хорезми, являющимся основой рассматриваемого сочинения. Абу Камил ссылается на ал-Хорезми как на своего предшественника (с. 28).

210. Libri G. Histoire des sciences mathématiques en Italie, t. I, Paris, 1838.

В курсе истории математики в Италии, принадлежащем известному историку науки XIX в. Г. Либри, приводится текст латинской версии «Алгебры» ал-Хорезми, а также затрагивается вопрос о влиянии его трудов на развитие математики в Европе.

211. Loria G. Storia delle mathematiche, t. I—II. Torino, 1929—1933.

В общем курсе истории математики содержится раздел об арифметическом и алгебраическом трактатах ал-Хорезми.

212. Lucas de Burgo, Sancti Sepulcro. Summa arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita, Venice, 1494; Benaco, 1523.

В сочинении виднейшего итальянского математика XII в. Луки Пачоли (1445—1514 гг.) «Сумма по арифметике, геометрии, отношениях и пропорциональности» в разделах о практической арифметике и алгебре (которую он называет «большое искусство», «правило неизвестной» или «Algebra e Almucabala») сказывается влияние арабоязычной математики.

213. Luckey P. Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters. «Forschungen und Forschritte», Jg 24, 1948. No. 17/18, S. 15—75.

Дается обзор достижений математиков средневекового Ближнего и Среднего Востока в области арифметики и алгебры. Отмечено значение трудов ал-Хорезми.

214. Luckey P. Die Rechenkunst bei Gamšīd b. Mas'ūd al kašī mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens. Wiesbaden, 1951.

Данная работа П. Люкея представляет собой наиболее серьезное за последние десятилетия исследование по истории арифметики на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. В нем впервые было изучено и по достоинству оценено сочинение «Ключ арифметики» самаркандского ученого ал-Каши (XV в.). В очерке развития арифметики до ал-Каши значительное внимание уделено трактату ал-Хорезми.

215. Maracchia S. Equazioni di secondo grado in Mohammed ben Musa al-Khuwarizmi. «Archimede», t. 29, 1977, No. 4, 244—250.

Рассматриваются правила решения квадратных уравнений, приведенные в алгебраическом трактате ал-Хорезми.

216. Maroth M. Die arabische geographische Literatur als Qulle zur Kenntnis Zentral-Asiens. In: Prolegomena to the sources on the history of pre-islamic Central Asia, ed J. Harmatta. Budapest, 1979, p. 249—255.

Дан анализ сведений о Средней Азии, которые приводятся в арабской средневековой географической литературе. Особое значение придается «Книге картины Земли» ал-Хорезми и его карте, дающей самое раннее в этот период описание обитаемой части земли.

217. Marre A. Le Messahat de Mohammed ben Moussa, extrait de son Algèbre, trad. et annot. «Nouvelles annales de mathèmatiques», t. V, 1846, p. 557—581; 2eme ed: «Annali di matem.», t. 7, 1866, p. 268—280.

Публикация французского перевода раздела о геометрии из алгебраического трактата ал-Хорезми [4] сопровождается комментариями, имеющими самостоятельное историко-научное значение.

218. Mas'udī. Les Prairies d'or. Texte et traduction par C. Barbier de Meynard et Pavet de Courteille, t. I. Paris, 1861.

Книга содержит французский перевод сочинения «Золотые луга» ученого X в. ал-Мас'уди, в котором приводятся (с. 11) сведения об ал-Хорезми.

219. Maula E. J. Algorisms and Arabs: another antecendent. Abstracts of Session Papers of the Second Int. Symposium for the History of Arabic science. Aleppo, 1979, p. 67—69.

Рассматривается вопрос о применении алгоритмов в математике и астрономии в период, предшествующий ал-Хорезми.

220. Mieli A. La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondial Leyden. 1938. 2eme ed: Leyden, 1966.

Приводятся сведения об ал-Хорезми, обсуждаются его математические труды и дается оценка его роли в развитии математики с привлечением обширной литературы, посвященной ему.

221. Millàs Vallicrosa J. Esttudion sobra historia de la ciencia española. Barcelona, 1949.

Книга, посвященная истории науки в Испании, содержит много важного материала о средневековых переводах восточных сочинений на латинский язык. Рассматриваются, в частности, комментарии Масламы ал-Маджрити и Ибн Мусанны к зиджу ал-Хорезми, его сочинения об астрономических инструментах и др.

222. Millás Vallicrosa J. M. La corriente de las traducciones cientificas de origin oriental hasta fines del sigio XIII. «Journal of world history», vol. 2, 1954—1955, p. 395—428.

Рассматриваются латинские переводы с арабского языка, выполненные до XIII в. Дана оценка значения этих переводов для истории науки. Особо выделены латинские версии сочинений ал-Хорезми.

223. Millás Vendrelle E. El. comentario de Ibn al-Mutannā a las Tables astronómicas de al-Jwārizmī. Madrid — Barcelona, 1963.

Книга представляет собой издание средневекового латинского перевода комментария Ибн ал-Мусанны к зиджу ал-Хорезми (ср. [160]).

224. Mohammad Abdul Malik. Abstract concepts in mathematics and algebra of al-Khowārizmī. Abstracts of Session papers of the Second Int. Symposium for the History of Arabic Science. Aleppo, 1979, p. 43.

Рассматривается алгебраический трактат ал-Хорезми и оценивается его роль в истории алгебры.

225. Montaser Abdul Halim. Natural sciences. In: Islamic and Arab contribution to the European Renaissance. Cairo, 1977.

В кратком очерке истории науки в арабско-мусульманских странах отмечается важное значение арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми для развития математики.

226. Montucla J. E. Histoire des mathématiques, t. 1—2. Paris, 1758, 1802.

Книга представляет собой один из наиболее ранних курсов истории математики. В ней дан обзор достижений «арабской» науки, составленный на основании известных в XVIII в. средневековых источников (например, «Истории династий» Абу-л-Фараджа). Ж.-Э. Монтюкла отметил важную роль ученых круга ал-Ма'муна в развитии астрономии и, в частности, привел результаты наблюдений, проведенных ими в Багдаде и Дамаске, описал измерение градуса меридиана на равнине Синджар и т. д. Среди «людей, выдающихся в этих науках» он выделяет Мухаммада ибн Мусу, «хорезмийца, который составил астрономические таблицы, высоко ценившиеся в течение долгого времени» (с. 359), а также занимался сферической тригонометрией (с. 360, 373). Об арифметическом трактате ал-Хорезми автор, видимо, не знал, так как не упомянул его, обсуждая вопрос о происхождении «арабских» цифр и о влиянии арабоязычной научной литературы на европейскую математику.

227. Mortet V. Le plus ancien traité français d'algorisme. «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd. IX, 1909, s. 55—64.

Приводится текст раннего французского трактата об «алгорисме» (XIII в.), изданный на основании нескольких рукописей. Сочинение представляет интерес с точки зрения истории распространения в Европе десятичной позиционной системы счисления.

228. Mžik H. Ptolemaeus und die Karten der arabischen Geographen. «Mitteil. d. K. Geogr. Gesellschaft in Wien», Bd. 58, 1915, S. 152—176.

Сообщается о географической карте из «Книги картины Земли» ал-Хорезми и проводится сравнение с картой Птолемея.

229. Mžik H. Africa nach der arabischen Bearbeitung der Geographike hyphegesis des Claudius Ptolemaeus von Muh. ibn Mūsā al-Hwārizmī. Hrsg., übers. u. erklärt von H. von Mžik. (Keis. Akad. d. Wiss. in Wien. philos.-hist. Kl., Denkschriften, Bd 59, Abh. 4). Wien, 1916.

Исследована географическая карта Африки по «Книге картины Земли» ал-Хорезми.

230. Mžik H. Das «Buch der Abbildung der Länder», Handschrift der Hofbibliothek in Wien. «Mitteil. d. K. Geogr. Gesellschaft in Wien», vol. 62, 1919, S. 145—149.

Дано описание персидской рукописи «Книги картины Земли», относящейся к XVII в. (находится в Вене).

231. Mžik H. Das Kitāb sūrat al-ard des Abū Ǧa'far Muhammad ibn Mūsā al-Huwārizmī. Hrsg. nach dem handschriftlichen Unikum der Bibliothèque de l'université et régionale in Strassburg (cod. 4247). Leipzig, 1926.

Статья, сопровождающая полное издание арабского текста географического труда ал-Хорезми, содержит основательное исследование этого сочинения.

232. Mžik H. Parageographische Elemente in den Berichten der arabischen Geographen über Südostasien. In: Beitrage zur historischen Geographie Kulturgeographie, Ethnographie und Kartographie, vornemlich des Ostens, Ed. H. Mžik, Leipzig — Wien, 1929, S. 172—202.

Исследована карта юго-западной Азии из «Книги картины Земли» ал-Хорезми.

233. Mžik H. Beiträge zur Kartographie Albaniens nach orientalische Quellen. In: «Geologica Hungarica», Series geologica, t. III, 1929, S. 625—649.

Проведено исследование части географической карты ал-Хорезми, относящейся к Албании.

234. Mžik H. Osteuropa nach der arabischen Bearbeitung der Geographike hyphegesis des Klaudios Ptolemaios von Muḥammad ibn Mūsā al-Huwārismī. WZKM, 1936, S. 161—193.

Проведено исследование части географической карты ал-Хорезми, относящейся к Восточной Европе.

235. An-Nadīm. Kitāb al-Fihrist, von Abū'l—Farağ Muḥammed b. Isḥāq, bekannt unter dem Namen Ibn Abī Ja'qūb el-Nadīm, herausgegeben von G. Flügel, J. Roediger und A. Müller, Bd. 1—2. Leipzig, 1871—1872.

В издании арабского текста «Указателя наук» (фихрист ал-'улум) — биобиблиографического труда ученого 2-й половины X в. ан-Надима в разделе о математиках и астрономах приводятся сведения об ал-Хорезми, самые ранние в арабской средневековой литературе (т. I, с. 271). Этот раздел опубликован в немецком переводе Г. Зутером [288].

236. Nagl A. Über eine Algorismus—Schrift des XII. Jahrhunderts und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im Christlichen Abendlande.— «Zeitschrift für Mathematik und Physik». Hist.-litt. Abteilung, Bd 34, 1889, S. 129—146, 161—170.

В исследовании о распространении в Европе «индийской» арифметики, основанном на изучении анонимного трактата XII в., отмечено долго бытовавшее предположение, что западные народы познакомились с индоарабскими цифрами и методами счета с их применением только благодаря «Книге абака» Леонардо Пизанского (XIII в.). Однако в действительности освоение этих методов началось в Европе столетием раньше. Правильность такого вывода подтверждается анализом рассматриваемого трактата. Сочинение посвящено астрономии, но во вводной части дан обзор основных положений квадривиума, в том числе «индийской» арифметики, т. е. «алгорисма». Приводится фрагмент текста этого раздела из наиболее ранней существующей рукописи 1143 г., хранящейся в Вене. См. [96].

237. Nallino C. A. Al-Khuwarizmi et son remaniement de la Géographie. «Bull. de la Société Khédivale de Géographie», IV sér., No. 8, Cairo, 1896, p. 525—543.

В первом основательном исследовании «Книги картины Земли» К. Наллино предположил, что ал-Хорезми основывался при написании трактата на географической карте Птолемея в сирийской версии.

238. Nallino C. A. Al-Huwarismi e il suo rifacimento della Geografia di Tolomeo (Surat al-ard). Roma, 1896; 2 ed. in: Nallino C. A. Raccolta di scritti editi e inediti, vol. 5. Roma, 1944, p. 458—532.

В итальянском варианте предыдущей работы рассматривается вопрос о ранних арабских обработках географического труда Птолемея. Приводятся данные средневековых источников о жизни и трудах ал-Хорезми.

239. Nallino C. A. 'Ilm al-falak. Roma, 1911—1912.

Дан обзор истории астрономии в странах ислама в средние века (на арабском языке), до настоящего времени считающийся лучшей работой такого рода.

240. Nallino C. A. Storia dell' Astronomia presso gli Arabi nel Medio Evo. In: Nallino C. Raccolta di scritti editi e inediti, t. 5, Roma, 1944, p. 88—329.

Итальянский вариант предыдущей работы.

241. Nallino C. A. Biografie di astrologi e astronomi arabi. In: Nallino C. A. Raccolta di scritti editi e inediti, t. 5. Roma, 1944, p. 330—344.

В статье, содержащей очерки жизни и деятельности наиболее выдающихся астрономов и астрологов Ближнего и Среднего Востока, а также арабоязычной Испании, приводятся (с. 331) сведения об ал-Хорезми и его трудах.

242. Nasr S. H. Science and civilization in Islam. Cambridge, 1968.

В книге, посвященной достижениям науки и культуры стран ислама в средние века, значительное внимание уделено ал-Хорезми. Автор называет его «первым выдающимся мусульманским математиком, с которого собственно начинается история этого предмета у мусульман» (с. 45). Приводится биографический очерк, сообщаются сведения о деятельности ал-Хорезми в Багдадской обсерватории (с. 80), коротко рассматриваются его географический труд (с. 100) и математические трактаты (с. 148—149).

243. Nesselmann G. H. F. Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra. Berlin, 1842.

Курс истории алгебры Т. Нессельмана, обобщающий все сведения, которыми наука располагала к середине XIX в., представляет и в наши дни большой интерес как из-за обилия изложенного материала, так и по идейному содержанию. В 1-й главе, которая посвящена историографии вопроса, автор приводит сведения об ал-Хорезми и исправляет ошибочные суждения о нем других историков математики (например, М. Шаля [123], который спутал его с Абу Джа'фаром ибн Мусой ибн Шакиром, и Ж.-Э. Монтюкла [226], неточно цитирующего высказывания Кардано об ал-Хорезми). Рассматривается алгебраический трактат ал-Хорезми и определяется его место в истории алгебры.

244. Neugebauer O. The exact sciences in antiquity. Copenhagen, 1951; 2d ed.: Copenhagen, 1957.

См. аннотацию к русскому переводу книги [68].

245. Neugebauer O., Schmidt O. Hindu astronomy in Newminster in 1428. «Annals of science», vol. 8, 1952, p. 221—228.

Рассматривается, в частности, вопрос о зависимости зиджа ал-Хорезми от индийских астрономических таблиц.

246. Neugebauer O. The transmission of planetary theories in Ancient and Medieval astronomy. «Scripta mathematica», vol. 22, 1956, p. 165—192.

В статье, посвященной преемственности астрономических учений в древности и в средние века, обсуждается форма, которую греческая теория эпициклического движения планет приняла в Индии, а затем в зидже ал-Хорезми.

247. Neugebauer O. The astronomical tables of al-Khwarizmi. Historisk-filosofiske Skrifter udgivet af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Bind 4, nr. 2. Kobenhavn, 1962.

Перевод на английский язык латинской версии астрономических таблиц ал-Хорезми, критическое издание которой осуществлено в 1914 г. Г. Зутером на основе предварительной обработки Бьёрнбо и Бестгорна (см. [20, 23]), снабжен исчерпывающими комментариями, представляющими собой важное исследование по истории астрономии и математики.

248. Pingree D. 'Ilm al-hay'a. The Encyclopaedia of Islam, New ed., vol. III, fasc. 57—58, 1970, p. 1135—1138.

Данный обзор развития астрономии в странах ислама в средние века основан на классификации арабско-персидской астрономической литературы. Автор выделяет: 1) переводы с санскрита; 2) переводы с пехлеви; 3) переводы с греческого и сирийского языков; 4) традицию Птолемея; 5) традицию «синдхинд», представляющую собой соединение сасанидских и греческих элементов с материалом из сочинений индийских астрономов. Наиболее влиятельным представителем последней традиции назван зидж ал-Хорезми.

249. Pingree D. The Greek influence on early islamic mathematical astronomy. «Journal of the Amer. Orient. Soc.», vol. 93, 1973, p. 32—43.

Рассматривается вопрос о проникновении греческой математической астрономии в средневековую науку стран Ближнего и Среднего Востока. Среди первых арабских зиджей, основанных на индийской традиции, указан «Зидж Синдхинд» ал-Хорезми, которого автор называет наиболее известным в настоящее время ученым круга ал-Ма'муна.

250. Prell H. Die Vorstellungen des Altertums von der Erdumfangslänge. Berlin, 1959.

Работа посвящена методам определения длины земного экватора в древности и в средние века. Наряду с другими описано измерение градуса меридиана, проведенное багдадскими учеными IX в., в котором, вероятно, принимал участие ал-Хорезми.

251. Rashed R. Recommencements de l'algèbre aux XI^e et XII^e siècles. In: The cultural context of medieval learning. Ed. by J. E. Murdoch and E. D. Sylla. Dordrecht—Boston, 1975, p. 33—60.

Автор статьи считает неверным общепринятое деление истории алгебры на три этапа: 1) алгебра квадратных уравнений, представленная ал-Хорезми и другими средневековыми математиками; 2) решение кубических уравнений (Европа, XVI в.); 3) применение алгебры к геометрии (Декарт). По его мнению, развитие алгебры в двух последних направлениях началось уже в X—XI вв. (работы ал-Караджи, ас-Самав'ала, Омара Хайяма и др.).

252. Reinaud J. T. Mémoire géographique, historique et scientifique sur l'Inde antérieurement au milieu du XI^e siècle de l'ère chrétienne. «Mémoire du l'Académie des Inscriptions et belles Lettres de France», t. XVIII, 2, 1845.

В работе, представляющей собой одно из ранних и наиболее важных исследований по истории науки Индии в ее связях с культурой и наукой других народов, затронуты вопросы истории математики в средние века. Ж. Рейно (1795—1867 гг.) коснулся, в частности, этимологии слова «алгоритм», которое в XIX в. чаще всего толковали как соединение арабского «ал» и греческого «аритмос» (число), а появление буквы «г» объясняли искажением, допущенным переписчиками латинских рукописей. Он указал на правильное происхождение слова «алгоритм» от имени ал-Хорезми. С тех пор это единственно верное толкование термина стало общепринятым.

253. Rodet L. L'Algèbre d'Alkarizmi et les méthodes indiens et grecques. «Journal asiatique», sér. 7, t. 11, 1878, p. 5—100.

Это исследование в основном посвящено вопросу об источниках «Алгебры» ал-Хорезми, который широко дискутировался историками математики второй половины XIX (Коссали [128], Колебрук [126], Либри [210], Розен [21], Седийо [275], Ганкель [164], Кантор [116]) и продолжает интересовать исследователей нашего столетия (Рушка [255], Карпинский [185], Гандц [154, 155], Анбуба [98], Тумер [298] и др.). Автор не признает индийского влияния на сочинение ал-Хорезми и отдает полное предпочтение греческим корням его алгебры. Работа сыграла важную роль в изучении средневековой алгебры и путей ее развития.

254. Rohr R. R. J. Sonnenuhr und Astrolabium im Dienste der Moschee. «Centaurus», vol. 18, 1973, No. 1, S. 44—56.

Описаны методы практического применения солнечных часов и астролябии — астрономических инструментов, которым посвятил специальные трактаты ал-Хорезми.

255. Ruska J. Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst. «Sitzungsberichte Heidelberger Akad. der Wissenschaften», phil.—hist. Klasse, Jhg 1917, Abh. 2. Heidelberg, 1917.

В наиболее основательном анализе «Алгебры» ал-Хорезми, базирующемся на оригинальном арабском тексте кембриджской рукописи, помимо уточнения перевода, сделанного Ф. Розеном [21, 22], Ю. Рушка рассматривает ряд важных вопросов истории алгебры на средневековом Востоке. Работа состоит из очерков, посвященных следующим проблемам: 1) название «Алгебры» Мухаммада ибн Мусы; 2) о его «Книге сложения и вычитания; 3) об арифметическом правиле «Regula sermonis»; 4) обзор содержания «Алгебры» Мухаммада ибн Мусы и оценка ее источников от Коссали до Кантора; 5) об истории арабских цифр; 6) о задачах на раздел наследства и первоначальном применении терминов «мал» и «шай»; 7) терминология квадратных уравнений; 8) о десятичной системе счисления; 9) названия арабских цифр; 10) глава о коммерческих вычислениях; 11) из главы об измерении; 12) «Алгебра» Мухаммада ибн Мусы как часть его научного наследия.

256. Ruska J. Zur Geschichte der arabischen Algebra und Rechenkunst. «Der Islam», Bd 9, 1919, S. 116—117.

Кратко изложены основные выводы предыдущей работы.

257. Sabra A. I. The exact sciences. In: The genius of Arab civilization.

В разделе статьи о точных науках, посвященном арифметике, дается классификация видов счета, применявшихся восточными вычислителями. Трактат ал-Хорезми отмечен как основное сочинение по «индийской» арифметике.

257a. Sabra A. I. 'Ilm al ḥisāb. In: Encyclopaedia of Islam, New ed., vol. 3, fasc. 57—58. Leiden—London, p. 1138—1141.

Дается характеристика «вычислительного искусства» (илм ал-хисаб), применяющегося на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Наряду с теоретической выделена практическая («индийская») арифметика и «первым учебником», в котором она изложена, назван арифметический трактат ал-Хорезми.

258. Saidan A. S. The earliest extant Arabic arithmetic: Kitāb al fusūl fī al-hisāb al-hindī of Abū al-Hasan Ahmad ibn Ibrahīm al-Uqlīdisī. Transl. by A. S. Saidan. Dordrecht—Boston, 1978.

Трактат ал-Уклидиси (X в.), текст которого опубликован в этой книге А. С. Саиданом по обнаруженной им рукописи, представляет собой наиболее раннее после ал-Хорезми сочинение об «индийской» арифметике на арабском языке. Существенно, что ал-Уклидиси ввел и применил десятичные дроби.

259. Saidan A. S. Arabic arithmetic. The arithmetic of Abū al-Wafā' al-Būzajānī, 10th century. Mss. Or. 103 Leiden and 42 M. Cairo. Edited with introduction, commentaries, and ample reference to the arithmetic of Al-Karajī (11 th century), Ms. 855 Istanbul. Amman, 1971 (entirely in Arabic).

Во вводном разделе книги (на арабском языке) дан очерк развития арифметики в арабских странах. Значительное внимание уделено трактату ал-Хорезми. Книга содержит комментированный арабский текст сочинений Абу-л-Вафы ал-Бузджани и ал-Караджи (частично), также сыгравших важную роль в истории арифметики.

260. Salam H., Kennedy E. S. Solar and Lunar tables in early islamic astronomy. «Journal of the Amer. Orient. Society», vol. 87, 1967, No. 4, p. 492—497.

В числе других рассматриваются таблицы из зиджа ал-Хорезми, представляющие движение Солнца и Луны.

261. Saliba G. A. The meaning of al-jabr wa'l-muqābala. «Centaurus», vol. 17, 1972, No 3, p. 189—204.

Автор подробно исследует этимологию терминов «ал-джабр» и «ал-мукабала», которые ал-Хорезми впервые ввел в математическую литературу. Рассматривается несколько алгебраических сочинений и выясняется математический смысл, придававшийся этим терминам разными авторами.

262. Sarton G. Adrian van Roomen's commentary on Al-Khwārizmī (c. 1598). «Isis», vol. 21, 1934, p. 209.

Задан вопрос, обращенный к историкам науки, которые изучают латинские научные рукописи: не сохранились ли в каких-либо библиотеках копии комментариев к «Алгебре» ал-Хорезми, которые написал выдающийся голландский математик А. ван Роумен около 1598 г. Рукопись, описанная А. Босманом [107], погибла во время войны 1914 г.

263. Sarton G. Introduction to the history of science, vol. 1. Baltimore, 1927.

В своем капитальном «Введении в историю науки» известный американский ученый Дж. Сартон дает сводку всех известных данных об ал-Хорезми, а также библиографию работ о нем, вышедших ко времени написания книги. «Эпохой ал-Хорезми» автор называет целый период истории науки — первую половину IX в.

264. Sayili A. The observatory in Islam and its place in the general history of the observatory. Ankara, 1960.

Книга представляет собой очерк истории астрономии в странах ислама и содержит сведения о деятельности всех известных средневеко-

вых астрономических обсерваторий на Ближнем и Среднем Востоке, в том числе и багдадской обсерватории периода ал-Хорезми.

265. Sayili A. Logical Necessities in Mixed Equations by 'Abd al Hamîd ibn Turk and the Algebra of his Time. Ankara, 1962.

Приводится арабский текст с переводом на турецкий и английский языки алгебраического трактата Ибн ат-Турка ал-Хуттали, современника ал-Хорезми. Публикация текста сопровождается статьей об истории алгебры в средние века. Автор считает, что Ибн ат-Турк написал сочинение по алгебре раньше, чем ал-Хорезми, и приходит к выводу о существовании более ранней традиции, которой они оба следовали и которая развивала прежде всего принципы греческой геометрической алгебры.

266. Sayili A. The Turcs and the sciences. Istanbul, 1976.

Повторяется высказанное в предыдущей работе утверждение о том, что первым мусульманским ученым, написавшим книгу об алгебре, был турецкий математик Ибн ат-Турк. Автор пишет, что и «Ал-Хорезми, возможно, был тюрком, так как его родиной был Хорезм, где тюрки составляли часть коренного населения» (с. 27).

267. Schmalzl P. Zur Geschichte des Quadranten bei den Arabern. München, 1929.

Работа посвящена конструкции и применению разных видов астрономического инструмента — квадранта, которым пользовались в эпоху ал-Хорезми.

268. Schoy K. Arabische Gnomonik. Hamburg, 1913.

Данное исследование крупного немецкого историка математики К. Шоя (1877—1925 гг.) положило начало внимательному изучению арабской гномоники. В числе первых арабоязычных авторов сочинений о солнечных часах назван ал-Хорезми. Приводятся сведения о нем и о других астрономах круга ал-Ма'муна, писавших о солнечных часах,— ал-Фаргани, ал-Марвази и др.

269. Schoy K. The geography of the Moslems of the Middle Ages. «The Geographical Review», No. 4, 1924, p. 257—269.

Рассматриваются вопросы средневековой восточной географии. Определяется содержание арабской географической литературы, базировавшейся в основном на «Географии» Птолемея и подразделявшейся на две группы: 1) труды описательного характера (записки путешественников и т. п.); 2) сочинения, связанные с математикой и астрономией. Рассматривается «Книга картины Земли» ал-Хорезми.

270. Schoy K. Längebestimmungen und Zentralmeridian bei den älteren Völkern. «Mitteil. d. K. K. Geogr. Gesellschaft», vol. 58, H. 1—2. Wien, 1915.

Обсуждается вызывавшая много споров проблема о центральном меридиане в арабоязычной географической литературе и о методах определения долготы места.

271. Schoy C. Erdmessungen bei den Arabern. «Zeitschrift d. Gesellschaft für Erdkunde», Bd. I— IV. Berlin, 1917, S. 431—445.

Рассматриваются методы геодезических исследований, описанные в арабской средневековой литературе. В частности, сообщается об измерении градуса меридиана при ал-Ма'муне.

272. Scott J. F. A history of mathematics. London, 1958.

В кратком очерке истории математики среди нескольких восточных ученых назван ал-Хорезми как «писатель, который оказал на математическую мысль большее влияние, чем любой другой писатель средневековья» (с. 61). Упомянуты его арифметический и алгебраический трактаты и их латинские переводы.

273. Sédillot J. J. Traité des instruments astronomiques des Arabes composé au treizième siècle par Aroul Hassan Ali de Maroc, t. 1—2. Paris, 1834.

В трактате ученого XIII в. ал-Мараккуши, французский перевод которого опубликовал в этой книге Ж. Ж. Седийо (1777—1832 гг.), приводятся важные для истории астрономии цитаты из нескольких арабских сочинений. Среди авторов трудов об астрономических инструментах, наряду с ал-Фаргани, ал-Баттани, Абу-л-Вафой ал-Бузджани и ал-Бируни, ал-Мараккуши называет ал-Хорезми.

274. Sédillot L. A. Mémoire sur les systèmes géographiques des Grecs et des Arabes, et en particulier sur Khobbet — Arine (la couple d'Arine) et Kankader, servant chez les Orientaux à déterminer la position du premier méridien dans l'énonciation des longitudes. Paris, 1842.

Подробно обсуждается долго остававшийся спорным вопрос о начальном меридиане в восточных географических сочинениях. Рассматривается, в частности, термин «Купол Арина», обозначавший место, от которого отсчитывались долготы, в сочинениях, написанных в «традиции Синдхинд».

275. Sédillot L. A. Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux, t. 1—2. Paris, 1845—1849.

Рассматривая проблему источников алгебры ал-Хорезми, Л. А. Седийо (1808—1875 гг.) присоединяется к сторонникам «греческой» теории, т. е. считает превалирующим влияние «Начал» Евклида и «Арифметики» Диофанта над индийским и другими влияниями.

276. Sezgin F. Geschichte des arabischen Schrifttums, Bd. I—VI. Leiden, 1967—1974.

В V и VI тт. многотомного труда, посвященного арабоязычной научной и философской литературе, Ф. Сезгин приводит сведения о жизни и трудах математиков и астрономов средневекового Востока, в том числе все имеющиеся сейчас данные об ал-Хорезми, его трудах и их рукописях.

277. Simon M. Zu Hwārizmī's hisāb al ǵabr wal muqābala. «Archiv der Mathematik und Physik», 3. Reihe, Bd 18, 1911.

Рассматривается вопрос о корнях «Алгебры» ал-Хорезми. Автор считает необоснованной точку зрения М. Кантора и др. о греческих истоках этого сочинения.

278. Smith D. E. Recension on: L. C. Karpinski. Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi. «Bull. of Amer. Math. Soc.», vol. 23, 1916, p. 44—46.

В рецензии на издание латинского перевода «Алгебры», принадлежащего Роберту Честерскому [10], обсуждается математическое творчество ал-Хорезми.

279. Smith D. E. History of mathematics, vol. I—II. Boston, 1923—1925; 2-nd ed., 1958.

В книге известного американского историка математики Д. Э. Смита в разделе, посвященном математике средневековья, даются обзор содержания и оценка арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми.

280. Smith D. E., Karpinski L. C. The Hindu-Arabic numerals. Boston—London, 1911.

Исследование истории «индо-арабских» цифр существенным образом связано с вопросом о распространении арифметического трактата ал-Хорезми.

281. Soussi M. Hisāb al-Ghubar. The Encyclopaedia of Islam, New ed., vol. 3, fasc. 47—48, 1967, p. 468—469.

В статье, посвященной одному из видов средневековой вычислительной техники — «вычислениям с помощью пыли», упоминается арифметический трактат ал-Хорезми, благодаря которому была введена запись чисел с помощью «индийских» знаков.

282. Steinschneider M. Die europaischen Übersetzungen aus dem Arabischen bis Mitte des 17. Jahrhunderts, «Sitzungsber. der Wiener K. Akad. d. Wissenschaften», phil-hist. Kl., Bd. 149, 1904; Bd. 151, 1905; 2-nd ed., 1966.

Сообщаются данные о средневековых латинских переводах научной литературы с арабского языка. Указаны переводы трудов ал-Хорезми и местонахождение рукописей.

283. Steinschneider M. Zum Speculum astronomicum des Albertus Magnus. «Zeitschr. für Mathematik und Physik», Bd 16, 1871, S. 386—396.

Среди сочинений восточных астрономов, на которые ссылается выдающийся средневековый ученый XIII в. Альберт Великий в астрономическом труде, рассматриваемом в данной статье, назван зидж ал-Хорезми (с. 376—377).

284. Struik D. J. A concise history of mathematics, vol. 1—2, New York. 1948; London, 1954.

См. аннотацию к русскому переводу [80].

285. Struik D. J. A source book in mathematics (1200—1800). Cambridge (Mass.), 1969.

В основательной, прекрасно изданной хрестоматии по истории математики в Европе с 1200 по 1800 гг. специальный раздел (с. 55—60) посвящен роли «Алгебры» ал-Хорезми в развитии европейской науки; приводится английский текст отрывков (по [10]), касающихся решения квадратных уравнений.

286. Sullivan J. W. N. The history of mathematics. London, 1925.

Дан общий обзор развития математики в Европе, отмечено влияние алгебраического трактата ал-Хорезми (с. 17) на ученых более позднего времени.

287. Suter H. Geschichte der mathematischen Wissenschaften, 2. Aufl., Bd 1—2, 1873—1875.

Данный курс истории математики (см. аннотацию к русскому переводу [54]) выдающегося исследователя арабоязычной научной литературы Г. Зутера (1848—1922 гг.) относится к его ранним работам. Поэтому раздел, посвященный математике средневекового Востока (5-я гл.), содержит лишь самые общие сведения о зидже ал-Хорезми и его алгебраическом трактате, почерпнутые главным образом из «Истории математики» Монтюкла [226].

288. Suter H. Das Mathematiker-Verzeichnis im Fihrist des Ibn Abī Ja'kūb an-Nadīm. «Abhandl, zur Gesch. d. math. Wiss»., H. VI, 1892, S. 1—87.

В работе, сыгравшей важную роль в изучении истории точных наук на Востоке, дан немецкий перевод раздела о математиках и астрономах из «Фихриста» ан-Надима [235] — наиболее раннего средневекового источника, содержащего сведения об ал-Хорезми (с. 29).

289. Suter H. Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, «Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss». H. X. Leipzig, 1900; Reprint, New York, 1972.

Сочинение библиографического характера до настоящего времени сохраняет значение важнейшего справочного издания при исследовании жизни и научной деятельности математиков и астрономов Ближнего и Среднего Востока, а также арабоязычной Испании, работавших с 750 по 1600 гг. Приводится список 528 ученых, сведения о них из средневековых источников, данные об их трудах и сохранившихся рукописях этих трудов, известные автору ко времени написания работы. Ал-Хорезми посвящен § 19 (с. 10—11).

290. Suter H. Nachträge und Berichtigungen zu «Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke». «Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss», H. XIV, 1902.

Работа содержит дополнения к предыдущей. Сообщаются также новые сведения об ал-Хорезми (с. 170—171) и, в частности, о его географическом труде, не приведенные в [289].

291. Suter H. Der Verfasser des Buches «Gründe der Tafeln des Chowarezmi». «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd IV, 1903, S. 127.

Высказано предположение, что автором сочинения «Основания таблиц Хорезми», известного по средневековому еврейскому переводу Ибн Эзры, является ал-Бируни. Зутер исходил из того, что ал-Бируни не раз комментировал труды ал-Хорезми. В настоящее время установлено, что указанное сочинение в действительности принадлежит испанскому ученому Ибн ал-Мусанне (см. [9, 15]).

292. Suter H. Über das Rechenbuch des Ali ben Ahmed el-Nasawi, «Bibliotheca mathematica», F. 3, Bd VII, 1906—1907.

Рассматривается арифметический трактат ан-Насави, написанный в традиции ал-Хорезми и тесно к нему примыкающий (см. русский перевод [67]). Г. Зутер продолжает исследование Ф. Вёпке, который в 1863 г. дал краткий обзор трактата.

293. Suter H. Die astronomischen Tafeln des Muhammad ibn Mūsa al-Khwarizmī in der Bearbeitung des Maslama ibn Ahmad al-Madjriti und der lateinische Ubersetzung des Athelhard von Bath Hrsg. und kommentiert auf Grund der Vorarbeiten von A. Björnbo und R. Besthorn. Copenhagen, 1914.

В издании латинской версии зиджа ал-Хорезми [23], которое Г. Зутер осуществил на основе подготовительной работы А. Бьёрнбо и Р. Бестхорна, приведены его комментарии и исследование, имеющие самостоятельное историко-научное значение. В частности, Г. Зутер подтвердил, что латинский перевод зиджа сделан не с оригинального труда, как считалось со времени открытия М. Шалем рукописи [125], но базируется на обработке Масламы ал-Маджрити

294. Suter H. Rezension von Ruska «Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst». «Archiv der Mathematik und Physik», 3, Reihe, Bd. 28, 1919.

В рецензии на работу [255] Г. Зутер обсуждает поднятые в ней проблемы, связанные с математическим творчеством ал-Хорезми. Он считает дискуссионными вопросы: 1) об идентификации трактатов «Об индийской арифметике» и «Об увеличении и уменьшении»; 2) о терминах «шай» и «мал» для обозначения неизвестной, которые часто употреблялись в одном и том же значении.

295. Suter H. Al-djabr wa'l-mukābala. Encyclopädie des Islam, Bd I, S. 1031.

В статье об алгебре в странах ислама большое внимание уделено алгебраическому трактату ал-Хорезми.

296. Swerdlow N. Al-Battani's determination of the Solar distances. «Centaurus», vol. 17, 1972, No. 2, p. 97—105.

Данные зиджа ал-Хорезми относительно угловой величины диаметра Солнца сравниваются с наблюдениями ал-Баттани.

297. At-Tabarī. Annales quos scripsit Abu Djafar Mohammed ibn Djarir at-Tabari. ed M. J. de Goeje, ser. I—III. Lugduni Batavorum, 1879—1890.

Издание содержит арабский текст и латинский перевод сочинения ат-Табари (839—923 гг.), в котором содержатся сведения об ал-Хорезми (сер. III, т. 2, с. 1085, 1363).

297a. Tartaglia N. General Trattato di numeri e misure. Venezia, 1560.

В своем сочинении «Общий трактат о числах и мере» выдающийся алгебраист XVI в. Н. Тарталья приписывает ал-Хорезми открытие алгебры. В заглавии шестой книги он определяет эту науку как «умозрительную практику великого искусства, прозванную по-арабски алгеброй и алмукабалой или правилом «вещи», изобретенную Мухаммадом, сыном Мусы, араба».

298. Toomer C. J. Al-Khwārizmī, Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsā. In: Dictionary of scientific biography, ed. Ch. C. Gillispie, vol. VII, New York, 1973, p. 358—365.

Содержится основательное исследование о жизни и творчестве ал-Хорезми, основанное на критическом анализе современных данных о его трудах. Обсуждаются вопросы, вызывавшие споры у историков науки (об источниках «Алгебры» и зиджа ал-Хорезми, датировка его сочинений и т. д.). Приводится обширная библиография.

299. Tropfke J. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter, Bd. I—III, 3. Aufl., Berlin—Leipzig, 1930—1940.

Излагается история отдельных дисциплин элементарной математики с преимущественным вниманием к развитию математической и, в частности, алгебраической символики. Отмечена роль ал-Хорезми в истории арифметики (т. I, с. 50, 94) и особенно алгебры (т. II, с. 135—136; т. III, с. 72—75, 205—206).

300. Tropfke J. Geschichte der Elementarmathematik. 4. Auflage. Bd. 1. Arithmetik und Algebra. Vollstandig neu bearbeitet von K. Vogel, K. Reich, H. Gericke. Berlin—New York, 1980.

Существенно дополненное издание I—III томов предыдущего труда И. Тропфке [299] представляет собой фактически новое руководство по истории арифметики и алгебры, в котором учтены все современные историко-научные данные.

301. Vernet J. Al-Khwārizmī. The Encyclopaedia of Islam, New ed., vol. 4, fasc, 77. 78, Leiden, 1978, p. 1070—1071.

Дается обзор имеющихся в настоящее время сведений об ал-Хорезми, его сочинениях и их влиянии на развитие математики и астрономии более позднего времени.

301a. Vernet J. L'astronomie dans l'Islam occidental. «Archives Intern. Hist. sci.», t. 16, 1963, No. 64, p. 225—240.

Работа, посвященная развитию астрономии в арабоязычной Испании, содержит данные о комментариях к зиджу ал-Хорезми, принадлежащих Масламе ал-Маджрити и Ибн ал-Мусанне.

302. Vogel K. Beiträge zur Geschichte griechischen Logistik, Teil I. München, 1936.

В обзоре развития греческой практической арифметики (логистики) известный современный историк математики К. Фогель затрагивает многие вопросы развития средневековой арифметики, прямо или косвенно касающиеся распространения арифметического трактата ал-Хорезми.

303. Vogel K. Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus. Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern. Aalen, 1963.

Новое издание средневекового латинского перевода арифметического трактата ал-Хорезми, осуществленное К. Фогелем [24], сопровождается исследованием этого сочинения.

304. Vogel K. Die erste deutsche Algebra aus dem Jahre 1481. Nach einer Handschrift aus C 80 Dresdensis herausgegeben und erklärt. München, 1981.

Изданию текста первого немецкого сочинения об алгебре, составленного в 1481 г., предпослано введение, в котором речь идет об истории алгебры в средневековой Европе и влиянии переводов трактата ал-Хорезми.

304a. Waerden B. L. van der. Das heliozentrische System in der griechischen, persischen und indischen Astronomie. Zürich, 1970.

Рассматривается проблема преемственности идей и взаимного влияния теории в греческой, персидской и индийской астрономии. Она связана с вопросом о зидже ал-Хорезми, его содержании и источниках.

304б. Waerden B. L. van der. Science awakening, II. The birth of astronomy. New York, Oxford University Press, 1974.

В книге, содержащей очерки ранней истории астрономической науки, затрагиваются вопросы, близкие к рассмотренным в предыдущей работе этого автора.

305. Wallis J. A Treatise on Algebra, both historical and practical. London, 1685.

В очерке истории алгебры — одном из первых сочинений такого рода, автором которого является выдающийся английский математик XVII в. Джон Валлис (1616—1703 гг.), дана высокая оценка роли ал-Хорезми. Валлис считает его основоположником алгебры.

305a. Wappler H. E. Zur Geschichte der deutschen Algebra in 15. Jahrhundert. Programm. Zwickau. 1887.

Приводятся сведения о рукописи латинского перевода алгебраического трактата ал-Хорезми, хранящейся в Дрездене.

306. Wieber R. Nordwesteuropa nach der arabischen Bearbeitung der Ptolemäjischen Geographie von Muhammad b. Mūsā al-Hwārizmī. Walldorf—Hessen, 1974.

Подведен итог исследований географического труда ал-Хорезми, проводившихся до настоящего времени; дан обзор основной литературы по этому вопросу и подробно рассматривается часть карты ал-Хорезми, представляющая северо-западную Европу.

307. Wiedemann E. Al-Khwarizmi, Muhammed b. Musa. Enzyklopaedie des Islam, Bd II, S. 978—979.

Приводятся сведения об ал-Хорезми и его трудах.

308. Wiedemann E. Über die Arithmetik nach Ibn al-Afkani. «Sitzungsberichte der phys.-med. Soz. in Erlangen», Bd 40, 1908, S. 29—37.

В связи с определением различных вычислительных приемов в энциклопедии ал-Афкани (XIV в.) рассматриваются методы «индийской арифметики», получившей распространение благодаря трактату ал-Хорезми.

309. Wiedemann E., Frank J. Zirkel zur Bestimmung der Gebetszeiten. «Sitzungsberichte der phys.-med. Soz. in Erlangen», Bd 52/53, 1922, S. 122—126.

В статье о циркуле, с помощью которого определялось время пятикратных мусульманских молитв, приводится немецкий перевод отрывка об этом инструменте из трактата ал-Хорезми о применении астролябии.

310. Wieleitner H. Die Erbteilungaufgaben bei Muhammed ibn Musa Alchwarizmi. «Zeitschrift für mathem. und naturwiss. Unterricht», Bd 53, 1922, S. 57—67.

Исследован раздел «Алгебры» ал-Хорезми, посвященный задачам о делении наследства, согласно мусульманскому каноническому праву.

311. Wieleitner H. Zur muslimischen und aegiptischen Gleichungsauflösung. «Archivio di storia di scienza», vol. VI, 1925, No. 1, p. 46—48.

В заметке о решении линейных и квадратных уравнений в древнеегипетской математике и средневековой алгебре стран ислама сравниваются методы ал-Хорезми и методы, известные из папируса Райнда.

312. Wieleitner H. Geschichte der Mathematik. Berlin—Leipzig, 1923.

В курсе истории математики затрагиваются вопросы, касающиеся трудов ал-Хорезми.

313. Wieleitner H. Mathematische Quellenbücher. I. Rechnen und Algebra. Berlin, 1927.

См. аннотацию к русскому переводу [2].

314. Woepcke F. Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident et sur deux documents importants publiés par le Prince don Balthasar Boncompagni. Roma, 1859.

В работе, посвященной анализу арифметического трактата ал-Хорезми, латинский текст которого был опубликован Б. Бонкомпаньи без комментариев в 1857 г. [5], Ф. Вёпке поставил ряд важных историко-научных проблем, сыгравших видную роль в изучении творчества ал-Хорезми.

315. Woepcke F. Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. «Journal asiatique», 6$^{\text{eme}}$ sér., t. I. Paris, 1863, p. 27—79, 234—290, 442—520.

В глубоком исследовании о внедрении индийских цифр в математику Ближнего и Среднего Востока и Европы рассматриваются вопросы об эволюции формы цифр, о вычислительных методах (ал-Хорезми, ан-Насави) и др. Приводятся отрывки из «Истории мудрецов» Ибн ал-Кифти о зидже ал-Хорезми (арабск. текст: с. 472—474, франц. перевод: с. 474—479) и из латинского перевода его арифметического трактата (с. 482).

316. Wüstenfeld F. Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische seit XI. Jahrhundert. «Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen», Bd. 22, 1877, S. 1—53.

Работа, посвященная латинским средневековым переводам арабских сочинений, содержит сведения о переводах трудов ал-Хорезми (с. 21—22).

317. Youschkevitch A. P. Les Mathématiques Arabes (VIII$^{\text{e}}$—XV$^{\text{e}}$ siècles). Trad. M. Cazenave et K. Jaouiche, préface de R. Taton. Paris, 1976.

Французский перевод раздела книги А. П. Юшкевича [92], посвященного математике стран ислама.

318. Zeuthen H. G. Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Kopenhagen, 1896.

См. аннотацию к русскому переводу [86].

319. Zemanek H. Al-Khorezmi His background, his personality, his work and his influence. «Lect. Notes Comput. Sci»., 1981, vol. 122, p. 1—81.

В докладе, прочитанном на посвященном юбилею ал-Хорезми симпозиуме «Алгоритмы в современной математике и компьютерной науке», который был проведен Академией наук Узбекской ССР в г. Ургенче 16—22 сентября 1979 г., рассказывается о жизни и трудах ал-Хорезми.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

СОДЕРЖАНИЕ